关于“非线性交调的频率设计”的评注
——A 题的解答和有关情况

谢 衷 洁
(北京大学概率统计系 100871)

一、问题的背景

A题是一道关于非线性交调的频率设计问题，其工程背景广泛存在于通信系统中．例如，人造卫星通信中的频率配置问题就与本题有关．众所周知，人造卫星转发器的能源大多依赖于太阳能，因而功率是非常有限的，而行波管放大器的输入输出关系便是非线性的，倘若要求工作在线性区域内则会使本来功率就非常有限的放大器的输出信号更加微弱．因此，为了获得最大的输出功率就要克服工作在非线性区域内带来的许多问题，其中之一就是由非线性(幅度、相位)引出的交扰调制 (Intermodulation)，简称交调．设想对非线性器件输入 $u(t)=\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t(f_1\neq f_2)$，而输入输出关系为 $y(t)=u(t)+u^2(t)$，则 $y(t)$的展式中不仅包含有原信号频率 f_1 和 f_2，而且包含有 $2f_1$，$f_1\pm f_2$ 等新的频率成分，称为交调．如果这些交调出现在 f_1 和 f_2 的接收带内就会形成干扰．工程设计中的一项任务就是在允许的范围内调整 (f_1,f_2)，使得各交调对信号不构成干扰，或者是弱干扰．

本题就是上述通信工程中频率设计问题的简化：将复杂的输入输出特性加以简化(也不考虑相位非线性)；信号个数减到三个(一段数十个或上百个)；交调只考虑 3 阶(一般 5 阶，7 阶都需分析)；频率只考虑整数解等等．

二、 本题的一种参考答案

本题可以有多种解法，但归纳起来要经三个步骤：1. 由所给的数据建立 I-O 关系式(输入输出关系式)；2. 在 $\{f_i\}$ 允许的范围内，在满足频率约束条件下解出全部可能的配置；3. 计算输出的信号频率和交调频率的系数(振幅)；计算各信噪比，选出合乎本题要求的频率设计．此外，根据竞赛的要求还应对本结果的稳定性、优缺点及推广等方面进行一些合理的讨论．

以下是本题的参考性的一种答案，因为在不同的假设条件下，本题还可以有不同的解答．

1. I-O 关系的建立 由题意只考虑 3 阶交调已暗示可用 3 阶多项式来拟合 I-O 关系．最简单的是用回归方法．有的组的做法是：先用 3 阶多项式进行回归，得：

$$y=f(u)=0.04946+0.2391u+0.04551u^2-0.0004142u^3 \qquad (1)$$

的关系式．然而所给的数据中有 $u=0,y=0$，表明常数项 $b_0=0$ 更为合理．因而应

再拟合一次，得

$$y = f(u) = 0.2441u + 0.04538u^2 - 0.0004132u^3 \tag{2}$$

在 $\alpha = 0.01$ 水平下可检验其显著性：前者 $F = 4629.42 \gg F_{0.01}^{(3,5)} = 12.06, R = 0.99982$；后者 $F = 5734.23 \gg F_{0.01}^{(2,5)} = 13.27$，$R = 0.999782$。二者几乎相同，故由物理背景应选用(2)。这样的做法还是比较自然也比较合理。

2. 频率约束条件下的初步配置 为了将上述非线性的 I-O 关系用于输入为

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} A_k \cos 2\pi f_k t \tag{3}$$

的交调分析，可假设上述(2)式对于输入 $x(t)$ 在其有效工作范围内仍然成立，这是数学上最简单的假定，根据其它背景亦可作其它的假设。

将(3)代入(2)经整理可发现频率成分有以下几种：

(i) 1 阶：f_1, f_2, f_3；

(ii) 2 阶：$f_i \pm f_j (i \neq j)$；

(iii) 3 阶：$2f_i \pm f_j, f_i \pm f_j \pm f_k (i \neq j \neq k)$。

由本题规定 $\{36 \leqslant f_1 \leqslant 40, 41 \leqslant f_2 \leqslant 50, 46 \leqslant f_3 \leqslant 55\}$，则

$$\begin{cases} f_3 + 6 < 77 \leqslant f_k + f_l & (k \neq l), \\ 0 \leqslant |f_k - f_l| \leqslant 19 < f_1 - 6 & (k \neq l), \end{cases}$$

表明 2 阶交调可以不必考虑。事实上 3 阶交调中 $f_i + f_j + f_k, 2f_i + f_j$ 等也不必考虑，因而只需考虑(在 f_i 不出现在 f_i 接收带内条件下)：

$$\begin{cases} d(k,j) = 2f_k - f_j, \\ g(k,j,l) = f_k + f_j - f_l & (k \neq j \neq l), \end{cases} \tag{4}$$

满足 $|d(k,j) - f_i| \geqslant 6$ 及 $|g(k,j,l) - f_i| \geqslant 6$ 即可(可以要求 $f_1 < f_2 < f_3$ 条件下选择)。由此可以选出满足频率约束的有 6 组解：

(36,42,54),(36,42,55),(36,48,54),

(36,49,55),(37,43,55),(37,49,55).

3. 关于信噪比 SNR 的计算 本题条件之一是：如果交调出现在 $f_i \pm 6$ 则要求 SNR > 10(dB)，因而以上 6 组频率配置未必满足 SNR 的要求。为此需要计算输出中对应于频率为 f_i 的系数和各类交调 $(2f_i - f_j), (f_i + f_j - f_k)$ 的系数。

首先，将(3)式代入于(2)式可表为

$$y = \sum_{k=1}^{3} aA_k \cos\theta_k + b\left(\sum_{k=1}^{3} A_k \cos\theta_k\right)^2 + c\left(\sum_{k=1}^{3} A_k \cos\theta_k\right)^3, \tag{5}$$

其中 $\theta_k = 2\pi f_k t$，$a = 0.2441$，$b = 0.04538$，$c = -0.0004132$，记(5)式各项为 y_1，y_2，y_3。显见 y_2 各成分对本题无影响可不考虑；y_3 的频率成分比较复杂，其展式中既可能出现单频成分 θ_k，也可能出 $2\theta_k - \theta_j$ 和 $\theta_i + \theta_j - \theta_k (i \neq j \neq k)$，为了分析的方便最好是运用 Fourier 分析方法，它可以处理更一般的问题：

记

$$\begin{aligned} y_3 &= c\left(\sum_k A_k \cos\theta_k\right)\left(\sum_j A_j \cos\theta_j\right)\left(\sum_s A_s \cos\theta_s\right) \\ &= \frac{c}{2^3}\left(\sum_k A_k (e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k})\right)\left(\sum_j A_j (e^{i\theta_j} + e^{-i\theta_j})\right)\left(\sum_s A_s (e^{i\theta_s} + e^{-i\theta_s})\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{2^3} \sum_{\nu_1} \sum_{\substack{\nu_2 \\ \nu_i = \pm 1}} \sum_{\nu_3} \left(\sum_{s,l,k=1}^{3} A_k A_l A_s \right) e^{i(\nu_1\theta_s + \nu_2\theta_l + \nu_3\theta_k)} \tag{6}$$

视 $y_3 = y_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$，它显然是以 2π 为周期的函数，因而将 y_3 表示为

$$\begin{cases} y_3 = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} C_{k_1,k_2,k_3} e^{-i\sum_{\mu=1}^{3} k_\mu \theta_\mu} \quad (k_i \text{ 为整数}), & (7) \\ C_{k_1,k_2,k_3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) e^{i\sum_{\nu=1}^{3} k_\nu \theta_\nu} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, & (8) \end{cases}$$

其中：

（1） y_3 中对应于（$C_{1,0,0}e^{-i\theta_1}$，$C_{-1,0,0}e^{i\theta_1}$）类型的是对应于输出中 f_1 的成分，即对应于 $\sum_i k_i = \pm 1$，且 $\sum_i |k_i| = 1$ 的系数 C_{k_1,k_2,k_3}。

（2） y_3 中对应于 $\sum_i k_i = \pm 1$，且 $\sum_i |k_i| = 3$ 是可能进入接收带的交调，包括 $2\theta_k - \theta_i, \theta_k + \theta_j - \theta_i$ 类型。

以 $C_{1,0,0}$ 为例

$$C_{1,0,0} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{c}{2^3} \left(\sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\nu_3 \\ \nu_i = \pm 1}} \cdot \sum_{s,l,k=1}^{3} A_s A_l A_k \right) \right.$$
$$\left. \times e^{i(\nu_1\theta_s + \nu_2\theta_l + \nu_3\theta_k)} \right] e^{i\theta_1} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$
$$= \frac{c}{2^3} (3A_1^3 + 6A_1(A_2^2 + A_3^2)). \tag{9}$$

同理

$$C_{-1,0,0} = C_{1,0,0}. \tag{10}$$

故两项合并对应于 $\cos\theta_1$ 的系数是

$$D_{1,0,0} = 2C_{1,0,0} = \frac{c}{4} (3A_1^3 + 6A_1(A_2^2 + A_3^2)) \tag{11}$$

和(5)式中 y_1 的成分合并得

$$B_1 = aA_1 + D_{1,0,0} = aA_1 + \frac{c}{4} (3A_1^3 + 6A_1(A_2^2 + A_3^2)). \tag{12}$$

类似地可得 B_2, B_3 的表达式.

用相似方法可求出对应 $\cos(2\theta_1 - \theta_2)$ 的系数，

$$D_{2,-1,0} = \frac{3}{4} cA_1A_2A_3 \tag{13}$$

及对应于 $\cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)$ 的系数为

$$D_{1,1,-1} = \frac{3}{2} cA_1A_2A_3. \tag{14}$$

以上方法带有一般性，可以推广到 n 个输入信号和高阶交调的分析计算；如 $\sum_i k_i = 1$，$\sum_i |k_i| = 5$ 或 7 即为 5 阶和 7 阶交调，系数为 $C_{k_1,k_2,\cdots k_n}$.

综合以上分析，本题的 $y(t)$ 各成分可列表如下：

ω_1 类型	$B_1 = aA_1 + \frac{c}{4}(3A_1^3 + 6A_1(A_2^2 + A_3^2))$	共 3 种
$2\omega_1 - \omega_2$ 类型	$D_{2,-1,0} = \frac{3}{4} cA_1^2 A_2$	共 $3\times2=6$ 种
$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ 类型	$D_{1,1,-1} = \frac{3}{2} cA_1 A_2 A_3$	共 $\frac{3\times2\times1}{2}=3$ 种

4. 本题的频率设计 对于前面 3 当中满足频率约束的 6 组配置分别计算各有关的信噪比 $\mathrm{SNR} = 10\lg(B_i^2/C_n^2)$，并检验是否皆>10(dB)。经计算 6 组中满足条件的只有二组：(36,42,55)和(36,49,55)。各 SNR 都>10(dB)。

三、关于稳定性分析和推广改进

1. 稳定性分析 可讨论 I-O 曲线拟合的稳定性和接收带宽度大小对解的影响．例如对引入高阶 I-O 多项式(5次、7次)研究对 SNR 的变化是否对解答(频率配置)有影响或者讨论与 3 阶多项式拟合相比其 F 值或 R 值有无显著性变化等等．此外，可以分析将接受带宽改为≥6 或 ≤4 情况下解的变化．

2. 模型的改进与推广 二项有意义的推广是：

(1) 对本题，将输入信号由 3 项改为 n 项

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos 2\pi f_k t,$$

研究其信噪比的计算及研究引入高阶多项式下高阶(5、7 阶)交调的分析．其数学方法可借助于(6)—(8)的 Fourier 分析方法．

(2) 讨论如果 I-O 曲线拟合在负部进行其它假定之下对解的影响．

四、本次竞赛答卷的若干印象

从这次北京和联合赛区的答卷中可以看出普遍的参赛成员具有很灵活的解题思路和运用计算机的能力．各组参赛成员几乎都在解题过程中运用了计算机软件包，如 SAS，Mathematica，Grapher 等著名软件包．许多答卷中运用了数学符号推导、统计分析、画图等，反映出在运用计算机作为研究工具方面，年轻学生近年来具有飞速的进步．其次，在解题思路和方法上也是灵活多样，丰富多彩的．例如在求频率约束下的初步频率配置上，若直接判别、比较，将有数百种之多．有一些答卷则抽象成数学问题给出了满足约束条件的充分必要条件(见本期获特等奖的答卷)因而化成非常简单的条件选择，不用计算机亦可得到解答．有的答卷在本题约束条件下引入以下目标函数

$$\sum_i \frac{1}{\mathrm{SNR}_i * |f_i - f_n|}$$

化为规划问题来求解，其中 f_n 为交调频率．此外对于交调系数的计算也有运用 Fourier 分析中的卷积定理的(即卷积信号的变换等于各信号变换的乘积)等等．

在改进与推广部分许多答卷也是丰富多彩具有启发性的．例如有的将本题结果具体运用到移动通信的设计；有的具体画出了用积成块，在工程上的技术实现的线路框图；有

的研究当 I-O 特性中负轴部分具有截断型曲线的影响；也有答卷讨论 n 个输入信号的交调分析等等.

在稳定性分析中比较多的是讨论多项式拟合系数 ($b_0=0$ 或 $\neq 0$)，阶数(引入高于 3 阶)对解的影响. 也有的研究幅度 A_i 对选频的影响，有的答卷指出本题若 $A_i\equiv A$ (工程上是有意义的)则 $A>A_0$ (某个值)下本题无解，等等.

以上各点反映出大学生在建模知识、能力上的进步.

最后本文对答卷中反映出来的一些问题提几点建议：

1. 本竞赛属数学建模竞赛，因而在充分发挥计算机能力的同时，仍应加强数学能力上的训练，应注意引导学生将学过的数学知识多方面地运用于解决实际问题. 随着计算软件的普及，有可能存在削弱数学分析能力的训练而依赖于高级软件，这对于学生的培养是不利的. 例如本题的答卷中就有不加数学分析对数百种可能的选择和上万次的判断(频率约束)完全交付计算机去做；答卷中也出现 $10\log_{10}x=x$ 计算 SNR 的错误. 此外；许多用规划解题，目标函数没有给出很好的数学表达等等.

2. 应鼓励多学科学生组队. 有许多工程类的学生对本题背景的理解和模型的改进非常好，但数学能力比较弱；而一些理科(尤其数学)组解答虽正确但答卷比较平淡，有工程意义的改进推广不太多，如有的讨论改动 $[f_{\min},f_{\max}]$，这在工程设计上一般是不许任意改动的. 此外，这种结合也对培养学生多科协作的思维和训练十分有益.

一个给足球队排名次的方法——B题

戚立峰　毛　威　马　斌

指导教师　樊启洪

(北京大学数学系，100871)

摘要　本文利用层次分析法建立了一个为足球队排名次的数学模型. 它首先对用来排名次的数据是否充分作出判断，在能够排名次时对数据的可依赖程度作出估计，然后给出名次. 文中证明了这个名次正是比赛成绩所体现的各队实力的顺序.

文中将看到此模型充分考虑了排名结果对各场比赛成绩的重要性的反馈影响，基本上消除了由于比赛对手的强弱不同造成的不公平现象. 文中还证明了模型的稳定性，这保证了各队在发挥水平上的小的波动不会对排名顺序造成大的变动. 本模型比较完满地解决了足球队排名次问题，而且经过简单修改，它可以适用于任何一种对抗型比赛的排名.

§1. 问题的提出及分析

表 1 (见第73页的表)给出的是我国 12 支足球队在 1988—1989 年全国甲级队联赛中的成绩，要求通过建立数学模型，对各队进行排名次.

按照通常的理解，排名的目的是根据比赛成绩排出反映各队真实实力状况的一个顺序. 为达到这一点，一个好的排名算法应满足下面一些基本要求：

(1) 保序性；(2) 稳定性；(3) 能够处理不同场比赛的权重；(4) 能够判断成绩表的可约性；(5) 能够准确地进行补残；(6) 容忍不一致现象；(7) 对数据可依赖程度给出较为精确的描述.