第 30 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 30 No. 1
2000 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2000

最优刀具更换周期上界、检查间隔下界的证明

闵孟斌

(江苏宿迁师范专科学校, 宿迁 223800)

摘要: 本文针对 99 年大学生数学建模竞赛A 题中问题 1, 利用目标函数求出了一般情况下刀具更换周期最优解 $T < \mu$ 的一个充分条件及最优检查间隔的下界, 并证明了问题 1 中刀具更换周期最优解 $T < 551 < \mu$ 和检查间隔最优解 $n \geq 8$.

关键词: 刀具更换周期; 检查间隔; 最优解

通过分析题目给出的 100 次刀具发生故障时所生产的零件数, 易得工序发生故障服从截尾正态分布, 其概率分布函数为 $p_x = F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y$, 其中 $\sigma = 196$, $\mu = 600$.

在问题 1 的情况下, 工序故障时生产的零件全为不合格品, 正常时生产的零件均为合格品, 我们要解决的问题是最好的检查间隔和最优的刀具更换周期, 当刀具的寿命 $X < T$ 时, 进行故障后更换; 当 $X \geq T$ 时, 进行预防性更换, 使得每个合格产品的平均生产费用最小. 在问题 1 的情况下, 设刀具检查间隔为 n, 刀具更换周期为 T, 则目标函数为

$$G(T, n) = \frac{H(T, n)}{L(T)} = \left[\left(k + \frac{tT}{n}\right)(1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2} f\right) p_T + \frac{t}{n}\int^T \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right] \Big/ \left[T(1 - p_T) + \int^T \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y\right]$$

其中 $\frac{n+1}{2}$ 为刀具在 T 之前发生故障所产生的不合格产品数的均值.

引理 设 $F(x)$ 为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数, 且 $\mu \geq \sqrt{2\pi}\sigma/2$, 则函数 $\Phi(x) = x[1 - F(x)]$ 在 $[\mu, +\infty)$ 为减函数, 其极大值为 $\mu/2$.

证明

$$\Phi'(x) = 1 - F(x) - \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{x(x-\mu)}{\sigma^2} - 2\right)$$

易得当 $x \in \left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}}{2}, \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}}{2}\right)$ 时, $\Phi''(x) < 0$, 此时 $\Phi'(x)$ 为减函数.

1° 由题设 $\mu \geq \sqrt{2\pi}\sigma/2$, $\Phi'(\mu) = 1 - 1/2 - \mu/(\sqrt{2\pi}\sigma) \leq 0$

所以 $x \in [\mu, \mu/2 + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}/2)$ 时 $\Phi'(x) \leq 0$, 即 $\Phi(x)$ 为减函数

2° 当 $x \in [\mu/2 + \sqrt{\mu^2 + 8\sigma^2}/2, +\infty)$ 时, 有 $\Phi''(x) \geq 0$, 即 $\Phi'(x)$ 为增函数

收稿日期: 1999-11-20; 指导教师: 朱道元

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi'(x)=0$, 所以此时 $\Phi'(x)\le 0$, $\Phi(x)$ 为减函数.

由 1°, 2° 知　$\Phi(x)$ 在 $[\mu, +\infty)$ 上为减函数, 其极大值为 $\mu/2$.

推论　设 $F(x)$ 为正态分布 $N(600, 196^2)$ 的分布函数, 则函数 $\Phi(x)=x[1-F(x)]$ 在 $[470, +\infty)$ 上为减函数.

证明同引理, 再注意到 $\Phi'(470)<0$, 且 470 在 Φ' 小于 0 的区间中即得.

定理 1　问题 1 中, 检查间隔的最优解 $n\ge\sqrt{2t\mu/f}$.

证明

$$\frac{\partial[H(T,n)]}{\partial n}=-\frac{tT}{n^2}(1-p_T)+\frac{1}{2}fp_T-\frac{t}{n^2}\int_0^T\frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{tT}{n^2}(1-p_T)+\frac{1}{2}fp_T-\frac{t}{n^2}\left[\int_0^T\frac{y-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y+\int_0^T\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\right]$$

$$=-\frac{tT}{n^2}(1-p_T)+\frac{1}{2}fp_T-\frac{t}{n^2}(\mu p_T-m_T)$$

这里 $m_T=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$, 因 $T\le 2\mu$ 时, $m_T\ge 0$; $T>2\mu$ 时, $m_T<0$, 但刀具问题 $\mu\ge 3\sigma$, 相当于不预防性更换, 故以下假设 $m_T\ge 0$.

令 $\frac{\partial[G(T,n)]}{\partial n}<0$, 即 $\frac{\partial[H(T,n)]}{\partial n}<0$.

就是 $-\frac{tT}{n^2}(1-p_T)+\frac{1}{2}fp_T-\frac{t}{n^2}(\mu p_T-m_T)<0$.

解得 $n<\sqrt{\frac{2t[(1-p_T)T+\mu p_T-m_T]}{fp_T}}$, 设 $E(T)=(1-p_T)T-m_T$, 令 $E'(T)=0$, 即 $1-p_T-\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}=0$, 所以 $1-p_T=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 将其代入 $E(T)$ 得 $E(T)$ 的极小值为 $s(T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[(T\mu-\sigma^2)e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}+\sigma^2e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right]$, 而 $s'(T)=\frac{T}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{T-\mu}{\sigma^2}\mu\right)$ 先正后负, 所以 $s(T)$ 先增后减, 又 $s(0)=0$, $\lim\limits_{T\to\infty}s(T)$ 为正, 所以 $T>0$ 时, $s(T)\ge 0$, 所以 $E(T)=(1-p_T)T-m_T\ge 0$, 所以 $\sqrt{\frac{2t[(1-p_T)T+\mu p_T-m_T]}{fp_T}}$ 关于 T 的极小值不小于 $\sqrt{\frac{2t\mu p_T}{fp_T}}=\sqrt{\frac{2t\mu}{f}}$.

即当 $n<\sqrt{2t\mu/f}$ 时, $G(T,n)$ 关于 n 单调下降.

所以检查间隔的最优解 $n\ge\sqrt{2t\mu/f}$.

对于本题 $n\ge\sqrt{2\times 10\times 600/200}=\sqrt{60}$, 即可取 $n\ge 8$.

定理 2　问题 1 中, 刀具更换周期最优解 $T<\mu$ 的充分条件为下列(Ⅰ)-(Ⅳ)同时成立.

(Ⅰ) $\mu\ge\sqrt{2\pi}\sigma/2$;　(Ⅱ) $9T_1(d+f-k)\ge 10k(\mu-m_{T_1})+10m_{T_1}(d+f)$;

(Ⅲ) $9T_1\ge\mu+10m_{T_1}$;　(Ⅳ) $(9f+2d)(9T_1-\mu-10m_{T_1})\ge 2k(17\mu+10m_{T_1}-9T_1)$

其中 $p_{T_1}=\frac{1}{10}$, $m_{T_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(T_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}-e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$.

证明　若存在一个刀具更换周期 T_1, 检查间隔 n_1, 使得对任意的 $T\ge\mu$, 任意的检查间

隔 $n \geq 8$ (定理 1), 都有 $G(T, n) - G(T_1, n_1) > 0$ 成立, 则定理成立

即 $$\Delta = H(T, n)L(T_1) - H(T_1, n_1)L(T) > 0$$

又

$$H(T, n) = \left(k + \frac{T}{n}t\right)(1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)p_T + \frac{t}{n}\int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \left(k + \frac{T}{n}t\right)(1 - p_T) + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)p_T + \frac{t}{n}(\mu p_T - m_T)$$

$$L(T) = T(1 - p_T) + \int_0^T \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y = T(1 - p_T) + \mu p_T - m_T$$

取 T_1, 使 $p_{T1} = \frac{1}{10}, n_1 = n$

则

$$\Delta = H(T, n)L(T_1) - H(T_1, n)L(T) = \left[\left(k + \frac{tT}{n}\right)(1 - p_T)\right.$$
$$\left. + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)p_T + \frac{t}{n}(\mu p_T - m_T)\right]\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)$$
$$- \left[\left(k + \frac{tT_1}{n}\right)\frac{9}{10} + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{1}{10} + \frac{t}{n}\left(\frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)\right]$$
$$\cdot [T(1 - p_T) + \mu p_T - m_T]$$
$$= (1 - p_T)\left[\left(k + \frac{tT}{n}\right)\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right) - \frac{9}{10}kT - \frac{9tT_1}{10n}T\right.$$
$$\left. - \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{1}{10}T - \frac{t\mu}{10n}T + \frac{tm_{T1}}{n}T\right] + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)p_T$$
$$+ \frac{t}{n}\mu p_T\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right) - \frac{tm_T}{n}\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right) - \left(k + \frac{tT_1}{n}\right)\frac{9}{10}\mu p_T$$
$$- \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{1}{10}\mu p_T - \frac{t}{n}\left(\frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)\mu p_T$$
$$+ \left[\left(k + \frac{tT_1}{n}\right)\frac{9}{10} + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{1}{10} + \frac{t}{n}\left(\frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)\right]m_T$$
$$= (1 - p_T)\left[\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)k - T\left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right)\right]$$
$$+ p_T\left[\left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right) - \frac{9}{10}\mu k - \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{\mu}{10}\right]$$
$$+ \left[\frac{9}{10}k + \left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\frac{1}{10}\right]m_T$$
$$= \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)k + p_T\left[\left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\left(\frac{9}{10}T_1 - m_{T1}\right) - \left(\mu + \frac{9}{10}T_1 - m_{T1}\right)k\right]$$
$$- (1 - p_T)T\left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right) + \left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right)m_T \quad (※)$$

Δ 记为 $R_1 + p_T \cdot R_2 - (1 - p_T)T \cdot R_3 + R_0$

因 $R_3 > 0$, 所以当 $T \geq \mu$, 且 $\mu \geq \sqrt{2\pi\sigma}/2$ (Ⅰ)

由引理得 $(1 - p_T)TR_3$ 的极大值为 $\mu R_3/2$

当 $T \geq \mu,\ 9T_1(d+f-k) \geq 10k(\mu - m_{T1}) + 10m_{T1}(d+f)$ (Ⅱ)

时, $R_2 \geq 0$, $p_T R_2$ **的极小值为** $R_2/2$. **又** $m_T \geq 0$, **显然** R_0 **不小于** 0, **所以此时**

$$\Delta \geq R_1 + R_2/2 - \mu R_3/2$$

$$= \frac{n+1}{40} f(9T_1 - \mu - 10m_{T1}) + \frac{k}{20}(9T_1 - 17\mu - 10m_{T1}) + \frac{d}{20}(9T_1 - \mu - 10m_{T1})$$

当 $9T_1 \geq u + 10m_{T1}$ (Ⅲ)

$$\Delta \geq \frac{8+1}{40} f(9T_1 - \mu - 10m_{T1}) + \frac{k}{20}(9T_1 - 17\mu - 10m_{T1}) + \frac{d}{20}(9T_1 - \mu - 10m_{T1})$$

$$= \frac{1}{40}[(9f + 2d)(9T_1 - \mu - 10m_{T1}) - 2k(17\mu + 10m_{T1} - 9T_1)] \ (n \geq 8)$$

显然当

$$(9f + 2d)(9T_1 - \mu - 10m_{T1}) \geq 2k(17\mu + 10m_{T1} - 9T_1) \quad (Ⅳ)$$

时, $\Delta \geq 0$

即由(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)**均成立就有** $\Delta \geq 0$. **证毕**

推论 1　**在问题** 1 **中**, **刀具更换周期** T **的最优解** $T < 600(\mu)$.

容易验证问题 1 **符合定理** 2 **中**(Ⅰ)-(Ⅳ).

推论 2　**在问题** 1 **中**, **刀具更换周期的最优解** $T < 551$.

证明　**经查表得** $p_{551} = 0.4$.

取 $T_1 = 350,\ p_{T_1} = 0.1,\ m_{T1} = 34,\ n_1 = n(\geq 8)$. **则由定理** 2 **中**(※)**式有**

$$\Delta = H(T,n)L(T_1) - H(T_1,n)L(T) = \left(\frac{9}{10}T_1 + \frac{1}{10}\mu - m_{T1}\right)k$$
$$+ p_T\left[\left(d + \frac{n+1}{2}f\right)\left(\frac{9}{10}T_1 - m_{T1}\right) - \left(\mu + \frac{9}{10}T_1 - m_{T1}\right)k\right]$$
$$- (1 - p_T)T\left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right) + \left(\frac{9}{10}k + \frac{1}{10}d + \frac{n+1}{20}f\right)m_T$$

值代入, $\Delta \geq 341000 + p_T(28100n - 9900) - (1 - p_T)T(1210 + 10n)$

由引理的推论知

$$\Phi(x) = x[1 - F(x)] \text{在} [551, +\infty)$$

上为减函数. 所以当 $T \geq 551$ **时**, $T(1 - p_T)$ **有极大值为** $551 \times (1 - p_{551}) = 551 \times 0.6 = 330.6$, **同时** $p_T \geq p_{551} = 0.4$.

所以

$$\Delta \geq 341000 + 0.4 \times (28100n - 9900) - 330.6 \times (1210 + 10n)$$
$$= 7934n - 62986 > 0 \ (n \geq 8)$$

即当 $T \geq 551,\ n \geq 8$ **时**, $G(T,n) > G(350,n)$ **证毕**.

参考文献:

[1]　姜启源　数学模型　高等教育出版社, 北京, 1993

The Proofs of the Upper Bound for Optimal Knife-Replacement Period and the Lower Bound for Check Period

M IN Meng-bin

(Suqian teaching training school, Suqian 223800)

Abstract: As to the question (1) of problem A in CMCM-99, this article at first uses the objective function to obtain a sufficient condition under which the optimal solution to knife-replacement period T is less than μ and the lower bound for optimal check period under general circumstances, and then proves that the optimal solution to the knife-replacement period in question(1) is less than 551, while the one to check period is greater than 7.

Keywords: knife-replacement period; check period; optimal solution

煤矸石堆积经费问题的几点讨论

王如云, 朱永忠, 丁根宏

(河海大学数理系, 南京 210098)

摘要: 本文讨论了土地征用策略, 分别在不考虑银行存、贷款利率和考虑银行存、贷款利率时的分堆情况, 以及在考虑银行存、贷款利率时平均单位体积的矸石处理经费与安息角, 出矸率的关系

关键词: 策略; 安息角; 出矸率

模型假设

1. 原煤年产量理解为包括矸石的产量
2. 年度征地方案理解为每年年初最多征地一次
3. 运矸车在上升过程中效率的降低是均匀的
4. 设运矸车在运行过程中所受的摩擦力和重力忽略不计, 只考虑运矸车内矸石的势能, 并且运矸车的运行是匀速的, 做的有效功全部转化为矸石的势能
5. 征地费于当时付出, 电费于当年内付出, 不可拖欠

1 几个基本量

在题图中 $A—SBOD$ 是棱锥部分, $A—BCD$ 是圆锥部分, 由实际情况, 矸石堆要堆积稳