

## 截断切割中的最优排列问题

俞文 鰲

(华东理工大学应用数学研究所, 上海 200237)

谭永基

(复旦大学数学系, 上海 200433)

最优排列问题广泛地出现在生产作业调度中, 出现在各种生产实践与日常生活中, 1997 年全国大学生数学建模竞赛 B 题就是一例. 在本文中, 我们结合阅卷情况, 简述一些有关该题解答的要点.

### 一、关于建立数学模型与计数

先将该题大略复述如下:

从一个长方体加工出一个尺寸与位置预定的长方体 (这二个长方体的对立表面是平行的), 通常要经过六次截断切割. 设水平切割单位面积的费用是垂直切割的  $f_r$  倍, 且当先后二次垂直切割的平面 (不管它们之间是否穿插水平切割) 不平时, 因调整刀具需额外费用  $f_e$ . 试设计一种切割方式, 使加工费用最少.

设这六个切割面分别位于左、右、前、后、上、下, 可将它们相应的编号为 1、2、3、4、5、6. 这样, 一个切割方式就可以表示为加工面  $f\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  的一个排列, 这种排列的全体记为  $fP_6$ , 其中任一排列可记为  $f\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$ . 根据题意, 目标函数  $ff(\sigma)$  定义在  $fP_6$  上. 作为总的切割费用,  $ff(\sigma)$  包括二部分, 一部分是加权切割面积之和, 另一部分是刀具调整费用之和. 为了清楚地表达题意, 在建立数学模型时, 应尽量将  $ff(\sigma)$  用显式写出. 从体现变量依赖关系的角度来看, 我们有:

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^6 w(\sigma_i) S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i) + q(\sigma)e, \quad (1)$$

其中  $f\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$ , 各项含义如下:

$fS(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)$  表示在加工面  $f\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}$  进行切割之后, 加工面  $f\sigma_i$  的切割面积.

$fw(\sigma_i)$  为相应切割面的权, 根据题意有:  $fw(1)=w(2)=w(3)=w(4)=1$ ,  $fw(5)=w(6)=r$ .

$f_q(\sigma)$  为加工面排列  $f\sigma$  所相应的刀具调整次数. 记  $f\sigma'$  为  $f\sigma$  中将 5 与 6 移去的排列, 称为  $f\sigma$  的简约排列, 如  $f\sigma=(1, 5, 3, 4, 6, 2)$ , 有  $f\sigma'=(1, 3, 4, 2)$ . 显然  $f_q(\sigma)$  只与  $f\sigma'$  有关, 仍记  $f_q(\sigma')$ . 根据题意, 有

$$q(1234) = q(3412) = 1, \quad q(1342) = q(3124) = 2, \quad q(1324) = q(3142) = 1.$$

关于  $ff(\sigma)$  的上述表示形式中,  $fS(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)$  是某状态下加工面  $f\sigma_i$  的切割面积, 它可由原始长方体经加工面  $f\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}$  进行切割之后所得的长方体的几何尺寸给出 (与它们的次序无关, 请思考). 这些几何尺寸可用递推的形式写出来, 进一步的描述在这里从略.

于是, 我们可以把问题归结为在  $fP_6$  上求  $ff(\sigma)$  的最小化问题. 当然, 也可采用动态规划或最短路线的图论模型来描述该问题, 但关键是要把可行域与目标函数描述清楚.

例 可用二进制向量  $f(x_1, x_2, \dots, x_6)$  来描述切割过程中的状态, 其中  $fx_i=0$  表示加工面  $fi$  未被切割,  $fx_i=1$  表示加工面  $fi$  已被切割; 这样, 恰有  $fk$  个加工面已被切割的状态集合便是

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_6) \mid \sum_{i=1}^6 x_i, x_i = 0 \text{ 或 } 1 \right\}$$

它可作为切割过程的第  $k$  个阶段, 进一步的描述亦从略.

在问题  $\min\{f(\sigma) \mid \sigma \in P_0\}$  中可行域的规模为  $|P_0|=720$ , 也就是不同切割方式的总数. 由于相邻二个平行面的次序交换不影响总费用  $f(\sigma)$ , 在此观点下, 可将可行域的规模缩小为 426, 该数字可由容斥原理算得. 同时, 考虑切割面  $k$  离开相应边界面的距离  $h_k$ , 把它称为切割厚度. 不失一般性, 可以假设:

$$h_1 \geq h_2, \quad h_3 \geq h_4, \quad h_5 \geq h_6. \quad (2)$$

当 (2) 式不成立时, 假如  $h_1 < h_2$ , 则把左右次序交换一下便可, 其余可类似处理. 在成立 (2) 时, 我们只需考虑  $P_0$  的一个子集, 即只考虑 1 在 2 前、3 在 4 前、5 在 6 前的那些排列; 该子集的规模为  $720/2^3=90$ . 进一步减少规模的分析, 将在 (三) 中叙述.

## 二、关于 $e=0$ 时的优化方法

这时的优化准则为: 将  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5/r, h_6/r$  排列成简单不减序列, 相应的指标序列即为切割面的最优序列.

通过计算实验, 是发现这个准则的一个途径. 在证明中, 不妨设  $r=1$ , 否则在垂直方向作一个因子为  $1/r$  的变换. 其切割面积和的最小化相当于原来的加权面积和最小化. 这样, 在证明中便不妨假设  $w(i)=1$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ). 同时现在考虑  $e=0$  的情形, 于是 (1) 式成为:

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^6 S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i), \quad (3)$$

其中  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$ .

下列性质被称为相邻交换原则: 设  $\sigma = (\dots, k, j, \dots)$ ,  $h_j \geq h_k$ , 将相邻加工面  $k$  与  $j$  交换后得  $\sigma' = (\dots, j, k, \dots)$ , 则对 (3) 给出的函数, 必定成立

$$f(\sigma') \leq f(\sigma). \quad (4)$$

在证明这个原则后, 就可以得到上述优化准则了. 这是因为, 从任何一个最优解出发, 如  $h_j$  最大, 切割面  $j$  通过交换总可调整至第一位, 由于 (4) 式, 可保持为最优解; 对  $h_i$  次大者, 亦可以这样做, 等等.

以下是相邻交换原则的简单证法. 设相应于切割方式  $\sigma = (\dots, k, j, \dots)$  中加工面  $k, j$  的切割面积为  $S_k, S_j$ , 设相应于切割方式  $\sigma' = (\dots, j, k, \dots)$  中加工面  $j, k$  的切割面面积为  $S'_j, S'_k$ . 由几何直观可知

$$h_k S_k + h_j S_j = h_j S'_j + h_k S'_k. \quad (5)$$

事实上, 上式二者均等于在加工方式  $\sigma$  (或  $\sigma'$ ) 之下加工面  $k$  与  $j$  被切割之前与被切割之后的体积差. 由 (5) 移项即得

$$h_k (S_k - S'_k) = h_j (S'_j - S_j) > 0,$$

由  $h_j \geq h_k$  及上式, 我们得到  $S_k - S'_k > S'_j - S_j$ , 即

$$S'_j + S'_k \leq S_k + S_j. \quad (6)$$

但  $f(\sigma') - (S'_j + S'_k)$  与  $f(\sigma) - (S_k + S_j)$  所含有的各项均相同, 于是从 (6) 便有结论 (4). 当然, 从有关四个切割面积的表达式着手, 也可证明 (6) 式.

由 (5) 及  $h_j \geq h_k$  得出 (6), 相关条件是  $S_k > S'_k$ . 个别参赛队提到, 这个结论可以推广到多项相加的情形. 我们认为, 这是没有根据的, 除非能发掘足够的相关条件.

逐项选择最小费用切割面的准则, 可以用例子说明不能达到最优, 但较之随机选择切割面, 还是要好些.

三、关于  $e \neq 0$  时的优化方法

用表达式 (1) 建立截断切割的数学模型之后, 通常可采用穷举法或分支定界法来求解. 在用分支定界法求解时, 每一分支相当于前面几个面的切割方式已经确定的情形. 这时, 后面几个切割面还可以用多种方式排列, 相应费用的下界可由二部分和来表示. 一部分为加权切割面的面积之和, 它可由  $e=0$  时的优化准则得到, 另一部分为刀具调整费用的下界, 它总是零或  $e$ .

借助于  $e=0$  时的解来求  $e \neq 0$  时的解, 是一种更为简便的方法. 当  $e=0$  时的最优解  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$  的刀具调整次数  $q(\sigma)$  为 1 时,  $\sigma$  使 (1) 中的二项同时达到最小值. 因此  $\sigma$  亦必然使 (1) 达到最小. 当  $\sigma$  的刀具调整次数  $q(\sigma)$  为 2 时, 则只能断言  $\sigma$  使 (1) 在所有刀具调整次数大于 1 的切割方式中达到最小. 为求 (1) 的整体最小, 还补充考虑刀具调整次数  $q(\sigma)$  为 1 的切割方式. 前面提及, 不妨设 (2) 式成立. 这时, 可只考虑 1 在 2 前、3 在 4 前、5 在 6 前的那些切割方式. 在刀具调整次数为 1 时, 在那些切割方式中, 加工面 1、2、3、4 的排列方式只可能是 1234 与 3412.

然后将加工面 5 与 6 按照相邻交换原则插入到适当的位置, 可得若干个候选的切割方式, 它们相当于一定意义的局部解. 这些局部解与上述  $\sigma$  组成了候选解; 比较所有候选解, 便得到  $e \neq 0$  时的最优的切割方式. 由于  $h_i$  按排列 1234 的次序至多有 2 个单调下降段 (因为 (2)), 可知加工面 5 与 6 按相邻单调下降方式插入时, 至多可得 3 个局部解. 对排列 3412 亦如此. 所以,  $q(\sigma)=2$  时候选解总数至多为  $3+3+1=7$ . 当  $\sigma$  的刀具调整次数  $q(\sigma)$  为 3 时, 除了补充考虑刀具调整次数为 1 的切割方式外, 还必须补充考虑刀具调整次数为 2 的切割方式, 它们可由加工面 5 与 6 按照相邻交换原则插入到 1342 与 3124.

它们各具 2 个单调下降段 (二者的插入方式各不超过 3), 或者, 二者之一具有 3 个单调下降段, 而另一则必定只有 1 个单调下降段 (前者的插入方式不超过 6, 后者的插入方式为 1, 总数不超过 7), 所以候选解的总数不超过  $7+6+1=14$ .

个别参赛队认为,  $e=0$  时的优化准则可以推广到  $e \neq 0$  的情况. 所设想的方法是:

(i) 将  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5/r, h_6/r$  作为判据, 先在它们中取最大者, 以相应的加工面作为第一个切割面.

(ii) 以后每次选择切割面时, 如某个切割面意味着调整刀具, 则将该判据减去  $e$  的某个倍数, 否则仍用原来的判据. 在修改判据之后, 仍取一个判据最大者所相应的加工面作为下一个切割面.

我们指出, 上述方法是不对的, (i) 就可能导致错误的结果. 下面举一个二维的例子, 将  $e$  取得相当大, 将各个加工面 (此时为加工线) 的权均取为相同. 于是, 最优解必在刀具调整次数为 1 的切割方式得到, 只要比较以下二值即可:

$$f(1234) = C + 2h_3 + 2h_4 + e, \quad (7)$$

$$f(3412) = C + 2h_1 + 2h_2 + e, \quad (8)$$

其中  $C$  为成品长方形的周长,  $h_1, h_2, h_3, h_4$  的意义同前, 可使它们的取值满足:

$$h_1 > h_3 > h_4 > h_2, \quad h_1 + h_2 < h_3 + h_4. \quad (9)$$

按上述 (i), 加工线 1 应排在第一位, 但由上述 (7)–(9) 知, 只有  $\sigma=3412$  才是最优解.

## 四、推 广

按切割厚度递减逐次选择切割面的原则, 对于题意中的长方体情形已被证明能达到切割面积和的最优. 在实际运用中, 当从任何一个物体通过多次截断切割加工成为一个凸多面体时, 可以设想, 推广运用这一准则, 按平均切割厚度递减的准则确定切割方式, 也能达到较好的效果. 但对此一般情形, 要想得到最优解, 还必须能取得在各个加工面切割时的截面积数据, 以形成明确的数学问题, 并进行深入的分析, 这是值得探讨的.

不过, 在二维的一般情形, 截断切割问题可以提得相当明确. 设要从一个平面区域内割出一个预定的  $m$  边凸多边形 (其非相邻边的延长线在该平面区域内不相交), 单独地沿第  $i$  边切割时, 可得到 3 个长度: 第  $i$  边的边长  $l_i$ , 第  $i$  边二侧的长度  $x_i$  与  $y_i$ . 已知上述  $3m$  个长度, 如何确定这  $m$  个边的切割方式, 使切割总长度最少? 这就是本文末尾留给读者的一个问题.