第 28 卷第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1998

零件参数设计的动态规划模型

高　洁　郭去疾　康俊海

指导教师：季识卓

(中国科技大学，合肥 230026)

编者按　本文按相对误差来定义产品参数 y 对各零件参数的敏感程度，以此为依据进行空间裁减，尽快地在解最可能出现的区域中搜索到满意的解. 文中关于次品率的讨论，以及利用 y 的矩来对结果过进行优度评估，也很有特色.

摘　要　对于本零件参数设计问题，我们建立一个动态规划模型，分阶段以不同的目标搜索求优，在每阶段中，必须以继承和保持前面已获得的目标做为约束条件. 在实施动态规划前，根据题设经验公式，先把零件参数根据敏感性进行分类，对零件参数的取值空间作裁剪，把求优空间充分缩小.

假设各零件参数独立正态分布，对求优空间中的每组候选值，随机模拟出性能参数 y 的概率密度函数，从而确定它是否满足阶段目标和最终目标.

编制程序实现算法后，我们得到了四百多组满意的设计方案，并给出一组推荐方案. 其总费用为 421 元 / 台. 求得原设计方案的总费用为 3202 元 / 台，费用降低为 2781 元.

当零件参数的分布函数未知时，我们利用矩的方法重建产品性能参数 y 的分布函数，从而可以利用我们的动态规划的模型进行参数设计. 我们对模型进行总结，给出了零件设计的一般方法. 最后，我们对模型和算法进行了进一步的讨论，并给厂家提出了一些实用的建议.

一、问题的提出 (略)

二、合理的假设

1. 产品参数 y 与零件参数的关系只由题中所给的经验公式决定，与其他因素无关.
2. 对同一种零件，在标定值范围内其成本只由容差等级所决定，与标定值的大小无关.
3. 零件的标定值在其允许范围内可连续变化，不考虑有分立的国标值的情况.
4. 各个零件的标定值和容差相互独立.
5. 零件的参数是随机变量，满足正态分布，标定值是其数学期望.
6. 在生产单件产品的过程中，每种零件只用了一个.
7. 按照工业生产的惯例，假设 y 偏离目标值造成的损失是阶梯性的，即 y 的偏离值小于 0.1 时损失为 0, y 的偏离值在 0.1 和 0.3 之间损失为 1000 元，y 的偏离值大于 0.3 时损失为 9000 元.

符号说明

η：对产品性能有影响的零件种类，$n=7$; x_i：第 i 个零件的参数，$i=1,2,\cdots,n$;

F：生产离子分离器的总费用；N：生产粒子分离器的总数目；

C：零件总成本；L: y 偏离所带来的总损失 L;

L_1,L_2：产品分别为次品和废品时带来的损失；P_1,P_2：产品分别为次品和废品的几率；

q_i^2：产品性能对零件参数的敏感系数，即全系数；σ_i,σ_y：第 i 个零件和的 y 均方差

三、问题的分析

1. 目标函数的建立

生产离子分离器的总费用 F 由两部分组成：零件成本 C 和 y 偏离 y_0 所带来的损失 L, 即：

$$F = C + L \tag{1}$$

令 L_1 表示产品为次品时的损失，L_2 表示产品为废品时的损失，P_1,P_2 分别表示次品和废产生的几率，则总损失可表示为：

$$L = N(L_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2) \tag{2}$$

由经验公式，y 是各零件参数的函数，其密度分布函数设为 $f(y)$，则次品和废品产生的几率 P_1,P_2 可表示为：

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} f(y)dy + \int_{y_0+0.1}^{y_0+0.3} f(y)dy \\
P_2 &= \int_{-\infty}^{y_0-0.3} f(y)dy + \int_{y_0+0.3}^{+\infty} f(y)dy
\end{aligned}
\tag{3}
$$

综合上式，我们的目标函数为：

$$
\min\{F\} = \min\{C + N(L_1 \,\mathrm{cot}\, P_1 + L_2 \cdot P_2)\} \tag{4}
$$

由于 P_1,P_2 是统计量，因此即使在零件的参数包括标定值和容差确定的情况下，F 也是一个统计量，有一个波动范围，也就是说我们的目标函数实际：$\min\{E(F)\}$，即 F 的期望的最小值．实际上，我们在下文中讨论的参数命题都是在统计意义下成立的．

2．目标函数与零件参数的关系

直接研究目标函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与之间的关系较为困难，因此，我们分成两个步骤来考虑：一是研究目标函数与 y 的关系，另一个是研究 y 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的关系．

(1) 不考虑成本影响时，目标函数是的密度函数的区间积分值，因为前者无法得到解析表达，要得到两者严格的数学关系是不可能的，但总体上讲，y 的均值离标定值 1.5 越近，这个积分值越大；y 的方差越大，这个积分值也越大；在均值接近 1.5，方差一定时，y 的分布左右不对称性越大，目标函数值越大．以上三点虽然只是定性的说明，但实际上有概率论中矩的说明作为背景，同时也为后面我们模型的建立提供了重要依据．

(2) 敏感性分析

y 对各变量的敏感程度是不同的，为了度量这种敏感程度并作为分组的根据，由误差传递公式得到：

$$
\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2 \left(\frac{\sigma_i}{x_i}\right)^2} \tag{5}
$$

其中 $q^2=(q_1^2,q_2^2,\cdots,q_n^2)$ 就是度量敏感程度的量，即权系数．（编者注：此处 $q_i=\frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}$．

根据经验公式，对 $y(\vec{x}),(\vec{x})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求全微分并除以得：

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= \sum_{i=1}^{7} q_i \frac{dx_i}{x_i} \\
&= \frac{x_2 - 0.15x_1 dx_1'}{x_2 - x_1}\frac{dx_1'}{x_1} + \frac{(1.52x_4^{1.16}x_2^{-2.16}a^{3/2} + 0.4x_4^{-1.6}x_2^{-1.6}a^{1/2})\cdot x_2}{1-2.62[a]^{3/2}(x_4/x_2)^{1.16}}\frac{dx_2}{x_2} \\
&\quad + 0.85\frac{dx_3}{x_3} - \frac{(1.52x_4^{0.16}x_2^{-1.16}a^{3/2} - 0.4x_4^{-0.4}x_2^{-0.6}a^{1/2})\cdot x_4}{1-2.62[a]^{3/2}(x_4/x_2)^{1.16}}\frac{dx_4}{x_4} \\
&\quad - \frac{dx_5}{x_5} - 0.5\frac{dx_6}{x_6} - 0.5\frac{dx_7}{x_7}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中 $a=1-0.36\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}$．

表 1　各零件权系数表

权系数	1	2	3	4	5	6	7
最大值	4.2539	0.7745	0.7225	0.0197	1	0.25	0.25
最小值	1.4701	0.0037	0.7225	0.0028	1	0.25	0.25

由上表可以看出权系数 q_i^2 在空间 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中变化范围不大，且 x_1,x_5,x_3 的权系数与 x_2,x_4,x_6,x_7 相比要大得多.

从 (6) 式中我们还得到信息：x_1,x_2,x_4 的权系数是相互关联的，而 x_3,x_5,x_6,x_7 的权系数为常数.

(3) y 的取值范围的估计

首先 y 与 x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 的单调性都是清楚的，对于 x_2，我们可以对 y 的表达式作适当的化简，但作为估计，我们的关键点是标定值 1.5 是否落在 y 的取值范围中，通过计算得，不考虑 x_i 的方差时，y 的取值区间为 [0.50, 8.35]，而且最值在各自变量的端点取到．因为在给定区间内，y 是 x_i 的连续函数，因此一定存在使 y 等于 1.5 的 x_i 值.

(4) 求解方法选取的分析

本参数问题涉及到一组连续参数（标定值）和一组离散参数 (容差)，Y 表达式的复杂性决定了必须用计算机搜索．我们于是首先把连续参数离散化，并希望借助随机模拟得到 Y 的分布的数值表示，但由于运算自由度多而约束条件少，运算的复杂度很大，我们不采用全遍历．同时，目标函数关系不简明，静态规划实现有困难．故我们考虑用动态规划，把目标分阶段求解，在每个阶段附加一些约束，减少搜索范围.

容差等级的分布离散化程度高，其阶跃性改变对结果会很大，且其影响在连续的标定值取值区间中有一致性，容易确定最优组合，可以先行搜索．在小区间中对 y 作多维 Taylor 展开，可以化减目标函数表达，但区间过大时，近似程度太低.

四、空间裁剪和动态规划模型

我们把整个建模过程分为两大步骤：

(1) "空间裁剪"— 排除参数取值空间中不可能出现所需解的区域，确定解最可能出现的区域.

因为容差等级的取值空间是离散的，裁剪主要对容差等级进行.

(2) "动态规划" — 我们对 (1) 中确定的区域进行搜索，引入 "阶段" 的概念，为每阶段的搜索建立一个阶段目标，通过多阶段的搜索的求得问题的解.

具体实现步骤如下：

(1) "空间裁剪"：首先考虑改变权系数最大 (即其值变化对 y 的影响最大) 的 x_1,x_5,x_3，保持原设计的 x_2,x_4,x_6,x_7 不变，遍历所有的容差等级，使得目标函数小于某一常数，并对不同的容差等级组合的出现几率进行统计，选择其中出现几率最大的几组.

(2) "动态规划"：通过上一步确定的等级选取，我们人为地把搜索空间分为几个阶段：

阶段一、搜索：x_1,x_2,x_4，目标：σ_y^2 最小，

说明：x_3,x_5,x_6,x_7 不影响 σ^2.

阶段二、沿用阶段一中确定的 x_1,x_2,x_4，再对搜索：x_3,x_5,x_6,x_7 进行搜索，目标：使 $|y-y_0|$ 小于一个小的正常数 k.

阶段三、对阶段二求得的解进行搜索目标：目标函数 $\min\{F\}$，

说明：因目标函数只是个统计量，目标的数学表达只能是使 F 小于定值 K.

五、模型的结果与分析

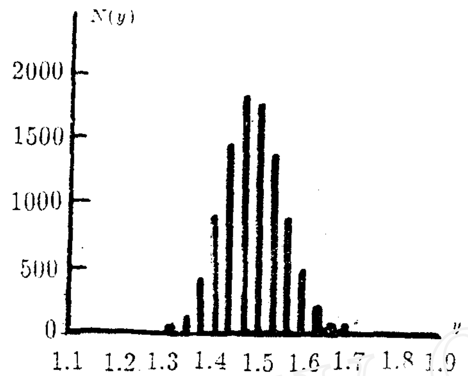
1. 由模拟的结果可知，满意解的容差等级的组合一般固定，但零件标定值的组合有几百种之多，为了给厂家更多的选择，我们列出部分值.

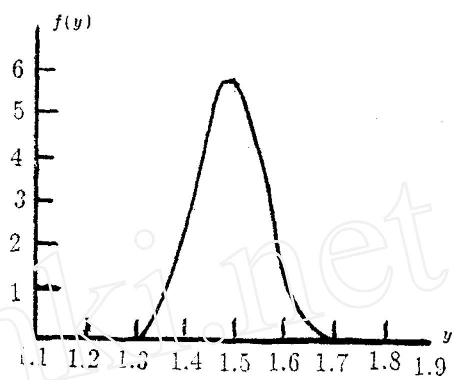
我们推荐一组零件参数如下：

表 2 推荐零件参数值表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
标定值	0.075	0.375	0.119	0.075	1.29	16	0.584
等级	B	B	B	C	C	B	B

对应的次品率：14.6%；费品率：<1/100000；总费用：421 元 / 台 y 的离散模拟分布图和密度函数 $f(y)$ 分别如下图：





由图可知，我们原先对 y 的性状的估计是正确的，它正是一个左右近似对称的“钟型”图形．

2．若用原题给定的参数设计，我们得到，次品率： 62% 废品率： 26.47% 总费用： 3202 元／台

两者对比费用降低： 3202－421=2781 元／台

在实际的模拟过程中，平均费用会有一定的起伏．实验表明，本题中万次模拟的费用值本身就有 ±4 元的偏差．而千次模拟该偏差可达到 ±20 元．

3．对次品率的分析 在分析中，只考虑成本的降低是不够的，次品和废品不仅仅会带来一些直接的损失，还会导致厂商信誉的下降．因此我们在降低成本的同时还要兼顾到次品率和废品率．在我们的结果中次品率为 14.6%，但零件都未选 A 等．若第 i 个零件选取 A 等，而其余的不变，则总的费用和次品率废品率如下表所示：

（由于 x_1,x_2,x_5 无此等级，我们根据题目中零件价格的比例关系，我们设 x_1 的 A 等价格为 100 元，x_2 的 A 等为 200 元，x_5 的 A 等为 500 元）：

表 3 选用 A 等零件的花费表

零件	1	2	3	4	5	6	7
总费用	460	547	555	872	762	490	492
成本	350	425	425	725	725	350	350
损失	110	122	130	147	37	140	142
次品率（%）	11.0	12.2	13.0	14.7	3.7	14.0	14.2

从表上可以看出，除 x_5 以外，选取 A 等的零件次品率虽略有降低，但成本大大提高，说明比起 B 等零件，A 等零件不能大幅度的减少次品率，而且非常昂贵．因此对除 x_5 以外的零件没有必要选取 A 等级，除非 A 等品的价格有大幅度的降低．

4．对 x_4 的一些讨论

对 x_5 选取 A 等可以使次品率降为 3.7%，但成本同时大幅度提高，因此选取 A 等也不能降低总费用．我们假设 x_5 也有 B 等品，价格为 100 元，从而得到次品率为 6.4%、总费用为 389 元／台，每台费用降低 32 元．这说明，若 x_5 有 B 等品，只要其价格低于 100+32=132 元／件，则选用 B 等级的 x_5 还是合算的．而且 x_5 选用 B 等级还可以大大提高 y 的稳定性，使其方差变为原来的一半．

5．结果的优度评估

由于随机模拟引入的不确定性，无法严格证明解的最优性．但由概率论，一个随机变量分布的特征可以用矩来描述．由于有很多组可行解，我们可以通过计算 y 的高阶矩来评估结果，通过模拟，y 的高阶矩的值如下：

表 4 推荐解对应 y 的各阶中心值表

阶数	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶
矩值	0.004782	0.000085	0.000069	0.000003	0.000002	0.000000

由表可见，y 的 2 阶矩远大于各高阶矩，故我们原来的假定成立，即 y 的性状主要由 1, 2 阶矩限定，由我们的模型知，我们已使其均值趋于标定值 1.5, 且 2 阶矩最小．同时知道这些条件与目标函数取最小密切相关．

此外我　计算出 y 的偏度系数小于 1e−8. 更重要的是我们在方差最小的情况下，对四变量的搜索是完备的，所以排开随机模拟的不确定性和 3 阶矩的微小影响，我们的解足够好．

六、模型的进一步讨论

(一) 模拟次数的选取

所有的搜索算法都面临同样的问题：速度在本问题中，因为参数空间的每一点都需要模拟一个分布，这个问题尤为突出．而模拟次数的选取是解决运算复杂度也即速度的核心问题之一，为此，我们在算法中引入反馈控制来动态改变模拟次数．

假设我们要确定某组参数取值的损失是否小于定值 L, 我们先用小较样本进行模拟 (例如：$S_0=500$), 得到平均损失 L_0．若 $L_0-L>P_0$ (P_0 事先取定), 则认为该组选取不是所需解，停止模拟；反之，再进行次数为 S_1 的模拟，有类似定义的 L_1,P_1, 以此类推，直至 S_m 模拟后证明该选取是满意解，或中途某次退出模拟．

在实际实现中，次数等级不必太多，取三等已有显著的速度收益，一个经验性的参考等级分级为：$S_0=500, S_1=2000$, $S_2=10000, P_0=100$, $P_1=50, P_2=20$.

(二) 空间划分

我们前面的动态规划的模型必须依赖函数形式和参数空间的某些特殊性．对于一般函数形式和参数空间，是无法断然把目标分成几个阶段目标的，，因为常常在较早阶段达到的目标在后来不能保持．所以，对于一般的情形，就必须对空间进行划分，然后在每个空间分区中再利用特殊性．例如 DEC 公司为配置 400 多项 VAX 机部件设计的专家系统就曾成功地采用了空间划分法 [4].

(三) 多子空间并行搜索

如果问题需要对空间进行划分，那么很自然的问题就是如何确定这些子区间搜索的顺序，以期较快地得到解．我们思考的结论是：因为这个问题涉及的因素太多，所以与其去分析这样一个顺序关系，不如提出一种多子空间并行搜索的方法，在不同的子空间同时搜索．每一时段有唯一的主搜索区，在主搜索区中进行多步搜索，而在其它区域单步搜索．用评估函数的值不断改变主搜索区，从而及时找到较优解．

七、讨论当 x_i 的分布未知的情形 (略)

八、参数设计的一般方法

在一般的情况下，我们给出如下设计步骤：(一) 构造目标函数，确定目标值与条件参数的函数关系．(二) 分析零件参数的变化对目标函数的影响的敏感性．(三) 由各参数的敏感程度确定各零件参数 (包括标定值和容差) 的分组，确定搜索步骤．(四) 逐步搜索，得到最优解．

此方法的关键在于确定参数分组和搜索的步骤，它同具体的函数关系有关，没有固定的方法，我们推荐以下几种方法：

1. 对目标函数作全微分，对各变量的系数进行排序，据此对变量进行分组．
2. 按变量的相互联系程度分组，把联系紧密的变量分为一组．
3. 先搜索对目标函数影响大的变量组，再搜索对目标函数影响小的变量组．
4. 考察 x_i 和 y 的单调性关系，按此进行分组．

九、模型的优缺点 (略)

参 考 文 献

[1] 陈希孺，概率论与数理统计，中国科学技术大学出版社，合肥，1996.

[2] D. J. 华尔德，C. S. 皮特勒著，尤云程译，优选法基础，科学出版社，北京，1978.

[3] 孙德敏，工程最优化方法及应用，中国科学技术大学出版社，合肥，1991.

[4] 吴秀清，专家系统概论，中国科学技术大学无线电系，合肥，1987.

[5] A. V. 奥本海姆等著，刘树棠译，信号与系统，西安交通大学出版社，西安，1985.

[6] 沈凤麟，钱玉美，信号统计分析基础，中国科技大学出版社，合肥，1989.