最优捕鱼策略模型

罗　君　　刘　鹏　　周鸣炜

(华东理工大学，上海 200237)

指导教师：陆元鸿

编者按　本文假设合理，概念清楚、分析透彻、建模正确、文字表达清晰、计算结果较精确，对模型结果的检验和模型优缺点分析及改进方向颇有新意.

摘　要　本文讨论了渔业资源开发项目中在实现可收获的前提下对某种鱼的最优捕捞策略.

针对问题一：

通过对 4 龄鱼在年末的两种不同状态 (全部死亡；仍为 4 龄鱼) 的考虑，得到了两个模型，再进一步考虑鱼的产卵和孵化是一个连续的过程，利用两个离散变量的几何平均来代替连续变量建立第三个模型. 最后求解在计算机上实现.

针对问题二：

1. 先假设每年捕捞强度相等，建立了一个简单模型；

2. 再假设每年捕捞强度不相等，建立一个复杂模型；

3. 最后给出鱼群生产能力破坏不太大的含义 (即鱼群减少率的上限)，在它的约束之下再建立一个模型.

本文最大的特点是：离散和连续相结合，在本文的后面又将各模型的结果进行了比较，并给出了理论上的解湿，得到令人满意的结果.

一、问题的假设

1. 虽然鱼群本身是离散的，但是突然增加或减少的只是少数个体，与整体相比很微小. 因此我们可以近似假设大规模鱼随时间是连续变化的.

2. 根据模型已知条件，我们可以设鱼每年在 8 月底瞬间将卵全部产完，卵在 12 月底全部孵化完毕.

3. 4 龄鱼在第 4 年末未死亡的数量占全部数量的比例很小，因此可认为其全部死亡，令其退出完毕.

4. 持续捕获使各年龄组的鱼群数量呈周期变化，周期为 1 年，因此可以只考虑鱼群数量在 1 年内的变情况.

5. 不考虑环境的影响，各年龄组的平均死亡率均为 0.8(1/ 年).

二、参数的说明

a : 年平均固定死亡率，单位： 1/ 年；

t : 时间，$t \in [0,1]$;

j : j 龄鱼，$j = 1, 2, 3, 4$;

g_j : j 龄鱼每条鱼的平均重量，单位：克；

m : 平均每条 4 龄鱼的产卵量；

用于问题一中的参数如下：

k : 年平均捕捞率，单位： 1/ 年；

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

n：每年产卵量；
$x_j(t)$：j 龄鱼在时刻 t 的数量；
$s_j(t)$：t 时刻 j 龄鱼的捕捞总重量，　$j=3$ 或 4;
H：年总收获量，即捕捞总重量；＊用于问题二中的参数如下：
i,: 年数 $i\in[0,5]$;
n_i：第 i 年的产卵量；
$x_{i,j}(t)$：j 龄鱼在第 i 年时刻 t 的数量；
$s_{i,j}(t)$：t 时刻 j 龄鱼第 i 年的捕捞重量，　$j=3,4$;
H_i：第 i 年总收获量，即捕捞总重量.

三、问题的分析

(一) 对于问题一的分析

1. 对死亡率 a 的理解：

我们定义平均死亡率 a 是单位时间鱼群死亡数量与现有鱼群数量的正比例系数，由假设可知，它是一个环境等其它因素无关的常数. 由于鱼群的数量是连续变化的. 而 1 、 2 龄鱼全年以上及 3 、 4 龄鱼在后 4 个月的数量只与死亡率有关，与其它因素无关，设鱼群量为 x, 则在时间 $[t,t+\Delta t]$ 内，鱼群数量的减少 = 鱼群的死亡数量，即

$$x(t+\Delta t)-x(t)=-ax(t)\Delta t,\qquad \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-ax(t).$$

当 $\Delta t\to 0$ 时得：

$$\frac{dx(t)}{dt}=-ax(t), \tag{1.1}$$

2. 对于捕捞强度系数 k 的理解：

题目告诉我们，捕捞强度系数 k 一定，且只在捕捞期内 (即每年的前 8 个月) 捕捞 3 、 4 龄鱼，因此只会影响 3 、 4 龄鱼群数量，而不会影响其它的鱼群数量. 我们可以看 3 、 4 龄鱼鱼群的数量在捕捞期内不仅与 k 有关，而且还与死亡率 a 有关，类似第 1 点的分析，可以得到

$$\frac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-0.42kx(t), \tag{1.2}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=-ax(t)-kx(t), \tag{1.2}$$

其中 $x(t)$ 表示 3 、 4 龄鱼的鱼群数量，　t 表示每年的前 8 个月，即 $t\in[0,\frac{2}{3}]$.

3. 对于持续捕恢的理解：

随着时间的推移，各年龄组的鱼数量必将发生变化，但持续捕获要求每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变，再根据鱼群的生长规律，我们可以得到关系式：上一年龄组鱼群年底的数量 = 下一年龄组鱼群年初的数量 (1 龄鱼除外), 即

$$x_j(1)=x_{j+1}(0),\qquad j>1. \tag{1.4}$$

4. 对成活率 m 的应用

又假设知，此种鱼在每年的 8 月底一次产卵完毕，又已知 3 、 4 龄鱼每条产卵的个数，因此可将每年的产卵量 n 表示为

$$n=1.109\times 10^5\times\left[0.5x_3\left(\frac{2}{3}\right)+x_4\left(\frac{2}{3}\right)\right] \tag{1.5}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

又已知成活率

$$m=\frac{1.22\times10^{11}}{1.22\times10^{11}+n} \tag{1.6}$$

产卵量 × 成活率 =1 龄鱼每年年初的数量，即

$$n\times m=x_1(0). \tag{1.7}$$

5. 对最高收获量的描述

根据第 2 点的分析，在 t 时刻的捕捞重量 $s(t)=3$ 龄鱼捕捞重量 $s_3(t)+4$ 龄鱼捕捞重量 $s_4(t)$. 而 $s_3(t)=0.42kx_3(t)g_3, s_4(t)=kx_4(t)g_4$, 则

$$s(t)=0.42kx_3(t)g_3+kx_4(t)g_4 \tag{1.8}$$

由于捕捞被看成连续的作业，因此捕捞总收获量即年收获量可以用 t 时刻的捕捞重量 $s(t)$ 关于 t 在捕捞期内的积分来刻画

$$H=\int_0^{\frac{2}{3}}s(t)dt, \tag{1.9}$$

要求最高的年收获量即求 H 的最大值.

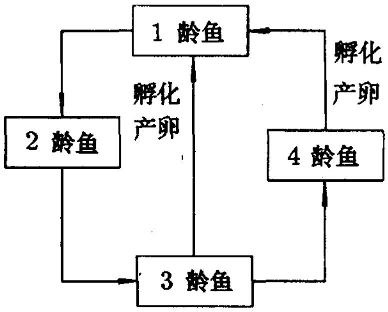
6. 对 4 龄鱼在年末情形的两个假设

(1) 认为 4 龄鱼在年末与鱼群总数量相比十分微小，它们既不产卵又不会被捕捞. 可以将它们忽略不计，令其退出系统.

(2) 近似的认为在年末未死亡的 4 龄鱼的各个特征 (例如：重量、产卵个数等) 均不发生改变，即仍回到 4 龄鱼组中.

7. 模型建立大纲

(1) 以第 6 点的第一个假设为基础，建立一个简单的模型 I, 其实质上是联立以上分析的几个方程成为一个方程组.



各龄鱼的转化图

(2) 以第 6 点的第二个假设为基础，改进模型 II, 使得方程组中的一个方程 $^*x_4(0)=x_3(1)$, 被方程 $x_4(0)=x_3(1)+x_4(1)$ 代替即可.

(3) 假设鱼群产卵过程是一种连续的过程，使假设更加接近实际情况，得到模型 III.

(二) 对于问题二的分析

1. 与问题一的相似之处

由于对各年龄组鱼群数量起到影响作用的各因素 (例如：平均死亡率、成活率、捕捞期等) 不变，因此，在每年内各年龄组的鱼群数量变化情况与问题一相类似.

2. 与问题一的不同之处，主要区别在于

(1) 问题一要求持续捕获，问题二只要求鱼量不受到太大的破坏，不限制各年龄组年初鱼群的数量，因此作为约束条件的方程组中各年龄组的鱼量肯定与年数有关，而不象问题一是常量.

(2) 问题一中的各变量呈周期变化，因此，只要考虑一个周期的变化情况即可. 而问题二则不同，其各年的初始值在变化，因此，要考虑每一年的捕获量，再将 5 年求和，得到一个目标函数.

综合以上两点，可以得到一个优化问题.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3. 根据优化问题我们又提出了三个模型

模型 I：简化使得每一年的捕捞强度系数相同，化为一元函数最优值的求解问题.

模型 II：, 考虑每一年的捕捞强度系数不同，得到一个多元函数最优值的求解问题.

模型 III：对问题中的不太大破坏程度下个定义，再给出一个关于破坏程度的惩罚，利用多元函数最优值的求解方法进行求解.

4. 对不太大破坏程度的定义

由于 4 龄鱼 4 年的死亡及两年的捕捞造成的数量减少远远大于其它年龄组的鱼，以至到末期时的数量相对于整个鱼群的数量是十分微小的，因此 4 龄鱼的减少量对生产能力的破坏可以忽略不计，而只考虑 1 、2 、3 龄鱼的数量要求. 不妨定义不太大破坏程度为第 1 、2 、3 龄鱼减少数量不得大于初始数量的某个百分比，例如在模型 III 中我们取值为 30%.

四、模型的建立

问题一

模型 I：假设 4 龄鱼在年底推出系统和连续捕获前提下如何得到高年收获量. 由问题分析可知，可得以下优化问题

$$\max H = \int_0^{\frac{2}{3}} s(t)dt, \qquad s(t)\text{见问题分析}, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -ax_1(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -ax_2(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -0.42kx_3 - ax_3(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -ax_3(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right], \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -kx_4 - ax_4(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -ax_4(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

解 (I) 得到

$$x_3(0) = \frac{1.22 \times 10^{11}}{e^{2a}} - \frac{1.22 \times 10^{11}}{1.109 \times 10^5 \left[0.5e^{\frac{-2\times 0.42k}{3}} + e^{\frac{-2-2\times 0.42}{3}k - \frac{k}{3}a}\right]} \tag{2.2}$$

求解过程见附录.

将 (2.2) 式代入目标函数 (2.1) 式中得到 H 关于 k 的一元函数，再利用一维搜索法求一元函数的最小值的方法上机求得 H 的最大值， $k = 17.36$; $H = 3.887e5$(吨), 即 $k = 17.36$ 时 H 取最大；

模型 II：进一步假设 4 龄鱼在年末的特征不变，仍当作 4 龄逾，则在持续捕捞的情况下，求得最大捕获量.

此模型类似模型 I, 也可得到优化问题，区别仅在式中，应改为

$$x_4(0) = x_3(1) + x_4(1)$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

同理解得

$$x_3 = \frac{1.22 \times 10^{11}}{e^{2a}} - \frac{1.22 \times 10^{11}}{1.109 \times 10^5 \left[0.5 e^{\frac{-2}{3}(0.42k-a)} + \frac{e^{\frac{-2.84k}{3} - \frac{5}{3}a}}{1 - e^{\frac{-2k}{3}a}} \right]}$$

再重复模型 II 的步骤解得 $k = 17.36, H_{\max} = 3.887e5$(吨).

模型 III：实际生活中，鱼的产卵过程不可能在瞬间完成，它应该是一个连续的过程，但鱼量各时刻的数量不同且产卵比例未知，因此问题十分复杂. 为了简化模型，我们用 8 月底瞬间产卵数量和 12 月底产卵数量的集合平均来代替连续的总产量，即

$$n = 1.109 \times 10^5 \left[0.5 e^{-0.28k - \frac{5a}{6}} + \frac{e^{-1.28k - \frac{13a}{6}}}{1 - e^{\frac{-2k}{3}a}} \right] \times x_3(0)$$

同理可解得 $k = 17.02, H_{\max} = 3.876e5$(吨).

问题二

在已知初始鱼量的情况下，制定一个最优策略，使承包 5 年的公司在生产能力破坏不太大的前提溪，获得最大捕鱼量.

根据问题的分析可以得到以下这个优化问题

$$\max H = \max \sum_{i=1}^{5} (s_3[i] + s_e[i])$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{i,1}(t)}{dt} = -ax_{i,1}(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_{i,2}(t)}{dt} = -ax_{i,2}(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_{i,3}(t)}{dt} = -0.42k_i x_{i,3} - ax_{i,3}(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_{i,3}(t)}{dt} = -ax_{i,3}(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right], \\ \dfrac{dx_{i,4}(t)}{dt} = -kx_{i,4} - ax_4(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_{i,4}(t)}{dt} = -ax_{i,4}(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

模型 1：令每一年的捕捞强度系数为一固定值，即 $k_i = k$; 这样与问题一相似，利用一元函数极值的求解方法，得到 $k = 17.58, H_{\max} = 1.605e6$(吨).

模型 2：假设每年的捕捞强度系数都不相同，即 k_i 与 i 有关，且 k_i 相互独立，则上面的优化问题可利用下坡单纯型多元函数极值解法求得

$$k_1 = 13.18, \quad k_2 = 14.35, \quad k_3 = 28.46,$$
$$k_4 = 32.42, \quad k_5 = 26.62.$$

模型 3：由分析中的生产能力不太大的破坏程度的假设，给一个惩罚函数如下：当 $p > 30\% \, r(p) = -M \times e^{5p}$, 而当 $p \ll 30\%$ 时 $r(p) = 0$ (惩罚因子 $m = le12$), 将其加到优化问题的约束条件中去，再利用下坡单纯型算法得到

$$k_1 = 12.82, \quad k_2 = 13.55, \quad k_3 = 33.95,$$
$$k_4 = 30.95, \quad k_5 = 26.40,$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

五、模型结果的检验

1. 各模型结果的横向比较：经过计算机的多次运行，各模型的结果都能稳定在一个或一组数值左右，说明了解的稳定性比较好.

2. 各模型结果的纵向比较：

(1) 问题 1 中模型 I 、 II 、 III 的解非常相近，说明 4 龄鱼在年末的鱼量对问题解的影响不大，正好与假设 3 相吻合，证明了假设 3 的合理性.

(2) 在解模型 I 、II 的时，可以看到 $x_3(0)$ 关于 k 的表达式只差一个系数，当 k 取模型 I 的解时，这个系数几乎为 1, 这就很好的说明了两个模型的目标函数接近的原因.

(3) 问题一的模型 I 与问题二的模型 I 相比较，可以看出这两个 k 也非常近似，拿计算机最后计算的结果来分析，我们可以看到第二问的初值达到与第一问的稳定值比较接近，因此前其解也比较相近.

(4) 最后一个模型的结果告诉我们在第 1 、 2 年里捕捞强度系数较小，主要是投资阶段，第 3 、 4 年的捕捞强度系数最大，因为前两年的投资使小鱼长成大鱼，正好捕捞，第 5 年捕捞率下降，是由于前量年过度的捕捞再加上生产能力不太大破坏的限制所制. 这个过程与实际也比较符合.

六、模型的优缺点

优点：

1. 6 个模型的建立过程体现了模型的由简到繁的过程，并且在问题二中的三个模型都是是将连续 (每年内的变化) 和离散 (各年的年初和年末的鱼群数量) 相结合. * 2. 在模型结果的捡验中，我们通过 6 个模型结果的纵向比较，说明了假设的合理性.

3. 每个模型的数值都通过计算机来解得，而且解出来的解与实际情况相吻合，都能用一般的常识来解释，解的稳定性也很好.

4. 本题用到的数学方法， (如常微分方程和一元函数极值求解等) 都比较简 * 单易懂.

5. 在解模型时，各年龄组的分法与模型无关，因此，可将其推广.

缺点：

1. 在禁捕期内的 3 、 4 龄鱼的产卵过程连续化上有所欠缺，但在模型的改进方向上已提出了一些有关这方面的想法.

2. 本题没有考虑资源的限制，这与实际情况不相符，因此，降低了模型的实 * 用性.

七、模型的改进方向

1. 在问题一中的模型三虽然提出了产卵和孵化应是连续过程，但其解的过程实质上还是利用了离散的过程代替了连续过程. 因此可以在此方向上进 * 行改进. 可以假设该过程是随机的过程，又可以分为两种：

(1) 每个时刻 t, 3 、 4 零鱼都可以固定的概率产卵；

(2) 每个时刻 t, 3 、 4 龄都以变概率 $q(t)$ 产卵. 这样又可以引入两个 * 模型.

2. 对 4 龄鱼在每年年末的情况还可以再分一种情况：设其为与前面无关的第 5 类鱼，再根据有关的资料查出产卵量与年龄的关系，得到一个数学表达式，从而改进模型.

3. 在问题二中的模型三, 其解题方法只在模型二的约束条件中加了一个惩罚函数. 最后仍用多元函数求值的方法来求解. 我们可以用运筹学中的惩罚函 * 数的外点法求其最优解.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参考文献

[1] E.C. 皮洛，数学生态学引论，科学出版社，北京， 1978.
[2] 姜启源，数学模型，高等教育出版社，北京， 1993.
[3] 朱元鼎，王文浜，中国动物图谱 (鱼类), 科学出版社，北京， 1973.
[4] S.E.J Φ RGENSEN, 陆健健等译，生态模型法原理，上海翻译出版公司，上海，1988.
[5] 郭耀煌等，运筹学原理与方法，西南通大学出版社，重庆， 1994.

附 录

微分方程求解过程

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -ax_1(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -ax_2(t), & t \in [0,1], \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -0.42kx_3(t) - ax_3(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = -ax_3(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right], \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -kx_4 - ax_4(t), & t \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right], \\ \dfrac{dx_4(t)}{dt} = -ax_4(t), & t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

由 (1) 式两边对 t 积分 $\int_{x_0}^{x} \frac{dx_1(t)}{x_1(t)} = \int_0^1 -adt$, 得 $x_1(1) = x_1(0)e^{-a}$.
同理对 (2) 式积分得 $x_2(1) = x_2(0)e^{-a}$.
(3) 式对 t 从 0 到积分 $\frac{2}{3}$ $\int_{x_0}^{x} \frac{dx_3(t)}{x_3(t)} = \int_0^{\frac{2}{3}} (-0.42k - a)dt$, 得

$$x_3\left(\frac{2}{3}\right) = x_3(0)e^{-\frac{2}{3}(0.42k+a)t}$$

对 $t \in [0, \frac{2}{3}]$ 积分，得到 $x_3(t) = x_3(0)e^{-(0.42k+a)t}$.
(4) 式对 t 从 $\frac{2}{3}$ 到 1 积分，得 $x_3(1) = x_3(0)e^{-(0.28k+a)}$.
同上分别对 (5) 、 (6) 式积分，得

$$x_4\left(\frac{2}{3}\right) = x_4(0)e^{-\frac{2}{3}(k+a)},$$
$$x_4(x) = x_4(0)e^{-(k+a)t},$$
$$x_4(1) = x_4(0)e^{-\frac{2}{3}(k+a)},$$

所以由模型假设，鱼产卵数

$$\begin{aligned} n =& 1.109 \times 10^5 \times \left[\frac{1}{2}x_3\left(\frac{2}{3}\right) + x_4\left(\frac{2}{3}\right)\right] \\ =& 1.109 \times 10^5 \times \left[\frac{1}{2}x_3(0)e^{-\left(0.28k+\frac{2}{3}a\right)} + x_4(0)e^{-\frac{2}{3}(k+a)}\right] \end{aligned}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因为第二年年初 1 龄鱼的数量 $n \times \frac{1.22\times 10^{11}}{1.22\times 10^{11}+n}$, 而由稳定的条件可知

$$x_1(0) = n \times \frac{1.22 \times 10^{11}}{1.22 \times 10^{11} + n}.$$

又因为 $x_3(0) = x_1(0)e^{-2a}$, 所以得到

$$x_3(0)e^{2a} = 1.109 \times 10^5 \times \left[\frac{1}{2}x_3(0)e^{-\left(0.28k+\frac{2}{3}a\right)} + x_4(0)e^{-\frac{2}{3}(k+a)}\right]$$

科学家谈数学

The education of technical personnel of all branches of science and engineering must include increased exposure to the mathematical and computational sciences. Mathematical modeling and associated computations are being critical tools in the engineering design process. Scientists rely increasingly on computational methods and must have sufficient experience in mathematical/computational methods and reliability of the results. The mathematical education of engineers and scientists needs to change to reflect this new reality.

A. Friedman, J. Glimm, J. Lavery, The mathematical and computational sciences in emerging manufacturing technologies and management practices (正在出现的制造技术和管理实践中的数学和计算科学) — SIAM Report on Issues in the Mathematical Sciences —, SIAM, 1992, p62.

英译中：　一切科学和工程技术人员的教育必须包括数学和计算科学的更多的内容. 数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具. 科学家正日益依赖于计算方法，而且在选择正确的数学和计算方法以及解释结果的精度和可靠性方面必须具有足够的经验. 对工程师和数学家的数学教育需要变革以反映这一新的现实.

(叶其孝试译)

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net