非线性交调的频率设计——A题

檀晋轩　邢毅春　郝　燕
指导教师　王尚志　张饴慈　汤玉东
（首都师范大学数学系，北京　100037）

摘要　本文讨论了A题给出的一类非线性交调的频率设计问题．首先根据题中给出的数据用最小二乘法求出适合本题要求的输入输出函数，设计出一种简洁算法用计算机求出了适合要求的解，然后对解的稳定性进行了讨论．本文的最后一部分，对解的各种数学性质做了进一步讨论，证明了本文主要结果：给出了适合本题要求的解的充分必要条件（定理1）．应用这一结果可以直接求出适合本题的频率约束的解．

一、问题的提出

1.　背景　在信号的输入输出工作过程中，人们往往遇到噪声干扰问题，干扰一方面来自系统的外部，另一方面可能来自非线性系统输出过程中产生的新频率，称之为交调．为直观起见我们看一个例子．

设有一非线性器件，其输入 $u(t)$ 与输出 $y(t)$的关系是：$y(t)=u(t)+u^2(t)$（t 为时间），当输入是包含频率 f_1,f_2 的信号 $u(t)=\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t$ 时，输出信号

$$y(t)=1+\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_1 t$$

$$+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_2 t+\cos 2\pi(f_1+f_2)t+\cos 2\pi(f_1-f_2)t.$$

我们发现 $y(t)$ 中不仅包含 f_1,f_2，而且含有 $f_i\pm f_j(i,j=1,2)$ 等新频率，即为交调，若交调出现在 f_1,f_2 附近时，会对 f_1,f_2 产生干扰．为此，在工程设计中要求对输入信号选择适当的频率配置，防止交调对信号的干扰．

2.　问题　现有一 SCS(非线性)系统，其输入输出关系如下：

输入 u	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 y	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号：$u(t)=A_1\cos 2\pi f_1 t+A_2\cos 2\pi f_2 t+A_3\cos 2\pi f_3 t$.

其中 $A_1=25,A_2=10,A_3=45$ 是输入信号的振幅．

对输入信号的频率设计要求为

1）输入信号频率范围 $36 \leqslant f_1 \leqslant 40, 41 \leqslant f_2 \leqslant 50, 46 \leqslant f_3 \leqslant 53$.

2）输出中的交调均不得出现在 $f_i \pm 5$ 的范围内，$(i = 1,2,3)$，此范围称做 f_i 的接收带，若交调出现在 $f_i \pm 6$ 的范围之外，其影响忽略不计。

3）f_i 不能出现在 f_j 的接收带内 $(i, j = 1,2,3, i \neq j)$.

4）定义 信噪比 $\mathrm{SNR} = 10 \lg \dfrac{B_i^2}{C_n^2}$（单位：分贝）.

其中 B_i 为输出中对应于 f_i 的信号的振幅 $(i = 1,2,3) C_n$ 为某一频率为 f_n 的交调的振幅.

当 f_n 出现在 $f_n = f_i \pm 6 (i = 1,2,3)$ 处，它已不在 f_i 的接收带内. 由于距 f_i 的接收带很近，此时要通过信噪比对 f_n 进行讨论. 当 SNR > 10 分贝时，我们认为 f_n 对 f_i 产生的干扰可忽略不计，否则 f_n 仍对 f_i 有干扰.

5）在实际工作中，$f_i (i = 1,2,3)$ 的取值是一切可能的非负实数，对于不同的输入、输出关系也会有不同的交调类型. 为简化过程，本问题只取 f_i 的整数值，且交调只考虑二阶类型（即 $\{f_i \pm f_j\} i, j = 1,2,3$）和三阶类型（即 $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}, i, j, k = 1,2,3$）. 现在我们的目的就是根据上述要求设计 f_1, f_2, f_3 的取值.

二、问题的分析

首先要确定输入、输出函数，一般情况下总是先选取多项式函数来描述输入、输出关系的. 我们基于以下两点确定多项式函数最高次数的. 第一，从输入的形式 $u(t)$ 可以看出，交调是由于对 $u(t)$ 进行乘方运算而产生的，$u^k(t)$ 可能产生某些 $\leqslant k$ 阶类型的交调. 而问题仅要求我们考虑二阶和三阶类型的交调，最高次数一定是 $\geqslant 3$ 的；第二，当我们选用 $\geqslant 4$ 次多项式函数进行拟合时，$\geqslant 4$ 次项的系数非常小，以致不会对结果产生影响，这一点可以从后面稳定性分析中确切地体现出来. 故我们确定输入、输出函数关系为

$$y(t) = b_0 + b_1 u(t) + b_2 u^2(t) + b_3 u^3(t).$$

根据题中数据用最小二乘法便可以确定的系数.

三、模型假设

1. 我们认为系统外的干扰忽略不计.
2. 对于 $u(t)$ 次数大于等于 4 时带来的交调影响忽略.
3. 对于拟合出的多项式，对自变量为负的部分也是正确的.

四、模型的建立与问题的解

1. 输出函数系数的确定 根据前面分析，输出函数为以下形式：

$$y(t) = b_0 + b_1 u(t) + b_2 u^2(t) + b_3 u^3(t).$$

从实际所给的数据，可以得出 $y(0) = 0$. 因此上式可化简为

$$y(t)=b_1u(t)+b_2u^2(t)+b_3u^3(t), \tag{1}$$

为确定(1)式的系数，分别视 $u(t), u^2(t), u^3(t)$ 为三个变量，$X_1(t), X_2(t), X_3(t)$，用最小二乘估计对 $y(t)$ 进行三元回归。

令

$$\varphi=\sum_{i=1}^{9}(y_i-b_1x_{i_1}-b_2x_{i_2}-b_3x_{i_3})^2 \tag{2}$$

φ 对 b_1, b_2, b_3 分别求偏导，得到 b_1, b_2, b_3 使(2)最小。

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{9}y_ix_{i_1}-b_1\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}^2-b_2\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}x_{i_2}-b_3\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}x_{i_3}=0,\\ \sum_{i=1}^{9}y_ix_{i_2}-b_1\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}x_{i_2}-b_2\sum_{i=1}^{9}x_{i_2}^2-b_3\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}x_{i_3}=0,\\ \sum_{i=1}^{9}y_ix_{i_3}-b_1\sum_{i=1}^{9}x_{i_1}x_{i_3}-b_2\sum_{i=1}^{9}x_{i_2}x_{i_3}-b_3\sum_{i=1}^{9}x_{i_3}^2=0.\end{cases} \tag{3}$$

由所给数据解方程组(3)，得出系数 b_1, b_2, b_3：

$$\begin{cases}b_1=0.237897,\\ b_2=0.0455449,\\ b_3=0.00041445,\end{cases} \tag{4}$$

故

$$y(t)=0.237897u(t)+0.0455449u^2(t)-0.00041445u^3(t). \tag{5}$$

(5)式即为 $y(t)$ 的表达式。同时，我们又用 Mathematica 软件对题中数据进行函数拟合，所得结果与上式精度十分接近，可见(5)式是较精确的。

2. 交调频率　(5)式确定了 $y(t)$ 与 $u(t)$ 的关系及有关的交调频率，为此，可以将 $u(t)$ 的具体表达式 $u(t)=\sum_{i=1}^{3}A_i\cos 2\pi f_it$ 代入(5)。在化简过程中，出现了以下形式的频率和交调：

$$f_i, i=1,2,3;\ f_i\pm f_j, i,j=1,2,3;\ f_i\pm f_j\pm f_k, i,j,k=1,2,3.$$

由题目所给条件(1)可知 $f_i\pm f_j(i, j=1,2,3)$，$f_i+f_j-f_k(i,j,k=1,2,3)$ 及 $f_i-f_j-f_k(i,j,k=1,2,3,j\neq k)$，都远离可能对 f_i 产生干扰的频带[30,61]，即它们对输入频率 $f_i(i=1,2,3)$ 不会产生干扰，例如

$$61<36+41<f_i+f_j<f_i+f_j+f_k(i,j,k=1,2,3),$$

$$f_i-f_j-f_k\leqslant 55-36-36<30(i,j,k=1,2,3).$$

因此讨论时，可不考虑含有这些形式的交调的项，而只对出现在[30,61]频带中的形如 $f_i+f_j-f_k(i,j,k=1,2,3)$ 的输入信号和交调项进行讨论，这些交调分别为

$$\begin{matrix}①\ f_1+f_2-f_3, & ②\ f_1+f_3-f_2, & ③\ f_2+f_3-f_1,\\ ④\ 2f_1-f_2, & ⑤\ 2f_1-f_3, & ⑥\ 2f_2-f_1,\\ ⑦\ 2f_2-f_3, & ⑧\ 2f_3-f_1, & ⑨\ 2f_3-f_2.\end{matrix} \tag{6}$$

这样得到了 $y(t)$ 中有用的各项的振幅。

① 含有频率 f_i 的振幅 $B_i(i=1,2,3)$，$B_i=b_1A_i+\frac{3}{2}b_3\Sigma A_iA_j^2$。

② 含有三阶交调 $f_i+f_j-f_k(i,j,k=1,2,3,\ \ i,j,k$ 互不相等)形式的振幅，均为 $C=\frac{3}{2}b_3A_1A_2A_3$.

③ 含有三阶交调 $2f_i-f_j(i,j=1,2,3,i\neq j)$ 形式项的振幅为：$\frac{3}{4}b_3A_i^2A_j$.

3. 算法

为了确定所求的解，我们用条件 4）中的信噪比进行挑选．又由条件 5)，f_i 只取整数，这样我们通过计算机得出其离散解．按以下三步进行：

① 对 f_1,f_2,f_3 在互不影响的情况下进行穷举，讨论所有可能的整数值．

② 对交调进行判断，即：使满足条件①的 f_i,f_j,f_k 的形如(6)式中形式的交调 f_m 不能进入任一个 $f_i(i=1,2,3)$ 的接收带．

③ 运用一、中条件 4)，即对满足以上条件且 $f_m=f_i\pm6$ 的交调，用信噪比条件进行筛选．

于是得到如右表 6 组结果满足条件①②经过条件 4) 的筛选后，只有两组解为最终结果，即：① 36,42,55 ② 36,49,55. 由结果看出，f_1，f_3 均取其边界值，而 f_2 的取值分别距 f_1,f_3 为可能取到的最小距离．

	f_1	f_2	f_3
1.	36	42	55
2.	36	49	55
3.	36	42	54
4.	36	48	54
5.	37	43	55
6.	37	49	55

五、稳定性分析

1. 函数系数的稳定性分析

这里我们讨论所拟合的多项式系数的波动对解的影响，共有 6 组结果满足(6)形式的交调，其中 4 组不合乎信噪比的要求，2 组是满足的．即我们要确定各系数的变化范围，使解仍是解，非解仍是非解．经过计算得到以下 3 组不等式组：

$$\begin{cases}4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2A_1^2A_2^2>0,\\ 4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2A_2^2A_3^2>0,\\ 16\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2\left(\frac{A_1A_2^2}{A_3}\right)^2\leqslant 0.\end{cases}\tag{I}$$

$$\begin{cases}4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2(A_1A_2)^2>0,\\ 4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2(A_2A_3)^2>0,\\ 16\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2\left(\frac{A_2^2A_3}{A_1}\right)^2\leqslant 0.\end{cases}\tag{II}$$

$$\begin{cases} 4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3(A_1A_2)^2>0, \\ 4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2(A_2A_3)^2>0, \\ 4\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2-90b_3^2(A_1A_3)^2\leqslant 0. \end{cases} \tag{III}$$

其中，$e=\sum_{i=1}^{3}A_i^2$.

当 $\bar{b}_1=0.237897, \bar{b}_3=-0.00041445$,

$b_1=\bar{b}_1+\delta_1, b_3=\bar{b}_3+\delta_3$ 时，

上式中 $\left(b_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2=\left(\bar{b}_1+\frac{3}{2}eb_3\right)^2+2\left(\bar{b}_1+\frac{3}{2}e\bar{b}_3\right)\left(\delta_1+\frac{3}{2}e\delta_3\right)$
$+\left(\delta_1+\frac{3}{2}e\delta_3\right)^2.$

上述 δ 的区间，即为方程系数的波动范围. 当系数在此范围内波动时，我们的结果是稳定的.

2. 对于输出函数中高次项不影响结果的分析

由于本题仅要求考虑二阶、三阶类型的交调，高于4次函数项亦可能产生这种类型的交调，但由于高于4次项的系数非常小（其量级 $\ll 10^{-5}$），故对于某个项要讨论的交调，由高于4次多项式输出函数所产生该交调的振幅，相对3次多项式输出函数所产生该交调的振幅的变化在我们讨论的稳定范围之内，所以仅考虑三次多项式函数是足够精确了.

3. 输入频率的微小波动不影响结果的分析

在本题中，我们所得到的输入频率的解都是整数解，但应该考虑到，在实际发射时，由于系统误差及偶然误差，很可能使输入的频率发生微小的变化，根据定理1可知这些微小的变化对结果是没有影响的. 也就是说，我们得到的这些解组是相当稳定的.

六、理论归纳与推广

1. 结果分析

我们从上面得到的一系列结果中发现了一些有趣的问题. 例如：满足条件①②的频率组有六组

(36,42,55),(36,49,55),(36,42,54)(36,48,54),(37,43,55,)(37,49,55).

每一组频率中最大频率与最小频率之差是大于或等于18的，并且第一、二组，第三、四组，第五、六组分别是关于最大和最小频率的中间值对称的. 如：(36,42,54)与(36,48,54)是关于 $\frac{36+54}{2}=45$ 对称的.

另外，我们在检验数据时还发现，求满足要求的频率组的各个限制条件不是彼此独立的，其中 $|f_i - f_j| \geqslant 6\ (i \neq j)$，和 $|f_1 + f_3 - f_2 - f_i| \geqslant 6$ 是关键的因素。为此，我们从理论上做了深入的讨论。

2. 定义和定理

定义 1. 以下集合中的元素

$$\{(f_1, f_2, f_3): 36 \leqslant f_1 \leqslant 40, 41 \leqslant f_2 \leqslant 50, 46 \leqslant f_3 \leqslant 55, f_i \in \boldsymbol{Z}\}$$

称作可取频率组。

定义 2. 以下各式统称交调条件:

$$|f_i - f_j| \geqslant \sigma\ (i \neq j), \tag{$*$}$$

$$|f_i - f_j - f_k| \geqslant \sigma (i \neq j), \tag{$**$}$$

$$|af_i + bf_i + cf_k - f_p| \geqslant \sigma. \tag{$***$}$$

其中 i, j, k, p 取 $1, 2, 3$；a, b, c 分别可取 ± 1；$\sigma = 6$。

定义 3. 称满足交调条件的可取频率组，(f_1, f_2, f_3) 为解组，记作 $[f_1, f_2, f_3]$。

定义 4. 以下各条件统称有效交调条件:

$$|f_i - f_j| \geqslant \sigma (i \neq j), \tag{$*$}$$

$$|f_1 + f_3 - f_2 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{I}$$

$$|f_1 + f_2 - f_3 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{II}$$

$$|f_2 + f_3 - f_1 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{III}$$

$$|2f_1 - f_2 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{IV}$$

$$|2f_1 - f_3 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{V}$$

$$|2f_2 - f_1 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{VI}$$

$$|2f_2 - f_3 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{VII}$$

$$|2f_3 - f_1 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{VIII}$$

$$|2f_3 - f_2 - f_i| \geqslant \sigma, \tag{IX}$$

（其中 $i, j = 1, 2, 3$；$\sigma = 6$）

从前面的分析，很容易验证如下引理。

引理 1. 若可取频率组满足有效交调条件，则其满足交调条件。

定义 5. 以下条件为基本交调条件.

$$|f_i - f_j| \geqslant \sigma (i \neq j), \tag{$*$}$$

$$|f_1 + f_3 - 2f_2| \geqslant \sigma. \tag{$\bigstar$}$$

引理 2. 若 (f_1, f_2, f_3) 是解组，则 $f_1 < f_2 < f_3$.

这可直接由 $36 \leqslant f_1 \leqslant 40, 41 \leqslant f_2 \leqslant 50, 46 \leqslant f_2 \leqslant 55$ 推出。故我们可以假设可取频率组 (f_1, f_2, f_3) 满足 $f_1 < f_2 < f_3$.

引理 3. 若 (f_1, f_2, f_3) 为可取频率组且满足基本交调条件，则 (f_1, f_2, f_3) 为解组.

证. 设 (f_1, f_2, f_3) 满足基本交调条件，则我们可分别验证有效交调条件中的 I—IX.

先验 (I)　　$|f_1 + f_3 - f_2 - f_1| = |f_3 - f_2| \geqslant \sigma$,

$$|f_1 + f_3 - f_2 - f_3| = |f_1 - f_2| \geqslant \sigma.$$

再验 (II)

$$|f_1+f_2-f_3-f_k| = \begin{cases} |f_2-f_3| \geqslant \sigma, & k=1, \\ |f_1-f_3| \geqslant \sigma, & k=2, \\ |f_3-f_2+f_3-f_1| \geqslant 2\sigma, & k=3. \end{cases}$$

同理可验 (III),对 (IV)—(IX) 来说

$$|2f_i-f_j-f_k| = \begin{cases} |f_i-f_j| \geqslant \sigma, & k=i, \\ 2|f_i-f_j| \geqslant 2\sigma, & k=j;k\neq i,k\neq j, \\ |f_i-f_j|+|f_i-f_k| \geqslant 2\sigma, & \begin{cases} i=\min\{i,j,k\} \\ \text{或 } i=\max\{i,j,k\}, \end{cases} \\ |f_1+f_3-2f_2| \geqslant \sigma, & i \text{ 位于 } j,k \text{ 之间}. \end{cases}$$

从而 (f_1,f_2,f_3) 满足有效交调条件,故有 $[f_1,f_2,f_3]$. 证毕.

引理 4 (解组对称性).

若 $[f_1,f_2,f_3]$,且 $(f_1,f_1+f_3-f_2,f_3)$ 是可取频率组,则 $[f_1,f_1+f_3-f_2,f_3]$.

证. 事实上,仅须证明 $(f_1,f_1+f_3-f_2,f_3)$ 满足基本交调条件(*)和(★).

设 $f_2'=f_1+f_3-f_2$.

由于 $|f_2'-f_1|=|f_1+f_3-f_2-f_1|=|f_3-f_2|\geqslant\sigma$,

$|f_2'-f_3|=|f_1-f_2|\geqslant\sigma$.

故 (f_1,f_2',f_3) 满足(*).

又因 $|f_1+f_3-2f_2'|=|f_1+f_3-2(f_1+f_3-f_2)|=|f_1+f_3-2f_2|\geqslant\sigma$,从而 (f_1,f_2',f_3) 是解组. □

注. 由于 $[36+6,55-6]\subseteq[41,60]$,故本题中解组是成对出现的.

这样,我们可以得出本文中主要结果.

定理 1. 设 $36\leqslant f_1\leqslant 40$, $41\leqslant f_2\leqslant 50$, $46\leqslant f_3\leqslant 55$, 对任意 f_1、f_3, 存在 f_2 使 (f_1,f_2,f_3) 为解组的充要条件是 $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$.

证. 充分性. 若 $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$,又因为 $[f_1+6,f_3-6]\cap[41,50]\neq\varnothing$,则可取 $f_2=f_1+\sigma$. 我们不难验证,$(f_1,f_1+\sigma,f_3)$ 满足基本交调条件.

$$f_2-f_1=\sigma\geqslant\sigma, f_3-(f_1+\sigma)=f_3-f_1-\sigma\geqslant 3\sigma-\sigma>\sigma,$$
$$f_1+f_3-2(f_1+\sigma)=f_3-f_1-2\sigma\geqslant 3\sigma-2\sigma=\sigma.$$

必要性. 设对任意的 f_1,f_3 存在 f_2, 使 $[f_1,f_2,f_3]$.

设 $f_2'=f_1+f_3-f_2$,由引理 4 及注可知, $[f_1,f_2',f_3]$ 成立. 从而满足(*)和(★), 不妨假设: $f_2'>f_2$,故

$$f_2-f_1\geqslant\sigma; |f_1+f_3-f_2-f_2|=|f_2'-f_2|=f_2'-f_2\geqslant\sigma; f_3-f_2'\geqslant\sigma.$$

于是, $f_3-f_1=(f_3-f_2')+(f_2'-f_2)+(f_2-f_1)\geqslant 3\sigma$.

这样,我们完成定理的证明. □

从这个定理可知,若 $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$,即至少存在一个 f_2,使$[f_1,f_2,f_3]$成立. 下面的定理将进一步给出集合 $\{f_2|[f_1,f_2,f_3]\text{ 成立}\}$的刻划. 由于解组是关于 $\frac{f_1+f_3}{2}$ 对称的,故仅须讨论:

$$B_2=\left\{f_2|[f_1,\ f_2,\ f_3]\text{ 成立},\ f_2<\frac{f_1+f_3}{2}\right\}$$

定理2. 对任意 f_1,f_3,若 $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$,则 $B_2=\left[f_1+\sigma,\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}\right]$,并且,仅当 $f_2=f_1+\sigma$,或 $f_2=\frac{f_1+f_3+\sigma}{2}$ 时才须讨论 SNR。

证.

1° $\forall f_2\in B_2$.

$\Leftrightarrow$ $f_3-f_1\geqslant 3\sigma>\sigma$, $f_2-f_1\geqslant\sigma$, $f_3-f_2\geqslant\sigma$, $|f_1+f_3-2f_2|\geqslant\sigma$, $f_2<\frac{f_1+f_3}{2}$.

$\Leftrightarrow$ $f_2-f_1\geqslant\sigma$, $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$, $f_1+f_3-2f_2\geqslant\sigma$.

$\Leftrightarrow$ $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$, $f_1+\sigma\leqslant f_2\leqslant\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}$

$\Leftrightarrow$ $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$, $f_2\in\left[f_1+\sigma,\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}\right]$.

2° $\forall f_2\in\left(f_1+\sigma,\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}\right)$,则 $f_2-f_1>\sigma$,

$$f_3-f_2>f_3-\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}=\frac{f_3-f_1}{2}+\frac{\sigma}{2}\geqslant 2\sigma>\sigma,$$

又 $f_1+f_3-2f_2>f_1+f_3-2\cdot\frac{f_1+f_3-\sigma}{2}=\sigma$.

从而 $[f_1,f_2,f_3]$ 不需考虑信噪比 SNR。证毕.

下面,我们进一步讨论解组中 f_1 和 f_3 的取值范围. 设 $a\leqslant f_1<f_2<f_3\leqslant b$, 在本题中, $a=36$, $b=55$,显然, $b-a\geqslant 3\sigma$. 由定理 1 可知,当 $|f_3-f_1|\geqslant 3\sigma$ 时,存在 f_2,使 $[f_1,f_2,f_3]$ 成立.

设 $f_1=a+m$, $f_3=b-n$,其中 $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$,有 $0\leqslant m+n\leqslant b-a-3\sigma$.

于是当 $f_1\in[a,b-3\sigma]$, $f_3\in[a+3\sigma,b]$ 时,有 $f_3-f_1\geqslant 3\sigma$ 能得到解组.

这样,可以根据定理 1 和定理 2,依如下步骤很快地找到所有解组.

1. 确定 m、n, $0\leqslant m+n\leqslant 55-36-18=1$.
2. 确定 f_1 和 f_3:

当 $f_1=36$ 时, $f_3=54$ 或 55. 当 $f_1=37$ 时, $f_3=55$.

3. 根据每一组 f_1,f_3 确定出 f_2:

当 $f_1=36$, $f_3=54$,则 $f_2=36+6=42$,或 $f_2=48$.

当 $f_1=36$, $f_3=55$,则 $f_2=42$ 或 $f_2=49$.

当 $f_1=37$, $f_3=55$,则 $f_2=43$,或 $f_2=49$.

这样结果与计算机运算结果完全一致.

最后,我们还应指出定理 1,定理 2 等结论不仅适用本题所规定的条件,在一定条件下可以做为一般的结果.