第 31 卷第 1 期 数学的实践与认识 Vol. 31 No. 1
2001 年 1 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Jan. 2001

The Order and Transportation of Pipelines

DING Yong, XUE Fei, ZHANG Zhen

(Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract: We succeeded in drawing up an optimal plan for the order and transportation of pipelines by establishing two models. A diagrammatic model is set up for the first problem in which there is no branch in the track of pipelines. Solution of the problem is then equivalent to the plan that minimizes some area of a special diagram. The idea of flow in network helps to set up a non-linear programming model for the last problem where the track is a tree diagram. The regular form of the model makes it convenient to find the solution by The SAS System. The model is also used to give an accurate sensitivity analysis for the first problem.

一类运输问题的建模

费浦生, 赵社峰, 李 健

(武汉大学, 武汉 430072)

摘要: 本文介绍了 2000 年全国大学生数学建模竞赛B 题的命题思路, 两种主要的建模与求解方法.

1 命题的思路

2000 年全国大学生数学建模竞赛的B 题, 本质上是一类运输问题.

运输问题是社会经济生活中经常出现的优化问题. 由于实际问题的多样性, 运输问题的模型也是各种各样的. 往往涉及到优化领域中的网络优化、线性规划、二次规划、0—1 规划等分支. 有些运输问题还涉及非线性规划、随机优化、排队论、时间表问题、库存问题等运筹学的诸多领域.

最简单的运输问题模型就是线性规划中的标准运输问题, 用单纯形法求解此类特殊问题的具体实现就是表上作业法[1]. 它的存储规模小、求解步骤简单, 是实际中常常遇到的一类模型和方法.

B 题命题的主要动机是结合当前西气东输工程的背景, 让参赛学生综合运用网络优化、线性规划或二次规划和整数规划等方面的知识, 在建模与求解过程中灵活地发挥自身的能力. 因此, 题目具有一定的综合性. 但是考虑到竞赛只有三天, 题目叙述不宜过长, 数据不宜过多, 竞赛题目对现实的问题作了简化, 主要体现在以下方面.

1. 输气管网简化为一条主管道(题目第一小题). 这一简化使问题看起来更明朗, 便于

学生思考. 而这样做又使建模不失代表性, 和复杂的输气管网的建模方法与模型是一致的. 在第三小题中管道是一个简单的树形图, 它与第一小题的模型没有多大区别. 这一问题可使学生了解到所建模型不仅适用于管道是一条线的情况.

2. 假定所用管道型号只有一种. 现实问题中管道各段的口径未必相同, 也就是说管道网上用到几种不同型号的钢管. 不同型号的钢管价格不同、重量不同而引起运费不同, 厂家选择方面的约束也与钢管型号有关. 这样一来数据量变得巨大, 模型的表达也变得复杂. 题目中简化为管道是同一型号的, 数学模型没有本质变化, 减少了建模与求解中的叙述、表达、计算方面的繁琐工作.

3. 铁路只保留了与题目中管道施工最有关的的线路. 联结管道与铁路的公路应该是一个复杂的公路网, 题目尽可能简化到几条直接从车站到管道施工线的公路段, 因而铁路上也只保留了十几个车站. 这样, 使与网络最短路有关的计算量尽可能降低, 甚至不用计算机也可能很快完成这部分工作.

4. 铁路运价和公路运价加以简化, 但保持了现实生活中的计价结构. 铁路运价的分段计价档次数减少很多, 把管道长度换算成吨位再计价的工作也省去(规定每 km 钢管为一个单位). 这样简化虽然与现实相差较大, 但保留了计价结构的特征.

由于作了上述简化, 构成了大学生能够在三天内完成的数学建模竞赛题.

在命题过程中韩继业先生和姜启源先生等提出了宝贵的意见, 包括第二小题的增加, 使得从竞赛中更能比较各参赛队的水平、能力和发挥情况.

2　模型与方法

假设题目中铁路、公路构成的图为 $G(V, E)$, V 是所有火车站(含钢厂) 及管道结点 A_1, A_2, …, A_n 的集合, E 是直接联结这些结点的铁路段和公路段的集合. 铁路部分构成子图 $G_1(V_1, E_1)$, 沿管道的公路构成子图 $G_2(V_2, E_2)$, G_2 也是管道网的图. 题目中作为目标函数的费用包括购买钢管的费用与运输费用. 其中购买费用只与向各钢厂订购的数量有关, 与运输路线无关. 这一部分很容易处理, 关键是运费. 要把钢管从生产厂运到施工沿线, 根据铁路网情况, 必然要经过管道上的结点. 例如在 $[A_i, A_{i+1}]$ 之间的一段上, 钢管或者经 A_i 或者经 A_{i+1} 运到施工处. 因此, 我们可以把运费分为从钢厂到管道结点的运费和沿管道一段 $[A_i, A_{i+1}]$ 内的运费两部分.

我们就问题 3 这种较一般的情形来叙述, 问题 1 只是问题 3 的特例. 引入以下记号:

m —— 钢厂数

n —— G_2 的结点数

c_{ij} —— 一个单位钢管从 S_i 到 A_j 的最小运价

t_{jk} —— 图 G_2 中两相邻结点 A_j 与 A_k 之间的边 A_jA_k 的边长(里程数)

N_j —— 图 G_2 中与 A_j 相邻的结点 A_k 的下标 k 的集合

x_{ij} —— 从 S_i 运到 A_j 的运量

y_{jk} —— A_j 得到的钢管沿边 A_jA_k 向 A_k 方向运送的里程数

其中 x_{ij}, y_{jk} 是问题的决策变量.

首先要解决的问题是确定 c_{ij}, 由于从 S_i 到 A_j 可能既包括一段铁路运输又包括一段公路

运输, 而两种运输计价方式是不同的, 因此需要分开处理

首先求各钢厂到各火车站的最短里程, 这是子图 $G_1(V_1, E_1)$ 的里程网络的典型的最短路问题, 可以用求最短路的Dijkstra 算法或其它算法求解[2]. 对于象本题这样的简单情况, 直接就看出最短路 求出这一最短路程就可以根据铁路运价表得到每单位钢管由各钢厂到各火车站的最低运费 如果公路网较复杂, 利用公路网络的最短路算法结合钢厂到各火车站的最低运费就能算出由各钢厂到管网结点 A_i 的单位运费 c_{ij}. 对于本题只有少量公路联结铁路网 G_1 与公路网 G_2 的情况, 计算 c_{ij} 是直接而简单的

对于由管网结点 A_j 沿边 A_jA_k 向 A_k 方向运送 y_{jk}km 钢管这一部分运费, 由于不足 1km 部分按 1km 计价, y_{jk} 应作为整数看待, 这部分运费应为 $0.1(1+2+\cdots+y_{jk})=\frac{0.1}{2}y_{ik}(y_{ik}+1)$.

根据以上分析, 我们就很容易得到总费用的表达式, 即优化问题的目标函数 根据在边 A_jA_k 上, 从两端运送到沿线的钢管数之和应为 A_jA_k 的边长 t_{jk}, 从 G_2 的一个结点 A_j 向各边运送钢管数量之和 $\sum_{k\in N_j} y_{kj}$ 应等于 A_j 得到的钢管数 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, 再考虑到对钢厂供货的约束, 我们得到优化模型Ⅰ:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}+p_i)x_{ij}+\frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in N_j}y_{jk}(y_{jk}+1) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{k\in L_j}y_{jk} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

$$y_{jk}+y_{kj}=t_{jk} \qquad k\in N_j, k<j, j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

$$y_{jk}\geq 0 \qquad k\in N_j; j=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\in\{0\}\cup[500,s_i] \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{6}$$

在模型Ⅰ中, 求解的主要困难在约束条件(6). 如果将(6)换成

$$0\leq\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq s_i \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=0 \tag{8}$$

$$500\leq\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leq s_i \tag{9}$$

这三种条件中的任何一种, 问题就是标准的二次规划问题[3], 可以直接用二次规划的程序求解 约束条件(6)实质上每一个式子包含(8)、(9)所表示的两种情形 为此, 可以用分支定界法来处理[4]. 首先用(7)取代约束(6)中的关系式, 实际上是扩大了模型Ⅰ的可行集, 形成模型Ⅰ的松弛问题 这是一个标准的二次规划问题, 求解之 得出的解如果满足(6), 则已是模型Ⅰ的解 如果(6)中的 m 个条件不全满足, 选择一个使 $0<\sum_{j=1}^{n}x_{ij}<s_i$ 的 i 对问题

(1)—(6) 进行分裂, 就这个 i 分别用(8)和(9)取代(6)中的相应关系式得到两个子问题. 这两个子问题的解中最优值小的一个就是模型Ⅰ的解. 求解模型Ⅰ就归结为求解这两个子问题. 在求解子问题时对剩下的形如(6)中关系式的约束仍然按以上方法进行松弛求解, 有必要时再进行分裂, 并在过程中不断舍弃不可能产生比现有可行解更好的解的子问题. 最终得到模型Ⅰ的最优解. 从理论上来说, 分支定界法的子问题形成一个树形图, 最坏的情况可有 2^m 个子问题. 但就本题而言, 模型Ⅰ的松弛问题的解中只有 $i=6$ 和 $i=7$ 不满足约束(6), 因此只需要一两次分裂过程即可完成.

模型Ⅰ还可以有等价的表达方式, 引入 0—1 变量 w_i, 用 $w_i=1$ 表示从钢厂 S_i 购买钢管, $w_i=0$ 表示不从钢厂 S_i 购买钢管. 则问题表示为混合 0—1 问题. 用分支定界法来求解, 和前面所述方法实质上是一致的.

3　分析与讨论

1. 对于赛题的问题 2 可以采用对销价和产量上限进行数据扰动来求解的办法来进行分析, 也可以对模型Ⅰ的求解结果直接结合已知数据来进行分析. 有些钢厂销价的变化达到一定程度(并不一定太大)时可能使问题的最优解发生本质的变化, 甚至影响到订购哪些钢厂的钢管, 对这种情况的分析是很有价值的.

2. 由于问题中所有路段的里程数均为整数, 计价的里程档次也是以整 km 划分的. 我们在模型Ⅰ中也认为所有 y_{jk} 均为整数, 当然 x_{ik} 也是整数. 但我们在模型的表达(1)—(6)及求解中并未强调 y_{jk} 为整数. 实际上, 在 A_jA_k 段如果取 $y_{jk}=l$ 和 $y_{jk}=l+1$ 达到同样的效果, 这时在 l 到 $l+1$ 这 1km 中无论从 A_j 还是 A_k 运来钢管的代价都是一样的. 这 1km 中一部分从 A_j 一部分从 A_k 运来钢管的代价也是一样的. 这是由于不足 1km 按 1km 计价所引起的. 所以, 我们求解中不必强调 y_{jk} 为整数. 具体分析一下这种情况. 先看从距 A_j 第 l 到 $l+1$km 这 1km 中的情况. 设钢管运达 A_j 和 A_k 的代价分别为 u_j 和 u_k. 则从 A_j 和 A_k 往这 1km 运送所需的总代价分别为 $u_j+0.1(l+1)$ 和 $u_k+0.1(t-l)$,

因此
$$u_j+0.1(l+1)=u_k+0.1(t-l)$$
于是
$$u_j-u_k=0.1(t-2l-1)$$
若从 A_j 运送 $l+\epsilon$(km) $(0\le\epsilon\le1)$, 则与 A_jA_k 有关的这部分费用为

$$u_j(l+\epsilon)+\frac{0.1}{2}l(l+1)+0.1(l+1)\epsilon+u_k(t-l-\epsilon)+\frac{0.1}{2}(t-l)(t-l+1)-0.1(t-l)\epsilon$$
$$=u_jl+\frac{0.1}{2}l(l+1)+u_k(t-l)+\frac{0.1}{2}(t-l)(t-l+1)+\epsilon(u_j-u_k)+0.1(2l-t+1)\epsilon$$
$$=u_jl+\frac{0.1}{2}l(l+1)+u_k(t-l)+\frac{0.1}{2}(t-l)(t-l+1)$$

明显与 ϵ 无关. 在这种情况下, 取 $y_{jk}=l$ 或 $y_{jk}=l+1$ 都是最优解, 最优解不唯一. 如果算出 y_{jk} 不是整数, 例如 $y_{jk}=l+\epsilon, 0<\epsilon<1$, 从严格意义上来说目标函数值是有误差的. 这时按(1)中的表达式计算这一部分的费用为

$$u_j(l+\epsilon)+\frac{0.1}{2}(l+\epsilon)(l+1+\epsilon)+u_k(t-l-\epsilon)+\frac{0.1}{2}(t-l-\epsilon)(t-l-\epsilon+1)$$
$$=u_jl+\frac{0.1}{2}l(l+1)+u_k(t-l)+\frac{0.1}{2}(t-l)(t-l+1)-0.1\epsilon(1-\epsilon)$$

比实际费用低了 $0.1\epsilon(1-\epsilon)$, 因此遇见这种情况时会算出最优解中 $y_{jk}=l+\frac{1}{2}$, 这也是问题的最优解, 但目标函数值比实际费用低了 0.025 万元, 这相对来说是微不足道的, 不影响解的最优性.

3. 在管网的某些段上, 从不同的钢厂运来的总代价一样, 这也可以引起最优解不唯一.

4. 若忽略运价不足 1km 按 1km 计价这一因素, 公路运费是里程 y 的连续函数, 则(1) 的第二个和式中的 $\frac{0.1}{2}y_{jk}(y_{jk}+1)$ 将变成 $0.1\int_0^{y_{jk}}x\,\mathrm{d}x=\frac{0.1}{2}y_{jk}^2$

这时 A_jA_k 这一段的运费为 $\frac{0.1}{2}[y_{jk}^2+(t_{jk}-y_{jk})^2]$

与(1) 中相邻部分的差为 $\frac{0.1}{2}[y_{jk}+(t_{jk}-y_{jk})]=0.05t_{jk}$

各段之总费用差为 $0.05L$, 其中 $L=\sum_{A_jA_k\in E_2}t_{jk}$ 是管道总长. 因此目标函数中用 y_{jk}^2 代替 $y_{jk}(y_{jk}+1)$ 不影响最优解, 但是算出的最优值比按(1) 算出的最优值少 $0.05L$.

4 线性规划模型

如果把管网分成每 km 一段, 共 r 段, 编号为 $k=1,2,\cdots r$. 则从 c_{ij} 很容易算出钢厂 S_i 到编号为 h 这一段的最低费用 e_{ih}. 设编号为 h 的一段在 G_2 中的边 A_jA_k 上从 A_j 算起的第 q 段, 则

$$e_{jh}=\min\{p_i+c_{ij}+0.1q,p_i+c_{ik}+0.1(t_{jk}-q+1)\}$$

在每一段 A_jA_k 是依次编号的, 特别是在问题 1 中是沿管道从 A_0 向 A_{15} 依次按里程编号的, e_{ih} 表现为 h 的分段线性函数. 我们取决策变量为 $Z_{ih}(i=1,2,..m;h=1,2,...,r)$, 用 $Z_{ih}=1$ 表示第 h 段用 S_i 厂的钢管, $Z_{ih}=0$ 表示第 h 段不用 S_i 厂的钢管. 则可建立线性模型 II

$$\min\quad\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{r}e_{ih}Z_{ih}\tag{10}$$

$$\text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{n}Z_{ih}=1\qquad h=1,2,\cdots,r\tag{11}$$

$$\sum_{h=1}^{r}Z_{ih}\in\{0\}\cup[500,s_i]\qquad i=1,2,\cdots,m\tag{12}$$

$$Z_{ih}\in\{0,1\}\qquad i=1,2,\cdots,m;h=1,2,\cdots,r\tag{13}$$

对约束(12) 可按对二次规划模型采用的分支定界法处理. 如果将(13) 换成 $Z_{ih}\geq 0$, 每次需要求解的松弛子问题具有标准线性运输问题的形状, 可用运输问题的表上作业法求解. 由于所有系数都是整数, 用表上作业法可得整数最优解. 再由约束(11) 及 $Z_{ih}\geq 0$, 可保证 $Z_{ih}\in\{0,1\}$. 虽然看起来模型的规模较大(r 大), 但由于表上作业法的特点, 存储量和计算量还是可以接受的, 可以在微机上求解.

对于本题目, 实际上模型用启发式算法来得更简单. 我们还注意到, 如果没有约束(12), 我们对每个 h 计算 $\min_{1\leq i\leq m}e_{ih}$, 若 $i_0(h)$ 使达到这一最小值, 即 $e_{i_0(h),h}=\min_{1\leq i\leq m}e_{ih}$, 则

$$Z_{ih}=\begin{cases}1, & i=i_0(h)\\ 0 & i\neq i_0(h)\end{cases}\qquad h=1,2,\cdots,r$$

就是问题(10) (11) (13) 的最优解. 再逐步调整使满足条件(12), 每一调整均要遵循使增加

的费用最少的原则

由于 $Z_{ih} \in \{0, 1\}$, 模型Ⅱ的可行解是由0和1排成的序列, 用遗传算法求解也是很方便的 还可以有其它的方法 总之, 这个问题的建模和解法可以是多种多样的

参考文献:

[1] 俞玉森 数学规划的原理和方法 华中工学院出版社, 1985.
[2] 刘家壮, 徐 源 网络最优化 高等教育出版社, 1991.
[3] 袁亚湘, 孙文瑜 最优化理论与方法 科学出版社, 1997.
[4] 费浦生, 郑慧娆, 陈 希 分支定界法及其自组织异步并行实现 武汉大学学报(自然科学版), 1995, 41(8): 281～286.

Modeling a Kind of Transportation Problems

FEI Pu-sheng, ZHAO She-feng, LI Jian

(Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: This paper introduces the motivitions for problem B of CUMCM '2000. Two models and solving methods are also presented.

关于“钢管订购和运输”的评注

丁颂康

(上海海运学院, 上海 200135)

摘要: 本文从评阅者的角度对求解这道题目中值得注意的问题作了阐述, 指出了同学们的解答中好的作结及不足之处

2000年网易杯全国大学生数学建模竞赛B题: “钢管订购和运输”是一道离散优化的问题 它的目标是针对两种不同的天然气输送管道的铺设要求, 制定使总费用最小的钢管订购运输计划 此外, 还须求出在前一种铺设要求下, 哪一家钢厂钢管销价的变化以及产量上限的变化对购运方案和总费用的影响最大

在本文中, 我们根据阅卷情况, 简述一些本题求解中值得注意的问题

1 关于订购和运输单价的计算

要制定出使总费用最小的订购和运输计划, 首先需要计算出单位长度的钢管从各钢厂 S_i ($i = 1, 2\cdots7$) 到需铺设的主管道(问题一)或树形图(问题三)上各枢钮点 A_j ($j = 1, 2\cdots15$ 或 $j = 1, 2, \cdots21$) 的最小费用 C_{ij}. (如果采用运输问题模型或者网络最小费用流模型, 更需