第19卷 建模专辑
2002年02月

工 程 数 学 学 报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol.19 Supp
Feb. 2002

文章编号:1005-3085(2002)05-0081-08

对于公交汽车调度问题的求解

张无非， 张 驰， 严奇琦
指导教师： 宋宝瑞
(上海交通大学,上海 200030)

编者按:对实际问题进行数学建模时,如何对实际问题提供的数据有效地进行分析,包括相应的图形直观在内,以获得对问题的洞察,建立数学模型的可靠基础,这是十分重要的。本文在这方面所做的工作是有意义的。

摘 要:为了根据所给的客流量及运营情况排出公交车调度时刻表,并尽可能地满足乘客与公交公司双方的利益,我们建立了基于图形分析的模型一和基于计算机模拟的模型二,并在模型扩展中运用已建的计算机模拟系统对所得的结果和我们对于优化调度方案的想法进行分析和评价。

公交车辆调度所要处理的数据量是巨大的,所以如何有效地重组、利用已知数据是我们建立模型一的突破口。我们首先对数据进行处理,得到了各站在各个时刻等待上车的人数曲线 $D_i(t)$ 与净上车人数曲线 $B_i(t)$。平移 $D_i(t)$ 与 $B_i(t)$,平移的距离就是起始站到各站的时间。经过适当叠加后我们得到了 $D(t)$ 与 $B(t)$ 两根新的曲线,在 t_{j-1} 至 t_j 时段内对 $D(t)$、$B(t)$ 进行积分得到值的分别是累计乘上 t_j 发出班车的总人数和 t_j 发出班车在全程内的最大车上人数,前者与收益有关,后者和汽车载客量有关。

这样,所有和制定发车表有关的信息都被包涵在了两根曲线 $D(t)$、$B(t)$ 中,而时刻表的制定更是简单地转化成了沿时间轴对 $B(t)$ 包围的面积进行划分,划分直线的间距就是发车间距。

为了满足双方的利益,我们建立了效用函数来保护双方的利益,比如在惩罚函数的监督下使公司发车间隔严格按照给定的要求;而公司也会尽量增加发车间隔以增加车辆满载率。由此制定的方案是能够让双方都满意的。结合程序,公司只需输入题中给出的数据便可得到最佳汽车调度表,包括共需车辆数、起始时刻两头车辆分配和发车时刻表,具有很强的可操作性。

关键词:数学模型;数据分析;运筹;车辆调度
分类号:AMS(2000) 90C08 **中图分类号**:TB114.1 **文献标识码**:A

1 模型假设

根据题目的要求,并为了到达将实际情况进行抽象的目的,在我们的模型中有如下假设:

1) 汽车的速度恒定为20km/h,且无特殊事件发生(如抛锚)。
2) 以分钟作为最小的时间单位,这对安排时刻表是合理的。
3) 汽车在站台的停留时间仅由该站的全天人流量决定,而与时间无关,上限为2分钟、下限为0分钟。
4) 在车站等待的人绝大多数不会离去。
5) 汽车严格按照时刻表运行,在基本模型中排除汽车中途调头的情况(如机动车)。
6) 在基本模型中,无论车程多少、票价单一;且绝大多数乘客自觉付费。

2 变量说明

变量	描述
$D_i(t)$	根据第 i 个车站全天各个时间段内上车人数而拟合出的曲线。
$B_i(t)$	根据第 i 个车站全天各个时间段内净上车人数而拟合出的曲线。
$D(t)$	对各根 $D_i(t)$ 曲线经过平移叠加以后得到的曲线。
$B(t)$	对各根 $B_i(t)$ 曲线经过平移叠加，并记录达到过的最大值而得到的曲线。
$V(t)$	综合公交公司和乘客双方利益的效用函数。
t_j	第 j 班车的发车时刻。
$\Delta t_{i,j}$	汽车由 i 站到 j 站的行驶时间(不包括在途经车站的停留时间)。
Δt_i	汽车在 i 站的停留时间。
ΔT_i	对 $D_i(t)$ 或 $B_i(t)$ 进行叠加时曲线向左移动的距离。
C	每发一辆车的费用。
N	总共发车数。
m	车票价格(本文令 $m = 2$ 元)。
L	乘客可容忍的等待时间上限，随是否为高峰时段而变化。
X_j	在 t_j 时刻发的车开走时各站上因汽车上超过 120 人而留在原车站继续等车的人数总和。

3 基于图形分析的模型一

1) 准备工作

我们首先来看一下上行线的有关客流量数据。由计算得从 A_{13} 到各个车站 A_i 行驶所需的时间 $\Delta t_{13,i}$，请注意这个时间不包括汽车在中途各站的停留时间，并且以分钟为单位进行四舍五入。

然后将各站的全天上下车人数之和进行比较，大于或等于 10000 人次的定为大站，认为在该站上下车需耗时 2 分钟，即 $\Delta t_i = 2$；5000 人次至 9999 人次定为中等站，上下车耗时 1 分钟；小于 5000 人为小站，上下车耗时 0 分钟。(参见模型假设 3)

2) 模型的建立

本题所包涵的数据量是巨大的，因此如何有效地重组这些信息是解决此题的关键。由于上下行线的对称性，我们在模型一中只对一个方向进行研究，另一方向可由相同的方法来解决。

本题的要求是制定、调整调度计划使公司与乘客的利益都能得到满足。如果说这是一个目标函数的话，那么变量是什么？十分明显，是每班车的发车时间。如果头班车的发车时间确定后，调整的变量也就是接下来各班车发车时间的间距。如果发车过早，有可能使这班车的满载率降低，影响了公司收益；发车过晚，又可能引起等车乘客的抱怨。为了能用一个简单明确的数学方法解决这个问题，我们首先引入以下两条曲线。

A. 曲线 $D_i(t)$

题目中客流量表已给出每个车站在每个小时内等待上车的人数，但是考虑到发车的时间间隔是用分钟来表示，因此在安排调度方案时我们希望能得到在几分钟内到达的人数。因为每站的等待人数会随时间的变化出现高峰，7:01 与 7:59 虽属于同一小时，但因为 7:59 更接近早高峰，在这一分钟内到达的人数肯定更多。因此在估计每分钟到达人数的时候将采用如下的方

法体现其随时间的波动。

通过曲线拟合给出各个车站上全天的等候上车人数曲线 $D_i(t)(i = 0,1,2,\ldots 13)$,具体做法如下:

首先取 A_i 站的全天上车人数数据,假设其在每个小时内人数到达率为均匀的,由此做出 A_i 站的全天等候上车人数率的直方图,每个直方宽为 60 分钟,高为该小时总共到达车站的人数(表中给出的统计值)除以 60 得到的人数到达率,单位为人 / 分钟。然后取每个直方的中点进行 3 次样条插值,便得到了一条光滑的曲线 $D_i(t)$。见图 1(数据为 A_{13} 站的等候上车人数)

考虑到时间精确到分,而人数又是离散的,只可以取正数,故对于全天 5:00 ~ 23:00 的每分钟中到达的人数我们用该一分钟的起始时刻,在曲线 $D_i(t)$ 上的函数值进行四舍五入取整而得。同时,为了处理方便,对应全天 5:00 ~ 23:00,在横轴上表示为 0 ~ 1080,单位为分钟。这样我们得到了一张新的直方图,横轴 t 上的每一直方的宽度为 1 分钟,高为该分钟到达 A_i 站的人数,在此仍记其为 $D_i(t)$。它仍旧表示车站的上车人数率,并且比其原先的以小时为宽度的直方图更为精确,因为它反映了此分钟到达车站的人数是和此时间是否接近高峰时段是关联的,越接近高峰此分钟到达的人数越多,反之亦然。见图 2

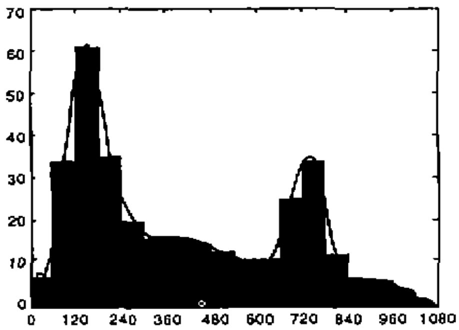

图 1

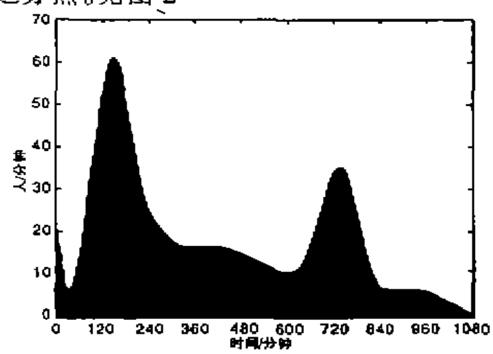

图 2 数据同样来自 A13 站

$D_i(t)$ 的实际意义:如果在 $t_1 \sim t_2$ 时段内对 $D_i(t)$ 进行积分 $\int_{t_1}^{t_2} D_i(t)dt$,得到的是在 $t_1 \sim t_2$ 时段内到达 A_i 站等待上车的人数。

B. 曲线 $B_i(t)$

汽车到达每站后,有人上车也有人下车。因此在某段时间内每个车站的净上车人数(上车人数 - 下车人数)对制定调度方案也是有很大帮助的。和得出 $D_i(t)$ 曲线的方法类似,我们得到了 $B_i(t)$。

$B_i(t)$ 的实际意义:如果在 $t_1 t_2$ 时刻分别有一辆车到达且 t_1、t_2 时刻内无其他车辆到达。在 $t_1 \sim t_2$ 时段内对 $B_i(t)$ 进行积分 $\int_{t_1}^{t_2} B_i(t)dt$,得到的是在 t_2 时刻到达的车在 A_i 站上的净上车人数,如为正表示该站上车的人多,为负表示该站下车的人多。在此,同样将人数离散分配到分钟。

在前面的尝试中,有一个性质引起了我们的注意:假设各辆汽车速度相同的情况下,每个站点上的汽车时间间距就等于起始站的发车间距。也就是当第一辆车在 t_1 时刻发出后,t_2 时刻发出了第二班车。

那么和第二辆车有关的数据是:

A_i 站在 $t_1+\Delta t_{13,i}+\sum_{s=13}^{i}\Delta t_s$ 至 $t_2+\Delta t_{13,i}+\sum_{s=13}^{i}\Delta t_s$ 这段时间内(第一辆车从 A_i 站离开到第二辆车到达 A_i 站)到达的上下客人数;

我们把 A_i 站在 $t_{j-1}+\Delta t_{13,i}+\sum_{s=13}^{i}\Delta t_s$ 至 $t_j+\Delta t_{13,i}+\sum_{s=13}^{i}\Delta t_s$(第 $j-1$ 辆车从 A_i 站离开到第 j 辆车到达 A_i 站)这段时间内的上下客人数称为一类数据,记为 T_j,因为它只和 t_j 发出的班车有关。

再明确一个问题,我们需要的是 T_j 族中的什么数据:

1) T_j 族中的累计上车人数,这和收益有关。

2) 每班车在全程中出现的最大车上人数,这和汽车的容量、载客率有关。

对于已有的 $B_i(t)$ 和 $D_i(t)$ 曲线,要把 T_j 族的数据集合到一起,实际上就是把每根 $B_i(t)$ 或 $D_i(t)$ 曲线在坐标轴上平移,使 T_j 族的数据落在同一个区间内,再进行叠加!$D_i(t)$ 经过这样的处理后就得到了 T_j 族中的累计上车人数;在对 $B_i(t)$ 进行处理时,要保证 T_j 族中的累计值始终增加,即叠加时曲线只升不降,只保留在叠加过程中所能到达的最大值,就得到了每班车的最大车上人数。具体操作如下:

A. 曲线 $D(t)$

我们已经得到了 14 根曲线 $D_i(t)$ $(i=0,1,2,\cdots,13)$,分别代表每一站上全天的等候上车人数率。考虑到 A_{13} 站每发一班车,其到达各站的时刻是依次延迟的,为了统计上了这辆车的总人数,我们将每根 $D_i(t)$ 曲线在时间轴上分别向左移动一段时间 ΔT_i, $\Delta T_i=\Delta t_{13,i}+\sum_{s=13}^{i}\Delta t_s$, $i=12,11,\cdots,0$ 其中 ΔT_i 表示向左平移的距离。

然后对 14 根曲线进行叠加,这样就得到了曲线 $D(t)$(实际上也是一张直方图),见图 3。它的起点可能早于 5:00(图中的原点)这是因为如果头班车在 5:00 发车,后面某站上在 5:00 等车的人要比在 A_{13} 站上的人等更长的时间;而其他站上的人为等待这辆车花费的时间,折合成 A_{13} 站上的时间后,相当于在 $5:00-\Delta T_i$ 时刻就开始在等待了。

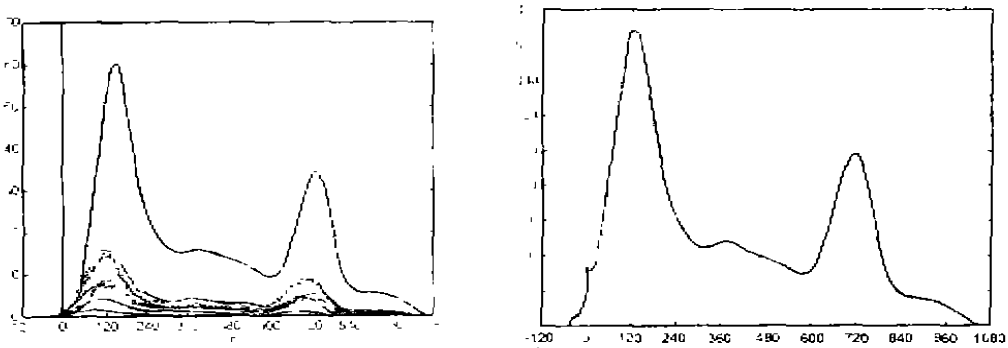

图 3 平移与叠加后的 $D_i(t)$

$D(t)$ 的实际意义:如果 t_1、t_2 时刻各有一班车发出,且 t_1、t_2 时刻内无其他车辆发出。在时间 $t_1\sim t_2$ 内进行积分 $\int_{t_1}^{t_2}D(t)dt$,积分值是各站等候上 t_2 时刻发出班车的人的数量之和。

B. 曲线 $B(t)$

对每个 $B_i(t)$ 做和处理 $D_i(t)$ 时相同的平移处理。进行曲线叠加时,和 $D_i(t)$ 叠加稍有不同。$B_i(t)$ 为净增的人数率,如果下车人数大于上车人数,为负。我们需要的时在 $t_1\sim t_2$ 时段内

出现的最大车上人数。因此在叠加过程中，如果叠加值比原值大，取叠加后的值；比原值小时，$B(t)$ 不变，直至叠加后的值又一次超过 $B(t)$。

$B(t)$ 的实际意义：如果在时刻 t_1、t_2 各有一班车发出，且 t_1、t_2 时刻内无其他车辆发出。在时间 $t_1 \sim t_2$ 内进行积分 $\int_{t_1}^{t_2} B(t)dt$，积分值是：t_1 时刻发出班车在全程中出现的最大乘客数。

至此，和汽车调度有关的数据都已包涵于两根简单的曲线 $D(t)$ 与 $B(t)$ 中！接下来所进行的汽车调度安排的实际意义更为明确，就是对 $B(t)$ 所包围的面积用平行于 Y 轴的直线进行划分，相邻两根直线的间距就是两班车的发车间距；两根直线间的面积为这班车上出现的最大乘客数。见图 4，注意曲线为 $B(t)$ 曲线

下面的工作就是确定并调整相邻两根直线的间距，以得到最好的调度方案，使公司与乘客双方的利益都能得到满足。

3）　建立效用函数

（1）　确定高峰时段

我们参照曲线的波动性以及正常情况下的乘客上车情况，取定上午 7:00 ～ 10:00 为早高峰时段，该时段内乘客等待时间的上限为 5 分钟，其余时段为 10 分钟。

（2）　列出与效用函数有关的变量

我们综合考虑公交公司与乘客双方的利益，发现与效用函数有关的量有以下几个：

a）　等待时间 Δt

总效用与 Δt 负相关，可用一个线性函数表示；而当等待时间超过上界时，不满程度将急剧上涨，这个现象我们用惩罚函数来表示。

将两者合并，得到了对于每个乘客的不满程度计算方法：$V = -k_1\Delta t - k_2(\Delta t - L)\varepsilon(\Delta t - L)$　　其中 $-k_2(\Delta t - L)\varepsilon(\Delta t - L)$ 为惩罚函数

而 $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$

在解题中我们取　$k_1 = 0.25$　$k_2 = 0.8$ $L = \begin{cases} 5\text{ 分钟} & \text{早高峰时段} \\ 10\text{ 分钟} & \text{普通时段} \end{cases}$

b）　发车数量 N

每发一班车，公交公司都要支付一笔费用 C。因此在总载客人次相同的情况下提高单车的满载率，即使每天的总发车数量减少，公交公司的收益就会增加。

c）　载客人次

载客人次越大，公交公司取得的利益也越大。这里取票价单一 $m = 2$ 元。

（3）　每发一辆车的效用函数

由于我们认为每辆车上最大载客数为 120 人，如果乘不上，车站上的人将会在车站等待下一班车。我们把 T_{j-1} 时刻发出的车开走后仍留在各个车站上的人数定为 X_{j-1}（注意，这里已把 T_j 的数据合并在一起考虑了）；如果 X_{j-1} 这班车上并未坐满 120 人，则 $X_{j-1} = 0$；

根据以上分析，我们可以知道在上一发车时刻 t_{j-1} 已确定从而 X_{j-1} 也已确定的情况下，发下一班车的效用 V 和遗留人数 X_j 都是 t_j 即发车时间的函数，其关系如下：

$$X_j = \begin{cases} X_{j-1} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} D(t)dt - 120 & \text{if } X_{j-1} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} D(t)dt \geqslant 120 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$V(t_j) = -[k_1(t_j - t_{j-1} + k_2(t_j - t_{j-1} - L)\varepsilon(t_j - t_{j-1} - L)] \times X_{j-1}$$
$$-\int_{t_{j-1}}^{t_j} [k_1(t_j - t) + k_2(t_j - t - L)\varepsilon(t_j - t - L)] \times X_{j-1}$$
$$- C + m \times (X_{j-1} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} D(t)dt - X_j)$$

$$L = \begin{cases} 5\text{ 分钟} & \text{早高峰时段} \\ 10\text{ 分钟} & \text{普通时段} \end{cases}$$

对于第一项与第二项：它们分别代表了上一班车遗留下来的人的等待费用函数，与等待此班车的人的费用函数，而 X_j 又和 t_j 有关，t_j 越小 X_j 越小，从而对后面的负影响也减少。此式表明一班车的发出要尽可能地使等待时间减少，这体现了乘客的利益。

对于第三项：它是发车费用，取定 $C = 80$ 元，虽然单个与时间无关，但如果 t_j 变大，增大了发车间距，可使整天内发车班次减少，所以 t_j 变大对公司有利。

对于第四项：是乘这班车的人总的车费，可见 t_j 变大可使这项变大。

我们的目标就是：

$$\max \sum_{j=1}^{N} V(t_j)$$
$$s.t \qquad 50 \leqslant \int_{t_{j-1}}^{t_j} B(t)dx + X_{j-1} \leqslant 120$$

4）**制定发车时刻表**

下面我们根据前面所得到的曲线 $B(t)$ 和 $D(t)$ 以及效用函数 $V(t_j)$ 来制定发车时刻表。

首先，满载率应处于 50% ~ 120%，即车上人数为 50 ~ 120 人。由于 $B(t)$ 曲线下 t_{j-1} ~ t_j 间所夹的积分面积加上 X_{j-1} 减去 X_j 后，得到 t_j 时发出的车上的最多人数，为简便计，我们在前一班车发车时间 t_{j-1} 及 X_{j-1} 已确定的情况下，先把 t_j 的变动范围$[a_j, b_j]$确定下来，确定规则为：a_j 为当 X_{j-1} 加上 $B(t)$ 由 t_{j-1} 开始积分的和首先超过50人时的那一分钟；b_j 为当 X_{j-1} 加上 $B(t)$ 由 t_{j-1} 开始积分的和首先超过120人时的那一分钟。见图5

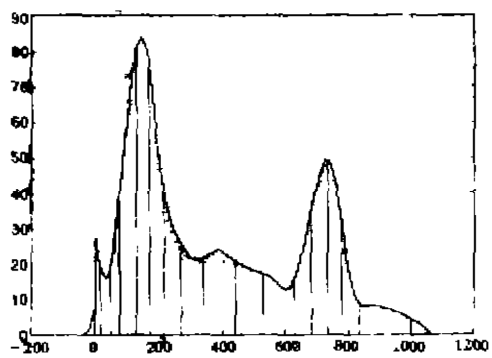

图 4

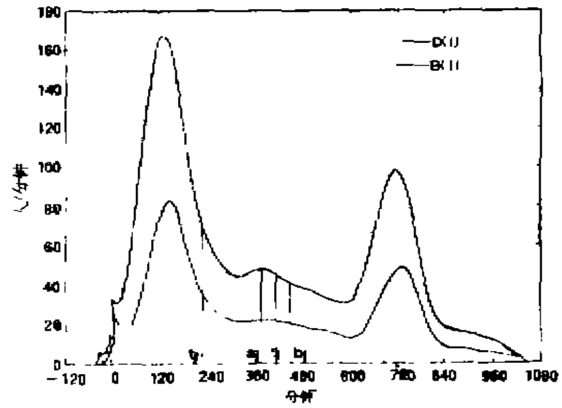

图 5

然后，利用计算机在从 a_j 到 b_j 的各分钟上计算其效用，并把取到最大效用的时刻定为 t_j，同时计算因乘不上该班车而必须编入下一班车的人数 X_j。本来这涉及到积分的计算，但因为前面已把 $B(t)$ 与 $D(t)$ 的值离散到了分钟，这样就把积分号变成了累加号；又因为以分钟为最小单位，那么 t_j 的变化也是离散的，只需对有限个值进行比较并一定存在最大值。

这样就在每步最优的情况下使时间到达 23 点，并取到了一个较优解。

值得注意的是，在处理头班车时，考虑到实际情况，我们把头班车的发车时刻 t_1 定为 5:00，然后进行以后的计算。由此便可得到上行发车时刻表。

以相同的步骤制定下行发车时刻表。区别只是各站间距离、上下车人数和车站数。

计算共需车辆总数

由于对面开过来的车到达后可随时发出，综合上下行两张发车时刻表和车辆上下行所需时间（例如：$T_{上行} = \Delta t_{13,0} + \sum_{i=13}^{0} \Delta t_i$）、编写程序根据上下行的发车表就可求出共需车辆总数 N。

5）　**结果分析**

在这个模型中通过对已知信息的重组，将和班车调度有关的所有信息用两根曲线完整地表达了出来，并且将公交车的调度转化成了对一条曲线包围面积的划分。整个模型具有清晰、直观的特点，配合我们编写的程序，公交公司只需输入和题目中相同的各站客流数据，就可立刻得到所需的汽车调度安排表。

6）　**对于题中给定线路的调度安排**

共需车辆：70 辆。5 点时 A_{13} 站分配 63 辆，A_0 站分配 7 辆。

上行发车表（在表中给定时刻发出一辆车，以分钟为单位，0 代表 5 点）

0	5	10	15	21	27	34	41	47	53	58	63	67	70
74	77	80	82	85	88	90	92	94	96	99	101	102	104
106	108	110	111	113	115	116	118	120	121	123	124	126	127
129	130	132	133	135	136	137	139	140	142	143	145	146	147
149	150	152	153	155	156	158	159	161	162	164	165	167	168
170	172	173	175	177	178	180	182	184	186	188	190	192	194
196	198	201	203	205	208	211	213	216	219	223	226	229	233
236	240	244	248	252	256	261	265	270	274	279	284	289	295
300	306	311	317	323	328	334	340	346	351	356	362	367	372
378	383	388	393	398	403	408	413	418	423	429	434	440	446
451	457	463	469	476	482	488	495	501	508	515	521	528	535
542	549	556	563	571	579	587	596	605	614	623	631	639	645
651	656	661	666	670	674	678	682	685	688	692	695	698	700
703	706	709	711	714	717	719	722	724	727	729	731	734	736
739	741	744	746	749	751	754	756	759	762	765	768	771	774
778	782	786	790	795	800	806	814	824	835	846	857	868	879
890	901	912	923	934	945	956	967	978	989	1002	1018	1040	

其中的 1040 车是我们手工加上去的，因为我们的程序已吝啬地不肯再发车了，但考虑到晚间来客的利益，我们还是强行加了这班车。（下行发车表略）

按照我们取定的效用函数，一天的总收益 = 75300 + 65100 = 140400 元。那么乘客与公司的利益得到了怎样的满足呢?

（1）　对于乘客来讲，每张发车表的时间间隔在惩罚函数的监督下严格按照给定的要求：平时小于 10 分钟，高峰小于 5 分钟。应该说乘客的利益得到了最大的满足。

(2) 对于公交公司：由于在效用函数中使用每班车都尽可能取得最大收益的贪心算法，使公司也取得了相当于当天总收入(全天车票收入)的60%的利润。

唯一的不足可能是需要车辆过多，而造成这一问题的瓶颈在于高峰时段的用车量。我们将在模型2的基础上，在模型扩展中用加入机动车的方法来处理这个问题。

5 基于计算机模拟的模型二(略)

6 模型优缺点讨论

优点：(1) 把各个车站的时刻均转换为起点站的时刻，便于对某一班车的人数变化情况进行讨论和处理。

(2) 效用函数便于利用计算机进行递推和搜索以求得最大值，从而得到较好的时刻安排。

(3) 将公交车的调度转化成了对一条曲线包围面积的划分。整个模型具有清晰、直观的特点。

缺点：(1) 所有的车均为从头到尾开完全程，没有涉及到利用只开某一区段的机动车来减轻某些大车站的压力，以使车上的满载率较平均。

(2) 上下行是单独考虑的，所以不能对所需车辆数进行调节。

参考文献：

[1] 谭永基，俞文鲅．数学模型[M]．上海：复旦大学出版社．1997

[2] 姜启源．数学模型[M]．北京：高等教育出版社，1993

[3] 雷功炎．数学模型讲义[M]．北京：北京大学出版社，1999

[4] 吴新睹，吴新垣 随机模型与计算机模拟[M]．北京：电子工业出版社，1990

[5] 《运筹学》教材编写组．运筹学[M]．北京：清华大学出版社，1999

Solution of the Problem on Bus Dispatch

ZHANG Wu-fei, ZHANG Chi, YAN Qi-qi

Advisor: SONG Bao-rui

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract: Based on a chart of passenger flow of a bus line, a mathematical model is established to determine the bus schedule in the interest of both passengers and the bus company. The efficient data processing methods, including the graphic intuition, are presented in this paper.

Key words: mathematical model; bus dispatch