

2009 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则.

我们完全明白, 在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式(包括电话、电子邮件、网上咨询等)与队外的任何人(包括指导教师)研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道, 抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料), 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺, 严格遵守竞赛规则, 以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为, 我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是(从 A/B/C/D 中选择一项填写): A

我们的参赛报名号为(如果赛区设置报名号的话):

所属学校(请填写完整的全名): 河南科技大学

参赛队员(打印并签名): 1. 郑 晨

2. 王文霞

3. 李培飞

指导教师或指导教师组负责人(打印并签名):

日期: 2009 年 9 月 11 日

赛区评阅编号(由赛区组委会评阅前进行编号):

2009 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

制动器试验台的控制方法分析

摘 要

本文主要研究的是制动器试验台上的控制方法分析,通过把车辆的路试过程模拟到试验台上,将制动器的机械问题定量化,从而更深入的研究制动器的控制方法。对此,我们分别运用到物理、理论力学和 BP 神经网络与 GM(1, 1)灰色模型等等一系列的知识结构体系,建立数学模型求解。

问题一通过等效转动惯量的概念,与力学知识列出动能守恒定理的方程,带入数据求解方程,得到等效转动惯量的结果是 $52\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

问题二运用理论力学转动惯量的公式,由此可以推出飞轮惯量 $J = \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \rho \cdot D \cdot \pi \cdot r^3 dr = \left(\frac{1}{2}\right)(R_2^4 - R_1^4) \rho \pi D$ 的公式。再代入题目中所给出的飞轮的尺寸数据,通过 EXCEL 计算,求出飞轮惯量 $10\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $40\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $70\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $130\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $100\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $160\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $190\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $220\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。我们选择出合适的机械惯量,根据题目中所给出的补偿能量相应惯量的范围,可以计算出电动机需补偿惯量 $12\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $-18\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 。

问题三通过建立微分方程的数学模型对问题求解,依题目所给条件得, $I = 1.5T$, 由力学公式可以知道, $T = J_b \cdot \alpha$, $a = \alpha \cdot r$, 推出电流与可观测量之间的关系为 $I = 1.5 \frac{J_b a}{r}$, 建立的数学模型,在问题 1 和问题 2 的条件下带入已知量,得到驱动电流 $I = 175\text{A}$ 和 $I = -262.45\text{A}$ 。同时还给出另一种模型,用理论力学知识,列出能量方程和主轴力矩方程计算出 $I = 93.14\text{A}$ 和 $I = -121.4\text{A}$, 并对两种模型进行了比较与评价。

问题四根据题目中所给定的,评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小。由此,我们知道要评价模型的优劣,需要分别求出路试时的制动器和相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量,以求他们的能量差值。最后计算得出其相对误差 $\mu = \frac{\Delta E}{E'} \times 100\% = 5.6527\%$, 这个误差大小在 5% 左右,因此,我们认为该方法较为精确。

问题五按照第 3 问导出的数学模型,通过 SPSS 模拟出了电流与时间的曲线,然后建立 GM(1, 1)灰色模型和 BP 神经网络的数学模型方法来解决计算机控制电流值的问题,并对其进行了评价。

问题六我们通过查阅资料,找出了第 5 问所给出的控制方法的不足之处,并重新设计一个比较完善的计算机控制方法。

本文建立的数学模型,能基本解决制动器在试验台上的准确度,用计算机控制电流等等问题,但由于题目所提供数据的限制,因此无法精确惯量,也使得模型的精确度达不到非常理想的效果,而且 BP 神经网络训练速度慢,给实际带来了滞后性。

关键词: 微分方程 GM(1, 1)灰色模型 BP 神经网络 曲线模拟

一、问题重述

制动器的设计是车辆设计中最重要的一环之一，它的成败直接影响着人身和车辆的安全。为了检验设计的优劣，必须进行相应的测试。在道路上测试实际车辆制动器的过程称为路试。由于车辆设计阶段无法路试，只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。制动器试验台一般由安装了飞轮组的主轴、驱动主轴旋转的电动机、底座、施加制动的辅助装置以及测量和控制系统等组成。被试验的制动器安装在主轴的一端，当制动器工作时会使主轴减速。试验台工作时，电动机拖动主轴和飞轮旋转，达到与设定的车速相当的转速后电动机断电同时施加制动，当满足设定的结束条件时就被称为完成一次制动。

以下是题目中所给出的一些专业名词的概念，和解决问题时所应考虑的因素：

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。将这个载荷在车辆平动时具有的能量等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量，与此能量相应的转动惯量在本题中称为等效的转动惯量。试验台上的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。一般假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比（本题中比例系数取为 $1.5 \text{ A/N}\cdot\text{m}$ ）；且试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。

由于制动器性能的复杂性，电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。工程实际中常用的计算机控制方法是：把整个制动时间离散化为许多小的时间段，比如 10 ms 为一段，然后根据前面时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计出本时段驱动电流的值，这个过程逐次进行，直至完成制动。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小，本题中的能量误差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

根据题目中提出的问题，我们所需要做的工作是：

1、设车辆单个前轮的滚动半径为 0.286 m ，制动时承受的载荷为 6230 N ，求等效的转动惯量。

2、飞轮组由 3 个外直径 1 m 、内直径 0.2 m 的环形钢制飞轮组成，厚度分别为 0.0392 m 、 0.0784 m 、 0.1568 m ，钢材密度为 7810 kg/m^3 ，基础惯量为 $10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，问可以组成哪些机械惯量？设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，对于问题 1 中得到的等效的转动惯量，需要用电动机补偿多大的惯量？

3、建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。

在问题 1 和问题 2 的条件下，假设制动减速度为常数，初始速度为 50 km/h ，制动 5.0 s 后车速为零，计算驱动电流。

4、对于与所设计的路试等效的转动惯量为 $48 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，机械惯量为 $35 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，主轴初转速为 514 转/分钟 ，末转速为 257 转/分钟 ，时间步长为 10 ms 的情况，用某种控制方法试验得到的数据见附表。请对该方法执行的结果进行评价。

5、按照第 3 问导出的数学模型，给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与瞬时扭矩，设计本时间段电流值的计算机控制方法，并对该方法进行评价。

6、第 5 问给出的控制方法是否有不足之处？如果有，请重新设计一个尽量完善的

计算机控制方法，并作评价。

二、模型假设

- 1、假设车前轮以及模拟的前轮的飞轮和转轴都是刚体。
- 2、假设补偿能量通过提高主轴转速来补偿。
- 3、第三问求解过程中制动减速度为常数。主轴单步长内的角加速度为定值，在步长与步长之间的角加速度可以越变。????????????????
- 4、假设主轴单位步长内角加速度速度为定值，步长间角加速度可以越变。

三、符号说明

m : 模拟的前轮的质量
 r : 模拟的前轮的半径
 v : 模拟的前轮的速度
 J : 等效的转动惯量
 E : 轮子的动能
 p : 轮子承受的载荷
 ω : 飞轮和主轴的转动角速度
 J_0 : 基础惯量
 ρ : 钢材密度
 D : 环形飞轮的厚度
 n : 飞轮个数
 J' : 机械惯量
 α : 制动车轮的角加速度
 a : 制动车轮的加速度
 I : 驱动电流
 J_b : 补偿的惯量
 w_1 : 路试车轮瞬时角速度
 α_1 : 路试车轮瞬时角加速度
 w_2 : 主轴瞬时角速度
 α_2 : 主轴瞬时角加速度
 k : 比例系数
 Δt : 单个时间步长
 Δn : 单个步长的平均转速
 ω : 单个步长的平均角速度
 φ : 单个步长轮子转

四、问题分析

题目中主要研究的是：在制动试验台上模拟车辆的制动过程。因此我们查阅资料，了解制动器试验台的工作过程。制动器试验台工作原理图如下所示：

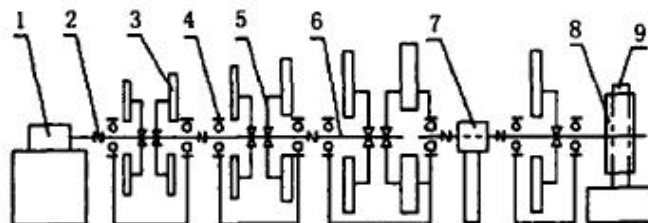


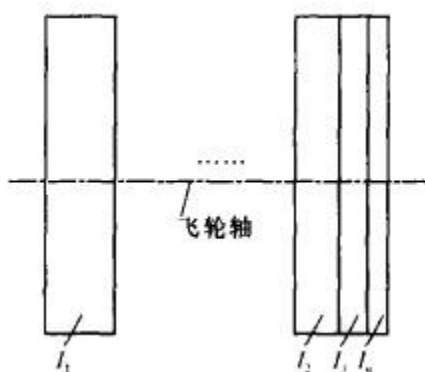
图1 惯性负载制动器试验台方案图

1-电动机; 2-联轴器; 3-惯性盘; 4-支座轴承; 5-离合器;
6-轴系; 7-转速转矩传感器; 8-制动盘; 9-被测制动器

根据题目中所提出的6个问题，我们组的前期工作是将六个问题进行定性分析。我们将前三问定性到物理问题，可以通过直接列出物理方程进行求解；后面三问，我们定性于建立数学模型求解，分别对制动系统进行评价，预测，以及改善模型四个方面的问题。

第一问：我们通过题目中所给出的等效转动惯量的概念，与物理学知识列出能量守恒定理的方程， $E_1 = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$ ， $E_2 = \left(\frac{1}{2}\right)J\omega^2$ ， $E_1 = E_2$ 通过题目给出的已知条件，带入数据分别计算出 E_1 ， E_2 ，根据等式求解方程，便能得到等效转动惯量的值。

第二问：我们要计算机械惯量，首先需要研究飞轮在试验台上的组合结构，制动器试验台上的飞轮示意图如下所示：



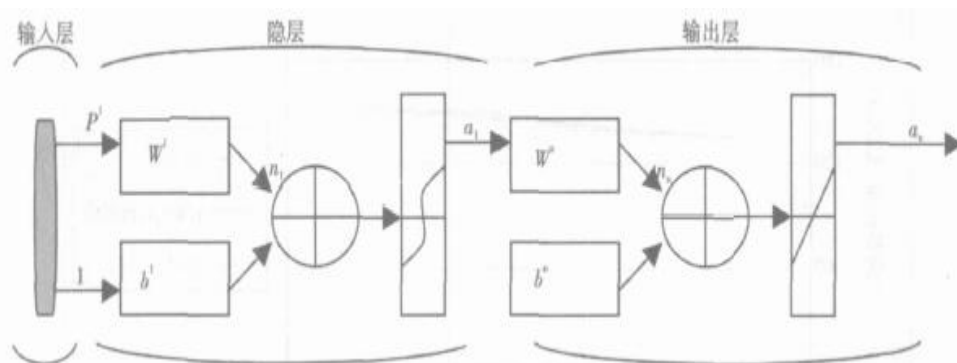
我们通过上图能观察到飞轮的结构，由理论力学的知识，我们可以知道转动惯量的定义式为 $J = \int r^2 dm$ ，其中 $dm = \rho dv = \rho \cdot D \cdot 2\pi r \cdot dr$ ，由此我们可以推出飞

轮惯量公式是 $J = \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \rho \cdot D \cdot \pi \cdot r^3 dr = \left(\frac{1}{2}\right)(R_2^4 - R_1^4) \rho \pi D$ 的公式。再代入题目中所给出的飞轮的尺寸数据，通过 EXCEL 计算，能求出飞轮惯量。我们发现机械惯量有8种情况，将其一一计算出来，通过第一问所求出的等效转动惯量，选择出合适的机械惯量，通过题目所给出的补偿能量相应的惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，可以计算出电动机需补偿多大的惯量。

第三问：我们通过题目中所给定的驱动电流的算法。列出微分方程 $I = 1.5T$ ，由理论力学公式可以知道， $T = J_b * \alpha$ ， $a = \alpha * r$ ，所以可以推出电流与可观测量之间的关系为 $I = 1.5 \frac{J_b a}{r}$ ，即为建立的数学模型，将问题 1 和问题 2 的条件带入，可计算出驱动电流的大小。同时，我们认为此模型只是运用了理论力学的公式，无法与瞬时转速与瞬时扭矩是可观测量离散量的模型思想联系起来。因此，我们通过制动器试验台上的机械原理力学分析，列出了能量守恒方程和力矩守恒方程，建立了瞬时转速与瞬时扭矩与电流的关系的数学模型，从而也计算出了驱动电流的大小。

第四问：根据题目中所给定的评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小，所以我们通过能量误差指标来检验该种控制方法的优劣。因此，我们需要分别求出路试时的制动器和相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量，以求他们的能量差值和相对误差。通过计算差值和相对误差能确定其精确度。最终得到该方法的精确度的相对误差是 5.6527%。

第五问：由于题目要求在给出前一个时间段观测到的瞬时转速和瞬时扭矩，能得到本时间段电流值。按照第 3 问导出的数学模型，我们建立 GM(1, 1) 灰色模型和 BP 神经网络数学模型方法。下图是 BP 网络系统工作的流程图：



因为这个过程是通过瞬时转速和瞬时扭矩来控制电流，就必须要有输入与输出，我们先通过灰色系统 GM (1, 1)，因为本题的过程是知道上一时间段的瞬时转速与瞬时扭矩，对本时间的电流做出预测，因此，我们使用灰色系统 GM (1, 1) 的模型，能使随机性弱化，而确定性增强，可以建立时间序列的数列预测的模型进行求解。而 BP 神经网络能分析数据，对输入样本进行神经网络训练，通过实际输出与样本输出的误差，来修订网络的连接权值，达到拟合误差的目的。然后就共同分析来解决计算机控制电流值的问题，并对其进行了评价。

第六问：我们知道第五问所给出 BP 神经网络的控制方法神经网络训练较慢，而且用灰色系统对电流进行预测，精度检验后，一般都有较大的误差，因此，我们在查阅资料后，决定采用模糊自整定 PID 来控制系统，因为它有克服系统所处环境恶劣，线性不好，处理速度快等多方面缺点的能力，无疑能很好的弥补第五问中所采用的 GM(1, 1) 灰色模型和 BP 神经网络数学模型的缺陷。因此，我们认为采用模糊自整定 PID 是一个比较完善的计算机控制方法。

五、模型的建立与求解

第一问：由力学知识，动能定理可知，平面运动刚体的能量即动能，为 $E_1 = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$

实验台上飞轮和主轴等的转动能量为 $E_2 = \left(\frac{1}{2}\right)J\omega^2$

根据能量守恒定理，依题中条件得， $E_1 = E_2$

且由物理知识可列出 $m = \frac{P}{g}$ ， $v = r * \omega$

由以上条件带入原方程中，即可得出等效的转动惯量为 $J = mr^2 = 52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

第二问：由理论力学知识，我们能够列出转动惯量的定义式得 $J = \int r^2 dm$

其中 $dm = \rho dv = \rho \cdot D \cdot 2\pi r \cdot dr$

由此可以推出飞轮惯量 $J = \int_{R_1}^{R_2} 2 \cdot \rho \cdot D \cdot \pi \cdot r^3 dr = \left(\frac{1}{2}\right)(R_2^4 - R_1^4) \rho \pi D$ 。

将题目中给出的三个飞轮的内、外径和厚度的值分别带入，用 EXCEL 处理，得出结果如下：

飞 轮 号	外 径 (m)	内 径 (m)	厚 度 (m)	密 度 ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)	惯 量 ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
1	1	0.2	0.0392	7810	30
2			0.0784		60
3			0.1568		120

机械惯量可能的组合为 $J' = J_0, J' = J_1 + J_0, J' = J_2 + J_0, J' = J_3 + J_0$ ，
 $J' = J_1 + J_2 + J_0$ ， $J' = J_1 + J_3 + J_0$ ， $J' = J_2 + J_3 + J_0$ ， $J' = J_1 + J_2 + J_3 + J_0$ ，
 $J_0 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 八种情况。

所以可能得到的机械惯量为： $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，
 $130 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $160 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $190 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $220 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

由于第一问中计算得到的等效惯量为 $52 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，所以，我们可以用等效惯量依次减去计算出来的 8 个机械惯量的值，分别得到补偿惯量为： $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，
 $42 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $-18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $-78 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $-48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $-108 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ， $-138 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，
 $-168 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。为了满足题目要求的补偿惯量的范围为 $[-30, 30] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，我们从 8 个结果中选取机械惯量为 $40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，对应的补偿惯量分别为 $12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $-18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

第三问：依题目所给条件得， $I = 1.5T$

由力学公式可以知道， $T = J_b * \alpha$ ， $a = \alpha * r$

所以可以推出电流与可观测量之间的关系为 $I = 1.5 \frac{J_b a}{r}$ ，即为建立的数学模型。

在问题 1 和问题 2 的条件下知， $J_b = 12 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $J_b = -18 \text{kg} \cdot \text{m}^2$ ， $r = 0.286 \text{m}$

$$\text{减速度 } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50 \times 1000}{3600 \times 5} = 2.78 \text{m/s}^2$$

带入建立的数学模型得到驱动电流 $I = 175 \text{A}$ 和 $I = -262.45 \text{A}$

而我们根据制动器的原理与理论力学的基础知识，做出了第二种方法。

在模拟过程中尽量使每时刻路试车辆具有的能量与模拟装置具有相同的能量，由此可以列出能量等效方程：

$$\frac{1}{2} J w_1^2 = \frac{1}{2} J' w_2^2 \dots\dots\dots (3-1)$$

对这个方程移向可变化推导出：

$$\frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{J}{J'}} \dots\dots\dots (3-2)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{J}{J'}} \dots\dots\dots (3-3)$$

$$\text{令 } \sqrt{\frac{J}{J'}} = k \dots\dots\dots (3-4)$$

对于模拟装置的主轴进行力矩分析：

$$T_{\text{制动}} - T_{\text{电机}} = T_{\text{主轴}} \dots\dots\dots (3-5)$$

由于模拟的过程使模拟装置与路试吻合，即可认为：

$$T_{\text{制动}} = J \alpha_1 \dots\dots\dots (3-6)$$

$$\text{由上可得： } T_{\text{电机}} = J \frac{\alpha_2}{k} - T_{\text{主轴}} \text{ 即 } I = 1.5 (J \frac{\alpha_2}{k} - T_{\text{主轴}})$$

另外可得其另一种表达式： $T_{\text{电机}} = J \alpha_1 - J' \alpha_2$ 代入 k 可得：

$$T_{\text{电机}} = J \alpha_1 - k J' \alpha_1$$

对于题目中有初、末速度和时间等关系可用 $I = 1.5 (J \alpha_1 - k J' \alpha_1)$ 计算

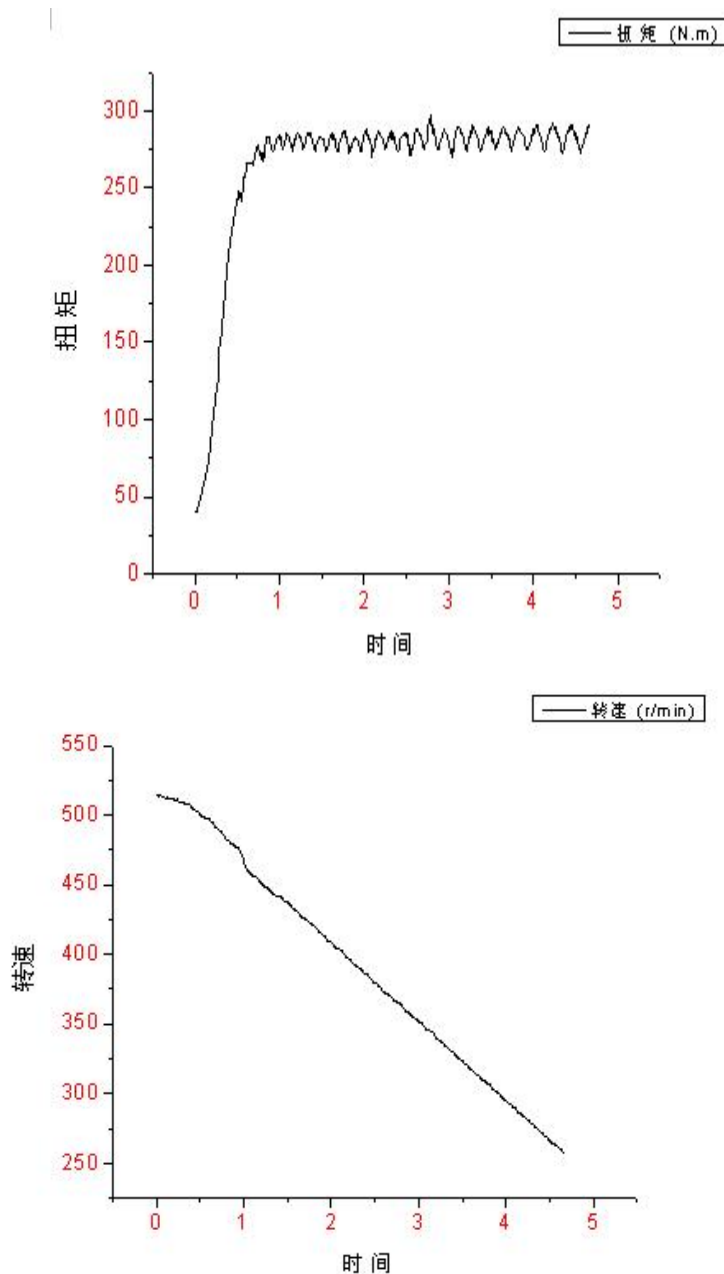
通过 EXCEL 可计算出驱动电流的结果：93.14 A 和 -121.4 A。

要计算能量要首先考虑惯量的模拟精度，它是制动器试验台模拟中的重要参数。针对以上两种算法，我们认为其各有优劣，方法一是建立纯粹的力学模型，相当于控制电动机转速的方法来进行惯量的模拟，其精度相对较高，比较适合实际的情况，但是并未对各种制动条件进行详细分析，而且通过实验数据观察到其转速相应具有滞后性；而方法二通过可观测量建立数学模型，相当于采用控制电

动机转矩的方式来进行惯量的模拟，但控制的稳定性和精度不是很高，如果计算时主要考虑转矩的影响，那么用第二种方法比较好。

第四问：根据题目中所给定的评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小。我们通过能量误差指标来检验该种控制方法的优劣，因此，需要分别求出路试时的制动器和相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量，以求他们的能量差值。

首先我们用 SPSS 软件来处理所给的数据，得到的效果不太理想，具体数据及图形见附录。然后我们根据 Origin 软件对题目中所给出的数据进行处理，做出如下图形：



我们通过观察图形与数据发现转速在某一段时间内，大小是不发生变化的，但是，转矩的值随时间一直在变化，所以我们认为用转速来计算在实验台上模拟的制动器制动过程中消耗的能量误差会比较大，很不精确。因此我们根据转矩和能量的关系来计算制动器在制动过程中消耗的能量。具体过程如下：

实验台上制动器在制动过程中消耗的能量 $E = \sum_{i=1}^{468} T_i * \varphi$

由力学知识可得到关系式 $\varphi = \omega * \Delta t$, $\omega = 2\pi * \Delta n$

用 EXCEL 处理得到如下结果:

T	Δn	ω	φ	E
40	514.06	3228.2968	32.282968	49152.43777
40	513.515	3224.8742	32.248742	
.....	
288.75	257.44	1616.7232	16.167232	

我们可以看到表格中的 E 表示在实验台上制动器在制动过程中消耗的能量大小为 $E=49152.43777 J$

我们计算路试时的能量时, 利用公式 $E = \left(\frac{1}{2}\right) J \omega^2$, 初始时和末时的能量之差即为制动器在制动过程中消耗的能量。

$$\begin{aligned}
 E_{\text{初}} &= \left(\frac{1}{2}\right) J \omega_{\text{初}}^2 = \left(\frac{1}{2}\right) J \times (2\pi n_{\text{初}})^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right) \times 48 \times (2\pi \times 514.33/60)^2 = 69463.11684 J \\
 E_{\text{末}} &= \left(\frac{1}{2}\right) J \omega_{\text{末}}^2 = \left(\frac{1}{2}\right) J \times (2\pi n_{\text{末}})^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right) \times 48 \times (2\pi \times 257.17/60)^2 = 17365.77921 J
 \end{aligned}$$

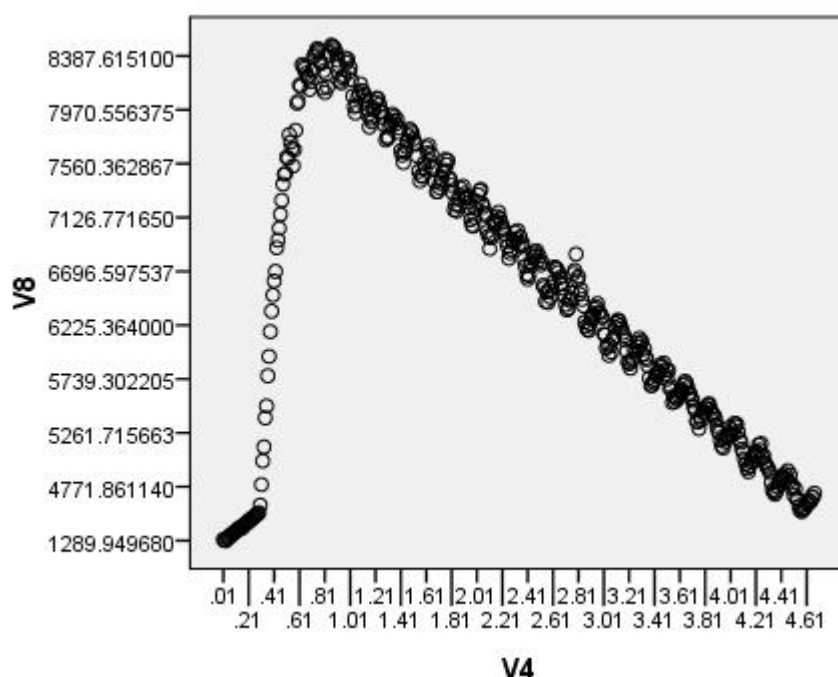
所以路试时消耗的总能量 $E' = E_{\text{初}} - E_{\text{末}} = 52097.34 J$

路试和试验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差 $\Delta E = E' - E = 2944.9 J$ 即为衡量该控制方法优劣的标准。

其相对误差 $\mu = \frac{\Delta E}{E'} \times 100\% = 5.6527\%$, 根据查资料我们了解到相对误差 μ 只要在 5% 附近波动即可认为其相对精确。由此可以看出我们采取的处理方法比较合理。

通过 SPSS 软件我们可以得到单个步长消耗的能量随时间变化的散点图及其模拟曲线, 图形如下。

由图形可以看出单个步长制动器消耗的能量基本上可以看做是连续的, 即相邻两个步长内制动器消耗的能量变化不大, 所以, 我们用每个步长内制动器消耗的能量相累加的方法是合理的。



第五问：题目要求按照第 3 问导出的数学模型，给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩，设计本时间段电流值的计算机控制方法，即由第 3 问导出的数学模型对电流进行关于时间的预测。预测的方法比较多而且都需要有一定的数据为基础进行预测，预测的过程可以是先建立预测模型再由给定的数据进行评价，但是此过程中模型的建立必将全部用符号表示，有些环节无法评定其是否合理，也就不能充分证明模型的正确性。例如：曲线模拟过程中必须按显著性水平选取曲线，这就决定了在预测过程中应该尽量以已知的数据为基础进行。因此我们将第 4 问的数据看成是一组变动的参数，由此基础模拟出电流随时间的变化规律，然后控制电流使其按照模拟出的规律随时间变化直至制动停止。我们先通过灰色系统 GM (1, 1) 对结果进行预测。然后用 BP 神经网络能分析数据，对输入样本进行神经网络训练，通过实际输出与样本输出的误差，来修订网络的连接权值，达到拟合误差的目的。具体过程如下

1、问题综述：

由第 3 问的第二种方法所得出的电流瞬时值为：

$$I = 1.5(J \frac{\alpha_2}{k} - T_{\text{主轴}}) \cdots \cdots (5-1)$$

其中 α_2 是主轴在步长内的角加速度，在假设单步长内角加速度为定值的前提下，此变量可以由单步长的始末速度以及步长求出： $\alpha_2 = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ ，其中 Δw 可以由转速的变化转变得出，在此过程中先通过对已知数据进行处理，算出来每个步长的等效角加速度，由于假设是在每个步长内的角加速度为定值，则用首末角速度差等效 Δw 是合理的， Δt 是每个步长的时间。然后通过拟合出 α_2 与 t 的曲线以及 $T_{\text{主轴}}$ 与 t 的曲线，再将两条曲线带入 (5-1) 即可得出 I 随 t 变化的关系式，进

而控制电流。

2、曲线模拟：

2—1、 α_2 与 t 的曲线模拟与分析：将数据按问题综述中所述方法处理后用 SPSS 软件进行曲线模拟，模拟结果见附表 5 和附表 6

由附表 5 可以直观地看出 α_2 与 t 没有明显的关系，有附表 6 得知最大的显著性水平 $R=0.067$ ，所以 α_2 与时间 t 没有较好的拟合曲线。然而通过分析可知 α_2 与 $T_{\text{主轴}}$ 由一定的关系：

$$T_{\text{主轴}} = J \times \alpha_2 \cdots \cdots \cdots (5-2)$$

因此我们可以把 α_2 通过转化到 $T_{\text{主轴}}$ 。由 (5-1) (5-2) 可以得出：

$$I = 1.5(k-1)T_{\text{主轴}} \cdots \cdots \cdots (5-3)$$

通过 SPSS 曲线拟合与分析 $T_{\text{主轴}}$ 与 t 的关系式结果见附表 7 和附表 8

通过曲线拟合可知三次曲线能达到较好的拟合效果，其中 $R^2 = 0.824$ ，得出 $T_{\text{主轴}}$ 与 t 的关系式：

$$T_{\text{主轴}} = 12.886t^3 - 108.071t^2 + 272.95t + 83.774 \cdots \cdots \cdots (5-4)$$

将 (5-4) 式带入关系式 (5-3) 即可得出驱动电流 I 和时间 t 的关系式：

$$I = 1.5(k-1)(12.886t^3 - 108.071t^2 + 272.95t + 83.774)$$

其中 k 是比例系数 $k = \sqrt{\frac{J}{J'}}$

我们通过灰色系统软件，分别输入问题四中所附的 EXCEL 表格中的数据，468 行的扭矩与 468 行的转速，能够直接通过软件预测出下一步长的扭矩与转速，将数值带入我们所建立的数学模型中，能算出驱动电流的值，将结果与使用灰色系统 GM(1, 1) 和用 BP 神经网络的模型结果进行对比，判断其精确程度。

我们经过多步代换得到驱动电流和时间的关系式 $I = 1.5(k-1)(12.886t^3 - 108.071t^2 + 272.95t + 83.774)$ ，其中的变量只有时间，所以我们可以用一阶一个变量的 GM(1, 1) 灰色模型预测系统来预测下一刻的驱动电流的大小。

驱动电流随时间的单调性不太明显，因此我们采用数据的一次累加模型，依次累加使数据的单调性更加明显，利用 GM(1, 1) 灰色模型预测系统的主要软件来进行预测。首先输入第四问所给出的 EXCEL 表格中的时间数据和所求出的驱动电流和时间的关系式，算出所给出时间内每一步长内的驱动电流的大小，然后利用 GM(1, 1) 灰色模型预测系统的主要软件对该列数据进行累加，得到一个单调

性明显的数列，然后就可以利用软件来预测下一短时间的驱动电流的大小，然后再累减得到原始所求序列，以达到控制的目的。

第六问：第五问采用的 GM(1, 1) 灰色模型和 BP 神经网络数学模型存在着精度不高，神经网络训练慢的缺陷，具体来说，它的缺陷有以下几点：

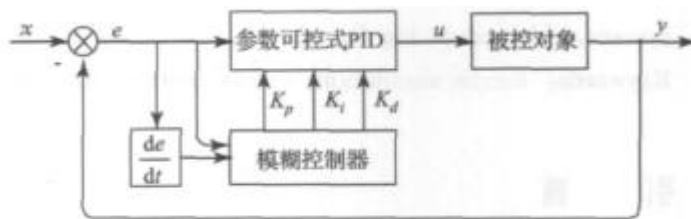
BP 算法的学习速度很慢，其原因主要有：

- 1、由于 BP 算法本质上为梯度下降法，而它所优化的目标函数又非常复杂，因此，必然会出现“锯齿形现象”，这使得 BP 算法低效；
- 2、存在麻痹现象，由于优化的目标函数很复杂，它必然会在神经元输出接近 0 或 1 的情况下，出现一些平坦区，在这些区域内，权值误差改变很小，使训练过程几乎停顿；
- 3、为了使网络执行 BP 算法，不能用传统的一维搜索法求每次迭代的步长，而必须把步长的更新规则预先赋予网络，这种方法将引起算法低效。

网络训练失败的可能性较大，其原因有：

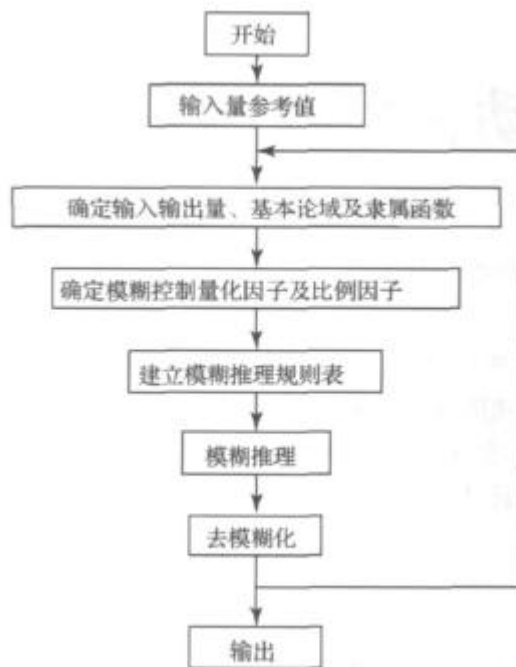
- 1、从数学角度看，BP 算法为一种局部搜索的优化方法，但它要解决的问题为求解复杂非线性函数的全局极值，因此，算法很有可能陷入局部极值，使训练失败；
- 2、网络的逼近、推广能力同学习样本的典型性密切相关，而从问题中选取典型样本实例组成训练集是一个很困难的问题。
- 3、难以解决应用问题的实例规模和网络规模间的矛盾。这涉及到网络容量的可能性与可行性的关系问题，即学习复杂性问题；
- 4、网络结构的选择尚无一种统一而完整的理论指导，一般只能由经验选定。为此，有人称神经网络的结构选择为一种艺术。而网络的结构直接影响网络的逼近能力及推广性质。因此，应用中如何选择合适的网络结构是一个重要的问题；
- 5、新加入的样本要影响已学习成功的网络，而且刻画每个输入样本的特征的数目也必须相同；
- 6、网络的预测能力（也称泛化能力、推广能力）与训练能力（也称逼近能力、学习能力）的矛盾。一般情况下，训练能力差时，预测能力也差，并且一定程度上，随训练能力的提高，预测能力也提高。但这种趋势有一个极限，当达到此极限时，随训练能力的提高，预测能力反而下降，即出现所谓“过拟合”现象。此时，网络学习了过多的样本细节，而不能反映样本内含的规律。

因此，我们在查阅资料后决定采用模糊自整定 PID 的控制方法，因为 PID 控制方法能解决线性不好，所处环境恶劣等诸多问题，而且处理速度快，能弥补 BP 神经网络的不足之处，下图是 PID 控制制动器试验台的系统图：



PID 控制主要算法是：

- 1) 模糊控制器的输入语言变量为：误差和误差变化量，输出的则是语言变化量，如上图所示，程序流程图下图所示：



我们将模糊控制器和常规 PID 控制器结合起来，便构成模糊自整定 PID 控制器。在 LabVIEW 中编写程序，可以看出其响应速度快，超调量小的特点。对于制动器试验台电模拟系统进行控制，需要实时采集制动轴的转速、制动转矩，计算下一时间段的转速变化趋势。因此需要在该程序中引入模拟量信号采集、控制量输出、串口通讯、以及数据显示等环节。

但是，我们通过查阅资料，发现虽然采用 PID 控制试验台改善了 GM(1, 1) 灰色模型和 BP 神经网络数学模型控制试验台所存在的不足，但还是有些缺陷必须预先考虑：

1. 惯量模拟范围受电机容量限制，电机容量过大势必增加系统成本，可以采用增加若干惯性飞轮提高惯量模拟范围的措施。
2. 补偿时间的计算需要依据预测的制动时间，由于制动衬片的摩擦因数是随温度和压力等条件变化的不确定量，因而制动时间很难精确预测。当补偿时间与补偿起始时间之和大于实际制动时间时会出现补偿不完全的现象，因而应该使补偿时间在允许条件下尽量缩短。
3. 采用能量补偿法模拟惯量势必使转速曲线变为折线形（图 2 中的折线 ACEB），而且仅当补偿时间恰好等于实际制动时间且补偿起始时间为 0 时，转速曲线为一条直线。补偿时间越长，转速曲线越接近直线，但这与上述补偿时间尽量缩短相矛盾，因此折中的补偿时间取值范围是预测制动时间的 50%~80%。

因此，这还需要我们去探寻更好的办法来解决控制制动器试验台的问题。

六、模型的评价与推广

本模型主要讨论了控制制动器试验台上的相关问题。在解决题目所给出的六个问题的时候，我们分别运用到了物理学，理论力学，以及微分方程，GM(1,1) 灰色模型和 BP 神经网络，模糊自整定 PID 方面的知识，建立了关于解决制动器试验台上等效转动惯量的计算，机械惯量，补偿惯量，驱动电流还有计算机自动控制电流的求解过程，以及对模型进行了评价。总的来说，完成了题目中所提出的问题，并建立了比较完善的数学模型。但是我们知道惯量是制动器试验中的重

要试验参数，惯量的精度直接影响试验结果的准确度。但由于题目所给的条件有限，我们无法更加精确惯量的精度，这使得后面的计算，以及我们所建立的数学模型与真实试验台上的模拟有着一定的差距，在第三问计算驱动电流的时候，我们建立出了两种数学模型，而两种模型之间的具体关系，我们研究的比较浅。

应该说制动器的设计是车辆设计中最重要的一环之一，它的成败直接影响着人身和车辆的安全。因此它的优劣性也显得尤为重要，但由于车辆设计阶段无法路试，只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。所以模拟试验得精确决定了最后是否成功。我们所建立得数学模型，在不要求惯量精度时，是有一定得准确性的，但实验台上务必要求精确，高效，与达到这一目标相比，我们所建立的模型还存在着明显的缺陷，这也是我们小组今后要改进模型的方向。

七、参考文献

- [1] 郑汉鼎，刁在筠，数学规划[M]，山东：山东教育出版社，1997. 12
- [2] 李庆扬，王能超，易大义，数值分析（第四版）[M]，北京：清华大学出版社，2001. 8
- [3] 秦曾煌，电工学（第六版）[M]，哈尔滨：高等教育出版社，2007
- [4] 梁波，李玉忍，模糊自整定 PID 在制动器试验台电惯量模拟应用[M] 西安：西北工业大学自动化学院，2008. 10
- [5] 刘鸿文，材料力学（第四版）[M]，高等教育出版社 2003. 3
- [6] 程靳，程燕平，理论力学学习辅导[M]，高等教育出版社，2002
- [7] 董霞，陈康宁，李天石，机械控制理论基础[M]，西安交通大学出版社，2005. 7
- [8] 马继杰，吴博达，刘笑羽，程光明，孙景阳，制动器惯性台架电模拟惯量的研究，汽车制动网，2009. 4

附录：

附录一：转速随时间变化的数据参数

模型汇总和参数估计值

因变量: V3

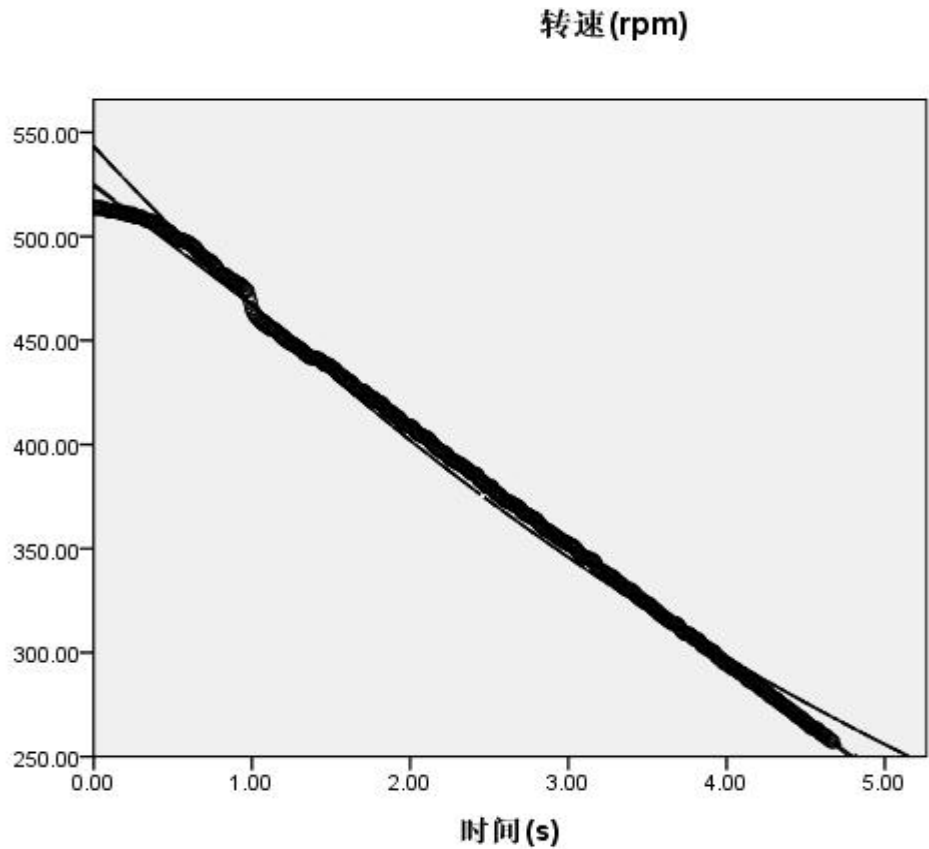
方程	模型汇总					参数估计值			
	R 方	F	df1	df2	Sig.	常数	b1	b2	b3
线性	.999	358983.857	1	466	.000	524.151	-57.394		
对数 ^a000	.000		
倒数 ^b000	.000		
二次	.999	185874.504	2	465	.000	525.335	-58.918	.326	
三次	.999	126342.573	3	464	.000	524.290	-56.218	-1.121	.207
复合	.992	59116.370	1	466	.000	543.267	.860		
幂 ^a000	.000		
S ^b000	.000		
增长	.992	59116.370	1	466	.000	6.298	-.151		
指数	.992	59116.370	1	466	.000	543.267	-.151		
Logistic	.992	59116.370	1	466	.000	.002	1.162		

自变量为 V4。

a. 自变量 (V4) 包含非正数值。最小值为 .00。无法计算对数模型和幂模型。

b. 自变量 (V4) 包含零值。无法计算倒数模型和 S 模型。

附录二：转速随时间变化的曲线模拟图



附录三：角加速度与时间的曲线数据参数

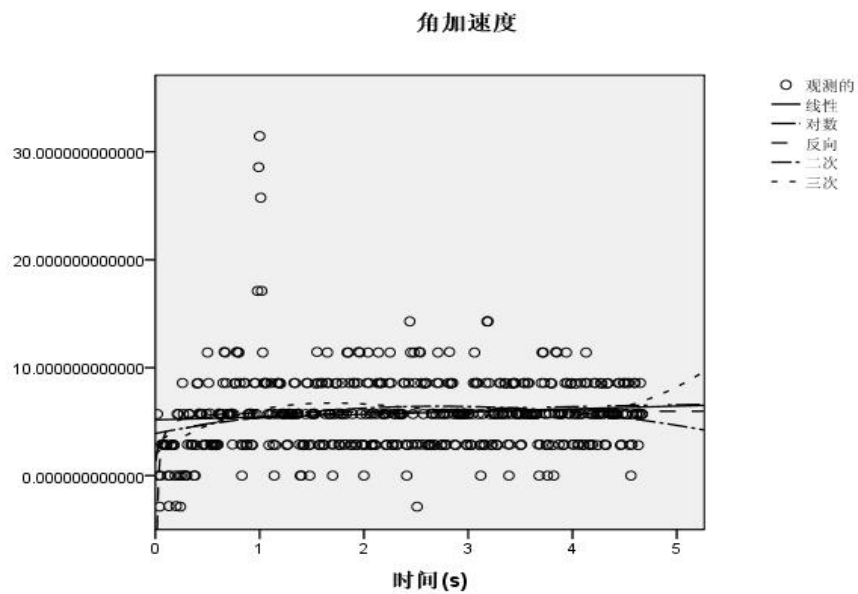
指数 ^a000	.000		
Logistic ^a000	.000		

自变量为 时间(s)。

a. 因变量 (角加速度) 包含非正数值。 最小值为 -2.878333333334。无法应用对数变换。 无法为此变量计算复合模型、幂模型、S 模型、增长模型、指数模型和对数模型。

线性	.009	4.162	1	464	.042	5.166	.255		
对数	.039	18.882	1	464	.000	5.337	.761		
倒数	.036	17.412	1	464	.000	6.006	-.197		
二次	.032	7.628	2	463	.001	3.910	1.852	-.341	
三次	.067	11.009	3	462	.000	2.045	6.548	-2.836	.355
复合 ^a000	.000		
幂 ^a000	.000		
S ^a000	.000		
增长 ^a000	.000		

附录四：角加速度与时间的散点图



附表五：扭矩与时间的离散图的数据参数

模型汇总和参数估计值

因变量:扭矩(N.m)

方程	模型汇总					参数估计值			
	R 方	F	df1	df2	Sig.	常数	b1	b2	b3
线性	.298	198.050	1	466	.000	213.552	21.365		
对数 ^a		
倒数 ^b		
二次	.601	349.727	2	465	.000	148.973	104.514	-17.805	
三次	.824	722.626	3	464	.000	83.774	272.950	-108.071	12.886
复合	.242	149.030	1	466	.000	186.280	1.139		
幂 ^a		
S ^b		
增长	.242	149.030	1	466	.000	5.227	.130		
指数	.242	149.030	1	466	.000	186.280	.130		
Logistic	.242	149.030	1	466	.000	.005	.878		

自变量为 时间(s)。

a. 自变量 (时间(s)) 包含非正数值。 最小值为 .00。无法计算对数模型和幂模型。

b. 自变量 (时间(s)) 包含零值。 无法计算倒数模型和 S 模型。

附表六：扭矩与时间的离散图

