5 模型的评价(略)

参考文献:

[1] 姜启源. 数学模型(第二版). 北京: 高等教育出版社, 1993.
[2] 同济大学数学教研室. 高等数学(第四版). 北京: 高等教育出版社, 1996.
[3] 武汉测绘学院控制测量教研室等. 控制测量学(下册). 北京: 测绘出版社, 1995.
[4] 孔祥元, 梅是义. 控制测量学. 北京: 测绘出版社, 1995.
[5] 杨 珏, 梅是义. 控制测量学. 北京: 测绘出版社, 1995.

The mathematical Models of Flying over the North Pole

ZHONG Yin-hua, LI Li-jun, ZHANG Qin

(Lianyungang College of Chemical Technology, Lianyungang 222001)

Abstract: This paper intends to explain the problem of saving flight time by four hours, which is converted into the problem of the flight distance in a constant flying speed. Under these conditions, two mathematical models are established. (1) In the spherical model, the direct relation between the flight distance and the latitude and longitude are clarified by applying the knowledge of geometry. For the model of revolving ellipsoid, the Bessel Theory is applied to work out the approximate formula, by which the flight time is calculated for saving 4.041 hours. (2) A simple curve is constructed, which is adopted as the approximate flight distance. By the application of integration, 2 formulae, approximate and accurate, are established so the flight time save 4.0535 and 4.0531 hours, respectively. The calculation results explain the problem of flight time.

飞 越 北 极

何永强, 陆新根, 沈重欢
指导老师: 数模组

(浙江万里学院, 宁波 315101)

编者按: 若将地球视作旋转椭球, 飞机的航线应为长、短半轴分别为 6388 和 6367 千米的椭圆旋转而得的旋转椭球面上过给定两点的短程线即测地线. 本文应用微分几何知识, 给出了测地线满足的微分方程, 并借助数学软件求得多数航线段的长度. 该方法有一定的特点, 是可取的. 我们选取了论文的这一部分内容, 予以发表. 若使计算更加精确, 应将地理纬度转化为归化纬度(详见本期《飞越北极的数学计算模型》一文).

摘要: 本文对“飞机从北京出发, 飞越北极直达底特律的所需时间, 可比原航线节省多少时间”的问题进行讨论, 并将航线选择归结为寻求曲面上的最短弧.

应用“曲面上最短弧为测地线”的事实进行了讨论. 模型(一) 假设地球是球体, 我们可通过单位向量的

点乘与夹角的关系, 加以解决; 对于模型(二) 设地球是旋转椭球体, 我们利用微分几何学中测地线方程加以解决, 并且把球面的纬度转化为旋转椭球面纬度　对于 4 组较特殊的点, 纬度几乎相等或相近, 或者两者之间的经度差过大时, 用测地线计算比较困难, 我们用椭圆弧(长) 代替测地线长, 结合数学软件 Mathematica 的数值积分功能, 可求得测地线长

1　问题的重述(略)

2　模型一(略)

3　模型二

3.1　假设

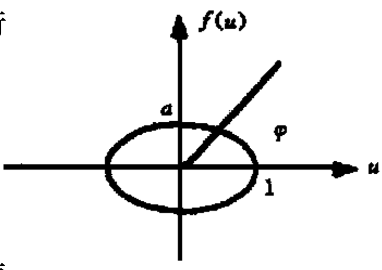
(1) 地球为旋转椭球体;

(2) 为简化模型, 设赤道半径+ 飞行高度为单位长度 1;

(3) 所给纬度为理想球面上的纬度;

(4) 从北京到底特律中途不需加油

3.2　参数说明



a: 为子午线半径与飞行高度之和跟赤道半径与飞行高度之和的比值($a = 6367/6388$);

θ 为经度数值, 单位为度;

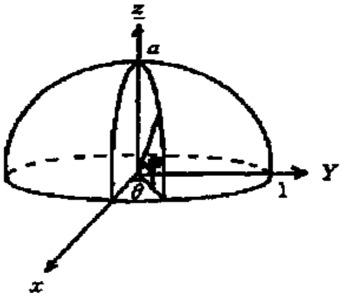
φ 为纬度数值, 单位为度;

L : 为弧长, 单位为公里

3.3　模型解答

首先, 飞机的航线一定是曲面上两点(站) 之间的最短曲线, 那么航线的问题可以归结为求测地线及其弧长的问题　根据[1]中定理 2.14,“在曲面上两点间的最短曲线 C 必为测地线”, 用参数曲面方程来表示旋转椭球体可表示为[详见[2] P169]:

$$\vec{r} = (\mu \mathrm{Cos}\theta, \mu \mathrm{Sin}\theta, f(\mu))$$



其中 $\mu = 1/\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi/a^2}$,

(因为 $\mathrm{tg}\varphi = f(u)/u = a\sqrt{1 - u^2}/u$, 因为都是北纬, $\mathrm{tg}\varphi$ 取正数值).

因为椭圆上的标准式为: $\frac{u^2}{1} + \frac{f^2(u)}{a^2} = 1$, $f^2(u) = (1 - u^2)a^2$, 故: $|f'(u)| = \frac{au}{\sqrt{1 - u^2}}$, 于是, 曲面的第一基本形式为:

$$I = [1 + f'^2(u)]du^2 + u^2 d\theta^2$$ [详见书[2]P169 例题或该书第三章第三节]

其中 $E = 1 + f'^2(u)$; $F = 0$(正交); $G = u^2$.

若在曲面上有一条曲线 C, 它的方程是关于参数 t 的函数:

$$u = u(t);\ \theta = \theta(t);\ (t_0 \le t \le t_1)$$

则它的弧长公式就为:

$$L=\int_0^1\left[E(u(t),\theta(t))\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+G(u(t),\theta(t))\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

令 $\begin{cases}u=t\\ \theta=\theta(u)\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$;

$$L=\int_0\left[1+f'^2(u)+u^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=\int_0\left[1+\frac{(au)^2}{1-u^2}+u^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \tag{1}$$

根据[2]P170 公式(10)，测地线满足下面方程:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}=\frac{c\sqrt{1+(f'(u))^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}}=\frac{c\sqrt{1+\dfrac{(au)^2}{1-u^2}}}{u\sqrt{u^2-c^2}}\ (c:\text{为常数}) \tag{2}$$

把(2)代入(1)式得

$$L_{\min}=\int_0\left[1+\frac{(au)^2}{1-u^2}+\frac{c^2\left(1+\dfrac{(au)^2}{1-u^2}\right)}{u^2-c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u \tag{3}$$

现在，我们先来确定常数 c

由(2)式得

$$\theta=c_1+\int_0\frac{c\sqrt{1+(f'(u))^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}}\mathrm{d}u$$

取 $u=u_0$, $c_1=\theta_0$，所以

$$\theta=\theta_0+\int_0\frac{c\sqrt{1+(f'(u))^2}}{u\sqrt{u^2-c^2}}\mathrm{d}u=\theta_0+\int_0\frac{c\sqrt{1+\dfrac{(au)^2}{1-u^2}}}{u\sqrt{u^2-c^2}}\mathrm{d}u$$

其中 $u=1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi/a^2}$ (φ是纬度). 特别当 $u=u_1$ 时，$\theta=\theta_1$，于是有方程

$$\theta_1=\theta_0+\int_0^1\frac{c\sqrt{1+\dfrac{(au)^2}{1-u^2}}}{u\sqrt{u^2-c^2}}\mathrm{d}u$$

因为，各点的 θ、φ的值是确定 于是，可以通过Mathematica 数学软件中的 FindRoot 命令输入式，可得以下数据:

	常数 $\lvert c\rvert$	单位椭球时的弧长 L'	弧长 L (单位: 公里)
北京→A1	0.371057	$L'_1=0.174480$	$L_1=1114.58$
A1→A2	0.786575	$L'_2=0.275349$	$L_2=1758.93$
A2→A3	0.600374	$L'_3=0.723465$	$L_3=4621.49$
A3→A4	0.350192	$L'_4=0.209363$	$L_4=1337.41$
A4→A5	0.417523	$L'_5=0.100230$	$L_5=640.27$
A5→A6	0.304690	$L'_6=0.084212$	$L_6=537.946$
A6→A7	0.314597	$L'_7=0.101895$	$L_7=650.903$
A7→A8	0.489572	$L'_8=0.0778326$	$L_8=497.195$

因为其余四组: A8→A9, A9→A10, A10→底特律，北京→底特律之间的纬度相等或相近，或者两者之间的经度差过大，经过计算验证，上述方法对此四组数据无法处理，所以在计算此四组数据时，由于测地线计算的困难，我们考虑经过两点、以球心为中心的椭圆，并以两

点间的椭圆弧(长)代替测地线(长).

椭圆弧长

设球面上两点(向量)$A = (x, y, z)$, $B = (x^*, y^*, z^*)$, 则连接它们的大圆圆弧的方程为

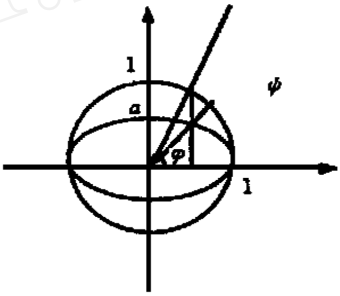
$$\vec{r}(t) = \frac{t\vec{A} + (1-t)\vec{B}}{\left|t\vec{A} + (1-t)\vec{B}\right|} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

即

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{tx + (1-t)x^*}{\left|t\vec{A} + (1-t)\vec{B}\right|}, \frac{ty + (1-t)y^*}{\left|t\vec{A} + (1-t)\vec{B}\right|}, \frac{tz + (1-t)z^*}{\left|t\vec{A} + (1-t)\vec{B}\right|}\right)$$

曲线 C 的弧长公式为

$$L' = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$



下面的映射将球面变成旋转椭球面, $(x, y, z) \mapsto (x, y, az)$. 如图, 球面上点的纬度 Ψ 和变换后旋转椭球面上点的纬度 φ 满足 $\Psi = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\varphi/a)$, 而经度不变

由球面曲线的弧长公式, 可得旋转椭球的弧长公式为

$$L = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + (az'(t))^2}\,dt$$

利用 Mathematica 软件的数值积分功能, 可得

	单位弧长 L'	弧长 L (单位: 公里)
$A8 \to A9$	$L'_9 = 0.03564422474$	$L_9 = 227.695$
$A9 \to A10$	$L'_{10} = 0.4397685785$	$L_{10} = 2809.24$
$A10 \to$ 底特律	$L'_{11} = 0.05091055547$	$L_{11} = 325.217$
北京$\to$ 底特律	$L' = 1.669532606$	$L = 10665.0$

综上所述, 可得从北京飞经十站到底特律的距离为: $S = \sum_{i=1}^{11} L_i = 14520.9$(公里), 因此可得节约时间为: 3.935 小时.

3.4　模型二的总结

由计算可知, 模型二所得结果比模型一更为合理, 所节约时间更多, 更符合实际情况. 如考虑中途停靠加油, 所节约时间将不止此数

参考文献:

[1]　方德值　微分几何基础, 科学出版社, 1984.

[2]　陈维桓　微分几何初步. 北京大学出版社, 1999.

[3]　陈省身, 陈维桓　微分几何讲义　北京大学出版社, 1999.

[4]　Martin M, 杨正清、李世杰、黄锦能译　微分几何的理论和习题　上海科学技术出版社, 1989.

Fly over the Arctic Cirell

HE Yong-qiang,　LU Xin-gen,　SHEN Chong-huan

(Zhejiang Wanli University,　Ningbo　315101)

第 31 卷第 1 期
2001 年 1 月
数学的实践与认识
MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY
Vol. 31 No. 1
Jan. 2001

Abstract: As to the problem of the time needed for an airplane to start from Beijing, fly over arctic pole, and reach Detroit, this article discusses how much time can be saved in the models that established in the article in comparison with the original flight route. And it summarizes selection of the flight route for searching the shortest arc in the surface. Discussion is based on the fact that the shortest arc on surface is geodesic. Model 1 is on the assumption that the Earth is a sphere. It can be solved by the relation between inner-product and included angle of two unit vectors. Model 2 is on the assumption that the Earth is a revolving ellipsoid. It can be solved by the geodesic equation in differential geometry, which turns latitude of the Earth into that of ellipsoid. For the 4 pairs of special points, their latitudes or longitudes are too close to calculate geodesic, so we replace geodesic with ellipse arc, and use software Mathematica to obtain the length.

航程计算的数学模型

谭永基

(复旦大学, 上海 400433)

摘要: 本文对飞机航线飞行距离计算的数学模型进行了概述, 并对 2000 年全国大学生数学建模竞赛的C 题答卷进行了评述

假定飞机保持飞行高度 10 千米作匀速飞行, 忽略起飞、降落和地球自转和公转的影响, C 题可以归结为求飞越通过指定各点的球面或旋转椭球面上的短程线(或测地线) 的航线与飞越直接连结北京上空 10 千米至底特律上空 10 千米的经过北极圈的新航线的时间差 又由于假设飞机作时速为 980 千米/小时的匀速飞行, 问题又可归结为求相应的航程差

1 地球为球体的情形

取直角坐标系如下: 以球心为原点, z 轴指向北极, x 轴通过赤道上经度为 0 和 180 的两点, 正向指向 0°, y 轴垂直于 x 轴和 z 轴, 构成右手坐标系

在半径 $r=6381$ (千米) 的球面上建立球面坐标系 (φ, θ), 由于航线在北半球, 我们取 φ 和北纬度一致, θ 和东经度一致 因此航线上某处的地理坐标为 (f, l), 可用以下方法得到对应的球面坐标 (φ, θ):

$$\varphi = f \times \pi/180$$

$$\theta° = \begin{cases} l, & l \text{ 为东经} \\ 360 - l, & l \text{ 为西经} \end{cases}$$

$$\theta = \theta° \times \pi/180$$

应有