

## 关于零件参数问题的建模

余辉 那永林 肖云翔

指导教师：史道济

(天津大学, 天津 300072)

**编者按** 本文在合理的假设下取质量损失函数, 符合实际情况, 说明了  $y$  近似服从正态分布, 给出了单位产品质量损失的表达式和较完整的数学模型, 特别是在最优化过程中, 探讨了其算法.

**摘要** 这是一个如何安排加工次序的组合优化问题, 首先建立了一般问题的数学模型, 在对其求解过程中我们采取了分枝限界法, 保证了所得结果的最优性, 且具有很高的时效性. 其次针对某部门所采取的贪婪算法给以了评价, 在评价中以其近似解与最优解的接近程度、得到最优解的概率为标准, 利用计算机模拟对其进行评估, 发现对于该问题贪婪算法并不能保证解的最优性, 但近似程度较好. 而后对调整刀具费用为 0 的情形进行了讨论, 首先给出了一个引理, 然后给出了一个简明的优化准则: 当对各切割平面按其厚费比以不升序排列时, 所得次序为最优加工次序. 最后利用题中所给数据进行了验证, 再次表明了所得结论的正确性.

### 一、问题的背景分析 (略)

### 二、问题的假设

#### (1) 模型的参数

$\text{cost}$ :	总费用函数 (单位产品);	$\text{cost}_1$ :	质量损失函数 (单位产品);
$\text{cost}_2$ :	成本函数 (单位产品);	$\Delta_i$ :	代表零件 $i$ 的容差;
$C_1$ :	产生一个废品造成的损失;	$C_2$ :	产生一个次品造成的损失;
$A_1$ :	废品的界限;	$A_2$ :	次品的界限;
$Y$ :	表征产品性能的指标;	$\sigma_i$ :	零件参数的方差;
$x_i = E[x_i]$ :	零件参数标定值的期望;	$\sigma_y$ :	产品性能指标的方差;
$Y_0 = E[Y]$ :	产品性能指标的期望;	$Y_0^*$ :	$Y$ 的目标值 1.50;
$P(y)$ :	代表产品性能指标的分布概率	$N$ :	产品生产数目;
	在程序及打印数据中以 $dy$ 代替	$x_i$ :	7 个零件参数的标定值 ( $i = 1, \dots, 7$ );

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{代表第 } i \text{ 个零件中第 } j \text{ 个等级容差;} \\ 0, & \text{代表第 } i \text{ 个零件未选中第 } j \text{ 个等级容差;} \end{cases}$$

其中  $i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 3$ .

#### (2) 模型的假设

- 为简化模型只考虑用单参数指标  $y$  表征产品性能并已知  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- 容差  $\Delta_i$  近似等于 3 倍均方差 ( $\Delta_i = 3\sigma_i$ ),  $x_i$  服从正态分布  $N[x_i, (\frac{\Delta_i}{3})^2]$ ,  $x_i$  之间相互独立;
- $Y$  的目标值  $Y_0^*$  已定, (即  $y_0^* = 1.5$ );

d. 结合问题并考虑到实际生产, 假设已知质量损失函数;

$$Q(y) = \begin{cases} C_1, & Y_0^* - A_1 > y \text{ 或 } y < Y_0^* + A_1, \\ C_2, & Y_0^* - A_1 < y < Y_0^* - A_2 \text{ 或 } Y_0^* + A_2 < y < Y_0^* + A_1, \\ 0, & Y_0^* - A_2 < y < Y_0^* + A_2 \end{cases}$$

e. 由于批量生产, 产品性能指标  $Y$  受到多个设计参数及加工工艺的影响, 所以假设  $Y$  近似服从正态分布.

f. 由于批量生产数目  $N$  较大 (实例中  $N = 1000$ ), 造成一批产品质量的损失, 则  $Q(Y)$  可近似看成为一连续的函数.

### 三、模型的建立

#### A 问题的进一步分析

(I) 容差等级选取的精度升高, 造成成本  $\cos t_1$  上升; 零件标定值  $x_i$  选取的不同影响  $Y$  中心值 ( $Y_0^*$ ) 变动, 它和容差共同影响次废品出现的概率, 从而影响质量损失  $\cos t_2$ , 因此考虑总费用

$$\cos t = \cos t_1 + \cos t_2$$

(II) 容差等级是离散的, 即对每一个  $\Delta_i$  只有几个是可选的, 考虑用 0 — 1 整数规划, 表示  $\cos t_2$  如下:  $g$

$$\cos t_2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 K_{ij} a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} = 1, \quad a_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1$$

$K_{ij}$  为第  $i$  种零件  $j$  级精度时的单位价格. 对于本问题中不存在的等级, 其价格  $K_{ij}$  可取  $+\infty$  或直接改变  $a_{ij}$  值进行优化, 如本问题中第 1 组零件只有一个容差等级 2 (即 B 等), 那么在用计算机进行优化时可直接约定  $a_{12}=1, a_{13}=a_{11}=0$  即可.

III) 由于单位产品的质量损失可视连续函数, 而且设计中心值  $Y_0^*$  和废次品范围已定 ( $y < 1.2$  或  $y > 1.8$  为废品,  $y$  在  $[1.2, 1.4]$  或  $[1.6, 1.8]$  范围可视作次品), 所以

$$\cos t_1 = 9000 \left( \int_{-\infty}^{1.2} P(y) dy + \int_{1.8}^{+\infty} P(y) dy \right) + 1000 \left( \int_{1.2}^{1.4} P(y) dy + \int_{1.6}^{1.8} P(y) dy \right)$$

其中

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}}, \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}^2$$

$$\sigma_{x_i}^2 = \left( \frac{\Delta_i}{3} \right) [0.01^2 \cdot a_{i1}^2 + 0.05^2 \cdot a_{i2}^2 + 0.1 \cdot a_{i3}^2]$$

B 综合上述分析, 完整模型表示如下:

$$\text{Min} (\cos t = \cos t_1 + \cos t_2), \quad \cos t_2 = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^3 K_{ij} a_{ij}$$

其中

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} = 1, \quad a_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1$$

$$\cos t_1 = 9000 \left( \int_{-\infty}^{1.2} P(y) dy + \int_{1.8}^{+\infty} P(y) dy \right) + 1000 \left( \int_{1.2}^{1.4} P(y) dy + \int_{1.6}^{1.8} P(y) dy \right)$$

其中

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}}, \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^7 \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \sigma_{x_i}$$

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_7) \quad \sigma_i^2 = \left( \frac{\Delta_i}{3} \right) [0.01^2 \cdot a_{i1}^2 + 0.05^2 \cdot a_{i2}^2 + 0.1 \cdot a_{i3}^2]$$

#### 四、模型算法的探讨

(一) 本模型可以归为运筹学中的非线性规划问题. 目前非线性规划还没有适用于各种问题的一般算法. 我们知道线性规划问题最优解只能在其可行域的边界上达到 (特别是在可行域的顶点上达到). 而非线性规划问题最优解 (如果存在) 则可能在其可行域中任一点达到, 所以从理论上各种算法寻找的均为局部最优极值点, 从现实角度考虑要求算法收敛快, 稳定性好, 寻到的极值接近最优值.

(二) 采用问题所给的数据我们先用 Mathcad 软件作出  $\cos t_1 - (y_0, \sigma)$  的三维关系图 (彩色附图略), 通过做等值线分析可知:

- i) 当  $y_0$  偏离 1.5 较远时,  $\cos t_1$  对  $y_0$  取值敏感性要远大于对  $\sigma_y$  取值敏感性.
- ii) 当  $y_0$  很接近 1.5 时,  $\cos t_1$  对  $\sigma_y$  敏感性较大.

**结论** 考虑本身变动范围较小, 综合 i)、ii) 分析所得, 并结合 Mathcad 软件粗略运算得到  $\cos t_1 = 300$  时有  $\left| \frac{\partial \cos t_1}{\partial y_0} \right| = 10 \left| \frac{\partial \cos t_1}{\partial \sigma_y} \right|$ , 所以  $\cos t_1 > 300$  时 ( $\sigma_y$  动范围为 0.09~0.100),  $y_0$  的邻域在首次搜索时定为 [1.48, 1.52].

(三) 程序算法分析:

在编程计算时, 考虑到程序执行时间因素, 故采用三分算法进行计算, 这样可使程序执行效率提高上千倍甚至更高 (试验证明, 此种方法比穷举法效率提高几万倍). 具体算法步骤如下:

首先将各参量所允许区间分为四等分, 取其三个分点进行计算 (取点如下)

参量	下界	分点一	分点二	分点三	上界	步长
$x_1$	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
$x_2$	0.225	0.2625	0.3	0.3375	0.375	0.0375
$x_3$	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
$x_4$	0.075	0.0875	0.1	0.1125	0.125	0.0125
$x_5$	1.125	1.3125	1.5	1.6875	1.875	0.1875
$x_6$	12	14	16	18	20	2
$x_7$	0.5625	0.6625	0.75	0.85	0.935	0.1

如上, 算出各分点 (共  $3^7$  个) 各自的质量损失, 经过比较得到  $\cos t_1$  最低的几个点.

其次, 在所得到的点的小邻域内继续采取相同的算法, 计算步长逐步缩小, 并对 0 所得点的质量损失函数值进行比较, 逐步筛选.

再将上述过程重复数次, 直至质量函数值变化不大为止, 取其最小进行容差设计.

最后, 在最优点的很小邻域内进行最后选优, 容差选取考虑采用穷举法. 经过比较总费用  $\cos t$  计算得出几组最优解, 数据结果附下.

结果数据

$X_1$		$X_2$		$X_3$		$X_4$		$X_5$		$X_6$		$X_7$		$\cos t$	$Y$	$DY$
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
0.75	B	.29	B	.108	B	.095	C	1.33	C	19.3	B	.64	B	427.72	1.4952	.091308
.075	B	.29	B	.109	B	.095	C	1.31	C	19.6	B	.65	B	427.68	1.4954	.091315
.075	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.252	C	19.2	B	.65	B	426.21	1.4954	.091199
.075	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.298	C	19.1	B	.60	B	426.17	1.4966	.091272

注：其中，“值”代表标定值，“等”代表等级； $\cos t$  的单位为（元 / 个）

（四）算法程序（具体程序略）

其中 程序一的功能为完成数据点的初次搜索；

程序二的功能为在初选点的基础上通过调整容差使结果进一步优化；

（五）实例问题的求解

在原设计中，一个零件参数的标定值为： $x_1=0.1, x_2=0.3, x_3=0.1, x_4=0.1, x_5=1.5, x_6=16, x_7=0.75$ ；

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos t_2 = 9000 \left( \int_{-\infty}^{1.2} P(y) dy + \int_{1.8}^{+\infty} P(y) dy \right) + 1000 \left( \int_{1.2}^{1.4} P(y) dy + \int_{1.6}^{1.8} P(y) dy \right) = 2887 \text{元 / 个}$$

$$\cos t_2 = 200 \text{元 / 个} \quad \cos t = 3087 \text{元 / 个}$$

采用我们的算法程序求得

$X_1$		$X_2$		$X_3$		$X_4$		$X_5$		$X_6$		$X_7$		$\cos t$	$Y$	$DY$
值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等	值	等			
0.75	B	.30	B	.108	B	.095	C	1.298	C	19.1	B	.60	B	426.17	1.4966	.091272

与原设计比较，总费用降低了  $2660.83(\text{元 / 个}) \times 1000 \text{个} \sim 26 \text{万元}$

## 五、一般零件的参数设计（略）

## 六、模型的评价

本模型的成功之处在于使一个多因素的问题，以极简便的方法快速得到结论。采用本模型辅以一 PC 机，可以在十几分钟之内找出问题的优化答案，而采用普通的算法通常在十几小时都难于找出答案。这就为解决涉及多因素的问题提出了一条捷径。另外此模型并不涉及许多深奥的数学理论，可以很方便地推广到实际生产中。模型的不足之处在于模型求解需要依靠计算机进行，离开计算机进行求解会有一定困难。

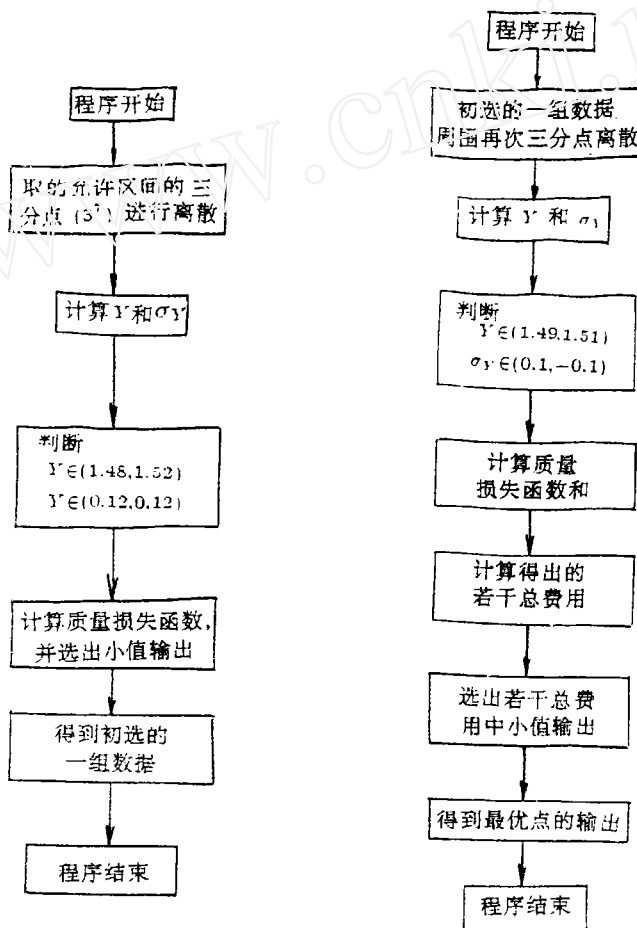
优点为当具体问题中影响产品性能指标的零件数目减少时，用网格法搜索时，计算量呈指数下降，所以可以考虑直接寻优。

## 七、模型的推广

本模型可广泛用于实际生产中的诸多领域，对受多种因素影响的具体问题可以很方便地求出优化解，而且也可用于理论分析和科学实验中，其特点在于用一段简单的程序就可将一复杂问题解决。

## 参 考 文 献

- [1] 叶其孝主编, 大学生数学建模竞赛辅导教材, 湖南教育出版社, 长沙.
- [2] 袁光定, 应用概率统计 — MATHCAD 数理分析图形软件, 北京师范大学出版社, 北京.
- [3] 盛昭瀚、雷忻, 最优的方法教程, 东南大学出版社, 南京.
- [4] 傅家良、周仲良、魏国华, 运筹学, 复旦大学出版社, 北京.
- [5] 叶其孝, 卢树铭, 数学建模教育与国际数学建模竞赛, 中国工业与应用数学学会, 工科数学杂志社.
- [6] 谭浩强编, C 程序设计, 清华大学出版社, 北京.
- [7] 姬振豫, 正交设计, 天津科技翻译出版公司, 天津.
- [8] 可计算理论目的三次设计, 中国现场统计研究会三次设计组编著.



程序图 1

程序图 2