# 1994 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 逢山开路

要在一山区修建公路,首先测得一些地点的高程,数据见表 1。(平面区域  $0 \le x \le 5600$ ,  $0 \le y \le 4800$ , 表中数据为坐标点的高程,单位:米).数据显示: y=3200处一东西走向的山峰;从坐标(2400,2400) 到 (4800,0) 有一西北 --- 东南走向的山谷;在(2000,2800) 附近有一山口湖,其最高水位略高于 1350 米,雨季在山谷中形成一溪流.经调查知,雨量最大时溪流水面宽度 w 与(溪流最深处)的 x 坐标的关系可近似表示为

 $W(x) = ((x-2400 \ 3/4 \ )/2 \ ) + 5 \ (2400 \le x \le 4000).$ 

公路从山脚 (0,800) 处开始, 经居民点 (4000,2000) 至矿区 (2000,4000). 已 知路段工程成本及对路段坡度  $\alpha$  (上升高程与水平距离之比) 的限制如表 2.

- 1) 试给出一种线路设计方案,包括原理、方法及比较精确的线路位置(含桥梁、隧道),并估算该方案的总成本.
- 2) 如果居民点改为  $3600 \le x \le 4000$ ,  $2000 \le y \le 2400$  的居民区, 公路只须经过居民区即可, 那么你的方案有什么改变.

### B 题 锁具装箱

某厂生产一种弹子锁具,每个锁具的钥匙有 5 个槽,每个槽的高度从{1,2,3,4,5,6} 6 个数 (单位略) 中任取一数.由于工艺及其它原因,制造锁具时对 5 个槽的高度 还有两个限制:至少有 3 个不同的数;相邻两槽高度之差不能为 5.满足以上条件制造 出来的所有互不相同的锁具称为一批.出来的所有互不相同的锁具称为一批.从顾客的利益出发,自然希望在每批锁具中"一把钥匙开一把锁".但是在当前工艺条件下,对于同一批中两个锁具是否能够互开,有以下试验结果:若二者相对应的 5 个槽的高度中有 4 个相同,另一个的高度差为 1,则可能互开;在其它情形下,不可能互开.原来,销售部门在一批锁具中随意地取每 60 个装一箱出售.团体顾客往往购买几箱到几十箱,他们抱怨购得的锁具会出现互相开的情形.现聘聘请你为顾问,回答并解决以下问题:

- 1) 每一批锁具有多少个, 装多少箱.
- 2) 为销售部门提供一种方案,包括如何装箱(仍是60个锁具一箱),如何给箱子以标志,出售时如何利用这些标志,使团体顾客不再或减少抱怨.
- 3) 采取你提出的方案, 团体顾客的购买量不超过多少箱, 就可以保证一定 不会出现互

4) 按照原来的装箱办法,如何定量地衡量团体顾客抱怨互开的程度(试对购买一、二箱者给出具体结果).

## 1995 年全国大学生数学建模竞赛

### A 题 一个飞行管理模型

在约10,000米高空的某边长160公里的正方形区域内,经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速度均由计算机记录其数据,以便进行飞行管理。当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘,记录其数据后,要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生 碰撞。如果会碰撞,则应计算如何调整各架(包括新进入的)飞机飞行方向角,以避免碰撞。现假定条件如下:

- 1) 不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于8公里;
- 2) 飞机飞行方向角调整的幅度不应超过30度;
- 3) 所有飞机飞行速度均为每小时800公里:
- 4) 进入该区域的飞机在到达区域边缘时,与区域内飞机的距离应在 60 公 里以上;
  - 5) 最多需考虑6架飞机;
  - 6) 不必考虑飞机离开此区域后的状况。

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型,列出计算步骤,对以下数据进行计算(方向角误差不超过 0.01 度),要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。设该区域 4 个顶点的座标为(0,0),(160,0),(160,160),(0,160)。记录数据为:飞机编号 横座标 x 纵座标 y 方向角(度)

- 1 150 140 243
- 2 85 85 236
- 3 150 155 220.5
- 4 145 50 159
- 5 130 150 230
- 新进入 0 0 52

注: 方向角指飞行方向与 x 轴正向的夹角。试根据实际应用背景对你的模型进行评价与推广。

## B 题 天车与冶炼炉的作业调度

某钢铁厂冶炼车间的厂房布局是,地面沿一直线依次安置着7个工作点辅料供应处p; a组3座转炉(冶炼成品钢)a1, a2, a3; b组2座冶炼炉(冶炼半成品钢,简称半钢)b1,b2; 原料供应处q。这些设备的上方贯通着一条运送物料的天车轨道,上面布置着若干天车t1,t2,...,tn炉了作业服务。布局示意如下。

天车与冶炼炉的作业过程与工序为:天车从 q 处吊起原料一罐 (吊罐时间 ty) 运至 b1 或 b2 处放下 (放罐时间 ti),并将上一炉的原料空罐吊起 (吊空时间 to) 返回 q 处放下 (放空罐时间 tk)。 b 组炉的原料罐放下后即可在辅助作业下开始冶炼 (冶炼时间 tb),由天车吊起半钢罐 (吊罐时间 td) 运至 a1 或 a2、a3 处将半钢倒入转炉 (倒入时间 te),并将空罐返回 b1 或 b2 处放下 (放空罐时间 tc)。再由天车从 p 处吊起辅料一槽 (吊起时间 tg) 运至 a1 或 a2、a3 处加入转炉 (加入时间 tf),并将空槽返回 p 处放下 (放空槽时间 th)。 a 组炉在半钢和辅料加入后即可开始冶炼 (冶炼时间 ta),冶炼后成品钢人输出不用天车 (输出时间记人 ta)。天车通过相邻两个工作点人运行时间都相同,记为 tx。由于各台天车在同一轨道上运行,因此其顺序位置 t1,t2,...,tn不可交换。在同一时间同一座炉子上只能允许一台天车作业;但 p、q 两处可以允许多台天车同时作业。在 p, a1,...,q 每两个相邻工作点之间最多能容纳 2 台天车同时停放。天车与冶炼炉作业调度的要求为:

- (1) 成品钢产量尽量高;
- (2)各台天车的作业率(天车作业时间所占比例)尽量均衡(考虑到设备人员安全等因素,一般天车作业率不超过70%);
  - (3)绝不允许天车相撞等事故;
  - (4) 调度规则尽量简明,以利于现场人员使用。

现设定: ta=48, tb=27, ti=3, to=2, tc=2, td=3, te=5, tf=2, tg=2, th=1, ty=3, tk=2 (单位: 分钟), tx=15 秒; a 组炉平均每炉产量 wa=120 吨。在不超过 5 台天车的条件下,设计一种满足上述要求的

天车与冶炼炉的作业调度方案:

- (1) 各台天车负责那些作业(列出《工序清单》);
- (2) 在所给方案的一个周期内,每一时刻天车和冶炼炉处于什么状态(画出《天车—炉子作业运行图》);
  - (3) 一份供现场人员使用的《调度规则说明书》;
  - (4) 在所给方案下计算各台天车的作业率。

并按每天冶炼炉数估计该车间成品钢的年产量(扣除设备维修日,每台转炉作业日每年按300天计算)。实际生产中,ta,tb,...,tk都是随机的(上面设定的数值可视为平均值),讨论你的调度方案如何适用于实际生产过程。试提出该车间提高钢产量到年产300万吨以上的建议。

## 1996 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题: 最优捕鱼策略

为了保护人类赖以生存的自然环境,可再生资源(如渔业、林业资源)的开发必须适度。一种合理、简化的策略是,在实现可持续收获的前提下,追求最大产量或最佳效益。

考虑对某种鱼(鲳鱼)的最优捕捞策略:

假设这种鱼分 4 个年龄组: 称 1 龄鱼, ……, 4 龄鱼。各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07,11.55,17.86,22.99 (克); 各年龄组鱼的自然死亡率均为 0.8(1/年); 这种鱼为季节性集中产卵繁殖, 平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109 ×  $10^{5}$ (个); 3 龄鱼的产卵量为这个数的一半, 2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵,产卵和孵化期为每年的最后 4 个月; 卵孵化并成活为 1 龄鱼,成活率(1 龄鱼条数与产卵总是 n 之比)为 1.22 ×  $10^{11}$ /(1.22 ×  $10^{11}$ +n).

渔业管理部门规定,每年只允许在产卵卵化期前的8个月内进行捕捞作业。如果每年投入的捕捞能力(如渔船数、下网次数等)固定不变,这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比。比例系数不妨称捕捞强度系数。通常使用13mm 网眼的拉网,这种网只能捕捞3龄鱼和4龄鱼,其两个捕捞强度系数之比为0.42:1。渔业上称这种方式为固定努力量捕捞。

- 1)建立数学模型分析如何可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群不变),并且在此前提下得到最高的年收获量(捕捞总重量)。
- 2)某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年,合同要求鱼群的生产能力不能 受 到 太 大 的 破 坏 。 已 知 承 包 时 各 年 龄 组 鱼 群 的 数 量 分 别 为 : 122, 29. 7, 10. 1, 3. 29 (×10 $^{\circ}$ 条),如果仍用固定努力量的捕捞方式,该公司采取 怎样的策略才能使总收获量最高。

### B 题 节水洗衣机

我国淡水资源有限,节约用水人人有责。洗衣机在家庭用水中占有相当大的份额,目前洗衣机已非常普及,节约洗衣机用水十分重要。假设在放入衣物和洗涤剂后洗衣机的运行过程为:加水-漂水-脱水-加水-漂水-脱水-加水-漂水-脱水-加水-漂水-脱水-加水-漂水-脱水(称"加水-漂水-脱水"为运行一轮)。请为洗衣机设计一种程序(包括运行多少轮、每轮加多少水等),使得在满足一定洗涤效果的条件下,总用水量最少。选用合理的数据进行计算。对照目前常用的洗衣机的运行情况,对你的模型和结果作出评价。

## 1997 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 零件的参数设计

一件产品由若干零件组装而成,标志产品性能的某个参数取决于这些零件的 参数。零件参数包括标定值和容差两部分。进行成批生产时,标定值表示一批零 件该参数的平均值,容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围。若将零件参数 视为随机变量,则标定值代表期望值,在生产部门无特殊要求时,容差通常规定为均方差的3倍。

进行零件参数设计,就是要确定其标定值和容差。这时要考虑两方面因素: 一是当各零件组装成产品时,如果产品参数偏离预先设定的目标值,就会造成质量损失,偏离越大,损失越大;二是零件容差的大小决定了其制造成本,容差设计得越小,成本越高。

试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法。

粒子分离器某参数(记作 y)由 7 个零件的参数(记作  $x_1, x_2, \dots x_7$ )决定,经验公式为:

$$y = 174.42 \left(\frac{x_1}{x_5}\right) \left(\frac{x_3}{x_2 - x_1}\right)^{0.85} \times \sqrt{\frac{1 - 2.62 \left[1 - 0.36 \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}}{x_6 x_7}}$$

y的目标值(记为 $y_0$ )为1.50。当y偏离 $y_0 \pm 0.1$ 时,产品为次品。质量损失为1000(元);当y偏离 $y_0 \pm 0.3$ 时,产品为废品,损失为9000(元)。

零件参数的标定值有一定的容许变换范围: 容差分别为A,B,C三个等级,用与标定值的相对值表示,A等为 $\pm 1\%$ ,B等为 $\pm 5\%$ ,C等为 $\pm 10\%$ 。7个零件参数标定值的容许范围及不同容差等级零件的成本(元)如下表(符号/表示无此等级零件):

	标定值容许范围	C 等	B 等	A等
$x_1$	[0.075, 0.125]	/	25	/
$x_2$	[0.225, 0.375]	20	50	/
<i>x</i> <sub>3</sub>	[0.075, 0.125]	20	50	200
$X_4$	[0.075, 0.125]	50	100	500
<i>x</i> <sub>5</sub>	[1.125,1.875]	50	/	/
<i>X</i> <sub>6</sub>	[12,20]	10	25	100

$x_7$	[0.5625, 0.935]	/	25	100

现进行成批生产,每批产量1000个。在原设计中,7个零件参数的标定值为:

$$x_1 = 0.1$$
,  $x_2 = 0.3$ ,  $x_3 = 0.1$ ,  $x_4 = 0.1$ ,  $x_5 = 1.5$ ,  $x_6 = 16$ ,  $x_7 = 0.75$ 

容差均取最便宜的等级。

请你综合考虑 y 偏离  $y_0$  造成的损失和零件成本,重新设计零件参数(包括标定值和容差),并与原设计比较,总费用降低了多少?

### b 题 截断切割

某些工业部门(如贵重石材加工等)采用截断切割的加工方式。这里"截断切割"是指将物体沿某个切割平面分成两部分。从一个长方体中加工出一个已知尺寸、位置预定的长方体(这两个长方体的对应表面是平行的),通常要经过6次截断切割。设水平切割单位面积的费用是垂直切割单位面积费用的 r 倍,且当先后两次垂直切割的平面(不管它们之间是否穿插水平切割)不平行时,因调整刀具需额外费用 e。 试为这些部门设计一种安排各面加工次序(称"切割方式")的方法,使加工费用最少。(由工艺要求,与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的) 详细要求如下:

- 1) 需考虑的不同切割方式的总数。
- 2)给出上述问题的数学模型和求解方法。
- 3) 试对某部门用的如下准则作出评价:每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割。
  - 4) 对于 e = 0 的情形有无简明的优化准则。
- 5)用以下实例验证你的方法: 待加工长方体和成品长方体的长、宽、高分别为 10、14. 5、 19 和 3、2、4,二者左侧面、正面、底面之间的距离分别为 6、7、9(单位均为厘米)。垂直切割费用为每平方厘米 <math>1 元,r 和 e 的数据有以下 4 组: a. r =1, e = 0; b. r =1. 5, e =0; c. r =8, e =0; d. r =1. 5; 2 <= e <= e 15. 对最后一组数据应给出所有最优解,并进行讨论。

## 1998 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 投资的收益和风险

市场上有 n 种资产(如股票、债券、…) $S_i$  (i=1,...n) 供投资者选择,某公司有数额为 M 的一笔相当大的资金可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这 n 种资产进行了评估,估算出在这一时期内购买  $S_i$  的平均收益率为 ri,并预测出购买  $S_i$  的风险损失率为 qi。考虑到投资越分散,总的风险越小,公司确定,当用这笔资金购买若干种资产时,总体风险可用所投资的  $S_i$  中最大的一个风险来度量。

购买  $S_i$ 要付交易费,费率为 pi,并且当购买额不超过给定值 ui 时,交易费按购买 ui 计算(不买当然无须付费)。另外,假定同期银行存款利率是 ro,且既无交易费又无风险。(ro=5%)

已知 n = 4 时的相关数据如下:

Si	ri (%)	qi (%)	pi (%)	ui (元)
$S_1$	28	2. 5	1	103
$S_2$	21	1.5	2	198
$S_3$	23	5.5	4. 5	52
S <sub>4</sub>	25	2. 6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案,即用给定的资金 M,有选择地购买若干种资产或存银行生息,使净收益尽可能大,而总体风险尽可能小。

#### 1. 试就一般情况对以上问题进行讨论,并利用以下数据进行计算。

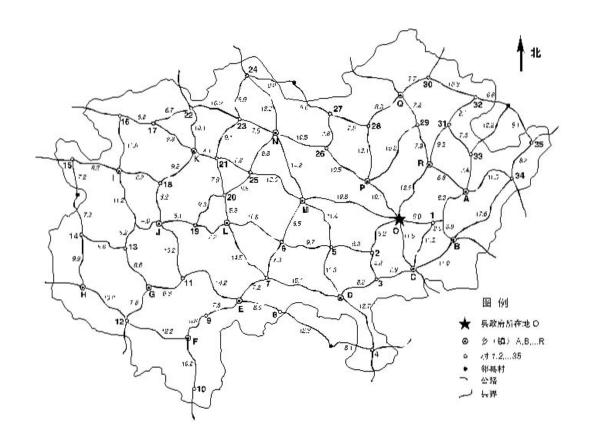
Si	ri (%)	qi (%)	pi (%)	ui (元)
$S_1$	9. 6	42	2. 1	181
$S_2$	18.5	54	3. 2	407
$S_3$	49.4	60	6. 0	428
S <sub>4</sub>	23.9	42	1.5	549
S <sub>5</sub>	8. 1	1. 2	7.6	270
S <sub>6</sub>	14	39	3. 4	397

S <sub>7</sub>	40.7	68	5. 6	178
S <sub>8</sub>	31. 2	33. 4	3. 1	220
S,9	33. 6	53. 3	2. 7	475
S <sub>10</sub>	36.8	40	2. 9	248
S <sub>11</sub>	11.8	31	5. 1	195
S <sub>12</sub>	9	5. 5	5. 7	320
S <sub>13</sub>	35	46	2. 7	267
S <sub>14</sub>	9. 4	5. 3	4. 5	328
S <sub>15</sub>	15	23	7.6	131

## B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡(镇)、村公路网示意图,公路边的数字为该路段的公里数。 今年夏天该县遭受水灾。为考察灾情、组织自救,县领导决定,带领有关部门负 责人到全县各乡(镇)、村巡视。巡视路线指从县政府所在地出发,走遍各乡(镇)、 村,又回到县政府所在地的路线。若分三组(路)巡视,试设计总路程最短且各 组尽可能均衡的巡视路线。

- 1. 假定巡视人员在各乡(镇)停留时间 T=2 小时,在各村停留时间 t=1 小时, 汽车行驶速度 V=35 公里/小时。要在 24 小时内完成巡视,至少应分几组; 给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。
- 2. 在上述关于 T, t 和 V 的假定下,如果巡视人员足够多,完成巡视的最短时间是多少;给出在这种最短时间完成巡视的要求下,你认为最佳的巡视路线。
- 3. 若巡视组数已定(如三组),要求尽快完成巡视,讨论 T,t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响。



# 1999 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 自动化车床管理

一道工序用自动化车床连续加工某种零件,由于刀具损坏等原因该工序会出现故障,其中刀具损坏故障占95%,其它故障仅占5%。工序出现故障是完全随机的,假定在生产任一零件时出现故障的机会均相同。工作人员通过检查零件来确定工序是否出现故障。现积累有100次刀具故障记录,故障出现时该刀具完成的零件数如附表。现计划在刀具加工一定件数后定期更换新刀具。

已知生产工序的费用参数如下:

- 1, 故障时产出的零件损失费用 f=200 元/件;
- 2, 进行检查的费用 t=10元/次;
- 3, 发现故障进行调节使恢复正常的平均费用 d=3000 元/次(包括刀具费);
- 4, 未发现故障时更换一把新刀具的费用 k=1000 元/次。
- 1) 假定工序故障时产出的零件均为不合格品,正常时产出的零件均为合格品,试对该工序设计效益最好的检查间隔(生产多少零件检查一次)和刀具更换策略。

- 2) 如果该工序正常时产出的零件不全是合格品,有 2%为不合格品;而工序故障时产出的零件有 40%为合格品,60%为不合格品。工序正常而误认有故障仃机产生的损失费用为 1500 元/次。对该工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换策略。
- 3) 在2)的情况,可否改进检查方式获得更高的效益。

队: 1	00 % 77	具故障记录	(空出码)	定性粉)
1711: 1	ひひんスノ	共政涅儿水	しれ、放送リン	今十级儿

		1 - 4 (							
459	362	624	542	509	584	433	748	815	505
612	452	434	982	640	742	565	706	593	680
926	653	164	487	734	608	428	1153	593	844
527	552	513	781	474	388	824	538	862	659
775	859	755	649	697	515	628	954	771	609
402	960	885	610	292	837	473	677	358	638
699	634	555	570	84	416	606	1062	484	120
447	654	564	339	280	246	687	539	790	581
621	724	531	512	577	496	468	499	544	645
764	558	378	765	666	763	217	715	310	851

#### B题 钻井布局

勘探部门在某地区找矿。初步勘探时期已零散地在若干位置上钻井,取得了地质资料。进入系统勘探时期后,要在一个区域内按纵横等距的网格点来布置井位,进行"撒网式"全面钻探。由于钻一口井的费用很高,如果新设计的井位与原有井位重合(或相当接近),便可利用旧井的地质资料,不必打这口新井。因此,应该尽量利用旧井,少打新井,以节约钻探费用。比如钻一口新井的费用为500万元,利用旧井资料的费用为10万元,则利用一口旧井就节约费用490万元。

设平面上有 n 个点 Pi, 其坐标为 (ai,bi), i=1,2,...,n, 表示已有的 n 个井位。新布置的井位是一个正方形网格 N 的所有结点 (所谓"正方形网格"是指每个格子都是正方形的网格;结点是指纵线和横线的交叉点)。假定每个格子的边长(井位的纵横间距)都是 1 单位(比如 100 米)。整个网格是可以在平面上任意移动的。若一个已知点 Pi 与某个网格结点 Xi 的距离不超过给定误差  $\varepsilon$  (=0.05 单位),则认为 Pi 处的旧井资料可以利用,不必在结点 Xi 处打新井。

为进行辅助决策,勘探部门要求我们研究如下问题:

- 1)假定网格的横向和纵向是固定的(比如东西向和南北向),并规定两点间的距离为其横向距离(横坐标之差绝对值)及纵向距离(纵坐标之差绝对值)的最大值。在平面上平行移动网格N,使可利用的旧井数尽可能大。试提供数值计算方法,并对下面的数值例子用计算机进行计算。
- 2) 在欧氏距离的误差意义下,考虑网格的横向和纵向不固定(可以旋转)的情形,给出算法及计算结果。
- 3) 如果有 n 口旧井,给出判定这些井均可利用的条件和算法(你可以任意选定一种距离)。

数值例子 n=12 个点的坐标如下表所示:

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ai	0.50	1.41	3.00	3.37	3.40	4.72	4.72	5.43	7.57	8.38	8.98	9.50
bi	2.00	3.50	1.50	3.51	5.50	2.00	6.24	4.10	2.01	4.50	3.41	0.80

## 2000年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 DNA 序列分类

2000年6月,人类基因组计划中 DNA 全序列草图完成,预计 2001年可以完成精确的全序列图,此后人类将拥有一本记录着自身生老病死及遗传进化的全部信息的"天书"。这本大自然写成的"天书"是由 4 个字符 A,T,C,G 按一定顺序排成的长约 30 亿的序列,其中没有"断句"也没有标点符号,除了这 4 个字符表示 4 种碱基以外,人们对它包含的"内容"知之甚少,难以读懂。破译这部世界上最巨量信息的"天书"是二十一世纪最重要的任务之一。在这个目标中,研究 DNA 全序列具有什么结构,由这 4 个字符排成的看似随机的序列中隐藏着什么规律,又是解读这部天书的基础,是生物信息学(Bioinformatics)最重要的课题之一。

虽然人类对这部"天书"知之甚少,但也发现了 DNA 序列中的一些规律性和结构。例如,在全序列中有一些是用于编码蛋白质的序列片段,即由这 4 个字符组成的 64 种不同的 3 字符串,其中大多数用于编码构成蛋白质的 20 种氨基酸。又例如,在不用于编码蛋白质的序列片段中,A 和 T 的含量特别多些,于是以某些碱基特别丰富作为特征去研究 DNA 序列的结构也取得了一些结果。此外,利用统计的方法还发现序列的某些片段之间具有相关性,等等。这些发现让人们相信,DNA 序列中存在着局部的和全局性的结构,充分发掘序列的结构对理解 DNA 全序列是十分有意义的。目前在这项研究中最普通的思想是省略序列的某些细节,突出特征,然后将其表示成适当的数学对象。这种被称为粗粒化和模型化的方法往往有助于研究规律性和结构。

作为研究 DNA 序列的结构的尝试,提出以下对序列集合进行分类的问题: 1)下面有 20 个已知类别的人工制造的序列(见下页),其中序列标号 1—10 为 A 类,11-20 为 B 类。请从中提取特征,构造分类方法,并用这些已知类别的序列,衡量你的方法是否足够好。然后用你认为满意的方法,对另外 20 个未标明类别的人工序列(标号 21—40)进行分类,把结果用序号(按从小到大的顺序)标明它们的类别(无法分类的不写入):

A类 \_\_\_\_\_\_\_; B类 \_\_\_\_\_。 请详细描述你的方法,给出计算程序。如果你部分地使用了现成的分类方法,也要将方法名称准确注明。

这 40 个序列也放在如下地址的网页上,用数据文件 Art-model-data 标识,供下载:

网易网址: www.163.com 教育频道 在线试题; 教育网: www.cbi.pku.edu.cn News mcm2000

教育网: www.csiam.edu.cn/mcm

2)在同样网址的数据文件 Nat-model-data 中给出了 182 个自然 DNA 序列, 它们都较长。用你的分类方法对它们进行分类, 像 1) 一样地给出分类结果。

提示:衡量分类方法优劣的标准是分类的正确率,构造分类方法有许多途径,例如提取序列的某些特征,给出它们的数学表示:几何空间或向量空间的元素等,然后再选择或构造适合这种数学表示的分类方法;又例如构造概率统计模型,然后用统计方法分类等。

### B 题 钢管订购和运输

要铺设一条  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_{15}$  的输送天然气的主管道,如图一所示(见下页)。经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有  $S_1, S_2, \cdots S_7$ 。图中粗线表示铁路,单细线表示公路,双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路,或者建有施工公路),圆圈表示火车站,每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km)。

为方便计, 1km 主管道钢管称为 1 单位钢管。

一个钢厂如果承担制造这种钢管,至少需要生产 500 个单位。钢厂  $S_i$  在指定期限内能生产该钢管的最大数量为  $S_i$  个单位,钢管出厂销价 1 单位钢管为  $P_i$  万元,如下表:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{S}_i$	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
$p_{i}$	160	155	155	160	155	150	160

#### 1单位钢管的铁路运价如下表:

里程(km)	≤ 300	301 ~ 350	351 ~ 400	401 ~ 450	451 ~ 500
运价(万 元)	20	23	26	29	32

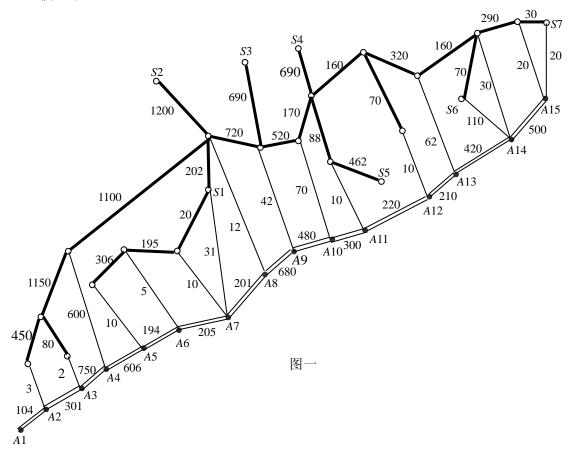
里程(km)	501 ~ 600	601 ~ 700	701 ~ 800	801 ~ 900	901 ~ 1000
运价(万 元)	37	44	50	55	60

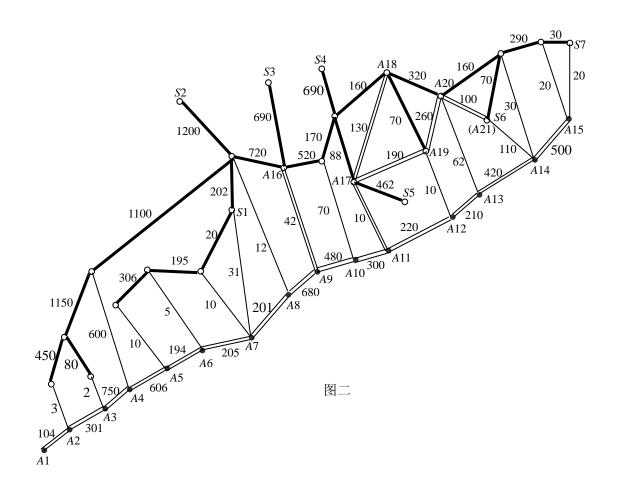
1000km以上每增加1至100km运价增加5万元。

公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元 (不足整公里部分按整公里计算)。

钢管可由铁路、公路运往铺设地点(不只是运到点 $A_1,A_2,\cdots,A_{15}$ ,而是管道全线)。

- (1)请制定一个主管道钢管的订购和运输计划,使总费用最小(给出总费用)。
- (2)请就(1)的模型分析:哪个钢厂钢管的销价的变化对购运计划和总费用影响最大,哪个钢厂钢管的产量的上限的变化对购运计划和总费用的影响最大,并给出相应的数字结果。
- (3)如果要铺设的管道不是一条线,而是一个树形图,铁路、公路和管道构成网络,请就这种更一般的情形给出一种解决办法,并对图二按(1)的要求给出模型和结果。





# 2001 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 血管的三维重建

断面可用于了解生物组织、器官等的形态。例如,将样本染色后切成厚约 1 m的切片,在显微镜下观察该横断面的组织形态结构。如果用切片机连续不 断地将样本切成数十、成百的平行切片,可依次逐片观察。根据拍照并采样得 到的平行切片数字图象,运用计算机可重建组织、器官等准确的三维形态。

假设某些血管可视为一类特殊的管道,该管道的表面是由球心沿着某一曲线 (称为中轴线)的球滚动包络而成。例如圆柱就是这样一种管道,其中轴线为直 线,由半径固定的球滚动包络形成。

现有某管道的相继 100 张平行切片图象,记录了管道与切片的交。图象文件 名依次为 0. bmp、1. bmp、...、99. bmp,格式均为 BMP,宽、高均为 512 个象素 (pixel)。为简化起见,假设:管道中轴线与每张切片有且只有一个交点;球半径固定;切片间距以及图象象素的尺寸均为 1。

取坐标系的 Z 轴垂直于切片, 第 1 张切片为平面 Z=0, 第 100 张切片为平面 Z=99。 Z=z 切片图象中象素的坐标依它们在文件中出现的前后次序为

(-256, -256, z), (-256, -255, z), ... (-256, 255, z),

 $(-255, -256, z), (-255, -255, z), \dots (-255, 255, z),$ 

• • • • • • •

(255, -256, z), (255, -255, z), ... (255, 255, z).

试计算管道的中轴线与半径,给出具体的算法,并绘制中轴线在 XY、YZ、ZX 平

面的投影图。

第 2 页是 100 张平行切片图象中的 6 张,全部图象请从网上下载。关于 BMP 图象格式可参考:

- 1. 《Visual C++数字图象处理》第12页2.3.1节。何斌等编著,人民邮电出版社,2001年4月。
- 2. http://www.dcs.ed.ac.uk/home/mxr/gfx/2d/BMP.txt

## B题 公交车调度

公共交通是城市交通的重要组成部分,作好公交车的调度对于完善城市交通 环境、改进市民出行状况、提高公交公司的经济和社会效益,都具有重要意义。 下面考虑一条公交线路上公交车的调度问题,其数据来自我国一座特大城市某条 公交线路的客流调查和运营资料。

该条公交线路上行方向共 14 站,下行方向共 13 站,第 3-4 页给出的是典型的一个工作日两个运行方向各站上下车的乘客数量统计。公交公司配给该线路同一型号的大客车,每辆标准载客 100 人,据统计客车在该线路上运行的平均速度为 20 公里/小时。运营调度要求,乘客候车时间一般不要超过 10 分钟,早高峰时一般不要超过 5 分钟,车辆满载率不应超过 120%,一般也不要低于 50%。

试根据这些资料和要求,为该线路设计一个便于操作的全天(工作日)的公 交车调度方案,包括两个起点站的发车时刻表;一共需要多少辆车;这个方案以 怎样的程度照顾到了乘客和公交公司双方的利益;等等。

如何将这个调度问题抽象成一个明确、完整的数学模型,指出求解模型的方法;根据实际问题的要求,如果要设计更好的调度方案,应如何采集运营数据。

# 2002 年全国大学生数学建模竞赛

### A 题 车灯线光源的优化设计

安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面,车灯的对称轴水平地指向正前方,其开口半径36毫米,深度21.6毫米。经过车灯的焦点,在与对称轴相垂直的水平方向,对称地放置一定长度的均匀分布的线光源。要求在某一设计规范标准下确定线光源的长度。

该设计规范在简化后可描述如下。在焦点 F 正前方 25 米处的 A 点放置一测试屏,屏与 FA 垂直,用以测试车灯的反射光。在屏上过 A 点引出一条与地面相平行的直线,在该直线 A 点的同侧取 B 点和 C 点,使 AC=2AB=2.6 米。要求 C 点的光强度不小于某一额定值(可取为 1 个单位),B 点的光强度不小于该额定值的两倍(只须考虑一次反射)。

请解决下列问题:

- (1) 在满足该设计规范的条件下, 计算线光源长度, 使线光源的功率最小。
- (2) 对得到的线光源长度,在有标尺的坐标系中画出测试屏上反射光的亮区。
- (3) 讨论该设计规范的合理性。

### B 题 彩票中的数学

近年来"彩票飓风"席卷中华大地,巨额诱惑使越来越多的人加入到"彩 民"的行列,目前流行的彩票主要有"传统型"和"乐透型"两种类型。

"传统型"采用"10选6+1"方案:限从6组0<sup>-9</sup>号球中摇出6个基本号码,每组摇出一个,然后从0<sup>-4</sup>号球中摇出一个特别号码,构成中奖号码。投注者从0<sup>-9</sup>十个号码中任选6个基本号码(可重复),从0<sup>-4</sup>中选一个特别号码,构成一注,根据单注号码与中奖号码相符的个数多少及顺序确定中奖等级。以中奖号码"abcdef+g"为例说明中奖等级,如表一(X表示未选中的号码)。

"乐透型"有多种不同的形式,比如"33选7"的方案: 先从01<sup>-</sup>33个号码球中一个一个地摇出7个基本号,再从剩余的26个号码球中摇出一个特别号码。投注者从01<sup>-</sup>33个号码中任选7个组成一注(不可重复),根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级,不考虑号码顺序。又如"36选6+1"的方案,先从01<sup>-</sup>36个号码球中一个一个地摇出6个基本号,再从剩下的30个号码球中摇出一个特别号码。从01<sup>-</sup>36个号码中任选7个组成一注(不可重复),根据单注号码与中奖号码相符的个数多少确定相应的中奖等级,不考虑号码顺序。这两种方案的中奖等级如表二。

以上两种类型的总奖金比例一般为销售总额的 50%, 投注者单注金额为 2 元, 单注若已得到高级别的奖就不再兼得低级别的奖。现在常见的销售规则及相应的奖金设置方案如表三, 其中一、二、三等奖为高项奖, 后面的为低项奖。低项奖数额固定, 高项奖按比例分配, 但一等奖单注保底金额 60 万元, 封项金额 500 万元, 各高项奖额的计算方法为:

[(当期销售总额 ×总奖金比例) -低项奖总额]×单项奖比例

- (1)根据这些方案的具体情况,综合分析各种奖项出现的可能性、奖项和奖金额的设置以及对彩民的吸引力等因素评价各方案的合理性。
- (2)设计一种"更好"的方案及相应的算法,并据此给彩票管理部门提出 建议。
  - (3) 给报纸写一篇短文,供彩民参考。

# 2003年全国大学生数学建模竞赛

# A 题 SARS 的传播

SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome, 严重急性呼吸道综合症, 俗称: 非典型肺炎)是 21世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS 的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响, 我们从中得到了许多重要的经验和教训, 认识到定量地研究传染病的传播规律、为预测和控制传染病蔓延创造条件的重要性。请你们对 SARS 的传播建立数学模型, 具体要求如下:

- (1) 对附件 1 所提供的一个早期的模型,评价其合理性和实用性。
- (2)建立你们自己的模型,说明为什么优于附件1中的模型;特别要说明怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够的信息的模型,这样做的困难在哪里?对于卫生部门所采取的措施做出评论,如:提前或延后5天采取严格的隔离措施,对疫情传播所造成的影响做出估计。附件2提供的数据供参考。
- (3)收集 SARS 对经济某个方面影响的数据,建立相应的数学模型并进行预测。 附件 3 提供的数据供参考。
  - (4)给当地报刊写一篇通俗短文,说明建立传染病数学模型的重要性。

### B题 露天矿生产的车辆安排

钢铁工业是国家工业的基础之一,铁矿是钢铁工业的主要原料基地。许多现代化铁矿是露天开采的,它的生产主要是由电动铲车(以下简称电铲)装车、电动轮自卸卡车(以下简称卡车)运输来完成。提高这些大型设备的利用率是增加露天矿经济效益的首要任务。

露天矿里有若干个爆破生成的石料堆,每堆称为一个铲位,每个铲位已预先根据铁含量将石料分成矿石和岩石。一般来说,平均铁含量不低于25%的为矿石,否则为岩石。每个铲位的矿石、岩石数量,以及矿石的平均铁含量(称为品位)都是已知的。每个铲位至多能安置一台电铲,电铲的平均装车时间为5分钟。

卸货地点(以下简称卸点)有卸矿石的矿石漏、2个铁路倒装场(以下简称倒装场)和卸岩石的岩石漏、岩场等,每个卸点都有各自的产量要求。从保护国

家资源的角度及矿山的经济效益考虑,应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量 (假设要求都为 29.5%±1%, 称为品位限制)搭配起来送到卸点,搭配的量在一个班次(8小时)内满足品位限制即可。从长远看,卸点可以移动,但一个班次 内不变。卡车的平均卸车时间为 3 分钟。

所用卡车载重量为 154 吨,平均时速 28 km/h。卡车的耗油量很大,每个班次每台车消耗近1 吨柴油。发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量,故一个班次中只在开始工作时点火一次。卡车在等待时所耗费的能量也是相当可观的,原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车每次都是满载运输。

每个铲位到每个卸点的道路都是专用的宽 60m 的双向车道,不会出现堵车现象,每段道路的里程都是已知的。

一个班次的生产计划应该包含以下内容: 出动几台电铲,分别在哪些铲位上; 出动几辆卡车,分别在哪些路线上各运输多少次(因为随机因素影响,装卸时间 与运输时间都不精确,所以排时计划无效,只求出各条路线上的卡车数及安排即 可)。一个合格的计划要在卡车不等待条件下满足产量和质量(品位)要求,而 一个好的计划还应该考虑下面两条原则之一:

- 1. 总运量(吨公里)最小,同时出动最少的卡车,从而运输成本最小;
- 2. 利用现有车辆运输,获得最大的产量(岩石产量优先;在产量相同的情况下,取总运量最小的解)。

请你就两条原则分别建立数学模型,并给出一个班次生产计划的快速算法。 针对下面的实例,给出具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量。

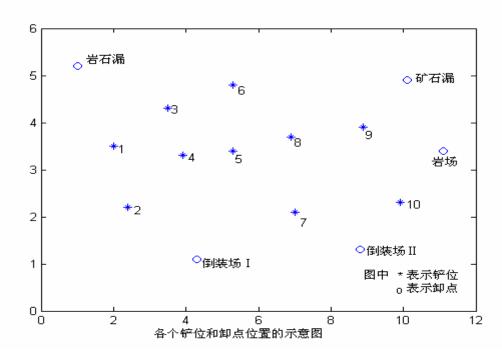
某露天矿有铲位 10 个,卸点 5 个,现有铲车 7 台,卡车 20 辆。各卸点一个班次的产量要求:矿石漏 1.2 万吨、倒装场 I 1.3 万吨、倒装场 II 1.3 万吨、岩石漏 1.9 万吨、岩场 1.3 万吨。

铲位和卸点位置的二维示意图如下,各铲位和各卸点之间的距离(公里)如下表:

	铲位1	铲位 2	铲位3	铲位4	铲位5	铲位 6	铲位7	铲位8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	5.26	5.19	4.21	4.00	2.95	2.74	2.46	1.90	0.64	1.27
倒装场I	1.90	0.99	1.90	1.13	1.27	2.25	1.48	2.04	3.09	3.51
岩场	5.89	5.61	5.61	4.56	3.51	3.65	2.46	2.46	1.06	0.57
岩石漏	0.64	1.76	1.27	1.83	2.74	2.60	4.21	3.72	5.05	6.10

#### 各铲位矿石、岩石数量(万吨)和矿石的平均铁含量如下表:

	铲位1	铲位2	铲位3	铲位4	铲位5	铲位6	铲位7	铲位8	铲位9	铲位 10
矿石量	0. 95	1. 05	1. 00	1. 05	1. 10	1. 25	1. 05	1. 30	1. 35	1. 25
岩石量	1. 25	1. 10	1. 35	1. 05	1. 15	1. 35	1. 05	1. 15	1. 35	1. 25
铁含量	30%	28%	29%	32%	31%	33%	32%	31%	33%	31%



## 2004 年全国大学生数学建模竞赛

### A 题 奥运会临时超市网点设计

2008年北京奥运会的建设工作已经进入全面设计和实施阶段。奥运会期间,在比赛主场馆的周边地区需要建设由小型商亭构建的临时商业网点,称为迷你超市 (Mini Supermarket,以下记做 MS)网,以满足观众、游客、工作人员等在奥运会期间的购物需求,主要经营食品、奥运纪念品、旅游用品、文体用品和小日用品等。在比赛主场馆周边地区设置的这种 MS,在地点、大小类型和总量方面有三个基本要求:满足奥运会期间的购物需求、分布基本均衡和商业上赢利。

图 1 给出了比赛主场馆的规划图。作为真实地图的简化,在图 2 中仅保留了与本问题有关的地区及相关部分: 道路(白色为人行道)、公交车站、地铁站、出租车站、私车停车场、餐饮部门等,其中标有 A1-A10、B1-B6、C1-C4 的黄色区域是规定的设计 MS 网点的 20 个商区。

为了得到人流量的规律,一个可供选择的方法,是在已经建设好的某运动场(图3)通过对预演的运动会的问卷调查,了解观众(购物主体)的出行和用餐

的需求方式和购物欲望。假设我们在某运动场举办了三次运动会,并通过对观众的问卷调查采集了相关数据,在附录中给出。

请你按以下步骤对图 2 的 20 个商区设计 MS 网点:

- 根据附录中给出的问卷调查数据,找出观众在出行、用餐和购物等方面 所反映的规律。
- 2. 假定奥运会期间(指某一天)每位观众平均出行两次,一次为进出场馆, 一次为餐饮,并且出行均采取最短路径。依据1的结果,测算图2中20 个商区的人流量分布(用百分比表示)。
- 3. 如果有两种大小不同规模的 MS 类型供选择,给出图 2 中 20 个商区内 MS 网点的设计方案(即每个商区内不同类型 MS 的个数),以满足上述三个 基本要求。
- 4. 阐明你的方法的科学性,并说明你的结果是贴近实际的。

#### 说明

- 1. 商业上用"商圈"来描述商店的覆盖范围。影响商店选址的主要因素是商圈内的人流量及购物欲望。
- 2. 为简化起见,假定国家体育场(鸟巢)容量为10万人,国家体育馆容量为6万人,国家游泳中心(水立方)容量为4万人。三个场馆的每个看台容量均为1万人,出口对准一个商区,各商区面积相同。

### B 题 电力市场的输电阻塞管理

我国电力系统的市场化改革正在积极、稳步地进行。2003年3月国家电力监管委员会成立,2003年6月该委员会发文列出了组建东北区域电力市场和进行华东区域电力市场试点的时间表,标志着电力市场化改革已经进入实质性阶段。可以预计,随着我国用电紧张的缓解,电力市场化将进入新一轮的发展,这给有关产业和研究部门带来了可预期的机遇和挑战。

电力从生产到使用的四大环节——发电、输电、配电和用电是瞬间完成的。我国电力市场初期是发电侧电力市场,采取交易与调度一体化的模式。电网公司在组织交易、调度和配送时,必须遵循电网"安全第一"的原则,同时要制订一个电力市场交易规则,按照购电费用最小的经济目标来运作。市场交易-调度中心根据负荷预报和交易规则制订满足电网安全运行的调度计划——各发电机组的出力(发电功率)分配方案;在执行调度计划的过程中,还需实时调度承担AGC(自动发电控制)辅助服务的机组出力,以跟踪电网中实时变化的负荷。

设某电网有若干台发电机组和若干条主要线路,每条线路上的有功潮流(输电功率和方向)取决于电网结构和各发电机组的出力。电网每条线路上的有功潮流的绝对值有一安全限值,限值还具有一定的相对安全裕度(即在应急情况下潮流绝对值可以超过限值的百分比的上限)。如果各机组出力分配方案使某条线路上的有功潮流的绝对值超出限值,称为输电阻塞。当发生输电阻塞时,需要研究如何制订既安全又经济的调度计划。

#### ● 电力市场交易规则:

1. 以 15 分钟为一个时段组织交易,每台机组在当前时段开始时刻前给出下一个时段的报价。各机组将可用出力由低到高分成至多 10 段报价,每个段的长度称为段容量,每个段容量报一个价(称为段价),段价按段序数单调不减。在最低技术出力以下的报价一般为负值,表示愿意付费维持发电以避免停机带来

更大的损失。

2. 在当前时段内,市场交易-调度中心根据下一个时段的负荷预报,每台机组的报价、当前出力和出力改变速率,按段价从低到高选取各机组的段容量或其部分(见下面注释),直到它们之和等于预报的负荷,这时每个机组被选入的段容量或其部分之和形成该时段该机组的出力分配预案(初始交易结果)。最后一个被选入的段价(最高段价)称为该时段的清算价,该时段全部机组的所有出力均按清算价结算。

#### 注释:

- (a) 每个时段的负荷预报和机组出力分配计划的参照时刻均为该时段结束时刻。
- (b) 机组当前出力是对机组在当前时段结束时刻实际出力的预测值。
- (c) 假设每台机组单位时间内能增加或减少的出力相同,该出力值称为该机组的爬坡速率。由于机组爬坡速率的约束,可能导致选取它的某个段容量的部分。
- (d) 为了使得各机组计划出力之和等于预报的负荷需求,清算价对应的段容量可能只选取部分。

市场交易-调度中心在当前时段内要完成的具体操作过程如下:

- 1、监控当前时段各机组出力分配方案的执行,调度 AGC 辅助服务,在此基础上给出各机组的当前出力值。
- 2、作出下一个时段的负荷需求预报。
- 3、根据电力市场交易规则得到下一个时段各机组出力分配预案。
- 4、计算当执行各机组出力分配预案时电网各主要线路上的有功潮流,判断是否会出现输电阻塞。如果不出现,接受各机组出力分配预案;否则,按照如下原则实施阻塞管理:
  - 输电阻塞管理原则:
  - (1) 调整各机组出力分配方案使得输电阻塞消除。
  - (2) 如果(1)做不到,还可以使用线路的安全裕度输电,以避免拉闸限电(强制减少负荷需求),但要使每条线路上潮流的绝对值超过限值的百分比尽量小。
  - (3) 如果无论怎样分配机组出力都无法使每条线路上的潮流绝对值超过限值 的百分比小于相对安全裕度,则必须在用电侧拉闸限电。
  - (4) 当改变根据电力市场交易规则得到的各机组出力分配预案时,一些通过 竞价取得发电权的发电容量(称序内容量)不能出力;而一些在竞价中 未取得发电权的发电容量(称序外容量)要在低于对应报价的清算价上 出力。因此,发电商和网方将产生经济利益冲突。网方应该为因输电阻 塞而不能执行初始交易结果付出代价,网方在结算时应该适当地给发电 商以经济补偿,由此引起的费用称之为阻塞费用。网方在电网安全运行 的保证下应当同时考虑尽量减少阻塞费用。

你需要做的工作如下:

- 1. 某电网有 8 台发电机组, 6 条主要线路, 表 1 和表 2 中的方案 0 给出了各机组的当前出力和各线路上对应的有功潮流值, 方案 1 32 给出了围绕方案 0 的一些实验数据, 试用这些数据确定各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式。
- 2. 设计一种简明、合理的阻塞费用计算规则、除考虑上述电力市场规则外、还

需注意: 在输电阻塞发生时公平地对待序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分。

- 3. 假设下一个时段预报的负荷需求是 982.4MW, 表 3、表 4 和表 5 分别给出了各机组的段容量、段价和爬坡速率的数据, 试按照电力市场规则给出下一个时段各机组的出力分配预案。
- 4. 按照表 6 给出的潮流限值,检查得到的出力分配预案是否会引起输电阻塞, 并在发生输电阻塞时,根据安全且经济的原则,调整各机组出力分配方案, 并给出与该方案相应的阻塞费用。
- 5. 假设下一个时段预报的负荷需求是1052.8MW, 重复3-4的工作。

## 2005 年全国大学生数学建模竞赛

A 题:长江水质的评价和预测

水是人类赖以生存的资源,保护水资源就是保护我们自己,对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁:"以人为本,建设文明和谐社会,改善人与自然的环境,减少污染。"

长江是我国第一、世界第三大河流,长江水质的污染程度日趋严重,已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004年10月,由全国政协与中国发展研究院联合组成"保护长江万里行"考察团,从长江上游宜宾到下游上海,对沿线21个重点城市做了实地考察,揭示了一幅长江污染的真实画面,其污染程度让人触目惊心。为此,专家们提出"若不及时拯救,长江生态10年内将濒临崩溃"(附件1),并发出了"拿什么拯救癌变长江"的呼唤(附件2)。

附件 3 给出了长江沿线 17 个观测站(地区)近两年多主要水质指标的检测数据,以及干流上 7 个观测站近一年多的基本数据(站点距离、水流量和水流速)。通常认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来,江河自身对污染物都有一定的自然净化能力,即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上,长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的,根据检测可知,主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于 0.1~0.5 之间,比如可以考虑取 0.2 (单位: 1/天)。附件 4 是"1995~2004 年长江流域水质报告"给出的主要统计数据。下面的附表是国标(GB3838-2002)给出的《地表水环境质量标准》中 4 个主要项目标准限值,其中 I、II、III类为可饮用水。

请你们研究下列问题:

- (1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价,并分析各地区水质的污染状况。
- (2)研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?
- (3)假如不采取更有效的治理措施,依照过去 10 年的主要统计数据,对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析,比如研究未来 10 年的情况。
  - (4) 根据你的预测分析,如果未来 10 年内每年都要求长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比

例控制在 20%以内, 且没有劣 V 类水, 那么每年需要处理多少污水?

(5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

附表:《地表水环境质量标准》(GB3838—2002) 中 4 个主要项目标准限值

单位:

mg/L

序号	分类 标准值 项 目	──Ⅰ类	Ⅱ类	Ⅲ类	IV类	V类	劣V类
1	溶 解 氧 (DO) ≥	7.5 (或饱和率 90%)	6	5	3	2	0
2	高锰酸盐指数(CODMn)	2	4	6	10	15	∞
3	氨氮(NH3−N) ≪	0. 15	0. 5	1.0	1.5	2.0	∞
4	PH 值(无量纲)			69			

#### B 题: DVD 在线租赁

随着信息时代的到来,网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一。许多网站利用 其强大的资源和知名度,面向其会员群提供日益专业化和便捷化的服务。例如,音像制品的 在线租赁就是一种可行的服务。这项服务充分发挥了网络的诸多优势,包括传播范围广泛、直达核心消费群、强烈的互动性、感官性强、成本相对低廉等,为顾客提供更为周到的服务。

考虑如下的在线 DVD 租赁问题。顾客缴纳一定数量的月费成为会员,订购 DVD 租赁服务。会员对哪些 DVD 有兴趣,只要在线提交订单,网站就会通过快递的方式尽可能满足要求。会员提交的订单包括多张 DVD,这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的。网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发。每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次,每次获得 3 张 DVD。会员看完 3 张 DVD 之后,只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回(邮费由网站承担),就可以继续下次租赁。请考虑以下问题:

- 1) 网站正准备购买一些新的 DVD,通过问卷调查 1000 个会员,得到了愿意观看这些 DVD 的人数(表1给出了其中5种 DVD 的数据)。此外,历史数据显示,60%的会员每月租赁 DVD 两次,而另外的40%只租一次。假设网站现有10万个会员,对表1中的每种 DVD 来说,应该至少准备多少张,才能保证希望看到该 DVD 的会员中至少50%在一个 月内能够看到该 DVD? 如果要求保证在三个月内至少95%的会员能够看到该 DVD呢?
- 2) 表 2 中列出了网站手上 100 种 DVD 的现有张数和当前需要处理的 1000 位会员的在线订单 (表 2 的数据格式示例如下表 2,具体数据请从 http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.asp下载),如何对这些 DVD 进行分配,才能使会员获得最大的满意度?请具体列出前 30 位会员(即 C0001~C0030)分别获得哪些 DVD。
- 3)继续考虑表 2,并假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0。如果你是网站经营管理人员,你如何决定每种 DVD 的购买量,以及如何对这些 DVD 进行分配,才能使一个月内 95%的会员得到他想看的 DVD,并且满意度最大?
- 4) 如果你是网站经营管理人员,你觉得在 DVD 的需求预测、购买和分配中还有哪些重要问题值得研究?请明确提出你的问题,并尝试建立相应的数学模型。

表 1 对 1000 个会员调查的部分结果

DVD 名称	DVD1	DVD2	DVD3	DVD4	DVD5
愿意观看的人数	200	100	50	25	10

表 2 现有 DVD 张数和当前需要处理的会员的在线订单(表格格式示例)

DVD 编号		D001	D002	D003	D004	•••
DVD 现有数量		10	40	15	20	•••
	C0001	6	0	0	0	•••
会员	C0002	0	0	0	0	•••
在线订单	C0003	0	0	0	3	•••
订单	C0004	0	0	0	0	•••
	•••	•••	•••	•••	•••	•••

注: D001~D100 表示 100 种 DVD, C0001~C1000 表示 1000 个会员, 会员的在线订单用数字 1,2,...表示,数字越小表示会员的偏爱程度越高,数字 0 表示对应的 DVD 当前不在会员的在线订单中。

# 2006 年全国大学生数学建模竞赛

#### A 题: 出版社的资源配置

出版社的资源主要包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等,它们都捆绑在书号上,经过各个部门的运作,形成成本(策划成本、编辑成本、生产成本、库存成本、销售成本、财务与管理成本等)和利润。

某个以教材类出版物为主的出版社,总社领导每年需要针对分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析,将总量一定的书号数合理地分配给各个分社,使出版的教材产生最好的经济效益。事实上,由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量,因此总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置。资源配置完成后,各个分社(分社以学科划分)根据分配到的书号数量,再重新对学科所属每个课程作出出版计划,付诸实施。

资源配置是总社每年进行的重要决策,直接关系到出版社的当年经济效益和 长远发展战略。由于市场信息(主要是需求与竞争力)通常是不完全的,企业自 身的数据收集和积累也不足,这种情况下的决策问题在我国企业中是普遍存在 的。 本题附录中给出了该出版社所掌握的一些数据资料,请你们根据这些数据资料,利用数学建模的方法,在信息不足的条件下,提出以量化分析为基础的资源(书号)配置方法,给出一个明确的分配方案,向出版社提供有益的建议。

### B题: 艾滋病疗法的评价及疗效的预测

艾滋病是当前人类社会最严重的瘟疫之一,从1981年发现以来的20多年间, 它已经吞噬了近3000万人的生命。

艾滋病的医学全名为"获得性免疫缺损综合症",英文简称 AIDS,它是由艾滋病毒(医学全名为"人体免疫缺损病毒",英文简称 HIV)引起的。这种病毒破坏人的免疫系统,使人体丧失抵抗各种疾病的能力,从而严重危害人的生命。人类免疫系统的 CD4 细胞在抵御 HIV 的入侵中起着重要作用,当 CD4 被 HIV 感染而裂解时,其数量会急剧减少,HIV 将迅速增加,导致 AIDS 发作。

艾滋病治疗的目的,是尽量减少人体内 HIV 的数量,同时产生更多的 CD4,至少要有效地降低 CD4 减少的速度,以提高人体免疫能力。

迄今为止人类还没有找到能根治 AIDS 的疗法,目前的一些 AIDS 疗法不仅对人体有副作用,而且成本也很高。许多国家和医疗组织都在积极试验、寻找更好的 AIDS 疗法。

现在得到了美国艾滋病医疗试验机构 ACTG 公布的两组数据。 ACTG320 (见附件1)是同时服用 zidovudine(齐多夫定), lamivudine(拉美夫定)和 indinavir (茚地那韦)3种药物的300多名病人每隔几周测试的CD4和 HIV 的浓度(每毫升血液里的数量)。193A (见附件2)是将1300多名病人随机地分为4组,每组按下述4种疗法中的一种服药,大约每隔8周测试的CD4浓度(这组数据缺HIV浓度,它的测试成本很高)。4种疗法的日用药分别为:600mg zidovudine 或400mg didanosine(去羟基苷),这两种药按月轮换使用;600 mg zidovudine 加2.25 mg zalcitabine (扎西他滨);600 mg zidovudine 加400 mg didanosine;600 mg zidovudine 加400 mg zidovudine zidovudine zi

请你完成以下问题:

- (1)利用附件 1 的数据,预测继续治疗的效果,或者确定最佳治疗终止时间(继续治疗指在测试终止后继续服药,如果认为继续服药效果不好,则可选择提前终止治疗)。
- (2)利用附件 2 的数据,评价 4 种疗法的优劣(仅以 CD4 为标准),并对较优的疗法预测继续治疗的效果,或者确定最佳治疗终止时间。
- (3) 艾滋病药品的主要供给商对不发达国家提供的药品价格如下: 600mg zidovudine 1.60 美元, 400mg didanosine 0.85 美元, 2.25 mg zalcitabine 1.85 美元, 400 mg nevirapine 1.20 美元。如果病人需要考虑 4 种疗法的费用,对 (2)中的评价和预测(或者提前终止)有什么改变。

# 2007 年全国大学生数学建模竞赛

#### A 题: 中国人口增长预测

中国是一个人口大国,人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据 已有数据,运用数学建模的方法,对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来中国的人口发展出现了一些新的特点,例如,老龄化进程加速、出生 人口性别比持续升高,以及乡村人口城镇化等因素,这些都影响着中国人口的增 长。2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》(附录1)还做出了进一步 的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究,并积累了大量数据资料。附录2就是 从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发,参考附录2中的相关数据 (也可以搜索相关文献和补充新的数据),建立中国人口增长的数学模型,并由 此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测;特别要指出你们模型中的优点 与不足之处。

附录1《国家人口发展战略研究报告》

附录 2 人口数据 (《中国人口统计年鉴》中的部分数据)及其说明

## B题: 乘公交, 看奥运

我国人民翘首企盼的第29届奥运会明年8月将在北京举行,届时有大量观 众到现场观看奥运比赛,其中大部分人将会乘坐公共交通工具(简称公交,包括 公汽、地铁等) 出行。这些年来,城市的公交系统有了很大发展,北京市的公交 线路已达800条以上,使得公众的出行更加通畅、便利,但同时也面临多条线路 的选择问题。针对市场需求,某公司准备研制开发一个解决公交线路选择问题的 自主查询计算机系统。

为了设计这样一个系统, 其核心是线路选择的模型与算法, 应该从实际情况 出发考虑,满足查询者的各种不同需求。请你们解决如下问题:

- 1、仅考虑公汽线路,给出任意两公汽站点之间线路选择问题的一般数学模型与 算法。并根据附录数据,利用你们的模型与算法,求出以下6对起始站→终到站 之间的最佳路线(要有清晰的评价说明)。
  - (1)  $S3359 \rightarrow S1828$
- (2)  $S1557 \rightarrow S0481$  (3)  $S0971 \rightarrow S0485$

- (4)  $S0008 \rightarrow S0073$  (5)  $S0148 \rightarrow S0485$  (6)  $S0087 \rightarrow S3676$
- 2、同时考虑公汽与地铁线路,解决以上问题。
- 3、假设又知道所有站点之间的步行时间,请你给出任意两站点之间线路选择问 题的数学模型。

#### 【附录1】基本参数设定

相邻公汽站平均行驶时间(包括停站时间): 3分钟

相邻地铁站平均行驶时间(包括停站时间): 2.5分钟

公汽换乘公汽平均耗时: 5分钟(其中步行时间 2分钟)

地铁换乘地铁平均耗时: 4 分钟(其中步行时间 2 分钟)

地铁换乘公汽平均耗时: 7分钟(其中步行时间 4分钟)

公汽换乘地铁平均耗时: 6分钟(其中步行时间 4分钟)

公汽票价: 分为单一票价与分段计价两种, 标记于线路后; 其中分段计价的票价

为: 0~20站: 1元; 21~40站: 2元; 40站以上: 3元

地铁票价: 3元(无论地铁线路间是否换乘)

注: 以上参数均为简化问题而作的假设, 未必与实际数据完全吻合。

【附录 2】公交线路及相关信息 (2007b)

## 2008 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 数码相机定位

数码相机定位在交通监管(电子警察)等方面有广泛的应用。所谓数码相机定位是指用数码相机摄制物体的相片确定物体表面某些特征点的位置。最常用的定位方法是双目定位,即用两部相机来定位。对物体上一个特征点,用两部固定于不同位置的相机摄得物体的像,分别获得该点在两部相机像平面上的坐标。只要知道两部相机精确的相对位置,就可用几何的方法得到该特征点在固定一部相机的坐标系中的坐标,即确定了特征点的位置。于是对双目定位,精确地确定两部相机的相对位置就是关键,这一过程称为系统标定。

标定的一种做法是:在一块平板上画若干个点, 同时用这两部相机照相,

分别得到这些点在它们像平面上的像点,利用这两组像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置。然而,无论在物平面或像平面上我们都无法直接得到没有几何尺寸的"点"。实际的做法是在物平面上画若干个圆(称为靶标),它们的圆心就是几何的点了。而它们的像一般会变形,如图1所示,所以必须从靶标上的这些圆的像中把圆心的像精确地找到,标定就可实现。

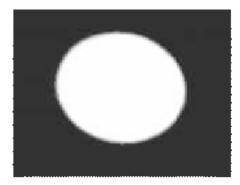


图 1 靶标上圆的像

有人设计靶标如下,取1个边长为100mm的正方形,分别以四个顶点(对应为A、C、D、E)为圆心,12mm为半径作圆。以AC边上距离A点30mm处的B为圆心,12mm为半径作圆,如图2所示。

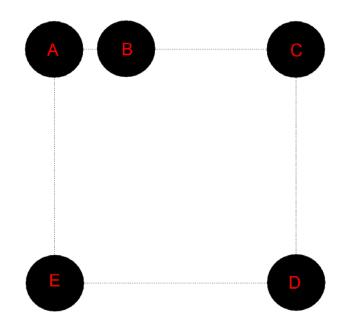


图 2 靶标示意图 用一位置固定的数码相机摄得其像,如图 3 所示。

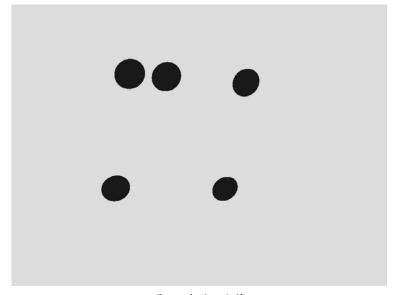


图 3 靶标的像

#### 请你们:

- (1) 建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标, 这里坐标系原点取在该相机的光学中心, x-y 平面平行于像平面;
- (2) 对由图 2、图 3 分别给出的靶标及其像,计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标,该相机的像距(即光学中心到像平面的距离)是 1577 个像素单位(1毫米约为 3.78 个像素单位),相机分辨率为 1024×768;
- (3) 设计一种方法检验你们的模型,并对方法的精度和稳定性进行讨论;
- (4) 建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法。

### B 题 高等教育学费标准探讨

高等教育事关高素质人才培养、国家创新能力增强、和谐社会建设的大局, 因此受到党和政府及社会各方面的高度重视和广泛关注。培养质量是高等教育的 一个核心指标,不同的学科、专业在设定不同的培养目标后,其质量需要有相应 的经费保障。高等教育属于非义务教育,其经费在世界各国都由政府财政拨款、 学校自筹、社会捐赠和学费收入等几部分组成。对适合接受高等教育的经济困难 的学生,一般可通过贷款和学费减、免、补等方式获得资助,品学兼优者还能享 受政府、学校、企业等给予的奖学金。

学费问题涉及到每一个大学生及其家庭,是一个敏感而又复杂的问题:过高的学费会使很多学生无力支付,过低的学费又使学校财力不足而无法保证质量。 学费问题近来在各种媒体上引起了热烈的讨论。

请你们根据中国国情,收集诸如国家平均拨款、培养费用、家庭收入等相关数据,并据此通过数学建模的方法,就几类学校或专业的学费标准进行定量分析,得出明确、有说服力的结论。数据的收集和分析是你们建模分析的基础和重要组成部分。你们的论文必须观点鲜明、分析有据、结论明确。

最后,根据你们建模分析的结果,给有关部门写一份报告,提出具体建议。

## 2009 年全国大学生数学建模竞赛

## A 题 制动器试验台的控制方法分析

汽车的行车制动器(以下简称制动器)联接在车轮上,它的作用是在行驶时使车辆减速或者停止。制动器的设计是车辆设计中最重要的环节之一,直接影响着人身和车辆的安全。为了检验设计的优劣,必须进行相应的测试。在道路上测试实际车辆制动器的过程称为路试,其方法为:车辆在指定路面上加速到指定的速度;断开发动机的输出,让车辆依惯性继续运动;以恒定的力踏下制动踏板,使车辆完全停止下来或车速降到某数值以下;在这一过程中,检测制动减速度等指标。假设路试时轮胎与地面的摩擦力为无穷大,因此轮胎与地面无滑动。

为了检测制动器的综合性能,需要在各种不同情况下进行大量路试。但是,

车辆设计阶段无法路试,只能在专门的制动器试验台上对所设计的路试进行模拟试验。模拟试验的原则是试验台上制动器的制动过程与路试车辆上制动器的制动过程尽可能一致。通常试验台仅安装、试验单轮制动器,而不是同时试验全车所有车轮的制动器。制动器试验台一般由安装了飞轮组的主轴、驱动主轴旋转的电动机、底座、施加制动的辅助装置以及测量和控制系统等组成。被试验的制动器安装在主轴的一端,当制动器工作时会使主轴减速。试验台工作时,电动机拖动主轴和飞轮旋转,达到与设定的车速相当的转速(模拟实验中,可认为主轴的角速度与车轮的角速度始终一致)后电动机断电同时施加制动,当满足设定的结束条件时就称为完成一次制动。

路试车辆的指定车轮在制动时承受载荷。将这个载荷在车辆平动时具有的能量(忽略车轮自身转动具有的能量)等效地转化为试验台上飞轮和主轴等机构转动时具有的能量,与此能量相应的转动惯量(以下转动惯量简称为惯量)在本题中称为等效的转动惯量。试验台上的主轴等不可拆卸机构的惯量称为基础惯量。飞轮组由若干个飞轮组成,使用时根据需要选择几个飞轮固定到主轴上,这些飞轮的惯量之和再加上基础惯量称为机械惯量。例如,假设有 4 个飞轮,其单个惯量分别是: 10、20、40、80 kg·m²,基础惯量为 10 kg·m²,则可以组成 10,20,30,…,160 kg·m²的 16 种数值的机械惯量。但对于等效的转动惯量为 45.7 kg·m²的情况,就不能精确地用机械惯量模拟试验。这个问题的一种解决方法是: 把机械惯量设定为 40 kg·m²,然后在制动过程中,让电动机在一定规律的电流控制下参与工作,补偿由于机械惯量不足而缺少的能量,从而满足模拟试验的原则。

一般假设试验台采用的电动机的驱动电流与其产生的扭矩成正比(本题中比例系数取为 1.5 A/N·m);且试验台工作时主轴的瞬时转速与瞬时扭矩是可观测的离散量。

由于制动器性能的复杂性,电动机驱动电流与时间之间的精确关系是很难得到的。工程实际中常用的计算机控制方法是:把整个制动时间离散化为许多小的时间段,比如 10 ms 为一段,然后根据前面时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩,设计出本时段驱动电流的值,这个过程逐次进行,直至完成制动。

评价控制方法优劣的一个重要数量指标是能量误差的大小,本题中的能量误

差是指所设计的路试时的制动器与相对应的实验台上制动器在制动过程中消耗的能量之差。通常不考虑观测误差、随机误差和连续问题离散化所产生的误差。

现在要求你们解答以下问题:

- 1. 设车辆单个前轮的滚动半径为 0.286 m, 制动时承受的载荷为 6230 N, 求等 效的转动惯量。
- 2. 飞轮组由 3 个外直径 1 m、内直径 0.2 m的环形钢制飞轮组成,厚度分别为 0.0392 m、0.0784 m、0.1568 m,钢材密度为 7810 kg/m³,基础惯量为 10 kg·m², 问可以组成哪些机械惯量? 设电动机能补偿的能量相应的惯量的范围为 [-30,30] kg·m²,对于问题 1 中得到的等效的转动惯量,需要用电动机补偿多大的惯量?
- 3. 建立电动机驱动电流依赖于可观测量的数学模型。

在问题1和问题2的条件下,假设制动减速度为常数,初始速度为50 km/h,制动5.0秒后车速为零,计算驱动电流。

- 4. 对于与所设计的路试等效的转动惯量为 48 kg·m², 机械惯量为 35 kg·m², 主轴初转速为 514 转/分钟, 末转速为 257 转/分钟, 时间步长为 10 ms 的情况, 用某种控制方法试验得到的数据见附表。请对该方法执行的结果进行评价。
- 5. 按照第3问导出的数学模型,给出根据前一个时间段观测到的瞬时转速与/或瞬时扭矩,设计本时间段电流值的计算机控制方法,并对该方法进行评价。
- 6. 第 5 问给出的控制方法是否有不足之处?如果有,请重新设计一个尽量完善的计算机控制方法,并作评价。

### B 题 眼科病床的合理安排

医院就医排队是大家都非常熟悉的现象,它以这样或那样的形式出现在我们面前,例如,患者到门诊就诊、到收费处划价、到药房取药、到注射室打针、等待住院等,往往需要排队等待接受某种服务。

我们考虑某医院眼科病床的合理安排的数学建模问题。

该医院眼科门诊每天开放,住院部共有病床 79 张。该医院眼科手术主要分四大类:白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。附录中给出了 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这段时间里各类病人的情况。

白内障手术较简单,而且没有急症。目前该院是每周一、三做白内障手术, 此类病人的术前准备时间只需 1、2 天。做两只眼的病人比做一只眼的要多一些, 大约占到 60%。如果要做双眼是周一先做一只,周三再做另一只。

外伤疾病通常属于急症,病床有空时立即安排住院,住院后第二天便会安排 手术。

其他眼科疾病比较复杂,有各种不同情况,但大致住院以后 2-3 天内就可以接受手术,主要是术后的观察时间较长。这类疾病手术时间可根据需要安排,一般不安排在周一、周三。由于急症数量较少,建模时这些眼科疾病可不考虑急症。

该医院眼科手术条件比较充分,在考虑病床安排时可不考虑手术条件的限制,但考虑到手术医生的安排问题,通常情况下白内障手术与其他眼科手术(急症除外)不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS(First come, First serve)规则安排住院,但等待住院病人队列却越来越长,医院方面希望你们能通过数学建模来帮助解决该住院部的病床合理安排问题,以提高对医院资源的有效利用。

问题一: 试分析确定合理的评价指标体系,用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二: 试就该住院部当前的情况,建立合理的病床安排模型,以根据已知的第二天拟出院病人数来确定第二天应该安排哪些病人住院。并对你们的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三:作为病人,自然希望尽早知道自己大约何时能住院。能否根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况,在病人门诊时即告知其大致入住时间区间。

问题四: 若该住院部周六、周日不安排手术,请你们重新回答问题二,医院的手术时间安排是否应作出相应调整?

问题五:有人从便于管理的角度提出建议,在一般情形下,医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案,试就此方案,建立使得所有病

人在系统内的平均逗留时间(含等待入院及住院时间)最短的病床比例分配模型。

【附录】 2008-07-13 到 2008-09-11 的病人信息