

The Calculation of the Minimum Expense for Piling up Gangue

ZHONG Xiao-yong, DUAN Guo-hui, MA Yu-dong

(Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044)

Abstract The main purpose of this article is to draw up a reasonable, annual land-purchasing program for piling up the gangue in the original colliery, and to calculate its minimum expense. Since there is need to consider several factors such as deposit and loan, rising prices of land, output of gangue, and the charge for electricity, a huge calculation should be taken which is impossible to accomplish by hand in a short time. Therefore, we are going to make use of computer to solve the complicated problem by setting up different mathematical models.

At the end of this article with a reasonable sound solution to the minimum expense is obtained from the varied values between the tapping rate of gangue and the natural angle of the pile. The factor of 《Land Law》, which are not involved in the original problem, is also discussed in this article.

煤矸石堆积模型

赵易蓉, 陈伟, 孙东杰
指导教师: 储理才

(集美大学, 厦门 361021)

编者按: 本文对于煤矿堆积煤矸石的费用问题建立起数学模型, 并就不同的征地方式和煤矸石堆数进行了分析讨论, 得出了合理的结论。作者将严格的数学论证与科学计算很好地结合起来, 其方法具有普遍性, 比如, 通过建立微分方程来求得运矸车的机械效率; 通过引进一些重要参数来比较取不同的征地方式和堆数所得到的结论; 最后还对不同的出矸率所需的最低费用作了预测, 并结合实际对模型作出了较客观的评价。

摘要: 本文就煤矿堆积煤矸石费用问题建立数学模型, 就不同的征地方式(建矿初期一次性征完 20 年所需用地和分批征地方式)和煤矸石堆数进行了分析讨论, 得出结论: 在建矿初期一次性征完所需用地, 且所有煤矸石全堆成一堆的方案是最优的, 并就不同的出矸率计算出该最优方案的总费用, 最后给出对不同的出矸率处理矸石的最低年度平均费用公式。

1 问题重述(略)

2 模型假设

- 1 所选征地非常平坦, 即 S, D, C, B, O 五点看成在同一平面上 SA 轨道为一直线, 不考虑其宽度 矸石山由四棱锥 $A-SDOB$ 与不完全圆锥 $A-BCDO$ 组成
- 2 矸石堆积均匀, 其容重为 2 吨/立方米
- 3 机械效率随坡道长度的增加而递减, 且呈连续型变化, 坡道长度每延长 10 米, 效率在原有基础上约下降 2%, 机械效率函数可导
- 4 全部采出仅包括原煤和矸石, 出矸率 = 矸石重量 / (矸石重量 + 原煤重量), 一般为 7% ~ 10%, 原煤年产量理解为去掉矸石的净煤产量
- 5 运矸车沿 SA 轨道运矸石, 到顶点 A 才卸货, 途中矸石无掉落
- 6 所征土地的形状为 $SBOD$ 的相似图形
- 7 所有存贷款利率均按复利计算, 利率为 5%.
- 8 土地征用费现值为 8 万元/亩, 地价年涨幅为 10%, 运矸车所需电费为 0.50 元/度 (不变).
- 9 征地费于年初付出, 每年电费于当年年末付出
- 10 煤矿设计寿命为 20 年, 设计原煤产量为 300 万吨/年, 每年用于处理矸石的 100 万元于年初拨出
- 11 为节省耕地, 堆放矸石时应使矸石堆侧面与地面角度尽可能最大
- 12 为保护耕地, 煤矿堆积矸石土地应比实际占地多征用 10%.

3 参数说明

- 1 h : 矸石山最高点 A 到地面的垂直距离;
- 2 V : 矸石山的体积 (单位: 立方米);
- 3 S_1 : 矸石山的底面积 (单位: 平方米);
- 4 S : 实际征地面积 (单位: 亩);
- 5 $\eta(h)$: 运矸车在高度为 h 时的机械效率;
- 6 $W(v)$: 堆放体积为 v 的矸石山, 运矸车所必需消耗的总电能 (单位: 焦耳);
- 7 $D(v)$: 堆放体积为 v 的矸石山所消耗的总电费 (单位: 万元);
- 8 α : 矸石自然堆放安息角 $\angle ABO$, 取 $\alpha = 55^\circ$;
- 9 β : 直线上升轨道与地面夹角 $\angle ASO$, 取 $\beta = 25^\circ$;
- 10 g : 重力加速度, 取 $g = 9.8$ 牛顿/千克;
- 11 ρ : 矸石容重, 取 $\rho = 2$ 吨/立方米;
- 12 r : 采矿出矸率;

4 模型建立与求解

1. 堆积成体积为 v 的矸石山所需消耗的电费以及需征地的面积 (I). 面积 S_1 , 体积 V 关于高度 h 的函数关系

由题中图形, 设 $AO = h$, 则

$$SA = \frac{h}{\sin\beta}, AB = \frac{h}{\sin\alpha}, OB = h \cot\alpha, SO = h \cot\beta$$

$$SB = \sqrt{SA^2 - AB^2} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\sin\alpha \sin\beta} h,$$

$$SOB = \arccos \frac{BO}{SO} = \arccos \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= SB \times OB + \pi \times BO^2 \times \frac{2\pi - 2SOB}{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\sin\alpha \sin\beta} h^2 \cot\alpha + (\pi - SOB) h^2 \cot^2\alpha \\ &= h^2 \left[\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\sin\alpha \sin\beta} \cot\alpha + (\pi - SOB) \cot^2\alpha \right] \end{aligned}$$

$$a = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}{\sin\alpha \sin\beta} \cot\alpha + (\pi - SOB) \cot^2\alpha$$

$$\text{由 } \alpha = 55^\circ, \beta = 25^\circ, SOB = \arccos \left(\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} \right)$$

得: $a = 2.3525$, 故

$$S_1 = ah^2 = 2.3525h^2 \quad (\text{平方米}) \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{3} S_1 h = \frac{1}{3} ah^3 = 0.7842h^3 \quad (\text{立方米}) \quad (2)$$

由(2)可得

$$h = \sqrt[3]{\frac{3v}{a}} = 1.0844 \sqrt[3]{v} \quad (\text{米}) \quad (3)$$

(II) 实际征地面积与矸石山体积的函数关系

由(1), (3)得

$$S_1 = \sqrt[3]{9av^2} = 2.7664 \sqrt[3]{v^2} \quad (\text{平方米}) \quad (4)$$

实际征地

$$S = \frac{S_1}{667} \times (1 + 10\%) = 0.004562 \sqrt[3]{v^2} \quad (\text{亩}) \quad (5)$$

(III) 运矸车的机械效率 η 与矸石山的高度 h 之间的函数关系

由假设 3, 可列下式

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dh} = -\frac{0.02 \times \eta(h)}{10 \sin\beta} \\ \eta(0) = 0.3 \end{cases}$$

$$\eta(h) = 0.3e^{-0.002h \csc\beta} = 0.3e^{-0.0047h} \quad (6)$$

解得

(IV) 由微元分析法知, 堆成体积为 v 的矸石山所做的总功

$$W(v) = \int_0^{h(v)} \frac{\rho g h}{\eta(h)} dv(h)$$

代入(3), (6), (2)以及 $\rho = 2000$ (千克/立方米), $g = 9.8$ (牛顿/千克), 得

$$W(v) = 153696 \int_0^{\sqrt[3]{v}} h^3 e^{0.0047h} dh \text{ (焦耳)}$$

堆成体积为 V 的矸石山所需的电费

$$D(v) = \frac{W(v)}{7.2 \times 10^{10}} \text{ (万元)}$$

用 Mathematic 3.0 软件解得:

$$D(v) = 26247.7313 + e^{0.0051\sqrt[3]{v}} (-26247.7313 + 133.7763\sqrt[3]{v} - 0.3409\sqrt[3]{v} + 0.0005792v) \text{ (万元)} \quad (7)$$

2. 堆积煤矸石堆数和征地方式的选择

煤矸石堆数越多, 无疑征地费将增加, 但电费将减少; 在建矿初期一次性征完全部用地, 地价较低廉, 但须向银行贷款; 分期征地方式可少借贷款, 但地价较高, 如何选择煤矸石的堆数和征地方式才能使总费用最少呢? 本节将考虑最佳堆数和最佳征地方式问题

由于存、贷款利率均为 5%, 因此实际中当该矿每年 100 万元不够用时向银行贷款, 盈余时还贷款的方式等效于 20 年中所有处理矸石的费用(征地费和电费)均向银行贷款, 而每年的用于处理煤矸石的经费 100 万元均如数存入银行, 20 年后全部取出还贷。因此, 为了能够比较不同方案的优劣, 可将所有费用都折合到第 20 年年末。由原煤年产量, 出矸率 r 以及矸石容重可得, 每年产出的煤矸石体积

$$V_1 = \frac{3 \times 10^6 r}{2 \times (1 - r)} = 1.5 \times 10^6 \times \frac{r}{1 - r} \text{ (立方米)} \quad (8)$$

假设每年产出的煤矸石平均堆在 m ($m \geq 1$) 堆上, 共堆 20 年, 那么累计至 n 年每一堆的体积若记为 $V_n(m, r)$, 则

$$V_n(m, r) = 1.5 \times 10^6 \times \frac{nr}{m(1 - r)} \text{ (立方米)} \quad (9)$$

由(7), 可得 20 年的总电费(折算到 20 年年末, 以下若涉及到费用皆如此处理)

$$E(m, r) = m \times \sum_{n=1}^{20} (D[V_n(m, r)] - D[V_{n-1}(m, r)]) \times (1 + 5\%)^{20-n} \text{ (万元)} \quad (10)$$

由(5), (9), n 年后总的占地面积

$$\begin{aligned} S_n(m, r) &= m \times 0.004562 \times \left(1.5 \times 10^6 \times \frac{nr}{m(1 - r)}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 59.7791m^{\frac{1}{3}} \left(\frac{nr}{1 - r}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ (亩)} \end{aligned} \quad (11)$$

方案一 每年年初都征用一次土地

若记第 n 年征地的费用为 $L_n(m, r)$, 则

$$L_n(m, r) = [S_n(m, r) - S_{n-1}(m, r)] \times 8 \times (1 + 10\%)^{n-1} \times (1 + 5\%)^{21-n} \text{ (万元)}$$

则 20 年征地费用为 $\sum_{n=1}^{20} L_n(m, r)$

于是方案一总费用(征地费和电费)为

$$C_1(m, r) = \sum_{n=1}^{20} L_n(m, r) + E(m, r) \quad (\text{万元}) \quad (12)$$

将 m 视为连续变量, 用数学软件 Mathematica 作出方案一总费用函数 $C_1(m, r)$ 的三维图形 (图 1)

方案二 第一年年初征完 20 年所需用地

由 (5), (9) 可得征地总费用

$$\begin{aligned} L(m, r) &= m \times 0.004562 \times (V_{20}(m, r))^{\frac{2}{3}} \times 8 \times (1 + 5\%)^{20} \\ &= 9349.2935m^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r}{1-r} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{万元}) \end{aligned} \quad (13)$$

于是方案二总费用(征地费和电费)为

$$C_2(m, r) = L(m, r) + E(m, r) \quad (\text{万元}) \quad (14)$$

用数学软件 Mathematica 作出方案二总费用函数 $C_2(m, r)$ 的三维图形 (图 2)

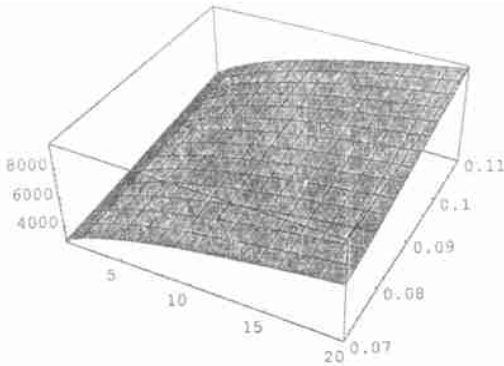


图 1

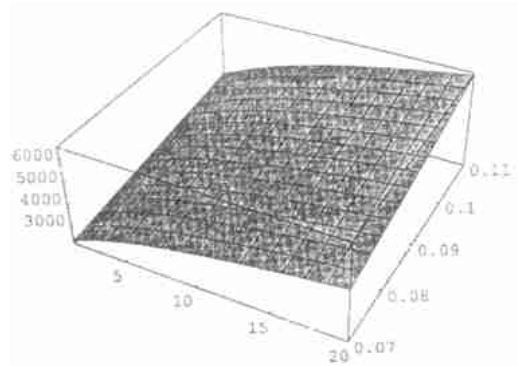


图 2

仔细观察以上两图可发现: 当出矸率 r 一定时, 随着 m 的增大, 总费用都单调递增, 即无论以上任何方案, 堆数 m 越少, 总费用越少, 所以 $m = 1$ 时, 总费用最少; 另一方面, 将 $C_1(m, r)$ 和 $C_2(m, r)$ 的图形作在同一个坐标系下 (图 3), 可发现曲面 $C_2(m, r)$ 全部位于曲面 $C_1(m, r)$ 的下面, 即 $C_1(m, r) > C_2(m, r)$, 即对相同的堆数 m 和出矸率 r , 方案二比方案一节省费用 因此可得出结论: 最优方案是: 所有煤矸石全堆在一堆上, 且在第一年年初一次性征完 20 年中所需要的全部用地

3. 最优方案求解

本节考虑采用上节得到的最优方案, 每年 100 万元处理矸石的经费是否够用问题

基于上节的说明, 仍然假设所有费用全部来自银行贷款, 每年初所拨出的 100 万元经费全部存入银行, 在第 20 年年末取出全部存款去还银行贷款 则 20 年后存款总额(含存款利息)

$$Y = \sum_{n=1}^{20} 100 \times 1.05^{(21-n)} = 3471.93 \quad (\text{万元}) \quad (15)$$

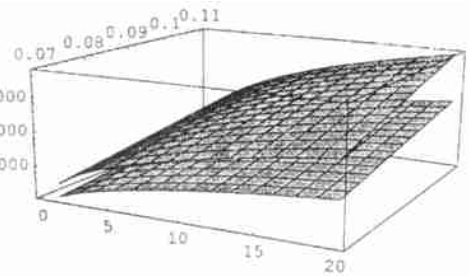


图 3

取 $m = 1$, 由 (13), 可得 20 年后要还的期初征地费用(含贷款利息)

$$L(r) = 9349.2935 \left(\frac{r}{1-r} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{万元}) \quad (16)$$

取 $m = 1$, 由 (10), 可得 20 年后要还的所有电费(含贷款利息)

$$E(r) = \sum_{n=1}^{20} (D[V_n(1, r)] - D[V_{n-1}(1, r)]) \times (1 + 5\%)^{20-n} \quad (\text{万元}) \quad (17)$$

共计 20 年后要还的总金额

$$Sum(r) = L(r) + E(r) \quad (\text{万元}) \quad (18)$$

对不同的出矸率 r , 利用 Mathematica 软件很容易求得下表

不同出矸率的费用表

出矸率 r	征地费(万元)	总电费(万元)	总费用(万元)
0.07	1666.69	537.73	2204.42
0.08	1835.05	673.34	2508.38
0.09	1999.46	823.01	2822.47
0.10	2160.81	987.13	3147.94
0.11	2319.78	1166.16	3485.94

从表中可看出, 当出矸率 $r < 0.11$ 时, 总费用都小于 3471.93, 即通过银行调节, 每年 100 万元处理矸石的经费足够使用, 当 $r = 0.11$ 时, 经费就不够了.

4. 对不同出矸率预测处理矸石的最低年度平均经费

由 (18), 容易得到平均每年应投入处理煤矸石的最小费用计算公式

$$f(r) = \frac{Sum(r)}{\sum_{n=1}^{20} (1 + 5\%)^n} \quad (\text{万元})$$

在 Mathematica 环境下运行下述程序, 只要输入出矸率, 计算机马上给出最低年度经费 (单位: 万元)

```
v=. ; n=. ; r=. ; s=. ; Landfee=. ; Ele=. ;
```

```
v[n_, r_]:= 1.5 * 10^6 * n * r / (1 - r);
```

```
s[v_]:= 0.004562 * v^(2/3);
```

```
Landfee[r_]:= s[v[20, r]] * 8 * (1 + 0.05)^20;
```

```
Ele[v_]:= 26247.7313 + E^((0.0051 * v^(1/3)) * (-26247.7313 +
```

```
133.7763 * v^(1/3) - 0.3409 * v^(2/3) + 0.0005792v);
```

```
Elefee[r_]:= Sum[(Ele[v[n, r]] - Ele[v[n-1, r]]) * (1 + 0.05)^(20-n), {n, 1, 20}];
```

```
Totafee[r_]:= Landfee[r] + Elefee[r];
```

```
r= Input["请输入出矸率 r: "];
```

```
Print["r= ", r, " minfee=", Totafee[r]/Sum[1.05^n, {n, 1, 20}]]
```

例如: $r = 0.07$, $\text{minfee} = 63.4928$,

$r = 0.10$, $\text{minfee} = 90.6685$

$r = 0.11$, $\text{minfee} = 100.404$

即: 当出矸率小于 11% 时, 每年 100 万元是够用的; 当出矸率为 11% 时, 年度最低经费为 100 404 万元!

5 模型的分析与评价

此模型首先确定了总费用对出矸率和堆数的函数关系, 通过三维图形的比较确定了最优堆积煤矸石的堆数和征地方式. 此模型经过多次选择, 最优方案的准确性较高, 计算较简单, 较为完满地解决了原始问题; 缺点是实际中存贷款利率并不相等, 地价的增长率, 出矸率也并非恒定, 此模型未将这些因素考虑进去, 在实际应用中会受到一定的限制.

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型(第二版). 高等教育出版社, 北京, 1993
- [2] 张韵华. Mathematica 符号计算系统实用教程. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1998
- [3] 同济大学数学教研室. 高等数学(第四版). 高等教育出版社, 北京, 1996

Mathematical Model of heaped-up Gangue

ZHAO Yi-rong, CHEN Wei, SUN Dong-jie

(Jimei University, Xiamen 361021)

Synopsis: This paper discusses the expenditure of heaping up gangue in coalfield and analyzes different land-purchase ways and the heaping-up number, from which it comes to a conclusion as follows: The least expenditure is needed only in the case that all land are purchased once at the beginning of coal extraction, and that all the gangue metals are piled in one heap. Also, for the different gangue production rate, a mathematical way of figuring out the total expenditure mentioned above is given. Last but not least, based on the different gangue production rate, a formula of working out the lowest annual average expenditure is accordingly provided.

煤矸石堆积问题的解答及引出的思考

贾晓峰¹, 唐 云²

(1. 太原理工大学应用数学系, 太原 030024)

(2. 清华大学数学科学系, 北京 100084)

摘要: 本文首先给出煤矸石堆积问题的参考答案, 其次介绍学生答卷中由于对出矸率及征地方式的理解不同而导出的不同解答, 最后从学生答卷中发现到的缺点和错误提出一些在数学建模教学中值得思考的问题和建议.