第 28 卷 第 1 期　　数学的实践与认识　　Vol. 28 No. 1
1998 年 1 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Jan., 1998

截断切割的最优方案

温 涛　马衍青　徐 峰
指导教师：鲁习文　刘朝晖
(华东理工大学，上海 200237)

编者按　本文借助于递推形式建立目标函数表达式，对优化准则及推广运用优化准则也作了研究.

摘　要　我们在充分分析问题的基础上，根据问题的条件和要求建立了模型，讨论了模型的推广，给出了截断切割问题的最优方案，回答了题目中所有问题，并且对模型进行了评价.

当成品长方体位于待加工长方体内部而没有公共面时，需要考虑的不同切割方式总数为 $P=720$ 种. 如果有公共面可类似计算.

从描述连续切割时长方体的形状变化过程出发，在深入研究了不同切割方式特征的基础上，我们建立了模型，并给出了求解方法，运用若干优势准则，只需考虑至多 25 种切割方式就可以找到最优切割方案.

对 $e=0$ 的情形，我们得到了相当简明的最优切割准则：按成品长方体各面与待加工长方体对应面间加权距离的非增排列顺序进行切割.

按照“每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割”的准则进行切割，我们发现一般得不到最优解. 并且，我们随机列举了 80 个例子进行比较，采用该方法得到的近似最优解与最优解的平均比值为 1.0266.

对所给的数据，我们进行了实例验证，得到的计算结果如下：

a) 最小加工费用为 $f=374$ 元，调整刀具次数均为 $n=3$; b) 最小加工费用为 $f=437.5$ 元，调整刀具次数均为 $n=3$;

c) 最小加工费用为 $f=540.5$ 元，调整刀具次数 $n=3$; d) 当 $2e<2.5$ 时有二种最优切割方案，此时调整刀具 3 次.

当 $e=2.5$ 时有三种最优切割方案. 当 $2.5<e<15$ 时只有一种最优切割方案，此时只须调刀一次，并且我们还发现这种切割方案在 $e>15$ 时仍是最优的。由此，可观察到当 e 增加时，调刀次数逐步减小.

我们建立的模型可以推广到一般 n 面体的截断切割问题，并可进一步推广到连续加工若干个待加工多面体的问题. 我们建立的模型具有清晰简明的数学表达式，计算简单，优化方便.

一、问题重述 (略)

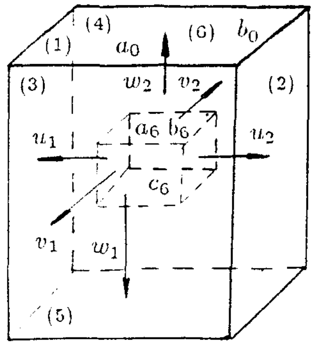
二、基本假设

1. 与水平工作台接触的长方体底面是事先指定的，因此长、宽、高位置一定。但是这不影响切割方案的讨论，即并不因为底面已经被指定，而要求最后切割底面.

2. “截断切割” 如问题中所定义的为 “将物体沿某个切割平面分成两部分”.

3. 成品长方体与待加工长方体没有公共面. 即：成品长方体必须由待加工长方体经过 6 次截断切割后得到.

三、变量及符号说明



符号说明

a_0, b_0, c_0：长方体的长、宽、高；a_k, b_k, c_k：第 k 次切割后得到的长方体的长、宽、高；f_k 为第 k 次切割所需费用.

对长方体的“截断切割”共计有三种方式：

水平切割：平行于底面切割；

垂直纵向切割：平行于侧面切割；

垂直横向切割：平行于正面切割.

3、对长方体的六个平面分别进行标号，如图所示：

其中左侧面为 1 面，右侧面为 2 面，正面为 3 面，背面为 4 面，底面为 5 面，顶面为 6 面. 待加工长方体和成品

长方体两者左侧面、右侧面、顶面、底面、正面、

背面间的距离分别为 u,u,w,w,v,v.

以某一方式切割出一个长方体需要调整刀具的次数为 n, 则有 $1 \le n \le 3$.

四、问题分析和模型建立

通过分析我们可以知道，对长方体进行第 k 次切割的费用函数和切割后长方体的长、宽、高，有三种情况：

i) 第 k 次切割为水平切割：

$$f_k = r a_{k-1} b_{k-1}$$
$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} \\ c_k = c_{k-1} - w_1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} \\ c_k = c_{k-1} - w_2 \end{cases} \tag{1}$$

ii) 第 k 次切割为垂直横向切割：

$$f_k = a_{k-1} c_{k-1}$$
$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} - v_1 \\ c_k = c_{k-1} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = b_{k-1} - v_2 \\ c_k = c_{k-1} \end{cases} \tag{2}$$

iii) 第 k 次切割为垂直纵向切割：

$$f_k = b_{k-1} \cdot c_{k-1}$$
$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} - u_1 \\ b_k = b_{k-1} \\ c_k = c_{k-1} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_k = a_{k-1} - u_2 \\ b_k = b_{k-1} \\ c_k = c_{k-1} \end{cases} \tag{3}$$

所以，总切割费用可表示为 $\min f = \sum_{i=1}^{6} f_k + \sum_{k=1}^{6} \delta_k \cdot e$ 其中

$$\delta_1 = 0,\ \delta = \begin{cases} 1, & \text{第 } k \text{ 次切割调正了刀具} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \qquad k = 2, \cdots, 6$$

我们的目标就是找到一种切割顺序，使得的值最小.

五、模型求解

关于上述模型的求解，我们能够建立以下四个定理，优化求解过程，减小运算量.

我们以表示一个切割顺序，相应于第 i 次切割的长方体厚度 (若为水平切割，该厚度等于实际切割厚度的 $1/r$).

定理 1 两次相互平行的切割，取待切割平面与原长方体的相应表，面距离大的优先切割 (不论这两次平行切割操作是否连续).

例 水平切割共有两次，设成品长方体与待加工长方体的底面、顶面相距 w,w 选择距离大的优先切割，即

若 $w_1 > w_2$, 则两次水平切割操作中，先切割出成品长方体的底面；

若 $w_1<w_2$，则两次水平切割操作中，先切割出成品长方体的顶面；

若 $w_1=w_2$，则顺序可任意选择.

证 若在某种切割顺序 $(\cdots p_i \cdots p_j \cdots)$ 中，两次平行的切割 p_i 、 p_j 不符合定理 1，即 $p_i<p_j$，则我们交换它们的位置，这不影响 p_i 之前和 p_j 之后每次切割的切割面积，而对于 p_i 与 p_j 之间的每次切割的切割面积只会减小，所以若 p_i 与 p_j 不符合定理 1，则交换与的位置后，总的切割费用不会增加． #

定理 2 如果水平切割与垂直横向切割是相邻的两个操作，那么

若 $w/r>v$，则先水平切割，然后再垂直横向切割；

若 $w/r<v$，则先垂直横向切割，再水平切割；

若 $w/r=v$，则顺序可任意选择，

这里的 w,v 用相应的 w_1,w_2,v_1,v_2 代入.

证 设第 $k,k+1$ 次切割为水平切割与垂直横向切割，当先水平切割，然后再垂直横向切割，这两次切割的费用为

$$f_k + f_{k+1} = a_{k-1}b_{k-1}ra_kc_k = a_{k-1}b_{k-1}r + a_{k-1}(c_{k-1} - w_1)$$

这里不妨设 w 为 w_1.

当先垂直横向切割，再水平切割，这两次切割的费用为

$$\begin{aligned} f'_k + f'_{k+1} &= a_{k-1}c_{k-1} + a_k b_k r \\ &= a_{k-1}c_{k-1} + a_{k-1}(b_{k-1} - v_1)r \end{aligned}$$

这里不妨设 v 为 v_1.

两个费用之差为

$$f_k + f_{k+1} - (f'_k + f'_{k+1}) = a_{k-1}r(v_1 - w_1/r)$$

所以，若 $v_1>w_1/r$，先垂直横向切割，然后再水平切割，费用减小；其他情形同理可证. #

定理 3 如果水平切割与垂直纵向切割是相邻的两个操作，那么

若 $w/r>u$，则先水平切割，然后再垂直纵向切割；若 $w/r<u$，则先垂直纵向切割，再水平切割；若 $w/r=u$，则顺序可任意选择，

这里的 w,u 用相应的 w_1,w_2,u_1,u_1 代入．证明与定理 2 相似.

解法一 按 $u_1,u_2,w_1/r,w_2/r,v_1,v_1$ 非升序排列进行切割.

例 若 $v_2>w_1/r>u_2>u_1>v_1>w_2/r$，则先切割背面，再切割底面，再切割右侧面，…，最后切割顶面，也就是按 $(v_2,w_1/r,u_2,u_1,v_1,w_2/r)$ 的方式进行切割.

定理 4 若 $e=0$，则按解法一找到的切割方式是最优的.

证 设解法一得到的切割方式为 $(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$ 因而 $p_1\geq p_2\geq p_3\geq p_4\geq p_5\geq p_6$．又设 $(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$ 是一最优切割方式，但与解法一得到的切割方式不一致，则其中必然存在 i_k 与 i_{k+1}，满足 $i_k>i_{k+1}$，使得 $p_{i_k}\leq p_{i_{k+1}}$，分析以下几种情形：

1） p_{i_k} 与 $p_{i_{k+1}}$ 一个相应于水平切割，一个相应于垂直切割，此时由定理 2 和 3 知交换与的次序不导致费用增加.

2） p_{i_k} 与 $p_{i_{k+1}}$ 相应于两个平行的切割，由定理 1 知交换它们的次序不导致费用增加.

3） p_{i_k} 与 $p_{i_{k+1}}$ 一个相应于垂直横向，一个相应于垂直纵向切割，此时用与定理 2 相似的方法，可证明交换 p_{ik} 与 p_{ik-1} 的次序不导致费用增加.

根据上面的分析，在任何情况下，交换 p_{ik} 与 p_{ik-1} 的次序都不导致费用增加，即还是最优切割，但交换后 p_{ik} 与 p_{ik+1} 的次序符合解法一生成的切割方式.

结论 1 若按解法一找到的切割方式只须调整刀具一次，则解法一找到的切割方式是最优切割方法.

证明 因为目标函数

$$f = \sum_{k=1}^{6} f_k + e\sum_{k=1}^{6} \qquad \delta_k = \sum_{k=1}^{6} f_k + n\cdot e$$

由定理 4 知在不考虑刀具调整费用时，解法一找到的切割方法使 $\sum_{k=1}^{6}$ 得达到最小；此外任何切割方法需调整刀具至少一次，即 $n\geq 1$, 所以按解法一找到的切割方法如果只须调整刀具一次，则此切割方法是最优的.

结论 2 若按解法一找到的切割方法需调整刀具两次，设为切割方法一，费用为 q_0. 此外，所有调整次数为 1 的切割方法的费用分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_k$, 则最优切割方法的费用为：$f=\min(q_0,q_1,q_2,\cdots,q_k)$ 相应的切割方案为最优切割方案.

证明 注意到用方法一切割的费用为 $q_0=\sum_{k=1}^{6}f_k+2e$, 此时 $\sum_{k=1}^{6}f_k$ 达到最小，任意一个调整刀具三次的切割方法的费用为 $\sum_{k=1}^{6}f'_k+3e$ 且 $\sum_{k=1}^{6}f'_k>\sum_{k-1}^{6}f_k$, 所以，最优切割方案只需在方法一和所有调整次数为 1 的切割方法中寻找.

利用定理 1, 2, 3, 我们给出下面的方法枚举所有刀具调整次数为 1 的切割方案.

步骤 1 不妨设 $u_1>u_2,v_1>v_2,w_1>w_1$. 由定理 1, 当进行垂直纵向切割时，必先切割与左侧相距 u_1 的面，记切割面代号为 1; 再切割与右侧相距 u_2 的面，记为 2; 当进行垂直横向切割时，必先切割与正面距 v_1 的面，记为 3; 再切割与背面相距 v_2 的面，记为 4; 当进行水平切割时，必先切割与底面相距 w_1 的面，记代号为 5, 再切割与顶面相距 w_2 的面，记为 6.

步骤 2 由于切割过程中调整刀具次数为 1, 在两次垂直纵向切割中不能插入垂直横向切割；同样，在两次垂直横向切割中不能插入垂直纵向切割. 这样，只需枚举以下次序：

$$—1—2—3—4— \tag{4}$$

或

$$—3—4—1—2— \tag{5}$$

其中，"—" 处可插入 5, 6.

步骤 3 在第 2 步的基础上插入第 5 个面.

对于 (4), 插入第 5 个面共有五种情况：

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{5\quad 1} & & 2 & 3 & 4 & (6)\\
\underline{1\quad 5} & & 2 & 3 & 4 & (7)\\
1 & 2 & \underline{5\quad 3} & & 4 & (8)\\
1 & 2 & \underline{3\quad 5} & & 4 & (9)\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & (10)
\end{array}$$

由定理 3 可知，第 1, 5 面顺序可确定，故 (6), (7) 中只需计算一种. 由定理 4, 第 3, 5 面顺序可确定，故 (8), (9) 中只需计算一种. 故 (4) 中插入 5 简化为 3 种情况.

假设简化为 (6), (8), (10) 三种.

步骤 4 在第 3 步的基础上插入第 6 个面. 第 6 个面只能在第 5 个面之后.

对于 (6), 插第 6 个面共有五种情况：

$$\begin{array}{cccccc}
5 & \underline{6\quad 1} & & 2 & 3 & 4 & (11)\\
5 & \underline{1\quad 6} & & 2 & 3 & 4 & (12)\\
5 & 1 & 2 & \underline{6\quad 3} & & 4 & (13)\\
5 & 1 & 2 & \underline{3\quad 6} & & 4 & (14)\\
5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & (15)
\end{array}$$

同理，由定理 2 和 3 可简化为 3 种情况.

对于 (8), 插第 6 个面共有三种情况：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{matrix}$$

由定理 2, 3 可简化为 2 种情况.

对于 (10), 插第 6 个面只有一种情况：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

综上所述，故对于 (4) 只需考虑 3+2+1=6 种插入 5, 6 的方式. 对于 (5) 同理也只需考虑 6 种插入 5, 6 的方式. 那么枚举次数总计为 12 种.

结论 3 若按解法一找到的切割方式需调整刀具 3 次，设为方法一，费用为 q_0. 所有调整刀具次数为 1 的切割方式的费用为 $q_1, q_2, \cdots, q_m$; 所有调整刀具次数为 2 的切割方式的费用为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 则最优切割的费用为：

$$f = \min(q_1, q_2, \cdots, q_m, p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

相应的切割方式为最优切割方案. 证明方法与结论 2 类似.

此时，我们枚举所有调整刀具次数为 1 的切割方式和所有调整刀具次数为 2 的切割方式. 由结论 2 中的讨论，知在切割过程中调整刀具次数为 1 的切割方式只需考虑 12 种. 下面讨论切割过程中调整刀具次数为 2 的切割方式.

若切割过程中调整刀具次数为 2, 则可能先垂直纵向，然后垂直横向，再垂直横向，最后垂直纵向切割；或者先垂直横向，然后垂直纵向，再垂直纵向，最后垂直横向切割. 这样，只需枚举以下顺序：

$$\text{—}\ 1\ \text{—}\ 3\ \text{—}\ 4\ \text{—}\ 2\ \text{—} \qquad (16)$$

或

$$\text{—}\ 3\ \text{—}\ 1\ \text{—}\ 2\ \text{—}\ 4\ \text{—} \qquad (17)$$

其中，“—” 处可插入 5, 6, 插入方式类似调整刀具次数为 1 的情形.

基于上述讨论，下面我们对截断切割问题给出解法二.

解法二 首先用解法一求解，然后做下面三步之一：

1) 若只调整刀具一次，则最优解已定；

2) 若调整刀具两次，则从该切割方式与所有只调整一次的切割方式中找最优解.

3) 若调整刀具三次，则从该切割方式与所有只调整刀具一次和两次的切割方式中找最优解.

由前面结论 1 至 3 讨论，易知解法二至多需比较 25 种不同切割方式.

(二) 模型二的建立与解法 (略)

六、问题回答

(一) 不同的切割方式的总数：

在假设条件下，切割方式总数为 $P_6^6=6!=720$ 种.

若考虑要求最后切割底面，则切割方式为 $P_5^5=5!=120$ 种. 若考虑到待加工长方体和成品长方体可能共面，则切割方式总数为 $P_3^3==3!=6$ (三个面共面); $P_4^4=4!=24$ (二个面共面); $P_5^5=5!=120$ (一个面共面) 等.

(二) 若每次选择一个加工费用最少的待切割面进行切割，假设单位面积的切割费用为 1, 即简化为寻找面积最小的待割面： $A_k - \min(a_{k-1}, b_{k-1}r, a_{k-1}c_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1})$, 将找到的面切割，得到下一个待加工长方体，用同样规则进行切割. 根据这规则我们给出了程序 (附录二略). 用这个程序我们随机选取 80 种情况进行求解并对比，同时与模型所得最优解 (附录略) 进行了比较.

优点：规则考虑到了优化的思想，每次切割找最佳割面，通过与最优解比较，有些值就是最优解，例如 $a=10,b=14.5,c_0=19,a_6=3,\ b_6=2,c_6=4,u_1=6,\ v_1=7,w_1=9,e=1,r=1.5$ 时，得到 $\min f=540.5$，与最优解一致，次序同为 (3, 5, 1, 4, 6, 2).

缺点：规则不是最优的，这是因为

$$A_k - \min(a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}), = \max(c_{k-1}/r, b_{k-1}, a_{k-1})$$

而忽略了厚度的影响和换刀具的费用 ne，因此造成了一定的小差别，通过对比 80 组数据的比较统计(以最优费用为分母)，得平均比值 $p=1.0266$.

不是最优解的情况举例：$a=20,b_0=15,c_0=20,a_6=4,\ b_6=5,c_6=6,u-1=6,\ v_1=7,w_1=8,e=1,\ r=1.5$ 时，按此规则得到 $\min=797$，而最优解为 783，此时比值 $p=1.0189$.

(三) 对 $e=0$ 的情形有简明的优化准则，见模型中的定理 4

(四) 实例数据

$a=10,b=14.5,c=19,\ a=3,b=2,c=4,\ u=6,v=7,w=9$ 用切割面的序列表示一种切割方式，切割面的序列的定义同定理 4 中所述，对于所给实例数据，我们得到的计算结果如下：

a) $r=1,\ e=0$

切割面的序列最优解为 [5,3,1,6,4,2] 或 [5,3,6,1,4,2]，调整刀具次数均为 $n=3$，最小加工费用为 $f=374$ 元.

b) $r=1.5,\ e=0$

切割面的序列最优解为 [3,1,5,4,6,2] 或 [3,5,1,4,6,2]，调整刀具次数均为 $n=3$，最小加工费用为 $f=437.5$ 元.

c) $r=8,\ e=0$

切割面的序列最优解为 [3,1,4,5,2,6]，调整刀具次数 $n=3$，最小加工费用为 $f=540.5$ 元.

d) $r=1.5,\ 2\le e\le 15$

当 $2\le e\le 2.5$ 时，切割面的序列最优解为 [mathcai1] [3, 1, 5, 4, 6, 2] 或 [3, 5, 1, 4, 6, 2]，调整刀具次数均为 $n=3$;

当 $e=2.5$ 时，切割面的序列最优解为 [mathcai2] [3, 1, 5, 4, 6, 2] 、 [3, 5, 1, 4, 6, 2] 或 [3, 5, 4, 1, 6, 2]，前两组解的调整刀具次数均为 $n=3$，第三组解的调整刀具次 $n=1$;

当 $2.5\le e\le 15$ 时，切割面的序列最优解为 [mathcai3] [3, 5, 1, 4, 6, 2]，调整刀具次数 $n=1$.

对于问题 a), b), c) 直接运行即可得出结果. 而对于问题 d)，由于 e 的值在某闭区间内连续变化，因此需"离散"化处理. 设 $e=2,e=e+0.5\times i,\ (i=1,2,\cdots,25,26)$，每次输入一组 (e_i,r)，得出其最优解、最小加工费用，然后分析最优解的变化规律.

最小加工费用值随 e 值变化如下表：

序号	1	2	3	4	5	…	25	26	27
e	2	2.5	3	3.5	4	…	14	14.5	15
f/(元)	443.5	445	445.5	446	446.5	…	456.5	457	457.5

由上表分析可知，$e=2\to 2.5$ 时，f 每次增加 1.5. 而 $e=2.5\to 15$ 时，f 每次增加 0.5. 这是因为临界点 $e=2.5$ 时，最优解发生了变化. e 的增加必将减少最优解的调整刀具次数. $e=2$ 时调整刀具次数 $n=3$，而 e 增至 2.5 时，$n=3$ 或 1; e 继续增大时，$n=1$.

七、模型评价

模型特色在于它深入研究了不同切割方式的特点，找出了若干优势准则，运用这些准则只需考虑至多 25 个切割方式就可以找到最优切割方案. 优化方便，而且可以将之扩大应用于一般性 n 面体的截断切割问题.

参考文献

[1] 钱颂迪，运筹学，清华大学出版社，北京， 1990.

[2] 郭耀煌等，运筹学与工程系统分析，中国建筑工业出版社，北京， 1986.