

文章编号: 1005-3085(2002)05-0035-06

## 血管的三维重建

徐 晋(电子工程与信息科学系), 刘雪峰(数学系), 柏容刚(电子工程与信息科学系)

指导老师: 窦 斗(数学系)

(中国科学技术大学, 合肥 230026)

**编者按:**本文分析了每张切片与管道曲面的交线是一族圆的包络线,且这族圆中半径最大者即为最大内切圆这一几何特性,建立了相应的算法,将中轴线拟合成 Bézier 曲线,并用两种算法对模型进行了检验,方法有一定特色。

**摘 要:**对血管的三维重建问题,我们假定血管为等径管道,通过分析其几何特性,给出了确定其管道中轴线和半径的数学模型——搜索每个切片截面,求最大内切圆,该内切圆圆心即为切片截面与管道中轴线的交点,该内切圆半径即为管道半径,再通过拟合各个交点求出轴心线。

本模型中,我们确立了两种有效的误差分析方法;并由此发现由于中轴线与切片交角过小会使结果产生较大偏差。为解决此问题,我们从其它方向重新对血管进行切割,再进行处理求解,得到更加精确的结果。

**关键词:** 血管;等径管道;旋转切面

**分类号:** AMS(2000) 65D17

**中图分类号:** O242.1

**文献标识码:** A

### 1 问题重述(略)

条件假设

- 1). 血管的表面是由半径固定、圆心连续变化的一族球滚动形成的包络面。
- 2). 医学上,血管不存在严重扭曲。
- 3). 管道中轴线与每张切片有且只有一个交点。

### 2 问题分析与模型建立

根据假设,血管可视为表面是由球心沿着某一曲线(称为中轴线)的球滚动包络而成的管道。

根据所查文献(参考文献<sup>[6]</sup>),可知这种管道有如下几何特性:

**定理** 等径管道每个切片的轮廓线是一族半径、圆心连续变化的圆的包络线,而这族圆中半径最大的圆的圆心即为管道的中轴线与切片的交点,半径即为管道半径。

利用这个定理,我们建立模型如下:

- 1). 对第  $i$  个切片,求其轮廓线最大内切圆的半径  $R_i$  与圆心  $C_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 99$ ;
- 2). 由  $R = \frac{1}{100} \sum_{i=0}^{99} R_i$  确定管道半径  $R$ ;
- 3). 将各圆心  $C_i$  拟合成 Bézier 曲线,此曲线即为管道的中轴线。
- 4). 确立误差分析方法,提出调整算法,对 2)、3)步结果进行调整。

### 3 模型求解

#### 1). 导入数据、转换存储方式

为方便计算,先将 Bmp 文件用程序(本文使用 Mathematica)导入计算机转换成三维矩阵存储。

#### 2). 求截面轮廓线上各点的坐标

由“管道中轴线与每张切片有且只有一个交点”,知截面为单连通的区域,轮廓线为一闭合曲线。本文使用了 Matlab 的 edge() 函数求出此轮廓线。由于数据量较大,以稀疏矩阵存取数据。

#### 3). 求轮廓线最大内切圆的半径与圆心的算法

总体思想:

在截面内选取一定数量的点,对每一个点分别计算它到所有边界点的距离,取距离中最小的一个,这个距离就是以该点为圆心的、与轮廓线内切的若干个圆中最小的圆的半径。在这些由一定数量的点确定的最小内切圆中半径最大的一个,这个圆就是轮廓线的最大内切圆。

具体步骤:

确定搜索的起点:在 00.bmp 的截面中搜索,其轮廓线近似于圆,取中心处一点为起点,则最大内切圆的圆心不会离起点太远;管道是连续的,所以相邻两层的轮廓线的最大内切圆圆心的距离不会太大,我们每次取前一层求的圆心为当前层搜索的起点,在小范围内进行搜索,得到所求。

对 100 个半径取平均值,得到管道半径:  $R = 29.75$

#### 4). 由圆心坐标求中心轴线方程及曲线投影

由上述计算得到 100 个圆心的三维坐标。我们选取 Bézier 样条来拟合管道中心轴线,得到中轴线的侧视图,三维透视图(见图 1);

### 4 模型的评判标准及误差分析

方法一:通过求边界点到轴线的距离比较误差

设求得的轴线为  $r(s)$ ,血管实际轴线为  $r_0(s)$ 。

在第  $z$  层上有轮廓线  $s(z)$ ,设点  $p(x, y, z)$  位于  $s(z)$ 。

$p$  到求得轴线  $r(s)$  的距离为:

$$D(r, p) = \text{Min} \{ \text{Distance}(p, q) \} \quad (q \text{ 位于 } r(s))$$

$p$  到实际轴线  $r_0(s)$  的距离为:

$$D(r_0, p) = \text{Min} \{ \text{Distance}(p, q) \} \quad (q \text{ 位于 } r_0(s))$$

且  $D(r_0, p)$  恒为管道半径  $R$ 。

$$\Delta(p) = |D(r, p) - R|$$

如果所求的轴线于血管轴线相吻合,则  $\Delta = 0$ ;我们求轮廓线  $s(z)$  上的所有点  $p$  对应的  $\Delta$  的均值  $\text{Everage}\Delta(z)$ ;因为点较多,每隔 4 层,随机地取切片轮廓线  $s(z)$  上 200 个点:

$$p(i, z) \quad i = 1, 2, \dots, 200;$$

$$\text{Everage}\Delta(z) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \Delta(p(i, z))$$

我们作  $\text{Everage}\Delta(z) - z$  的图像,即误差分布图(见图 2)。

分析图像可知:

- 1). 我们拟合的中轴线  $r(s)$  在整个  $z$  轴上 ( $0 \leq z \leq 99$ ) 与血管的实际中心轴基本相吻合。
- 2). 尽管所得的差值没有具体的几何意义, 但是如果对不同层的差值进行比较, 可发现中轴线的拟合在层数  $z < 30$  的地方误差较小, 随着  $z$  值的增加, 误差变大, 这在直观上是可以理解的: 当  $z$  增大时, 轴线与  $x-y$  平面接近平行,  $\frac{ds}{dz}$  变大, 切片上容纳的信息有限, 产生较大误差。且易知  $z$  接近 99 时, 图像如下 (见图 3):

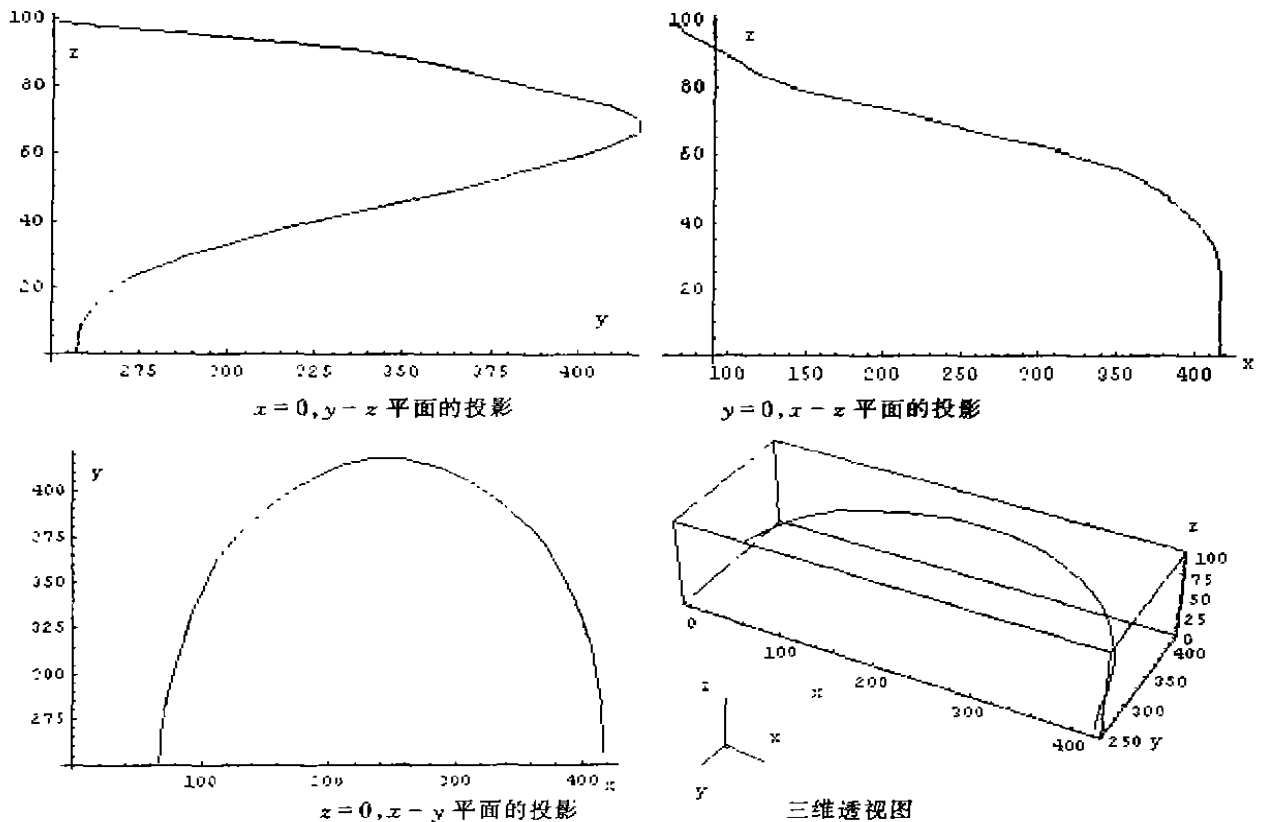


图 1 模型求解结果

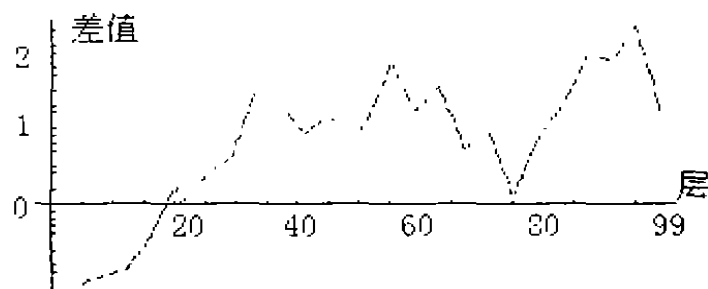


图 2 误差分布图

例如:  $p$  点得不到最小值, 故此处的误差非拟合误差。

方法二: 重建截面求面积

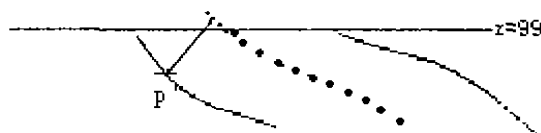


图3 轮廓线上的点到轴线的距离

由得到的管道中轴线重建 100 张切片的截面图像,与原先给定的 100 张图象比较。设  $N(i)$  为原先给定的第  $i$  截面所含象素点的个数(可视为面积),  $M(i)$  为重建管道的第  $i$  截面所含象素点的个数,  $P(i)$  为重建管道的第  $i$  截面与原先给定的截面的重叠区域所含象素点的个数。比较公式为:

$$\Delta(i) = \frac{N(i) - P(i) + M(i) - P(i)}{M(i)}$$

显然,  $\Delta$  值越小,截面拟合得也就越好,即模型得出的中轴线越接近实际的位置。这个误差值就作为评判设计的模型好坏以及进一步修正结果的标准。

由管道中轴线重建  $z$  截面的算法:

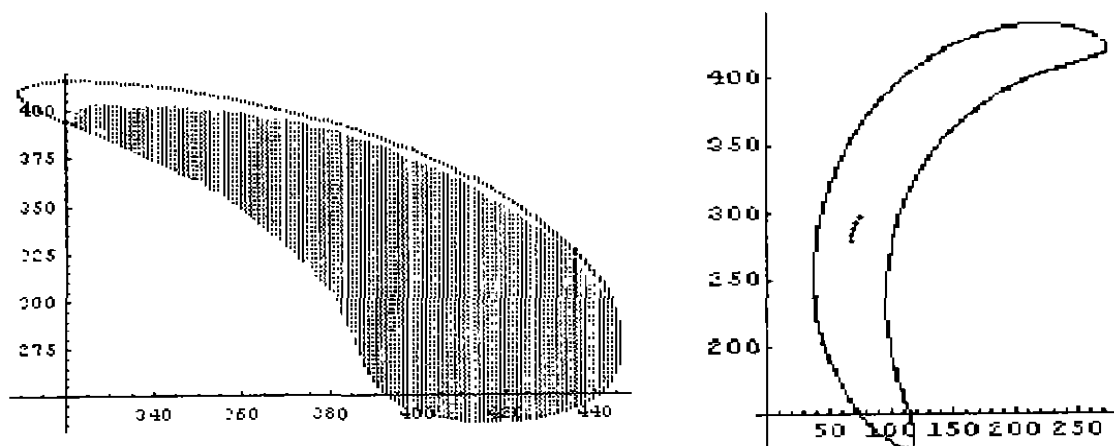
对  $z=i$  平面,把中轴线上  $z \in [i-R, i+R]$  范围内的所有象素点投影到  $z=i$  平面上,得到的  $[2R+1]$  个投影点作圆心,以  $\sqrt{(R^2 - (z-i)^2)}$  为半径作圆,这  $[2R+1]$  个圆重叠所形成的图形即为重建的  $z=i$  的截面。

我们通过计算得到了第 30, 40, 50, 60, 70 层的重建图象。分别计算出:

$$\Delta(30) = 5.7\%, \Delta(40) = 6.5\%, \Delta(50) = 7.1\%, \Delta(60) = 6.8\%, \Delta(70) = 6.5\%;$$

由于计算量比较大,仅取 5 个层分析,对其它层同理可求  $\Delta(i)$ 。

下左图是第 30 个截面的重建图形和原始图形叠加后的图形:



叠加后的图形

第 95 层上得到的最大内切圆的圆心(5 个点)

图4 重建截面所得结果

由上右图可知,用中轴线方程重建的截面与原截面相比,在凹处有一部分溢出,而在凸处有一部分没有覆盖。分析这种现象产生的原因:例如在求第 95 层轮廓的最大内切圆圆心时得到了 5 个点:

$$\{|70, 280|, |71, 285|, |72, 289|, |73, 293|, |74, 296|\} \quad R = 29.614$$

它们构成一条与轴心线投影弯曲方向一致的曲线,我们在求最大内切圆心时取的是平均

值,显然偏离了中轴线,理想的算法应该是将几个同时为最大的点拟合,得到样条曲线,在样条曲线上取中点,才是比较合理的结果。我们采用下面的方法从另一个角度修正误差。

#### 模型的修正:

分析误差可知,中轴线的拟合在切片与中轴线近似垂直的时候,拟合误差小。由此,我们考虑根据已知数据,在其它方向上做血管的剖面。

$$\begin{aligned} \text{本模型中,我们以} \begin{cases} x = 250 \\ y = 250 \\ z \in (-\infty, \infty) \end{cases} & \text{为轴心,旋转切面;} \\ \begin{cases} y - 250 = \operatorname{tg}(t) \times (x - 250) & (0 \leq t \leq \pi) \\ z \in [0, 99] \end{cases} \end{aligned}$$

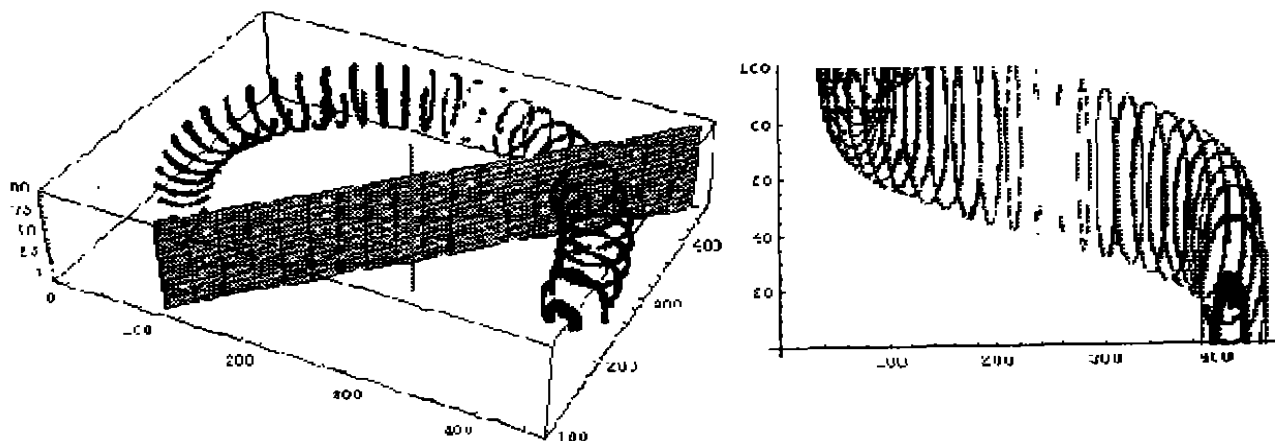


图5 旋转切面切血管

$t$  变化时,产生连续的截面,每一次所得截面与血管的中心轴线近似垂直,故得到较好的截面(近似于圆形),这有利于接下来求截面的最大内接圆之半径、圆心。相切示意图及投影示意图如上。

此法可调整原模型中求出的轴线位置。二者比较如下,其中  $L1$  为调整后的轴线,  $L2$  为原轴线:

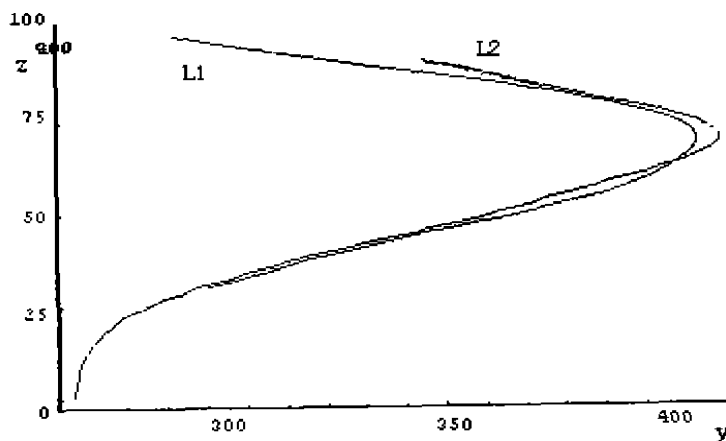


图6 模型修正后所得轴线的侧视图

直观上看,可以发现调整之后,所得的中心轴线更为光滑,并且在第 90-100 层得到更多

有效数据。我们用误差分析方法二,对调整后的轴线对第 30,40,50,60,70 层分析,与调整前比较的如下:

表 1 模型修正前后误差比较表

|     | $\Delta(30)$ | $\Delta(40)$ | $\Delta(50)$ | $\Delta(60)$ | $\Delta(70)$ |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 调整前 | 5.7%         | 6.5%         | 7.1%         | 6.8%         | 6.5%         |
| 调整后 | 3.2%         | 2.5%         | 2.7%         | 3.0%         | 3.2%         |

#### 模型的优缺点分析

- 1) 模型不能够对半径变化的情况适应,这是因为我们的理论根据就是等径管道的几何特性。
- 2) 模型的优点是对轴线扭曲比较大的情况,通过旋转剖面方向,可以寻找到较好的截面进行求解。
- 3) 通过向切片所在面投影,由轴线计算截面,不仅能计算误差,还是一条修正轴线的好的途径。
- 4) 误差分析的方法(一)虽不能够测出误差的绝对值,但是通过抽取随机点使计算简单,速度快,适用于比较几条轴心线的优劣。

#### 参考文献:

- [1] 张韵华. Mathematica 符号计算系统实用教程[M]. 合肥:中国科学技术大学,1998
- [2] 李尚志. 数学实验[M]. 北京:高等教育出版社,1996
- [3] 关履泰. 计算机辅助几何图形设计[M]. 北京:高等教育出版社,1999
- [4] 程正兴. 数据拟合[M]. 西安:西安交通大学出版社,1986
- [5] Barhill R E, Riesenfeld R F. Computer Aided Geometric Design[M]. Academic Press New York, 1974
- [6] 陈凌钧, 骆岩林. 等径管道的三维重建[J]. 高校应用数学学报. Vol. 13 Ser A Suppl. 1998, 87-90

## 3D Rebuilding of Vessel

XU Jin, LIU Xue-feng, BAI Rong-gang

Adviser: DOU Dou

(University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

**Abstract:** Given a problem of 3D rebuilding of vessel, we consider vessel with constant radius and have built a model to calculate the axis and radius of vessel. In this model we deal with each slice and get the inscribed circle with maximum radius, whose center is just on the axis of vessel, and it's radius just vessel's radius.

In this model, we have introduced two efficient way to analyse the error. We find that error increases when the angle between the axis and the slice decreases. To handle this problem, we cut the vessel in different direction. The result is good.

**Key words:** vessel; 3D rebuilding; constant radius