

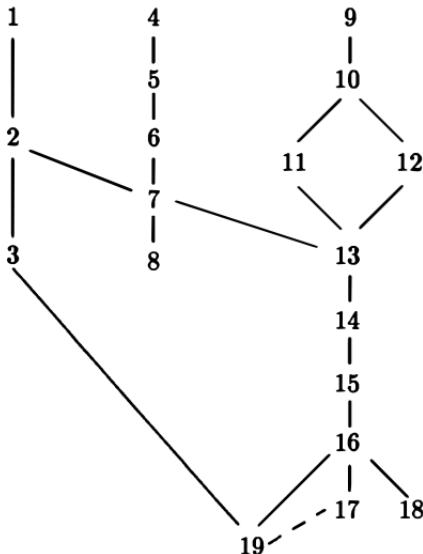
Le Groupe Fondamental de la Droite Projective Moins Trois Points

PAR P. DELIGNE

Introduction	3
0. Terminologie et notations	9
1. Motifs mixtes	11
2. Exemples	27
3. Torseurs sous $\mathbb{Z}(n)$	34
4. Rappels sur les Ind-objets	49
5. Géométrie algébrique dans une catégorie tannakienne	54
6. Le groupe fondamental d'une catégorie tannakienne	63
7. Géométrie algébrique dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations: interprétations	69
8. Extensions itérées de motifs de Tate	85
9. Rappels sur les groupes unipotents	97
10. Théories du π_1	101
Groupoïdes	101
Théorie classique	105
Théorie profinie	109
Théorie algébrique	115
11. La structure cristalline du π_1	126
12. La filtration de Hodge du π_1	134
13. Le π_1 motivique	142
14. Exemple: le π_1 motivique de \mathbb{G}_m	147

15. Points base à l'infini	151
Théorie classique	153
Théorie profinie	159
Théorie algébrique	164
Compatibilités	168
Théorie motivique	174
16. \mathbb{P}^1 moins trois points: un quotient du π_1 motivique	177
17. Relations de distribution: voie géométrique	192
18. Le torseur $P_{d,k} + (-1)^k P_{d,k}$ est d'ordre fini: voie géométrique . .	199
19. Comparaison des $\mathbb{Z}(k)$ -torseurs des paragraphes 3 et 16	205
Index des notations	215
terminologique	215
Bibliographie	217

Leitfaden



Le présent article doit beaucoup à A. Grothendieck. Il a inventé la philosophie des motifs, qui est notre fil directeur. Il y a quelques cinq ans, il m'a aussi dit, avec force, que le complété profini $\hat{\pi}_1$ du groupe fondamental de $X := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$, avec son action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est un oject remarquable, et qu'il faudrait l'étudier.

Tout revêtement fini de X peut être décrit par des équations à coefficients des nombres algébriques. Appliquant à ces coefficients un élément de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on obtient les équations d'un autre revêtement. Comprendre comment $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ permute les classes d'isomorphie de revêtements finis revient essentiellement à comprendre l'action de Galois sur $\hat{\pi}_1$. "Essentiellement": car j'ai omis de mentionner les points base, et que les revêtements galoisiens n'ont pas été traité comme G -revêtements, pour G leur groupe d'automorphismes.

Jusqu'ici, on ne dispose pas d'un langage pour étudier l'action de Galois sur $\hat{\pi}_1$. A. Grothendieck et ses élèves ont développé une description combinatoire ("cartes") des revêtements finis de X , basée sur la décomposition de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en les deux "triangles sphériques" $\text{Im}(z) \geq 0$ et $\text{Im}(z) \leq 0$, de côtés $[\infty, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, \infty]$. Elle n'a pas aidé à comprendre l'action de Galois. On n'a que peu d'exemples de revêtements non résolubles dont les conjugués galoisiens aient été calculés.

Dans l'article, nous ne considérons que le $\hat{\pi}_1$ rendu nilpotent, i.e. que les quotients $\hat{\pi}_1^{(N)}$ de $\hat{\pi}_1$ par les sous-groupes de sa série centrale descendante. Le groupe profini $\hat{\pi}_1^{(N)}$ est un produit sur ℓ premier de pro- ℓ -groupes nilpotents: $\hat{\pi}_1^{(N)} = \prod_{\ell} \pi_1^{(N)}{}_{\ell}$. Chaque $\pi_1^{(N)}{}_{\ell}$ est un groupe de Lie ℓ -adique.

Il admet une algèbre de Lie $\text{Lie} \pi_1^{(N)}{}_{\ell}$, qui est une algèbre de Lie sur \mathbb{Q}_{ℓ} . Si on a choisi un point base $x \in X(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} - \{0, 1\}$, $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur ces algèbres de Lie. L'action à automorphismes intérieurs près ne dépend pas du choix de x . On aimerait comprendre ces actions.

Le π_1 rendu nilpotent est très proche de la cohomologie. Ceci apparaît au mieux dans la théorie de D. Sullivan ([Su],[Mo]). Notations: pour Γ un groupe de génération fini, soient $Z^i\Gamma$ la série centrale descendante, $\Gamma^{(N)} = \Gamma/Z^{N+1}\Gamma$ et $\Gamma^{[N]} = \Gamma^{(N)}/\text{torsion}$ (9.3). La théorie de Malcev ([Mal]) attache à $\Gamma^{[N]}$ une algèbre de Lie nilpotente sur \mathbb{Q} , notée $\text{Lie} \Gamma^{[N]}$, telle que $\Gamma^{[N]}$ soit un sous-groupe de congruence du groupe algébrique unipotent sur \mathbb{Q} d'algèbre de Lie $\text{Lie} \Gamma^{[N]}$. D'après D. Sullivan, pour X une variété différentiable, $\text{Lie} \pi_1(X)^{[N]} \otimes \mathbb{R}$, à automorphismes intérieurs près, est déterminé par l'algèbre différentielle graduée Ω_X^* , prise

à quasi-isomorphismes près.

Cette relation étroite avec la cohomologie indique que l'étude du π_1 rendu nilpotent est loin du rêve “anabélien” de A. Grothendieck. Elle permet par contre de s'appuyer sur sa philosophie des motifs.

Soit k un corps de nombres. Si X est une variété algébrique sur k , on dispose pour X de toute une série de théories de cohomologie parallèles: la cohomologie classique de $X(\mathbb{C})$ (pour chaque plongement complexe de k), la cohomologie cristalline (= de de Rham pour X lisse), la cohomologie ℓ -adique, … . Les groupes obtenus sont munis de diverses structures additionnelles (de Hodge mixte, action de Galois, …) et reliés par des isomorphismes de comparaison. Au paragraphe 1, nous axiomatisons la situation par la définition des “systèmes de réalisations sur k ”. La définition exacte n'est pas à prendre au sérieux: selon les applications – et ce qu'on est capable de faire – il peut y avoir intérêt à ajouter ou à soustraire tant aux données qu'aux axiomes. L'essentiel pour nous est que

- (i) La catégorie des systèmes de réalisations est munie d'un \otimes avec les propriétés usuelles: c'est une catégorie tannakienne sur \mathbb{Q} .
- (ii) Conjecturalement, la catégorie des motifs est une sous-catégorie pleine de celle des systèmes de réalisations.

La condition (ii) exige en particulier que pour toute variété X sur k et tout i , les théories de cohomologie disponibles, appliquées à X , fournissent un système de réalisations sur k $H^i(X)$ (qu'on notera $H^i(X)_{\text{mot}}$ et appellera le H^i motivique de X).

Des idées analogues ont été développées indépendamment par U. Jannsen [J]. Dans [J], U. Jannsen définit les motifs (mixtes) sur k comme formant la sous-catégorie tannakienne de celle des systèmes de réalisations engendrée par les $H^i(X)$, pour X quasi-projectif lisse. Ici, nous resterons imprécis, en disant qu'un motif sur k est un système de réalisations “d'origine géométrique”. Pour X sur k et $x \in X(k)$, nous voulons par exemple regarder $\text{Lie } \pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{[N]}$ comme une réalisation d'un motif sur k .

L'article doit beaucoup à un travail non publié de Z. Wojtkowiak. Pour $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et $x \in X(\mathbb{C})$, je lui avais proposé une définition de la structure de Hodge mixte de $\text{Lie } \pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{[N]}$. Il l'a calculée en partie, pour N petit, et à mon extrême surprise, a montré que pour $N = 4$, sa description faisait apparaître $\zeta(3)$. Une forme décantée des calculs apparaît au paragraphe 19. En fait, tout l'article a pour origine mon désir de

comprendre le résultat de Z. Wojtkoviak. J'ai aussi été aidé par la réponse de O. Gabber à ma question "Comment construire une extension de \mathbf{Z}_ℓ par $\mathbf{Z}_\ell(3)$, uniformément en ℓ ?": "A partir d'une classe dans $K_5(\mathbf{Q})$ ", ainsi que par les conjectures de A. Beilinson sur les valeurs de fonctions L .

Pour X une variété algébrique sur un corps de nombres k , $x \in X(k)$ et N un entier, on veut disposer d'un système de réalisations $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$. Nous n'arriverons à les construire que sous des hypothèses additionnelles sur X : dans le cas général, certaines réalisations nous manquent. Le cas de \mathbf{P}^1 moins quelques points – plus généralement des variétés rationnelles lisses – est toutefois couvert.

Soient $k = \mathbf{Q}$, $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et $x \in X(\mathbf{Q})$. Le gradué pour la filtration par le poids de $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ est l'algèbre de Lie libre sur $H_1(X)_{\text{mot}}$, modulo son Z^{N+1} (série centrale descendante). Le $H_1(X)_{\text{mot}}$ est la somme de deux copies du motif de Tate $\mathbf{Q}(1)$. On en déduit que $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ est extension itérée de motifs de Tate $\mathbf{Q}(n)$. Que des extensions non triviales apparaissent est ce qui fait son charme.

Je conjecture que sur un corps de nombres k , le groupe des extensions motiviques de \mathbf{Q} par $\mathbf{Q}(n)$ ($n > 0$) est $K_{2n-1}(k) \otimes \mathbf{Q}$. Pour un cadre général dans lequel s'insère cette conjecture, voir le §5 de [B]. En particulier, pour $k = \mathbf{Q}$, on veut avoir $\text{Ext}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(n))$ nul pour n pair, de dimension un pour n impair ≥ 3 . Il s'agit du Ext^1 motivique: les extensions en tant que système de réalisations qui "proviennent de la géométrie algébrique". Cette conjecture implique pour $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ des restrictions sévères, qu'on est loin d'avoir vérifiées. Ce qu'on connaît ne concerne jusqu'ici que le quotient par le second groupe dérivé. Une grande partie de l'article est consacrée à élaborer un langage dans lequel les conséquences sur $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ de la conjecture s'énoncent clairement.

Passons l'article en revue, en indiquant quelques raccourcis.

Au paragraphe 1, nous décrivons la catégorie des systèmes de réalisations sur une base S . La base S peut être: $\text{Spec}(\mathbf{Q})$, $\text{Spec}(F)$ pour F un corps de nombres, un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou lisse sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$. Dans cette catégorie, les Hom sont des \mathbf{Q} -espaces vectoriels. Nous définissons aussi une notion de structure entière; dans la catégorie des systèmes de réalisations à coefficients entiers (= munis d'une structure entière), les Hom sont des \mathbf{Z} -modules libres de type fini. La définition a une composante cristalline. Le lecteur est invité à la négliger en première approximation. La théorie coïncide alors avec celle de U. Jannsen

[J]. L'aspect cristallin sera négligé dans la suite de l'introduction.

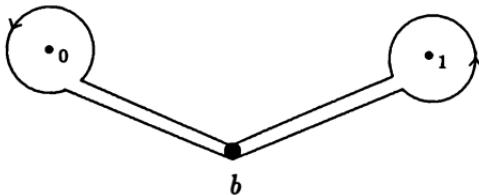
Le paragraphe 2 donne des exemples. Il explicite aussi ce qu'est une extension du système de réalisations unité \mathbb{Z} par un système de réalisations à coefficients entiers M . Terminologie: torseur sous M . Exemple: torseur de Kummer sous le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$.

Le paragraphe 3 décrit des torseurs remarquables, qu'on pourrait appeler cyclotomiques, sous les motifs de Tate $\mathbb{Z}(k)$. Le paragraphe 16 expliquera comment ils apparaissent naturellement dans l'étude du π_1 de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. La description ici est directe, mais non motivée. L'assertion que certains de ces torseurs sont d'ordre fini (3.5, 3.14) redonne les formules connues exprimant les fonctions L de Dirichlet aux entiers négatifs comme intégrales de distributions sur $\widehat{\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\widehat{\mathbb{Z}}$: une version des congruences de Kummer. Au paragraphe 18, nous prouvons 3.5, 3.14 à partir de l'interprétation géométrique du paragraphe 16. Au paragraphe 3, nous donnons une preuve directe, en nous appuyant sur les formules connues pour $L(\chi, 1 - k)$.

Le paragraphe 4 est un pot-pourri de rappels sur les Ind-objets et pro-objets. Le lecteur est invité à ne le consulter qu'au fur et à mesure des besoins.

Nous voulons donner un sens motivique à une affirmation comme la suivante: le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ (point base b) est librement engendré par les lacets suivants:

(1)



Les paragraphes 5, 7 et 15 sont là pour construire le langage qui le permet. Il s'agit

- (a) de donner un sens motivique à $\pi_1(X, x)^{(N)}$, et non seulement à son algèbre de Lie;
- (b) de donner un sens motivique au torseur (0.6) des classes d'homotopie de chemins de b_1 à b_2 ;
- (c) dans la figure (1), le lacet "monodromie autour de 0" n'est déterminé

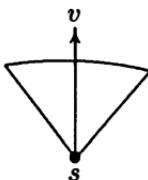
sans ambiguïté que pour b “proche de 0”. Il nous faudra donner un sens à un point base “proche de 0”.

Notre solution sera de définir un groupe linéaire motivique comme un étant un Ind-objet de la catégorie des motifs, muni d'une structure d'algèbre de Hopf commutative. Pour éviter les conjectures: parler de groupe en système de réalisations, et remplacer “motif” par “système de réalisations”. Définition analogue pour les torseurs sous un groupe. On définit séparément une notion de structure “entière”. Cette définition a l'avantage que les constructions standard en géométrie algébrique: série centrale descendante, quotients, pousser un G -torseur par $G \rightarrow H$, torsion par un torseur, ... passent automatiquement au cadre motivique. Ceci, dans une catégorie tannakienne quelconque, est expliqué au paragraphe 5.

Au paragraphe 7, on réinterprète ces définitions dans un langage plus proche des applications. Le lecteur auquel déplaisent les général non sense des paragraphes 5 et 7 pourra prendre les interprétations données au paragraphe 7 comme définition des groupes, torseurs ... en systèmes de réalisations. Inconvénient: chaque construction standard devrait être redéfinie dans ce cadre.

Dans la définition classique du π_1 , le rôle du point base b peut être joué par une partie contractile B . Il peut être joué aussi par un filtre \mathcal{B} sur X ayant une base formée de parties contractiles. Par exemple, pour X une surface de Riemann \bar{X} moins un point s , v un vecteur tangent non nul en s , et z une coordonnée locale centrée en s , on peut prendre les parties contractiles

$$0 < |z/v| < \epsilon, \quad |\arg(z/v)| < \eta :$$



Le filtre $\mathcal{B}(v)$ qu'elles engendrent est indépendant de la coordonnée choisie. Par cette construction, un vecteur tangent non nul en s peut servir de point base dans la définition du π_1 de X .

Le même phénomène se reproduit dans la théorie profinie du π_1 et dans la théorie “à la de Rham”. Prendre toutefois garde que $\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(\lambda v)$ pour λ réel > 0 , mais que ce fait n'a pas d'analogie dans les autres théories. Ces constructions sont expliquées au paragraphe 15. Elles permettent dans

la définition du π_1 motivique de X de prendre pour point base un point base “à l’infini”, tel le vecteur tangent v en s .

Soit $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Un sens algébrique pour “point base près de 0” est “vecteur tangent non nul en 0”. Pour un tel point base b , la monodromie autour de 0 a un sens motivique: c’est un morphisme de groupes motiviques

$$\mathbf{Z}(1) \longrightarrow \pi_1(X, b)_{\text{mot}}.$$

Ici et par la suite, π_1 est le π_1 pro-unipotent, défini comme limite projective de groupes motiviques $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}^{(N)}$.

Prenons pour point base le vecteur tangent 1 en 0. On a bonne réduction mod p pour tout p et $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}^{(N)}$ est un groupe linéaire en la catégorie tannakienne des motifs sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ extensions itérées de motifs de Tate. Le paragraphe 8 énonce une conjecture sur les $\text{Ext}^1(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(k))$ dans cette catégorie et en donne des conséquences. A la fin du paragraphe 16, on les explicite dans le cas de $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}^{(N)}$. J’espère que ceci met dans son cadre naturel le $\zeta(3)$ découvert par Z. Wojtkowiak. Le paragraphe 6 est préliminaire. Pour l’idée essentielle, voir 6.2.

Pour définir le π_1 motivique, il s’agit de rapiécer les diverses théories du π_1 dont on dispose, guidé par le but de construire un groupe motivique au sens du paragraphe 5, explicité au paragraphe 7. C’est fait aux paragraphes 10 à 13, après un rappel (paragraphe 9) sur la théorie de Mal’cev des groupes nilpotents et de leurs algèbres de Lie. Le résultat laisse à désirer. Il n’est complètement traité que des variétés algébriques lisses dont les compactifications lisses \bar{X} vérifient $H^1(\bar{X}, \mathcal{O}) = 0$. Autre reproche: je ne fais parfois qu’esquisser la définition de structures qui seront utilisées dans des calculs ultérieurs.

Au paragraphe 16, on explique enfin ce que les torseurs sous $\mathbf{Z}(k)$ du paragraphe 3 ont à voir avec le π_1 de la droite projective moins trois points. Les calculs justificatifs sont donnés au paragraphe 19. On donne aux paragraphes 17 et 18 une explication géométrique de certaines de leurs propriétés.

§0. Terminologie et notations.

- (0.1) On note $\lim \text{ind}$ et $\lim \text{proj}$ les limites inductives et projectives.
- (0.2) Pour ℓ un nombre premier, on note \mathbf{Z}_ℓ et \mathbf{Q}_ℓ les complétés de \mathbf{Z} et \mathbf{Q} pour la topologie ℓ -adique:

$$\mathbf{Z}_\ell = \lim \text{proj} \mathbf{Z}/\ell^n \mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Q}_\ell = \mathbf{Z}_\ell \otimes \mathbf{Q}.$$

On note $\widehat{\mathbf{Z}}$ le complété profini de \mathbf{Z} et A^f l'anneau des adèle finis:

$$\widehat{\mathbf{Z}} \xrightarrow{\sim} \prod_\ell \mathbf{Z}_\ell,$$

$$A^f = \widehat{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{Q}.$$

On note $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbf{Q} dans \mathbf{C} .

- (0.3) Pour A un groupe abstrait, ou un groupe algébrique, ou un groupe profini, ou une algèbre de Lie, on note $Z^i(A)$ la série centrale descendante. Nous utilisons la numérotation pour laquelle $A = Z^1(A)$. On note $A^{(N)}$ le quotient de A par $Z^{N+1}(A)$. Dans le cas des groupes abstraits ou profinis, on note $A^{[N]}$ le plus grand quotient sans torsion de $A^{(N)}$.

- (0.4) On note \otimes une extension des scalaires. Par exemple, pour X un schéma sur k et k' une extension de k , on pose

$$X \otimes k' := X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k').$$

- (0.5) Pour $f : X \rightarrow S$ un schéma affine sur S , le faisceau quasi-cohérent d'algèbres $f_* \mathcal{O}_X$ sera appelé *l'algèbre affine* de X/S , ou simplement de X , et X son *spectre*.

- (0.6) Soit G un faisceau en groupes sur un site \mathcal{S} ou, ce qui revient au même, dans un topos T . Cas particulier utile: \mathcal{S} est le point, un faisceau est un ensemble et G est un groupe. Un *G-torseur* est un faisceau P muni d'une action droite de G , localement isomorphe à G agissant sur lui-même par translations à droite. On dit aussi: espace principal homogène à droite

sous G . Si P est un G -torseur, un faisceau X sur lequel G agit peut être *tordu* par P . Le tordu X^P est le produit contracté $P \times^G X = (P \times X)/G$ et est muni de $\alpha : P \rightarrow \underline{\text{Isom}}(X, X^P)$ avec $\alpha(pg) = \alpha(p)g$.

Un (H, G) -bitorseur (SGA 7 VII 1 ou Giraud, cohomologie non abélienne III 1.5) est de même un espace principal homogène à gauche sous H , à droite sous G , les actions de G et H commutant l'une à l'autre. Si P est un G -torseur, le faisceau des automorphismes de P est le tordu G^P de G par P (pour l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs) et P est un (G^P, G) -bitorseur. Par cette construction, la donnée d'un (H, G) -bitorseur P équivaut à celle d'un G -torseur P et d'un isomorphisme de H avec G^P . Notation: on écrira bitorseur ${}_H P_G$ pour (H, G) -bitorseur.

Nous utiliserons les opérations suivantes sur les torseurs et bitorseurs.

Pousser: un G -torseur P par $\varphi : G \rightarrow H$ pour obtenir un H -torseur $\varphi(P)$. Un φ -morphisme du G -torseur P dans le H -torseur Q est $u : P \rightarrow Q$ tel que $u(pg) = u(p)\varphi(g)$. Un φ -morphisme se factorise uniquement par un isomorphisme de H -torseurs de $\varphi(P)$ dans Q .

Composé: le composé $P \circ Q$ d'un (G_1, G_2) -bitorseur P et d'un (G_2, G_3) -bitorseur Q est le (G_1, G_3) -bitorseur produit contracté $P \times^{G_2} Q = (P \times Q)/G_2$.

Inverse: de ${}_{G_1} P_{G_2}$: le (G_2, G_1) -bitorseur P^{-1} , unique à isomorphisme unique près, muni de $p \mapsto p^{-1} : P \rightarrow P^{-1}$ avec $(g_1 pg_2)^{-1} = g_2^{-1} p^{-1} g_1^{-1}$.

Pour P et Q deux G -torseur, le faisceau $\underline{\text{Isom}}(P, Q)$ des isomorphismes de G -torseurs de P avec Q est le (G^Q, G^P) -bitorseur $Q \circ P^{-1}$.

Si le site \mathcal{S} est tel que les foncteurs représentables $h_{\mathcal{S}}$ soient des faisceaux, on transporte ces notions à \mathcal{S} par le foncteur pleinement fidèle $S \mapsto h_S$, chaque construction n'étant définie que si elle ne fait pas sortir des faisceaux représentables.

§1. Motifs mixtes.

1.1. On dispose pour les variétés algébriques de plusieurs théories de cohomologie parallèles. Les plus importantes pour nous seront les cohomologies de de Rham et ℓ -adiques.

Cohomologie de de Rham: soient k un corps de caractéristique 0 et X une variété algébrique sur k . On suppose X lisse. Les groupes de cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^i(X)$ sont les groupes d'hypercohomologie du complexe de de Rham:

$$H_{\text{DR}}^i(X) := \mathbf{H}^i(X, \Omega_{X/k}^*)$$

[G]. Ce sont des espaces vectoriels sur k . Pour k' une extension de k et X' sur k' déduit de X par extension des scalaires, on a

$$H_{\text{DR}}^i(X') = H_{\text{DR}}^i(X) \otimes_k k' .$$

Si X n'est pas lisse, le complexe de de Rham ne fournit plus une théorie raisonnable. On peut définir les $H_{\text{DR}}^i(X)$ par réduction au cas lisse, par les méthodes de [D3], ou, si X admet un plongement dans une variété lisse Z , comme hypercohomologie du complexe de de Rham du complété formel de Z le long de X (R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. IHES 45 (1975) p. 5–99); plus intrinsèquement, c'est la cohomologie cristalline de X (A. Grothendieck, *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, Notes by J. Coates and O. Jussila, in: dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland 1968).

Cohomologie ℓ -adique: soit ℓ un nombre premier; pour k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq \ell$, on dispose de la théorie ℓ -adique: $X \mapsto H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ attachant à X sur k des groupes de cohomologie qui sont des espaces vectoriels sur \mathbb{Q}_ℓ (SGA5 VI). Ils sont définis à partir de groupes de cohomologie à coefficient $\mathbb{Z}/(\ell^n)$, et nous nous permettrons de donner comme référence pour un théorème en cohomologie ℓ -adique le lieu où son $\mathbb{Z}/(\ell^n)$ -anologue est prouvé. Les $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ ne dépendent que de X . En particulier, si k est clôture algébrique de k_0 , et que X provient par extension des scalaires de X_0 sur k_0 , $\text{Gal}(k/k_0)$ agit (k -semi-linéairement) sur X , donc agit sur les $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Cette action est continue. Si k' est une extension algébriquement close de k et que X' se déduit de X par extension des scalaires, on a $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i(X', \mathbb{Q}_\ell)$.

Cela résulte par passage à la limite du théorème de changement de base par un morphisme lisse SGA4 XVI 1.2: k' est limite inductive filtrante de k -algèbres A avec $\text{Spec}(A)$ lisse sur k .

Si $k = \mathbb{C}$, on dispose de l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ des points de X et de sa cohomologie rationnelle $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. On a des isomorphismes canoniques [G] et (SGA4 XVI 4.1)

$$(1.1.1) \quad H_{\text{DR}}^i(X) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

$$(1.1.2) \quad H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(X, (\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Si k est un corps de caractéristique 0, $\sigma : k \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement complexe et \bar{k} la clôture algébrique de k dans \mathbb{C} , rel. σ , on en déduit des isomorphismes

$$(1.1.3) \quad H_{\text{DR}}^i(X) \otimes_{k, \sigma} \mathbb{C} = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

$$(1.1.4) \quad H^i(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_\ell) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

où $X(\mathbb{C})$ est l'espace topologique des points de la variété algébrique complexe déduite de X par l'extension des scalaires σ .

L'existence de théories de cohomologie parallèles a conduit A. Grothendieck à conjecturer l'existence, pour tout corps de base k , d'une théorie motivique $X \mapsto H_{\text{mot}}^i(X)$, définie sur les variétés algébriques sur k (= schémas de type fini sur k) et à valeurs dans une catégorie $\mathcal{M}(k)$ à définir de motifs sur k . Les théories connues se déduiraient de la théorie motivique par application de foncteurs *réalisations*.

La catégorie $\mathcal{M}(k)$ devrait être une catégorie abélienne, de groupes Hom de dimension finie sur \mathbb{Q} . Elle devrait être munie d'un produit tensoriel \otimes : $\mathcal{M}(k) \times \mathcal{M}(k) \rightarrow \mathcal{M}(k)$ et de données d'associativité et de commutativité $(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$ et $X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ ayant les propriétés habituelles – plus précisément faisant de $\mathcal{M}(k)$ une catégorie tannakienne ([S], [DM], [D4]). D'après la théorie de catégories tannakiennes, $\mathcal{M}(k)$ serait la catégorie des représentations d'une gerbe à lien affine sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$. Pour k de caractéristique 0, la catégorie à produit tensoriel $\mathcal{M}(k)$ devrait même être équivalente à la catégorie des représentations d'un schéma en groupes affines (= groupe proalgébrique affine) sur \mathbb{Q} .

Chaque $H_{\text{mot}}^i(X)$ serait un foncteur contravariant en X . On devrait aussi disposer d'isomorphismes de Künneth

$$(1.1.5) \quad H_{\text{mot}}^i(X \times Y) \simeq \bigoplus_{i=j+k} H_{\text{mot}}^j(X) \otimes H_{\text{mot}}^k(Y)$$

donnant lieu à des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{mot}}^i(X \times Y) & \xlongleftrightarrow{\quad} & H_{\text{mot}}^i(Y \times X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\text{mot}}^j(X) \otimes H_{\text{mot}}^k(Y) & \xrightarrow{(-i)^{jk}} & H_{\text{mot}}^k(Y) \otimes H_{\text{mot}}^j(X) \\
 \\
 H_{\text{mot}}^i((X \times Y) \times Z) & \xlongleftrightarrow{\quad} & H_{\text{mot}}^i(X \times (Y \times Z)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (H_{\text{mot}}^j(X) \otimes H_{\text{mot}}^k(Y)) \otimes H_{\text{mot}}^\ell(Z) & \longleftrightarrow & H_{\text{mot}}^j(X) \otimes (H_{\text{mot}}^k(Y) \otimes H_{\text{mot}}^\ell(Z)) .
 \end{array}$$

Chacune des théories cohomologiques connues donnerait lieu à un foncteur “réalisation”, compatible au produit tensoriel. Par exemple, pour k de caractéristique 0, on disposerait de

$$\text{real}_{\text{DR}} : \mathcal{M}(k) \longrightarrow \text{espaces vectoriels sur } k$$

et pour X une variété algébrique sur k , d'un isomorphisme fonctoriel et compatible aux isomorphismes de Künneth

$$H_{\text{DR}}^i(X) = \text{real}_{\text{DR}} H_{\text{mot}}^i(X) .$$

La sous-catégorie de $\mathcal{M}(k)$ engendrée par un ensemble \mathcal{M} de motifs est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(k)$ contenant \mathcal{M} et stable par \oplus, \otimes , dual et sous-quotients. Si on ne considère que certaines variétés algébriques X sur k , il peut être utile de considérer, plutôt que $\mathcal{M}(k)$, la sous-catégorie engendrée par les $H^i(X)$.

1.2. Si on ne considère que des variétés X projectives et lisses sur un corps k , et qu'on admet les conjectures “standard” sur les cycles algébriques, Grothendieck a montré comment définir la catégorie de motifs engendrée par les $H_{\text{mot}}^i(X)$ (cf. [Kl][Man]). C'est une catégorie abélienne semi-simple.

Si on ne se limite pas à la catégorie engendrée par les $H_{\text{mot}}^i(X)$ pour X projective et lisse sur k , on ne dispose plus d'une définition même conjecturale de ce que devrait être la catégorie des motifs sur k . La philosophie

des motifs n'en est pas moins utile: elle coordonne des faits connus, pose des questions et suggère des conjectures précises.

1.3. Dans chacune des théories connues, les $H^i(X)$ sont munis d'une filtration croissante W , la *filtration par le poids* [D5], et les isomorphismes de comparaison tels que (1.1.1) (1.1.2) sont compatibles à W . De plus, toute application naturelle est strictement compatible à W . De là, une nouvelle exigence sur la catégorie des motifs: chaque motif est muni d'une filtration par le poids W , de formation compatible au produit tensoriel et strictement compatible à tout morphisme $f : M \rightarrow N$: on a

$$f(M) \cap W_i(N) = f(W_i(M)) .$$

Disons qu'un motif M est pur de poids i si $W_i(M) = M$ et $W_{i-1}(M) = 0$. Pour X projectif et lisse, $H_{\text{mot}}^i(X)$ est pur de poids i . On veut que la \otimes -catégorie engendrée par les $H_{\text{mot}}^i(X)$, pour X projectif et lisse sur k , soit celle des sommes de motifs purs. En terme de motifs purs, les propriétés de W s'écrivent: tout motif est extension itérée de motifs purs et, pour M et N purs de poids m et n ,

- (a) $M \otimes N$ est pur de poids $m + n$;
- (b) pour $m \neq n$, $\text{Hom}(M, N) = 0$;
- (c) pour $m \leq n$ $\text{Ext}^1(M, N) = 0$.

Souvent, les motifs purs (ou les sommes directes de motifs purs) sont simplement appelés motifs. Leur catégorie admet la description conjecturale [Kl], [Man]. Les motifs plus généraux considérés ici sont alors appelés *motifs mixtes*.

1.4. Si on ne peut définir la catégorie des motifs, on peut du moins décrire une série de compatibilités entre les $H^i(X)$ pris dans diverses théories cohomologiques, i.e. décrire des compatibilités qui devraient exister entre les diverses réalisations d'un motif. Expliquons le cas des motifs sur \mathbb{Q} : un motif sur \mathbb{Q} doit donner lieu à un système (M1) à (M10) comme ci-dessous vérifiant les axiomes (AM1) à (AM5).

Terminologie: les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie; "presque tout nombre premier" signifie "tous, sauf un nombre fini."

(M1) Un espace vectoriel M_B sur \mathbb{Q} , la *réalisation de Betti*.

(M2) Un espace vectoriel M_{DR} sur \mathbb{Q} , la *réalisation de de Rham*.

(M3) Un module $M_{\mathbf{A}^f}$ sur \mathbf{A}^f , la *réalisation en cohomologie étale*. Il est libre de type fini par (M5).

(M4) Pour presque tout nombre premier p , un espace vectoriel $M_{\text{cris},p}$ sur \mathbb{Q}_p , *réalisation cristalline* de la réduction modulo p .

(M5) Des isomorphismes de compairison

$$\begin{aligned}\text{comp}_{\text{DR},B} : M_B \otimes \mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}, \\ \text{comp}_{\mathbf{A}^f,B} : M_B \otimes \mathbf{A}^f &\xrightarrow{\sim} M_{\mathbf{A}^f}, \\ \text{comp}_{\text{cris } p, \text{DR}} : M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p &\xrightarrow{\sim} M_{\text{cris},p}.\end{aligned}$$

(M6) M_B , M_{DR} , $M_{\mathbf{A}^f}$ et $M_{\text{cris},p}$ sont munis d'une filtration croissante finie W , la *filtration par le poids*. On note encore W les filtrations qui s'en déduisent par extension des scalaires. Les isomorphismes de comparaison respectent W .

(M7) M_B est muni d'une involution F_∞ , le *Frobenius à l'infini*, respectant W .

(M8) M_{DR} est muni d'une filtration décroissante finie F , la *filtration de Hodge*. On note encore F une filtration qui s'en déduit par extension des scalaires.

(M9) $M_{\mathbf{A}^f}$ est muni d'une action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ respectant W .

(M10) $M_{\text{cris},p}$ est muni d'un automorphisme respectant W :

$$\phi_p : M_{\text{cris},p} \longrightarrow M_{\text{cris},p},$$

le *Frobenius cristallin*.

(AM1) M_B , muni de W et de la filtration F de $M_B \otimes \mathbb{C} = M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$, est une \mathbb{Q} -structure de Hodge mixte ([D2] 2.3.8).

(AM2) Sur $M_B \otimes \mathbb{C}$, identifié à $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$ par l'isomorphisme de comparaison, on dispose des deux structures réelles $M_B \otimes \mathbb{R}$ et $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$; elles définissent des involutions antilinéaires c_B et c_{DR} , dont $M_B \otimes \mathbb{R}$ et $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$ sont respectivement les points fixes. Ces involutions, et l'involution linéaire prolongeant F_∞ , commutent entre elles et vérifient

$$F_\infty = c_B c_{\text{DR}}.$$

En d'autres termes, c_{DR} respecte $M_B \subset M_B \otimes \mathbb{C} = M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$ et $c_{\text{DR}} | M_B = F_\infty$.

(AM3) Pour chaque nombre premier ℓ , soit M_ℓ déduit de $M_{\mathbf{A}^f}$ par extension des scalaires: $M_{\mathbf{A}^f}$ est un produit restreint des M_ℓ . Il existe un ensemble fini S de nombres premiers tels que, pour chaque ℓ , la représentation M_ℓ de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ soit non ramifiée en dehors de S et ℓ .

(AM4) Pour S assez grand, si $p \notin S$, pour tout $\ell \neq p$ les valeurs propres d'un Frobenius géométrique en p sur les $\text{Gr}_n^W(M_\ell)$, et celles de ϕ_p sur $\text{Gr}_n^W(M_{\text{cris},p})$, sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $p^{n/2}$, et sont des unités ℓ' -adiques pour $\ell' \neq p$.

(AM5) Soit $c \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ la conjugaison complexe. Alors, c agit sur $M_{\mathbf{A}^f}$ en respectant $M_B \subset M_{\mathbf{A}^f}$ et induit sur M_B l'involution F_∞ .

1.5 REMARQUES. (i) Si M_{DR} est donné, les données de M_B , F_∞ et $\text{comp}_{\text{DR},B}$ vérifiant (AM2) équivalent à celle d'une nouvelle structure rationnelle $M_B \subset M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$, stable par la conjugaison complexe c_{DR} (poser $F_\infty = c_{\text{DR}} | M_B$). D'après (M6), la filtration W de M_{DR} doit rester rationnelle pour cette nouvelle structure rationnelle.

(ii) Les données de $M_{\mathbf{A}^f}$, de $\text{comp}_{\mathbf{A}^f,B}$ et de l'action de Galois équivalent encore à la donnée pour tout ℓ d'un \mathbb{Q}_ℓ -espace vectoriel M_ℓ , d'une action de Galois sur M_ℓ et d'isomorphismes de comparaison $\text{comp}_{\ell,B}: M_B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} M_\ell$. Il faut supposer l'existence d'un réseau $L \subset M_B$ tel que les $\text{comp}_{\ell,B}(L \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ soient stables par Galois. On définit $M_{\mathbf{A}^f}$ à partir des M_ℓ comme le produit restreint des M_ℓ rel. aux $\text{comp}_{\ell,B}(L \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ pour un quelconque réseau L : ce produit restreint est stable sous Galois et les $\text{comp}_{\ell,B}$ induisent $\text{comp}_{\mathbf{A}^f,B}$.

Les données de M_ℓ , de $\text{comp}_{\ell,B}$ et de l'action de Galois (resp. $M_{\mathbf{A}^f}$, $\text{comp}_{\mathbf{A}^f,B}$ et l'action) équivalent encore à celle d'une action de Galois sur $M_B \otimes \mathbb{Q}_\ell$ (resp. $M_B \otimes \mathbb{A}^f$). D'après M6 et M9, la filtration de $M_B \otimes \mathbb{Q}_\ell$ (resp. $M_B \otimes \mathbb{A}^f$) déduite de W doit être stable sous $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

(iii) Si M_{DR} est donné, les données de $M_{\text{cris},p}$, de son Frobenius cristallin et de $\text{comp}_{\text{cris},p,\text{DR}}$ équivalent à celle d'un automorphisme ϕ_p de $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$. D'après M6 et M10, la filtration de $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$ déduite de W doit être stable sous ϕ_p .

Nous utiliserons souvent tacitement ces remarques pour décrire un système (M1) – (M10).

1.6. Un schéma X de type fini sur \mathbb{Q} doit définir pour chaque i un motif $M := H_{\text{mot}}^i(X)$. Dans ce numéro, nous décrivons partiellement le système (M1) – (M10) des réalisations de M lorsque X est séparé et lisse sur \mathbb{Q} .

On a $M_B = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ et F_∞ est induit par la conjugaison complexe de $X(\mathbb{C})$; $M_{\text{DR}} = H_{\text{DR}}^i(X) := H^i(X, \Omega_X^*)$ et la filtration de Hodge est celle de la théorie de Hodge mixte ([D2] 3.2); $M_\ell = H^i(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est la cohomologie étale ℓ -adique du schéma sur $\bar{\mathbb{Q}}$ déduit de X par extension des scalaires et l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est par transport de structure. Notation $X \otimes \bar{\mathbb{Q}}$: voir 0.4.

Supposons X propre et lisse et soit S un ensemble fini de nombres premiers tel que X soit la fibre générale de X^\sim propre et lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - S$. Pour $p \notin S$, $M_{\text{cris}, p}$ est la cohomologie cristalline de la réduction $X^\sim \otimes \mathbb{F}_p$ de X modulo p , tensorisé sur \mathbb{Z}_p avec \mathbb{Q}_p . Le Frobenius cristallin ϕ_p est déduit du morphisme image inverse par le Frobenius $\text{Fr} : X^\sim \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow X^\sim \otimes \mathbb{F}_p$.

Plus généralement, supposons donnés \bar{X} propre et lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - S$ et un diviseur à croisements normaux relatifs D , et prenons pour X la fibre générale de $\bar{X} - D$. La réalisation $M_{\text{cris}, p}$ est définie pour $p \notin S$. Sa définition la plus naturelle est fournie par la généralisation “à pôles logarithmiques” de la théorie cristalline que considère Faltings dans [Fa] §IV.

L'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ est (1.1.3) et l'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\ell, B}$ est (1.1.4).

Dans le cas propre et lisse, l'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\text{cris } p, \text{DR}}$ est déduit de (P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press and Tokyo University Press 1978) 7.26. Pour le cas général, voir [Fa] §IV. Enfin, la filtration par le poids W est celle de la théorie de Hodge mixte [D2] 3.2. Voir aussi [D5].

1.7. Une donnée supplémentaire dont on dispose sur la cohomologie $M := H_{\text{mot}}^i(X)$ de X lisse sur \mathbb{Q} est celle, pour presque tout p , d'un isomorphisme de comparaison à la Fontaine-Messing ([FM], [Fa]) reliant M_p , muni de l'action d'un groupe de décomposition en p , et $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$, muni de sa filtration de Hodge et de son Frobenius cristallin.

Pour tout p , on devrait encore disposer d'une structure “cristalline” du type suivant.

Cas semi-stable. Soit T_p l'espace tangent de Zariski de $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ en son point fermé. On le complète en une droite projective \bar{T}_p sur \mathbb{F}_p , et on peut

relever $(\overline{T}_p, 0, \infty)$ en une droite projective munie de deux points marqués sur \mathbb{Z}_p : $(\overline{T}_p^\sim, 0, \infty)$. On veut un F -isocristal à pôles logarithmiques sur $(\overline{T}_p, 0, \infty)$ (voir [Fa]). Un tel objet induit sur $\overline{T}_p^\sim \otimes \mathbb{Q}_p$ un module à connexion \mathcal{V} à pôles logarithmiques en 0 et ∞ et on veut que le résidu de la connexion en 0 et ∞ soit nilpotent. Si φ est une section de \overline{T}_p^\sim sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, de dérivée 1 au point fermé, $\varphi^*\mathcal{V}$ est alors indépendant du choix de φ et $\text{comp}_{\text{DR}, \text{cris}, p}$ doit l'identifier à la réalisation de Rham $\otimes \mathbb{Q}_p$.

Cas général. Donnée du type précédent, sur une extension galoisienne finie assez grande E de \mathbb{Q}_p , $\text{Gal}(E/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante.

Un isomorphisme de comparaison à la Fontaine-Messing devrait encore relier cet objet et M_p muni de l'action d'un groupe de décomposition en p .

1.8 VARIANTÉ. On devrait encore disposer de (M1) – (M10) pour $M := H_{\text{mot}}^i(X)$, X non nécessairement lisse. Les données cristallines posent problème.

On aimerait aussi disposer de (M1) – (M10) pour la cohomologie à support propre.

1.9 DÉFINITION. *Un système de réalisations est un système (M1) à (M10) vérifiant (AM1) à (AM5).*

On interprète (M4), $\text{comp}_{\text{cris}, p, \text{DR}}$, (M10) comme celle d'un germe – pour le filtre des complémentaires d'ensembles finis de nombres premiers – de systèmes d'automorphismes ϕ_p des $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$.

1.10 PROPOSITION. *Les systèmes de réalisations forment une catégorie tannakienne.*

PREUVE. Comme dans [J], le point clé est qu'un morphisme de \mathbb{Q} -structures de Hodge mixtes est strictement compatible aux filtrations W et F et que ses noyaux et conoyaux sont des \mathbb{Q} - structures de Hodge mixtes ([D2] 3.3.5). On en déduit que tout morphisme de systèmes de réalisations est strictement compatible W et F . Pour W , on peut plutôt utiliser (AM4).

Il est alors clair que les noyaux et conoyaux d'un morphisme forment encore un système de réalisations et qu'un morphisme bijectif est un isomorphisme. On dispose de sommes directes et la catégorie est donc abélienne.

On dispose d'un produit tensoriel évident, associatif et commutatif, et d'un passage au dual. On dispose aussi d'un foncteur fibre, même de deux:

B et DR , à valeurs dans les \mathbb{Q} -espaces vectoriels. La catégorie des systèmes de réalisations est donc tannakienne et neutre: le foncteur fibre B (resp. DR) l'identifie à la catégorie des représentations du schéma en groupe G_B (resp. G_{DR}) de ses automorphismes: [Sa] ou [DM] 2.11.

On espère que les foncteurs réalisations définissent un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des motifs sur \mathbb{Q} dans celle des systèmes de réalisations. Si tel n'était pas le cas, la philosophie des motifs perdrat beaucoup de son intérêt. Ceci même à la "définition" provisoire suivante:

1.11 DÉFINITION. *La catégorie des motifs sur \mathbb{Q} est la sous-catégorie de celle des systèmes de réalisations (1.9) engendré (par \oplus , \otimes , dual, sous-quotient) par ceux de ces systèmes qui sont d'origine géométrique.*

Cette définition n'est pas une, car "origine géométrique" n'a pas été défini. Pire, je n'ai aucune définition à proposer dont j'ai confiance qu'elle soit bonne.

1.12 REMARQUE. On espère pour les réalisations de motifs bien des propriétés non incluses dans la définition 1.9 des systèmes de réalisations. Raisons de ne pas les inclure: (a) ne pas savoir les vérifier en pratique, (b) ne plus savoir prouver 1.10 si on les inclut. Ainsi.

(i) On aimerait que pour presque tout p le polynôme caractéristique de Frobenius en p : $\det(1 - F_p t, M_\ell)$ soit à coefficients rationnels et indépendant de $\ell \neq p$. Il devrait aussi coïncider avec $\det(1 - \phi_p t, M_{\text{cris}, p})$. On ne sait le vérifier ni pour $H_{\text{mot}}^i(X)$ (X lisse), ni pour un facteur direct de $H_{\text{mot}}^i(X)$ (X une variété abélienne), et (b) ci-dessus s'applique.

(ii) On aimerait compléter (AM4) par une condition pour tout p . Cf. (P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1980) p. 137–252) 1.8.5. (a) et (b) s'appliquent.

(iii) La structure de Hodge $\text{Gr}_n^W(M_B)$ devrait être polarisable. Plus précisément, il devrait exister pour tout n un morphisme de systèmes de réalisations

$$\text{Gr}_n^W(M) \otimes \text{Gr}_n^W(M) \longrightarrow \mathbb{Q}(-n)$$

($\mathbb{Q}(-n)$: voir 2.1) qui induise une polarisation de la structure de Hodge de poids n $\text{Gr}_n^W(M_B) = \text{Gr}_n^W(M_B)$.

Pour (iii), ni (a) ni (b) ne s'appliquent.

1.13 REMARQUE. Le traitement des structures cristallines n'est pas satisfaisant. Je n'ai pas inclus dans la définition des systèmes de réalisations des données 1.7, faute d'avoir vérifié leur existence dans le cas de algèbres de Lie de π_1 qui nous intéresseront. J'ai néanmoins inclus la donnée de ϕ_p , malgré son air d'appendice bizarre, parce que les calculs du paragraphe 19 donnent un résultat intéressant.

1.14. Voici une variante à la présentation 1.4. La formulation, moins élémentaire, éclaire le rôle de F_∞ .

(M'1) A chaque clôture algébrique C de \mathbf{R} est attaché $M_B(C)$, fonctoriel en C .

On déduit de (M'1) des données (M1) et (M7) en posant $M_B := M_B(\mathbf{C})$ et en prenant F_∞ induit par $z \mapsto \bar{z} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Pour $M = H_{\text{mot}}^i(X)$, on aura $M_B(C) = H^i(X(C), \mathbf{Q})$.

(M'2)(M'8): idem que (M2)(M8) [M_{DR} et F].

(M'3) Un \mathbf{A}^f -faisceau $M_{\mathbf{A}^f}$ sur $\text{Spec}(\mathbf{Q})$.

Par \mathbf{A}^f -faisceau \mathcal{F} , nous entendons la donnée pour tout ℓ d'un \mathbf{Q}_ℓ -faisceau \mathcal{F}_ℓ , et pour presque tout ℓ d'un \mathbf{Z}_ℓ -faisceau $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_\ell} \subset \mathcal{F}_\ell$ qui l'engendre: le germe du système des $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_\ell}$ est donné. Sur le spectre d'un corps k , la donnée de \mathcal{F}_ℓ (resp. $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_\ell}$) équivaut à celle, pour toute clôture algébrique \bar{k} de k , d'un \mathbf{Q}_ℓ -espace vectoriel $\mathcal{F}_\ell(\bar{k})$ (resp. d'un \mathbf{Z}_ℓ -module de type fini $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_\ell}(\bar{k})$), fonctoriel en \bar{k} et tel que l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ soit continue. On note $\mathcal{F}_{\mathbf{A}^f}(\bar{k})$ le produit restreint des $\mathcal{F}_\ell(\bar{k})$, rel. les $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_\ell}(\bar{k})$.

On déduit de M'3 des données (M3)(M9) en posant $M_{\mathbf{A}^f} := (M_{\mathbf{A}^f})_{\mathbf{A}^f}(\bar{\mathbf{Q}})$. Notation: on écrira M_ℓ (resp. $M_{\mathbf{Z}_\ell}$, $M_{\mathbf{A}^f}$) pour $(M_{\mathbf{A}^f})_\ell$ (resp. $(M_{\mathbf{A}^f})_{\mathbf{Z}_\ell}$, $(M_{\mathbf{A}^f})_{\mathbf{A}^f}$).

Si $M = H_{\text{mot}}^i(X)$ et que a est le morphisme $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Q})$, on a $M_\ell = R^i a_* \mathbf{Q}_\ell$, $M_{\mathbf{Z}_\ell} = \text{image de } R^i a_* \mathbf{Z}_\ell \text{ dans } M_\ell$. On a $R^i a_* \mathbf{Z}_\ell(\bar{k}) = H^i(X \otimes_{\mathbf{Q}} \bar{k}, \mathbf{Z}_\ell)$.

(M'4) Pour presque tout nombre premier p , un F -isocristal $M_{\text{cris}, p}$ sur \mathbf{F}_p i.e. un espace vectoriel $M_{\text{cris}, p}$ sur \mathbf{Q}_p muni d'un automorphisme ϕ_p .

(M'5) Des isomorphismes de comparaison:

$$\text{comp}_{\text{DR}, B} : M_B(C) \otimes C \xrightarrow{\sim} M_{\text{DR}} \otimes C, \text{fonctoriel en } C.$$

Ceci équivaut à la donnée de $\text{comp}_{\mathbf{A}^f, B}$ comme en M5, vérifiant AM2

$$\text{comp}_{\mathbf{A}^f, B}: \text{pour } \bar{\mathbb{Q}}_C \text{ la clôture algébrique de } \mathbb{Q} \text{ dans } C, \\ M_B(C) \otimes \mathbf{A}^f \xrightarrow{\sim} M_{\mathbf{A}^f}(\bar{\mathbb{Q}}_C) \text{ fonctoriel en } C.$$

Ceci équivaut à la donnée $\text{comp}_{\mathbf{A}^f, B}$ comme en M5, vérifiant AM5

$$\text{comp}_{\text{cris } p, \text{DR}} : M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} M_{\text{cris}, p}.$$

Plutôt, dans (M'3), que de se donner les $M_{\mathbf{A}^f}$, on aurait pu se donner seulement des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux M_ℓ , remplacer $\text{comp}_{\mathbf{A}^f, B}$ par des $\text{comp}_{\ell, B} : M_B(C) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} M_\ell(\bar{\mathbb{Q}}_C)$ et exiger l'existence d'un réseau entier $L \subset M_B(C)$ tel que les $\text{comp}_{\ell, B}(L \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ soient stables sous $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ils définissent les $M_{\mathbb{Z}_\ell}$ de (M'3).

(M'6) W est une filtration des objets M'1 à M'4, respectée par les isomorphismes de comparaison.

Une définition essentiellement équivalente à 1.9 est alors: un *système de réalisations* est un système (M'1) à (M'6), (M'8) vérifiant les axiomes (AM1)(AM3), (AM4) modifiés de façon évidente.

Une donnée (M'1) est encore celle d'un faisceau de \mathbb{Q} -espaces vectoriels sur le site étale de $\text{Spec } \mathbf{R}$. De ce point de vue, $\text{comp}_{\ell, B}$ est un isomorphisme sur $\text{Spec}(\mathbf{R})_{\text{et}}$ entre l'image inverse de M_ℓ et le \mathbb{Q}_ℓ -faisceau déduit de M_B .

Dans le langage des faisceaux, (AM3) signifie que M_ℓ provient d'un \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - S - \{\ell\}$. Le langage des faisceaux rend clair que pour tout $p \in M_\ell$ définit un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau sur $\text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. le cas analogue de \mathbf{R} ci-dessus). Le choix d'un groupe de décomposition n'est pas requis.

1.15 VARIANTE. Soit P un ensemble fini de nombres premiers. La catégorie des *systèmes de réalisations lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - P$* est définie comme en 1.9, en prenant P pour ensemble exceptionnel S dans AM3 et en remplaçant dans M4 et AM4 "presque tout p " par "tout $p \notin P$ ". Ce traitement des structures cristallines n'est pas satisfaisant, cf. 1.7. La catégorie 1.9 des systèmes de réalisations sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$ est la limite inductive de ces catégories pour P de plus en plus grand.

Plutôt que "lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - P$ ", on dit aussi "à bonne réduction en dehors de P ". Cette terminologie est abusive en ce que les catégories considérées ne sont pas des sous-catégories de celle des systèmes de réalisation sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$ (cf. encore 1.7).

Dans le langage 1.14, il s'agit dans $M'3$ de se donner M_ℓ comme étant un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell]) - P$ plutôt que sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$, et modifier $M'4$ comme $M4$.

Les objets 1.15 appartenant à la sous-catégorie engendrée par ceux d'origine géométrique (cf. 1.11), seront appelés *motifs* (mixtes) *lisses sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - P$. On espère que c'est une sous-catégorie pleine de celle des motifs sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$.

On aimerait disposer d'une notion de motif lisse sur S pour des bases plus générales que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - P$. Nos méthodes, où la réalisation de Betti joue un rôle central, requièrent que $S_{\mathbb{Q}}$ soit dense dans S . Nous esquisserons une définition provisoire des systèmes de réalisation lisses sur S pour S lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Le cas où S est ouvert dans le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres peut se traiter par des modifications naturelles à 1.4, 1.15. Pour S fini étale sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on peut aussi se ramener à 1.15: voir 1.17.

1.16 EXEMPLE. Le H^0 motivique du spectre d'un corps de nombres.

Soit E une extension finie de \mathbb{Q} , non ramifiée en dehors d'un ensemble fini P de nombres premiers. Nous allons expliciter 1.6 pour $\mathrm{Spec}(E)$ et, plus précisément, définir un système de réalisations $A := H_{\mathrm{mot}}^0(\mathrm{Spec}(E))$ lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) - P$. Le motif A est de type de Hodge $(0,0)$. Ceci détermine W et F . On a $A_{\mathrm{DR}} = E$, vu comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} .

Soit $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(E)(\mathbb{C})$ l'ensemble des homomorphismes, automatiquement des plongements, de E dans \mathbb{C} . On a $A_B = \mathbb{Q}^{\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})}$, avec F_∞ induit par la conjugaison complexe de \mathbb{C} . L'isomorphisme de comparaison DR/B de $A_B \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})}$ avec $A_{\mathrm{DR}} \otimes \mathbb{C} = E \otimes \mathbb{C}$ est le prolongement \mathbb{C} -linéaire de

$$E \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})} : e \longmapsto (\sigma \mapsto \sigma(e)).$$

Puisque tout plongement de E dans \mathbb{C} se factorise par $\bar{\mathbb{Q}}$, $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})$. Cette action induit l'action de Galois sur $A_A := A_B \otimes \mathbb{A}^f$ (cf. 1.5(ii)).

Pour $p \notin P$ et v parcourant les places de E au-dessus de p , on a $E \otimes \mathbb{Q}_p = \prod E_v$ et ϕ_p est l'automorphisme de $E \otimes \mathbb{Q}_p$ qui induit sur chaque E_v l'unique relèvement du Frobenius $x \mapsto x^p$ du corps résiduel (cf. 1.5(iii)).

Le motif A est muni d'un produit

$$(1.16.1) \quad A \otimes A \longrightarrow A,$$

le cup-produit, qui fait de A un anneau commutatif à unité de la catégorie tannakienne des motifs (cf. 5.3). sur $A_{\text{DR}} = E$, c'est le produit. Sur A_B , c'est $(q_1(\sigma))(q_2(\sigma)) = (q_1(\sigma)q_2(\sigma))$.

1.17 DÉFINITION. Soit \mathcal{O} l'anneau des P -entiers de E . Avec les notations précédentes, un système de réalisations, lisse sur $\text{Spec}(\mathcal{O})$ est un système de réalisation N sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - P$ (1.15), muni d'une structure de A -module $A \otimes N \rightarrow N$ (5.3) sur $A := H_{\text{mot}}^0(\text{Spec } E)$.

De même pour “motif” et pour “sur $\text{Spec}(E)$ ” (passer à la limite sur P).

1.18. Montrons comment un système de réalisations N , lisse sur $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$ (1.17) peut se décrire en terme d'un *système de réalisations sur E* , du type suivant.

(M1,7)_E Pour chaque plongement σ de E dans \mathbb{C} , un espace vectoriel M_σ sur \mathbb{Q} , la réalisation de Betti rel. σ , et un système involutif d'isomorphismes $F_\infty : M_\sigma \xrightarrow{\sim} M_{\bar{\sigma}}$.

On a $N_B = \bigoplus M_\sigma$, avec la structure évidente de module sur $A_B = \mathbb{Q}^{\text{Hom}(E, \mathbb{C})}$ et F_∞ est la somme des F_∞ . Variante à la 1.14:

(M'1)_E: Pour chaque plongement de E dans une clôture algébrique C de \mathbb{R} , un espace vectoriel M_σ sur \mathbb{Q} , fonctoriel en C .

(M2)_E Un E -espace vectoriel M_{DR} .

(M8)_E Une filtration F de M_{DR} , la filtration de Hodge.

On a $N_{\text{DR}} = M_{\text{DR}}$, avec la structure de A_{DR} -module donnée par celle d'espace vectoriel sur E .

(M'3)_E (cf. M3, M9) Un \mathbb{A}^f -faisceau $M_{\mathbb{A}^f}$ sur $\text{Spec}(E)$ (cf. 1.14).

On définit $N_{\mathbb{A}^f}$ comme son image directe sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$: $N_{\mathbb{A}^f}(\bar{\mathbb{Q}})$ est la somme sur les $\sigma : E \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$ des $M_{\mathbb{A}^f}(\bar{\mathbb{Q}})$.

(M'4)_E Pour chaque place v de E , au-dessus de $p \notin P$, un espace vectoriel $M_{\text{cris}, v}$ sur le complété E_v de E en v . Soit F_v^* l'automorphisme de E_v induisant $x \mapsto x^p$ sur le corps résiduel. On donne $\phi_v : M_{\text{cris}, v} \hookrightarrow M_{\text{cris}, v}$, F_v^* -linéaire.

On a $E \otimes \mathbb{Q}_p = \bigoplus_{v|p} E_v$ et $N_{\text{cris}, p}$ est la somme des $M_{\text{cris}, v}$.

(M'5)_E Des isomorphismes de comparaison

$\text{comp}_{\text{DR}, \sigma} : M_\sigma(C) \otimes C \xrightarrow{\sim} M_{\text{DR}} \underset{E, \sigma}{\otimes} C$, fonctoriel en C ,

$\text{comp}_{\mathbf{A}^f, \sigma} : M_\sigma \otimes \mathbf{A}^f \xrightarrow{\sim} M_{\mathbf{A}^f}(\overline{E}_C)$, fonctoriel en C

pour \overline{E}_C la clôture algébrique de E dans C , rel σ

$\text{comp}_{\text{cris } v, \text{DR}} : M_{\text{DR}} \underset{E}{\otimes} E_v \xrightarrow{\sim} M_{\text{cris}, v}$.

Par somme sur σ (resp. v), ils donnent (M'5).

(M'6)_E W est une filtration des objets (M'1)_E, (M2)_E, (M'3)_E and (M'4)_E respectée par les isomorphismes de comparaison.

On laisse au lecteur le soin de traduire en ce langage les axiomes (AM1)(AM3)(AM4) qui restent à imposer (cf. 1.14).

1.19. Avec la définition 1.17 des systèmes de réalisations lisses sur $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$, le foncteur “oubli de la structure de A -module”, à valeur dans les systèmes de réalisations lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - P$, s’appelle “*image directe de S à $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - P$* ”. Dans les diverses réalisations 1.18, il correspond à l’image directe. Son adjoint à gauche, $M \mapsto A \otimes M$ (cf. 5.3) est l’*image inverse*.

1.20. Pour S un ouvert du spectre de l’anneau des entiers d’une extension finie E de \mathbb{Q} , on modifie comme suit la description 1.18 pour définir les systèmes de réalisations lisses sur S .

Dans (AM3), on demande que chaque \mathbb{Q}_ℓ -faisceau M_ℓ déduit de $M_{\mathbf{A}^f}$ provienne d’un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse sur $S[1/\ell]$.

Dans (M'4)_E, pour chaque corps résiduel $k(v)$ de S , on se donne $M_{\text{cris}, v}$ sur le corps des fractions K_v , des vecteurs de Witt sur $k(v)$, muni de ϕ_v semi-linéaire. L’isomorphisme de comparaison cristallin de (M'5)_E devient:

$$M_{\text{DR}} \otimes E_v \xrightarrow{\sim} M_{\text{cris}, v} \underset{K_v}{\otimes} E_v.$$

1.21. Soit S lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Voici une définition provisoire des systèmes de réalisations lisses sur S , inspirée par 1.18. Les données sont

(M'1)_S Pour C une clôture algébrique de R , une faisceau localement constant $M_B(C)$ de \mathbb{Q} -espaces vectoriels sur $S(C)$, fonctoriel en C . On pose $M_B := M_B(C)$.

(M'2)s Un fibré vectoriel à connexion intégrable M_{DR} sur $S_{\mathbb{Q}}$. On le suppose régulier singulier à l'infini.

(M'8)s Une filtration F de M_{DR} par des sous-fibrés vectoriels: la filtration de Hodge. On suppose la "transversalité":

$$\nabla F^p \subset \Omega^1 \otimes F^{p-1}.$$

(M'3)s Un \mathbb{A}^f -faisceau lisse $M_{\mathbb{A}^f}$ sur $S_{\mathbb{Q}}$.

(M'4)s Pour tout nombre premier p , un F -isocristal $M_{\text{cris},p}$ sur la réduction S_p de $S \bmod p$.

(M'5)s Des isomorphismes de comparaison:

$$\text{comp}_{\text{DR},B} : M_B(C) \otimes C \xrightarrow{\sim} (M_{\text{DR}} \otimes C)^{\nabla}, \text{ fonctoriel en } C.$$

On a désigné par $M_{\text{DR}} \otimes C$ l'image inverse de M_{DR} sur S_C , et par ${}^{\nabla}$ le faisceau de ses sections horizontales sur $S(C)$.

$$\text{comp}_{\mathbb{A}^f,B} : M_B^{(C)} \otimes \mathbb{A}^f \longrightarrow \text{image inverse sur } S(C) \text{ de } M_{\mathbb{A}^f},$$

fonctoriel en C . Plutôt que dans M'3 se donner $M_{\mathbb{A}^f}$, on peut seulement se donner les \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux M_ℓ qui s'en déduisent, se donner des isomorphismes de comparaison $\text{comp}_{\ell,B} : M_B \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \text{image inverse de } M_\ell$ et imposer l'existence d'un réseau L de $M_B(C)$ tel que $L \otimes \mathbb{Z}_\ell$ corresponde à un \mathbb{Z}_ℓ -faisceau L_ℓ avec $L_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} M_\ell$, cf. 1.14.

$\text{comp}_{\text{cris},p,\text{DR}}$: soit $S_{(p)}^{an}$ l'espace rigide analytique fibre générale du schéma formel sur \mathbb{Z}_p complété formel de S le long de S_p . On veut un isomorphisme entre les fibrés à connexion sur $S_{(p)}^{an}$ déduits de M_{DR} et de $M_{\text{cris},p}$.

(M'6) Une filtration W des objets M'1 à M'4, respectée par les isomorphismes de comparaison.

Les axiomes sont à modifier comme suit. Dans (AM1), on veut une variation de structures de Hodge mixtes. AM3 devient: M_ℓ provient d'un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse sur $S[1/\ell]$. Pour AM4, une condition est imposée en tout point fermé de S .

Comme fourre-tout, cette catégorie fait l'affaire (cf. toutefois 1.13). Des axiomes additionnels seraient toutefois naturels, notamment quant au comportement à l'infini de la variation de structures de Hodge mixtes H_B ([SZ]).

1.22 DÉFINITION. Soit E une extension finie de \mathbf{Q} . Un système de réalisations à coefficients dans E est un système de réalisations M muni d'une structure de E -module $E \rightarrow \text{End}(M)$.

Jusqu'ici nos motifs sont des "isomotifs": les Hom sont des espaces vectoriels sur \mathbf{Q} . Pour les motifs à coefficients entiers, je propose les définitions suivantes.

1.23 DÉFINITION. Un système de réalisations sur \mathbf{Q} (resp. $\text{Spec } \mathbf{Z} - P$) à coefficients entiers M est un système de réalisations – noté $M \otimes \mathbf{Q}$ – muni d'un réseau $M_B \subset (M \otimes \mathbf{Q})_B$ tel que pour tout ℓ , $M_\ell := M_B \otimes \mathbf{Z}_\ell \subset (M \otimes \mathbf{Q})_\ell$ soit stable par $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

1.24. Sur une base plus générale S , un système de réalisations à coefficients entiers est un système de réalisations $M \otimes \mathbf{Q}$ muni d'un système local de \mathbf{Z} -modules sans torsion $M_B \subset (M \otimes \mathbf{Q})_B$ vérifiant $M_B \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} (M \otimes \mathbf{Q})_B$ (un "réseau") et tel que le \mathbf{Z}_ℓ -faisceau $M_B \otimes \mathbf{Z}_\ell$ sur $S(C)$ corresponde par $\text{comp}_{\ell, B}$ à un \mathbf{Z}_ℓ -faisceau lisse $M_\ell \subset (M \otimes \mathbf{Q})_\ell$ sur $S[1/\ell]$.

Cela revient à modifier $(M'1)_S$, $(M'3)_S$ et $(M'5)_S$ comme suit.

$(M'1)_{S, \mathbf{Z}}$ $M_B(C)$ est un système local de \mathbf{Z} -modules libres.

$(M'3)_{S, \mathbf{Z}}$ Donnée de \mathbf{Z}_ℓ -faisceaux M_ℓ sur $S[1/\ell]$.

$(M'5)_{S, \mathbf{Z}}$ Remplacer $\text{comp}_{\mathbf{A}/n, B}$ par des isomorphismes $\text{comp}_{\ell, B}$ de $M_B \otimes \mathbf{Z}_\ell$ avec l'image inverse de M_ℓ sur $S(C)$.

1.25. Dans 1.24, la donnée des M_ℓ équivaut encore à celle du système projectif des faisceaux de $\mathbf{Z}/(n)$ modules sur les $S[1/n]$:

$$M_{\mathbf{Z}/(n)} : \prod_{\ell|n} M_\ell/n M_\ell$$

et celle des morphismes de comparaisons à celle d'un isomorphisme de systèmes projectifs $\text{comp}_{\mathbf{A}/n, B} : M_B \otimes \mathbf{Z}/(n) \xrightarrow{\sim}$ image inverse sur $S(C)$ de $M_{\mathbf{Z}/(n)}$.

Dans le cadre 1.23, on peut préférer interpréter les $M_{\mathbf{Z}/(n)}$ comme des représentations de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. On posera encore $M_{\widehat{\mathbf{Z}}} = \lim \text{proj} M_{\mathbf{Z}/(n)} = \prod M_\ell$.

1.26. Cumulant les variantes 1.22 et 1.24, on définit de même les motifs sur S à coefficients dans l'anneau des entiers d'une extension finie de \mathbf{Q} .

§2. Exemples.

2.1. Le *motif de Tate* $\mathbb{Z}(1)$ est un motif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ (1.15) à coefficients entiers (1.23). Voici sa description en tant que système de réalisations, dans les langages 1.9 et 1.14 (complétés par 1.25)

(M1) et (M7): $\mathbb{Z}(1)_B = 2\pi i \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$, $F_\infty = -1$

(M'1): $\mathbb{Z}(1)_B(C) = 2\pi i \mathbb{Z} \subset C$.

(M2),(M'2): $\mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = \mathbb{Q}(1)_{\text{DR}} = \mathbb{Q}$

(M3) et (M9): $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}/n}$ est le groupe $\mu_n \subset \mathbb{C}^*$ des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité . Les morphismes de transition sont les $\mu_n \rightarrow \mu_m : x \mapsto x^{n/m}$ pour $m|n$. L'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est son action sur les μ_n . Dans la variante (M'3), on a $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}/n}(\bar{k}) = \mu_n(\bar{k})$.

On a donc $\mathbb{Z}(1)_\ell = \lim \text{proj } \mu_{\ell^n}(\mathbb{C})$.

(M4)(M10)(M'4): $\mathbb{Z}(1)_{\text{cris}, p} = \mathbb{Q}_p$ et $\phi_p = 1/p$.

(M5): L'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ est induit par les inclusions $\mathbb{Z}(1)_B = 2\pi i \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}(1)_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C} .$$

L'isomorphisme $\text{comp}_{\mathbb{Z}/n, B}$ (1.25) est induit par

$$\exp(x/n) : \mathbb{Z}(1)_B \longrightarrow \mathbb{Z}/n(1) \subset \mathbb{C}^* .$$

L'isomorphisme $\text{comp}_{\text{cris}, p, \text{DR}}$ est induit par l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$.

(M'5): remplacer dans (M5) \mathbb{C} par C .

(M6)(M8) $\mathbb{Z}(1)$ est purement de poids -2 et $\mathbb{Z}(1)_{\text{DR}}$ est purement de filtration de Hodge -1 : le type de Hodge est $(-1, -1)$.

Notations: $\mathbb{Z}(n) := \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$, $\mathbb{Q}(n) := \mathbb{Z}(n) \otimes \mathbb{Q}$ et, pour tout motif M , $M(n) := M \otimes \mathbb{Z}(n)$. On note encore (n) la tensorisation par une réalisation de $\mathbb{Z}(n)$, dépendant du contexte.

Pour X projectif et lisse sur k et absolument irréductible de dimension n , $H_{\text{mot}}^{2n}(X)$ est le motif sur k déduit de $\mathbb{Q}(-n)$ par changement de base de \mathbb{Q} à k .

2.2. Pour A une variété abélienne sur \mathbb{Q} , on note $T(A) \otimes \mathbb{Q}$ le motif $H_1^{\text{mot}}(A)$ dual de $H_1^1(A)$, et $T(A)$ le motif à coefficients entiers défini

par la structure entière $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \subset H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) = (T(A) \otimes \mathbb{Q})_B$. Le foncteur $A \mapsto T(A)$ est pleinement fidèle: à partir de $T(A)$, on récupère $\text{Lie}(A) = T(A)_{\text{DR}}/F^0$ et le tore complexe

$$A(\mathbb{C}) = T(A)_B \setminus \text{Lie}(A) = T(A)_B \setminus T(A)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}/F^0.$$

Le tore complexe $A(\mathbb{C})$ détermine la variété abélienne $A_{\mathbb{C}}$ sur \mathbb{C} déduite de A , et la \mathbb{Q} -structure est uniquement déterminée par celle de l'algèbre de Lie.

Une schéma abélien A sur S définit de même un motif lisse à coefficients entiers $T(A)$ sur S .

2.3. Rappelons qu'un *1-motif lisse* X sur un schéma S consiste en

- (a) un schéma en groupes L sur S qui, localement pour la topologie étale, est un schéma en groupes constant défini par un \mathbb{Z} -module libre de type fini; un schéma abélien A sur S , et un tore T sur S ;
- (b) une extension E de A par T et un morphisme $\bar{u} : L \rightarrow A$;
- (c) un morphisme $u : L \rightarrow E$ relevant \bar{u} .

On écrit $X = [L \xrightarrow{u} E]$.

Un 1-motif X sur \mathbb{Q} définit un motif sur \mathbb{Q} à coefficients entiers $T(X)$ (cf. [D3] §10; l'aspect cristallin manque), et le foncteur $X \mapsto T(X)$ est pleinement fidèle (cf. [D3] 10.1.3 et 2.2).

Pour $X = [\mathbb{Z} \rightarrow 0]$, $T(X)$ est le motif unité $\mathbb{Z}(0)$. Pour $X = [0 \rightarrow \mathbb{G}_m]$, $T(X)$ est le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$. Pour A une variété abélienne et $X = [0 \rightarrow A]$, $T(X) = T(A)$. Bien sûr, ici comme en 2.2, on peut prendre des bases plus générales que $\text{Spec}(\mathbb{Q})$.

2.4. Je conjecture que l'ensemble des motifs à coefficients entiers de la forme $T(X)$, pour X un 1-motif, est stable par extensions. Si T' est un motif à coefficients entiers, avec $T' \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} T(X) \otimes \mathbb{Q}$, alors T' est de la forme $T(X')$ avec X' isogène à X . La conjecture équivaut donc à ce que l'ensemble des motifs $T(X) \otimes \mathbb{Q}$, pour X un 1-motif, soit stable par extension. Le mot "conjecture" est abusif en ce que l'énoncé n'a pas un sens précis. Ce qui est conjecturé est que tout système de réalisations (1.9) (ou 1.24, sur S) extension $T(X)$ par $T(Y)$ (X et Y deux 1-motifs), et "naturel", "provenant de la géométrie" est isomorphe à celui défini par un 1-motif Z extension de X par Y .

Un point a d'une variété abélienne A sur \mathbb{Q} définit un 1-motif $[\mathbb{Z} \xrightarrow{u} A]$ avec $u(1) = a$. Le motif $T([\mathbb{Z} \xrightarrow{u} A])$ est une extension de $\mathbb{Z}(0)$ par $T(A)$ et la conjecture, appliquée à $\mathbb{Z}(0)$ et $T(A)$, affirme que

$$A(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}(0), T(A))$$

ou, de façon équivalente

$$A(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}(0), T(A) \otimes \mathbb{Q})$$

(Ext^1 dans la catégorie abélienne des motifs).

Plus généralement, si E est une extension d'une variété abélienne par un tore, on veut que

$$E(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}(0), T(E)),$$

et de même sur des bases plus générales que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$.

Le cas $E = \mathbb{G}_m$ est particulièrement intéressant: pour tout schéma S lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on veut, dans la catégorie des motifs à coefficients entiers sur S :

$$(2.4.1) \quad \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}(0), \mathbb{Z}(1)).$$

2.5. Soit M un système de réalisations (1.9). Explicitons ce qu'est un système de réalisations E extension de $\mathbb{Q}(0)$ par M , lorsque M est de poids ≤ -1 (i.e. $M = W_{-1}(M)$)

(M1)_P E_B est une extension $M_B \rightarrow E_B \xrightarrow{u} \mathbb{Q}$ de \mathbb{Q} par M_B . Sa donnée équivaut à celle de $P_B := u^{-1}(1)$, muni de sa structure de torseur (espace principal homogène) sous M_B : $m \in M_B$ agit sur P_B par $p \mapsto p + m$.

(M2,3,4)_P De même, la donnée de E_{DR} (resp. $E_{\mathbf{A}^f}$, $E_{\mathrm{cris}, p}$) équivaut à celle d'un torseur P_{DR} (resp. $P_{\mathbf{A}^f}$, $P_{\mathrm{cris}, p}$) sous M_{DR} (resp. $M_{\mathbf{A}^f}$, $M_{\mathrm{cris}, p}$).

(M5)_P Les morphismes des comparaison pour E s'identifient à des morphismes de comparaison $P_B \otimes C \xrightarrow{\sim} P_{\mathrm{DR}} \otimes C$, $P_B \otimes \mathbf{A}^f \xrightarrow{\sim} P_{\mathbf{A}^f}$, $P_{\mathrm{DR}} \otimes \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} P_{\mathrm{cris}, p}$ compatibles aux morphismes analogues pour M . Notation \otimes : voir 0.4.

(M6)_P Parce que M est par hypothèse de poids ≤ -1 , et $\mathbb{Q}(0)$ purement de poids 0, la filtration par le poids de E est déterminée par celle de M : $W_0(E) = E$ et pour $i < 0$, $W_i(E) = W_i(M)$.

(M7)_P La donnée de F_∞ pour E équivaut à celle d'une involution de P_B , compatible à celle de M_B . L'axiome (AM2) pour E est que cette involution est induite par l'involution \mathbf{C} -antilinéaire de $P_{B,\mathbf{C}} = P_{\text{DR},\mathbf{C}}$ de points fixes $P_{\text{DR},\mathbf{R}}$.

(M8)_P La donnée de la filtration de Hodge de E_{DR} équivaut à celle de la trace $F^0 P_{\text{DR}}$ de $F^0 E_{\text{DR}}$ sur P_{DR} , un torseur sous $F^0 M_{\text{DR}}$: pour $p > 0$, $F^p E_{\text{DR}} = F^p M_{\text{DR}}$, pour $p = 0$, $F^0 E_{\text{DR}}$ est engendré par $F^0 P_{\text{DR}}$ et pour $p < 0$, $F^p E_{\text{DR}}$ est somme de $F^0 E_{\text{DR}}$ et de $F^p M_{\text{DR}}$. En d'autres termes, la donnée (M8) pour E_{DR} est celle d'une réduction du groupe structural de P_{DR} , de M_{DR} à $F^0 M_{\text{DR}}$.

Les données (M1)(M2), $\text{comp}_{\text{DR}/B}$, (M8) équivalent à la donnée d'un torseur $F^0 P_{\text{DR}}$ sous $F^0 M_{\text{DR}}$ et dans le $M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C} = M_B \otimes \mathbf{C}$ torseur $P_{\text{DR},\mathbf{C}}$ qui s'en déduit par $F^0 M_{\text{DR}} \rightarrow M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C}$, d'une \mathbf{Q} -structure $P_B \subset P_{\text{DR},\mathbf{C}}$ qui soit un M_B -torseur.

(M9)_P La donnée de l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur E_A , équivaut à celle d'une action de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur P_A , faisant de P_A un M_A -torseur équivariant.

(M10)_P De même, l'automorphisme ϕ_p de $E_{\text{DR}} \otimes \mathbf{Q}_p$ correspond à un automorphisme ϕ_p de $P_{\text{DR}} \otimes \mathbf{Q}_p$ tel que

$$\phi_p(x + m) = \phi_p(x) + \phi_p(m).$$

On laisse au lecteur le soin de traduire les axiomes (AM1) – (AM5) pour P . Indiquons seulement que (AM1) et (AM4) résultent des mêmes axiomes pour M et que (AM2)(AM5) s'expriment au mieux comme fonctorialité en \mathbf{C} , cf. 1.14.

2.6 DÉFINITION. (i) Un système de torseurs (M1)_P – (M10)_P de 2.5, vérifiant les conditions requises pour définir une extension E de $\mathbf{Q}(0)$ par un système de réalisations M , est un **torseur en systèmes de réalisations**.

(ii) Si M est un motif, le torseur P sous M est motivique – ou un **torseur en motifs** – si l'extension E est un motif.

2.7. Soit M un système de réalisations à coefficients entiers. Une extension E de $\mathbf{Z}(0)$ par M est une extension $E \otimes \mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}(0)$ par $M \otimes \mathbf{Q}$, munie d'une structure entière telle que la suite $0 \rightarrow M_B \rightarrow E_B \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$ soit exacte.

Comme en 2.5, une telle extension se décrit par un système de torseurs. Comme en 1.24, 1.25, il s'agit de modifier 2.5 comme suit:

(M1)_{P,Z}: P_B est un M_B -torseur

(M3,9)_{P,Z}: P_ℓ est pour chaque ℓ un M_ℓ -torseur $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -équivariant. Il revient encore au même de se donner un système projectif de $M_{\mathbb{Z}/(n)}$ -torseurs équivariants $P_{\mathbb{Z}/(n)}$ ou leur limite projective $P_{\bar{\mathbb{Z}}}$: un $M_{\bar{\mathbb{Z}}}$ -torseur équivariant.

(M5)_{P,Z}: remplacer $\text{comp}_{A^1, B}$ par des $\text{comp}_{\ell, B}$, ou $\text{comp}_{\mathbb{Z}/(n), B}$, ou $\text{comp}_{\bar{\mathbb{Z}}, B}$.

Un tel système de torseurs, définissant une extension de $\mathbb{Z}(0)$ par M , s'appelle encore un *torseur sous* M . Il est dit motivique si l'extension correspondante l'est, i.e. si le torseur sous $M \otimes \mathbb{Q}$ qu'il définit est motivique.

2.8. On laisse au lecteur le soin d'étendre ces constructions à des bases S plus générales que $\text{Spec}(\mathbb{Q})$. Indiquons seulement que, en réalisation de de Rham, P_{DR} est un M_{DR} -torseur sur $S_{\mathbb{Q}}$. Il est muni d'une restriction du groupe structural $F^0 P_{\text{DR}} \subset P_{\text{DR}}$ à $F^0 M_{\text{DR}}$. Il est aussi muni d'une connexion intégrable ∇ . Le long de toute section p de P_{DR} , l'espace tangent vertical s'identifie à M_{DR} ; la connexion ∇ est donc un morphisme

$$\nabla : P_{\text{DR}} \longrightarrow \Omega^1 \otimes M_{\text{DR}}.$$

Elle vérifie $\nabla(p + m) = \nabla p + \nabla m$. La transversalité devient:

(2.8.1) Pour p une section locale de $F^0 P_{\text{DR}}$, $\nabla p \in \Omega^1 \otimes F^{-1}(M_{\text{DR}})$.

2.9. Explicitons le torseur en motifs $K(x)$ sous $\mathbb{Z}(1)$ (torseur de Kummer) attaché à $x \in \mathbb{Q}^*$ comme en (2.4.1).

Le $\mathbb{Z}(1)_B$ -torseur $K(x)_B$ est le torseur sous $2\pi i \mathbb{Z}$ des logarithmes de x . Puisque $F^0 \mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = 0$, on a $K(x)_{\text{DR}} = \mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = \mathbb{Q}$. Le $\mathbb{Z}/n(1)$ -torseur $K(x)_{\mathbb{Z}/(n)}$ est le torseur des racines $n^{\text{ièmes}}$ de x . Les morphismes de transition $K(x)_{\mathbb{Z}/(nm)} \rightarrow K(x)_{\mathbb{Z}/(n)}$ sont $y \mapsto y^m$. L'action de Galois est évidente.

Le morphisme $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ est induit par l'inclusion de $K(x)_B$ dans \mathbb{C} . Le morphisme $\text{comp}_{\mathbb{Z}/(n), B}$ est induit par $K(x)_B \rightarrow K(x)_{\mathbb{Z}/(n)}$: $z \mapsto \exp(z/n)$.

Le Frobenius cristallin $\phi_p : K(x)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow K(x)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$, i.e. $\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, est défini pour x une unité en p . Notant \log le logarithme p -adique, il est caractérisé par

$$\phi_p^{-1}(0) = \log(x^{1-p}).$$

2.10. Sur $\mathbb{G}_m = \text{Spec } \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, la section universelle q de \mathbb{G}_m définit encore un torseur en motif $K(q)$ sous $\mathbb{Z}(1)$, sur la base \mathbb{G}_m . Décrivons-le.

Le $\mathbb{Z}(1)_B$ -torseur $K(q)_B$ sur \mathbb{C}^* est le système local des logarithmes de q . Puisque $F^0\mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = 0$, $K(q)_{\text{DR}}$ est trivial: $K(n)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$ (sur $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{Q}$). Il est muni de la connexion intégrable $\nabla : K(q)_{\text{DR}} \rightarrow \Omega^1 \otimes \mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = \Omega^1$:

$$\nabla u = du - \frac{dq}{q}.$$

Le $\mathbb{Z}/(n)(1)$ -torseur $K(q)_{\mathbb{Z}/(n)}$ est celui des racines $n^{\text{ièmes}}$ de q . C'est un faisceau localement constant sur $(\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{Z}[1/n])_{\text{et}}$. Morphismes de transition, et morphismes de comparaison, sont définis comme en 2.9.

Expliquons ce qu'est la structure de F -cristal en p . Soient \mathbb{G}_m^\wedge le complété de \mathbb{G}_m le long de sa fibre de caractéristique p , et $\mathbb{G}_m^\wedge \otimes \mathbb{Q}_p$ l'espace rigide analytique correspondant. Pour $\tilde{F} : \mathbb{G}_m^\wedge \rightarrow \mathbb{G}_m^\wedge$ un relèvement de Frobenius, le Frobenius cristallin est un morphisme $\phi_p[\tilde{F}]$, sur $\mathbb{G}_m^\wedge \otimes \mathbb{Q}_p$, de $\tilde{F}^*K(q)_{\text{DR}}$ dans $K(q)_{\text{DR}}$ qui est horizontal et compatible aux structures de torseurs. Si on change \tilde{F} en \tilde{F}' , \tilde{F} et \tilde{F}' ont même réduction modulo p , la connexion ∇ fournit un isomorphisme de $\tilde{F}^*K(q)_{\text{DR}}$ avec $\tilde{F}'^*K(q)_{\text{DR}}$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}^*K(q)_{\text{DR}} & & \\ \downarrow \phi_p[\tilde{F}] & & \\ \parallel & & K(q)_{\text{DR}} \\ \nearrow \phi_p[\tilde{F}'] & & \\ \tilde{F}'^*K(q)_{\text{DR}} & & \end{array}$$

commute.

En terme de $\phi_p^{-1} : K(q)_{\text{DR}} \rightarrow \tilde{F}^*K(q)_{\text{DR}}$, et via les identifications $K(q)_{\text{DR}} = \mathbb{Z}(1)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$, d'où $\tilde{F}^*K(q)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$, les compatibilités aux structures de torseurs et aux connexions s'écrivent

$$\begin{aligned} \phi_p^{-1}(k + m) &= \phi_p^{-1}(k) + pm \\ d\phi_p^{-1}(0) &= \tilde{F}^*\left(\frac{dq}{q}\right) - p \frac{dq}{q}. \end{aligned}$$

Quand on change le relèvement de Frobenius, on a

$$\phi_p^{-1}[\tilde{F}'](0) - \phi_p^{-1}[\tilde{F}](0) = \log(\tilde{F}'/\tilde{F}).$$

Pour $\tilde{F} : q \mapsto q^p$ on a

$$\phi_p^{-1}[q \mapsto q^p](0) = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$ une unité en p et \tilde{F} tel que $\tilde{F}(x) = x$, on a donc en x $\phi_p^{-1}[\tilde{F}](0) = \log(x/x^p)$ comme requis par 2.9.

§3. Torseurs sous $\mathbb{Z}(n)$.

L'étude du groupe fondamental de $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ met en évidence, pour chaque $k \geq 2$, un torseur $P_{1,k}$ sous $\mathbb{Z}(k)$, sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Nous décrivons ces torseurs dans ce paragraphe. La relation avec π_1 sera expliquée au paragraphe 16 (16.23) et les calculs justificatifs seront donnés au paragraphe 19. Nous décrivons ensuite des torseurs $P_{d,k}$ sous $\mathbb{Z}(k)$, sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}(\sqrt[d]{1}))$, donnés par une construction analogue (16.28).

La somme de $P_{d,k}$ et de $(-1)^k$ fois son symétrique par $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$ est de torsion. Ceci équivaut essentiellement aux formules intégrales adéliques pour la valeur aux entiers négatifs des fonctions L de Dirichlet: 3.6, 3.8, 3.9, 3.14. Une interprétation géométrique, qui permettrait de reprover ces formules, sera donnée au paragraphe 18.

Une interprétation géométrique des relations de distributions 3.13 sera donnée au paragraphe 17.

3.1. Notons P le torseur $P_{1,k}$ à définir. En même temps que P , nous définirons une trivialisation $u_B \in P_B$ de sa réalisation de Betti. Puisque $F^0\mathbb{Z}(k)_{\mathrm{DR}} = 0$, on a nécessairement $P_{\mathrm{DR}} = \mathbb{Z}(k)_{\mathrm{DR}} = \mathbb{Q}$. La structure de Betti est

$$(3.1.1)_k \quad \begin{aligned} P_B &= u_B + (2\pi i)^k \mathbb{Z} \subset P_{\mathrm{DR}, \mathbb{C}} = \mathbb{C} && \text{avec} \\ u_B &= -(k-1)! \zeta(k) \end{aligned}$$

où ζ est la fonction ζ de Riemann.

Soit N un entier, et décrivons $P_{\mathbb{Z}/(N)}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, soit $T_N(z) := K(1-z)_{\mathbb{Z}/(N)}$ le $\mathbb{Z}/N(1)$ -torseur des racines $N^{\text{ème}}$ de $1-z$. Pour $z=1$, on pose $T_N(1) := K(1/N)_{\mathbb{Z}/(N)}$. Cette convention assure que la somme des $T_N(\alpha)$, pour $\alpha^N = 1$, est trivialisée: on a

$$\frac{1}{N} \prod (1-\alpha) = 1 .$$

Soit α une racine $N^{\text{ème}}$ de 1. Elle définit $\alpha : \mathbb{Z}/N \rightarrow \mathbb{Z}/N(1) : a \mapsto a \cdot \alpha$. On en déduit $\alpha^{\otimes(k-1)} : \mathbb{Z}/N(1) \rightarrow \mathbb{Z}/N(k)$. Noter que pour $\alpha = 1$, c'est l'application nulle. On notera $\alpha^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha)$ le $\mathbb{Z}/N(k)$ -torseur déduit de $T_N(\alpha)$ par application de $\alpha^{\otimes(k-1)}$. On a

$$(3.1.2)_k \quad P_{\mathbb{Z}/(N)} := \sum_{\alpha^N=1} \alpha^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha) .$$

Il reviendrait au même de sommer sur les $\alpha \neq 1$. Cette définition garde un sens dans toute clôture algébrique \bar{k} de \mathbf{Q} , et l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ est par transport de structure.

Définissons les morphismes de transition $P_{\mathbf{Z}/(NM)} \rightarrow P_{\mathbf{Z}/(N)}$. On a

$$(3.1.3) \quad \prod_{u^M=z} (1-u) = 1-z ,$$

d'où pour $z \neq 0, 1$ un isomorphisme

$$(3.1.4) \quad T_N(z) = \prod_{u^M=z} T_N(u) .$$

Si $\beta^N = 1$ et que $\alpha^M = \beta$, la réduction mod N de $\alpha : \mathbf{Z}/NM \rightarrow \mathbf{Z}/NM(1)$ est $\beta : \mathbf{Z}/N \rightarrow \mathbf{Z}/N(1)$, et celle de $T_{NM}(\alpha)$ est $T_N(\alpha)$. De là un isomorphisme

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{Z}/(NM)} \text{mod } N &= \sum_{\beta^N=1} \sum_{\alpha^M=\beta} \alpha^{\otimes(k-1)} T_{NM}(\alpha) \text{mod } N \\ &= \sum_{\beta^N=1} \beta^{\otimes(k-1)} \sum_{\alpha^M=\beta} T_N(\alpha) \\ &= \sum_{\beta^N=1} \beta^{\otimes(k-1)} T_N(\beta) \\ &= P_{\mathbf{Z}/(N)} . \end{aligned}$$

Il définit le morphisme de transition voulu.

Pour z non réel négatif, appelons *détermination principale* de $z \mapsto z^{1/N}$ et notons $z^{1/N}$ celle qui vaut 1 en 1. Le morphisme de torseurs $\text{comp}_{\mathbf{Z}/(N), B}$ envoie u_B sur le point u de $P_{\mathbf{Z}/(N)}$ défini par les $(1-\alpha)^{1/N} \in T(\alpha)$:

$$u_B \longmapsto u = \sum \alpha^{\otimes(k-1)} ((1-\alpha)^{1/N}) .$$

Si z n'est pas réel ≥ 1 , on a pour les déterminations principales

$$(3.1.5) \quad \prod_{u^M=z} (1-u)^{1/N} = (1-z)^{1/N} :$$

on le vérifie par prolongement analytique à partir de $z=0$, compte tenu de (3.1.3). Il résulte de (3.1.5) que les $\text{comp}_{\mathbf{Z}/(N), B}$ sont compatibles aux morphismes de transition.

3.2. Quelques préliminaires, avant de définir ϕ_p . Le k -logarithme est défini pour $|z| \leq 1$ par

$$(3.2.1) \quad \ell_k(z) = \sum z^n / n^k .$$

Le $\zeta(k)$ dans la formule donnant P_B apparaît dans notre approche comme étant la valeur en 1 de ℓ_k . Soient p un nombre premier et considérons la série formelle

$$(3.2.2) \quad \ell_k^{(p)}(z) = \sum_{\substack{p \nmid n}} z^n / n^k .$$

C'est le développement en série de Taylor d'une fonction rigide analytique sur la droite projective sur \mathbf{Q}_p , privée du disque ouvert de rayon 1 centré en 1. On a en effet

$$(3.2.3) \quad \ell_k^{(p)}(z) = \lim_N \frac{1}{1 - z^{p^N}} \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid 1^n}}^{p^N - 1} z^n / n^k .$$

De (3.2.3) résulte l'identité

$$(3.2.4) \quad \ell_k^{(p)}(1/z) = -(-1)^k \ell_k^{(p)}(z) .$$

Un calcul de série formelle donne pour $(N, p) = 1$:

$$(3.2.5) \quad N^{k-1} \sum_{u^N=z} \ell_k^{(p)}(u) = \ell_k^{(p)}(z) .$$

Ceci conduit à définir la "valeur principale" en 1

$$(3.2.6) \quad \text{vp } \ell_k^{(p)}(1) := \frac{N^{k-1}}{1 - N^{k-1}} \sum_{\substack{\alpha^N=1 \\ \alpha \neq 1}} \ell_k^{(p)}(\alpha) .$$

Ce nombre est indépendant du choix de N premier à p . D'après (3.2.4), il est nul pour k pair.

Avec ces notations, le Frobenius cristallin ϕ_p est donné par

$$(3.2.7)_k \quad \phi_p^{-1}(0) = (k-1)! p^k \cdot \text{vp } \ell_k^{(p)}(1) .$$

3.3 REMARQUE. Nous avons décrit le $\mathbb{Z}/(N)(k)$ -torseur $P_{\mathbb{Z}/(N)}$ comme une somme de torseurs indexés par les racines $N^{\text{ièmes}}$ de 1. Si N est une puissance d'un nombre premier ℓ : $N = \ell^n$, on peut encore à l'aide de 3.1.4 l'écrire comme une somme indexée par l'ensemble $\mu(N)^*$ des racines primitives $N^{\text{ièmes}}$ de 1. On a en effet des isomorphismes

$$P_{\mathbb{Z}/(N)} = \sum_{\alpha^N=1} \cdots = \sum_{a=1}^n \sum_{\mu(\ell^a)^*} \cdots = \sum_{a=1}^n \sum_{\alpha \in \mu(\ell^a)^*} \alpha^{\otimes(k-1)} \sum_{\beta^{\ell^{n-a}}=\alpha} T_N(\beta).$$

Dans cette somme, β parcourt pour chaque a toutes les racines primitives $N^{\text{ièmes}}$ de 1, d'où

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{Z}/(N)} &= \sum_{\beta \in \mu(N)^*} \beta^{\otimes(k-1)} T_N(\beta) \cdot \sum_{a=1}^n \ell^{(n-a)(k-1)} \\ &= \frac{1}{1 - \ell^{k-1}} \sum_{\beta \in \mu(N)^*} \beta^{\otimes(k-1)} T_N(\beta). \end{aligned}$$

La classe de cohomologie, dans $H^1(\text{Spec}(\mathbf{Q}), \mathbb{Z}/(N)(k))$ de $P_{\mathbb{Z}/(N)}$ ($N = \ell^n$) admet donc la description suivante. Soit $\mathbf{Q}(\zeta)$ le corps cyclotomique engendré par une racine primitive $N^{\text{ièmes}}$ de 1. Dans $H^1(\text{Spec } \mathbf{Q}(\zeta), \mathbb{Z}/N(1))$, soit $\delta(1 - \zeta)$ le cobord de Kummer de $1 - \zeta$. Sur $\text{Spec } \mathbf{Q}(\zeta)$, ζ identifie entre eux les $\mathbb{Z}/N(a)$ et on peut regarder $\delta(1 - \zeta)$ comme une classe à valeurs dans $\mathbb{Z}/N(k)$: plus précisément, on considère $\zeta^{\otimes(k-1)} \cup \partial(1 - \zeta) \in H^1(\text{Spec}(\mathbf{Q}(\zeta)), \mathbb{Z}/N(k))$. On a

$$c\ell(P_{\mathbb{Z}/\ell^n}) = \frac{1}{1 - \ell^{k-1}} \text{Tr}_{\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q}}(\zeta^{\otimes(k-1)} \cup \partial(1 - \zeta))$$

et la classe de P_ℓ est la limite de ces classes.

3.4 REMARQUE. Notons $\zeta^{(p)}(s)$ la fonction ζ , privée de son facteur eulérien en p :

$$\zeta^{(p)}(s) : \sum_{\substack{p \nmid n \\ p \nmid s}} 1/n^s.$$

On sait que les valeurs de $\zeta^{(p)}(s)$ aux entiers négatifs sont rationnelles et admettent une interpolation p -adique. Plus précisément

- (a) Soit \mathbf{C}_p le complété d'une clôture algébrique de \mathbf{Q}_p . Les caractères $\chi : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbf{C}_p^*$ sont les points d'un espace rigide analytique.

(b) Il existe une et un seule fonction rigide analytique $\zeta_p^{(p)}(\chi)$, avec un pôle simple en $\chi = (x \mapsto x^{-1})$, telle que

$$\zeta_p^{(p)}(x \mapsto x^{-n}) = \zeta^{(p)}(n) \in \mathbb{Q}$$

pour n entier < 0 .

Nous poserons pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$

$$\zeta_p^{(p)}(n) := \zeta^{(p)}(x \mapsto x^{-n}).$$

Cette notation diffère de la notation de [C] ou [Ko]: notre $\zeta_p^{(p)}$ n'est pas une fonction continue p -adique de l'entier n . C'est une fonction continue du caractère $x \mapsto x^n$, lui-même fonction continue de n seulement si on restreint n à une progression arithmétique de raison $p - 1$. On a

$$\zeta_p^{(p)}(n) = \lim_a \zeta^{(p)}(n - (p - 1)p^a).$$

Les zéros triviaux de ζ forcent $\zeta_p^{(p)}(n) = 0$ pour n pair, i.e. pour pour $x \mapsto x^{-n}$ un caractère pair. Plus généralement, $\zeta_p^{(p)}(\chi) = 0$ pour χ pair.

Avec cette notation, on a (cf. [C][Ko])

$$\text{vp } \ell_k^{(p)}(1) = \zeta_p^{(p)}(k)$$

et (3.2.7) se récrit

$$(3.4.1)_k \quad \phi_p^{-1}(0) = (k - 1)!p^k \zeta_p^{(p)}(k).$$

3.5 PROPOSITION. Pour k pair, le torseur $P_{1,k}$ est de torsion, d'ordre le dénominateur de $\frac{1}{2}\zeta(1 - k)$.

3.6 PARAPHRASE. Soit P un torseur sous un système de réalisations à coefficients entiers M . Que P soit de n -torsion signifie plus que "chaque réalisation est de n -torsion". Soit $\frac{1}{n}M$ le système de réalisations $M \otimes \mathbb{Q}$, muni de la structure entière $\frac{1}{n}M_B$. Il est isomorphe à M , par un isomorphisme qui transforme $M \hookrightarrow \frac{1}{n}M$ en $n : M \rightarrow M$. Que P soit de n -torsion signifie donc qu'il devient trivial si poussé par $M \rightarrow \frac{1}{n}M$. Pour M de poids ≤ -1 , ceci signifie:

(a) $P_B + \frac{1}{n} M_B \cap F^0 P_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C} \neq \phi$ (intersection dans $P_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} P_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$).

Le point d'intersection x est alors unique car $M_B \cap F^0(M_{\text{DR}}) \otimes \mathbb{C} = 0$.

(b) $x \in F^0 P_{\text{DR}}$, i.e. est défini sur \mathbf{Q} pour la \mathbf{Q} -structure DR.

(c) L'image de x par $\text{comp}_{A^f, B}$ est fixe par Galois.

(d) L'image de x par $\text{comp}_{\text{cris}, p, \text{DR}}$ est fixe par ϕ_p .

Supposons que $F^0 M_{\text{DR}} = 0$. On a alors $P_{\text{DR}} = M_{\text{DR}}$ et on identifie P_B à une classe latérale de $M_B \subset M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$. La condition (a) devient: $P_B \subset \frac{1}{n} M_B$. On a $x = 0$ et (b) est automatique. (d) s'écrit $\phi_p(0) = 0$. Soit $p \in P_B$. Notons p_M son image dans $\frac{1}{n} M_B$, et posons $p^\wedge = \text{comp}_{\widehat{\mathbb{Z}}, B}(p) \in P_{\widehat{\mathbb{Z}}}$, $(p_M)^\wedge = \text{comp}_{A^f, B}(p_M) \in M_{A^f}$. La condition (c) s'écrit

$$(3.6.1) \quad \sigma p^\wedge - p^\wedge = (\sigma - 1)((p_M)^\wedge).$$

Faisons $M = \mathbb{Z}(k)$ avec $k \geq 1$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ d'image c dans $\widehat{\mathbb{Z}}^* : \sigma(\zeta) = \zeta^c$ pour ζ une racine de l'unité. La condition (3.6.1) se récrit

$$(3.6.2) \quad \sigma p^\wedge - p^\wedge = (c^k - 1)(p_M)^\wedge.$$

Modulo N , on obtient: soit c un entier premier à Nn et σ induisant $\zeta \mapsto \zeta^c$ sur les racines $(Nn)^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Alors, $(c^k - 1)p_M \in M_B$ et

$$(3.6.3) \quad \text{comp}_{\widehat{\mathbb{Z}}, B}((c^k - 1)p_M) \equiv \sigma p^\wedge - p^\wedge \pmod{N}.$$

Dans 3.5, k est pair, on peut prendre $p = -(k-1)! \zeta(k)$ et (3.6.3) est une formule galoisienne pour $-(c^k - 1)(k-1)! \zeta(k)$ modulo $N(2\pi i)^k \mathbb{Z}$. On retrouvera une formule connue exprimant ζ aux entiers négatifs comme intégrale adélique.

REMARQUE. La description précédente montre que si P est d'ordre fini, son ordre se lit en réalisation de Hodge

3.7 PREUVE de 3.5. Soit k pair ≥ 2 . On a

$$\begin{aligned} \zeta(k) &= -(2\pi i)^k B_k / 2 \cdot k! \quad , \quad \text{d'où} \\ -(k-1)! \zeta(k) &= -\frac{1}{2} \zeta(1-k) \cdot (2\pi i)^k . \end{aligned}$$

Ceci vérifie l'ordre 3.5 de $P_{1,k}$, si $P_{1,k}$ est d'ordre fini. Soit d le dénominateur de $\frac{1}{2} \zeta(1-k)$. On sait que l'idéal (d) de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est engendré par les $c^k - 1$ pour $c \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$.

Posons $Q := 2P_{1,k}$.

CONSTRUCTION. On construit un isomorphisme de torseurs

$$(3.7.1) \quad Q_{\mathbf{Z}/(N)} = \sum \alpha^{\otimes(k-1)} K(-\alpha)_{\mathbf{Z}/(N)}.$$

La somme est sur les racines $N^{\text{ièmes}}$ de 1 autres que 1

Parce que k est pair et α, α^{-1} opposés dans $\mathbf{Z}/N(1)$, on a

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{Z}/(N)} &= 2 \sum \alpha^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha) \\ &= \sum \alpha^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha) + \sum (\alpha^{-1})^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha^{-1}) \\ &= \sum \alpha^{\otimes(k-1)} (T_N(\alpha) - T_N(\alpha^{-1})); \end{aligned}$$

les sommes sont sur les racines $N^{\text{ième}}$ de 1 et on peut omettre le terme $\alpha = 1$. On a $(1 - \alpha)(1 - \alpha^{-1}) = -\alpha$, d'où (3.7.1)

3.7.2 LEMME. L'image par (3.7.1) de $\text{comp}_{\mathbf{Z}/(N), B}(2u_B)$ est définie par les déterminations principales des $(-\alpha)^{1/N}$.

PREUVE. Pour $|z| = 1$, $z \neq 1$, le rapport des déterminations principales de $(1 - z)^{1/N}$ et $(1 - z^{-1})^{1/N}$ est la détermination principale de $(-z)^{1/N}$.

3.8. Vérifions (3.6.3) pour le torseur Q , avec $p = 2u_B$. Pour $v_N = \text{comp}_{\mathbf{Z}/(N), B}(2u_B)$, il s'agit de vérifier que

$$(3.8.1) \quad \sigma v_N - v_N = \text{comp}_{\mathbf{Z}/(N), B}(-(c^k - 1)\zeta(1 - k)(2\pi i)^k).$$

Cette formule doit être vraie si M est assez divisible et que c est un entier premier à M et congru mod M à l'image dans $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ de $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Comparons σv_N : la somme des $(\sigma\alpha)^{\otimes k-1}(\sigma((-\alpha)^{1/N}))$ dans les $(\sigma\alpha^{\otimes k-1}K(-\sigma\alpha))$, à v_N , qu'on peut récrire comme la somme des $(\sigma\alpha)^{\otimes k-1}((-\sigma\alpha)^{1/N})$. On utilise toujours la détermination principale des racines $N^{\text{ièmes}}$. On obtient que

$$\sigma v_N - v_N = \sum (\sigma\alpha)^{\otimes k-1} \otimes (\sigma((-\alpha)^{1/N}) / (-\sigma\alpha)^{1/N}).$$

Soit m la fonction de \mathbf{Q}/\mathbf{Z} dans \mathbf{Q} qui vérifie

$$(3.8.2) \quad m(q) = \frac{1}{2} - q \quad \text{si } 0 < q \leq 1.$$

On a

$$(-\exp(q \cdot 2\pi i))^{1/N} = \exp(-\frac{1}{N}m(q) \cdot 2\pi i),$$

et (3.8.1) devient

$$(c^k - 1)\zeta(1 - k) \equiv \sum (ca)^{k-1}(cm(a/N) - m(ca/N)) \pmod{N}.$$

La somme est sur $a \in \mathbb{Z}/(N) - \{0\}$ et chaque terme $cm(a/N) - m(ca/N)$ est un entier. Si c^{-1} est un inverse de c mod M , on peut encore récrire (3.8.1):

$$(3.8.3) \quad (c^k - 1)\zeta(1 - k) \equiv \sum a^{k-1}(cm(c^{-1}a/N) - m(a/N)) \pmod{N}.$$

3.9. La congruence (3.8.3) résulte de l'interprétation des congruences de Kummer en terme de mesures. Rappelons cette théorie (cf. par exemple P. Deligne and K. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Inv. math. 59 (1980) p. 227–286, §1). Il existe une et une seule distribution T (fonction additive d'ensembles ouverts et compacts) sur \mathbb{A}^f , invariante par $x \mapsto \lambda n$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}^{*+}$, et telle que $T(r + \widehat{\mathbb{Z}}) = m(r)$ (3.8.2). Formellement, on a pour $k \geq 2$

$$\zeta(1 - k) = \int_{\widehat{\mathbb{Z}}} x^{k-1} T,$$

une formule divergente (car T n'est pas à valeurs dans $\widehat{\mathbb{Z}}$) qu'on régularise comme suit: pour tout $c \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$, on a dans $\widehat{\mathbb{Z}}$

$$(3.9.1) \quad (c^k - 1)\zeta(1 - k) = \int_{\widehat{\mathbb{Z}}} x^{k-1}(cT(c^{-1}x) - T(x)).$$

La distribution $cT(c^{-1}x) - T(x)$ est une mesure, i.e. est à valeurs dans $\widehat{\mathbb{Z}}$, de sorte que la formule a un sens. Modulo N , le membre de droite s'écrit

$$\sum_{n \pmod{N}} x^{k-1} \left(cm\left(\frac{c^{-1}x}{N}\right) - m(x/N) \right)$$

et la formule reste vraie pour c un entier premier à N , d'inverse mod N c^{-1} : comparer c à $c' \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ congru mod N à c . On a obtenu (3.8.3).

Plus généralement, pour F une fonction localement constante à support compact sur \mathbb{A}^f , posons

$$(3.9.2) \quad \begin{aligned} L(F, 1 - k) &:= \sum F(n) n^{k-1} \\ &:= \text{valeur de } \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q} \\ n > 0}} F(n) n^{-s} \text{ en } s = 1 - k . \end{aligned}$$

On a

(3.9.3)

$$c^k L(F(cx), 1 - k) - L(F(x), 1 - k) = \int x^{k-1} F(x) (cT(c^{-1}x) - T(x)) .$$

3.10. Pour finir la preuve de 3.5, il reste à observer que d'après (3.2.4) ou (3.4.1) on a pour $k \geq 2$

$$\text{vp log}_k^{(p)}(1) = 0 ,$$

i.e. $\phi_p^{-1}(0) = 0$.

3.11. Soient d un entier ≥ 1 , k un entier ≥ 1 et $\mu_d := \text{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^d - 1))$ le schéma des racines $d^{\text{èmes}}$ de l'unité. Le schéma $\mu_d[1/d]$ est fini étale sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/d])$ et $\mu_d \otimes \mathbb{Q}$ est la somme disjointe des spectres des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}(\sqrt[d]{1})$ pour $n|d$. Si $k \geq 2$, nous allons décrire un torseur $P_{d,k}$ sous $\mathbb{Z}(k)$ sur la base $\mu_d[1/d]$. Sur la section 1, c'est le multiple par d^{k-1} du torseur 3.1. Il reste à le décrire sur $\mu'_d[1/d] = \mu_d[1/d] - \{1\}$. Pour $k = 1$, nous ne définirons $P_{d,k}$ que sur $\mu'_d[1/d]$. Si ce n'est pas ambigu, nous écrirons simplement P pour $P_{d,k}$. Nous donnerons la description pour $k \geq 2$. La même vaut pour $k = 1$, sauf qu'il faut remplacer μ_d par μ'_d . En même temps que P , nous définirons une trivialisation u_B de sa réalisation de Betti.

Puisque $F^0 \mathbb{Z}(k)_{\text{DR}} = 0$, on a sur $\mu_d \otimes \mathbb{Q}$

$$P_{\text{DR}} = \mathbb{Z}(k)_{\text{DR}} = \mathcal{O} .$$

La structure de Betti est la donnée, pour chaque $\zeta \in \mu_d(\mathbb{C})$, d'une classe latérale $P_{B,\zeta} \subset \mathbb{C}$ sous $(2\pi i)^k \mathbb{Z}$. Avec la notation (3.2.1), on définit

$$(3.11.1)_{d,k} \quad \begin{aligned} P_{B,\zeta} &:= u_{B,\zeta} + (2\pi i)^k \mathbb{Z} \quad \text{avec} \\ u_{B,\zeta} &= -(k-1)! d^{k-1} \ell_k(\zeta) . \end{aligned}$$

Soit N un entier et décrivons le faisceau étale $P_{\mathbb{Z}/(N)}$. Si ζ est une racine $d^{\text{ièmes}}$ de 1 et que $\alpha^N = \zeta$, alors α^d est une racine $N^{\text{ièmes}}$ de 1 et $(\alpha^d)^{\otimes(k-1)}$ transforme un $\mathbb{Z}/N(1)$ -torseur en $\mathbb{Z}/N(k)$ -torseur. La fibre de $P_{\mathbb{Z}/(N)}$ en ζ est

$$(3.11.2)_{d,k} \quad P_{\mathbb{Z}/(N),\zeta} := \sum_{\alpha^N=\zeta} (\alpha^d)^{\otimes(k-1)} T_N(\alpha).$$

Il reviendrait au même de sommer sur les $\alpha \neq 1$. Les applications de réduction modulo N : $P_{\mathbb{Z}/(NM),\zeta} \rightarrow P_{\mathbb{Z}/(N),\zeta}$ sont définies comme en 3.1.

Le morphisme $\text{comp}_{\mathbb{Z}/(N),B}: P_{B,\zeta} \rightarrow P_{\mathbb{Z}/(N),\zeta}$ envoie $u_{B,\zeta}$ sur le point u de $P_{\mathbb{Z}/(N),\zeta}$ défini par les déterminations principales des $(1-\alpha)^{1/N} \in T(\alpha)$

$$(3.11.3)_{d,k} \quad u_{B,\zeta} \longmapsto u = \sum_{\alpha^N=\zeta} (\alpha)^{\otimes(k-1)} ((1-\alpha)^{1/N}).$$

Soit $p \nmid d$ et définissons le Frobenius cristallin de $P = P_{d,k}$ restreint à μ'_d . Il sera plus commode de définir son inverse ϕ_p^{-1} . Le morphisme de Frobenius de μ'_d mod p se relève en $\tilde{F}: z \mapsto z^p$. Le morphisme ϕ_p^{-1} de $\mathbb{Q}(k)$ sur μ'_d est un morphisme $\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow \tilde{F}^*(\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p)$ sur μ'_d . Via l'isomorphisme $\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$ (d'où $\tilde{F}^*\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$) c'est la multiplication par p^k . Le morphisme ϕ_p^{-1} de P est $\phi_p^{-1}: P_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow \tilde{F}^*(P_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p)$ vérifiant

$$\phi_p^{-1}(x+m) = \phi_p^{-1}(x) + \phi_p^{-1}(m),$$

où $+$ est l'action à droite de $\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$ (resp. $\tilde{F}^*\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$). Via les isomorphismes $\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$, $P_{\text{DR}} = \mathcal{O}$ (d'où $\tilde{F}\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} = \mathcal{O}$, $\tilde{F}^*P_{\text{DR}} = \mathcal{O}$), cela s'écrit

$$\phi_p^{-1}(x+m) = \phi_p^{-1}(x) + p^k m$$

et ϕ_p^{-1} est déterminé par $\phi_p^{-1}(0) \in \Gamma(\mu'_p \otimes \mathbb{Q}_p, \mathcal{O})$: une fonction de $\zeta \in \mu'_d$. On définit

$$(3.11.4)_{d,k} \quad \phi_p^{-1}(0) = (k-1)! p^k d^{k-1} \ell_k^{(p)}(\zeta).$$

3.12 REMARQUE. Si $k=1$, le torseur $P_{d,k}$ sur μ'_d est la restriction à μ'_d du torseur de Kummer $K(1-z)$ sur la droite affine privée de 1.

3.13. Le morphisme $z \mapsto z^{d'}$ de $\mu_{dd'}[1/dd']$ dans $\mu_d[1/dd']$ est fini étale. Si $k \geq 2$, la trace par ce morphisme du $\mathbb{Z}(k)$ -torseur $P_{dd',k}$ est donc définie. C'est un torseur sous $\mathbb{Z}(k)$ sur $\mu_d[1/dd']$.

3.13.1 PROPOSITION. (i) La trace 3.13 de $P_{dd',k}$ est $P_{d,k}$.

(ii) La restriction de $P_{dd',k}$ à $\mu_d[1/dd']$ est $d'^{k-1}P_{d,k}$.

PREUVE. L'assertion (ii) est triviale. Prouvons (i).

En réalisation de Hodge, (i) exprime la relation dite de distribution

$$\sum_{\alpha^{dd'}=\zeta} \ell_k(\alpha) = d'^{1-k} \ell_k(\zeta) .$$

De même en réalisation cristalline, avec ℓ_k remplacé par $\ell_k^{(p)}$ (3.2.5).

La trace de $P_{dd',k,\mathbb{Z}/(N)}$ a pour fibre en ζ

$$\sum_{\alpha^{Nd'}=\zeta} (\alpha^{dd'})^{\otimes k-1} T_N(\alpha) .$$

Par (3.1.4), c'est la fibre en ζ de $P_{d,k,\mathbb{Z}/(N)}$. Cet isomorphisme est compatible aux comp $_{\mathbb{Z}/(N),B}$ ((3.1.5) pour $M = d'$).

3.13.2 REMARQUE. Le même résultat vaut pour $k = 1$, si on remplace μ_d par $\mu_d - \{1\}$ et $\mu_{dd'}$ par $\mu_{dd'} - \mu_{d'}$. Même preuve, ou appliquer 3.12 et (3.1.3).

3.14 PROPOSITION. Soit ϵ l'involution $\zeta \mapsto \zeta^{-1}$ de μ_d . Alors le torseur sous $\mathbb{Z}(k)$ $Q := P_{d,k} + (-1)^k \epsilon P_{d,k}$ est de torsion.

PREUVE (esquisse). La preuve est parallèle à celle de 3.5. Pour simplifier les notations, on suppose $k \geq 2$. Le cas $k = 1$ peut se déduire de 3.12. Le torseur Q admet une description parallèle à celle de $P_{d,k}$; il suffit de remplacer $\ell_k(\zeta)$ par $\ell_k(\zeta) + (-1)^k \ell_k(\zeta^{-1})$, $T_N(\alpha)$ par $K_N(-\alpha)$ cf. 3.7.1, et $\ell_k^{(p)}(\zeta)$ par $\ell_k^{(p)}(\zeta) + (-1)^k \ell_k^{(p)}(\zeta^{-1})$. Par (3.2.4), cette dernière somme est nulle: ceci prouve l'aspect cristallin de 3.14.

L'équation fonctionnelle des fonctions L sera utilisée sous la forme suivante. Soit F une fonction localement constante à support compact sur \mathbb{A}^f . Soit ψ le composé de l'inverse de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^f/\widehat{\mathbb{Z}}$ et de $\exp(2\pi i x)$. Soit dx la mesure de Haar sur \mathbb{A}^f donnant le volume 1 à $\widehat{\mathbb{Z}}$. La transformée de Fourier \widehat{F} de F est

$$\widehat{F}(y) := \int \psi(xy) F(x) dx .$$

Pour F une fonction sur $\mathbb{Z}/(d)$, posons

$$\widehat{F}_d(y) := \sum \exp(2\pi i xy/d) F(x) .$$

Une fonction sur $\mathbb{Z}/(d)$ sera identifiée à la fonction qui s'en déduit sur $\widehat{\mathbb{Z}}$, prolongée par 0 sur A^f . On a alors

$$\widehat{F}(y) = \frac{1}{d} \widehat{F}_d(dy).$$

Avec la notation 3.9.2, on a

$$(3.14.1) \quad \sum_{n \in \mathbb{Q}, n > 0} F(n)n^{k-1} = (k-1)!(2\pi i)^{-k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q} \\ n \neq 0}} \widehat{F}(n)n^{-k}.$$

Cette formule peut s'obtenir en appliquant formellement la formule sommatoire de Poisson, pour $\mathbb{Q} \subset A$, à la fonction sur $A = A^f \times \mathbb{R}$

$$(a, x) \mapsto F(a) \cdot x^{k-1}Y(x),$$

où $Y(x)$ est la fonction caractéristique de $x \geq 0$. La transformée de Fourier $\int \exp(-2\pi ixy)f(x)dx$ de $x^{k-1}Y(x)$ est en effet la fonction

$$(k-1)!(2\pi i)^{-k}x^{-k}.$$

Pour F une fonction sur $\mathbb{Z}/(d)$, (3.14.1) se récrit

$$(3.14.2) \quad \sum_{n>0} F(n)n^{k-1} = (k-1)!(2\pi i)^{-k} \cdot d^{k-1} \sum_{n \neq 0} \widehat{F}_d(n)n^{-k},$$

soit encore

$$(3.14.3) \quad (k-1)!d^{k-1} \sum_{n \neq 0} \widehat{F}_d(n)n^{-k} = \sum_{n>0} F(n)n^{k-1} \cdot (2\pi i)^k.$$

Pour $\zeta = \exp(2\pi i b/d)$ et F la fonction caractéristique de $\{b\}$, on obtient

$$(3.14.4) \quad (k-1)!d^{k-1}(\ell_k(\zeta) + (-1)^k \ell_k(\zeta^{-1})) = \left(\sum_{\substack{n \equiv b(d) \\ n > 0}} n^{k-1} \right) \cdot (2\pi i)^k.$$

Il est commode de prouver 3.14 non pas pour Q , mais, ce qui revient au même, pour son image directe sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/d])$: un torseur sous l'image directe de $\mathbb{Z}(k)$. Raisonnant comme en 3.8, on se ramène à la rationalité des fonctions ζ partielles dans (3.14.4), et à (3.9.3).

3.15. Appelons *motif d'Artin* un motif sur \mathbb{Q} somme de facteurs directs de motifs $H_{\text{mot}}^0(\text{Spec } E)$ (1.16). Si M est un motif d'Artin, $M_B \hookrightarrow M_{A^f}$

est stable sous $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Le foncteur $M \mapsto M_B$ est une équivalence de la catégorie des motifs d'Artin avec celle des représentations (continues) de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Pour un motif d'Artin, l'isomorphisme $\text{comp}_{\text{DR},B}$ induit un isomorphisme

$$M_{\text{DR}} = (M_B \otimes \bar{\mathbb{Q}})^{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}.$$

Si on ne considère que des extensions non ramifiées en dehors de S , on obtient des motifs sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}) - S$ dont la catégorie s'identifie à celle des représentations de Galois non ramifiées en dehors de S .

Fixons une extension E de \mathbb{Q} et $\chi : \mathbb{Z}/(d)^* \rightarrow E^*$, primitif. Nous nous proposons de décrire un motif d'Artin $D(\chi)$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/d])$, à coefficients dans l'anneau des entiers \mathcal{O}_E de E . On peut caractériser $D(\chi) \otimes \mathbb{Q}$ par $(D(\chi) \otimes \mathbb{Q})_{\text{DR}} = E$ et le fait que l'action de Galois soit

$$\chi^{-1} : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^{ab} = \widehat{\mathbb{Z}}^* \longrightarrow E^*$$

$(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^*$ est l'action sur les racines de l'unité).

Nous déduirons ensuite de $P_{d,k}$ un torseur sous $D(\chi)$, et nous le décrirons.

3.16. Soient $d \geq 2$ un entier et μ_d^* le schéma sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/d])$ des racines primitives $d^{\text{ième}}$ de l'unité. Si C_d est le $d^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique et que $\mathbb{Q}(\alpha) := \mathbb{Q}[\alpha]/(C_d(\alpha))$, μ_d^* le spectre de l'anneau des d -entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Le schéma μ_d^* a pour points dans \mathbb{C} l'ensemble des racines primitives $d^{\text{èmes}}$ de 1 dans \mathbb{C} . Le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ est un corps de fonctions sur $\mu_d^*(\mathbb{C})$; à α correspond l'inclusion $\mu_d^*(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Le groupe $\mathbb{Z}/(d)^*$ agit sur μ_d^* par $\zeta \mapsto \zeta^a$. L'action sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui s'en déduit par transport de structures est $\alpha \mapsto \alpha^{1/a}$.

Soit M le motif à coefficients entiers sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/d])$ image directe du motif unité $\mathbb{Z}(0)$ sur μ_d^* . C'est $H_{\text{mot}}^0(\mu_d^*)$ (le motif 1.16 pour $\mathbb{Q}(\alpha)$), avec la structure entière $\mathbb{Z}^{\mu_d^*(\mathbb{C})} \hookrightarrow \mathbb{Q}^{\mu_d^*(\mathbb{C})} = H_{\text{mot}}^0(\mu_d^*)_B$.

Par transport de structures, $\mathbb{Z}(d)^*$ agit sur M , qui est donc un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/(d)^*]$ -module. Pour $\chi : \mathbb{Z}/(d)^* \rightarrow E$ un caractère, on définit

$$D(\chi) := M_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/(d)^*], \chi^{-1}} \otimes \mathcal{O}_E.$$

Pour E contenant les racines $d^{\text{èmes}}$ de l'unité, on a

$$M \otimes E = \bigoplus_{\chi} D(\chi) \otimes_{\mathcal{O}_E} E.$$

Ceci correspond à la décomposition de la fonction ζ de $\mathbf{Q}(\alpha)$ en un produit de fonctions L de Dirichlet.

3.17. Avec les notations de 3.16, on a $M_B = \mathbf{Z}^{\mu_d^*(\mathbf{C})}$. Pour $\zeta \in \mu_d^*(\mathbf{C})$, soit $\delta(\zeta)$ valant 1 en ζ et 0 ailleurs. Le \mathcal{O}_E -module $D(\chi)_B$ est engendré par les $\delta(\zeta) := \delta(\zeta) \otimes 1$, avec les relations

$$(3.17.1) \quad \delta(\zeta^a) = \chi(a)^{-1} \delta(\zeta) \quad (a \in \mathbf{Z}/(d)^*) .$$

L'action de Galois est $\sigma\delta(\zeta) = \delta(\sigma\zeta)$. Le choix de $\zeta_0 \in \mu_d^*(\mathbf{C})$ et de la base $\delta(\zeta_0)$ de $D(\chi)_B$ identifie $D(\chi)$ au motif d'Artin défini par la représentation $\chi^{-1} : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbf{Z}}^* \rightarrow \mathcal{O}_E^*$ de Galois. L'image du Frobenius géométrique en p est $\chi(p)$. Le χ^{-1} dans la définition de $D(\chi)$ assure que la fonction L correspondante, à valeurs dans $E \otimes \mathbf{C}$, est la série de Dirichlet $\sum \chi(n)n^{-s}$.

On a $M_{\text{DR}} = \mathbf{Q}(\alpha)$. On en déduit que

$$\alpha \otimes 1 \in D(\chi)_{\text{DR}} = \mathbf{Q}(\alpha) \underset{\mathbf{Z}[\mathbf{Z}/(d)^*], \chi^{-1}}{\otimes} E$$

est une base de $D(\chi)_{\text{DR}}$ sur E . On utilise cette base pour identifier $D(\chi)_{\text{DR}}$ à E

$$(3.17.2) \quad D(\chi)_{\text{DR}} = E, \text{ par } \alpha \otimes 1 \mapsto 1 .$$

Soit $a \in \mathbf{Z}/(d)^*$. Par l'isomorphisme $\text{comp}_{\text{DR}, B}$, $\alpha^a \otimes 1 = \chi(a) \alpha \otimes 1 = \chi(a)$ correspond à

$$(3.17.3) \quad \sum \zeta^a \delta(\zeta) = \chi(a) \sum \zeta \delta(\zeta) ;$$

les sommes sur les racines primitives $d^{\text{èmes}}$ de 1 dans \mathbf{C} .

En particulier, 1 correspond à $\sum \zeta \delta(\zeta) = \sum_a \zeta_0^a \chi(a)^{-1} \cdot \delta(\zeta_0)$ et $D(\chi)_B \subset D(\chi)_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C} = E \otimes \mathbf{C}$ est le \mathcal{O}_E -module libre de base $(\sum \chi(a)^{-1} \otimes \zeta_0^a)^{-1}$:

$$(3.17.4) \quad D(\chi)_B = \mathcal{O}_E \cdot (1 / \sum \chi(a)^{-1} \otimes \zeta_0^a) \subset E \otimes \mathbf{C} = D(\chi)_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C} .$$

3.18. Un $\mathbf{Z}(k)$ -torseur sur μ_d^* défini par image directe de μ_d^* à $\text{Spec}(\mathbf{Q})$ un $M(k)$ -torseur sur $\text{Spec}(\mathbf{Q})$, puis, pour chaque χ , un $D(\chi)(k)$ torseur sur $\text{Spec}(\mathbf{Q})$. En particulier, le torseur $P_{d,k}$ de 3.10, restreint à μ_d^* , définit un

torseur $P_{\chi,k}$ sous $D(\chi)$. Nous allons calculer ses réalisations de de Rham, de Betti et cristalline, lorsque χ est primitif.

Puisque $F^0 D(\chi)(k) = 0$, on a

$$(3.18.1) \quad P_{\chi,k \text{ DR}} = D(\chi)(k)_{\text{DR}} = E .$$

D'après (3.11.1), $P_{\chi,k} B \subset P_{\chi,k \text{ DR}} \otimes \mathbb{C} = E \otimes \mathbb{C}$ contient

$$-(k-1)!d^{k-1} \sum \ell_k(\zeta) \delta(\zeta) \quad (\text{somme sur } \mu_d^*(\mathbb{C})) .$$

On a

$$\sum \ell_k(\zeta) \delta(\zeta) = \sum_n \frac{1}{n^k} \sum \zeta^n \delta(\zeta)$$

et $\sum \zeta^n \delta(\zeta)$ est 0 si $(n,d) \neq 1$, et vaut $\chi(n) \in D(\chi)_{\text{DR}}$ si $(n,d) = 1$ (3.17.3). Ceci permet de récrire la somme comme étant $L(\chi, k) \in E \otimes \mathbb{C}$. On obtient

$$(3.18.2) \quad P_{\chi,k} B = -(k-1)!d^{k-1} L(\chi, k) + D(\chi)_B \subset E \otimes \mathbb{C} .$$

Le Frobenius cristallin est défini pour $p \nmid d$. Un calcul parallèle au précédent et [C],[Ko] donnent

$$(3.18.3) \quad \phi_p^{-1}(0) = (k-1)!p^k d^{k-1} L_p^{(p)}(\chi, k)$$

où $L_p^{(p)}(\chi, n) \in E \otimes \mathbb{Q}_p$ est la limite pour $n \rightarrow \infty$

$$L_p^{(p)}(\chi, k) = \lim L^{(p)}(\chi, k - (p-1)p^n) .$$

§4. Rappels sur les Ind-objets.

Dans ce paragraphe, nous rassemblons quelques résultats bien connus sur les catégories de Ind-objets. La plupart sont donnés, au moins en exercice, dans SGA 4 I 8. Pour \mathbf{U} un univers, les catégories seront des \mathbf{U} -catégories et “petit” signifie élément de \mathbf{U} . Le lecteur est invité à négliger ces subtilités ensemblistes.

4.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. On peut donner de la catégorie des Ind-objets de \mathcal{C} les définitions équivalentes suivantes.

(4.1.1) La catégorie des foncteurs contravariants $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Ens})$ qui sont la petite limite inductive filtrante de foncteurs représentables h_X .

(4.1.2) La catégorie des petits systèmes inductifs filtrants d’objets de \mathcal{C} , avec les Hom définis par

$$(4.1.3) \quad \text{Hom}((X_\alpha), (Y_\beta)) = \lim \text{proj}_\alpha \lim \text{ind}_\beta \text{Hom}(X_\alpha, Y_\beta).$$

Il revient au même de considérer les petits systèmes inductifs filtrants comme indexés par une petite catégorie filtrante, ou par un petit ensemble ordonné filtrant (SGA 4 I 8.1.6). On note “ $\lim \text{ind}$ ” X_α le ind-objet défini par le petit système inductif (X_α) . On passe de (4.1.2) à (4.1.1) par l’équivalence de catégories

$$\text{“}\lim \text{ind}\text{” } X_\alpha \longleftrightarrow \lim \text{ind } h_{X_\alpha}.$$

Si la catégorie \mathcal{C} est abélienne, celle de ses Ind-objets l’est aussi (SGA 4 I 8.9.9c) et le foncteur canonique pleinement fidèle $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ind}\mathcal{C}$ est exact (SGA 4 I 8.8.2). Les limites inductives filtrantes existent dans $\text{Ind}\mathcal{C}$ et sont exactes (SGA 4 I 8.9.1).

4.2. Le cas qui nous intéressera est celui où \mathcal{C} est une catégorie abélienne dont tous les objets sont noethériens.

4.2.1 LEMME. *Sous l’hypothèse précédente,*

(i) \mathcal{C} est stable par sous-quotients dans $\text{Ind}\mathcal{C}$.

(ii) *Tout objet X de $\text{Ind}\mathcal{C}$ est la limite inductive d’un système inductif filtrant à morphismes de transition monomorphiques $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ d’objets de \mathcal{C} .*

Pour $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et X comme en (ii),

(iii) chaque X_α est un sous-objet de X

(iv) $\alpha \mapsto X_\alpha$, de A dans l'ensemble ordonné filtrant (par (i)) des sous-objets de X est cofinal.

PREUVE. Prouvons (ii). Soit $X = \text{``lim ind''} X_\alpha$. Pour chaque α , les $\text{Ker}(X_\alpha \rightarrow X_\beta)$ ($\beta > \alpha$) forment un système croissant de sous-objets. Parce que X_α est noethérien, il est stationnaire. Soit $K_\alpha := \text{Ker}(X_\alpha \rightarrow X_\beta)$ pour β assez grand. On a

$$\text{``lim ind''} X_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{``lim ind''} X_\alpha / K_\alpha$$

et (X_α / K_α) vérifie (ii).

Prouvons (iii). Le morphisme $X_\alpha \rightarrow X$ est la limite inductive filtrante des monomorphismes $X_\alpha \rightarrow X_\beta$ ($\beta > \alpha$), donc un monomorphisme par exactitude des limites dans $\text{Ind } \mathcal{C}$.

Prouvons (i). Il s'agit de vérifier que tout sous-objet Z de X dans \mathcal{C} est encore dans \mathcal{C} . Par (ii), (iii) Z est limite inductive filtrante de sous-objets Y_α dans \mathcal{C} . Les Y_α sont des sous-objets de X . Leur système est donc stationnaire et Z est dans \mathcal{C} .

Prouvons (iv). Pour $Z \subset X$ dans \mathcal{C} , le morphisme $Z \rightarrow X$ se factorise par définition de $\text{Hom}(Z, X)$ (3.1.3) par un X_α .

Réiproquement, soient \mathcal{D} une catégorie abélienne et \mathcal{C} une sous-catégorie pleine stable par sommes finies et sous-quotients.

4.2.2 LEMME. *Sous les hypothèses précédentes, si (i) tout objet de \mathcal{C} est noethérien, (ii) les petites limites inductives filtrantes existent dans \mathcal{D} et sont exactes et (iii) tout objet de \mathcal{D} est petite limite inductive filtrante d'objets de \mathcal{C} , alors*

$$\text{Ind } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} : \text{``lim ind''} X_\alpha \hookrightarrow \lim \text{ind } X_\alpha \quad \text{et}$$

$\mathcal{D} \rightarrow \text{Ind } \mathcal{C} : X \mapsto \text{le système inductif filtrant de ses sous objets dans } \mathcal{C}$ sont des équivalences inverses l'une de l'autre.

Dans un langage moins choisi: \mathcal{D} est la catégorie des Ind-objets de \mathcal{C} .

PREUVE. Comme en 4.2.1(ii),(iii), on déduit de (iii) que chaque X dans \mathcal{D} est petite limite inductive filtrante de sous-objets X_α dans \mathcal{C} . Les X_α sont cofinaux dans tous les sous-objets de X dans \mathcal{C} : si $Z \subset X$, Z dans \mathcal{C} , passant à la limite dans les

$$0 \rightarrow Z \cap X_\alpha \rightarrow X_\alpha \rightarrow X/Z,$$

on trouve que les $Z \cap X_\alpha$ ont pour limite inductive Z . Puisque Z est noethérien, ils forment un système stationnaire et Z est contenu dans un X_α . On en déduit que X est la limite inductive de ses sous-objets dans $\mathcal{C} : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ind } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'identité. Réciproquement, tout X dans $\text{Ind } \mathcal{C}$ est un “lim ind” X_α comme en 4.2.1(ii), les X_α sont cofinaux dans les sous-objets dans \mathcal{C} de $\text{lim ind } X_\alpha$ et $\text{Ind } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \text{Ind } \mathcal{C}$ est l'identité.

4.3 Exemples d'applications de 4.2.2: $\mathcal{D} = \text{Ind } \mathcal{C}$.

(4.3.1) X est un schéma noethérien, \mathcal{C} la catégorie des faisceaux cohérents sur X , \mathcal{D} celle des faisceaux quasi-cohérents (EGA I 9.4.9).

(4.3.2) Soit G un schéma en groupe affine sur k ; on prend pour \mathcal{C} la catégorie $\text{Rep}(G)$ des représentations linéaires de dimension finie sur k , pour \mathcal{D} la catégorie de toutes les représentations linéaires. Ceci exprime que toute représentation linéaire est réunion de ses sous-représentations de dimension finie: SGA 3VI_B 11.10. Voici une variante.

(4.3.3) Soient k un corps, X un schéma sur k et P un groupoïde agissant sur X . Dans la terminologie de SGA 3.V1, X et P définissent un ($\text{Schémas}/k$)-groupoïde. Pour une autre définition, voir 10.2, 10.3(i) ou [D4] §3. On suppose P affine sur $X \times X$ et transitif, i.e. fidèlement plat sur $X \times X$, et on prend pour \mathcal{C} la catégorie $\text{Rep}(X, P)$ des fibrés vectoriels sur X munis d'une action de P . Pour \mathcal{D} , on prend les faisceaux quasi-cohérents à action de P . Voir [D4] 3.9. Si $x \in X(k)$, le foncteur “fibre en x ” est une équivalence de $\text{Rep}(X, P)$ avec $\text{Rep}(P_{x,x})$ et on retombe sur (4.3.2).

4.4. Soient k un corps, k' une extension de k , \mathcal{C} et \mathcal{D} comme en 4.2.2, abéliennes k -linéaires, de même \mathcal{C}' et \mathcal{D}' , k' -linéaires, et supposons donné une paire de foncteurs adjoints k -linéaires (extension des scalaires, restriction des scalaires) entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Le foncteur de restriction des scalaires induit un foncteur

$$(4.4.1) \quad \mathcal{D}' \rightarrow (\text{objet de } \mathcal{D} \text{ muni d'une structure de } k'\text{-module: } k' \rightarrow \text{End } X, k\text{-linéaire})$$

Pour X dans \mathcal{D} et V un k -espace vectoriel, on dispose d'un produit tensoriel $V \otimes_k X$ dans \mathcal{D} : le foncteur $Y \mapsto \text{Hom}(V, \text{Hom}(X, Y))$ est coreprésentable, et $V \otimes_k X$ est un objet qui le coreprésente. Si $(e_i)_{i \in I}$ est

une base de V , $V \otimes_k X$ est une somme de copies de X indexée par I . Une structure de k' -module s'interprète comme un morphisme $k' \otimes_k X \rightarrow X$ avec des propriétés convenables.

Soit X dans \mathcal{D} muni d'une structure k -linéaire de k' -module. On dit que $Y \subset X$ engendre X comme k' -module si le composé $k' \otimes_k Y \rightarrow k' \otimes_k X \rightarrow X$ est un épimorphisme, i.e. si X est le plus petit sous- k' -module de X contenant Y . Nous noterons $\mathcal{C}_{k'}$ la catégorie des objets de $\mathcal{D} \simeq \text{Ind } \mathcal{C}$ munis d'une structure k -linéaire de k' -module et engendrés comme k' -module par un sous-objet dans \mathcal{C} .

4.5 LEMME. *Avec les hypothèses et notations de 4.4, supposons que*

- (a) (4.4.1) est une équivalence
- (b) l'extension des scalaires $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ envoie \mathcal{C} dans \mathcal{C}' .

Alors, le foncteur de restriction des scalaires induit une équivalence $\mathcal{C}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{k'}$.

PREUVE. Identifions \mathcal{D} à $\text{Ind } \mathcal{C}$ et, par (4.4.1), \mathcal{D}' à la catégorie des Ind-objets de \mathcal{C} munis d'une structure de k' -module. La restriction des scalaires devient l'oubli de la structure de module. Son adjoint à gauche (extension des scalaires) devient $X \mapsto k' \otimes_k X$. Il s'agit de déterminer \mathcal{C}' .

Si X dans \mathcal{D}' est engendré comme k' -module par un \mathcal{D} -sous-objet $Y \subset X$, avec Y dans \mathcal{C} , il est quotient de $k' \otimes_k Y$ et est donc dans \mathcal{C}' .

Réciproquement, si X est dans \mathcal{C}' , écrivons-le dans \mathcal{D} comme réunion filtrante de sous-objets X_α dans \mathcal{C} . Puisque X est noethérien dans \mathcal{C}' , le système des sous-modules images des $k' \otimes_k X_\alpha$ dans X est stationnaire: X est quotient d'un $k' \otimes_k X_\alpha$, donc dans $\mathcal{C}_{k'}$.

4.6 Exemples d'applications de 4.5: $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_k$

- (i) Soient X un schéma de type fini sur k et X' le schéma sur k' déduit de X par extension des scalaires. On prend pour \mathcal{C} et \mathcal{D} (resp. \mathcal{C}' et \mathcal{D}') les catégories de faisceaux cohérents et quasi-cohérents sur X et X' . La restriction des scalaires est l'image directe par $a: X' \rightarrow X$.
- (ii) Soit G un schéma en groupe algébrique affine sur k et G' sur k' déduit par extension des scalaires. On prend $\mathcal{C} = \text{Rep}(G)$, $\mathcal{C}' = \text{Rep}(G')$ et \mathcal{D} , \mathcal{D}' comme en 4.3.2.
- (iii) Plus généralement, pour P un groupoïde transitif sur X/k , affine sur $X \times X$, et X' , P' déduits par extension des scalaires, on prend $\mathcal{C} = \text{Rep}(X, P)$, $\mathcal{C}' = \text{Rep}(X', P')$ et \mathcal{D} , \mathcal{D}' comme en 4.3.3.

4.7. La notion duale de “Ind-objet” est celle de pro-objet. Un pro-objet peut être défini par un système projectif filtrant (X_α) , et

$$\mathrm{Hom}((X_\alpha), (Y_\beta)) = \lim \mathrm{proj}_\beta \lim \mathrm{ind}_\alpha \mathrm{Hom}(X_\alpha, Y_\beta) .$$

4.8. Pour \mathcal{C} la catégorie des espaces vectoriels sur k de dimension finie, $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ est celle de tous les espaces vectoriels (4.2.2 ou (4.3.1)) et $\mathrm{Pro}\mathcal{C}$ celle des espaces vectoriels linéairement compacts. La dualité est une antiéquivalence entre $\mathrm{Ind}\mathcal{C}$ et $\mathrm{Pro}\mathcal{C}$.

Un schéma en groupes G sur k est une limite projective filtrante de groupes algébriques G_α sur k . On regardera l’algèbre de Lie

$$\mathrm{Lie} G = \lim \mathrm{proj} \mathrm{Lie} G_\alpha$$

comme une pro-algèbre de Lie. Si $G = \mathrm{Spec}(A)$ et que I est l’idéal des $f \in A$ s’annulant à l’origine, l’espace vectoriel linéairement compact sous-jacent à $\mathrm{Lie} G$ est le dual de I/I^2 .

§5. Géométrie algébrique dans une catégorie tannakienne.

5.1. Soient X une variété algébrique complexe, $o \in X$ et Γ le plus grand quotient nilpotent sans torsion de classe N de $\pi_1(X, o) : \Gamma = \pi_1(X, o)^{[N]}$ (0.3). Pour (X, o) définis sur $k \subset \mathbb{C}$, nous voulons voir $\text{Lie}\Gamma$ (9.3) comme la réalisation de Betti d'un motif sur k . Dans certains cas, nous construirons en tout cas un système de réalisations sur k dont $\text{Lie}\Gamma$ est la réalisation de Betti, rel. l'inclusion $\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le crochet de Lie doit être un morphisme de motifs.

La donnée de l'algèbre de Lie nilpotente $\text{Lie}\Gamma$ équivaut à celle du groupe algébrique unipotent $\Gamma^{\text{alg un}}$, ou simplement Γ^{alg} , dont elle est l'algèbre de Lie (9.1, cf. aussi 9.5), et on veut regarder Γ^{alg} comme étant "motivique". Nous nous y prendrons comme suit: la donnée du groupe algébrique Γ^{alg} équivaut à celle de l'algèbre de Hopf algèbre affine de Γ^{alg} . L'exponentielle $\text{Lie}\Gamma \rightarrow \Gamma^{\text{alg}}$ identifie cette algèbre à $\bigoplus \text{Sym}^n((\text{Lie}\Gamma)^\vee)$. C'est la limite inductive sur k des $\bigoplus_{n \leq k} \text{Sym}^n((\text{Lie}\Gamma)^\vee)$. Chacune de ces sommes finies est la réalisation de Betti, rel σ , d'un motif sur k , et Γ^{alg} est motivique en ce que son algèbre affine est la réalisation de Betti, rel. σ , d'un ind-objet de la catégorie des motifs. Le produit et le coproduit sont induits par des morphismes dans cette catégorie.

Pour $x \in X$, les classes d'homotopie de chemin de o à x forment un torseur (0.6) sous $\pi_1(X, o)$. Par $\pi_1(X, o) \rightarrow \Gamma^{\text{alg}}$, on en déduit un Γ^{alg} -torseur $P_{x,o}^{(N)}$. Pour x défini sur k , on veut voir ce torseur comme étant motivique sur k . Interprétation: son algèbre affine est la réalisation de Betti, rel. σ , d'un ind-objet de la catégorie des systèmes de réalisations sur k . Contrairement à ce qui se passe pour Γ^{alg} , où on dispose de l'algèbre de Lie $\text{Lie}\Gamma^{\text{alg}}$, je ne connais pas de façon commode d'exprimer le caractère motivique de $P_{x,o}^{(N)}$ qui évite ce détours par les Ind-motifs. Le but du paragraphe est de fournir un langage commode pour ces constructions.

5.2. Soient k un corps et \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k . Plus généralement (du moins pour 5.2–5.7), on pourrait prendre pour \mathcal{T} une \otimes -catégorie abélienne *ACU* k -linéaire rigide, avec $\text{End}(1) = k$ (Saavedra [Sa]), i.e. dans la terminologie de [D4] une catégorie tensorielle sur k . Pour nos besoins, il suffirait du cas où \mathcal{T} est équivalente (avec son produit tensoriel et ses données d'associativité et de commutativité) à la catégorie $\text{Rep}(G)$ des représentations linéaires de dimension finie d'un schéma en

groupes affine G sur k . On peut paraphraser, dans \mathcal{T} , des rudiments de géométrie algébrique. Voici comment.

5.3. La catégorie $\text{Ind } \mathcal{T}$ des Ind-objets de \mathcal{T} (4.1) est munie d'un produit tensoriel déduit de celui de \mathcal{T} . Comme celui de \mathcal{T} , il est exact.

Un *anneau* (toujours supposé à *unité*) A de $\text{Ind } \mathcal{T}$ est un objet A de $\text{Ind } \mathcal{T}$ muni d'un produit $\cdot : A \otimes A \rightarrow A$ associatif et admettant une unité $1 \rightarrow A$ (qu'on notera encore 1). "Associatif" et "unité" peuvent s'exprimer par des diagrammes. Si on préfère s'exprimer par les formules usuelles, on y arrive comme suit. Les ind-objets de \mathcal{T} s'identifient aux foncteurs Ind-représentables: $\mathcal{T} \rightarrow \text{Ens}$, par $X \mapsto h_X : h_X(S) = \text{Hom}(S, X)$ (4.1.1). Le foncteur h_X prend même ses valeurs dans les k -espaces vectoriels. La donnée de $X \otimes Y \rightarrow Z$ équivaut à celle de $h_X(S) \times h_Y(T) \rightarrow h_Z(S \otimes T)$, bilinéaire et fonctoriel en S et T . L'associativité de $A \otimes A \rightarrow A$ s'écrit $(xy)z = x(yz)$ pour $x \in h_A(S)$, $y \in h_A(T)$, $z \in h_A(U)$ [donc $xy \in h_A(S \otimes T)$, $yz \in h_A(T \otimes U)$, $(xy)z$ et $x(yz) \in h_A(S \otimes T \otimes U)$]. Que $1 : 1 \rightarrow A$ soit une unité s'écrit $1x = x1 = x$ pour $x \in h_A(S)$ [on a $1 \in h_A(1)$, d'où $1x \in h_A(1 \otimes S) = h_A(S)$ et de même pour $x \cdot 1$].

On définit de façon évidente les A -modules à gauche et à droite, le produit tensoriel sur A , la commutativité de A . Par exemple: un A -module à gauche M est un objet de $\text{Ind}(\mathcal{T})$ muni de $\cdot : A \otimes M \rightarrow M$ avec $(ab)m = a(bm)$ et $1m = m$ (pour le sens de telles formules, cf. ci-dessus). On a $M \otimes N = \text{coker}(M \otimes A \otimes N \xrightarrow{\quad} M \otimes N)$.

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux commutatifs de $\text{Ind } \mathcal{T}$. On dit que B est *fidèlement plat* sur A si le foncteur $(A\text{-modules}) \rightarrow (B\text{-modules})$: $M \rightarrow B \otimes_A M$ est exact et fidèle. Le formalisme de la descente fidèlement plate des modules (SGA 1 VIII 1) s'applique alors tel quel: le foncteur $M \mapsto B \otimes_A M$ est une équivalence de la catégorie des A -modules avec celle de B -modules N munis d'une donnée de descente $(B \otimes_A B) \otimes_B N \xrightarrow{\sim} N \otimes_B (B \otimes_A B)$. La preuve de SGA 1 VIII 1 s'applique telle quelle, ou on peut se ramener au théorème de Barr-Beck (cf. [D4] 4.1 et 4.2).

Le morphisme structural $1 \otimes 1 \rightarrow 1$ fait de 1 un anneau de $\text{Ind } \mathcal{T}$ (même de \mathcal{T}) et pour tout anneau (à unité) A de $\text{Ind } \mathcal{T}$, on dispose d'un unique morphisme d'anneaux (l'unité): $1 \rightarrow A$. Si $A \neq 0$, ce morphisme est non nul, donc est un monomorphisme ([DM] 1.17) et le foncteur exact $M \mapsto A \otimes_1 M = A \otimes M$ est fidèle car $M \hookrightarrow A \otimes M$. Si $A \neq 0$, A est donc fidèlement plat sur 1 .

5.4. Pour disposer d'un langage plus géométrique, on appelle *catégorie des schémas affines en \mathcal{T}* la duale de celle des anneaux commutatifs à unité de $\text{Ind } \mathcal{T}$. On dira aussi: \mathcal{T} -schéma affine. On note $\text{Sp}(A)$ le \mathcal{T} -schéma affine défini par A . Les produits fibrés existent: ils correspondent au produit tensoriel. Un A -module M sera appelé un module sur $\text{Sp}(A)$, et pour $\text{Sp}(B)$ au-dessus de $\text{Sp}(A)$, le foncteur $M \mapsto B \otimes_A M$ sera appelé image inverse sur $\text{Sp}(B)$. Le formalisme (SGA 1 VIII 2) de la descente fidèlement plate pour les schémas affines s'applique.

On appelle schémas *vide* et *point* les schémas initiaux et finaux $\text{Sp}(0)$ et $\text{Sp}(1)$. On dit que $S = \text{Sp}(A)$ est *non vide* si $A \neq 0$. Si S est non vide, S est fidèlement plat sur le point.

Pour X et S des schémas affines en \mathcal{T} , l'ensemble $X(S)$ des S -points de X est $\text{Hom}(S, X)$.

Un \mathcal{T} -schéma en groupes affine est un objet en groupes de la catégorie des \mathcal{T} -schémas affines.

Soit H un \mathcal{T} -schéma en groupes affine. Un H -torseur est un \mathcal{T} -schéma affine P , non vide, muni d'une action à droite $\rho: P \times H \rightarrow P$, tel que pour tout S , $P(S)$ soit vide ou un torseur sous $H(S)$. La condition "vide ou torseur" signifie que pour tout S , $(\text{pr}_1, \rho): P(S) \times H(S) \rightarrow P(S) \times P(S)$ est bijectif, i.e. que $(\text{pr}_1, \rho): P \times H \rightarrow P \times P$ est un isomorphisme.

5.5 EXEMPLE: \mathcal{T} -schémas "vectoriels".

Pour M dans $\text{Ind}(\mathcal{T})$, posons $\Gamma(M) := \text{Hom}(1, M)$. Pour M un module sur $S = \text{Sp}(A)$, on a

$$\Gamma(M) = \text{Hom}(1, M) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_A(A, M)$$

et on appelle encore $\Gamma(M)$ les sections globales de M sur S . Prendre garde que le foncteur Γ peut ne pas être exact: pour $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$, c'est le foncteur des G -invariants.

Un objet X de \mathcal{T} définit sur chaque $S = \text{Sp}(A)$ un module $X_S := A \otimes X$ image inverse de X par $S \rightarrow P^t$. Le foncteur $S \mapsto \Gamma(X_S)$ est représentable:

$$\text{Hom}(1, A \otimes X) = \text{Hom}(X^\vee, A) = \text{Hom}_{\text{anneaux}}(\text{Sym}(\dot{X}^\vee), A).$$

On appelle encore X le schéma en \mathcal{T} $\text{Sp}(\text{Sym}(X^\vee))$ qui représente ce foncteur. Cette notation est parallèle à l'usage d'identifier un espace vectoriel

de dimension finie V sur k et le schéma $\text{Spec}(\text{Sym}^*(V^\vee))$, qui a V pour points sur k .

Le foncteur $S \mapsto \Gamma(X_S)$ est un foncteur en groupes. Le schéma en \mathcal{T} X est donc un schéma en groupes en \mathcal{T} . La structure de groupe correspond à la structure usuelle d'algèbre de Hopf de $\text{Sym}^*(X^\vee)$.

5.6 EXEMPLE: un k -schéma affine est un \mathcal{T} -schéma affine.

Puisque $\text{End}(1) = k$, la sous-catégorie de \mathcal{T} des sommes de copies de 1 est naturellement équivalente à celle des espaces vectoriels de dimension finie sur k . On identifiera souvent l'espace vectoriel V sur k à l'objet correspondant de \mathcal{T} . S'il y a lieu de préciser, on écrira $V \otimes 1$. Le choix d'une base $e_1 \cdots e_n$ de V identifie $V \otimes 1$ à 1^n .

Passant aux Ind-objets, on obtient

$$(\text{vectoriels sur } k) \longrightarrow \text{Ind } \mathcal{T}.$$

Par ce foncteur, un schéma affine sur k définit un schéma en \mathcal{T} . De même pour les schémas en groupes affines, torseurs Le point $\text{Spec}(k)$ définit le \mathcal{T} -schéma (P^t) .

5.7. Soient G un \mathcal{T} -schéma en groupes affines et X dans \mathcal{T} . Une *action* de G sur X est la donnée, pour tout S , d'une action de $G(S)$ sur le S -module X_S , compatible aux changements de base S'/S . Une telle action est définie par l'action de $\text{Id}_G \in G(G)$ sur X_G . Pour $G = \text{Sp}(A)$, c'est un morphisme A -linéaire $A \otimes X \rightarrow A \otimes X$, défini par $X \rightarrow A \otimes X$. Le morphisme $X \rightarrow A \otimes X$ doit faire de X un comodule sur l'algèbre de Hopf à counité A de $\text{Ind } \mathcal{T}$.

5.8 Le cas de $\text{Rep}(G)$.

Soient \dot{G} un schéma en groupes affine sur k et $\mathcal{T} := \text{Rep}(G)$ (5.2).

Les Ind-objets de \mathcal{T} sont les représentations linéaires – non nécessairement de dimension finie – de G (4.3.2). Les \mathcal{T} -schémas affines sont donc les schémas affines sur k munis d'une action de G , les \mathcal{T} -schémas en groupes affines H sont les schémas en groupes affines sur k munis d'une action de G , un H -torseur est un H -torseur (au sens ordinaire) G -équivariant, un \mathcal{T} -schéma vectoriel est le schéma affine équivariant espace d'une représentation de dimension finie de G et l'inclusion 5.6 des

k -schémas affines dans les \mathcal{T} -schémas affines est: munir de l'action triviale de G .

Cette interprétation permet routinement de ramener des questions sur les \mathcal{T} -schémas affines à des questions de géométrie algébrique usuelle.

5.9. Soit \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k . Rappelons qu'un *foncteur fibre* de \mathcal{T} sur un k -schéma S est un \otimes -foncteur ACU k -linéaire exact de \mathcal{T} dans les fibrés vectoriels sur S ([Sa], [DM] §3, [D4] 1.9). Pour $\pi : S' \rightarrow S$ un schéma au-dessus de S , l'image inverse sur S' d'un foncteur fibre ω sur S est le foncteur fibre $X \mapsto \pi^*\omega(X)$. Notation: $\omega_{S'}$, ou $\pi^*\omega$.

Si ω_1 et ω_2 sont deux foncteurs fibres sur S , le foncteur qui à $\pi : S' \rightarrow S$ attache l'ensemble des isomorphismes de $\pi^*\omega_1$ avec $\pi^*\omega_2$ est représentable par un schéma $\underline{\text{Isom}}_S(\omega_1, \omega_2)$ affine sur S . Autre notation: $\underline{\text{Isom}}(\omega_1, \omega_2)$. Pour ω un foncteur fibre sur S on note $\underline{\text{Aut}}_S(\omega)$ ou $\underline{\text{Aut}}(\omega)$ le S -schéma en groupes affine $\underline{\text{Isom}}_S(\omega, \omega)$.

Le résultat principal de [Sa] (cf. [DM] 2.11) est le suivant. Si ω est un foncteur fibre de \mathcal{T} sur k (i.e. sur $\text{Spec}(k)$), ω induit une équivalence

$$\mathcal{T} \longrightarrow \text{Rep}(\underline{\text{Aut}}(\omega)).$$

L'interprétation 5.8 est alors disponible. Elle a les inconvénients suivants.

- (a) Le groupe $\underline{\text{Aut}}(\omega)$ n'est souvent guère explicite, et voir les \mathcal{T} -schémas affines comme k -schémas affines équivariants n'est guère illuminant. Voir le paragraphe 7 pour d'autres interprétations.
- (b) Si on utilise 5.8 pour construire des \mathcal{T} -schémas affines, il peut ne pas être évident que le \mathcal{T} -schéma construit ne dépend pas du foncteur fibre choisi. Pour comment le rendre évident, voir 5.11.

5.10 EXEMPLE. Soient G un schéma en groupes affine sur k , X une représentation linéaire de dimension finie de G , et notons encore X le schéma en groupes vectoriel correspondant ($\text{Spec Sym}^*(X^\vee)$). Une extension

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

de la représentation unité (k avec action triviale) par X définit un X -torseur équivariant: l'image inverse de $1 \in k$ dans E . Cette construction est une équivalence de catégories.

On veut en déduire que pour \mathcal{T} comme en 5.9, et X dans \mathcal{T} , on a une équivalence

$$(\text{extensions de } 1 \text{ par } X) \xrightarrow{\sim} (X\text{-torseurs}).$$

On définit comme suit le foncteur: soit A le \mathcal{T} -schéma vectoriel défini par l'objet unité 1 . C'est aussi l'image par 5.6 de la droite affine $\text{Spec } k[T]$ sur k , et le point $T = 1$ définit un point $1 : P^t \rightarrow A$. Une extension E de 1 par X définit un schéma vectoriel E s'envoyant sur A . L'action par translations de E sur lui-même induit une action de X sur E qui stabilise la fibre en 1 , P , de $E \rightarrow A : P := E \times_A P^t$, rel. $1 : P^t \rightarrow A$. Cette fibre est le torseur voulu.

Cette description est indépendante du choix d'un foncteur fibre. L'interprétation 5.8 montre que c'est une équivalence.

5.11. Soit \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k . Les résultats essentiels de [D4], déjà énoncés dans [Sa] mais prouvés dans [Sa] seulement si \mathcal{T} admet un foncteur fibre sur k , i.e. est de la forme $\text{Rep}(G)$ (5.9), sont les suivants.

(a) Les foncteurs fibres forment une gerbe $\text{Fib}(\mathcal{T})$ sur les schémas sur k , pour la topologie fqc . Ceci signifie qu'ils forment un champ: possibilité de recoller un foncteur fibre donné localement sur S en un foncteur fibre sur S , que si ω_1 et ω_2 sont deux foncteurs fibres sur S , il existe T fidèlement plat quasi-compact sur S sur lequel ω_1 et ω_2 deviennent isomorphes, et qu'il existe sur un $S \neq \phi$ un foncteur fibre.

(b) Chaque objet X de \mathcal{T} définit un morphisme de champ $\omega \mapsto \omega(X)$
(foncteur fibres sur S variable) \longrightarrow (fibrés vectoriels sur S).

Cette construction est une équivalence de \mathcal{T} avec la catégorie $\text{Rep}(\text{Fib } \mathcal{T})$ de ces foncteurs: il "revient au même" de se donner X dans \mathcal{T} ou de se donner, pour chaque foncteur fibre ω sur un k -schéma S , un fibré vectoriel sur S , fonctoriellement en ω et de façon compatible aux changements de base $S' \rightarrow S$.

(c) Par passage aux Ind-objets, un foncteur fibre ω sur S définit un \otimes -foncteur, encore noté ω , de $\text{Ind } \mathcal{T}$ dans les faisceaux quasi-cohérents sur S . Chaque objet X de $\text{Ind } \mathcal{T}$ définit un morphisme de champs
(foncteurs fibres sur S variable) \longrightarrow (faisceaux quasi-cohérents sur S).

Cette construction est une équivalence de $\text{Ind } \mathcal{T}$ avec la catégorie de ces foncteurs.

Il résulte de (c) qu'il revient au même de se donner un \mathcal{T} -schéma affine X (resp. un \mathcal{T} -schéma en groupes affines G , resp un \mathcal{T} -torseur sous G) ou de se donner, pour chaque foncteur fibre ω sur un k -schéma S , un schéma affine X_ω sur S (resp un schéma en groupes affines G_ω , resp. un torseur sous G_ω), fonctoriellement en ω et de façon compatible aux changements de base $S' \rightarrow S$. A $X = \text{Sp}(A)$, on attache le système des $\omega(X) := \text{Spec}(\omega(A))$.

En particulier, pour construire un morphisme $F : X \rightarrow Y$ entre \mathcal{T} -schémas affines, il suffit pour tout foncteur fibre ω de construire fonctoriellement en ω un morphisme de $\omega(X)$ dans $\omega(Y)$. Si ω est un foncteur fibre sur S , il suffit pour cela, pour tout S -schéma T , de construire fonctoriellement en T une application de $\omega(X)(T) := \text{Hom}_S(T, \omega(X))$ dans $\omega(Y)(T)$. Pour écrire une telle construction, nous "prendrons un point de X ", i.e. $x \in \omega(X)(T)$ et construirons son image.

5.12 REMARQUE. Pour (X_ω) comme ci-dessus, chaque X_ω/S a automatiquement la propriété suivante (portant sur X/S)

(5.12.1) Il existe une extension k' de k , et $\pi : T \rightarrow S$ fidèlement plat sur S , tel que l'image inverse $\pi^* X = T \times_S X$ de X sur T soit l'image inverse sur T d'un k' -schéma, par un morphisme de T dans k' .

En effet, il existe un foncteur fibre ω_0 sur une extension k' de k et, parce que $\text{Fib}(\mathcal{T})$ est une gerbe, il existe T fidèlement plat sur $S \times \text{Spec}(k')$ sur lequel ω et ω_0 deviennent isomorphe. Sur ce T , X_ω et X_{ω_0} ont des images inverses isomorphes.

De même pour des schémas munis de données auxiliaires.

5.13. Soit Ξ une construction du type suivant: à des schémas affines sur un k -schéma S , munis de données auxiliaires de types convenables, elle attache un schéma affine sur S , munis de données auxiliaires. Il suffit que Ξ soit définie pour des schémas, munis de données auxiliaires, vérifiant (5.12.1). On suppose Ξ compatible aux changements de base.

Par 5.11, il a alors un sens d'appliquer Ξ à des \mathcal{T} -schémas affines, munis de données auxiliaires du type requis: pour appliquer Ξ aux \mathcal{T} -schémas X_i , on l'applique aux $\omega(X_i)$; le système des $Y_\omega = \Xi(\omega(X_i))$ provient par 5.11 d'un \mathcal{T} -schéma Y , qu'on appelle $\Xi(X_i)$.

De même, si P est une propriété de schémas affines sur S munis de

données auxiliaires (vérifiant (5.12.1) si on veut) qui est locale pour la topologie $f\text{pqc}$, il a un sens de considérer P “dans \mathcal{T} ”.

Plutôt que de préciser le sens de “construction”, de “donnée auxiliaire” et de “propriété”, donnons des exemples.

5.14 EXEMPLES. (i) G est un schéma en groupes affine sur S , $\Xi(G)$ est le $N^{\text{ième}}$ sous-groupe $Z^N(G)$ de G pour la série centrale descendante, ou le quotient $G^{(N)} := G/Z^N(G)$. Cette construction n'a pas un sens compatible aux changements de base pour G/S arbitraire, mais elle en a un si le schéma en groupes affine G sur S vérifie (5.12.1).

(ii) H est un sous-groupe distingué de G et $\Xi(G, H)$ est G/H . Même si H n'est pas distingué, on peut considérer G/H si affine. La même remarque qu'en (i) s'applique.

(iii) $f : G_1 \rightarrow G_2$ est un morphisme de schémas en groupes affines sur S , P_1 un torseur sous G_1 et $\Xi(G_1, G_2, P_1)$ est le G_2 -torseur qui s'en déduit en poussant par f .

(iv) G est un schéma en groupes affine sur S et P est la propriété “ G est unipotent”.

5.15 APPLICATION. Sur une base S quelconque, la donnée d'une extension \mathcal{E} de \mathcal{O} par un fibré vectoriel \mathcal{V} équivaut à celle d'un torseur sous le schéma en groupes vectoriel défini par \mathcal{V} . Cette construction est compatible aux changements de base. Il en résulte que dans toute catégorie tannakienne \mathcal{T} , la donnée d'une extension E de 1 par un objet V équivaut à celle d'un torseur sous le \mathcal{T} -schéma vectoriel V . On l'avait déjà prouvé en 5.10 pour \mathcal{T} admettant un foncteur fibre sur k .

5.16. Voici la relation entre les points de vue 5.8 et 5.11, pour $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$. Soit ω_0 le foncteur fibre “espace vectoriel sous-jacent”. Pour ω un foncteur fibre sur S , $\text{Isom}(\omega_0, \omega)$ est un G -torseur P sur S . Réciproquement, un G -torseur P définit le foncteur fibre $\omega_P : V \mapsto V$ tordu par P sur S . Si $P(S) \neq \phi$, le tordu V^P est le fibré vectoriel sur S muni pour chaque $p \in P(S)$ de $\rho(p) : V \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} V^P$, avec pour $g \in G(S) : \rho(pg) = \rho(p)\rho(g)$. Le cas général est traité par descente. On a ainsi une équivalence

$$\text{Fib}(\text{Rep}(G)) = (\text{G-torseurs sur } S \text{ variable}).$$

Si X est un \mathcal{T} -schéma, identifié par 5.8 à un schéma affine G -équivariant, pour tout foncteur fibre ω_P , $\omega_P(X)$ est le tordu X^P de X par P .

Notons pour usage ultérieur le

5.16.1 LEMME. $\underline{\text{Aut}}(\omega_P) = \underline{\text{Aut}}(P)$ est G^P , pour l'action intérieure de G sur lui-même.

PREUVE. Si $P(S) \neq \emptyset$, chaque $p \in P(S)$ définit un isomorphisme $\rho(p)$ de P avec le G torseur trivial G , donc de $\text{Aut}(P)$ avec G (translations à gauche de G). On a $\rho(pg) = \rho(p) \circ \text{int}(g)$: l'automorphisme de P qui envoie pg sur pgh envoie p sur $pghg^{-1}$. Ceci vérifie 5.16.1 pour $P(S) \neq \emptyset$ et le cas général en résulte par descente.

5.17. Le passage 5.11 de \mathcal{T} à $\text{Fib}(\mathcal{T})$ a une réciproque ([D4] 1.12 et §3). Soit \mathcal{G} une gerbe à lien affine sur les schémas sur k : on suppose que pour ω un objet de \mathcal{G} sur S , le foncteur qui à $\pi : S' \rightarrow S$ attache $\text{Aut}(\pi^*\omega)$ est représentable par un schéma en groupes affine sur S . Soit $\text{Rep}(\mathcal{G})$ la catégorie des morphismes de champs

$$\mathcal{G} \longrightarrow (\text{fibrés vectoriels sur } S \text{ variable}) .$$

Alors $\text{Rep}(\mathcal{G})$ est une catégorie tannakienne, et $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{Fib}(\text{Rep}(\mathcal{G}))$.

5.18. Par 5.11 et 5.17, on a un dictionnaire entre catégories tannakiennes sur k et gerbes à lien affine. On définit le *produit tensoriel* de deux catégories tannakiennes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 par

$$\text{Fib}(\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2) \sim \text{Fib}(\mathcal{T}_1) \times \text{Fib}(\mathcal{T}_2) .$$

La donnée d'un objet X de $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ équivaut donc à celle, pour ω_1 et ω_2 des foncteurs fibres sur S de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , d'un fibré vectoriel X_{ω_1, ω_2} sur S , la formation de X_{ω_1, ω_2} étant fonctorielle en ω_1 et ω_2 et compatible à tout changement de base.

On dispose d'un produit tensoriel

$$\boxtimes : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 :$$

à X_1 et X_2 attacher le système des $\omega_1(X_1) \otimes \omega_2(X_2)$. Dans [D4] §5, on montre que $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ est le réceptacle universel d'un tel produit tensoriel, avec des propriétés convenables.

Si T_i est $\text{Rep}(G_i)$, on a $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2 \simeq \text{Rep}(G_1 \times G_2)$.

§6. Le groupe fondamental d'une catégorie tannakienne.

Soit \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k . Pour chaque foncteur fibre ω sur un k -schéma S , $\underline{\text{Aut}}_S(\omega)$ (5.9) est un schéma en groupes affine sur S . Sa formation est compatible aux changements de base. Par 5.11, les $\underline{\text{Aut}}_S(\omega)$ proviennent d'un \mathcal{T} -schéma en groupes affines.

6.1 DÉFINITION. *Le groupe fondamental $\pi(\mathcal{T})$ de \mathcal{T} est le \mathcal{T} -schéma en groupes affine qui vérifie fonctoriellement*

$$(6.1.1) \quad \omega(\pi(\mathcal{T})) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}(\omega).$$

Soit X dans \mathcal{T} . Pour chaque foncteur fibre ω sur S , $\omega(\pi(\mathcal{T})) = \underline{\text{Aut}}(\omega)$ agit sur $\omega(X)$. On en déduit une action (5.7) de $\pi(\mathcal{T})$ sur X , fonctorielle en X et compatible au produit tensoriel. Par passage aux ind-objets, ces actions fournissent une action de $\pi(\mathcal{T})$ sur tout ind-objet. On en déduit une action sur tout \mathcal{T} -schéma affine. L'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur le \mathcal{T} -schéma $\pi(\mathcal{T})$ est l'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur lui-même par automorphismes intérieurs. En effet, pour tout foncteur fibre ω l'action par fonctorialité de $\text{Aut}(\omega)$ sur lui-même est son action par automorphismes intérieurs.

6.2. Soit X un espace topologique connexe, localement connexe et localement simplement connexe. Le vocabulaire 6.1 provient de l'analogie suivante.

\mathcal{T}	X
objet de \mathcal{T}	revêtement de X $(=$ faisceau localement constant $=$ système local, sur X)
foncteur fibre ω_0	point $x_0 \in X$
$\underline{\text{Aut}}(\omega_0)$	$\pi_1(X, x_0)$
$\pi(\mathcal{T})$	système local des $\pi_1(X, x)$
action de $\pi(\mathcal{T})$ sur Y dans \mathcal{T}	action du système local des π_1 sur un faisceau localement constant

Cette analogie, et celle entre le groupe de Galois et un π_1 (SGA 1 V 8.1) ont conduit A. Grothendieck à définir $\pi(\mathcal{T})$ et, pour \mathcal{T} la catégorie des motifs sur k , à l'appeler le *groupe de Galois motivique de k* .

6.3 EXEMPLE. Soient G un schéma en groupes affine sur k et $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$. D'après 5.16.1, le groupe fondamental $\pi(\mathcal{T})$, vu comme un schéma en groupes affine G -équivariant, est G muni de son action intérieure sur lui-même. L'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur une représentation V de G est l'action donnée de G . Elle est G -équivariante:

$$h(gv) = hgh^{-1} \cdot hv .$$

6.4. Soit $u : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}$ un \otimes -foncteur exact k -linéaire entre catégories tannakiennes sur k . Pour tout foncteur fibre ω de \mathcal{T} sur un k -schéma S , $\omega \circ u$ est un foncteur fibre de \mathcal{T}_1 sur S . On dispose de

$$(6.4.1) \quad \underline{\text{Aut}}(\omega) \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(\omega \circ u) .$$

Le \mathcal{T}_1 -schéma en groupes $\pi(\mathcal{T}_1)$ fournit, par application de u , un \mathcal{T} -schéma en groupes $u\pi(\mathcal{T})$ et (6.4.1) est un morphisme fonctoriel en ω de $\omega(\pi(\mathcal{T}))$ dans $\omega \circ u(\pi(\mathcal{T})) = \omega(u(\pi(\mathcal{T}_1)))$. Par 5.11, il provient d'un morphisme de \mathcal{T} -schémas en groupes

$$(6.4.2) \quad \pi(\mathcal{T}) \longrightarrow u\pi(\mathcal{T}_1) .$$

Pour tout objet X_1 de \mathcal{T}_1 , l'action 6.1 de $\pi(\mathcal{T}_1)$ sur X_1 induit une action de $u\pi(\mathcal{T}_1)$ sur uX_1 . Via (6.4.2), cette action induit l'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur l'objet uX_1 de \mathcal{T} : tel est en effet le cas après application de tout foncteur fibre.

6.5 PROPOSITION. Avec les notations précédentes, u induit une équivalence de \mathcal{T}_1 avec la catégorie des objets de \mathcal{T} munis d'une action de $u\pi(\mathcal{T}_1)$ factorisant l'action de $\pi(\mathcal{T})$.

Nous ne donnerons la preuve que pour \mathcal{T} neutre. Le cas général résulte de [D4] 8.17.

PREUVE (pour $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$). Soit ω le foncteur fibre espace vectoriel sous-jacent. Soit $G_1 = \underline{\text{Aut}}(\omega \circ u)$. Les morphismes (6.4.1) définissent

$$(6.5.1) \quad f : G \longrightarrow G_1 ,$$

également déduit de (6.4.2) par application de ω . Via les équivalences $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$, $\mathcal{T}_1 = \text{Rep}(G_1)$, le foncteur u est la restriction à G (par f)

de l'action de G_1 et 6.5 se réduit à la trivialité suivante. Pour V un espace vectoriel, la donnée d'une action de G_1 sur V équivaut à celle d'une action de G , plus celle d'une action G -équivariante de G_1 qui factorise l'action de G .

6.6. Bien que ce ne soit pas nécessaire, supposons encore \mathcal{T} neutre. D'après [Sa] II4.3.2 (g), si u est pleinement fidèle et identifie \mathcal{T}_1 à une sous-catégorie pleine de \mathcal{T} stable par sous-quotients, les morphismes (6.4.1) (6.4.2) sont des épimorphismes (= sont fidèlement plats). Si $H = \text{Ker}(\pi(\mathcal{T}) \rightarrow u\pi(\mathcal{T}_1))$, 6.5 identifie \mathcal{T}_1 à la sous-catégorie de \mathcal{T} formée des objets sur lesquels l'action 6.1 de $\pi(\mathcal{T})$ induit une action triviale de H .

6.7 EXEMPLES. (i) Pour \mathcal{T}_1 la catégorie des k -espaces vectoriels, on a $\pi(\mathcal{T}_1) = \{e\}$ et la catégorie des k -vectoriels s'identifie par $V \mapsto V \otimes 1$ (5.6) à celle des objets de \mathcal{T} sur lesquels $\pi(\mathcal{T})$ agit trivialement.

(ii) Si k est de caractéristique 0, et que ω_0 est un foncteur fibre sur k , les objets semi-simples de la catégorie abélienne des représentations du schéma en groupes affine $\underline{\text{Aut}}(\omega_0)$ sont les représentations sur lequel le radical unipotent $\mathcal{R}_u \underline{\text{Aut}}(\omega_0)$ agit trivialement. La sous-catégorie $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ des objets semi-simples est donc stable par produit tensoriel. Le morphisme (6.4.2) correspondant est

$$\pi(\mathcal{T}) \longrightarrow \pi(\mathcal{T}) / \mathcal{R}_u \pi(\mathcal{T})$$

(pour la définition du second membre, voir 5.13).

(iii) Soit T un objet de dimension 1 de \mathcal{T} . Une représentation ρ de \mathbb{G}_m est la même chose qu'un espace vectoriel gradué $V = \bigoplus V^k$, avec $(\lambda)v^k = \lambda^k v^k$ pour $v^k \in V^k$, et on définit

$$u : \text{Rep}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathcal{T}$$

par $V \mapsto \bigoplus (V^k \otimes T^{\otimes k})$. De là, un morphisme

$$(6.7.1) \qquad \qquad \qquad \pi(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

tel que l'action de $\pi(\mathcal{T})$ sur T se factorise par \mathbb{G}_m , avec λ agissant par multiplication par λ . Dans (6.7.1), on regarde \mathbb{G}_m comme un \mathcal{T} -schéma en groupes par 5.6.

Si, pour tout $n > 0$ on a $\text{Hom}(1, T^{\otimes n}) = 0$, on peut appliquer 6.6 et (6.7.1) est un épimorphisme.

(iv) Si les $T^{\otimes n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) sont les seuls objets simples de \mathcal{T} , et sont deux à deux non isomorphes, on conclut de (ii) et (iii) (du moins en caractéristique 0) que (6.7.1) fait de $\pi(\mathcal{T})$ une extension de \mathbb{G}_m par un groupe unipotent.

6.8. Soit \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k de caractéristique 0 et, pour simplifier, supposons encore \mathcal{T} neutre. Soit \mathcal{T}^{ss} la catégorie des objets semi-simples de \mathcal{T} . Le \mathcal{T} -schéma en groupes $R_u\pi(\mathcal{T})$ agit trivialement sur $(R_u\pi(\mathcal{T}))^{ab}$, qui est donc un \mathcal{T}^{ss} -schéma en groupes. Il est unipotent commutatif et on peut l'identifier à un pro-objet de \mathcal{T}^{ss} (soit par Lie cf. 4.8, soit en l'écrivant comme limite projective de \mathcal{T} -schémas en groupes vectoriels).

6.9 PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, pour X semi-simple dans \mathcal{T} , on a*

$$(6.9.1) \quad \text{Ext}^1(1, X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}((R_u\pi(\mathcal{T}))^{ab}, X) .$$

DÉFINITIONS. Dans 6.9.1, au membre de gauche X est un objet de \mathcal{T} et au membre de droite il désigne le \mathcal{T} -schéma vectoriel correspondant. On a

$$\text{Hom}(R_u\pi(\mathcal{T}), X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}((R_u\pi(\mathcal{T}))^{ab}, X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Lie}(R_u\pi(\mathcal{T}))^{ab}, X) .$$

Si un groupe G agit sur une extension E de A par B et agit trivialement sur A et B , les $\rho(g) - 1 : E \rightarrow E$ se factorisent par des morphismes de A vers B . Le principe 5.11, 5.13 permet de répéter ceci “dans \mathcal{T} ”.

Si E est une extension de 1 par X , l'action 6.1 de $R_u\pi(\mathcal{T}) \subset \pi(\mathcal{T})$ sur E est triviale sur 1 et X (6.7 (ii)). Elle définit un morphisme

$$R_u\pi(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{Hom}(1, X) = X .$$

Cette construction définit la flèche 6.9.1.

PREUVE. *Injectivité* : si la classe de l'extension E a une image triviale par (6.9.1), l'action de $R_u\pi(\mathcal{T})$ sur E est triviale: E est semi-simple et l'extension est triviale.

Surjectivité : on peut supposer que $\mathcal{T} = \text{Rep}(G)$. Ecrivons G comme un produit semi-direct d'un schéma en groupe proréductif G^{ss} par $R_u G$

(décomposition de Levi). Pour (X, ρ) une représentation de $G^{ss} = G/\mathcal{R}_u G$ et a un G^{ss} -morphisme de $\mathcal{R}_u G^{ab}$ dans X , on définit une extension E de la représentation triviale par la représentation X en faisant agir $u \cdot g$ ($g \in G^{ss}$, $u \in \mathcal{R}_u G$) sur $1 \oplus X$ par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(u) & \rho(g) \end{pmatrix}$. Son image par (6.9.1) est le morphisme a .

6.10 NOTATION. Pour V un espace vectoriel sur k et X dans \mathcal{T} , $\underline{\text{Hom}}(V, X)$ est le pro-objet de \mathcal{T} limite projective des $W^\vee \otimes X$ pour W un sous-espace de dimension finie de V .

EXEMPLE. Soit \mathcal{T} la catégorie $\text{Rep}(\mathbb{G}_m)$. Soit $T(n)$ l'espace vectoriel k sur lequel $\lambda \in \mathbb{G}_m$ agit par multiplication par λ^n . Pour tout pro-objet X de \mathcal{T} , si on pose $V(n) := \text{Hom}(X, T(n))$, on a

$$(6.10.1) \quad X = \prod_n \underline{\text{Hom}}(V(n), T(n))$$

6.11. Soient \mathcal{T} tannakienne neutre sur k de caractéristique 0 et T dans \mathcal{T} . On suppose T de rang un et on pose $T(n) := T^{\otimes n}$. On suppose que le morphisme 6.7(iii) de $\pi(\mathcal{T})$ dans \mathbb{G}_m est un épimorphisme de noyau unipotent, i.e. que les conditions de 6.7(iv) sont remplies. Soit $U := \text{Ker}(\pi(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{G}_m)$. Appliquant (6.9) (6.10) et identifiant U^{ab} à son algèbre de Lie, on trouve

6.12 PROPOSITION. Avec les hypothèses et notations de 6.11

$$U/U^{ab} = \prod \underline{\text{Hom}}(\text{Ext}^1(1, T(n)), T(n)).$$

6.13. A deux foncteurs fibres ω_1, ω_2 de \mathcal{T} sur S attachons le schéma affine sur S $\underline{\text{Isom}}_S(\omega_2, \omega_1)$. Cette construction est compatible aux changements de base. Par (5.18) et (5.11), elle définit un $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ -schéma $G(\mathcal{T})$, avec

$$(6.13.1) \quad (\omega_1 \otimes \omega_2)(G(\mathcal{T})) = \underline{\text{Isom}}_S(\omega_2, \omega_1).$$

C'est le *groupoïde fondamental* de \mathcal{T} .

Pour toute application $\varphi : I \rightarrow J$ entre ensembles finis, on définit $T(\varphi) : \mathcal{T}^{\otimes I} \rightarrow \mathcal{T}^{\otimes J}$ par

$$T(\varphi)(\boxtimes X_i) = \boxtimes_j \left(\bigotimes_{\varphi(i)=j} X_i \right),$$

où le produit tensoriel sur $i \in \varphi^{-1}(j)$ est pris dans \mathcal{T} , et est 1 si $\varphi^{-1}(j) = \emptyset$.

Posons $j_{a,b} = T(\varphi)$ pour $\varphi : \{1,2\} \rightarrow \{1,2,3\} : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b$. La composition des isomorphismes définit

$$(6.13.2) \quad j_{1,2}(G(\mathcal{T})) \times j_{2,3}(G(\mathcal{T})) \longrightarrow j_{1,3}(G(\mathcal{T}))$$

dans $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Pour $\varphi : \{1,2\} \rightarrow \{1\}$, $T(\varphi)$ est $T : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : X \boxtimes_j Y \mapsto X \otimes_{\mathcal{T}} Y$. On a

$$(6.13.3) \quad T(G(\mathcal{T})) = \pi(\mathcal{T}).$$

Pour tout foncteur fibre ω sur S , $(\text{pr}_1^*\omega, \text{pr}_2^*\omega)$ définit un foncteur fibre $\omega \boxtimes \omega$ de $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ sur $S \times S$. L'image de $G(\mathcal{T})$ par $\omega \boxtimes \omega$ est le groupoïde $\underline{\text{Aut}}_k(\omega) := \underline{\text{Isom}}_{S \times S}(\text{pr}_2^*\omega, \text{pr}_1^*\omega)$ sur S et la structure de groupoïde est déduite de (6.13.2).

6.14. Nous donnons dans [D4] la description suivante de l'algèbre Λ de $\text{Ind}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$ dont $G(\mathcal{T})$ est le spectre (0.5): comme Ind-objet, c'est le réceptacle universel de morphismes

$$(6.14.1) \quad X^\vee \otimes_k X \longrightarrow \Lambda \quad (X \text{ dans } \mathcal{T})$$

rendant pour tout $f : X \rightarrow Y$ le diagramme

$$(6.14.2) \quad \begin{array}{ccc} Y^\vee \otimes X & \xrightarrow{f^t \otimes 1} & X^\vee \otimes X \\ \downarrow 1 \otimes f & & \downarrow \\ Y^\vee \otimes Y & \longrightarrow & \Lambda \end{array}$$

commutatif.

Pour tout foncteur fibre ω sur S , le groupoïde $\underline{\text{Aut}}_k(\omega) := \underline{\text{Isom}}_{S \times S}(\text{pr}_2^*\omega, \text{pr}_1^*\omega)$ est donc le spectre de $\omega \boxtimes \omega(\Lambda)$: le faisceau quasi-cohérent d'algèbres L sur $S \times S$ qui, en tant que faisceau quasi-cohérent, est réceptacle universel de morphismes $\text{pr}_1^*\omega(X)^\vee \otimes \text{pr}_2^*\omega(X) \rightarrow L$ (X dans \mathcal{T}), vérifiant une compatibilité analogue à (6.14.2) pour tout $f : X \rightarrow Y$.

§7. Géométrie algébrique dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations: interprétations.

7.1. Le but de ce paragraphe est de donner une description directe de ce qu'est un \mathcal{T} -schéma en groupes unipotent, et un torseur sous un tel groupe, lorsque \mathcal{T} est la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations lisses sur un ouvert $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) - S$ de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. A partir de 7.29, nous considérerons aussi le cas de la catégorie des systèmes de réalisations sur une base S lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Nous utiliserons ces descriptions pour définir une notion de structure entière.

Si le \mathcal{T} -schéma en groupes unipotent U est abélien, donc un \mathcal{T} -schéma vectoriel, un U -torseur est simplement une extension de 1 par U . Ces extensions ont été décrites en 2.5. La description à laquelle nous arriverons sera similaire à celle de 2.5.

7.2. Dans toute catégorie tannakienne \mathcal{T} sur k de caractéristique 0, la donnée d'un \mathcal{T} -schéma en groupes unipotent (5.14 (iv)) U équivaut à celle d'une algèbre de Lie nilpotente de \mathcal{T} , par $U \mapsto \mathrm{Lie} U$.

Prenons pour \mathcal{T} la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations lisses sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) - S$ (1.15). Soient U un \mathcal{T} -groupe algébrique unipotent et L son algèbre de Lie: un système de réalisations, muni de $[] : L \otimes L \rightarrow L$ vérifiant les axiomes des algèbres de Lie, et nilpotent. Ceci revient à dire que dans une réalisation ω (donc dans toutes) l'algèbre de Lie ωL est nilpotente. A U , ou à $L = \mathrm{Lie} U$, on attache les objets suivants.

(7.2.1) Le schéma en groupes unipotent U_B sur \mathbf{Q} , déduit de U par application du foncteur fibre réalisation de Betti. Son algèbre de Lie est $(\mathrm{Lie} U)_B$.

(7.2.2) Le schéma en groupes unipotent U_{DR} sur \mathbf{Q} , déduit de U par application du foncteur fibre DR, d'algèbre de Lie $(\mathrm{Lie} U)_{\mathrm{DR}}$.

(7.2.3) Pour $i \leq 0$, $W_i(\mathrm{Lie} U)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie} U$, distinguée dans $W_0 \mathrm{Lie} U$. On note $W_i U$ les sous-groupes correspondants.

(7.2.4) Pour $i \geq 0$, $F^i(\mathrm{Lie} U_{\mathrm{DR}})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie} U_{\mathrm{DR}}$, distinguée dans $F^0 \mathrm{Lie} U_{\mathrm{DR}}$. On note $F^i U_{\mathrm{DR}}$ les sous-groupes correspondants.

(7.2.5) A l'isomorphisme de comparaison entre les complexifiés de $(\text{Lie } U)_B$ et $(\text{Lie } U)_{\text{DR}}$ correspond un isomorphisme entre les complexifiés de U_B et U_{DR} .

(7.2.6) A l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\text{Lie } U_B \otimes \mathbb{A}^f$ correspond une action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $U_B(\mathbb{A}^f)$. L'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $U_B(\mathbb{Q}_\ell)$ est non ramifiée en dehors de S et ℓ .

(7.2.7) Le Frobenius cristallin de $\text{Lie}(U_{\text{DR}}) \otimes \mathbb{Q}_p$ ($p \notin S$) définit un Frobenius cristallin $\phi_p : U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$.

(7.2.8) L'involution F_∞ de $(\text{Lie } U)_B$ définit une involution F_∞ de U_B . La conjugaison complexe de $U_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ induit F_∞ sur $U_B(\mathbb{Q}) \subset U_B(\mathbb{C}) \simeq U_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ (7.2.5). Sur $U_B(\mathbb{A}^f)$, F_∞ agit comme la conjugaison complexe $c \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Ces objets attachés à U nous suffiront pour décrire ce qu'est un U -torseur (7.20, 7.21).

7.3. Si G est un groupe algébrique unipotent sur \mathbb{Q} , $G(\mathbb{Q})$ est dense dans $G(\mathbb{A}^f)$, tout sous-groupe arithmétique de G est de congruence et les sous-groupes de congruence Γ de G correspondent biunivoquement aux sous-groupes compact ouvert V de $G(\mathbb{A}^f)$: à Γ attacher son adhérence Γ^- , à V sa trace sur $G(\mathbb{Q})$. Par abus de langage, nous appellerons *structure entière* sur G la donnée d'un sous-groupe de congruence Γ de $G(\mathbb{Q})$. L'abus est qu'un tel sous-groupe ne correspond en général pas à la donnée d'un groupe algébrique unipotent sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ de fibre générale G dont Γ soit le groupe des points entiers.

7.4 DÉFINITION. Soit U un schéma en groupe unipotent en la catégorie tannakienne T des systèmes de réalisations sur un ouvert de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Une *structure entière* sur U est une structure entière (7.3) Γ sur U_B , stable par F_∞ et d'adhérence $\Gamma^- \subset U_B(\mathbb{A}^f)$ stable sous $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

NOTATION: Γ se notera $U_{\mathbf{Z}}$, Γ^- se notera $U_{\widehat{\mathbf{Z}}}$; c'est le produit des adhérances $U_{\mathbf{Z}_\ell}$ de Γ dans les $U_B(\mathbb{Q}_\ell)$.

La notation U_B restera réservée au groupe algébrique sur \mathbb{Q} réalisation de Betti de U . Pour U un T -schéma en groupes vectoriel, ceci est en conflit avec la notation 1.23.

VARIANTE. Soit U un \mathcal{T} -schéma en groupe prounipotent. C'est une limite projective de \mathcal{T} -schémas en groupes unipotents U_α . Une *structure entière* sur U est un système de structures entières Γ_α sur les U_α , avec Γ_α égal à l'image de Γ_β pour $\beta > \alpha$.

7.5. Soit $G = \text{Spec}(A)$ un schéma en groupes affine sur un corps k . Supposons A munie d'une filtration décroissante F , compatible à la structure d'algèbre de Hopf à antipode. Ceci signifie que les applications multiplication: $A \otimes A \rightarrow A$, comultiplication: $A \rightarrow A \otimes A : f(g) \mapsto f(gh)$, unité: $k \rightarrow A : 1 \mapsto 1$, counité: $A \rightarrow k : f \mapsto f(e)$ et antipode: $A \rightarrow A : f(g) \mapsto f(g^{-1})$ sont compatibles aux filtrations. Pour "unité" et "counité", k est pris purement de filtration 0. Le groupe G agit sur $A = \Gamma(G, \mathcal{O})$ par translations à droite. Soit F^0G le sous-schéma en groupes de G qui respecte la filtration F de A . Pour $i \geq 0$, soit F^iG le sous-groupe de F^0G qui agit trivialement sur les F^k/F^{k+i} . Que A soit de dimension infinie ne doit pas inquiéter: A est réunion de ses sous-représentations de dimension finie V , et il revient au même d'imposer la condition sur chaque V , muni de la filtration induite.

Soit I l'idéal d'augmentation: le noyau de la counité $A \rightarrow k : f \mapsto f(e)$. On a $A = I \oplus k$, et cette décomposition est compatible aux filtrations. On munit I/I^2 de la filtration quotient de celle de I et son dual $\text{Lie}(G)$ de la filtration duale

$$F^i\text{Lie } G := \text{orthogonal de } F^{1-i}(I/I^2).$$

Les arguments de [Sa] IV 2.1.4.1 prouvent le lemme suivant

7.6 LEMME. Avec les notations précédentes

- (i) F^iG est défini par l'idéal engendré par $F^{1-i}(I)$.
- (ii) F^0G est défini par l'idéal engendré par F^1A .
- (iii) $\text{Lie } F^iG = F^i\text{Lie } G$.

PREUVE. Une représentation (V, ρ) de G est un comodule à droite $V \xrightarrow{\rho} V \otimes A$. Pour $v \in V$ et α une forme linéaire sur V , le coefficient $\alpha(gv)$ est $\alpha\rho(v) \in A$. La représentation de G sur A est la comultiplication de A . Les équations qui définissent F^iG sont donc les

$$\alpha\rho(v) - \langle \alpha, v \rangle$$

pour $v \in F^a A$, $\alpha \in A^\vee$ nul sur $F^{a+i} A$. Noter que $\langle \alpha, v \rangle$ est la valeur en e de $\alpha\rho(v) \in A$. Pour obtenir un ensemble générateur de l'idéal de A qui définit $F^i G$ dans G , on doit donc prendre la somme des $F^a A \otimes (F^{a+i} A)^\perp$, son image J dans A par $A^\vee \otimes A \rightarrow A : v, \alpha \mapsto \alpha\rho(v)$ et projeter sur I . Par définition, $F^i(A^\vee) = (F^{1-i} A)^\perp \subset A^\vee$. L'application $A^\vee \otimes A \rightarrow A$ est compatible à F , d'où $J \subset F^{1-i} A$. On a égalité : prendre pour α la counité, elle est dans $F^0 A^\vee$. Projettant J sur I , obtient (i).

L'assertion (ii) en résulte : dans la décomposition $A = k \oplus I$, k est purement de filtration 0 et $F^1(A) = F^1(I)$.

Calculons l'image de l'idéal engendré par $F^a I$ dans I/I^2 . On a $A \cdot F^a I = F^a I + I \cdot F^a I$ et $I \cdot F^a I \subset I^2$: l'image est celle, $F^a(I/I^2)$, de $F^a I$. Pour $a = 1 - i$, on en déduit (iii).

7.7. Avec les notations de 7.5, soit $P = \text{Spec}(B)$ un G -torseur. Une filtration F de B est dite *compatible* à la structure de torseur si les applications structurales multiplication : $B \otimes B \rightarrow B$, unité : $k \rightarrow B$ et $B \rightarrow B \otimes A : f(p) \mapsto f(pg)$ sont compatibles aux filtrations. Voici une méthode pour construire de telles filtrations.

Si H est un sous-groupe de G , une réduction à H du groupe structural G de P est $P_0 \subset P$ qui soit H stable et un H -torseur : P se déduit de P_0 en poussant par $H \rightarrow G$.

Supposons donnée une réduction $P_0 \subset P$ du groupe structural de P à $F^0 G$. Le groupe $F^0 G$ agit sur A par translations à droite et B se déduit de A en tordant par P_0 . Le groupe $F^0 G$ respecte la filtration F de A et $B = A^{P_0}$ hérite donc d'une filtration F^{P_0} . Si $p \in P_0(k)$, l'isomorphisme $g \mapsto pg$ de G avec P induit un isomorphisme $A \rightarrow B$ qui envoie F sur F^{P_0} . Pour P_0 non trivial, la même description vaut après une extension des scalaires qui trivialise P_0 .

7.7.1 LEMME. (i) La filtration F^{P_0} attachée à une réduction P_0 du groupe structural de P à $F^0 G$ est compatible à la structure de torseur.

(ii) Elle détermine $P_0 : P_0 \subset P$ est défini par l'idéal $(F^1 B)$ de B .

L'assertion (i) est laissée au lecteur; (ii) résulte de 7.6 (iii)

Notation: $F^0 P := P_0$.

Pour qu'une filtration F de B soit déduite comme ci-dessus d'une réduction à $F^0 G$ du groupe structural de P , il faut et il suffit que (a)

$\text{Spec}(B/(F^1B)) \subset P$ est stable par F^0G et un F^0G -torseur. Notation: F^0P . (b) La filtration de B déduite de F^0P coïncide avec celle qui est donnée. Les conditions (a),(b) étant invariantes par extension des scalaires, on a

7.7.2 LEMME. Pour qu'une filtration F de B soit déduite comme ci-dessus d'une réduction à F^0G du groupe structural de P , il suffit que tel soit le cas après une extension des scalaires k'/k .

On notera qu'une réduction du groupe structural à un sous-groupe de F^0G fournit a fortiori une filtration F sur B .

7.8. Soit T un groupe algébrique sur k . Explicitons ce qu'est un torseur équivariant sous un groupe G muni d'une action de T .

Soit E_0 le produit semi-direct $T \ltimes G$ et faisons-le agir sur le G -torseur trivial $P_0 = G$ par $t \cdot p = t(p)$ et $g \cdot p = gp$. Pour $x = t \cdot g \in E_0$, l'action de x est un t -morphisme de P_0 dans lui-même: $x \cdot pg = (x \cdot p)t(g)$.

Soient P un G -torseur et E le tordu de E_0 par P , pour l'action par automorphismes intérieurs de G sur E_0 déduite de l'inclusion de G dans E_0 . C'est une extension

$$(7.8.1) \quad 0 \longrightarrow G^P \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0.$$

Le torseur P est le tordu de P_0 par P , pour l'action par translations à gauche de G sur P_0 , et l'action de E_0 sur P_0 fournit par torsion une action de E sur P . Les $e \in E$ au-dessus de $t \in T$ sont les t -morphismes de P dans P .

Un torseur équivariant est un torseur muni d'une action de T qui vérifie $t(pg) = t(p)t(g)$. Une telle action est simplement l'action donnée par un scindage de l'extension (7.8.1).

Sur la clôture algébrique \bar{k} , de k , chaque trivialisation $p \in P(\bar{k})$ de P définit, sur \bar{k} , un isomorphisme de E avec $T \ltimes G$, et en particulier un scindage $\sigma_p : T \rightarrow E$ de E . Son image est le fixateur de p . Ces scindages forment une classe de G -conjugaison. Disons que le torseur T -équivariant P est de type trivial si l'action de T est définie par un scindage de (7.8.1) qui, sur \bar{k} , est dans cette classe de conjugaison.

7.9 PROPOSITION. Soit P un G -torseur T -équivariant. Soient G^T et P^T les sous-schémas de G et P fixés par T . Alors, P^T est vide ou un G^T -torseur. Pour que P^T soit non vide, il faut et il suffit que P soit de type trivial.

La vérification est laissée au lecteur. Noter que “ P de type trivial” équivaut par définition à $P^T(\bar{k}) \neq \emptyset$, i.e. à $P^T \neq \emptyset$.

Si le torseur T -équivariant P est de type trivial, il est donc déduit en poussant par $G^T \rightarrow G$ du G^T -torseur équivariant P^T (muni de l'action triviale de T): il revient au même de se donner un G -torseur T -équivariant de type trivial ou un G^T -torseur.

7.10 COROLLAIRE. Supposons T de type multiplicatif et G unipotent. Alors, pousser par $G^T \rightarrow G$ induit une équivalence de catégories $(G^T\text{-torseur}) \rightarrow (G\text{-torseur } T\text{-équivariant})$. Son inverse est $P \mapsto P^T$.

PREUVE. Ceci revient à dire que tout G -torseur T -équivariant P est de type trivial. Sur \bar{k} , les scindages de l'extension E de T par le groupe unipotent G^P sont en effet tous conjugués sous G^P

7.11. La filtration *sous-jacente* à une graduation $V = \bigoplus V^i$ d'un espace vectoriel V est définie par

$$F^n V = \bigoplus_{i \geq n} V^i.$$

Soient $G = \text{Spec}(A)$ un groupe algébrique sur k et $P = \text{Spec}(B)$ un G -torseur. Une graduation de A et B , compatible à la structure d'algèbre de Hopf de A , d'algèbre de B et à $B \rightarrow B \otimes A$ exprimant l'action de G sur P , est la même chose qu'une action de \mathbb{G}_m sur G et P , faisant de P un torseur \mathbb{G}_m -équivariant.

Des filtrations F de A et B seront dites *graduables* si elles sont sous-jacentes à des graduations comme ci-dessus.

7.12 PROPOSITION. Soient $G = \text{Spec}(A)$ un groupe algébrique sur k , $P = \text{Spec}(B)$ un G -torseur et F des filtrations de A et B . Supposons que

- (i) G est unipotent
- (ii) sur une extension k_1 de k , les filtrations F sont graduables (7.11)

Alors, la filtration F de B est déduite comme en 7.7 d'une réduction $F^0 P$ du groupe structural de P à $F^0 G$.

PREUVE. Par 7.7.2 il suffit de vérifier la conclusion de 7.12 après extension des scalaires à k_1 : on peut supposer les filtrations F graduables, i.e. déduites d'une action de \mathbb{G}_m sur G et P , faisant de P un torseur

équivariant. Par 7.10, P est déduit de $P^{\mathbf{G}_m}$ en poussant par $G^{\mathbf{G}_m} \rightarrow G$. Le sous-groupe $G^{\mathbf{G}_m}$ de G est celui qui, pour l'action sur A par translations à droite, respecte la graduation de A . On a donc $G^{\mathbf{G}_m} \subset F^0 G$. La graduation de B est déduite de celle, \mathbf{G}_m -invariante, de A , par torsion par $P^{\mathbf{G}_m}$. A fortiori, la filtration de B est déduite de celle de A et 7.12 en résulte.

7.13. Les filtrations *sous-jacentes* à une graduation de type \mathbf{Z}^I (I fini) de $V : V = \bigoplus_{\underline{n}} V^{\underline{n}}$ ($\underline{n} \in \mathbf{Z}^I$) sont les filtrations F_α ($\alpha \in I$) données par

$$F_\alpha^n V = \bigoplus_{\underline{n}_\alpha > \underline{n}} V^{\underline{n}}.$$

Soient encore $G = \text{Spec } A$ un groupe sur k et $P = \text{Spec}(B)$ un G -torseur. Soient F_α ($\alpha \in I$) des filtrations de A et B , en nombre fini. Ce système de filtrations sera dit *graduable* si les F_α sont sous-jacentes à des graduations de type \mathbf{Z}^I de A et B , correspondant à une action de \mathbf{G}_m^I sur G et P faisant de P un torseur équivariant.

7.14 PROPOSITION. Soient $G = \text{Spec}(A)$ un groupe algébrique sur k , $P = \text{Spec}(B)$ un G -torseur et F_α des filtrations de A et B ($\alpha \in I$ fini). Supposons que G est unipotent et que le système des F_α est graduable sur une extension k_1 de k . Alors, l'intersection des $F_\alpha^0 P$ est non vide, donc un $\cap F_\alpha^0 G$ -torseur: les filtrations F_α se déduisent d'une réduction du groupe structural à $\cap F_\alpha^0(G)$.

PREUVE. Il suffit de vérifier la conclusion de 7.14 après extension des scalaires à k_1 : on peut supposer les filtrations F_α déduite d'une action de \mathbf{G}_m^I sur G et P , faisant de P un torseur équivariant. Par 7.10, l'action sur P provient d'une réduction du groupe structural à $G^{(\mathbf{G}_m^I)} \subset \cap F_\alpha^0 G$, et 7.14 en résulte.

7.15. Rappelons ([D2] 1.2.10) que si H est une structure de Hodge mixte, on dispose sur $H_{\mathbb{C}}$ d'une bigraduation canonique à laquelle sont sous-jacentes les filtrations W et F , au sens suivant

$$\begin{aligned} W_n H_{\mathbb{C}} &= \bigoplus_{p+q \leq n} H_{\mathbb{C}}^{p,q} \\ F^m H_{\mathbb{C}} &= \bigoplus_{p \geq m} H_{\mathbb{C}}^{p,q}. \end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de raccrocher cette convention à celle de 7.13 en posant $W^n = W_{-n}$ et en donnant à H_C^{pq} le bidegré $(-p - q, p)$. Cette bigraduation est donnée par

$$H_C^{pq} = (W_{p+q} \cap F^p) \cap \left((W_{p+q} \cap \bar{F}^q) + \sum_{r>0} (W_{p+q-r} \cap \bar{F}^{q-r+1}) \right).$$

Elle est fonctorielle et compatible au produit tensoriel.

7.16. Par 5.13, les constructions 7.5 à 7.7 peuvent être répétées dans toute catégorie tannakienne. Soit \mathcal{T} une catégorie tannakienne sur k dans laquelle tout objet X est muni d'une filtration W fonctorielle, compatible au produit tensoriel, et exacte en ce que $X \mapsto G_W X$ est exact.

7.16.1 LEMME. *Il existe un foncteur fibre ω sur une extension k_1 de k , et une graduation fonctorielle et compatible au produit tensoriel de $\omega(X)$ à laquelle les filtrations $\omega(W)$ soient sous-jacentes.*

PREUVE. Soit ω_0 un foncteur fibre sur une extension k_1 de k . Alors, $\omega(X) := \omega_0 \text{Gr}_W X$ est encore un foncteur fibre. Sa graduation, déduite de celle de $\text{Gr}_W X$, vérifie 7.16.1.

7.17 PROPOSITION. *Avec les hypothèses et notations de 7.16, si $P = \text{Sp}(B)$ est un torseur sous un \mathcal{T} -schéma en groupes unipotents $U = \text{Sp}(A)$, le groupe structural de P peut être réduit à $W^0(U)$, et la filtration W de B est déduite de celle de A .*

PREUVE. Sur A et B , on dispose de la filtration W . On veut montrer que $P_0 := \text{Sp}(B/(W^1 B))$ est un $W^0 U$ -torseur, et que la filtration W de $B = A^{P_0}$ est déduite de celle de A . Il suffit de la vérifier après application d'un foncteur fibre ω . On prend ω comme en 7.16.1 et on applique 7.12.

7.18. Soit \mathcal{T} la catégorie tannakienne 1.15 des systèmes de réalisations sur \mathbb{Q} à bonne réduction en dehors de S . Soit $U = \text{Sp}(A)$ un \mathcal{T} -groupe algébrique unipotent, L son algèbre de Lie et $P = \text{Sp}(B)$ un U -torseur.

La proposition 7.17 ramène la classification des U -torseurs au cas où $U = W_0 U$. Cette condition s'écrit $L = W_0 L$, ou encore $W_{-1} A = 0$. Elle est vérifiée dans les cas qui nous seront utiles. Nous la supposerons:

(7.18.1) On suppose que $U = W_0 U$.

D'après 7.17, pour chaque réalisation $\omega(B)$ de B , la filtration W de $\omega(B) = \omega(A)^{\omega(P)}$ est alors déduite de la filtration ωU -invariante W de ωA .

En réalisation de Rham, on dispose de la filtration de Hodge F . Après extension des scalaires à \mathbb{C} , elle est d'après 7.15 sous-jacente à une graduation fonctorielle et compatible au produit tensoriel. Par 7.12, on a donc:

7.19 PROPOSITION. *Sous les hypothèses de 7.18, la filtration F de B_{DR} correspond comme en 7.7 à une réduction $F^0 P_{\text{DR}} \subset P_{\text{DR}}$ du groupe structural de P_{DR} à $F^0 U_{\text{DR}}$.*

7.20. Un U -torseur P comme en 7.18, pour U vérifiant (7.18.1), donne lieu aux objets suivants.

(7.20.1) Un U_B -torseur P_B .

(7.20.2) Un U_{DR} -torseur P_{DR} , muni d'une réduction $F^0 P_{\text{DR}} \subset P_{\text{DR}}$ du groupe structural à $F^0 U_{\text{DR}}$.

(7.20.3) Un isomorphisme entre les torseurs sous $U_B \otimes \mathbb{C} \sim U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$ déduit de P_B et P_{DR} par extension des scalaires à \mathbb{C} .

(7.20.4) Une action continue de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $P_B(\mathbb{A}^f)$, faisant de $P_B(\mathbb{A}^f)$ un $U_B(\mathbb{A}^f)$ -torseur équivariant. L'action qui s'en déduit sur $P_B(\mathbb{Q}_\ell)$ est non ramifiée en dehors de $S \cup \{\ell\}$.

(7.20.5) Pour $p \notin S$, un automorphisme de Frobenius ϕ_p de $P_{\text{DR}}(\mathbb{Q}_p)$, compatible à l'automorphisme ϕ_p de $U_{\text{DR}}(\mathbb{Q}_p)$.

(7.20.6) Une involution F_∞ de P_B , faisant de P_B un U_B -torseur F_∞ -équivariant. La conjugaison complexe de $P_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ induit F_∞ sur $P_B(\mathbb{Q}) \subset P_B(\mathbb{C}) \simeq P_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ (7.20.3). Sur $P_B(\mathbb{A}^f)$, F_∞ agit comme la conjugaison complexe $c \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Comme en 1.14, ceci s'exprimerait au mieux en disant que P_B dépend du choix d'une clôture algébrique C de \mathbb{R} , et est fonctoriel en ce choix. Noter que, tout torseur sous un groupe unipotent étant trivial, la donnée de P_B équivaut à celle du $U_B(\mathbb{Q})$ -torseur $P_B(\mathbb{Q})$. De même pour P_{DR} .

7.21 PROPOSITION. *Soit $U = Sp(A)$ un T -groupe algébrique unipotent comme en 7.18. La construction 7.20 est une équivalence de la catégorie des U -torseurs avec celle des systèmes (7.20.1) à (7.20.6).*

Nous prouverons tout d'abord 7.21 sous l'hypothèse additionnelle que $U = W_{-1}U$. Cette hypothèse équivaut à ce que W_0A soit réduit aux constantes. Elle signifie aussi que l'action de U par translations à droite sur A respecte W et induit une action triviale sur $\mathrm{Gr}^W(A)$. Dans les applications, cette hypothèse sera vérifiée. On indiquera en 7.26 et 7.27 comment modifier la démonstration dans le cas général.

7.22 LEMME. Si $U = W_{-1}U$, les W_nA sont des systèmes de réalisations (plutôt que des Ind-objets).

PREUVE. Soit $L = \mathrm{Lie} U$. L'exponentielle $\exp : L \rightarrow U$ définit un isomorphisme d'algèbres $A = \mathrm{Sym} L^\vee$. Parce que $L = W_{-1}L$, on a $W_0L^\vee = 0$ et $W_{n-1}\mathrm{Sym}^n L^\vee = 0$: seuls les $\mathrm{Sym}^i L^\vee$ avec $i \leq n$ contribuent à W_nA , et 7.22 en résulte.

7.23 LEMME. Si $U = W_{-1}U$, pour chaque U -torseur $P = \mathrm{Sp}(B)$, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Gr}_n^W(A) = \mathrm{Gr}_n^W(B)$.

PREUVE. L'action de U sur A par translations à gauche respecte W (car $(U = W_0U)$, et (B, W) est déduit de (A, W) par torsion par P (7.17)). De même pour les gradués, et on utilise que l'action de U sur $\mathrm{Gr}^W A$ est triviale.

7.24. Supposons que $U = W_{-1}U$ et construisons l'inverse du foncteur 7.20 qui à P attache un système (7.20.1) à (7.20.6). Il s'agit de construire un Ind-objet B de \mathcal{T} , avec des structures additionnelles. Ce sera la limite de ses W_nB , et chaque W_nB sera dans \mathcal{T} (cf. 7.22, 7.23).

On définit B_B par $P_B = \mathrm{Spec}(B_B)$ (cf. 7.20.1). C'est le tordu de A_B par P_B (pour l'action de U_B sur A_B par translations à gauche). L'action de U_B sur A_B respecte W et la filtration W de B_B est déduite de celle de A_B . Par 7.22, les W_nB_B sont donc de dimension finie.

On définit B_{DR} par $P_{\mathrm{DR}} = \mathrm{Spec}(B_{\mathrm{DR}})$ (cf. 7.20.2). La réduction du groupe structural à F^0U_{DR} fournit une filtration F de B_{DR} déduite de celle de A_{DR} . De même, la filtration W de A_{DR} en fournit une sur B_{DR} .

L'isomorphisme (7.20.3) fournit l'isomorphisme de comparaison

$$(7.24.1) \quad \mathrm{comp}_{\mathrm{DR}, B} : B_B \otimes \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{DR}} \otimes \mathbf{C} .$$

Il respecte les filtrations W .

7.24.2 LEMME. Chaque $W_n B_B$, muni de la filtration W et de la filtration F de $(W_n B_B) \otimes \mathbb{C} \simeq (W_n B_{\text{DR}}) \otimes \mathbb{C}$ (7.24.1) est une structure de Hodge mixte.

PREUVE. Parce que U agit trivialement sur $\text{Gr}^W A$, on a des isomorphismes canoniques

$$(7.24.3) \quad \text{Gr}^W A_B = \text{Gr}^W B_B \quad \text{et}$$

$$(7.24.4) \quad \text{Gr}^W A_{\text{DR}} = \text{Gr}^W B_{\text{DR}}$$

(cf. 7.23), compatibles aux isomorphismes de comparaison $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ pour A et B et aux filtrations F en réalisation de de Rham. Chaque $\text{Gr}_i^W B_B$ ($i \leq n$), muni de la filtration induite par F de son complexifié, est donc isomorphe à $\text{Gr}_i^W A_B$, et en particulier est une structure de Hodge de poids i . Ceci vérifie 7.24.2.

7.25. On a $B_B \otimes \mathbb{A}^f = (A_B \otimes \mathbb{A}^f)^{P(\mathbb{A}^f)}$ et la $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ équivariance de $P(\mathbb{A}^f)$ fournit une action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $B_B \otimes \mathbb{A}^f$. L'hypothèse de non ramification (7.20.4) fournit la même conclusion pour $B_B \otimes \mathbb{Q}_p$. Parce que U respecte la filtration W de A et agit trivialement sur le gradué, Galois respecte la filtration W de $B_B \otimes \mathbb{A}^f$ et l'isomorphisme (7.24.3) $\otimes \mathbb{A}^f$ de $\text{Gr}^W(A_B \otimes \mathbb{A}^f)$ avec $\text{Gr}^W(B_B \otimes \mathbb{A}^f)$ est équivariant.

De même, le Frobenius ϕ_p de (7.20.5) fournit le Frobenius cristallin de $B_{\text{DR}} \otimes \mathbb{Q}_p$. Il respecte W et (7.24.4) $\otimes \mathbb{Q}_p$ est ϕ_p -équivariant.

Le Frobenius à l'infini F_∞ définit le Frobenius à l'infini de B_B . A nouveau, (B_B, F_∞) est déduit de (A_∞, F_∞) par torsion par le torseur équivariant $(P_B(\mathbb{Q}), F_\infty)$; F_∞ respecte W et (7.24.3) est F_∞ -équivariant.

Ceci termine la description des structures qui font de $W_n B_B$, $W_n B_{\text{DR}}$ un système de réalisations (cf. 1.5). Les axiomes (AM1) et (AM4) ainsi, on l'a déjà vu, que (7.24.2) résultent de ce que $\text{Gr}^W A \simeq \text{Gr}^W B$. Les axiomes (AM2) et (AM5) résultent de (7.20.6) et (AM3) de (7.20.4). La structure d'algèbre de B et celle de torseur de $\text{Sp}(B)$ sont déduites de (7.20.1)(7.20.2).

7.26. Si G est un groupe algébrique unipotent sur un corps k et que V est une représentation de G , on définit une filtration croissante Z de V par $Z_{-1}V = 0$ et, pour $n \geq 0$, $Z_n V / Z_{n-1} V = (V / Z_{n-1} V)^G$.

Soit $U = \text{Spec}(A)$ un groupe unipotent. On définit la filtration Z de A en regardant A comme une représentation de $U \times U$, pour l'action par translations à gauche et à droite.

7.26.1 LEMME. Si k est de caractéristique 0, chaque $Z_n A$ est de dimension finie.

L'action de $U \times U$ sur U étant transitive, $Z_0 A$ est réduit aux constantes. On applique

7.26.2 LEMME. Soit V une représentation de G unipotent. Si k est de caractéristique 0 et que $Z_0 V$ est de dimension finie, chaque $Z_n V$ est de dimension finie.

PREUVE. Pour $n > 0$, la définition de $Z_n V$ assure que l'extension de $\text{Gr}_n^Z V$ par $\text{Gr}_{n-1}^Z V$ définit une injection

$$\text{Gr}_n^Z V \longrightarrow \text{Gr}_{n-1}^Z V \otimes \text{Ext}^1(k, k).$$

Le groupe $\text{Ext}^1(k, k)$ est $\text{Hom}(G, \mathbb{G}_a) = (\text{Lie } G)^{\text{ab}\vee}$. Ici sert l'hypothèse de caractéristique 0. Cet espace est de dimension finie et 7.26.2 en résulte par récurrence.

7.26.3 REMARQUE. On peut vérifier que, en caractéristique 0, on aurait obtenu la même filtration de A en considérant l'action de U sur A par translations à droite. La filtration Z de A se décrit simplement en terme de la filtration centrale descendante Z^0 de $L := \text{Lie } U$. Par l'exponentielle, on a

$$A \simeq \text{Sym}(L^\vee).$$

Soit $Z_p(L^\vee)$ l'orthogonal de $Z^{p-1}(L)$. Alors, la filtration $Z.$ de A se déduit de la filtration $Z.$ de L^\vee par application de Sym^* .

7.27. Si on suppose seulement que $U = W^0 U$, la preuve de 7.21 est à modifier comme suit. On définit B_B, B_{DR}, W, F , l'action de Galois et les ϕ_p comme en 7.24, 7.25. La filtration $Z.$ de A (7.26) est stable par translations à droite, donc fournit une filtration $Z.$ de B_B et B_{DR} . On montre que les $Z_n B_B, Z_n B_{\text{DR}}$ forment un système de réalisations. Ils sont de dimension finie par 7.26.1. L'essentiel est de vérifier que chaque $\text{Gr}_m^W(Z_n(B_B))$ est une structure de Hodge de poids n . Filtrant par Z ,

on trouve que c'est en effet une extension itérée de structures de Hodge de poids n , isomorphes aux structures analogues pour A_B .

7.28 DÉFINITION. Soit P un torseur sous un \mathcal{T} -schéma en groupes unipotent U , muni d'une structure entière $U_{\mathbf{Z}} \subset U_B(\mathbf{Q})$ (7.4). Une structure entière sur P est une réduction $P_{\mathbf{Z}} \subset P_B(\mathbf{Q})$ du groupe structural de $P_B(\mathbf{Q})$ à $U_{\mathbf{Z}}$, stable par F_∞ et adhérence $P_{\widehat{\mathbf{Z}}}$ dans $P_B(\mathbf{A}^f)$ stable sous $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

NOTATIONS. Si U est un \mathcal{T} -schéma en groupes unipotent muni d'une structure entière, on note $U \otimes \mathbf{Q}$ le \mathcal{T} -schéma en groupe unipotent sous-jacent. Un U -torseur P est un $(U \otimes \mathbf{Q})$ -torseur, noté $P \otimes \mathbf{Q}$, muni d'une structure entière.

Si U et V sont des \mathcal{T} -schémas en groupes unipotents munis d'une structure entière, un morphisme $f : U \rightarrow V$ est un morphisme $f : U \otimes \mathbf{Q} \rightarrow V \otimes \mathbf{Q}$ tel que $f(U_{\mathbf{Z}}) \subset V_{\mathbf{Z}}$. Si P est un U -torseur, on note $f(P)$ le U -torseur déduit de P en poussant par $f : f(P \otimes \mathbf{Q})$, avec la structure entière déduite de $P_{\mathbf{Z}}$ en poussant par $f : U_{\mathbf{Z}} \rightarrow V_{\mathbf{Z}}$.

REMARQUE. Pour U abélien, i.e. un \mathcal{T} -schéma vectoriel, 7.28 redonne 1.23.

VARIANTE. Soit U un schéma en groupe prounipotent muni d'une structure entière (7.4, variante). Ecrivons $U = \lim \text{proj} U_\alpha$ comme en 7.4. Les U_α sont munis de structures entières. Soit P un U -torseur et P_α le U_α -torseur déduit de P en poussant par $U \rightarrow U_\alpha$. Une structure entière sur P est un système projectif de structures entières sur les P_α .

7.29. Pour \mathcal{T} la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations sur S lisse sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, ce qui précède est à modifier comme suit. Parallèlement à 7.2, une algèbre de Lie nilpotente L de \mathcal{T} , ou le \mathcal{T} -groupe algébrique unipotent U correspondant, définissent les objets suivants, qui suffiront à décrire ce qu'est un U -torseur.

(7.29.1)_S U_B est un système local sur $S(\mathbf{C})$ de schémas en groupes unipotents sur \mathbf{Q} .

(7.29.2)_S U_{DR} est un schéma en groupes unipotent lisse sur $S \otimes \mathbf{Q}$, muni d'une connexion intégrable ∇ .

(7.29.3)_S $W_i U_B$ ($i \leq 0$) est un sous-système local de U_B sur $S(\mathbf{C})$.

(7.29.4)_S $F^i U_{\text{DR}}$ ($i \geq 0$) est un sous-schéma en groupes unipotent lisse de U_{DR} sur $S \otimes \mathbf{Q}$.

(7.29.5)_S Par extension des scalaires, U_{DR} définit sur $S \otimes \mathbb{C}$ un schéma en groupes unipotent lisse, muni d'une connexion intégrable ∇ . Sur $S(\mathbb{C})$, ses sections locales (holomorphes) horizontales sont les exponentielles des sections locales horizontales de $L \otimes \mathbb{C}$, et $\text{comp}_{\text{DR},B}$ définit un isomorphisme du faisceau localement constant $U_B(\mathbb{C})$ sur $S(\mathbb{C})$ avec celui des sections horizontales de $U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$.

(7.29.6)_S Pour tout ℓ , on dispose d'un \mathbb{Q}_ℓ -faisceau L_ℓ sur $S[1/\ell]$; il provient d'un \mathbb{Z}_ℓ -faisceau $L_{\mathbb{Z}_\ell}$, et le germe (pour le filtre des compléments d'ensembles finis de nombres premiers) du système des $L_{\mathbb{Z}_\ell}$ est donné. Pour presque tout ℓ , ℓ est plus grand que la classe de nilpotence et $[,]$ envoie $L_{\mathbb{Z}_\ell} \otimes L_{\mathbb{Z}_\ell}$ dans $L_{\mathbb{Z}_\ell}$. Pour un tel ℓ , la formule de Campbell-Hausdorff définit une loi de groupe sur $L_{\mathbb{Z}_\ell}$. Pour tout ℓ , les réseaux $L_{\mathbb{Z}_\ell}^1 \subset L_\ell$ pour lesquels Campbell-Hausdorff est une loi de groupe forment un système inductif filtrant. Pour n fixe assez grand, les $\sum \ell^{n-k_i} Z^i L_{\mathbb{Z}_\ell}$ en forment une partie cofinale. Le système inductif des faisceaux profinis lisses en pro- ℓ -groupes $U_{\mathbb{Z}_\ell}^1$ est un ind-faisceau profini $U_{\mathbb{Q}_\ell}$. Pour presque tout ℓ , $L_{\mathbb{Z}_\ell}$ définit $U_{\mathbb{Z}_\ell} \subset U_{\mathbb{Q}_\ell}$.

Sur $S(\mathbb{C})$, $\text{comp}_{A^f, B}$ définit un isomorphisme du système local $U_B(A^f)$ avec le produit restreint des $U_{\mathbb{Q}_\ell}$.

(7.29.7) Pour V un ouvert de $S \otimes \mathbb{F}_p$, soitent $S_{/V}^\wedge$ le schéma formel complété de S long de V , et $S_{/U}^{\text{an}}$ l'espace rigide analytique fibre générale, sur \mathbb{Q}_p , de $S_{/V}^\wedge$ ([R]). Notons $L_{\text{DR}}^{\text{an}}$ l'image inverse de L_{DR} sur $S_{/S \otimes \mathbb{F}_p}^{\text{an}}$, ou un $S_{/U}^{\text{an}}$. Localement sur $S \otimes \mathbb{F}_p$, le morphisme de Frobenius d'un ouvert U se relève en $\tilde{F} : S_{/U}^\wedge \rightarrow S_{/U}^\wedge$. Nous interpréterons la structure F -cristalline de L comme la donnée d'isomorphismes

$$\phi_p[\tilde{F}] : \tilde{F}^* L_{\text{DR}}^{\text{an}} \longrightarrow L_{\text{DR}}^{\text{an}}.$$

Pour la dépendance en \tilde{F} , voir 2.10. Ces morphismes définissent des

$$\phi_p[\tilde{F}] : \tilde{F}^* U_{\text{DR}}^{\text{an}} \longrightarrow U_{\text{DR}}^{\text{an}}.$$

(7.29.8) Frobenius réel: remplacer dans (7.29.1) \mathbb{C} par "une clôture algébrique C de \mathbb{R} ", et prendre U_B et les isomorphismes de comparaison de (7.29.5) et (7.29.6) fonctoriels en C .

7.30. Parallèlement à 7.20, un torseur P sous U définit les objets suivants.

(7.30.1)_S Un système local sur $S(\mathbb{C})$ de U_B -torseur. Sa donnée équivaut à celle du $U_B(\mathbb{Q})$ -torseur $P_B(\mathbb{Q})$ correspondant.

(7.30.2)_S Un U_{DR} -torseur à connexion intégrable P_{DR} sur $S \otimes \mathbb{Q}$. L'action à droite de U_{DR} sur P_{DR} est horizontale et P_{DR} est muni d'une réduction $F^0 P_{\text{DR}}$ du groupe structural à $F^0 U_{\text{DR}}$.

L'action de U_{DR} sur P_{DR} identifie le fibré tangent vertical de $P_{\text{DR}}/S \otimes \mathbb{Q}$ à l'image inverse sur P_{DR} de Lie U_{DR} . La connexion peut donc être vue comme

$$p \mapsto p^{-1} \nabla p : P_{\text{DR}} \longrightarrow \Omega^1 \text{Lie } U_{\text{DR}}$$

sur $S_{\mathbb{Q}}$. L'axiome de transversalité pour la filtration de Hodge déduite de la réduction du groupe structural à $F^0 U_{\text{DR}}$ équivaut à ce que, pour s une section locale de $F^0 P_{\text{DR}}$, $s^{-1} \nabla s$ soit dans $\Omega^1(F^{-1} \text{Lie } U_{\text{DR}})$.

(7.30.3)_S L'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ fournit, sur $S(\mathbb{C})$ un isomorphisme de torseurs de $P_B(\mathbb{C})$ avec le faisceau des sections horizontales (holomorphes) de $P_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$. Les groupes structuraux sont identifiés par (7.29.5)_S.

(7.30.4)_S Pour tout ℓ , un $U_{\mathbb{Q}_\ell}$ -torseur $P_{\mathbb{Q}_\ell}$ sur $S[1/\ell]$ et pour presque tout ℓ une réduction $P_{\mathbb{Z}_\ell}$ du groupe structural à $U_{\mathbb{Z}_\ell}$. Par l'isomorphisme de comparaison $\text{comp}_{\ell, B}$, sur $S(\mathbb{C})$, le $U_B(\mathbb{Q}_\ell)$ torseur déduit de $P_{\mathbb{Q}_\ell}$ s'identifie à celui déduit de P_B en poussant par $U_B(\mathbb{Q}) \rightarrow U_B(\mathbb{Q}_\ell)$. En tout point de $S(\mathbb{C})$, si $P \subset P_B$ est une réduction du groupe structural à un sous-groupe de congruence Γ , pour presque tout ℓ , l'isomorphisme de comparaison identifie $P_{\mathbb{Z}_\ell}$ et le torseur déduit de P par $\Gamma \rightarrow U(\mathbb{Z}_\ell)$.

(7.30.5)_S Avec les notations de (7.29.7)_S, des morphismes

$$\phi_p[\tilde{F}] : \tilde{F}^* P_{\text{DR}}^{\text{an}} \longrightarrow P_{\text{DR}}^{\text{an}}$$

compatibles aux morphismes $\phi_p[\tilde{F}] : \tilde{F}^* U_{\text{DR}}^{\text{an}} \rightarrow U_{\text{DR}}^{\text{an}}$ et dépendant de \tilde{F} comme en 2.10.

(7.30.6)_S Frobenius réel: remplacer dans (7.30.1) \mathbb{C} par une clôture algébrique C de \mathbb{R} et prendre P_B (et les isomorphismes de comparaison) fonctoriels en C .

7.31. Avec ces modifications 7.29 à 7.2 et 7.30 à 7.20, 7.21 reste valable, avec essentiellement la même preuve.

7.32 REMARQUE. Soient G un schéma en groupes lisse sur une base S et P un G -torseur. Si p est une section locale de P , l'isomorphisme utilisé en (7.30.2)_S entre l'image inverse par p du fibré tangent relatif et $\text{Lie } G$ est défini par l'isomorphisme $g \mapsto pg$ de (G, e) avec (P, e) . L'inverse de $g \mapsto pg$ sera noté $x \mapsto p^{-1}x$. Ceci explique la notation $p^{-1}\nabla p$ de (7.30.2)_S. Supposons G et P munis d'une connexion ∇ , et que l'action $P \times G \rightarrow P$ de G sur P est horizontale. On a

$$(7.32.1) \quad (pg)^{-1}\nabla(pg) = g^{-1}(p^{-1}\nabla p)g + g^{-1}\nabla g .$$

Si P est le torseur trivial G , muni d'une connexion ∇ , on peut plutôt ramener la 1-forme ∇p à valeur dans $p^*(\text{fibré tangent vertical})$ dans $\text{Lie } G = e^*(\text{fibré tangent relatif})$ par translations à droite. Notant par un indice G ou P si la connexion est celle de G ou du G -torseur trivial $P = G$, la formule (7.32.1) devient

$$(7.32.2) \quad \nabla_P(pg)(pg)^{-1} = \nabla_P p \cdot p^{-1} + p(\nabla_G g \cdot g^{-1})p^{-1} .$$

Faisant $p = e$, on a

$$(7.32.3) \quad \nabla_P(g) \cdot g^{-1} = \nabla_G(g) \cdot g^{-1} + \nabla_P e .$$

7.33 REMARQUE. Si $S \otimes \mathbf{Q}$ est un k -schéma, pour k un corps de nombres, $S \otimes \mathbf{C}$ est la somme disjointe, sur les plongement complexes σ de k , des $S_\sigma = (S \otimes \mathbf{Q}) \otimes_{k, \sigma} \mathbf{C}$, et $S(\mathbf{C}) = \coprod_\sigma S_\sigma(\mathbf{C})$. Dans (7.29.1) et (7.30.1), on peut donc regarder U_B et P_B comme la donnée de système locaux U_σ et P_σ sur les $S_\sigma(\mathbf{C})$, et les isomorphismes de comparaison $\text{comp}_{\text{DR}, B}$ proviennent d'isomorphismes $\text{comp}_{\text{DR}, \sigma}$.

7.34. Une *structure entière* sur U est la donnée d'un système local de sous-groupes de congruence $U_{\mathbf{Z}}$ de U_B , de complété dans $U_B(\mathbf{Q}_\ell)$ provenant pour tout ℓ d'un faisceau en pro- ℓ -groupes $U_{\mathbf{Z}_\ell} \subset U_{\mathbf{Q}_\ell}$, sur $S[1/\ell]$.

Une *structure entière* sur P est la donnée d'une réduction $P_{\mathbf{Z}}$ du groupe structural $U_B(\mathbf{Q})$ de $P_B(\mathbf{Q})$ à $U_{\mathbf{Z}}$, de complétés dans $P_B(\mathbf{Q}_\ell)$ provenant pour tout ℓ d'un $U_{\mathbf{Z}_\ell}$ -torseur $P_{\mathbf{Z}_\ell} \subset P_{\mathbf{Q}_\ell}$, sur $S[1/\ell]$.

VARIANTE. Pour U prounipotent, on définit les structures entières par passage à la limite projective, comme en 7.4 et 7.28.

§8. Extensions itérées de motifs de Tate.

Dans ce paragraphe, nous exposons des conséquences de la conjecture suivante.

8.1. CONJECTURE. *Dans la catégorie abélienne des motifs lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, on a*

$$(8.1.1) \quad \dim \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \geq 3$$

Pour n impair ≥ 3 , $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$ est engendré par la classe de l'extension définie par le torseur 3.1 sous $\mathbb{Z}(n)$.

Pour $n < 0$, une extension de \mathbb{Q} par $\mathbb{Q}(n)$ est scindée par la filtration par le poids. Pour $n = 0$, on veut que les motifs purs forment une catégorie semi-simple. Ce serait automatique si 1.12(iii) avait été inclus dans notre définition des motifs. Pour $n = 1$, la conjecture est compatible à (2.4.1), qui implique $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = (\mathbb{Z}^*) \otimes \mathbb{Q} = 0$.

Soient \mathcal{O} l'anneau des entiers d'un corps de nombres F , S un ensemble fini de places finies et \mathcal{O}_S l'anneau des S -entiers: $\text{Spec}(\mathcal{O}_S) = \text{Spec}(\mathcal{O}) - S$. Une conjecture parallèle à 8.1 est:

8.2. CONJECTURE. *Dans la catégorie abélienne des motifs sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$, on a pour tout $n \geq 1$*

$$(8.2.1) \quad \text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = K_{2n-1}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Q}.$$

Pour M un motif sur une base B , nous noterons $H^i(B, M)$ ($i = 0, 1$) les groupes $\text{Ext}^i(\mathbb{Q}(0), M)$ calculés dans la catégorie abélienne des motifs sur B . Avec cette notation, le premier membre de (8.2.1) s'écrit $H^1(\text{Spec}(\mathcal{O}_S), \mathbb{Q}(n))$.

Pour $n = 1$, 8.2 résulte de (2.4.1). Pour $n > 1$, le groupe $K_{2n-1}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Q}$ est indépendant de S . Parallèlement, une extension de \mathbb{Q}_ℓ par $\mathbb{Q}_\ell(n)$ ($n \neq 1$) sur $\text{Spec}(\mathcal{O}) - S - \{v \mid v \text{ au-dessus de } \ell\}$ se prolonge à $\text{Spec}(\mathcal{O}) - \{v \mid v \text{ au-dessus de } \ell\}$: si $v \in S$, n'est pas de caractéristique ℓ toute représentation de $\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$ extension de \mathbb{Q}_ℓ par $\mathbb{Q}_\ell(n)$ est en effet non ramifiée: l'inertie agit via son quotient modéré $\mathbb{Z}_\ell(1)$ et tout morphisme équivariant $\mathbb{Z}_\ell(1) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(n)$ est trivial.

Dans le §5 de [B], le lecteur trouvera développé un formalisme conjectural dont 8.1 et 8.2 sont des cas particuliers.

8.3. La construction du morphisme, implicite dans 8.2:

$$(8.3.1) \quad K_{2n-1}(F) \longrightarrow H^1(\mathrm{Spec}(F), \mathbf{Q}(n))$$

pose un problème. Dans [RSS], P. Schneider discute de la définition de classes de Chern dans diverses théories de cohomologie. J'ignore si ce qu'il explique suffit à définir 8.3.1. On dispose en tout cas de classes de Chern des types suivants.

Galois. $K_{2n-1}(F) \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F), \mathbf{Q}_\ell(n))$.

Une classe $c \in K_{2n-1}(F)$ définit donc une classe d'isomorphie d'extensions $E(c)_\ell$ de \mathbf{Q}_ℓ par $\mathbf{Q}_\ell(n)$ sur $\mathrm{Spec}(F)$. Puisque $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_\ell, \mathbf{Q}_\ell(n)) = 0$, cette extension est déterminée à isomorphisme unique près par sa classe d'isomorphie.

Hodge. Une construction parallèle attache à c , et à chaque plongement complexe σ de F une classe d'isomorphie d'extensions de $\mathbf{Q}(0)_B$ par $\mathbf{Q}(n)_B$, dans la catégorie des \mathbf{Q} -structures de Hodge mixtes. Dans cette catégorie, on a $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}(0)_B, \mathbf{Q}(n)_B) = 0$ et on obtient donc une extension $E(c)_\sigma$ définie à isomorphisme unique près. On peut prendre pour v un plongement dans une clôture algébrique de \mathbf{R} , et on dispose donc de Frobenius réels comme en 1.14.

Définir la réalisation de de Rham $E(c)_{\mathrm{DR}}$ ne pose pas de problème: pour toute extension E de $\mathbf{Q}(0)$ par $\mathbf{Q}(n)$, $F^0(E_{\mathrm{DR}}) \subset E_{\mathrm{DR}}$ est un scindage de l'extension E : on a $E_{\mathrm{DR}} = \mathbf{Q}(n)_{\mathrm{DR}} \oplus \mathbf{Q}(0)_{\mathrm{DR}}$. Le morphisme de comparaison

$$(8.3.1) \quad E_{\mathrm{DR}} \otimes_{F,\sigma} \mathbf{C} \xrightarrow{\sim} E_B \otimes \mathbf{C}$$

est caractérisé par les propriétés d'être un morphisme d'extensions, et compatible au scindage F^0 .

Pour avoir un système de réalisations, il manque encore la structure cristalline, et l'isomorphisme de comparaison

$$E(c)_\sigma \otimes \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} E(c)_\ell.$$

8.4. Pour $F = \mathbb{Q}$ et n impair, l'isomorphisme de comparaison

$$(8.4.1) \quad E(c)_B \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} E(c)_\ell$$

est uniquement déterminé par sa compatibilité (1.4, AM5) au Frobenius F_∞ . L'extension $E(c)_B$ (resp. $E(c)_\ell$) est en effet scindée par le sous-espace propre 1 de F_∞ (resp. de la conjugaison complexe $c \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) et (8.4.1) est l'unique morphisme d'extensions compatible à ces scindages.

Si on fait abstraction des structures cristallines, on voit ainsi que $c \in K_{2n-1}(\mathbb{Q})$ définit, sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$, un système de réalisations extension de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(n)$. Il n'a pas été vérifié que l'extension définie par le torseur $P_{1,n}$ de 3.1 provient d'un élément de $K_{2n-1}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}$. A ℓ fixé, il n'a même pas été vérifié la classe dans $H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathbb{Q}_\ell(n))$ du torseur P_ℓ est dans l'image de $K_{2n-1}(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}$.

8.5. Pour F totalement réel, et n impair, l'isomorphisme $\text{comp}_{\ell,B}$ est caractérisé comme en 8.4. On a

$$(8.5.1) \quad H^1(\text{Spec}(F), \mathbb{Q}(n)) = H^1(\text{Spec}(\mathbb{Q}), H_{\text{mot}}^0(\text{Spec}(F))(n)).$$

Du point de vue des motifs d'Artin, 8.4, 8.5 admettent la généralisation suivante.

8.6. Soit A un motif d'Artin sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$, $n > 0$ et $M = A(n)$. Supposons que, pour F une extension galoisienne de \mathbb{Q} , A est défini par une représentation V de $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$. De (8.2.1), supposé $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ -équivariant, on déduit formellement un isomorphisme

$$(8.6.1) \quad H^1(\text{Spec}(\mathbb{Q}), M) \xleftarrow{\sim} (V \otimes K_{2n-1}(F))^{\text{Gal}(F/\mathbb{Q})}.$$

Si F_∞ agit trivialement sur M_B , le membre de droite de 8.6.1 est nul et on désire donc que toute extension motivique de $\mathbb{Q}(0)$ par M soit triviale. Si F_∞ agit sur M_B par -1 , pour toute système de réalisations E extension de $\mathbb{Q}(0)$ par M , le morphisme de comparaison

$$E_B \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow E_\ell$$

est l'unique morphisme d'extensions qui envoie le sous-espace propre où $F_\infty = 1$ sur le sous-espace propre où $c = 1$.

Si F est un corps CM , M est une somme de motifs où $F_\infty = +1$ et -1 . Une fois définies les réalisations cristallines, ceci permettra de définir un morphisme 8.6.1.

8.7. Une des motivations de 8.1, 8.2 est la conjecture de Beilinson. Soit M un motif à coefficients entiers sur \mathbb{Q} . Son aspect cristallin ne nous servira pas. Supposons-le de poids < 0 . Dans la catégorie $(\text{Hodge}/\mathbf{R})$ des structures de Hodge mixtes munies d'un F_∞ , une extension de $\mathbb{Z}(0)$ par M_B est décrite par un système de torseurs du type suivant (cf. 2.6).

- (a) Un torseur $P_{\text{DR}, \mathbf{R}}$ sous $M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{R}$, muni d'une réduction $F^0(P_{\text{DR}, \mathbf{R}})$ de son groupe structural à $F^0(M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{R})$;
- (b) Un M_B -torseur $P_B \subset P_{\text{DR}, \mathbf{C}} = P_{\text{DR}, \mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$, stable par la conjugaison complexe de $P_{\text{DR}, \mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$.

Une trivialisation de $F^0(P_{\text{DR}, \mathbf{R}})$ identifie P_B à un point de $M_B \setminus M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C}$, fixe par la conjugaison complexe, et

$$\text{Ext}_{\text{Hodge}/\mathbf{R}}^1(\mathbb{Z}(0), M_B) = (M_B \setminus M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{C})^{\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})} / F^0(M_{\text{DR}} \otimes \mathbf{R}).$$

C'est un groupe de Lie, de composante neutre

$$M_B^{\text{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})} \setminus (M_{\text{DR}} / F^0(M_{\text{DR}}) \otimes \mathbf{R}).$$

Son algèbre de Lie est $M_{\text{DR}} / F^0(M_{\text{DR}}) \otimes \mathbf{R}$. La structure rationnelle de de Rham définit une classe $(\text{mod}\mathbb{Q}^{*+})$ d'éléments de volume.

Dans le cas particulier où M est de poids < -2 et a partout bonne réduction, une version de la conjecture de Beilinson est que

(8.7.1) $H^1(\text{Spec}(\mathbb{Z}), M)$ s'injecte dans $\text{Ext}_{\text{Hodge}/\mathbf{R}}^1(\mathbb{Z}(0), M_B)$ avec une image discrète et cocompacte.

(8.7.2) Au produit par un nombre rationnel près,

$$\zeta(M, 0) \sim \text{volume}(\text{Ext}_{\text{Hodge}/\mathbf{R}}^1(\mathbb{Z}(0), M_B) / H^1(\text{Spec}(\mathbb{Z}), M)).$$

Toujours sous les mêmes hypothèses sur M , (8.7.1) implique que

$$(8.7.3) \quad \text{rg } H^1(\text{Spec}(\mathbb{Z}), M) = \dim(M_{\text{DR}} / F^0 M_{\text{DR}}) - \dim M_B^{F_\infty}.$$

Pour $M = \mathbb{Q}(n)$ ($n > 1$), ceci est en accord avec 8.1, ainsi qu'avec le $\zeta(n)$ dans 3.1.1.

8.8. Soit M un système de réalisations, sur \mathbf{Q} , extension itérée de motifs de Tate $\mathbf{Q}(n)$. L'espace vectoriel $\mathbf{Q}(n)_{\text{DR}}$ est muni des filtrations W et F . Puisque $\mathbf{Q}(n)_{\text{DR}}$ est purement de poids $-2n$ et de filtration de Hodge $-n$, les filtrations W et F , renombrées, sont opposées et définissent une graduation de M_{DR} :

$$(8.8.1) \quad \begin{aligned} M_{\text{DR}} &= \bigoplus M_{\text{DR}}^i \\ W_{-2n} &= W_{-2n+1} = \bigoplus_{i \geq n} M_{\text{DR}}^i \\ F^{-n} &= \bigoplus_{i \leq n} M_{\text{DR}}^i \end{aligned}$$

8.9. Soit \mathcal{T} la catégorie des motifs M lisses sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ avec pour tout n $\text{Gr}_{-2n+1}^W(M) = 0$ et $\text{Gr}_{-2n}^W(M) =$ somme de copies de $\mathbf{Q}(n)$.

Soit G son groupe fondamental (6.1). C'est un \mathcal{T} -schéma en groupes. Le motif $\mathbf{Q}(1)$ définit un épimorphisme (6.7 (iii)):

$$(8.9.1) \quad G \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

tel que l'action de G sur $\mathbf{Q}(n)$ se factorise par \mathbf{G}_m , avec λ agissant par multiplication par λ^n . Le noyau U de ce morphisme est le radical unipotent de G (6.7 (ii)). Par 8.1 et 6.12, les torseurs 3.1 définissent un isomorphisme

$$(8.9.2) \quad U^{\text{ab}} = \prod_k \mathbf{Q}(k) \quad (k \text{ impair } \geq 3).$$

On a donc $U = W_{-1}(G)$ (et même $U = W_{-2}(G)$), et chaque $G/W_{-n}U$ est un \mathcal{T} -groupe algébrique.

L'image G_{DR} de G par le foncteur fibre DR est le schéma en groupes des automorphismes du foncteur fibre DR. La graduation 8.8 de M_{DR} est fonctorielle en M dans \mathcal{T} et compatible au produit tensoriel. Elle définit une section

$$(8.9.3) \quad \tau : \mathbf{G}_m \longrightarrow G_{\text{DR}}$$

de (8.9.1)_{DR} telle que $\lambda \in \mathbf{G}_m$ agisse sur M_{DR}^i par λ^i . Noter que, contrairement à (8.9.1), le morphisme (8.9.3) n'est pas motivique: il ne provient pas d'un morphisme de \mathbf{G}_m dans G , car 8.8.1 ne provient pas toujours d'une décomposition de M .

La section τ de $(8.9.1)_{\text{DR}}$ fait de G_{DR} un produit semi-direct:

$$(8.9.4) \quad G_{\text{DR}} = \mathbb{G}_m \ltimes U_{\text{DR}} .$$

L'action intérieure de \mathbb{G}_m sur U_{DR} , donc sur $\text{Lie } U_{\text{DR}}$, définit une graduation

$$\text{Lie } U_{\text{DR}} = \prod \text{Lie } U_{\text{DR}}^k .$$

C'est 8.8.1 pour $\text{Lie } U_{\text{DR}}$. Plutôt que la pro-algèbre de Lie graduée $\text{Lie } U_{\text{DR}}$, il nous sera parfois commode d'utiliser l'algèbre de Lie graduée

$$\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}} = \bigoplus \text{Lie } U_{\text{DR}}^k ,$$

qui porte la même information. D'après 8.9.2, l'algèbre de Lie graduée $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}}$ est engendrée par un élément en chaque degré impair ≥ 3 .

8.9.5 CONJECTURE.

L'algèbre de Lie $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}}$ est une algèbre de Lie libre.

Cette conjecture équivaut à l'exactitude à droite des Ext^1 dans la catégorie abélienne des représentations de G_{DR} . Elle est suggérée par la nullité des groupes $K_{2i} \otimes \mathbb{Q}$ pour $i > 0$. Elle est moins concrète que les précédentes, en ce qu'elle suppose définie la catégorie de tous les motifs sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ extensions itérées de motifs de Tate.

Nous noterons $\text{Lie } U_{\text{DR}}^+$ (resp. $\text{Lie } U_{\text{DR}}^-$) le produit des $\text{Lie } U_{\text{DR}}^n$ pour n pair (resp. impair) et U_{DR}^+ le sous-groupe de U_{DR} d'algèbre de Lie $\text{Lie } U_{\text{DR}}^+$; c'est le sous-groupe fixe de $\text{int } \tau(-1)|U_{\text{DR}}$.

8.10 PROPOSITION. (i) Il existe $a \in G_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ tel que pour tout M dans \mathcal{T} , on ait

$$(8.10.1) \quad M_B = a(M_{\text{DR}}) \subset M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$$

(ii) On peut trouver a vérifiant (8.10.1) de la forme

$$(8.10.2) \quad a = a_0 \tau(2\pi i) , \quad a_0 \in U_{\text{DR}}(\mathbb{R}) .$$

Un tel a est unique à multiplication à droite près par un élément de $U_{\text{DR}}^+(\mathbb{Q})$.

(iii) Ecrivons $a_0 = a_- a_+$ avec $a_- = \exp(N)$, $N \in \text{Lie } U_{\text{DR}}^- \otimes \mathbb{R}$ et $a_+ \in U_{\text{DR}}^+(\mathbb{R})$. Par (ii), a_- est unique. L'involution F_∞ de tout M_B dans \mathcal{T} est donnée par

$$(8.10.3) \quad F_\infty = a \bar{a}^{-1} = a_0 \tau(-1) a_0^{-1} = a_- \tau(-1) a_-^{-1} = \dots .$$

PREUVE. La théorie générale [Sa] (cf. [DM] 3.2) des catégories tannakiennes assure que le foncteur fibre B est déduit du foncteur fibre DR par torsion par un G_{DR} -torseur. La structure 8.9 de G et les nullités en cohomologie galoisienne

$$H^1(G_a) = H^1(G_m) = 0$$

assurent que tout G_{DR} -torseur est trivial. Il existe donc un \otimes -isomorphisme de foncteurs fibres $\alpha : M_{\text{DR}} \xrightarrow{\sim} M_B$. Le composé : $\text{comp}_{\text{DR}, B} \circ \alpha$:

$M_{\text{DR}} \otimes C \rightarrow M_{\text{DR}} \otimes C$ est un automorphisme du foncteur fibre $M \mapsto M_{\text{DR}} \otimes C$: C'est l'action de $a \in G_{\text{DR}}(C)$ vérifiant (i). Les éléments de $G_{\text{DR}}(C)$ vérifiant (i) sont les $a\gamma$, $\gamma \in G_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$.

Ce qui précède vaut pour C remplacé par “une clôture algébrique C de \mathbb{R} ” (1.14) et la classe $a \cdot G_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$ est fonctorielle en C : on a

$$(8.10.4) \quad aG_{\text{DR}}(\mathbb{Q}) = \bar{a}G_{\text{DR}}(\mathbb{Q}).$$

Posons $x := a^{-1}\bar{a}$. On a $\bar{x} = x^{-1}$. D'après (8.10.4), $x \in G_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$. En particulier, $x = \bar{x}$ et $x^2 = e$. La projection de a sur le quotient G_m de G_{DR} est dans $2\pi i\mathbb{Q}^*$. Celle de x est donc -1 . Dans le produit semi-direct $G_{\text{DR}}(\mathbb{Q}) = \tau(\mathbb{Q}^*) \ltimes U_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$, tout élément semi-simple – en particulier toute involution – est conjugué d'un élément de $\tau(\mathbb{Q}^*)$. L'élément $x = a^{-1}\bar{a}$ est donc un conjugué de $\tau(-1)$. Modifiant a par en $a\gamma$, $\gamma \in G_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$, on peut obtenir a tel que

$$(8.10.5) \quad a^{-1}\bar{a} = \tau(-1).$$

Les a' vérifiant (8.10.1)(8.10.5) sont les $a\gamma$ avec $\gamma \in G_{\text{DR}}(\mathbb{Q})$ et $\gamma^{-1}\tau(-1)\gamma = \tau(-1)$, i.e. centralisant $\tau(-1)$: $\gamma \in \tau(\mathbb{Q}^*)U_{\text{DR}}^+(\mathbb{Q})$. Modifiant a en $a\gamma$, $\gamma \in \tau(\mathbb{Q}^*)$, on obtient a tel que

(8.10.6) La projection de a sur G_m est $2\pi i$.

Les assertions (i)(ii) résultent maintenant du

8.11 LEMME. Soit $a = a_0\tau(2\pi i)$, $a_0 \in U_{\text{DR}}(\mathbb{C})$. Pour que $a_0 \in U_{\text{DR}}(\mathbb{R})$, il faut et il suffit que a vérifie (8.10.5).

PREUVE. La condition (8.10.5) est

$$\begin{aligned} \tau(2\pi i)^{-1}a_0^{-1}\bar{a}_0\tau(-2\pi i)^{-1} &= \tau(-1), \text{ i.e.} \\ \text{int } \tau(2\pi i)(a_0^{-1}\bar{a}_0) &= 1, \end{aligned}$$

soit $a_0 = \bar{a}_0$.

Prouvons 8.10(iii). Pour M dans \mathcal{T} , soient c_{DR} et c_B les involutions antilinéaires de $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$ de points fixes $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$ et $M_B \otimes \mathbb{R} \subset M_B \otimes \mathbb{C} = M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$. On a $c_B = ac_{\text{DR}}a^{-1}$ et

$$F_\infty = c_B c_{\text{DR}} = ac_{\text{DR}}a^{-1}c_{\text{DR}} = a\bar{a}^{-1}.$$

Noter que $a\bar{a}^{-1}$ ne dépend pas du choix de a vérifiant 8.10.1. Pour $a = a_- a_+ \tau(2\pi i)$ comme dans (iii), on a

$$\begin{aligned} F_\infty &= a_- a_+ \tau(2\pi i) \tau(-2\pi i)^{-1} a_+^{-1} a_-^{-1} = a_- a_+ \tau(-1) a_+^{-1} a_-^{-1} \\ &= a_- \tau(-1) a_-^{-1} = \exp(N) \tau(-1) \exp(-N) \tau(-1) \tau(-1) \\ &= \exp(2N) \tau(-1). \end{aligned}$$

Décomposons N selon (8.9.3)

$$N = \sum_{k>0} N_k \quad N_k \in \text{Lie } U_{\text{DR}}^{(k)} \otimes \mathbb{R}.$$

Puisque N est par définition dans $\text{Lie } U_{\text{DR}}^-$, les N_k sont nuls pour k pair.

8.12 PROPOSITION. (i) Pour que $N_k \neq 0$, il faut et il suffit que k soit impair ≥ 3 .

(ii) Ces N_k se projettent sur une base de $(\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}})^{\text{ab}} \otimes \mathbb{R}$, et forment donc un système générateur de $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$.

PREUVE. D'après 8.1, $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}}^{\text{ab}(k)}$ est de dimension 1 si k est impair ≥ 3 , nul sinon. Il en résulte que $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}}^k$ n'est non nul que pour $k \geq 3$. Ceci prouve que $N_k = 0$ si k n'est pas impair ≥ 3 . Il reste à vérifier que pour k impair ≥ 3 , N_k engendre $\text{Lie}_{\text{gr}} U_{\text{DR}}^{\text{ab}(k)} \otimes \mathbb{R}$.

L'isomorphisme (8.9.2):

$$U^{\text{ab}} = \prod \mathbb{Q}(k) \quad (k \text{ impair } \geq 3).$$

définit un isomorphisme

$$\text{Lie } U_{\text{DR}}^{\text{ab}} = \prod_k \mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} = \prod_k \mathbb{Q} \quad (k \text{ impair } \geq 3).$$

En terme de ces coordonnées, si $a = a_0 \tau(2\pi i)$ vérifie (8.10.1) avec $a_0 \in U_{\text{DR}}(\mathbb{C})$, l'image de $\log a_0$ dans $\mathbb{Q}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$ est congrue à $-(k-1)!\zeta(k)$

modulo $(2\pi i)^k \mathbf{Q}$: prendre pour M dans (8.10.1) l'extension de $\mathbf{Q}(0)$ par $\mathbf{Q}(k)$ définie par $P_{1,k}$ (3.1). L'image de N_k est donc

$$(8.12.1) \quad \text{image } N_k = -(k-1)! \zeta(k) \neq 0 \quad (k \text{ impair } \geq 3).$$

8.13. Le groupe G_B des automorphismes du foncteur fibre B est la forme de G_{DR} de points rationnels

$$(8.13.1) \quad G_B(\mathbf{Q}) = aG_{\text{DR}}(\mathbf{Q})a^{-1} \subset G_{\text{DR}}(\mathbf{C}).$$

L'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $M_{\mathbf{A}^f} = M_B \otimes \mathbf{A}^f$ (M dans \mathcal{T}) provient d'un morphisme continu

$$(8.13.2) \quad \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow G_B(\mathbf{A}^f).$$

“Continu” signifie que chaque $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow (G/W_n G)_B(\mathbf{Q}_\ell)$ l'est.

Le Frobenius cristallin provient, pour chaque p , de

$$(8.13.3) \quad \phi_p \in G_{\text{DR}}(\mathbf{Q}_p).$$

8.14. Soit G_1 le quotient de G par $W_{-2N-1}(G)$ et par le groupe dérivé de U . Prenons N impair ≥ 1 . Le groupe G_1 est alors extension de \mathbf{G}_m par le produit des $\mathbf{Q}(i)$, i impair de 3 à N (8.9.1).

Nous ferons l'hypothèse suivante:

(8.14.1) pour i impair ≥ 3 , la classe du torseur $P_{1,i}$ de 3.1 dans $H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}), \mathbf{Q}_\ell(i))$ est non nulle.

Pour $\ell \neq 2$, c'est un théorème de C. Soulé : éléments cyclotomiques en K -théorie (Astérisque 147–148, SMF 1987, pp. 225–257, remarque 6.4).

8.14.2 LEMME. Sous l'hypothèse 8.14.1, l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans $G_{1B}(\mathbf{Q}_\ell)$ est ouverte.

PREUVE. Le groupe $G_{1B} \otimes \mathbf{Q}_\ell$ sur \mathbf{Q}_ℓ est extension de \mathbf{G}_m par un produit de groupes additifs $\mathbf{G}_a^{(i)}$, i impair de 3 à N , \mathbf{G}_m agissant sur $\mathbf{G}_a^{(i)}$ par $\lambda \mapsto \lambda^i$. Soit \mathcal{L} l'algèbre de Lie de l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. On sait que l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans le quotient $\mathbf{G}_m(\mathbf{Q}_\ell) = \mathbf{Q}_\ell^*$ est \mathbf{Z}_ℓ^* , en particulier est ouverte. La trace de \mathcal{L} sur le produit des $\text{Lie}(\mathbf{G}_a^{(i)})$ est graduée, car stable par l'action adjointe de l'image. Parce que la classe de P_i dans

$H^1(\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \mathbf{Q}_\ell(i))$ est non nulle, \mathcal{L} s'envoie sur l'algèbre de Lie du quotient $\mathbf{G}_m \cdot \mathbf{G}_a^{(i)}$ de $G_{1B} \otimes \mathbf{Q}_\ell$. On a $\mathcal{L} = \text{Lie } G_{1B} \otimes \mathbf{Q}_\ell$ et 8.14.2 en résulte.

8.15 PROPOSITION. *Sous l'hypothèse (8.14.1), l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $(G_B/W_{-N-1}(U_B))(\mathbf{Q}_\ell)$ est ouverte.*

PREUVE. Soit \mathcal{L} sur l'algèbre de Lie de l'image. D'après 8.14, la trace \mathcal{L}_1 de \mathcal{L} sur l'algèbre de Lie nilpotente $\text{Lie}(U_B/W_{-N-1}U_B) \otimes \mathbf{Q}_\ell$ s'envoie sur cette algèbre rendue abélienne. On a donc $\mathcal{L}_1 = \text{Lie}(U_B/W_{-N-1}U_B) \otimes \mathbf{Q}_\ell$ (Bourbaki Lie I §4 ex 4b), $\mathcal{L} = \text{Lie}(G_B/W_{-N-1}U_B) \otimes \mathbf{Q}_\ell$ et 8.15.

8.16. Modulo le groupe dérivé de U , G et ses structures 8.10, 8.13 sont complètement déterminés par 8.1 et les torseurs $P_{1,k}$ de 3.1. Posons $\bar{G} = G/U'$. Explicitant 8.10 et 8.13, on obtient:

(8.16.1) D'après (8.9.4) et (8.9.2), \bar{G}_{DR} est le produit semi direct de \mathbf{G}_m par un produit de \mathbf{G}_a , un par entier impair ≥ 3 . Notons τ l'inclusion de \mathbf{G}_m et e_k le générateur 1 de l'algèbre de Lie du \mathbf{G}_a d'indice k . L'action intérieure de $\lambda \in \mathbf{G}_m$ envoie e_k sur $\lambda^k e_k$.

(8.16.2) Avec les notations de 8.10(ii)(iii), on a dans \bar{G}_{DR}

$$a_0 = \exp \left(\sum -(k-1)! \zeta(k) e_k \right).$$

Si $a = a_0 \cdot \tau(2\pi i)$, on a $\bar{G}_B(\mathbf{Q}) = a \bar{G}_{\text{DR}}(\mathbf{Q}) a^{-1}$. Notons τ^B le morphisme $a \tau a^{-1}$ de \mathbf{G}_m dans \bar{G}_B , et $e_k^B = (2\pi i)^k e_k$.

(8.16.3) Soit $p_k \in P_{1,k,B} \subset P_{1,k,\text{DR}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C} : p_k = -(k-1)! \zeta(k)$. Notons encore p_k son image dans $P_{k,\widehat{\mathbb{Z}}}$. Pour $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, soit $\chi(\sigma) \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ donnant son action sur les racines de 1, et $a_k(\sigma) \in \widehat{\mathbb{Z}}(k)$ défini par

$$\sigma p_k = p_k + a_k(\sigma).$$

Identifions $\mathbb{Z}/(N)$ à $\mathbb{Z}/(N)(1)$ par $\exp(2\pi i a/N)$ et, de même, $\widehat{\mathbb{Z}}$ à $\widehat{\mathbb{Z}}(k)$. Le morphisme (8.13.2) induit

$$\sigma \mapsto \exp \left(\sum a_k(\sigma) e_k^B \right) \cdot \tau^B(\chi(\sigma)) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \bar{G}_B(\mathbb{A}^f).$$

(8.16.4) Dans $\bar{G}_{\text{DR}} \otimes \mathbf{Q}_p$, on a

$$\phi_p^{-1} = \exp \left(\sum (k-1)! \zeta_p(k) e_k \right) \cdot \tau(p).$$

8.17. Jusqu'ici, nous nous sommes exprimés en termes de la catégorie tannakienne \mathcal{T} des motifs lisses sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ extensions itérées de motifs de Tate. Pour un objet M de \mathcal{T} , la conjecture 8.1 a les conséquences suivantes.

On a $M_{\text{DR}} = \bigoplus M_{\text{DR}}^k$ (8.8), d'où une action τ de \mathbb{G}_m sur M_{DR} . Soit F_∞ le Frobenius réel de $M_B \otimes \mathbb{C}$. Il respecte W et agit sur le gradué comme $\tau(-1)$. Posons

$$F_\infty = \exp(2N)\tau(-1)$$

avec $N = \sum N_\ell$ et chaque N_ℓ de degré $\ell > 0$. Parce que F_∞ est une involution, $N_\ell = 0$ pour ℓ pair. Parce que F_∞ respecte $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$, les N_ℓ sont réels.

(8.17.1) $N_1 = 0$.

Soit $\mathfrak{u}_{\text{DR}}[M]_{\mathbb{R}}$ la \mathbb{R} -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(M_{\text{DR}}) \otimes \mathbb{R}$ engendrée par les N_ℓ . Elle est graduée.

(8.17.2) La sous-algèbre $\mathfrak{u}_{\text{DR}}[M]_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{gl}(M_{\text{DR}}) \otimes \mathbb{R}$ est définie sur \mathbb{Q} .

Posons $\mathfrak{u}_{\text{DR}}[M] = \mathfrak{u}_{\text{DR}}[M]_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{gl}(M_{\text{DR}})$, soit U_{DR}^M le groupe unipotent correspondant et soient G_{DR}^M le produit semi-direct $\mathbb{G}_m \ltimes U_{\text{DR}}^M$, l'action de \mathbb{G}_m étant définie par la graduation de $\mathfrak{u}_{\text{DR}}[M]$.

(8.17.3) Il existe $a_0 \in U_{\text{DR}}^M(\mathbb{R})$ qui envoie $\oplus(2\pi i)^k M_{\text{DR}}^k$ sur M_B . Pour $a = a_0\tau(2\pi i)$, ceci se récrit: $M_B = aM_{\text{DR}}$.

Soit G_B^M la forme de G_{DR}^M qui agit sur M_B : $G_B^M(\mathbb{Q}) = aG_{\text{DR}}^M(\mathbb{Q})a^{-1}$. Il existe

$$(8.17.4) \quad \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow G_B^M(\mathbb{A}^f)$$

donnant l'action de Galois sur $M_{\mathbb{A}^f}$; l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $G_B(\mathbb{Q}_\ell)$ est ouverte (modulo (8.14.1)).

(8.17.5) Pour tout p , ϕ_p est dans l'image de $G_{\text{DR}}(\mathbb{Q}_p)$.

PREUVE. L'assertion (8.17.1) résulte de 8.12(i) et (8.17.2) résulte de ce que les N_ℓ engendrent l'image de $U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$ (8.12(ii)). L'assertion (8.17.3) résulte de 8.10; (8.17.4) et (8.17.5) de 8.13 et 8.15.

8.18. Si M est tel que les endomorphismes N_ℓ de $M_{\text{DR}} \otimes \mathbb{R}$ commutent, la connaissance 8.16 qu'on a de $G_{\text{DR}}/(U_{\text{DR}}, U_{\text{DR}})$ fournit des résultats plus précis:

- (8.18.1) $e_k = -N_k/\zeta(k)$ est DR-rationnel, i.e. dans $\mathfrak{u}[M_{\text{DR}}]$.
- (8.18.2) $M_B = \exp(\sum N_k)(\oplus (2\pi i)^k M_{\text{DR}}^{(k)})$. En particulier, l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_B[M]$ a pour base les $e_B^k := (2\pi i)^k e_{\text{DR}}^k$ (k impair ≥ 3).
- (8.18.3) L'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $M_B \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est déterminé comme en (8.16.3)
- (8.18.4) $\phi_p^{-1} = \exp(\sum (k-1)! \zeta_p(k) e_k) \tau(p)$.

8.19. Pour M plus général (ou, universellement, dans $\text{Lie } U_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$), il n'y a pas de raison d'espérer que $N_k/\zeta(k)$ soit DR-rationnel. Il le sera, après correction par une combinaison linéaire de crochets itérés de N_ℓ , de poids k . Pour $k = 3, 5, 7, 9$, ceci implique la DR-rationalité de $N_k/\zeta(k)$. Pour $k = 11$, il doit exister λ tel que

$$N_{11}/\zeta(11) + \lambda [N_3[N_3, N_5]]/\zeta(3)^{-2}\zeta(5)^{-1}$$

soit DR-rationnel. Je n'ai pas vérifié que $[N_3[N_3, N_5]] \neq 0$ dans $\text{Lie } U_{\text{DR}}$. Si tel est le cas, λ est uniquement déterminé mod \mathbb{Q} . Je ne l'ai pas calculé.

Sur une base plus générale que l'anneau des entiers d'un corps de nombres, les $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$ sont déterminés par 8.2.1 et la conjecture suivante.

8.20 CONJECTURE. Si X est lisse à fibres géométriques connexes (en particulier non vides) sur Y et que $n > 1$, les groupes $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n))$ sont les mêmes calculés dans la catégorie des motifs sur X ou sur Y .

§9. Rappels sur les groupes unipotents.

Ce numéro est préliminaire à la construction de motifs attachés à des π_1 . Il s'agit de résultats bien connus, rassemblés pour la commodité du lecteur.

9.1. Si G est un groupe algébrique unipotent sur un corps k de caractéristique 0, l'application exponentielle

$$\exp : \mathrm{Lie} G \longrightarrow G$$

est définie, et est un isomorphisme de $\mathrm{Lie} G$, muni de la loi de Hausdorff (Bourbaki, Lie II §6), avec G . Le foncteur $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$: (groupes unipotents sur k) \rightarrow (algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sur k) est donc une équivalence de catégories, d'inverse $\mathcal{L} \mapsto (\mathcal{L}, \text{ muni de la loi de Hausdorff})$.

9.2. Mal'cev ([Mal]) ne s'exprime pas en terme de groupes algébriques unipotents sur \mathbb{Q} . Il utilise la notion voisine de groupe nilpotent sans torsion divisible. Dans un tel groupe Γ , l'application $x \mapsto x^n$ (n entier $\neq 0$) est bijective et on peut définir x^r pour $x \in \Gamma$, $r \in \mathbb{Q}$.

Si \mathcal{L} est une algèbre de Lie nilpotente sur \mathbb{Q} , la loi de Hausdorff fait de \mathcal{L} un groupe nilpotent sans torsion divisible. Ce foncteur (algèbres de Lie nilpotentes sur \mathbb{Q}) \rightarrow (groupes nilpotents sans torsion divisibles) est une équivalence de catégories (Bourbaki Lie II §6 ex 4). On note $\Gamma \mapsto \mathrm{Lie} \Gamma$ son inverse.

9.3. Le foncteur d'inclusion

$$(\text{groupes nilpotents uniquement divisibles}) \rightarrow (\text{groupes nilpotents})$$

a un adjoint à droite $\Gamma \mapsto \Gamma_{\mathbb{Q}}$ (Bourbaki, Lie II §4 ex 15 et §5 ex 6). Pour Γ nilpotent, les éléments de torsion de Γ forment un sous-groupe T (loc. cit. §4 ex 14b) et Γ/T s'injecte dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$, avec $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \cup(\Gamma/T)^{1/n}$. Nous poserons

$$\mathrm{Lie} \Gamma := \mathrm{Lie} \Gamma_{\mathbb{Q}}.$$

9.4. Disons qu'une représentation d'un groupe Γ sur un espace vectoriel V sur k de caractéristique 0 est *nilpotente* si V admet une filtration finie

F , respectée par Γ , telle que l'action de Γ sur $\text{Gr}_F(V)$ soit triviale. Supposons Γ nilpotent. Soient V une représentation nilpotente de Γ et F une filtration de V qui le montre: l'action de Γ sur $\text{Gr}_F(V)$ est triviale. Le groupe $\{\sigma \in GL(V) \mid \sigma F = F \text{ et } \text{Gr}_F(\sigma) = 1\}$ est uniquement divisible. L'action de Γ se factorise donc par $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Elle est définie par un morphisme d'algèbres de Lie

$$\text{Lie } \Gamma \rightarrow \{\sigma \in \mathfrak{gl}(V) \mid \sigma \text{ respecte } F \text{ et } \text{Gr}_F(\sigma) = 0\}.$$

Cette construction est une bijection

(représentation nilpotente de Γ sur V)

$$\xrightarrow{\sim} (\text{représentation nilpotente de Lie } \Gamma \text{ sur } V).$$

9.5. Supposons Γ de génération finie. Le sous-groupe de torsion T est alors fini et l'algèbre de Lie $\text{Lie } \Gamma$ est de dimension finie sur \mathbb{Q} . On appelle *enveloppe algébrique unipotente* et on note $\Gamma^{\text{alg un}}$ ou simplement Γ^{alg} le groupe algébrique unipotent sur \mathbb{Q} d'algèbre de Lie $\text{Lie } \Gamma$ (9.1). On a

$$(9.5.1) \quad \Gamma/T \hookrightarrow \Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{Q})$$

et l'image de Γ/T est un sous-groupe de congruence de $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{Q})$. Si $\Gamma' \subset \Gamma$ est d'indice fini, on a $\Gamma'_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathbb{Q}}$. La topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ/T est celle des sous-groupes de congruence, induite par celle de $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{A}^f)$.

L'inclusion (9.5.1) induit une équivalence

(représentation linéaires de Γ^{alg}) \rightarrow (représentations nilpotentes de Γ)

(cf. 9.4).

9.6. Un groupe nilpotent fini est le produit de ses ℓ -Sylow. Un groupe nilpotent pro-fini G est donc le produit de ses pro- ℓ -Sylow G_{ℓ} .

Soit Γ nilpotent de génération finie sans torsion. Le complété profini Γ^{\wedge} de Γ est alors l'adhérence Γ^- de Γ dans $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{A}^f)$. Cette adhérence est compacte ouverte. Chaque Γ_{ℓ}^{\wedge} est la trace sur Γ^{\wedge} de $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{Q}_{\ell}) \subset \Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{A}^f)$ et

$$\Gamma^{\wedge} = \prod_{\ell} \Gamma_{\ell}^{\wedge} \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\ell}^{\wedge} \subset \Gamma^{\text{alg}}(\mathbb{Q}_{\ell}),$$

chaque Γ_ℓ^\wedge compact ouvert. Le groupe Γ_ℓ^\wedge est encore le complété de Γ pour la topologie de ses sous-groupes d'indice une puissance de ℓ .

Le groupe Γ_ℓ^\wedge , ouvert dans $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbf{Q}_\ell)$, est un groupe de Lie ℓ -adique. Son algèbre de Lie $\text{Lie}(\Gamma_\ell^\wedge)$ est celle de $\Gamma^{\text{alg}}(\mathbf{Q}_\ell)$:

$$(9.6.1) \quad \text{Lie}(\Gamma_\ell^\wedge) = \text{Lie } \Gamma^{\text{alg}}(\mathbf{Q}_\ell) = \text{Lie } \Gamma^{\text{alg}} \otimes \mathbf{Q}_\ell.$$

Pour ℓ plus grand que l'ordre de nilpotence de Γ , $\log(\Gamma_\ell^\wedge) \subset \text{Lie } \Gamma_\ell^\wedge$ est un réseau. Si on choisit une structure entière sur $\text{Lie } \Gamma^{\text{alg}}$, ce réseau est pour presque tout ℓ le réseau entier $\otimes \mathbf{Z}_\ell$:

$$\text{Lie } \Gamma^{\text{alg}} \otimes \mathbf{A}^f = \prod \text{Lie } \Gamma_\ell^\wedge,$$

produit restreint rel. les $\log \Gamma_\ell^\wedge$.

9.7. Soit G un groupe nilpotent profini dont on suppose qu'il est isomorphe au complété profini Γ^\wedge d'un groupe nilpotent de génération finie sans torsion Γ . A G , on attache:

(a) Sa décomposition $G = \prod_\ell G_\ell$.

(b) Les algèbres de Lie $\text{Lie}(G_\ell)$ sur \mathbf{Q}_ℓ , et le groupe algébrique unipotent $G_\ell^{\text{alg un}}$ (ou simplement G^{alg}) sur \mathbf{Q}_ℓ correspondant (9.1). Le groupe G_ℓ est un sous-groupe compact ouvert de $G_\ell^{\text{alg}}(\mathbf{Q}_\ell)$

(c) Pour ℓ plus grand que le degré de nilpotence, $G_\ell \subset G_\ell^{\text{alg}}$ correspond à un réseau $\text{Lie}(G_\ell)_{\mathbf{Z}_\ell} \subset \text{Lie}(G_\ell)$ dont il est l'exponentielle. On définit l'algèbre de Lie adélique $\text{Lie}(G)$ de G comme étant le produit restreint des $\text{Lie}(G_\ell)$, rel. les $\text{Lie}(G_\ell)_{\mathbf{Z}_\ell}$. Soit $G_{\mathbf{A}^f}^{\text{alg un}}$ (ou simplement $G_{\mathbf{A}^f}^{\text{alg}}$) le groupe sur \mathbf{A}^f correspondant.

Tous ces objets ne dépendent que de G . Un isomorphisme

$$G = \Gamma^\wedge$$

(Γ nilpotent de génération finie sans torsion) fournit

$$(9.7.1) \quad \text{Lie } G = \text{Lie } \Gamma \otimes \mathbf{A}^f,$$

$$(9.7.2) \quad G_{\mathbf{A}^f}^{\text{alg}} = \Gamma^{\text{alg}} \otimes \mathbf{A}^f,$$

où dans (9.7.2) $\otimes \mathbf{A}^f$ désigne une extension des scalaires.

9.8. Soient π un groupe de génération finie et G son complété profini. Le quotient $G^{[N]}$ de G (0.3) est le complété profini du groupe nilpotent de génération finie sans torsion $\pi^{[N]}$, et 9.7 s'applique.

Passant à la limite projective sur N , on définit les schémas en groupes sur \mathbf{Q} et \mathbf{A}^f :

$$\pi^{\text{alg}} := \lim \text{proj } \pi^{[N]\text{alg}}$$

$$G^{\text{alg}} := \lim \text{proj } G_{\mathbf{A}^f}^{[N]\text{alg}}$$

et $G_{\mathbf{A}^f}^{\text{alg}}$ se déduit de π^{alg} par extension des scalaires de \mathbf{Q} à \mathbf{A}^f . S'il est besoin de préciser, on écrit “alg.un.” plutôt que “alg.”.

§10. Théories du π_1 .

10.1. Dans ce paragraphe, nous passons en revue trois théories du π_1 . La théorie classique, pour X un espace topologique localement connexe et localement simplement connexe. La théorie profinie, pour X un schéma noethérien; nous nous intéresserons surtout à sa variante relative, pour X une variété algébrique sur un corps k . La théorie algébrique (à la de Rham) pour X lisse sur k de caractéristique 0.

Supposons X connexe (resp. X/k géométriquement connexe), et supposons choisi un “point base” 0. Dans chacune des théories considérées, on définit un *groupe fondamental* $\pi_1(X, 0)$ et un $\pi_1(X, 0)$ -torseur sur X , le *torseur fondamental*, jouant le rôle de revêtement universel de $(X, 0)$. Indépendamment du choix d'un point base, chaque théorie fournit un *groupoïde fondamental*. Une fois choisi un point base, le torseur fondamental et le groupoïde fondamental se déterminent l'un l'autre. Étant donné $f : \pi_1(X, 0) \rightarrow \Gamma$, on appellera encore Γ -*torseur fondamental* le torseur déduit du torseur fondamental en poussant par f .

Dans chacune des théories considérées, les mots “groupe”, “torseur” et “groupoïde” ont un sens différent. Nous commencerons par les définir dans un cadre très général, couvrant ceux dont nous aurons besoin, et à expliquer dans ce cadre général comment, en présence d'un point base, on passe du point de vue des groupoïdes à celui des torseurs.

Groupoïdes (no 2 à 9).

10.2. Supposons donnés une catégorie \mathcal{S} et une catégorie \mathcal{F} fibrées sur \mathcal{S} (SGA 1 VI 6.1): on dispose de catégories fibre $\mathcal{F}(S)$ (S objet de \mathcal{S}) et pour $f : S \rightarrow T$ dans \mathcal{S} de $f^* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(S)$. Supposons que (a) les produits fibrés existent dans \mathcal{S} , (b) les produit finis existent dans chaque $\mathcal{F}(S)$, en particulier chaque $\mathcal{F}(S)$ a un objet final (le produit vide) et (c) pour tout $f : S \rightarrow T$, le foncteur image inverse $f^* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ respecte les produits finis.

Les catégories fibrées \mathcal{F}/\mathcal{S} que nous utiliserons dans ce paragraphe sont énumérées en 10.6.

Un *groupoïde en \mathcal{F} sur S* dans \mathcal{S} (on dira aussi: agissant sur S) est un objet P de $\mathcal{F}(S \times S)$ muni d'une “loi de composition”

$$(10.2.1) \quad o : \text{pr}_{1,2}^* P \times \text{pr}_{2,3}^* P \longrightarrow \text{pr}_{1,3}^* P \quad \text{dans } \mathcal{F}(S \times S \times S),$$

vérifiant un axiome qu'il est commode d'exprimer en termes du morphisme de foncteurs représentables défini par (10.2.1):

(a) la donnée de P dans $\mathcal{F}(S \times S)$ équivaut à celle, pour tout T dans \mathcal{S} et $f, g : T \rightarrow S$, de $P_{f,g} = (f, g)^*P$ dans $\mathcal{F}(T)$, de formation compatible aux changements de base $T' \rightarrow T$;

(b) la donnée de (10.2.1) équivaut à celle de morphismes compatibles aux changements de base

$$(10.2.2) \quad o : P_{h,g} \times P_{g,f} \longrightarrow P_{h,f}$$

pour $f, g, h : T \rightarrow S$;

(c) pour A dans $\mathcal{F}(T)$, soit $P_{f,g}(A) := \text{Hom}(A, P_{f,g})$; la donnée (10.2.2) équivaut à celle de lois de composition

$$(10.2.3) \quad o : P_{h,g}(A) \times P_{g,f}(A) \longrightarrow P_{h,f}(A)$$

fonctorielles en A dans $\mathcal{F}(T)$.

L'axiome est que pour tout T dans \mathcal{S} et tout A dans $\mathcal{F}(T)$, on obtienne une catégorie où toute flèche est inversible en prenant $\text{Hom}(T, S)$ comme ensemble d'objets, $P_{g,f}(A)$ pour ensemble de flèches de f dans g et la composition (10.2.3).

10.3 REMARQUE. (i) Si \mathcal{S} est une catégorie où existent les produits fibrés, les hypothèses de 10.2 sont vérifiées par les $\mathcal{F}(S) := \mathcal{S}/S$, où \mathcal{S}/S est la catégorie des objets X de \mathcal{S} munis de $a : X \rightarrow S$. Pour ce choix de catégorie fibrée sur \mathcal{S} , on retrouve les \mathcal{S} -groupoïdes de SGA 3 V 1.

(ii) Soient $\delta : S \rightarrow S \times S$ l'application diagonale et $\epsilon : S \times S \rightarrow S \times S$ la symétrie. Les "applications identiques" $e \in P_{f,f}(A)$, étant fonctorielles en T et A , proviennent d'un morphisme e_S , dans $\mathcal{F}(S)$, de l'objet final dans δ^*P . Le passage à l'inverse: $P_{f,g}(A) \rightarrow P_{g,f}(A)$, étant fonctoriel en T et A , provient d'un morphisme " -1 ", dans $\mathcal{F}(S \times S)$, de P dans ϵ^*P . Les axiomes des groupoïdes peuvent aussi s'exprimer en terme de o, e_S et " -1 ", rendant commutatifs des diagrammes convenables (cf. SGA 3 V 1 ou [D4] 1.6).

(iii) Pour S_0 dans \mathcal{S} , si on applique la définition d'un groupoïde en \mathcal{F} avec \mathcal{S} remplacé par \mathcal{S}/S_0 , on parlera de groupoïde sur S/S_0 .

10.4. Soit P un groupoïde en \mathcal{F} sur S . Une *action* de P sur un objet X de $\mathcal{F}(S)$ est un $\mathcal{F}(S \times S)$ -morphisme

$$(10.4.1) \quad \text{pr}_{1,2}^* P \times \text{pr}_2^* X \longrightarrow \text{pr}_1^* X$$

vérifiant l'axiome suivant. La donnée (10.4.1) équivaut à celle, pour tout T dans \mathcal{S} et $f, g : T \rightarrow S$ de

$$(10.4.2) \quad P_{g,f} \times f^* X \longrightarrow g^* X ,$$

compatible aux changements de base $T' \rightarrow T$. La donnée de (10.4.2) équivaut à celle de

$$(10.4.3) \quad P_{g,f}(A) \times f^* X(A) \longrightarrow g^* X(A)$$

fonctoriel en A dans $\mathcal{F}(T)$. On demande que pour tout T et A , (10.2.3) et (10.4.3) vérifient

$$\begin{aligned} (u \circ v)(x) &= u(v(x)) \quad \text{pour } u \in P_{h,g}(A), v \in P_{g,f}(A), x \in f^* X(A); \\ ex &= x \quad \text{pour } e \in P_{f,f}(A) \text{ l'identité}, x \in f^* X(A). \end{aligned}$$

Ce peut aussi s'exprimer par des diagrammes: associativité de (10.2.1) et (10.4.1), unités.

10.5. Un groupoïde P sur S définit par restriction à la diagonale un objet en groupes G de $\mathcal{F}(S)$, dont l'image inverse par $f : T \rightarrow S$ est $P_{f,f}$. Par composition, $\text{pr}_1^* G$ (resp. $\text{pr}_2^* G$) agit à gauche (resp. à droite) sur P . Le groupoïde P agit sur G par

$$(p, g) \longmapsto pgp^{-1} .$$

10.6. (i) Dans la théorie classique, on prendra pour \mathcal{S} et \mathcal{F} : \mathcal{S} : espaces topologiques localement connexes et localement simplement connexes. $\mathcal{F}(S)$: systèmes locaux (= faisceaux localement constants d'ensembles) sur S .

On parlera de *groupoïdes localement constants*.

(ii) Dans la théorie profinie relative, on prendra pour \mathcal{S} et \mathcal{F} : \mathcal{S} : schémas sur S_0 fixé. $\mathcal{F}(S)$: faisceaux profinis lisses sur S : la catégorie des faisceaux localement constants d'ensembles finis sur le site étale de S s'identifie à celle

des $u : T \rightarrow S$ finis étale, et on prend pour $\mathcal{F}(S)$ la catégorie des proobjets (4.7) de cette catégorie.

On parlera de *groupoïde profini lisse*.

(iii) Dans la théorie algébrique, on prendra pour \mathcal{S} et $\mathcal{F} : \mathcal{S}$: schémas sur S_0 fixé. $\mathcal{F}(S)$: schémas $u : T \rightarrow S$ sur S , affines sur S .

Dans (ii) et (iii), S_0 sera le plus souvent le spectre d'un corps de caractéristique 0, et on prendra toujours S plat sur S_0 .

10.6.1 NOTATION: Dans la théorie algébrique, pour \mathcal{V} un fibré vectoriel sur S , $\underline{\text{Aut}}_{S_0}(\mathcal{V}) := \underline{\text{Isom}}_{S \times_{S_0} S}(\text{pr}_2^*\mathcal{V}, \text{pr}_1^*\mathcal{V})$ est un groupoïde agissant sur S/S_0 . Une *action* d'un groupoïde P sur \mathcal{V} est une action *linéaire* de P sur le S -schéma défini par \mathcal{V} , i.e. un morphisme de groupoïde de P dans $\underline{\text{Aut}}_{S_0}(\mathcal{V})$.

On note $\text{Rep}(X, P)$ la \otimes -catégorie des fibrés vectoriels sur X munis d'une action de P .

10.7. Supposons donnée une topologie sur les catégories $\mathcal{F}(S)$, telle que les foncteurs représentables $h_X : T \mapsto \text{Hom}(T, X)$ soient des faisceaux, et supposons que les $f^* : \mathcal{F}(T) \rightarrow \mathcal{F}(S)$ transforment familles couvrantes en familles couvrantes. Dans les cas considérés en 10.6, on dira qu'une famille $u_i : X_i \rightarrow X$ est couvrante si respectivement:

- (i): elle est surjective fibre à fibre
- (ii): une sous-famille finie est surjective fibre géométrique à fibre géométrique
- (iii): elle est couvrante *fqc*.

La notion de torseur est alors définie dans $\mathcal{F}(S)$ ainsi que celle de bitorseur (0.6). Si G est un objet en groupe de $\mathcal{F}(S)$, un G -torseur est un objet P de $\mathcal{F}(S)$ avec h_P muni d'une structure de torseur sous $h_G : P$ est muni d'une action droite $P \times G \rightarrow P$ de G , induisant un isomorphisme $(g, p) \mapsto (p, pg)$ de $P \times G$ avec $P \times P$ (pseudo-torseur), et P couvre l'objet final.

Dans $\mathcal{F}(S)$, les opérations (0.6) risquent de faire sortir des faisceaux représentables. Dans nos applications, cette difficulté ne se présentera pas; nous l'ignorerons et appliquerons sans commentaire ces opérations à des torseurs de $\mathcal{F}(S)$. Dans le cadre 10.6(ii), la description 10.7 des torseurs est correcte, mais artificielle: il serait plus naturel de procéder systématiquement par passage à la limite.

10.8. Un groupoïde P est dit *transitif* s'il couvre l'objet final de $\mathcal{F}(S \times S)$. Le formalisme des groupoïdes transitifs se ramène à celui de torseurs: si P est transitif, de restriction à la diagonale G , P est un $(\text{pr}_1^*G, \text{pr}_2^*G)$ -bitorseur (0.6) et la loi de composition est un isomorphisme de bitorseurs dans $\mathcal{F}(S \times S \times S)$.

$$(10.8.1) \quad \text{pr}_1^*G(\text{pr}_{1,2}^*P)_{\text{pr}_2^*G} \circ \text{pr}_2^*G(\text{pr}_{2,3}^*P)_{\text{pr}_3^*G} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_1^*G(\text{pr}_{1,3}^*P)_{\text{pr}_3^*G}.$$

Par cette construction, la donnée d'un groupoïde transitif agissant sur S équivaut à celle d'un groupe G de $\mathcal{F}(S)$ et d'un $(\text{pr}_1^*G, \text{pr}_2^*G)$ -bitorseur P sur $S \times S$ muni d'une composition (10.9.1) supposée associative (une égalité entre flèches dans $\mathcal{F}(S \times S \times S \times S)$).

Si $\varphi : G \rightarrow H$ est un morphisme et qu'on se donne une action de P sur H , compatible à son action 10.5 sur G , le pr_2H -torseur déduit de P en poussant par $\text{pr}_2^*G \rightarrow \text{pr}_2^*H$ est muni d'une structure de groupoïde de restriction à la diagonale H . On le dira déduit de P en *poussant* par $G \rightarrow H$.

10.9. Si s est une section de S/S_0 , le choix de s permet de ramener la notion de groupoïde transitif sur S/S_0 (10.3(iii)) à celle de torseur sur S : $P_{s,s}$ est un groupe sur S_0 i.e. de $\mathcal{F}(S_0)$ (c'est s^*G) et $P_{*,s}$: la restriction de P à S par $x \mapsto (x, s) : S \rightarrow S \times S$ est un $P_{s,s}$ -torseur sur S , trivialisé en s . Réciproquement, si G est un objet en groupes de $\mathcal{F}(S_0)$ et Q un G -torseur sur S , trivialisé en s , Isom($\text{pr}_2^*Q, \text{pr}_1^*Q$) est un groupoïde transitif agissant sur S/S_0 . Cette construction est inverse de la précédente.

Si t est une autre section, on passe comme suit de $P_{s,s}$ et $P_{*,s}$ à $P_{t,t}$ et $P_{*,t}$: $P_{s,s}$ agit sur $P_{s,s}$ et $P_{*,s}$, et on tord par le $P_{s,s}$ -torseur $P_{t,s}$.

A cause de ces équivalences, le langage des groupoïdes est surtout utile si on ne veut pas fixer une section s . En pratique, l'existence de s ne sera pas un problème, par localisation étale sur S_0 .

Théorie classique (n° 10 à 13).

10.10. Soit X un espace topologique comme en 10.6(i). Le cas qui nous intéresse est celui de l'espace des points d'une variété algébrique complexe. Pour x et y dans X , soit $P_{y,x}$ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de x à y . Pour x' proche de x et y' proche de y , $P_{y,x}$ est en bijection canonique avec $P_{y',x'}$: choisir des chemins de x à x' et y à y' dans des voisinages simplement connexes de x et y , et composer

$\gamma \in P_{y,x}$ avec ces chemins. Cette construction fait des $P_{y,x}$ les fibres d'un faisceau localement constant (= système local) $P(X)$, ou simplement P , sur $X \times X$: $P_{y,x}$ = fibre de P en $(y,x) \in X \times X$. Pour x,y,z dans X , α un chemin de x à y et β un chemin de y à z , nous noterons $\beta\alpha$ le chemin composé de x à z . Par passage au quotient, cette composition définit $P_{z,y} \times P_{y,x} \rightarrow P_{z,x}$ et ces applications sont les fibres d'un morphisme de faisceaux sur $X \times X \times X$

$$(10.10.1) \quad o : \text{pr}_{1,2}^* P \times \text{pr}_{2,3}^* P \longrightarrow \text{pr}_{1,3}^* P .$$

La composition (10.10.1) fait de P un groupoïde localement constant sur X , le *groupoïde fondamental* de X .

La fibre de P en (x,x) est le *groupe fondamental* $\pi_1(X,x)$. Prendre garde que nous avons défini le composé $\beta\alpha$ comme étant le lacet α suivi du lacet β . La restriction de P à la diagonale est le *système local des groupes fondamentaux* $\pi_1(X,x)$. L'image inverse de P par $X \xrightarrow{\sim} X \times \{x\} \subset X \times X$ est le *revêtement universel* de (X,x) . Si X est connexe, c'est un $\pi_1(X,x)$ -torseur trivialisé en x , que nous appellerons aussi le *torseur fondamental* $T(X,x)$. Sa fibre en x est $\pi_1(X,x)$ et l'action droite de $\pi_1(X,x)$ sur $T(X,x)$ a pour fibre en x l'action par multiplication à droite.

10.11. Soit \mathcal{F} un faisceau localement constant sur X . Soit $\alpha : [0,1] \rightarrow X$ un chemin de x à y . Le faisceau $\alpha^*\mathcal{F}$ sur $[0,1]$ est localement constant, donc constant, d'où un isomorphisme

$$[\alpha] : \mathcal{F}_x = (\alpha^*\mathcal{F})_0 \xleftarrow{\sim} \Gamma([0,1], \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\alpha^*\mathcal{F})_1 = \mathcal{F}_y .$$

Par passage au quotient, on obtient

$$P_{y,x} \times \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_y .$$

et ces applications sont les fibres d'un morphisme de faisceaux sur $X \times X$:

$$(10.11.1) \quad P \times \text{pr}_2^* \mathcal{F} \rightarrow \text{pr}_1^* \mathcal{F}$$

qui est une action du groupoïde fondamental sur \mathcal{F} .

Supposons X connexe et choisissons un point base 0 . Pour \mathcal{F} un faisceau localement constant sur X , la fibre en $(0,0) \in X \times X$ du morphisme

(10.11.1) est une action de $\pi_1(X, 0)$ sur \mathcal{F}_0 et on sait qu'on obtient ainsi une équivalence de catégories

$$(10.11.2) \quad \begin{array}{c} (\text{faisceaux localement constants}) \xrightarrow{\sim} \\ (\text{ensembles munis d'une action de } \pi_1(X, 0)). \end{array}$$

Si F est un ensemble muni d'une action de $\pi_1(X, 0)$, le groupe fondamental agit sur le faisceau constant \underline{F} et l'inverse de (10.11.2) est

$$F \longmapsto \underline{F} \text{ tordu par le torseur fondamental } T(X, 0).$$

On a $\pi_1(X \times X, (0, 0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, 0) \times \pi_1(X, 0)$. Le faisceau localement constant P sur $X \times X$ correspond par le foncteur fibre en $(0, 0)$ à $\pi_1(X, 0)$ muni de l'action

$$(\alpha, \beta)x = \alpha x \beta^{-1}.$$

L'action 10.11.1 du groupoïde fondamental sur le faisceau localement constant \mathcal{F} est l'unique action de P sur \mathcal{F} : une action est la même chose qu'un morphisme de groupoïdes de P dans $\underline{\text{Isom}}_{X \times X}(\text{pr}_2^*\mathcal{F}, \text{pr}_1^*\mathcal{F})$ et on applique:

10.12 PROPOSITION. *Le groupoïde fondamental de X est un objet initial de la catégorie des groupoïdes localement constants sur X .*

1^{ere} PREUVE. Soit Q un groupoïde localement constant. Si γ est un chemin de p à q , $\gamma \times p$ est un chemin de (p, p) à (q, q) . Il définit

$$[\gamma \times p] : Q_{p,p} \longrightarrow Q_{q,p}.$$

Soit $T(\gamma)$ l'image dans $Q_{q,p}$ de l'élément neutre de $Q_{p,p}$. Cette image ne dépend que de la classe d'homotopie de γ , d'où $T : P_{q,p} \rightarrow Q_{q,p}$. Si δ est un chemin de q à r , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q_{q,q} \times Q_{q,p} & \longrightarrow & Q_{q,p} \\ [\delta \times q] \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow [\delta \times p] \\ Q_{r,q} \times Q_{q,p} & \longrightarrow & Q_{r,p} \end{array}$$

est commutatif. Partant de $e \times T(\gamma) \in Q_{q,q} \times Q_{q,p}$, on obtient que $T(\delta\gamma) = T(\delta)T(\gamma)$: T est un morphisme de groupoïdes.

Le morphisme $T : P \rightarrow Q$ est fonctoriel en Q . Pour $Q = P$ c'est l'identité de P . Le morphisme T est donc l'unique morphisme de P dans Q : tout morphisme f de P dans Q rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ T=\text{Id} \nearrow & & \downarrow f \\ P & \searrow r & \\ & & Q. \end{array}$$

2^{ième} PREUVE. La preuve suivante, plus algébrique, s'appliquera à d'autres contextes. Supposons d'abord X connexe et choisissons un point base 0 . Traduisons 10.12 par l'équivalence (10.11.2). On a $\pi_1(X \times X, (0, 0)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, 0) \times \pi_1(X, 0)$ et un faisceau localement constant sur $X \times X$ correspond à un ensemble Q à action de $\pi_1(X, 0) \times \pi_1(X, 0)$. Une loi de composition (10.2.2) correspond à une application $Q \times Q \rightarrow Q$ vérifiant pour $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_1(X, 0)$ et $q, r \in Q$

$$(10.12.1) \quad [(\alpha, \beta)q][(\beta, \gamma)r] = (\alpha, \gamma)(qr).$$

Les axiomes des groupoïdes équivalent à ce que Q est un groupe. Si on pose $\alpha q \beta := (\alpha, \beta^{-1})q$, l'identité (10.12.1) se récrit plus suggestivement

$$(10.12.2) \quad (\alpha q \beta^{-1})(\beta r \gamma) = \alpha(qr)\gamma.$$

En particulier ($q = e$, $\beta = \gamma = e$), on a $\alpha x = \alpha e.x$, d'où $\alpha e.\beta e.x = (\alpha \beta e).x : \alpha \mapsto \alpha e$ est un morphisme de groupes de $\pi_1(X, 0)$ dans Q . De même, $\alpha \mapsto e\alpha$ est un morphisme. Par 10.12.2 pour $\alpha = \gamma = e$, $q = r = e$ on a $(e\beta^{-1}).(\beta e) = e$: les morphismes $e \mapsto \alpha e$ et $e \mapsto e\alpha$ coïncident. Ils définissent un morphisme du groupoïde fondamental P dans Q . Il est fonctoriel en Q et pour $Q = P$ on obtient l'identité. On en déduit que c'est l'unique morphisme $P \rightarrow Q$.

Le cas non connexe se ramène au cas connexe en écrivant X comme somme de ses composants connexes.

10.13. En géométrie algébrique “abstraite”, la construction du π_1 en terme de chemins perd son sens. Par contre, ainsi que l'a réalisé et montré A. Grothendieck, la catégorie des faisceaux localement constants a des analogues algébriques, et ils donnent lieu à des avatars algébriques du π_1 transcendant. La théorie profinie est exposé dans SGA 1. La théorie algébrique est une application de la théorie des catégories tannakiennes.

Théorie profinie (n° 14 à 23).

10.14. Soit Γ un groupe. Les quotients finis de Γ forment un système projectif. La limite projective de ces quotients est un groupe profini (= compact totalement discontinu), le *complété profini* Γ^\wedge de Γ . Toute action de Γ sur un ensemble fini se factorise – uniquement – par une action (continue) de Γ^\wedge : on a une équivalence de catégories

$$(\text{ensembles finis à action de } \Gamma^\wedge) \xrightarrow{\sim} (\text{ensembles finis à action de } \Gamma).$$

En fait, connaître les ensembles finis à action de Γ (ou $\widehat{\Gamma}$) revient à connaître $\widehat{\Gamma}$. Une description élégante (cf. SGA 1 V §4–6): Γ^\wedge est le groupe des automorphismes du foncteur “oubli de l’action”

$$(\text{ensembles finis à action de } \Gamma) \longrightarrow (\text{ensembles}).$$

10.15. Soit X une variété algébrique complexe. Pour simplifier, supposons X connexe. Choisissons un point base 0 . Faisons dans 10.14 $\Gamma = \pi_1(X(C), 0)$. Par (10.11.2), les ensembles finis munis d’une action de $\pi_1(X(C), 0)$ correspondent aux revêtements finis de $X(C)$ ou, ce qui revient au même, aux faisceaux localement constants sur $X(C)$ à fibres finies. D’après 10.14, $\pi_1(X, 0)^\wedge$ est le groupe des automorphismes du foncteur “fibre en 0 ”:

$$(\text{revêtements finis de } X(C)) \longrightarrow (\text{ensembles}).$$

Le foncteur $X' \mapsto X'^{\text{an}}$ induit une équivalence de catégories

$$(\text{morphismes de schémas finis étales } X' \rightarrow X) \rightarrow (\text{revêtements finis de } X).$$

Alternativement: $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ est une équivalence:

$$\begin{aligned} &(\text{faisceaux localement constants à fibre finies sur le site étale } X_{\text{et}}) \\ &\longrightarrow (\text{faisceaux localement constants à fibres finies sur } X(C)). \end{aligned}$$

Ceci donne un sens purement algébrique à la notion de revêtement fini et le groupe profini $\pi_1(X, 0)^\wedge$ acquiert ainsi une description purement algébrique, indépendante de la topologie de C .

Nous allons étendre cette construction au groupoïde fondamental. Si G est un groupoïde localement constant sur X , la composante connexe de

G contenant la section unité sur la diagonale X de $X \times X$ est l'image 10.12 de P . Les groupoïdes G connexes correspondent aux quotients A de $\pi_1(X, 0)$, par $G \mapsto G_{0,0}$. Les groupoïdes localement constants sur $X(\mathbb{C})$, connexes à fibres finies, forment donc un système projectif. Chacun d'eux est déduit par $X \mapsto X^{\text{an}}$ d'un groupoïde en faisceaux localement constants d'ensembles finis sur X , pour la topologie étale. Leur limite est un groupoïde profini lisse sur le \mathbb{C} -schéma X , au sens 10.6(ii). Il ne dépend pas de la topologie de \mathbb{C} . C'est le *groupoïde fondamental profini* P^\wedge . Il agit sur tout faisceau profini lisse. C'est un objet initial de la catégorie des groupoïdes profinis lisses sur X (topologie étale). Sa fibre en (y, x) est l'ensemble profini des isomorphismes du foncteur "fibre en x " avec le foncteur "fibre en y " :

$$(\text{revêtements finis de } X) \longrightarrow (\text{ensembles finis}).$$

Pour X non nécessairement connexe, de composantes connexes X_i , le groupoïde fondamental P de X induit sur $X_i \times X_i$ celui de X_i , et le faisceau vide sur $X_i \times X_j$ pour $i \neq j$. Le groupoïde fondamental profini de X est défini de même à partir de celui des X_i .

10.16. Soit X un schéma connexe. Un *revêtement fini* de X est un morphisme fini étale $f : X' \rightarrow X$; il revient au même de dire que c'est un faisceau localement constant à fibres finies sur $X_{\text{ét}}$. Soit $s : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X$ un point géométrique de X . A. Grothendieck a défini (SGA 3 V 7) le *groupe fondamental profini* $\pi_1(X, s)^\wedge$ comme étant le groupe profini des automorphismes du foncteur fibre en s :

$$F_s : (\text{revêtements finis de } X) \longrightarrow (\text{ensembles finis}).$$

Il a montré que F_s induit une équivalence de catégories

$$(\text{revêtement finis de } X) \longrightarrow (\pi_1(X, s)^\wedge\text{-ensembles finis}).$$

Si s et t sont deux points géométriques, les foncteurs F_s et F_t sont isomorphes. On appelle l'ensemble profini $P_{t,s}^\wedge := \text{Isom}(F_s, F_t)$ l'*ensemble des classes d'homotopie de chemins* de s à t (SGA 3 V 7).

Plus généralement, on définit un *foncteur fibre* comme étant un foncteur commutant aux limites inductives et projectives finies:

$$F : (\text{revêtements finis de } X) \rightarrow (\text{ensembles finis}).$$

Exemple: F_s . Les foncteurs fibres sont tous isomorphes et on pose $\pi_1(X, F)^\wedge = \text{Aut}(F)$ (SGA 3 V 5.7).

10.17. Pour X un schéma sur S , supposé connexe, on construit comme suit un groupoïde profini P^\wedge sur X/S , de fibre au point géométrique (s, t) de $X \times_S X$ l'ensemble profini $P_{s,t}^\wedge$. Cette construction est préliminaire à celle du groupoïde fondamental profini relatif en 10.18.

Un revêtement galoisien de X est un revêtement défini par un quotient fini du π_1 . Plus intrinsèquement: un revêtement fini connexe, qui soit un torseur sur X sous le groupe de ses automorphismes. Pour A un revêtement galoisien de X , posons sur $X \times_S X$: $P_A := \underline{\text{Isom}}_{\text{Aut}(A)}(\text{pr}_2^* A, \text{pr}_1^* A)$. C'est un groupoïde sur X/S . Le groupe $\text{Aut}(A)$ agit trivialement sur P_A , qui ne dépend donc que de la classe d'isomorphie de A . Si B est un quotient de A , P_A s'envoie sur P_B . Les classes d'isomorphie de revêtements galoisiens de X forment un ensemble ordonné filtrant et la limite projective des P_A est le groupoïde profini lisse promis.

10.18. Soit X un schéma sur un corps k . Soit k' une clôture algébrique de k et notons par ' une extension des scalaires à k' . On suppose X géométriquement connexe.

Pour chaque revêtement galoisien A de X , soit P_A^0 la composante neutre de P_A (10.17): la composante connexe contenant la section neutre de P_A sur la diagonale de $X \times X$. Si $G := \text{Aut}(A)$, A' est un G -torseur sur X' . Ses composantes connexes A'_i sont des revêtements galoisiens isomorphes de X' . Prendre la composante neutre commute à l'extension des scalaires et on a

$$(P_A^0)' = P_{A'_i} .$$

En particulier, la loi de composition de P_A induit une loi de composition sur P_A^0 , qui en fait un groupoïde sur X/k . Passons à la limite projective sur A comme en 10.17. Le *groupoïde fondamental profini relatif* est

$$P(X/k)^\wedge := \lim \text{proj } P_A^0 .$$

C'est la composante neutre du groupoïde 10.17.

10.19 LEMME. Tout revêtement fini de X' est dominé par une composante connexe d'un revêtement fini défini sur k .

PREUVE. Soit A' un revêtement fini de X' . Il existe une extension finie séparable k_1 de k et un revêtement fini A_1 de $X_1 := X \otimes k_1$ tel que $A' = A'_1$. On prend le revêtement $A'_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ de X .

Il résulte de 10.19 et des définitions que $P(X/k)^\wedge$ est de formation compatible à l'extension des scalaires à k' :

$$(10.19.1) \quad P(X'/k')^\wedge \xrightarrow{\sim} P(X/k)'^\wedge.$$

En particulier, si $s \in X'(k')$, on a

$$(10.19.2) \quad P(X/k)_{s,s}^\wedge = \pi_1(X', s)^\wedge.$$

Si s est défini sur k , $\text{Gal}(k'/k)$ agit par transport de structures sur les deux membres de (10.19.2), et respecte (10.19.2): on interprète ainsi l'action par transport de structures de $\text{Gal}(k'/k)$ sur $\pi_1(X', s)^\wedge$ comme l'action de Galois sur une fibre du faisceau profini lisse $P(X/k)^\wedge$ sur $X \times X$.

10.20. Si X est un schéma sur k algébriquement clos de caractéristique 0, que k' est une extension algébriquement close de k et que X' sur k' est déduit de X par extension des scalaires, le foncteur d'extension des scalaires

$$(\text{revêtements finis de } X) \longrightarrow (\text{revêtements finis de } X')$$

est une équivalence de catégorie. On a donc, pour $s \in X(k) \subset X(k')$

$$\pi_1(X', s)^\wedge \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, s)^\wedge.$$

En caractéristique 0, la formation de $P(X/k)^\wedge$ commute donc à toute extension du corps de base. En particulier, si $k \subset \mathbb{C}$, $P(X/k)^\wedge$ fournit par extension des scalaires de k à \mathbb{C} le complété profini (10.15) du groupe fondamental classique de $X(\mathbb{C})$.

10.21. Soient encore X sur k , géométriquement connexe, et soit $x \in X(k)$. Dans ce n°, nous donnons une autre construction du groupe fondamental $P(X/k)$, ou plutôt, ce qui revient au même, du *torseur fondamental* $T(X, x)$ qui s'en déduit comme en 10.9 par restriction à $X \times \{x\}$.

Soit k' une clôture algébrique de k . Un revêtement connexe X'_1 de X' , muni de x_1 au-dessus de x (nous dirons: pointé), n'a pas d'automorphisme non trivial (respectant x_1). Par descente galoisienne (et parce que X'_1 est

déjà défini sur un extension galoisienne finie de k), si (X'_1, x_1) est isomorphe à ses conjugués, il provient d'un revêtement pointé unique (X_1, x_1) de (X, x) . Les conjugués sous $\text{Gal}(k'/k)$ d'un revêtement connexe pointé X'_1 de X_1 ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie. Prenant la composante connexe contenant le point marqué d'un produit fibré, on trouve que X'_1 est dominé par un revêtement galoisien connexe isomorphe à ses conjugués. On obtient donc, sur X' , un système cofinal de revêtements connexes pointés, en prenant les revêtements pointés connexes (donc géométriquement connexes) de (X, x) et en étendant les scalaires de k à k' . Ces revêtements de X suffisent à définir $P(X, k)$. On peut même se limiter aux revêtements connexes pointés (X_1, x_1) de (X, x) avec X'_1 un revêtement galoisien de X' .

Soit (X_1, x_1) un revêtement connexe pointé de (X, x) , avec X'_1 galoisien sur X' . Le groupe de Galois $\text{Aut}(X'_1/X')$ est le groupe des k' -points du schéma en groupe fini étale $\underline{\text{Aut}}_k(X_1/X)$ sur k . Soit $\text{Aut}_k(X_1/X)^{\text{opp}}$ le groupe opposé. Le revêtement X_1 est un $\underline{\text{Aut}}_k(X_1/X)^0$ -torseur, car tel est le cas après extension des scalaires à k' . En particulier, $\sigma \mapsto x_1\sigma$ identifie $\underline{\text{Aut}}_k(X_1/X)^0$ à la fibre de X_1 en x . La composante connexe $P_{X_1}^0$ de P_{X_1} est le schéma des isomorphismes équivariants (isomorphismes de torseurs)

$$P_{X_1}^0 = \underline{\text{Aut}}_{X \times X}(\text{pr}_2^*X_1, \text{pr}_1^*X_1).$$

Sa restriction à $X \times x$ redonne le torseur X_1 . Le groupe fondamental relatif $\pi_1(X/k, x)$ et le torseur fondamental $T(X/k, x)$ sont donc respectivement

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &= \lim \text{proj } \underline{\text{Aut}}_k(X_1/X)^0 \\ T(X, x) &= \lim \text{proj } X_1, \end{aligned}$$

la limite étant prise sur les revêtements connexes pointés (X_1, x_1) galoisiens sur X' .

Soit L un ensemble de nombres premiers.

Si on ne considère que les (X_1, x_1) tels que X'_1 soit galoisien de groupe de Galois un L -groupe, on obtient le pro- L -complété du π_1 et le torseur correspondant.

Cette construction du groupoïde fondamental requiert le choix d'un point base $x \in X(k)$. Il existe des points sur une extension finie de k , et le groupoïde fondamental obtenu ne dépend pas, à isomorphisme unique près, du choix du point base. Par descente, la méthode 10.21 fournit donc une définition du groupoïde fondamental profini même si $X(k) = \emptyset$.

10.22. Soient S un schéma, \overline{X} propre et lisse sur S , $D \subset \overline{X}$ un diviseur à croisements normaux relatifs, $X = \overline{X} - D$, et f la projection de X sur S . D'après SGA 1 XIII, si \mathcal{G} est un faisceau de groupes finis localement constant sur X , d'ordre premier aux caractéristiques résiduelles et modérément ramifié le long de D rel. S (loc. cit. 2.1), alors $R^1 f_* \mathcal{G}$ est localement constant sur S , de formation compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S$ et à fibres finies (loc. cit. 2.9). Rappelons que l'hypothèse de ramification modérée se teste sur les fibres géométriques de X/S .

Supposons S connexe, f à fibres géométriques connexes et soit s une section de X/S . Soit \mathbb{L} un ensemble de nombres premiers inversibles sur S . D'après loc. cit. 4.5, le théorème précédent permet de définir un pro- \mathbb{L} -groupe fondamental relatif $\pi_1(X/S, s)_{\mathbb{L}}$, limite projective de faisceaux de \mathbb{L} -groupes finis localement constants sur S , avec la propriété caractéristique suivante (loc. cit. 4.5.1): pour tout faisceau localement constant \mathcal{G} de \mathbb{L} -groupes finis sur S , l'ensemble des $f^* \mathcal{G}$ -torseurs sur X , trivialisés le long de s , est en bijection canonique (fonctorielle en \mathcal{G}) avec $\text{Hom}(\pi_1(X/S, s)_{\mathbb{L}}, \mathcal{G})$. La formation de ce π_1 relatif est compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S$.

Passant à la limite projective sur \mathcal{G} , prenant $\mathcal{G} = \pi_1(X/S, s)_{\mathbb{L}}$ et l'application identique de π_1 , on obtient le *torseur fondamental relatif* $T(X/S, s)_{\mathbb{L}}$. C'est la limite projective des revêtements X_1 de X , munis d'une section s_1 au-dessus de s , et sur une (chaque) fibre géométrique de X/S connexes et galoisiens, de groupe de Galois un \mathbb{L} -groupe.

Ce torseur fondamental relatif permet de définir le groupoïde fondamental relatif $P(X/S)_{\mathbb{L}}$ qui, lui, ne dépend plus du choix de s et qui, par localisation étale sur S est défini même en l'absence de section de X/S . C'est un groupoïde profini lisse sur X/S , de formation compatible à tout changement de base.

10.23 Variante. Si X/S n'est pas supposé à fibres géométriques connexes, et que $X \rightarrow S' \rightarrow S$ est la factorisation de Stein de X/S , on définit $P(X/S)_{\mathbb{L}}$ comme étant $P(X/S')_{\mathbb{L}}$, prolongé par le vide par $X \times_{S'} X \hookrightarrow X \times X$.

Dans le cadre 10.18, de même, si X sur k est somme de composantes connexes X_i , chacune absolument connexe sur une extension séparable finie k_i de k , la somme disjointe des $X_i \times_{k_i} X_i$ est ouverte et fermée dans $X \times_k X$, et on définit $P(X/k)$ comme la somme disjointe de $P(X_i/k_i)$,

prolongée par le vide sur $\underset{k}{X \times X}$.

Théorie algébrique (no 24 à 52).

10.24. Commençons par un analogue de 10.14. Soit Γ un groupe. Les groupes algébriques affines G sur \mathbb{C} , munis de $f : \Gamma \rightarrow G$ avec $f(\Gamma)$ Zariski-dense, forment un système projectif. La limite projective de ces groupes est un schéma en groupes (= groupe proalgébrique) complexe, l'*enveloppe algébrique* Γ^{alg} de Γ . Toute représentation linéaire (de dimension finie) de Γ se factorise – uniquement – par Γ^{alg} : équivalence de catégories

$$(10.24.1) \quad \text{Rep}(\Gamma^{\text{alg}}) \longrightarrow (\text{représentations linéaires de } \Gamma).$$

Supposons Γ de génération finie. Une représentation nilpotente (9.4) de Γ se factorise uniquement par un $\Gamma^{[N]}$ puis (9.5) par l'enveloppe algébrique unipotente $\Gamma^{[N]\text{alg un}}$ de $\Gamma^{[N]}$. Définissons l'enveloppe algébrique unipotente $\Gamma^{\text{alg un}}$ de Γ comme étant la limite projective des $\Gamma^{[N]\text{alg un}}$. On a obtenu une équivalence de catégories

$$(10.24.2) \quad \text{Rep}(\Gamma^{\text{alg un}}) \longrightarrow (\text{représentations nilpotentes de } \Gamma)$$

et $\Gamma^{\text{alg un}}$ est la limite projective des quotients unipotents de Γ^{alg} .

Rappelons enfin que pour tout schéma en groupes affine G sur un corps k , de catégorie de représentations (de dimension finie) $\text{Rep}(G)$, le foncteur “espace vectoriel sous-jacent” ω de $\text{Rep}(G)$ dans les k -espaces vectoriels est un foncteur fibre, et que

$$G \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Aut}}^\otimes(\omega).$$

10.25. Soit X une variété algébrique complexe non singulière, supposée pour simplifier connexe de point base 0. Faisons dans 10.24 $\Gamma = \pi_1(X, 0)$. Par 10.11.2, les représentations linéaires complexes de $\pi_1(X, 0)$ correspondent aux faisceaux localement constants de \mathbb{C} -espaces vectoriels de dimension finie sur $X(\mathbb{C})$. Par le foncteur “sections locales horizontales”, ils correspondent aux fibrés vectoriels plats, i.e. munis d'une connexion intégrable et $\pi_1(X, 0)^{\text{alg}}$ est le schéma en groupe des automorphismes du foncteur “fibre en 0”:

$$(\text{fibrés vectoriels plats sur } X(\mathbb{C})) \longrightarrow (\text{espaces vectoriels}).$$

On sait que le foncteur de passage à l'analytique est une équivalence de catégories:

$$\begin{aligned} & (\text{fibrés vectoriels à connexion intégrable algébriques, réguliers à l'infini}) \\ \xrightarrow{\sim} & (\text{fibrés vectoriels plats sur } X^{\text{an}}) \end{aligned}$$

Ceci donne de $\pi_1(X, 0)^{\text{alg}}$ une description indépendante de la topologie de \mathbb{C} : c'est le schéma en groupes des \otimes -automorphismes du \otimes -foncteur "fibre en 0":

$$\begin{aligned} & (\text{fibrés vectoriels à connexion intégrable algébriques, réguliers à l'infini}) \\ \longrightarrow & (\text{espaces vectoriels}). \end{aligned}$$

Disons qu'un fibré vectoriel à connexion intégrable est *nilpotent* s'il est extension itérée du fibré à connexion trivial (\mathcal{O}, d) . Un tel fibré est automatiquement régulier singulier à l'infini. Il correspond à une représentation nilpotente de π_1 et, appliquant (10.24.2), on trouve de même une description de $\pi_1(X, 0)^{\text{alg}}$ indépendante de la topologie de \mathbb{C} : c'est le schéma en groupe des \otimes -automorphismes du \otimes -foncteur "fibre en 0"

$$\begin{aligned} & (\text{fibrés vectoriels à connexion intégrable unipotents}) \\ \longrightarrow & (\text{espaces vectoriels}). \end{aligned}$$

10.26. Soient k un corps de caractéristique 0 et X un schéma lisse et géométriquement connexe sur k . Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de la catégorie des fibrés vectoriels à connexion intégrable sur X . On suppose \mathcal{C} stable par \oplus, \otimes , duals, sous-quotients et que \mathcal{C} contient l'unité $1 := (\mathcal{O}_X, d)$. La catégorie \mathcal{C} , avec son produit tensoriel, est tannakienne sur k : on a $\text{End}(1) = k$ car X est géométriquement connexe et pour tout point (fermé ou non) s de X , $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_s$ est un foncteur fibre sur le corps résiduel $k(s)$. Appliquons la théorie générale des catégories tannakiennes [D4] 1.12 à \mathcal{C} et au foncteur fibre sur X "fibré vectoriel sous-jacent". Soit P le $X \times X$ -schéma des \otimes -isomorphismes fonctoriels en \mathcal{V} dans \mathcal{C} de $\text{pr}_1^*\mathcal{V}$ avec $\text{pr}_1^*\mathcal{V}$. C'est un groupoïde sur X (au sens 10.6(iii)), affine sur $X \times X$, transitif, i.e. fidèlement plat sur $X \times X$ et agissant sur le fibré vectoriel sous-jacent à chaque \mathcal{V} dans \mathcal{C} . Il donne lieu à une équivalence de catégories qui le caractérise

$$(10.26.1) \quad \mathcal{C} \longrightarrow \text{Rep}(X, P)$$

de \mathcal{C} avec la catégorie des fibrés vectoriels sur X munis d'une action de P (10.6.1).

10.27 DÉFINITIONS. *Avec les hypothèses et notations 10.26,*

- (i) *P est le groupoïde fondamental proalgébrique, rel. \mathcal{C} . On le note $P(X/k, \mathcal{C})$.*
- (ii) *La restriction de P à la diagonale est le schéma en groupes sur X des groupes fondamentaux. Sa fibre en un point x est un $k(x)$ -schéma en groupe, le groupe fondamental en x , noté $\pi_1(X, x; \mathcal{C})$.*
- (iii) *Si $x \in X(k)$, la restriction de P à $X \xrightarrow{\sim} X \times \{x\} \subset X \times X$ est le torseur fondamental en x , noté $T(X, x; \mathcal{C})$.*

Si $x \in X(k)$, (10.26.1), prolongé par l'équivalence

$$(10.27.1) \quad \text{Rep}(X, P) \longrightarrow \text{Rep}(\pi_1(X, x; \mathcal{C})) ,$$

est une équivalence

$$(10.27.2) \quad \mathcal{C} \longrightarrow \text{Rep}(\pi_1(X, x; \mathcal{C})) , \quad \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_x .$$

Si V est une représentation (de dimension finie) de $\pi_1(X, x; \mathcal{C})$, $\mathcal{O} \otimes V$ est un fibré vectoriel sur X , muni d'une action de $\pi_1(X, x; \mathcal{C})$. On peut le tordre par $T(X, x; \mathcal{C})$ et

$$(10.27.3) \quad V \longmapsto \mathcal{O} \otimes V \text{ tordu par } T(X, x; \mathcal{C})$$

est le foncteur inverse de (10.27.1).

10.28. Soit $(X \times X)_{/\delta(X)}^\wedge$ le complété formel de $X \times X$ le long de sa diagonale. Si \mathcal{V} est un fibré vectoriel à connexion intégrable sur X , la connexion s'intègre en un isomorphisme formel:

$$(10.28.1) \quad \text{pr}_1^* \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^* \mathcal{V} \quad (\text{sur } X \times X)_{/\delta(X)}^\wedge ,$$

horizontal et l'identité sur la diagonale. Ces propriétés le caractérisent. En terme imaginé: \mathcal{V}_x est canoniquement isomorphe à \mathcal{V}_y pour y infiniment proche de x .

Les isomorphismes (10.28.1) sont fonctoriels et compatibles au produit tensoriel, donc définissent une section formelle e^\wedge de $P(X/k, \mathcal{C})$ sur $X \times X_{/\delta(X)}^\wedge$. Composant avec e^\wedge , on trouve que $P_{x,y}$ est canoniquement

isomorphe à $P_{x',y'}$ pour x' et y' infiniment proches de x de y : on trouve un isomorphisme formel de pr_1^*P avec pr_2^*P sur le complété de $(X \times X)^2$ le long de sa diagonale. C'est la *connexion intégrable* de P . Elle en induit une sur le schéma en groupe des groupes fondamentaux, et sur les torseurs fondamentaux.

L'équivalence (10.27.2) a pour inverse (10.27.3), avec $\mathcal{O} \otimes V$ tordu par $T(X, x; \mathcal{C})$ muni de la connexion déduite de celle de $T(X, x; \mathcal{C})$.

10.29. Le schéma $P := P(X/k, \mathcal{C})$ est affine sur $X \times X$. Soit L son algèbre affine. Pour chaque \mathcal{V} dans $\mathcal{C}(X)$, l'action de P sur \mathcal{V} est définie par un morphisme L -linéaire de $\text{pr}_2^*\mathcal{V} \otimes L$ dans $\text{pr}_1^*\mathcal{V} \otimes L$. Il correspond à un morphisme \mathcal{O} -linéaire de $\text{pr}_2^*\mathcal{V}$ dans $\text{pr}_1^*\mathcal{V} \otimes L$, soit encore à

$$(10.29.1) \quad \alpha(\mathcal{V}) : (\text{pr}_1^*\mathcal{V})^\vee \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{V} \longrightarrow L.$$

Pour tout morphisme $u : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ dans $\mathcal{C}(X)$, le diagramme

$$(10.29.2) \quad \begin{array}{ccc} (\text{pr}_1^*\mathcal{W})^\vee \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{V} & \longrightarrow & (\text{pr}_1^*\mathcal{V})^\vee \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{pr}_1^*\mathcal{W})^\vee \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{W} & \longrightarrow & L \end{array}$$

est commutatif et (6.14, [D4] 6.6), L est le réceptacle universel de morphismes (10.29.1) vérifiant (10.29.2). On déduit de (10.29.2) appliqué aux $\text{pr}_i : \oplus \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$ que l'image de $\alpha(\oplus \mathcal{V}_i)$ est la somme des images des $\alpha(\mathcal{V}_i)$. On en déduit que L est limite inductive filtrante de quotients de fibrés vectoriels à connexion $(\text{pr}_1^*\mathcal{V})^\vee \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{V}$, \mathcal{V} dans \mathcal{C} . Ceci fournit une connexion sur L et une nouvelle description de la connexion intégrable de P .

10.30 Notations. (i) Pour F un ensemble de fibrés vectoriels à connexion intégrable, nous noterons $\langle F \rangle_\otimes$ (resp. $\langle F, \text{ext} \rangle_\otimes$) la catégorie de fibrés vectoriels à connexion intégrable obtenue à partir de F et 1 par les opérations \oplus, \otimes , duals et sous-quotients (resp. et extensions). L'opération “dual” n'est pas nécessaire si on part de F stable par passage au dual.

Pour F réduit à \mathcal{V} , on écrira simplement $\langle \mathcal{V} \rangle_\otimes$ pour $\langle F \rangle_\otimes$. Si F est finie, on a $\langle F \rangle_\otimes = \langle \bigoplus_{\mathcal{V} \in F} \mathcal{V} \rangle_\otimes$. De même pour $\langle \quad, \text{ext} \rangle_\otimes$.

(ii) Pour $F = \phi$, $\langle \phi, \text{ext} \rangle_\otimes$ est la catégories \mathcal{C} des fibrés vectoriels à connexion intégrable nilpotents (10.25). On écrira $P_{\text{DR}}(X/k)$, $\pi_1(X, x)_{\text{DR}}$ et $T(X, x)_{\text{DR}}$ pour $P(X/k; \mathcal{C})$, $\pi(X, x; \mathcal{C})$ et $T(X, x; \mathcal{C})$.

10.31 REMARQUE. Les objets de $\langle \mathcal{V} \rangle_{\otimes}$ sont les sous-quotients (horizontaux) de sommes d'espaces de tenseurs $T_m^n(\mathcal{V}) := {}^n \otimes \mathcal{V} \otimes {}^m \otimes \mathcal{V}^\vee$. Soit $\underline{\text{Aut}}_k(\mathcal{V}) := \underline{\text{Isom}}_{X \times X}(\text{pr}_2^*\mathcal{V}, \text{pr}_1^*\mathcal{V})$ le schéma des isomorphismes de fibrés vectoriels, sur $X \times X$, de $\text{pr}_2^*\mathcal{V}$ avec $\text{pr}_1^*\mathcal{V}$. Le groupoïde $P(X/k, (\mathcal{V})_{\otimes})$ est le sous-groupoïde de $\underline{\text{Aut}}_k(\mathcal{V})$ qui respecte les sous-fibrés horizontaux de sommes de $T_m^n(\mathcal{V})$ (et donc, par un argument de graphe, les morphismes horizontaux entre sous-quotients de sommes de $T_m^n(\mathcal{V})$).

10.32 PROPOSITION. Supposons que $k = \mathbb{C}$. Si \mathcal{C} est respectivement

- (a) la catégorie de tous les fibrés vectoriels à connexion intégrable réguliers à l'infini sur X ,
- (b) la catégorie des fibrés vectoriels à connexion intégrable nilpotents,
- (c) $\langle \mathcal{V} \rangle_{\otimes}$,

le groupe fondamental $\pi_1(X, x; \mathcal{C})$ est respectivement

- (a) $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{\text{alg}}$ (enveloppe algébrique sur \mathbb{C})
- (b) $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{\text{alg un}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$
- (c) l'adhérence de Zariski dans $GL(\mathcal{V}_x)$ de l'image de $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$.

PREUVE. Les assertions (a)(b) répètent 10.24, 10.25. Dans le cas (c), par 10.31, le foncteur $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}_x$ identifie $\langle \mathcal{V} \rangle_{\otimes}$ à la catégorie des sommes de sous-quotients de $T_m^n(\mathcal{V}_x)$, vus comme représentations de l'adhérence de Zariski Γ^- de l'image Γ de $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$ dans $GL(\mathcal{V}_x)$. C'est $\text{Rep}(\Gamma^-)$ et 10.32 en résulte.

10.33. Supposons que $k = \mathbb{C}$ et que $\mathcal{C} = \langle \mathcal{V} \rangle_{\otimes}$. Les sections locales horizontales holomorphes de $\underline{\text{Isom}}(\text{pr}_2^*\mathcal{V}, \text{pr}_1^*\mathcal{V})$ forment un groupoïde localement constant sur $X(\mathbb{C})$

$$\underline{\text{Isom}}(\text{pr}_2^*\mathcal{V}, \text{pr}_1^*\mathcal{V})^\nabla = \underline{\text{Isom}}(\text{pr}_2^*\mathcal{V}^\nabla, \text{pr}_1^*\mathcal{V}^\nabla).$$

Les sections locales horizontales holomorphe de $P := P(X/\mathbb{C}; \mathcal{C})$ sur $X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$ en forment un sous-groupoïde en faisceaux localement constants P^∇ . La propriété universelle 10.12 fournit donc un morphisme

$$(10.33.1) \quad P(X(\mathbb{C})) \longrightarrow P(X/\mathbb{C}, \mathcal{C})^\nabla.$$

Si $x \in X(\mathbb{C})$, évaluant (10.33.1) en (x, x) , on obtient

$$(10.33.2) \quad \pi_1(X(\mathbb{C}), x) \longrightarrow \pi_1(X/\mathbb{C}, x; \mathcal{C}) \subset GL(\mathcal{V}_x).$$

Pour \mathcal{V} régulier à l'infini, (10.33.2) induit l'isomorphisme 10.32(c).

Par restriction à $X \times \{x\}$, (10.33.1) induit un isomorphisme de $\pi_1(X, x; \mathcal{C})(\mathbb{C})$ -torseurs sur $X(\mathbb{C})$:

$$(10.33.3) \quad \begin{aligned} & (T(X(\mathbb{C}), x)), \text{ poussé par } \pi_1(X(\mathbb{C}), x) \rightarrow \pi_1(X, x; \mathcal{C})(\mathbb{C}) \\ & \xrightarrow{\sim} (\text{sections horizontales holomorphes} \\ & \text{de } T(X, x; \mathcal{C}) \text{ sur } X(\mathbb{C})). \end{aligned}$$

Pour tout N , l'isomorphisme 10.32(b) fournit, par passage au quotient par Z^{N+1} , un isomorphisme

$$(10.33.4) \quad \pi_1(X, x)_{\text{DR}}^{(N)} \simeq \pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{[N]\text{alg un}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Pour \mathcal{V} nilpotent, donnant lieu à une représentation fidèle de $\pi_1(X, x)_{\text{DR}}^{(N)}$, (10.33.3) est un isomorphisme de $\pi_1(X, x)_{\text{DR}}^{(N)}(\mathbb{C})$ -torseurs sur $X(\mathbb{C})$:

$$(10.33.5) \quad \begin{aligned} & (T(X(\mathbb{C}), x), \text{ poussé par } \pi_1(X(\mathbb{C}), x) \rightarrow \pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{[N]\text{alg un}}(\mathbb{C})) \\ & \xrightarrow{\sim} (\text{torseur des sections locales horizontales holomorphes} \\ & \text{de } T(X, x)_{\text{DR}}, \text{ poussé par } \pi_1(X, x)_{\text{DR}} \rightarrow \pi_1(X, x)_{\text{DR}}^{(N)}). \end{aligned}$$

10.34 VARIANTE. Si X lisse sur k est somme de composantes connexes X_i , chacune absolument connexe sur une extension finie k_i de k , on pose comme en 10.23

$$P(X/k, \mathcal{C}) = \coprod P(X_i/k_i, \mathcal{C} | X_i)$$

et on a encore une équivalence

$$(10.34.1) \quad \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \text{Rep}(P(X/k, \mathcal{C})).$$

10.35 Mise en garde. Prenons pour \mathcal{C} tous les fibrés vectoriels à connexion intégrable, réguliers singuliers à l'infini. Le groupoïde fondamental $P(X/k, \mathcal{C})$ est un analogue du groupoïde fondamental profini relatif $P(X/k)^\wedge$. Toutefois, il n'est pas de formation compatible à une extension transcyclique des scalaires. Voici un exemple.

On prend k algébriquement clos et $X = \mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ et le point base 1. Les fibrés vectoriels à connexion réguliers singuliers à l'infini irréductibles sont de dimension un. Ce sont les fibrés \mathcal{L}_λ ($\lambda \in k$) suivants

$$\mathcal{L}_\lambda : \text{fibré } \mathcal{O}, \text{ muni de la connexion telle que } \nabla 1 = \lambda \cdot \frac{dx}{x}.$$

De plus, $\mathcal{L}_\lambda \sim \mathcal{L}_{\lambda'}$ si et seulement si $(\lambda - \lambda')\frac{dx}{x}$ est une différentielle logarithmique, i.e. si $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\pi_1(X, 1; \mathcal{C})$ modulo son radical unipotent est le tore de groupe de caractères le groupe additif k/\mathbb{Z} .

Nous allons montrer (10.36 à 10.43) que, néanmoins, $P(X/k)_{\text{DR}}$ est de formation compatible à toute extension des scalaires.

10.36. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de celle des fibrés vectoriels à connexion intégrable sur X . On suppose \mathcal{C} stable par sommes finies et sous-quotients. Considérons la propriété suivante de \mathcal{F} quasi-cohérent à connexion intégrable sur X

(10.36.1)_c \mathcal{F} est la limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux cohérents horizontaux (automatiquement des fibrés vectoriels) dans \mathcal{C} .

D'après 4.2.2, les \mathcal{F} vérifiant (10.36.1)_c forment la catégorie des Ind-objets de \mathcal{C} .

10.37 LEMME. La condition (10.36.1)_c est stable par \oplus et sous-quotients. Si \mathcal{C} est stable par \otimes (resp. extensions), elle est stable par \otimes (resp. extensions).

PREUVE. Le cas de \otimes et \oplus est clair. Si \mathcal{F} est limite inductive des \mathcal{F}_α , tout sous-quotient de \mathcal{F} est limite inductive de sous-quotients des \mathcal{F}_α . Reste le cas d'une extension

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow 0.$$

Ecrivons \mathcal{F}' (resp. \mathcal{F}'') comme limite inductive filtrante de ses sous-fibrés vectoriels horizontaux \mathcal{F}'_α (resp. \mathcal{F}''_β). Fixons α et soit \mathcal{F}_α l'image inverse de \mathcal{F}'_α dans \mathcal{F} . Parce que \mathcal{F}_α est cohérent, on a

$$\text{Ext}^1(\mathcal{F}'_\alpha, \mathcal{F}'') = \lim \text{ind} \text{Ext}^1(\mathcal{F}'_\alpha, \mathcal{F}''_\beta)$$

et il existe $\beta(\alpha)$ tel que l'extension \mathcal{F}_α de \mathcal{F}'_α par \mathcal{F}'' se déduise par $\mathcal{F}''_{\beta(\alpha)} \hookrightarrow \mathcal{F}''$ d'une extension $\mathcal{F}_{\alpha, \beta(\alpha)}$ de \mathcal{F}'_α par $\mathcal{F}''_{\beta(\alpha)}$. Pour $\beta > \beta(\alpha)$, soit $\mathcal{F}_{\alpha, \beta} \subset \mathcal{F}_\alpha$ l'extension de \mathcal{F}'_α par \mathcal{F}''_β qui s'en déduit. Si β est assez grand, $\mathcal{F}_{\alpha, \beta}$ est horizontal: la question est locale sur X et localement, si les sections en nombre fini s_i de $\mathcal{F}_{\alpha, \beta(\alpha)}$ relèvent des sections de \mathcal{F}'_α qui l'engendrent, il suffit de prendre β assez grand pour que les ∇s_i soient dans

$\Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}_{\alpha,\beta}$. Le faisceau \mathcal{F} est limite inductive des sous-fibrés à connexion $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ ainsi obtenus.

10.38. Soient X lisse sur k , k' une extension de k , X' déduit de X par extension des scalaires, $a : X' \rightarrow X$ le morphisme structural et \mathcal{C} comme en 10.26.

10.38.1 LEMME. *Le foncteur a_* est une équivalence*

*(faisceaux quasi-cohérents à connexion intégrable sur X')
 \rightarrow (faisceaux quasi-cohérents à connexion intégrable sur X ,
munis d'une structure k -linéaire de k' -modules).*

La vérification est laissée au lecteur.

10.38.2 LEMME. *Si \mathcal{V} est dans \mathcal{C} , $a_*a^*\mathcal{V}$ vérifie (10.36.1)_c*

PREUVE. On a $a_*a^*\mathcal{V} = k' \underset{k}{\otimes} \mathcal{V}$. On écrit k' comme limite inductive de ses sous-espaces vectoriels sur k de dimension finie V_α et 10.38.2 résulte de ce que $a_*a^*\mathcal{V}$ est la limite inductive des $V_\alpha \otimes \mathcal{V}$.

Soit \mathcal{D} la catégorie des faisceaux quasi-cohérents à connexion intégrable sur X vérifiant (10.36.1)_c, et \mathcal{C}' (resp. \mathcal{D}') la catégorie des faisceaux cohérents (resp. quasi-cohérents) \mathcal{F} à connexion intégrable sur X' avec $a_*\mathcal{F}$ dans \mathcal{D} . Si \mathcal{F} est dans \mathcal{D}' , i.e. $a_*\mathcal{F}$ dans \mathcal{D} , chaque $\mathcal{G} \rightarrow a_*\mathcal{F}$ (\mathcal{G} dans \mathcal{C}) définit par adjonction $a^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ et \mathcal{F} est la limite des images de $a^*\mathcal{G}$: par 10.38.2 et 10.37, \mathcal{F} est limite de ses sous-objets dans \mathcal{C}' .

Appliquons 4.4, 4.5. Par 10.38.1, on trouve que \mathcal{C}' est la catégorie $\mathcal{C}_{k'}$ de 4.4. On la dit *déduite de \mathcal{C} par extension des scalaires*.

D'après 10.37, on a

10.39 PROPOSITION. *Avec les notations de 10.36 à 10.38, la catégorie \mathcal{C}' est stable par sommes finies et sous-quotients. Elle est stable par \otimes (resp. extensions) si \mathcal{C} l'est.*

Avec la notation 10.30(i), on déduit de 10.39 que

$$(10.39.1) \quad \langle F \rangle'_\otimes = \langle F' \rangle_\otimes$$

$$(10.39.2) \quad \langle F, \text{ext} \rangle'_\otimes = \langle F', \text{ext} \rangle_\otimes$$

10.40. Pour P un groupoïde transitif sur X/k , et P' sur X'/k' déduit par extension des scalaires, on a aussi la relation (4.6(iii))

$$\mathrm{Rep}(P') = \mathrm{Rep}(P)_{k'} .$$

La caractérisation (10.26.1) du groupoïde fondamental donne donc

10.41 PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, on a*

$$P(X'/k', \mathcal{C}') = P(X/k, \mathcal{C})' .$$

La formation du groupoïde fondamental rel. \mathcal{C} est donc compatible à l'extension des scalaires. La mise en garde 10.35 correspond au fait que pour \mathcal{C} la catégorie de tous les fibrés vectoriels à connexion intégrable réguliers singuliers à l'infini sur X , \mathcal{C}' n'est pas nécessairement la catégorie analogue sur X' .

10.42 COROLLAIRE. (i) $P(X'/k', \langle F' \rangle_\otimes) = P(X/k, \langle F \rangle_\otimes)'$ et
(ii) $P(X'/k', \langle F', \mathrm{ext} \rangle_\otimes) = P(X/k, \langle F, \mathrm{ext} \rangle_\otimes)' .$

PREUVE. Appliquer (10.39.1) (10.39.2).

10.43 COROLLAIRE. $P_{\mathrm{DR}}(X'/k') = P_{\mathrm{DR}}(X/k)'$

PREUVE. Appliquer 10.42(ii) à $F = \phi$.

Bien sûr, ces énoncés pour le groupoïde fondamental impliquent des énoncés analogues pour les groupes fondamentaux.

10.44. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre schémas lisses absolument irréductibles sur k . Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} des catégories de fibrés vectoriels à connexion intégrable sur X et Y comme en 10.26, et supposons que f^* envoie \mathcal{D} dans \mathcal{C} . Le foncteur qui à \mathcal{V} dans \mathcal{D} attache le fibré vectoriel $f^*\mathcal{V}$ est un foncteur fibre sur X , et $f^*(P(Y/k, \mathcal{D}))$ est le groupoïde des automorphismes de ce foncteur fibre. Chaque $f^*\mathcal{V}$ est dans \mathcal{C} , donc muni d'une action de $P(X/k, \mathcal{C})$. Cette action est fonctorielle et compatible au produit tensoriel, d'où

$$(10.44.1) \quad f_* : P(X/k, \mathcal{C}) \longrightarrow f^*P(Y/k, \mathcal{D}) .$$

Pour $x \in X(k)$, on en déduit

$$(10.44.2) \quad f_* : \pi_1(X/k, x; \mathcal{C}) \longrightarrow \pi_1(Y/k, f(x); \mathcal{D}) .$$

10.45. Soient X_i ($i = 1, 2$) lisses absolument irréductibles sur k , \mathcal{C}_i comme en 10.26 sur X_i et \mathcal{C} la catégorie de fibrés à connexion sur $X := X_1 \times X_2$ engendrée (10.30(i)) par les $\mathcal{V}_1 \boxtimes \mathcal{V}_2 := \text{pr}_1^*\mathcal{V}_1 \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{V}_2$ (\mathcal{V}_i dans \mathcal{C}_i). Les morphismes pr_i de X dans X_i vérifient 10.44, d'où un morphisme

$$(10.45.1) \quad P(X_1 \times X_2, \mathcal{C}) \longrightarrow P(X_1, \mathcal{C}_1) \boxtimes P(X_2, \mathcal{C}_2).$$

10.46 PROPOSITION. *Le morphisme 10.45.1 est un isomorphisme.*

PREUVE. Par passage à la limite, on peut supposer que \mathcal{C}_i est engendrée par un fibré \mathcal{V}_i . Pour simplifier les notations, supposons-le: $\mathcal{C}_i = \langle \mathcal{V}_i \rangle_\otimes$, $\mathcal{C} = \langle \mathcal{V}_1 \boxtimes \mathcal{V}_2 \rangle_\otimes$. Les deux membres de (10.45.1) sont alors des sous-groupoïdes de $\underline{\text{Aut}}_k(\mathcal{V}_1 \boxtimes \mathcal{V}_2)$ (notations de 10.31). Si \mathcal{U} est un sous-fibré horizontal d'une somme T d'espaces de tenseurs sur $\mathcal{V}_1 \boxtimes \mathcal{V}_2$, pour tout point x de X_1 sur une extension k' de k , l'image inverse de T sur $\text{Spec}(k') \times X_2$ est dans \mathcal{C}'_2 , et celle de \mathcal{U} est stable par $P(X'_2/k'; \mathcal{C}'_2) = P(X_2/k; \mathcal{C}_2)'$ (10.31). On en déduit que \mathcal{U} est stable sous l'image inverse de $P(X_2/k; \mathcal{C}_2)$ sur $X_1 \times X_2$. De même avec 1 et 2 permuts: \mathcal{U} est stable sous $P(X_1, \mathcal{C}_1) \boxtimes P(X_2, \mathcal{C}_2)$ et on conclut par la description 10.31 de P .

Pour $x_i \in X(k_i)$, on en déduit en prenant la fibre de (10.45.1) en (x_1, x_2) .

10.47 COROLLAIRE. *Le morphisme*

$$\pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2); \mathcal{C}) \longrightarrow \pi_1(X_1, x_1; \mathcal{C}_1) \times \pi_1(X_2, x_2; \mathcal{C}_2)$$

est un isomorphisme.

10.48 COROLLAIRE. *Avec les notations de 10.45, \mathcal{C} est le produit tensoriel sur k de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .*

PREUVE. Si P_i est un groupoïde transitif sur X_i ($i = 1, 2$), $\text{Rep}(X_1 \times X_2; P_1 \boxtimes P_2)$ est produit tensoriel des $\text{Rep}(X_i : P_i)$ ([D4]).

Notation: la catégorie \mathcal{C} de 10.45 sera notée $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$.

10.49 COROLLAIRE. *$P(X, \mathcal{C})$ est un objet initial de la catégorie des groupoïdes à connexion intégrable P sur X vérifiant la condition:*

(10.49.1) P est affine sur $X \times X$, d'algèbre affine (0.5) sur $X \times X$ vérifiant (10.36.1) $c \otimes c$.

PREUVE. Par descente galoisienne, il suffit de le vérifier après une extension finie k' de k . Ceci permet de supposer que $X(k') \neq \emptyset$. On le suppose. Soit $x \in X(k)$. Le foncteur fibre en x identifie alors \mathcal{C} et les représentations de $\pi_1(X/k, x; \mathcal{C})$. Avec 10.47, il ne reste qu'à répéter la 2^{ième} preuve de 10.12.

10.50 COROLLAIRE. *Le morphisme de groupoïdes 10.44.1 est caractérisé par la propriété d'être horizontal.*

10.51. La propriété (10.49.1) de $P(X/k, \mathcal{C})$ implique que le torseur fondamental $T(X, x; \mathcal{C})$ vérifie

(10.51.1) son algèbre affine sur X vérifie (10.36.1) c .

Par le dictionnaire 10.9 entre groupoïdes et torseurs, on déduit de 10.49 que le torseur fondamental est universel parmi les torseurs à connexion trivialisés en x et vérifiant (10.51.1). Ceci signifie que pour Q un G -torseur à connexion sur X , trivialisé en x et vérifiant (10.51.1), il existe une et une seule paire $(u, v) : u$ un morphisme $\pi_1(X, x; \mathcal{C}) \rightarrow G$ et v un u -morphisme (0.6) horizontal de $T(X, x; \mathcal{C})$ dans Q , compatible aux trivialisations en x . En particulier, pour $f : X \rightarrow Y$ comme en 10.44, le morphisme f_* (10.44.2) entre les π_1 est caractérisé par l'existence d'un f_* -morphisme horizontal de torseurs trivialisés en x de $T(X/k, x; \mathcal{C})$ avec $f^*T(Y/k, f(x); \mathcal{D})$.

10.53 REMARQUE. Par la suite, nous n'utiliserons que le π_1 de de Rham (10.30(ii)), obtenu pour $\mathcal{C} = \langle \phi, \text{ext} \rangle_\otimes$. Ma raison pour considérer un cas plus général est que j'espère que si F est un ensemble de motifs sur X , $P(X/k, \langle F_{\text{DR}}, \text{ext} \rangle)$ sur $X \times X$ est motivique.

De même, avec “motif” remplacé par une version convenablement renforcée de “système de réalisations” (cf. remarque finale de 1.21).

§11. Le Frobenius cristallin du π_1 de de Rham.

11.1. Soit X lisse sur k de caractéristique 0. On sait qu'une connexion intégrable ∇ sur un fibré vectoriel \mathcal{V} sur X peut être intégrée formellement à tous les ordres: sur le complété formel $(X \times X)_{/\delta(X)}^\wedge$ de $X \times X$ le long de la diagonale $\delta(X)$, on dispose d'un morphisme horizontal induisant l'identité sur la diagonale:

$$(11.1.1) \quad h : \text{pr}_2^* \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_1^* \mathcal{V} \quad (\text{sur } (X \times X)_{/\delta(X)}^\wedge).$$

Supposons que X soit le complément dans \overline{X} lisse sur k d'un diviseur à croisements normaux D . Pour simplifier les notations, on suppose D somme de diviseurs lisses D_i ($i \in I$). Supposons le fibré vectoriel \mathcal{V} prolongé en $\overline{\mathcal{V}}$ sur \overline{X} , et que, relativement à ce prolongement, ∇ est à pôles logarithmiques le long de D i.e. se prolonge en

$$\nabla : \overline{\mathcal{V}} \longrightarrow \Omega^1(\log D) \otimes \overline{\mathcal{V}}.$$

On se propose d'étudier le comportement de (11.1.1) le long de D .

Soient δ l'application diagonale de \overline{X} dans $\overline{X} \times \overline{X}$, et $(\overline{X} \times \overline{X})^\sim$ déduit de $\overline{X} \times \overline{X}$ en éclatant les $\delta(D_i)$. L'application diagonale de X se prolonge en $\delta : \overline{X} \rightarrow (\overline{X} \times \overline{X})^\sim$. Sur \mathbb{C} , la situation est analytiquement la suivante. Pour \overline{X} de dimension un et $s \in D$, on choisit une coordonnée locale z centrée en s . On en déduit un système de coordonnées locales $(z^{(1)}, z^{(2)})$ sur $\overline{X} \times \overline{X}$, centrée en (s, s) . L'éclaté est couvert par deux cartes de coordonnées $(z^{(1)}, z^{(2)}/z^{(1)})$ et $(z^{(2)}, z^{(1)}/z^{(2)})$. L'application diagonale tombe dans chacune: c'est $z \mapsto (z, 1)$. Près de (s, s) avec $s \notin D$, on a $(\overline{X} \times \overline{X})^\sim \xrightarrow{\sim} \overline{X} \times \overline{X}$. Le cas où X est de dimension n se déduit du cas de dimension un par produits. En géométrie algébrique, on a une description analogue, localement pour la topologie étale.

11.2 PROPOSITION. Avec les hypothèses de 11.11, l'isomorphisme (11.1.1) se prolonge en un isomorphisme

$$(11.2.1) \quad h : \text{pr}_2^* \overline{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} \text{pr}_1^* \overline{\mathcal{V}}$$

sur le complété formel $\overline{X} \times \overline{X}^\wedge$ de $(\overline{X} \times \overline{X})^\sim$ le long de $\delta(X)^\wedge$.

En dimension 1, et pour z une coordonnée locale comme en 11.1, un analogue analytique de 11.2 est le suivant: pour $|a - 1| < 1$, on dispose

d'un isomorphisme $\mathcal{V}_z \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{az}$ (transport parallèle de z à az , en restant dans $\{u \mid |u - z| < |z|\}$), et ces isomorphismes ont une limite $\overline{\mathcal{V}}_0 \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{V}}_0$ pour $z \rightarrow 0$, $a \rightarrow a_0$.

Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\overline{X} \times \overline{X})^\sim & \xrightarrow{\text{pr}_z} & \overline{X} \\ \delta \uparrow \downarrow \text{pr}_1 & & \\ \overline{X} & & \end{array}$$

11.3 LEMME. *Au voisinage de $\delta(\overline{X}) \subset (\overline{X} \times \overline{X})^\sim$,*

- (i) $\text{pr}_1 : (\overline{X} \times \overline{X})^\sim \rightarrow \overline{X}$ est lisse, et
- (ii) $\text{pr}_2^* : \text{pr}_2^*\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X \times X/X}^1$ se prolonge en un morphisme de $\text{pr}_2^*\Omega_{\overline{X}}^1(\log D)$ dans $\Omega_{(\overline{X} \times \overline{X})^\sim/\overline{X}}^1$.

PREUVE. La question est locale pour la topologie étale et, prenant des produits, on se ramène à supposer X de dimension 1. Si z est une coordonnée locale centrée en $s \in D$, $(z, u) := (z^{(1)}, z^{(2)}/z^{(1)})$ est un système de coordonnées locales près de $\delta(s) \in (\overline{X} \times \overline{X})^\sim$. Le point $\delta(s)$ a les coordonnées $(0,1)$. Dans ces coordonnées, $\text{pr}_1(z, u) = z$. Ceci vérifie (i). On a $\text{pr}_2(z, u) = uz$. Dans le Ω^1 relatif, pour $\text{pr}_1 : (\overline{X} \times \overline{X})^\sim \rightarrow \overline{X}$, on a donc $\text{pr}_2^*(\frac{dz}{z}) = \frac{du}{u}$. Ceci vérifie (ii).

PREUVE DE 11.2. D'après 11.3, la connexion à pôles logarithmiques ∇ de $\overline{\mathcal{V}}$ fournit sur $\text{pr}_2^*\overline{\mathcal{V}}$, au voisinage de $\delta(\overline{X})$, une connexion relative sans singularité. Sur le voisinage formel de la section δ de pr_1 , une telle connexion s'intègre en un isomorphisme de $\text{pr}_2^*\overline{\mathcal{V}}$ avec $\text{pr}_1^*\delta^*(\text{pr}_2^*\overline{\mathcal{V}}) = \text{pr}_1^*\overline{\mathcal{V}}$. Cet isomorphisme est le prolongement promis de (11.1.1).

11.4. Nous allons étudier la convergence p -adique de (11.1.1) et (11.2.1). Soient V un anneau de valuation discrète complète d'inégale caractéristique p , K son corps de fractions, $S = \text{Spec}(V)$, X lisse sur S , de fibre générale X_K et \mathcal{V}_K un fibré vectoriel à connexion intégrable sur X_K . Supposons donnés un faisceau cohérent sans p -torsion \mathcal{V} sur X prolongeant \mathcal{V}_K et un système de coordonnées (z_i) : un morphisme étale de X dans l'espace affine A^d sur V . Le système de coordonnée définit des champs de vecteurs $\partial/\partial z_i$ et on écrira ∇_i pour $\nabla_{\partial/\partial z_i}$. Considérons la propriété de convergence:

(11.4.1) Il existe des entiers $\alpha(n)$, croissant en $O(\log n)$, tels que les $p^{\alpha(n)}\nabla_i^n/n! : \mathcal{V}_K \rightarrow \mathcal{V}_K$ se prolongent en des morphismes de \mathcal{V} dans \mathcal{V} .

Soit $\delta(X)_n$ le $n^{\text{ème}}$ voisinage infinitésimal de la diagonale $\delta(X)$ de $X \times_S X$, défini par la puissance $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'idéal qui définit $\delta(X)$. La propriété (11.4.1) équivaut à

(11.4.2) Il existe des entiers $\beta(n)$, croissant en $O(\log n)$, tels que la restriction de (11.1.1) à $(\delta(X)_n)_K = \delta(X_K)_n$, multipliée par $p^{\beta(n)}$, se prolonge à $\delta(X)_n$.

Soit en effet $(z_i^{(j)})$ ($0 \leq i \leq d$, $j = 1, 2$) le système de coordonnées sur $X \times_S X$ défini par les z_i . L'équivalence de (11.4.1) et (11.4.2) résulte de la formule de Taylor: (11.1.1) est

$$\text{pr}_2^* f \longmapsto \sum \text{pr}_1^* \nabla^n f / n! (z^{(2)} - z^{(1)})^n$$

avec les notations usuelles pour le multiindice $n = (n_1, \dots, n_d)$. De (11.4.1) pour α on passe de 11.4.2 pour β avec pour $\beta(n)$ le sup des $\sum \alpha(n_i)$ pour $\sum_1^d n_i \leq n$.

11.4.3 LEMME. *La validité de (11.4.1) est indépendante du choix du système de coordonnées z_i .*

PREUVE. Cela résulte de l'interprétation (11.4.2).

11.4.4 LEMME. *La validité de (11.4.1) est indépendante du prolongement choisi \mathcal{V} de \mathcal{V}_K .*

PREUVE Si \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont deux prolongements, on a $p^N \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset p^{-N} \mathcal{V}_1$ pour N assez grand.

11.4.5 LEMME. *Soit U un ouvert de X contenant les points génériques de la fibre spéciale. Si (11.4.2) est vrai sur U , il est vrai sur X .*

PREUVE. Remplaçant U par $U \cup X_K$, on peut supposer et on suppose que $U \supset X_K$. Soit $\bar{\mathcal{V}}$ un prolongement cohérent sans p -torsion de \mathcal{V} sur X . Soit U' l'ouvert de U sur lequel $\bar{\mathcal{V}}$ est localement libre. Il contient encore X_K et les points génériques de la fibre spéciale. Remplaçant U par U' , on peut supposer et on suppose que $\bar{\mathcal{V}}$ est localement libre sur U . Soit j l'inclusion de U dans X . Le faisceau $j_* j^* \bar{\mathcal{V}}$ est encore cohérent (SGA 2 VIII 3.2). Remplaçant $\bar{\mathcal{V}}$ par $j_* j^* \bar{\mathcal{V}}$, on peut supposer et on suppose que $\bar{\mathcal{V}} = j_* j^* \bar{\mathcal{V}}$. Notons encore j l'inclusion de $\delta(U)_n$ dans $\delta(X)_n$. Parce que $\text{pr}_i : \delta(X)_n \rightarrow X$ est plat et que $\text{pr}_i^{-1}(U) = \delta(U)_n$, on a encore

sur $\delta(X)_n : \text{pr}_i^* \overline{\mathcal{V}} = j_* j^* \text{pr}_i^* \overline{\mathcal{V}}$. Les assertions (11.4.2) pour X et U sont dès lors équivalentes.

11.4.6 LEMME. *Le fibré à connexion trivial (\mathcal{O}, d) vérifie (11.4.1), avec $\alpha = 0$.*

PREUVE: Les $\nabla_i^n/n!$ sont des coefficients de Taylor.

11.4.7 LEMME. *Si \mathcal{V}_K est extension de \mathcal{V}'_K par \mathcal{V}''_K , et que \mathcal{V}'_K et \mathcal{V}''_K vérifient (11.4.1), alors \mathcal{V}_K vérifie (11.4.1).*

PREUVE. Soient \mathcal{V} un prolongement cohérent sans p -torsion de \mathcal{V}_K sur X . Notons j l'inclusion de X_K dans X , et prolongeons \mathcal{V}'_K en $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \cap j_* \mathcal{V}'_K$ (intersection dans $j_* \mathcal{V}_K$), \mathcal{V}''_K en \mathcal{V}/\mathcal{V}' . Par 11.4.5, on peut supposer \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' localement libres. Le problème étant local sur X , on peut supposer de plus que l'extension \mathcal{V} de \mathcal{V}'' par \mathcal{V}' est scindée: $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$ en tant que fibré vectoriel, et supposer choisi un système de coordonnées (z_i) sur X . La connexion s'écrit

$$\nabla + \begin{pmatrix} \nabla' & \omega \\ 0 & \nabla'' \end{pmatrix} .$$

Fixons i et posons $D = \nabla'_i + \nabla''_i$, $u = \omega_i$. On a $\nabla_i = D + u$, et

$$\nabla_i^n/n! = D^n/n! + \sum_{a+b=n-1} \frac{a!b!}{n!} D^a/a! \cdot u \cdot D^b/b! .$$

Rappelons que, si $\text{Sch}(n)$ est la somme des chiffres de n en base p , la valuation p -adique de $n!$ est $(n - \text{Sch}(n))/(p - 1)$. Celle de $n!/a!b!$ est donc

$$(1 + \text{Sch}(a) + \text{Sch}(b) - \text{Sch}(n))/(p - 1) \leq O(\log n)$$

et (11.4.1) pour \mathcal{V} résulte de (11.4.1) pour \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' .

11.5 Remarque. La propriété de convergence (11.4.1)(11.4.2) est vraie si le complété formel de \mathcal{V} le long de la fibre spéciale admet une structure de F -cristal. Pour une convergence moins précise, qui se prouve de même, cf. N. Katz, Travaux de Dwork, Sémin. Bourbaki 409 (1971–72).

11.6. Supposons que $X = \overline{X} - D$, avec \overline{X} lisse sur S et D un diviseur à croisements normaux relatifs, somme de diviseurs lisses D_i . Soit encore

$(\overline{X} \times_S \overline{X})^\sim$ déduit de $\overline{X} \times_S \overline{X}$ en éclatant les $\delta(D_i)$. L'application diagonale de X se prolonge en $\delta : \overline{X} \rightarrow (\overline{X} \times_S \overline{X})^\sim$. Supposons \mathcal{V} régulier singulier à l'infini et soit $\overline{\mathcal{V}}_K$ un prolongement de \mathcal{V}_K à \overline{X}_K , comme en 11.1, par exemple le prolongement canonique [D1] II 5.2. Soit $\overline{\mathcal{V}}$ un prolongement de $\overline{\mathcal{V}}_K$ à X en tant que faisceau cohérent sans torsion.

Soient $\delta(\overline{X})_n$ (resp. $\delta(\overline{X}_K)_n$) le $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de $\delta(\overline{X})$ (resp. $\delta(\overline{X}_K)$) dans $(\overline{X} \times \overline{X})^\sim$ (resp. $(\overline{X}_K \times \overline{X}_K)^\sim$) et h_n la restriction de (11.2.1) à $\delta(\overline{X}_K)_n$. L'analogue de (11.4.2) est la propriété de convergence

(11.6.1) Il existe des entiers $\beta(n)$, croissant en $O(\log n)$, tels que $p^{\beta(n)} h_n$ se prolonge à $\delta(\overline{X})_n$, en un morphisme de $\text{pr}_2^* \overline{\mathcal{V}}$ dans $\text{pr}_1^* \overline{\mathcal{V}}$.

Comme en 11.4.4, la validité de (11.6.1) ne dépend pas du prolongement choisi $\overline{\mathcal{V}}$ de $\overline{\mathcal{V}}_K$. Comme en 11.4.5, si (11.6.1) est vrai sur un ouvert U de \overline{X} contenant les points génériques de la fibre spéciale, alors (11.6.1) est vrai sur \overline{X} . En particulier, il suffit de vérifier (11.6.1) sur X . Par 11.4.6, 11.4.7, on a

11.7 PROPOSITION. *Un fibré vectoriel à connexion intégrable unipotent vérifie (11.6.1).*

11.8. Soit $\delta(\overline{X})_{(1)}$ l'espace rigide analytique voisinage ouvert de rayon 1 de $\delta(\overline{X})$ dans $(\overline{X} \times \overline{X})^\sim$. C'est la réunion croissante des fibres générales des schémas formels suivants: pour chaque N , éclater dans $(\overline{X} \times_S \overline{X})^\sim$ la fibre spéciale de $\delta(\overline{X})_n$ et compléter le long du complément du transformé pur de la fibre spéciale. Les points cet espace analytique dans une extension finie K' de K sont les points de $\overline{X} \times_S \overline{X}$ de réduction en fibre spéciale dans $\delta(\overline{X})$. La convergence 11.6.1 implique que l'isomorphisme formel 11.2.1 se prolonge en un isomorphisme sur $\delta(\overline{X})_{(1)}$. Il suffirait pour cela d'avoir dans (11.6.1) des $\beta(n)$ croissant en $o(n)$.

11.9. Supposons V absolument non ramifié, de corps résiduel parfait $k : V = W(k)$. Soit $\sigma : V \rightarrow V$ relevant l'élévation à la puissance $p^{\text{ième}}$: $x \mapsto x^p$ de k . On note $F : S \rightarrow S$ l'isomorphisme relevant le Frobenius absolu de $\text{Spec}(k) : F^* = \sigma$.

Pour X un S -schéma, on note $X^{(p)}$ son pull-back par F . Pour X et Y deux S -schémas, un morphisme σ -linéaire de X dans Y s'identifie donc à un morphisme de X dans $Y^{(p)}$.

Soient X, \overline{X} et $\mathcal{V}_K, \overline{\mathcal{V}}$ comme en 11.6, avec \overline{X} propre sur S et \mathcal{V}_K un fibré à connexion vérifiant 11.4.2. D'après 11.6 le prolongement $\overline{\mathcal{V}}$ vérifie 11.6.1.

Soit (U_j) un recouvrement affine de la fibre spéciale \overline{X}_s . Soit \overline{X}_j le complété formel de \overline{X} le long de U_j . Ces schémas formels recouvrent le schéma formel défini par \overline{X} , et leurs fibres générales (rigides analytiques) recouvrent l'espace rigide analytique $\overline{X}_K^{\text{an}}$.

Sur chaque U_j , le Frobenius absolu $F : U_j \rightarrow U_j$ est σ -linéaire et on a l'égalité de diviseurs $F^* D_i = pD_i$. Sur chaque \overline{X}_j , on peut relever F en un morphisme σ -linéaire $F_j : \overline{X}_j \rightarrow \overline{X}_j$ vérifiant encore $F_j^* D_i = pD_i$. Dans un système de coordonnées locales adapté au diviseur à croisements normaux D , on peut prendre simplement $z \mapsto z^p$.

Deux relèvements F'_j, F''_j définissent $\phi : \overline{X}_j \rightarrow \overline{X}_j \times_S \overline{X}_j$ qui se factorise par $(\overline{X}_j \times_S \overline{X}_j)^{\sim}$, le complété de $(\overline{X} \times_S \overline{X})^{\sim}$ le long de l'image inverse de $U_j \times U_j$. De plus, modulo p , ϕ tombe dans $\delta(\overline{X}_j)$. On en déduit que ϕ^{an} se factorise en un morphisme

$$\overline{X}_j^{\text{an}} \longrightarrow \delta(\overline{X})_{(1)}.$$

D'après 11.8, on obtient un isomorphisme canonique

$$F'^*_j \overline{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} F''^*_j \overline{\mathcal{V}}.$$

On a une compatibilité pour trois relèvements.

Sur l'espace analytique $\overline{X}_j^{\text{an}}$, $F_j^* \overline{\mathcal{V}}$ est donc indépendant du choix du relèvement du Frobenius absolu. Les $F'_j^* \overline{\mathcal{V}}$ se recollent en un faisceau cohérent à connexion sur $\overline{X}_K^{\text{an}}$. Par GAGA ([Ki]), il provient d'un faisceau cohérent à connexion sur \overline{X}_K . Notation: $F^* \overline{\mathcal{V}}$. Cette construction est fonctorielle en $\overline{\mathcal{V}}$ et la restriction de $F^* \overline{\mathcal{V}}$ à X_K ne dépend que de \mathcal{V} . Notation: $F^* \mathcal{V}$.

11.10 DEFINITION. Le fibré à connexion $F^* \mathcal{V}$ construit en 11.9 est l'image inverse par Frobenius de \mathcal{V} .

Par construction, pour tout ouvert U de \overline{X}_s et tout relèvement F de Frobenius au complété formel \overline{X}_U^{\wedge} de \overline{X} le long de U , $F^* \overline{\mathcal{V}}$, restreint à l'espace analytique fibre générale de \overline{X}_U^{\wedge} , est l'image inverse par F de $\overline{\mathcal{V}}$.

La construction 11.10 est compatible à l'image inverse par $Y \rightarrow X$. En particulier, pour $x \in \overline{X}_K(K)$, la fibre de $F^* \overline{\mathcal{V}}_K$ en x est l'image inverse par $F : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(K)$ de la fibre de $\overline{\mathcal{V}}_K$ en x .

11.11. Soit $\mathcal{C}(X)$ – ou simplement \mathcal{C} – la catégorie des fibrés vectoriels à connexion intégrable unipotents sur X_K . D'après 11.7, ces fibrés vérifient (11.4.2) et le foncteur F^* de 11.10 est défini. C'est un foncteur σ -linéaire de \mathcal{C} dans \mathcal{C} . L'image inverse de X_K à $X_K^{(p)}$ est une équivalence σ -linéaire de \mathcal{C} avec la catégorie analogue $\mathcal{C}^{(p)}$ sur $X^{(p)}$. Le foncteur F^* se factorise donc par

$$(11.11.1) \quad F_{X/K}^* : \mathcal{C}^{(p)} \longrightarrow \mathcal{C},$$

K -linéaire. Cela résulte aussi directement des définitions: un relèvement de Frobenius définit un morphisme, sur S , de X dans $X^{(p)}$.

Le foncteur $F_{X/K}^*$ n'est en général pas le foncteur image inverse par un morphisme de X dans $X^{(p)}$. Comme nous allons le voir, on peut néanmoins lui appliquer les arguments de 10.44 et, pour $x \in X(K)$ définissant $x^{(p)} \in X^{(p)}(K)$, en déduire $F_{X/K*}$ de $\pi_1(X, x)_{\text{DR}}$ dans $\pi_1(X^{(p)}, x^{(p)})_{\text{DR}}$.

Par passage à la limite, on peut appliquer F^* (resp. $F_{X/K}^*$) aux Ind-objets de \mathcal{C} (resp. $\mathcal{C}^{(p)}$). Par exemple, si U est un schéma affine sur X , muni d'une connexion, et que son algèbre affine (un faisceau quasi-cohérent à connexion sur X) est limite inductive de fibrés vectoriels à connexion intégrable unipotents, il a un sens de prendre l'image inverse de U par F^* .

Les foncteurs pr_1^* et pr_2^* définissent

$$\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X \times X),$$

pleinement fidèle d'après 10.45–10.48 et en fait une équivalence. Composant ce foncteur avec le foncteur “fibré vectoriel sous-jacent”, on obtient un foncteur fibre de $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X)$ sur $X \times X$. Par 6.13 (explicité par 6.14), l'algèbre affine de P_{DR} est l'image d'un ind-objet de $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(X)$. Le faisceau quasi-cohérent à connexion sur $X \times X$ sous-jacent à l'algèbre affine de P_{DR} est donc limite inductive de fibrés vectoriels à connexion intégrable unipotents. On peut donc appliquer F^* à P_{DR} (ou, de même, $F_{X/K}^*$ à $P_{\text{DR}}^{(p)}$). Par 6.14, $F_{X/K}^* P_{\text{DR}}^{(p)}$ est le groupoïde des automorphismes du foncteur fibre $F_{X/K}^*$ sur $\mathcal{C}(X^{(p)})$, d'où, comme en 10.44.

$$(11.11.2) \quad F_{X/K*} : P_{\text{DR}} \longrightarrow F_{X/K}^* P_{\text{DR}}^{(p)}.$$

Pour $x \in X(K)$, on en déduit

$$(11.11.3) \quad F_{X/K*} : \pi(X, x)_{\text{DR}} \longrightarrow \pi_1(X^{(p)}, x^{(p)})_{\text{DR}}$$

(cf. la remarque qui suit 11.10) et un $(F_{X/K*})$ -morphisme encore noté $F_{X/K*}$ du torseur fondamental $T(X, x)_{\text{DR}}$ vers $F_{X/K}^* T(X^{(p)}, x^{(p)})$.

D'après 10.49 (cf. 10.50) le morphisme de groupoïdes (11.11.2) est caractérisé par sa propriété d'être horizontal. Par la correspondance entre groupoïdes et torseurs le morphisme $F_{X/K*}$ entre groupes fondamentaux est caractérisé l'existence d'un $(F_{X/K*})$ -morphisme horizontal de torseurs trivialisés en x de $T(X, x)_{\text{DR}}$ vers $F_{X/K}^* T(X^{(p)}, x^{(p)})$ (cf. fin de 10.51).

11.12 PROPOSITION. *Les morphismes (11.11.2) (11.11.3) sont des isomorphismes.*

PREUVE. L'assertion est invariante par extension des scalaires (10.43). On peut donc supposer, et on suppose, que $X(k) \neq \phi$. Soit $x \in X(k)$. Il suffit de considérer (11.11.3).

Le groupe $\pi_1(X_K^{(p)}, x^{(p)})_{\text{DR}}$ se déduit de $\pi_1(X_K, x)_{\text{DR}}$ par l'extension des scalaires $\sigma : K \rightarrow K$. Les quotients $\pi_1^{(N)}$ de ces groupes pour la série centrale descendante sont donc de même dimension, et il suffit de vérifier la surjectivité de (11.11.3). Pour cela, il suffit de vérifier pour ces groupes rendus abéliens. Ce sont respectivement $H_{1\text{DR}}(X_K)$ et $H_{1\text{DR}}(X_K^{(p)})$, où $H_{1\text{DR}}$ est le dual de H_{DR}^1 , classifiant les extensions, en tant que fibrés à connexion intégrable, de \mathcal{O} par \mathcal{O} . En caractéristique p , le Frobenius relatif $F : X \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow X \otimes \mathbb{F}_p^{(p)}$ est fini et plat de degré $p^{\dim X}$. Parallèlement à notre construction de $F_{X/K}^*$ pour les H_{DR}^1 , vus comme Ext^1 , on peut construire un morphisme trace $F_{X/K*}$, et

$$F_{X/K*} F_{X/K}^* = p^{\dim X}.$$

Ceci assure l'injectivité voulue.

§12. La filtration de Hodge du π_1 .

Soient k un corps de caractéristique 0, X lisse sur k et \overline{X} une compactification lisse de X .

12.1 PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) = 0$
- (ii) $H_{\text{DR}}^1(\overline{X}) = 0$
- (iii) $\text{Pic}^0(\overline{X}) = 0$

Si $k = \mathbb{C}$:

- (iv) *La structure de Hodge mixte de $H^1(X)$ est purement de type (1,1).*

Si de plus X est le complément dans \overline{X} d'un diviseur à croisements normaux D :

- (v) $H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) \xrightarrow{\sim} H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

PREUVE. (i) \Leftrightarrow (iii): car $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) = \text{Lie Pic}(\overline{X})$.

(i) \Leftrightarrow (ii): car $h^{01} = h^{10}$ et que la suite spectrale de Hodge à de Rham dégénère.

(ii) \Leftrightarrow (iv): Si D est somme des D_i ($i \in I$), on a une suite exacte de structures de Hodge mixtes

$$0 \rightarrow H^1(\overline{X}) \rightarrow H^1(X) \rightarrow \mathbb{Q}(-1)^I.$$

(iv) \Leftrightarrow (v): $H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) = F^1 H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

12.2. Dans ce paragraphe, nous supposerons que $X = \overline{X} - D$ avec \overline{X} propre et lisse sur k de caractéristique 0 et D un diviseur à croisements normaux sommes de diviseurs lisses. Nous ferons l'hypothèse de commodité que X est absolument irréductible, et supposerons que X vérifie les conditions équivalentes de 12.1:

$$(12.2.1) \quad H^0(\overline{X}, \mathcal{O}) = k \quad \text{et}$$

$$(12.2.2) \quad H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) = 0.$$

Cette dernière hypothèse, très restrictive, est vérifiée si X est rationnelle. Elle nous permettra de donner une description simple, inspirée par Sullivan

[Su], des Lie $\pi_1(X, x)_{\text{DR}}^{(N)}$. Sur cette description, les filtrations par le poids et de Hodge seront en évidence.

Pour \mathcal{V} un fibré vectoriel à connexion intégrable sur X , à monodromie locale autour de D unipotente, notons \mathcal{V}_{can} son prolongement canonique [D1] II 5.2 sur \overline{X} . Le foncteur $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{\text{can}}$, à valeurs dans les fibrés vectoriels sur \overline{X} , est exact et compatible au produit tensoriel.

12.3 PROPOSITION. *Sous les hypothèses de 12.2, si \mathcal{V} est nilpotent (10.25), le fibré vectoriel \mathcal{V}_{can} est un fibré vectoriel trivial \mathcal{O}^n .*

PREUVE. Procédons par récurrence sur la dimension d de \mathcal{V} . Si $d = 1$, $\mathcal{V} \simeq (\mathcal{O}, d)$ et $\mathcal{V}_{\text{can}} \simeq \mathcal{O}$. Si $d > 1$, \mathcal{V} est une extension

$$0 \rightarrow \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'' \rightarrow 0$$

avec \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' nilpotents de dimension plus petite. La suite

$$0 \rightarrow \mathcal{V}'_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{V}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{V}''_{\text{can}} \rightarrow 0$$

est exacte. Par récurrence, on a $\mathcal{V}'_{\text{can}} \simeq \mathcal{O}^{d'}$, $\mathcal{V}''_{\text{can}} \simeq \mathcal{O}^{d''}$ et on conclut par (12.2.2):

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(\mathcal{O}^{d'}, \mathcal{O}^{d''}) &= \text{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O})^{d'd''} \quad \text{et} \\ \text{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}) &= H^1(\mathcal{O}) = 0. \end{aligned}$$

12.4. Par (12.2.1), on a une équivalence de catégories

(fibrés vectoriels triviaux sur \overline{X}) $\xleftrightarrow{\sim}$ (espaces vectoriels sur k).

A un espace vectoriel W , on attache $W \otimes \mathcal{O}$. Le foncteur inverse est $\mathcal{W} \mapsto H^0(\overline{X}, \mathcal{W})$. Cette équivalence est compatible au produit tensoriel.

Soit \mathcal{C} la catégorie tannakienne des fibrés vectoriels à connexion intégrable unipotents sur X . Le foncteur $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{\text{can}}$ est compatible à \otimes , d'où un nouveau foncteur fibre de \mathcal{C} sur $\text{Spec}(k)$:

$$(12.4.1) \quad \omega_{\text{DR}} : \mathcal{V} \longmapsto H^0(\overline{X}, \mathcal{V}_{\text{can}}).$$

Le foncteur fibre $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{\text{can}}$ de \mathcal{C} sur \overline{X} s'en déduit par extension des scalaires.

Notons $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ le groupe algébrique des automorphismes de ω_{DR} . Le groupoïde fondamental $P(X/k)_{\text{DR}}$ est simplement $X \times X \times \pi_1(X)_{\text{DR}} \rightarrow X \times X$. Cette description n'est pas horizontale.

12.5. Soient V un espace vectoriel sur k , et $\nabla = d + \omega$ une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long de D sur $V \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$:

$$(12.5.1) \quad \omega \in H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) \otimes \text{End}(V).$$

Toute forme différentielle globale à pôles logarithmiques est exacte ([D2] 3.2.14). L'intégrabilité de la connexion: $R = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ s'écrit donc

$$(12.5.2) \quad [\omega, \omega] = 0,$$

où le crochet, à valeurs dans $H^0(\overline{X}, \Omega^2(\log D)) \otimes \text{End}(V)$, est défini par $[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] = (\alpha \wedge \beta) \otimes [u, v]$.

La même formule définit un crochet, noté $[\omega, \omega]^{\sim}$, à valeurs dans $\overset{2}{\Lambda} H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) \otimes \text{End}(V)$. Soit K le noyau du morphisme naturel

$$\overset{2}{\Lambda} H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) \longrightarrow H^0(\overline{X}, \Omega^2(\log D)).$$

L'intégrabilité (12.5.2) s'écrit encore

$$(12.5.3) \quad [\omega, \omega]^{\sim} \in K \otimes \text{End}(V).$$

Dualisons. Soit H le dual de $H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D))$ et $K^\perp \subset \overset{2}{\Lambda} H$ l'orthogonal de K . La donnée de ω équivaut à celle de

$$(12.5.4) \quad \varphi : H \longrightarrow \text{End}(V).$$

Pour la commodité de calculs ultérieurs, je préfère modifier le choix évident de (12.5.4) par un signe. La dualité entre H et $H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D))$ fournit une 1-forme canonique α à valeurs dans H : si (h_i) et (α_i) sont des bases en dualité,

$$(12.5.5) \quad \alpha = \sum \alpha_i h_i.$$

On prend pour morphisme (12.5.4) le morphisme φ vérifiant

$$(12.5.6) \quad \varphi(\alpha) = -\omega.$$

Soit $\varphi^2 : \overset{2}{\Lambda} H \rightarrow \text{End } V$ défini par $\varphi^2(\alpha \wedge \beta) = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. La condition d'intégrabilité (12.5.3) se récrit

$$(12.5.7) \quad \varphi^2(K^\perp) = 0.$$

Soient $\text{Lib}(H)$ l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel H . Elle est graduée. On a

$$\begin{aligned} \text{Lib}(H)_1 &= H \\ \text{Lib}(H)_2 &= \overset{2}{\Lambda} H \quad (\text{par } x \wedge y \mapsto [x, y]). \end{aligned}$$

La donnée de (12.15.4) équivaut à celle d'un morphisme d'algèbres de Lie

$$(12.5.8) \quad \rho : \text{Lib}(H) \longrightarrow \text{End}(V),$$

avec $\rho|_H = \varphi$, et la condition (12.5.7) se récrit

$$(12.5.9) \quad \rho(K^\perp) = 0.$$

La donnée de la connexion intégrable $\nabla = d + \omega$ sur $V \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ (12.5.1) équivaut donc à celle d'une action sur V de l'algèbre de Lie $L(H, K^\perp)$ quotient de $\text{Lib}(H)$ par l'idéal engendré par K^\perp . On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette construction est compatible au produit tensoriel.

12.6. L'hypothèse (12.2.2) que nous avons faite assure que

$$(12.6.1) \quad H_{\text{DR}}^1(X) = H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D))$$

et le dual H de $H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D))$ est l'homologie de de Rham $H_1^{\text{DR}}(X)$. Le cup-produit $H_{\text{DR}}^1 \otimes H_{\text{DR}}^1 \rightarrow H_{\text{DR}}^2$ admet la factorisation

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^1 \otimes H_{\text{DR}}^1 &\rightarrow \overset{2}{\Lambda} H_{\text{DR}}^1 = \overset{2}{\Lambda} H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log D)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(\overline{X}, \Omega^2(\log D)) \hookrightarrow H_{\text{DR}}^2(X). \end{aligned}$$

Le noyau K de 12.5 est donc aussi celui de l'application $\mu : \overset{2}{\Lambda} H_{\text{DR}}^1 \rightarrow H_{\text{DR}}^2$ par laquelle se factorise le cup-produit.

Pour \mathcal{V} dans \mathcal{C} (12.4), la construction 12.5 s'applique à $\mathcal{V}_{\text{can}} = \omega_{\text{DR}}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ (12.3, 12.4) et fournit une action de $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)$ sur $\omega_{\text{DR}}(\mathcal{V}) = H^0(\overline{X}, \mathcal{V}_{\text{can}})$.

12.7 PROPOSITION. *Le foncteur ω_{DR} induit une équivalence de \mathcal{C} (12.4) avec la catégorie des représentations nilpotentes de $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)$.*

PREUVE. Le foncteur exact ω_{DR} est compatible au produit tensoriel. Il envoie l'objet unité (\mathcal{O}, d) sur la représentation triviale, et donc \mathcal{V} dans \mathcal{C} sur une représentation nilpotente. Réiproquement, si V est une représentation nilpotente, $\mathcal{V}^- := V \otimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ admet une filtration horizontale de quotients successifs (\mathcal{O}, d) , donc est le prolongement canonique de sa restriction à X , et celle-ci est dans \mathcal{C} .

12.8. L'idéal de $\text{Lib}(H_1^{\text{DR}})$ engendré par $K^\perp \subset \overset{2}{\Lambda} H_1^{\text{DR}} = \text{Lib}(H_1^{\text{DR}})_2$ est gradué, et $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)$ hérite donc de la graduation de $\text{Lib}(H_1^{\text{DR}})$. Sa série centrale descendante, quotient de celle de $\text{Lib } H_1^{\text{DR}}$, est

$$Z^N = \bigoplus_{n \geq N} L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)_n .$$

Une représentation nilpotente de $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)$ se factorise par un $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)^{(N)}$ (le quotient par Z^{N+1}), et s'intègre en une représentation du groupe algébrique unipotent sur k correspondant.

12.9 COROLLAIRE. *Le foncteur ω_{DR} induit une équivalence de \mathcal{C} avec la catégorie des représentations du schéma en groupes sur k limite projective des groupes algébriques unipotents d'algèbre de Lie les $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)^{(N)}$.*

Ce corollaire fournit un schéma en groupes affine avec la propriété caractéristique de $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ (12.4):

12.10 PROPOSITION. *Sous les hypothèses de 12.2, $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ défini en 12.4 est la limite projective sur N des groupes algébriques unipotents d'algèbres de Lie les $L(H_1^{\text{DR}}(X), K^\perp)^{(N)}$.*

12.11. L'algèbre de Lie $L(H_1^{\text{DR}}(X), K^\perp)$ et ses quotients $L(H_1^{\text{DR}}(X), K^\perp)^{(N)}$ sont graduées. Les *filtrations par le poids* et *de Hodge* de $L = \text{Lie}(H_1^{\text{DR}}(X), K^\perp)^{(N)}$ sont définies par la graduation:

$$W_{2n} := Z^{-n} L = \bigoplus_{i \leq -n} L_i$$

$$W_{2n+1} := W_{2n}$$

$$F^p := \bigoplus_{i \geq -p} L_i .$$

12.12. La forme différentielle canonique α (12.5.5) à valeurs dans H_1^{DR} fournit une forme différentielle, encore notée α , à valeurs dans $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)$ et ses quotients $L(H_1^{\text{DR}}, K^\perp)^{(N)}$.

Soit P_{DR}^0 le $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ -torseur trivial sur \overline{X} : $P_{\text{DR}}^0 = \pi_1(X)_{\text{DR}} \times X$, action par translations à droite. Soit $P_{\text{DR}}^{0(N)}$ s'en déduisant par $\pi_1(X)_{\text{DR}} \rightarrow \pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}: P_{\text{DR}}^{0(N)} = \pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)} \times X$. La forme α définit un système projectif de connexions sur les torseurs $P_{\text{DR}}^{0(N)}$ ou, comme on dira, sur P_{DR}^0 : celle pour laquelle la dérivée $\nabla g.g^{-1}$, une 1-forme à valeurs dans $\text{Lie} \pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}$, est

$$(12.12.1) \quad \nabla g.g^{-1} = dg.g^{-1} - \alpha .$$

Soit V un espace vectoriel muni d'une action de $\pi_1(X)_{\text{DR}}$, $\mathcal{V} = V \otimes \mathcal{O}$ muni de la connexion correspondante (12.5), et $\mathcal{V}^0 = V \otimes \mathcal{O}$, muni de la connexion triviale. Regardons l'action de $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ comme un morphisme de fibrés sur X

$$(12.12.2) \quad P_{\text{DR}}^0 \times_X \mathcal{V}^0 \longrightarrow \mathcal{V} .$$

Par (12.5.6) et (12.12.1) (les signes se compensent), ce morphisme est horizontal. Cette horizontalité s'exprime encore:

12.13 PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, \mathcal{V} est déduit du fibré à connexion trivial $\mathcal{V}^0 = \omega_{\text{DR}}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{O}$ en tordant par le $\pi_1(X)_{\text{DR}}$ -torseur à connexion P_{DR}^0 .*

12.14. Du point de vue des catégories tannakiennes, la possibilité de définir $\pi_1(X)_{\text{DR}}$, indépendant du point base, tient à l'existence du foncteur ω_{DR} . Le torseur P_{DR}^0 est le torseur des isomorphismes de foncteurs fibres sur X de $\omega_{\text{DR}} \otimes \mathcal{O}_X$ avec ω : oubli de ∇ . Le groupoïde P_{DR} sur X se déduit de P_{DR}^0 :

$$(12.14.1) \quad P_{\text{DR}} = \text{pr}_1^* P_{\text{DR}}^0 \times \text{pr}_2^* P_{\text{DR}}^0 / \pi_1^{\text{DR}}(X) :$$

factoriser un isomorphisme $\text{pr}_1^*\omega \rightarrow \text{pr}_2^*\omega$ par $\omega_{\text{DR}} \otimes \mathcal{O}_{X \times X}$. La connexion de $P_{\text{DR}} = \pi_1^{\text{DR}}(X) \times X \times X$ s'en déduit:

$$(12.14.2) \quad \nabla g.g^{-1} = dg.g^{-1} - \text{pr}_1^*\alpha + ad(g)(\text{pr}_2^*\alpha) .$$

12.15. Soient G un groupe de Lie et $\alpha = \lambda(t)dt$ une 1-forme sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\text{Lie } G$. Définissons l'intégrale $I_0^1(\alpha)$, à valeurs dans G , de α . On considère la solution $g(t)$ de l'équation différentielle

$$dg \cdot g^{-1} = \alpha ,$$

avec la condition initiale que $g(0)$ est l'élément neutre e , et on pose

$$I_0^1(\alpha) := g(1) .$$

Plus généralement, soient M une variété différentiable, α une 1-forme sur M à valeurs dans $\text{Lie } G$, $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ un chemin dans M d'extrémités $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$. On pose

$$I_\gamma(\alpha) := I_0^1(\gamma^*\alpha) .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur γ , on écrira aussi $I_x^y(\alpha)$. Cette "intégrale" est invariante par reparamétrisation du chemin. Pour un chemin composé, on a

$$(12.15.1) \quad I_x^z(\alpha) = I_y^z(\alpha)I_y^x(\alpha) .$$

Pour un chemin infiniment petit, on a

$$(12.15.2) \quad I_x^{x+\delta x}(\alpha) = \alpha(\delta x) + O(\delta x^2) .$$

Munissons le G -torseur trivial $T = G \times M$ sur M de la connexion pour laquelle

$$\nabla e = -\alpha .$$

Pour toute section locale g , on a alors

$$(12.15.3) \quad \nabla g \cdot g^{-1} = dg \cdot g^{-1} - \alpha ,$$

et $I_x^y(\alpha)$ s'obtient en transportant la fibre de T en x en celle de T en y par transport parallèle le long de γ , et en prenant l'image de $e \in T_x = G$ dans $T_y = G$. Si la connexion est intégrable: $d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$, $I_x^y(\alpha)$ ne dépend donc que de la classe d'homotopie du chemin γ de x à y .

Pour usage ultérieur, notons que (12.15.3) peut se récrire

$$(12.15.4) \quad g^{-1}\nabla g = g^{-1}dg - \text{ad } g^{-1}(\alpha) .$$

12.16. La construction 12.15 passe trivialement à la limite, pour G une limite projective de groupes de Lie G_i , et α un système projectif de formes différentielles à valeurs dans les $\text{Lie } G_i$. Appliquons-la, pour X comme précédemment sur $k = \mathbb{C}$, à la 1-forme différentielle canonique α à valeurs dans $\text{Lie } \pi(X)_{\text{DR}}$. Une classe d'homotopie de chemin γ de x à y définit $I_x^y(\alpha) \in \pi_1(X)_{\text{DR}}(\mathbb{C})$ et, par (12.15.1), on obtient ainsi un morphisme de groupoïdes du groupoïde fondamental topologique de X dans $P_{\text{DR}} \simeq X \times X \times \pi_1(X)_{\text{DR}}$. C'est l'unique morphisme du groupoïde fondamental topologique dans celui des sections locales horizontales de P_{DR} .

Prenons la fibre en (x, x) . À une classe d'homotopie γ de lacets en x , on attache $I_\gamma(\alpha)$ et cette construction définit le morphisme

$$\pi_1(X(\mathbb{C}), x) \longrightarrow \pi_1^{\text{DR}}(X)(\mathbb{C})$$

qui induit l'isomorphisme 10.32(b) de $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)^{\text{alg un}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ avec $\pi_1^{\text{DR}}(X)$.

§13. Le π_1 motivique.

13.1. Soient S un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres k , \overline{X}_S propre et lisse sur S , D_S un diviseur à croisements normaux relatifs, $X_S = \overline{X}_S - D$ et \overline{X} , D et X les schémas sur k fibre générale de \overline{X}_S , D_S et X_S . On suppose S étale sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$.

Nous faisons l'hypothèse de commodité que X sur k est géométriquement connexe. Pour disposer des résultats du paragraphe 12, nous supposons enfin que $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) = 0$. Pour des conditions équivalentes, voir 12.1.

Notre but dans ce paragraphe est de mettre ensemble les constructions des paragraphes 10 à 12 pour définir une théorie motivique du π_1 . Passons en revue les objets qui seront construits.

Soit $x \in X_S(S)$: un point $x \in X(k)$ à bonne réduction sur S . Nous construirons le *groupe fondamental motivique* $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$: un schéma en groupe prounipotent en la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations sur S , muni d'une structure entière (7.4, variante). On construira d'abord les $\pi_1^{(N)}$, et leur structure entière, et le π_1 motivique sera défini comme leur limite projective.

L'image inverse par $a : X_S \rightarrow S$ envoie les systèmes de réalisations sur S dans les systèmes de réalisations sur X , et $a^*\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ est un groupe prounipotent en la catégorie des systèmes de réalisations à structure entière sur X . Nous construirons le *torseur fondamental motivique* $T(X, x)_{\text{mot}}$: un $a^*\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ -torseur, trivialisé en x .

Pour $y \in X_S(S)$, la fibre de $T(X, x)_{\text{mot}}$ en y est le $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ -torseur $(P_{y,x})_{\text{mot}}$ des chemins de x à y . Les groupes fondamentaux et torseurs $\pi_1(X, y)_{\text{mot}}$ et $T(X, y)_{\text{mot}}$ se déduisent de $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ en tordant par $(P_{y,x})_{\text{mot}}$. Cette construction est compatible aux structures entières.

Comme en 10.1, étant donné un groupe en systèmes de réalisations G , (resp. un groupe unipotent muni d'une structure entière), et $f : \pi_1(X, x)_{\text{mot}} \rightarrow G$, on appellera *G-torseur fondamental* celui déduit de $T(X, x)_{\text{mot}}$ en poussant par f .

13.2. Un groupoïde en systèmes de réalisations sur X/S se définit comme en 10.2, en faisant:

\mathcal{S} : schémas lisses en S ;

$\mathcal{F}(T)$: schémas affines en la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations sur S .

Un tel groupoïde P définit comme en 10.5 et 10.9:

- (a) Par restriction à la diagonale, un schéma en groupes G en la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations sur S ;
- (b) P sur $S \times S$, qui soit un $(\text{pr}_1 G, \text{pr}_2 G)$ -bitorseur;
- (c) Une loi de composition associative: sur $S \times S \times S$, $\text{pr}_{1,3}^* P$ est le composé de $\text{pr}_{1,2}^* P$ et de $\text{pr}_{1,3}^* P$.

Les objets 13.1 proviennent tous du *groupoïde fondamental motivique* $P(X)_{\text{mot}}$: $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ est la fibre en (x, x) , $(P_{y,x})_{\text{mot}}$ celle en (y, x) et $T(X, x)_{\text{mot}}$ est la restriction à $X \times \{x\}$. Réciproquement, si on dispose d'un point $x \in X_S(S)$, $P(X)_{\text{mot}}$ se déduit de $T(X, x)_{\text{mot}}$ comme en 10.9.

Le groupoïde fondamental motivique a l'élégance de ne pas dépendre du choix d'un point base $x \in X_S(S)$. Puisqu'il existe localement pour la topologie étale de S des sections de X_S/S , on peut le définir par descente à partir du cas où il existe une section. Dans la suite du paragraphe, nous ne considérerons plus que ce cas et nous limiterons à construire $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}$ et $T(X, x)_{\text{mot}}$.

Définissons $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$, i.e. son algèbre de Lie $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ et la structure entière (7.4 amplifié par 7.29) du groupe correspondant.

13.3 Réalisation de Betti. Soit σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de \mathbf{R} . La réalisation de Betti, rel. σ , (1.18 M1) de $\text{Lie } \pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ est

$$(13.3.1) \quad \text{Lie } \pi_1(X, x)_{\sigma}^{(N)} := \text{Lie } \pi_1(X(C), x)^{[N]}.$$

La réalisation de Betti de $\pi_1(X, x)_{\text{mot}}^{(N)}$ est donc

$$(13.3.2) \quad \pi_1(X, x)_{\sigma}^{(N)} := \pi_1(X(C), x)^{[N] \text{alg un}}.$$

Le groupe $\pi_1(X(C), x)^{[N]}$ est un sous-groupe de congruence de $\pi_1(X(C), x)_{\sigma}^{[N]}$. C'est la structure entière.

13.4 Réalisation adélique finie. Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Le groupe fondamental profini $\pi_1(X_{\bar{k}}, x)^{\wedge}$ est fonctoriel en \bar{k} , et l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ est continue. Pour $\bar{k} \hookrightarrow C$, clôture algébrique de \mathbf{R} , c'est le complété profini de $\pi_1(X(C), x)$. Divisons par la série centrale descendante, puis par la torsion. On obtient $\pi_1(X_{\bar{k}}, x)^{[N]}$, complété profini de $\pi_1(X(C), x)^{[N]}$.

Appliquant 9.7, on trouve pour chaque ℓ une \mathbf{Q}_ℓ -algèbre de Lie $\mathrm{Lie} \pi_1(X_{\overline{k}}, x)_\ell^{\wedge[N]}$, et une \mathbf{Z}_ℓ structure pour $\ell > N$. C'est la réalisation adélique finie voulue. Pour $\overline{k} \hookrightarrow C$, on a un isomorphisme de comparaison déduit de 10.20

$$\mathrm{Lie} \pi_1(X, x)_\sigma^{(N)} \otimes \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} \pi_1(X_{\overline{k}}, x)_\ell^{\wedge[N]}.$$

Pour chaque ℓ , l'image de $\pi_1(X_{\overline{k}}, x)^\wedge$ dans le groupe algébrique sur \mathbf{Q}_ℓ d'algèbre de Lie $\mathrm{Lie} \pi_1(X_{\overline{k}}, x)_\ell^{\wedge[N]}$ est compacte ouverte, et, via l'isomorphisme de comparaison, l'adhérence de $\pi_1(X(C), x)^{[N]}$. La structure entière 13.3 est donc une structure entière au sens (7.4) amplifié par 7.29, 7.34.

13.5 Réalisation de de Rham. La réalisation de de Rham de $\mathrm{Lie} \pi_1(X, x)_{\mathrm{mot}}^{(N)}$ est l'algèbre de Lie du quotient $\pi_1^{(N)}$ de $\pi_1(X, x)_{\mathrm{DR}}$ (10.33). L'isomorphisme de comparaison $\mathrm{DR} - B$ est défini par 10.33.4 et 10.43.

13.6 Réalisation cristalline. Soit v une place de k , $v \in S$. L'algèbre de Lie de $\pi_1(X, x)_{\mathrm{DR}}^{(N)} \otimes_k k_v$ est encore l'algèbre de Lie de $\pi_1(X \otimes_k k_v, x)_{\mathrm{DR}}^{(N)}$ (10.43). On définit son Frobenius cristallin comme étant l'inverse de F_* (11.11.3), cf. 11.12.

13.7 Filtrations W et F . En réalisation de de Rham, sous l'hypothèse que $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}) = 0$, on a défini un isomorphisme

$$\mathrm{Lie} \pi_1(X, x)_{\mathrm{DR}}^{[N]} = L(H_1^{\mathrm{DR}}(X), K^\perp) / (\text{degré} > N).$$

La graduation du membre de droite définit les filtrations de Hodge et par le poids, par les formules de 12.11:

$$\begin{aligned} W_{-2n} &= W_{-2n+1} = \oplus \text{ (composantes de degré } \geq n) \\ F^{-n} &= \oplus \text{ (composantes de degré } \leq n). \end{aligned}$$

En réalisation de de Rham, la filtration par le poids est donc déduite de la série centrale descendante: $W_{-2n} = W_{-2n+1} = Z^n$. Dans les autres réalisations, on définit de même W par la série centrale descendante.

13.8. Vérifions les axiomes des systèmes de réalisations. En réalisation de Betti, les filtrations W_{2n} et F^p sont opposées. Elles fournissent une structure de Hodge mixte purement de types (p, p) .

En réalisations ℓ -adiques et cristallines, l'algèbre de Lie graduée pour W est engendrée par son $\mathrm{Gr}_{-2}^W H_1$, et on est ramené aux propriétés de Frobenius agissant sur le H^1 .

13.9. Décrivons le *torseur fondamental motivique* $T(X, x)_{\mathrm{mot}}$ et sa structure entière. Plus précisément, nous décrirons les $a^* \pi_1(X, x)_{\mathrm{mot}}^{(N)}$ -torseurs $T(X, x)_{\mathrm{mot}}^{(N)}$ qui s'en déduisent, et leur structure entière. Le torseur $T(X, x)_{\mathrm{mot}}$ est leur limite projective. La description suivra le format 7.30, 7.31.

13.10 Réalisation de Betti. Soit σ un plongement de k dans une clôture algébrique C de \mathbf{R} . Il s'agit de définir un $\pi_1(X, x)_{\mathrm{mot}}^{(N)} = \pi_1(X(C), x)^{[N]}$ -torseur trivialisé en x sur $X(C)$. On prend le $\pi_1(X(C), x)^{[N]}$ -torseur fondamental (10.1) de la théorie classique.

13.11 Réalisation adélique finie. Il s'agit, pour chaque ℓ , de définir un $\pi_1(X/S, x)_\ell^{[N]}$ -torseur profini lisse sur $X[1/\ell]$. On prend le torseur fondamental $T(X/S, x)_\ell$ de 10.22, poussé par $\pi_1(X/S, x)_\ell \rightarrow \pi_1(X/S, x)_\ell^{[N]}$. Sur $X(\mathbf{C})$, $T(X/S, x)_\ell$ se déduit de $T(X(\mathbf{C}), x)$ en poussant par $\pi_1(X(\mathbf{C}), x) \rightarrow \pi_1(X(\mathbf{C}), x)_\ell$ (pro- ℓ -complété) et ceci fournit $\mathrm{comp}_{\ell, B}$.

13.12 Réalisation de de Rham. Vu l'hypothèse $H^1(\overline{X}_k, \mathcal{O}) = 0$, on a $F^0 \mathrm{Lie} \pi_1 \mathrm{DR} = 0$ et, en réalisation de de Rham, $T(X/S, x)_{\mathrm{DR}}$ est le torseur trivial sous $\pi_1(X/S, x)_{\mathrm{DR}}$. Il est sur X_k . Sa connexion est définie comme en 12.12. Pour e la trivialisation canonique de $T(X/S, x)_{\mathrm{DR}}$, on a $\nabla e = -\alpha \in F^{-1} \mathrm{Lie} \pi_1 \mathrm{DR}$ comme requis. L'isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{\mathrm{DR}, B}$ est défini comme en 12.16.

13.13 Réalisation cristalline. Le Frobenius cristallin est l'inverse de l'isomorphisme $F_{X/K*}$ de 11.11; cf. 11.12.

13.14 REMARQUE. Le π_1 motivique rendu abélien est indépendant du point base. Etant commutatif et unipotent, c'est le schéma vectoriel motivique. Nous définissons l'*homologie* $H_1(X)_{\mathrm{mot}}$ comme étant le motif correspondant:

$$(13.14.1) \quad H_1(X)_{\mathrm{mot}} := \mathrm{Lie} \pi_1(X)_{\mathrm{mot}}^{\mathrm{ab}}.$$

Le H_1 obtenu est dual du H^1 défini en 1.6 (où on ne considérait que $X/\mathrm{Spec}(\mathbf{Q})$). Le H_1 est muni d'une structure entière, image de celle de π_1 .

13.15 TERMINOLOGIE. Supposons donnés un groupe unipotent motivique à structure entière U , et un morphisme f de $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}$ dans U . Pour c un autre point-base, on appellera *U-torseur* des *U-chemins* de b à c le *U-torseur* déduit du $\pi_1(X, b)$ -torseur $P_{c,b}$ en poussant par f . Une trivialisation de ce torseur est un *U-chemin motivique* de b à c .

Supposons en outre que U est une extension

$$1 \rightarrow U_1 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow 1$$

et supposons donné un V -chemin motivique v de b à c . L'image inverse de v dans le *U-torseur* des *U-chemin* de b à c est alors un U_1 -torseur. On l'appellera le *torseur des U_1 -chemin de b à c* . Il dépend du choix de v .

VARIANTE. Pour $Y \subset X$, le *U-torseur fondamental* (13.1) restreint à Y s'appelle encore le *torseur sur Y* des *U-chemins* de b à $y \in Y$, et une trivialisation sur Y du *torseur* des V -chemins de b à $y \in Y$ permet de définir le *U_1 -torseur sur Y* des U_1 -chemins de b à $y \in Y$.

VARIANTE. Même terminologie pour π_1, U_1, U et V sans structure entière.

CAS PARTICULIER. Pour $U = H_1(X)$, on parlera de classes d'homologie de chemins.

§14. Exemple: le π_1 motivique de G_m .

14.1. Soit $a : G_{m,\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ le schéma en groupes “groupe multiplicatif” sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$:

$$G_{m,\mathbb{Z}} := \text{Spec}(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]).$$

C'est la droite projective $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ sur \mathbb{Z} moins les sections disjointes 0 et ∞ .

Soit $G_{m,\mathbb{Q}}$ ou simplement G_m le groupe multiplicatif sur \mathbb{Q} . C'est la fibre générale de a . Nous prendrons le point 1 comme point base. Les hypothèses de 13.1 sont vérifiées: $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$, et $\pi_1(G_m, 1)_{\text{mot}}$ est donc défini. Puisque $(G_m, 1)$, compactifié par \mathbb{P}^1 , a bonne réduction sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, c'est un groupe unipotent en la catégorie des motifs à bonne réduction sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, muni d'une structure entière. Parce que G_m est un groupe, son groupe fondamental est commutatif: $\pi_1(G_m, 1)_{\text{mot}}$ est le schéma vectoriel motivique défini par un motif à coefficients entiers sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, auquel nous l'identifierons. Le torseur fondamental motivique $T(G_m, 1)_{\text{mot}}$ est un torseur sous $\pi_1(G_m, 1)_{\text{mot}}$ sur $G_{m,\mathbb{Z}}$, muni d'une structure entière.

14.2 PROPOSITION. (i) $\pi_1(G_m, 1)_{\text{mot}}$ est le motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$
(ii) $T(G_m, 1)_{\text{mot}}$ est le torseur de Kummer $K(q)$.

Il s'agit de définir des isomorphismes $\pi_1(G_m, 1)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1)$ et $T(G_m, 1)_{\text{mot}} \rightarrow K(q)$. Décrivons leurs réalisations.

Réalisation de Betti. Soit C une clôture algébrique de \mathbb{R} . On a $G_m(C) = C^*$. Le revêtement universel de $(C^*, 1)$ est

$$\exp : (C, 0) \longrightarrow (C^*, 1).$$

Attachant à $z \in C$ la classe d'homotopie de chemins de 1 à $\exp(z)$ contenant l'image par \exp d'un chemin de 0 à z , on l'identifie au torseur fondamental, image inverse du groupoïde fondamental par $u \mapsto (u, 1)$. En particulier, la fibre $\exp^{-1}(1) = 2\pi i\mathbb{Z} \subset C$ est le groupe fondamental. L'action de $a \in 2\pi i\mathbb{Z}$ sur C est $z \mapsto z + a$: on retrouve les descriptions (2.1 (M1)) et (2.10) de $\mathbb{Z}(1)_B$ et de $K(q)_B$.

Réalisations ℓ -adiques. Sur toute clôture algébrique de \mathbb{Q} , les $u \mapsto u^n : (G_m, 1) \rightarrow (G_m, 1)$ forment un système cofinal de revêtements connexes de $(G_m, 1)$, marqués au-dessus du point base. Si on regarde ces revêtements

comme des faisceaux localement constants sur \mathbb{G}_m , le torseur fondamental est la limite projective de ces revêtements. Le π_1 profini est donc la limite projective $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ des noyaux μ_n des $u \mapsto u^n$, et le torseur fondamental est la limite projective des μ_n -torseurs des racines $n^{\text{ièmes}}$ de q .

Pour C une clôture algébrique de \mathbf{R} , le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 2\pi i\mathbb{Z} & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\exp} & C^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \exp(z/n) & & \downarrow \exp(z/n) & \parallel & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & C^* & \xrightarrow{z^n} & C^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif et $\text{comp}_{\mathbb{Z}(n), B}$ est donc $a \mapsto \exp(a/n) : 2\pi i\mathbb{Z} \mapsto \mu_n$. On retrouve les descriptions 2.1(M3)(M5) et 2.9, 2.10 de $\mathbb{Z}(1)\widehat{\mathbf{Z}}$ et $K(q)\widehat{\mathbf{Z}}$, et celle de l'isomorphisme $\text{comp}_{\mathbb{Z}, B}$.

Réalisation de de Rham. On a $H_{\text{DR}}^1(\mathbb{G}_m) = \mathbf{Q}$, engendré par la 1-forme logarithmique $\frac{du}{u}$, et $H_{\text{DR}}^2(\mathbb{G}_m) = 0$. D'après 12.10, l'algèbre de Lie de $\pi_{1\text{DR}}$ est $H_1^{\text{DR}}(\mathbb{G}_m) = \mathbf{Q}$: le groupe $\pi_{1\text{DR}}$ est le groupe additif \mathbb{G}_a . Le type de Hodge est (-1,-1). Le torseur fondamental est le torseur trivial. Sa connexion est $\nabla f = df - \frac{dq}{q}$. Sur une clôture algébrique C de \mathbf{R} , les sections locales horizontales du torseur fondamental sont les $\log q + c^{\text{te}}$. L'unique morphisme de faisceaux, respectant le marquage au-dessus de 1, du système local des logarithmes de q (torseur fondamental en réalisation de Betti), dans le système local des $\log q + C^{\text{te}}$, est l'inclusion identique. Le morphisme de comparaison $\pi_1(\mathbb{G}_m, 1) \rightarrow \pi_{1\text{DR}}(\mathbf{C})$ est donc l'inclusion de $2\pi i\mathbb{Z}$ dans C , et on retrouve les descriptions 2.1(M2)(M5) et 2.9, 2.10 de $\mathbb{Z}(1)_{\text{DR}}$ et $K(q)_{\text{DR}}$ et de $\text{comp}_{\text{DR}, B}$.

Réalisation cristalline. Etendons les scalaires à \mathbf{Q}_p . Le schéma \mathbb{G}_m sur \mathbf{Q}_p est prolongé en $\mathbb{G}_{m\mathbf{Z}_p}$ sur \mathbf{Z}_p et compactifié par $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_p}^1$. Le morphisme de Frobenius en caractéristique p se relève en $x \mapsto x^p$. Ce relèvement \tilde{F} vérifie les égalités de diviseurs $\tilde{F}^{-1}(0) = p(0)$ et $\tilde{F}^{-1}(\infty) = p(\infty)$. L'opération F^* de 11.11 sur les fibrés à connexion unipotents est donc simplement l'image inverse \tilde{F}^* .

L'image inverse par \tilde{F}^* du torseur fondamental de de Rham est le torseur trivial sous \mathbb{G}_a , muni de la connexion pour laquelle

$$\nabla f = df - p \frac{dq}{q}.$$

En effet, $\tilde{F}^*(\frac{dq}{q}) = p \frac{dq}{q}$.

Soit “ p ” la multiplication par $p : G_a \rightarrow G_a$ et la multiplication par p du G_a -torseur trivial sur G_m dans lui-même. Le morphisme “ p ”: $T(G_m, 1)_{\text{DR}} \rightarrow \tilde{F}^*T(G_m, 1)_{\text{DR}}$ est horizontal, un “ p ”-morphisme (0.6) de torseurs et respecte les trivialisations au point fixe 1 de \tilde{F} . C'est donc le Frobenius F_* de $\pi_1(G_m, 1)$ et de $T(G_m, 1)_{\text{DR}}$ (11.11).

Rappelons que le Frobenius cristallin est l'inverse de F_* . On a retrouvé la description 2.1(M4) et 2.10 des Frobenius cristallins de $\mathbb{Z}(1)$ et $K(q)$.

14.3. Parce que G_m est un groupe, le torseur fondamental motivique donne lieu à un isomorphisme de torseurs sur $G_m \times G_m$:

$$\pi^*T(G_m, 1)_{\text{mot}} \simeq \text{pr}_1^*T(G_m, 1) + \text{pr}_2^*T(G_m, 1),$$

pour $\pi : (x, y) \mapsto xy$. Ceci avait déjà été observé directement pour les torseurs de Kummer.

En particulier, l'image inverse du torseur de Kummer par $x \mapsto x^n$ est n fois le torseur de Kummer, et la restriction du torseur de Kummer au sous-schéma $\mu_n \subset G_m$ est de multiple par n trivial.

Si on néglige les structures entières, on en déduit que le torseur de Kummer $K(q) \otimes \mathbb{Q}$ induit sur $\mu_n \subset G_m$ un torseur sous $\mathbb{Q}(1)$ qui est trivial. Il est même naturellement trivialisé. Il ne vaut pas la peine d'insister sur ce point, car la trivialisation est unique.

Lorsqu'on néglige les structures entières, on exprimera la trivialité de $K(q) \otimes \mathbb{Q}$ sur μ_n en disant qu'on dispose d'un chemin motivique canonique, sur G_m , de 1 à une racine de l'unité.

Explicitons la réalisation de Betti de ce chemin. Soit donc ζ une racine $n^{\text{ième}}$ de 1. Choisissons une classe de chemin de 1 à ζ , i.e. $a \in \frac{2\pi i}{n}\mathbb{Z}$ tel que $\zeta = \exp(a)$. Ce chemin définit $[a] \in K(\zeta)_B$. Le torseur $(K(\zeta) \otimes \mathbb{Q})_B$ sous $2\pi i\mathbb{Q}$ se déduit du torseur $K(\zeta)_B$ sous $2\pi i\mathbb{Z}$ en poussant par $2\pi i\mathbb{Z} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$. Le chemin canonique est $[a] - a$.

Explicitons de même la réalisation ℓ -adique. Soit \bar{k} une clôture algébrique de \mathbb{Q} et $\zeta \in \mu_n(\bar{k})$. Le torseur $K(\zeta)_\ell$ est celui des systèmes α_i ($i \geq 0$) avec $\alpha_i = \alpha_{i+1}^\ell$ et $\alpha_0 = \zeta$. C'est un torseur sous le groupe $\mathbb{Z}_\ell(1)$ des systèmes β_i ($i \geq 0$) avec $\beta_i = \beta_{i+1}^\ell$ et $\beta_0 = 1$. Si n est premier à ℓ , le chemin canonique de 1 à ζ est donné par $\alpha_i = \zeta^{a(i)}$, avec $a(i)$ inverse de ℓ^i modulo n . Si n est une puissance de ℓ , le chemin canonique est dans $(K(\zeta) \otimes \mathbb{Q})_\ell$, déduit du $\mathbb{Z}_\ell(1)$ -torseur $K(\zeta)_\ell$ en poussant par

$\mathbf{Z}_\ell(1) \hookrightarrow \mathbf{Q}_\ell(1)$. On peut identifier $\mathbf{Q}_\ell(1)$ à l'ensemble des systèmes β_i ($i \geq 0$) avec $\beta_i = \beta_{i+1}^\ell$ et β_0 une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ . Si (α_i) est dans $K(\zeta)$, le chemin canonique est $(\alpha_i) - (\alpha_i)$.

14.4. Le π_1 de \mathbf{G}_m , étant abélien, ne dépend pas du point base: c'est le H_1 . Les automorphismes $q \mapsto \lambda q$ agissent trivialement sur le H_1 . Si T est un espace principal homogène sous \mathbf{G}_m (i.e. une droite moins 0), son π_1 coïncide donc avec celui de \mathbf{G}_m . De même, le torseur des chemins $P_{\lambda t, t}$ est $K(\lambda)$.

§15. Points base à l'infini.

Dans ce paragraphe, nous montrons comment certains vecteurs tangents en des points “à l'infini” de X peuvent servir de points base dans la définition de $\pi_1(X, 0)$ dans chaque théorie du π_1 (§10), donc dans la théorie motivique (§13).

Spécialement utile pour nous sera le cas où $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et où le “point base à l'infini” b est un vecteur tangent non nul en 0, 1 ou ∞ . Notre interprétation géométrique (§16) des torseurs $P_{d,k}$ du paragraphe 3 reposera sur la définition d'un π_1 motivique $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}$ pour b le vecteur tangent 1 en 0, du $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}$ -torseur fondamental correspondant et de sa fibre en une racine de l'unité $\zeta \neq 1$ ou en le vecteur tangent -1 en 1.

Pour t un vecteur tangent non nul en 0, la monodromie autour de 0 sera définie dans $\pi_1(X, t)_{\text{mot}}$, comme morphisme

$$\mu_0 : \mathbf{Z}(1) \longrightarrow \pi_1(X, t)_{\text{mot}}.$$

Nous commencerons par décrire le cadre général dans lequel ces constructions devraient avoir un sens. Nous traiterons ensuite séparément de chaque théorie du π_1 . Par lassitude, nous ne traiterons que du cas où X est de dimension 1.

15.1. Soient X un schéma régulier, D un diviseur à croisements normaux de \overline{X} et $X = \overline{X} - D$. Supposons pour simplifier D réunion de diviseurs réguliers distincts D_i ($i \in I$). Notations: pour $J \subset I$:

D_J : intersection des D_j ($j \in J$).

D_J^0 : complément de la trace, sur D_J , des D_i ($i \in I - J$).

N_J : fibré normal à D_J . Si \mathcal{J} est le faisceau d'idéaux qui définit D_J , alors, en tant que faisceau localement libre sur D_J , N_J est le dual de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. En tant qu'espace fibré au-dessus de D_J , c'est le spectre de l'algèbre symétrique de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$.

L'espace fibré en espaces affines N_J sur D_J est la somme directe des $N_{\{j\}}$ restreints à D_J ($j \in J$). Les $N_{J-\{j\}}$, restreints à D_J , en sont des sous-fibrés en hyperplans (hyperplans de coordonnées, dans un système de coordonnées locales adaptés aux D_j). Soit N_J^0 le complément des $N_{J-\{j\}}$ dans N_J . On a

$$(15.1.1) \quad N_J^0 = \text{produit fibré sur } D_J \text{ des restriction des } N_{\{j\}}^0 \quad (j \in J).$$

Soit enfin N_J^{00} la restriction de N_I^0 à D_J^0 .

15.2. Il devrait exister des foncteurs “restriction à N_I^0 ” des types suivants.

(A). Un foncteur exact (i.e. compatible aux limites inductives et projectives finies) de la catégorie des revêtements finis étales de X , modérément ramifiés le long de D , dans celle des revêtements de N_I^0 relativement modérés au sens suivant. Localement sur D_I , un choix d'équations $z_i = 0$ pour les D_i fournit un isomorphisme du fibré N_I^0 sur D_I avec le fibré trivial $D_I \times G_m^I$, et un revêtement relativement modéré de $N_I^0 \simeq D_I \times G_m^I$ est un qui, localement pour la topologie étale de D_I , soit trivialisé par $z \mapsto z^N : G_m^I \rightarrow G_m^I$, avec N premier aux caractéristiques résiduelles. On a $D_I \times G_m^I \subset D_I \times \mathbf{P}^{1I}$ et “relativement modéré” équivaut à “modérément ramifié le long du diviseur à croisements normaux de $D_I \times \mathbf{P}^{1I}$ de complément $D_I \times G_m^I$.

Si on applique cette construction au complément \overline{X}' des D_i ($i \in I - J$) et à la trace des D_j ($j \in J$) sur \overline{X}' , on attache à un revêtement fini étale de X , modérément ramifié le long des D_j ($j \in J$), un revêtement relativement modéré de N_J^{00} sur D_J^0 . Si on part d'un revêtement modérément ramifié le long de D , le revêtement obtenu doit être modérément ramifié le long de $N_J^0 - N_J^{00}$.

(A'). Il devrait y avoir une variante relative, pour \overline{X} lisse sur S et D un diviseur à croisements normaux relatifs. Noter que si les points génériques de S sont de caractéristique 0, les hypothèses de modération sont automatiquement vérifiées.

(B). On suppose \overline{X} lisse sur k de caractéristique 0. On veut un \otimes -foncteur exact de la catégorie des fibrés vectoriels à connexion intégrable \mathcal{V} sur X , réguliers singuliers le long de D dans celle des fibrés vectoriels à connexion intégrable sur N_I^0 , relativement régulier singulier à l'infini au sens suivant: la restriction à chaque fibre de $N_I^0 \rightarrow D_I$ est régulière singulière à l'infini. Condition équivalente: localement sur D_I , avec les notations de (A), régulier singulier le long du diviseur à croisements normaux de $D_I \times \mathbf{P}^{1I}$ de complément $D_I \times G_m^I \simeq N_I^0$.

Si \mathcal{V} est régulier singulier à l'infini, le fibre obtenu doit l'être aussi.

(C) On suppose \overline{X} lisse sur \mathbf{C} . On veut un foncteur exact et compatible aux sommes disjointes de la catégorie des revêtements de $X(\mathbf{C})$ dans celle

des revêtements de $N_I^0(C)$. Noter que “revêtement” et “faisceau localement constant” sont synonymes.

Théorie classique (no 3 à 12).

15.3. On ne définira le foncteur 15.2(C) que pour \overline{X} une courbe. Un peu plus généralement, on prendra une surface de Riemann \overline{X} et un ensemble fini S de points de \overline{X} (le diviseur D). On pose $X = \overline{X} - S$ et pour $s \in S$ on note T_s l'espace tangent en s et $T_s^0 := T_s - \{0\}$. On se propose de construire un foncteur “restriction”: $R \mapsto R_{(s)}$ des revêtements de X dans les revêtements de T_s^0 .

La construction sera locale au voisinage de s : pour \overline{U} un voisinage de s dans \overline{X} et $U = \overline{U} \cap X$, on aura

$$\text{restriction de } X \text{ à } T_s^0 = (\text{restriction de } U \text{ à } T_s^0) \circ (\text{restriction à } U).$$

Remplaçant \overline{X} par $X \cup \{s\}$, on peut supposer que S est réduit à s . On le suppose pour alléger les notations. On suppose aussi X connexe. Parfois, il nous sera également commode de supposer que \overline{X} est un disque ouvert contenant s . L'analogue algébrique, pour \overline{X} une courbe algébrique sur k , de cette localisation autour de s est un passage de \overline{X} à $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{X}, s}^\Delta)$, son complété en s .

Les espaces pointés (\overline{X}, s) et $(T_s, 0)$ ont même espace tangent au point marqué : T_s . Si $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ est un germe en 0 d'isomorphisme, $(d\varphi)_0$ est donc un endomorphisme de T_s : la multiplication par un scalaire $\varphi'(0) \in \mathbb{C}^*$.

15.4 LEMME. *L'espace des germes d'isomorphismes $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ vérifiant $\varphi'(0) = 1$ est contractile.*

L'assertion est à prendre au sens suivant. Pour K un espace compact, appelons *famille paramétrée par K de germes d'isomorphismes* $(T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ un germe le long de la section 0 d'isomorphismes d'espaces fibrés sur K à section marquée: $(K \times T_s, \text{section } 0) \rightarrow (K \times \overline{X}, \text{section } s)$. L'isomorphisme est supposé holomorphe fibre à fibre. “Contractile” signifie que toute famille de germes d'isomorphismes $(T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s) : (k, t) \rightarrow (k, \varphi(k, t))$, avec $\varphi'(k, 0) = 1$, paramétrée par K compact, se prolonge en une famille analogue, paramétrée par le cône sur K .

PREUVE DE 15.4. Soit $(k, t) \rightarrow (k, \varphi(k, t))$ paramétrée par K . Soit φ_0 un quelconque germe d'isomorphisme avec $\varphi'_0(0) = 1$. Choissons une

coordonnée locale z centrée en s . Le cône CK sur K est $K \times [0, 1]$, avec $K \times \{0\}$ contracté en un point, et $K \hookrightarrow CK$ par $k \mapsto (k, 1)$. On prolonge φ en une famille paramétrée par CK par interpolation linéaire:

$$((k, \lambda), t) \longmapsto ((k, \lambda), \lambda\varphi(k, t) + (1 - \lambda)\varphi_0(t)) .$$

15.5 LEMME. *Pour D un disque centré en 0 de T_s , le foncteur de restriction (revêtements de T_s^0) \rightarrow (revêtements de $D - \{0\}$) est une équivalence de catégories.*

PREUVE. L'inclusion $D - \{0\} \hookrightarrow T_s^0$ est une équivalence d'homotopie.

Passant à la limite inductive sur D de plus en plus petit, on obtient la

VARIANTE 15.6. . *Le foncteur de restriction*

$$(\text{revêtements de } T_s^0) \rightarrow (\text{germes en 0 de revêtements de } T_s^0)$$

est une équivalence de catégories.

15.7. Soit $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ un germe d'isomorphisme vérifiant $\varphi'(0) = 1$. Soit φ_1 un représentant de φ et φ_2 sa restriction à un disque épousseté $D - \{0\}$ autour de 0. C'est un plongement ouvert de $D - \{0\}$ dans X . Pour R un revêtement de X , soit R_φ le revêtement de T_s^0 (unique à isomorphisme unique près par 15.5) qui prolonge le revêtement $\varphi_2^* R$ de $D - \{0\}$. C'est aussi le revêtement de T_s^0 qui prolonge le germe de revêtement $\varphi^* R$ (cf. 15.6). Le foncteur voulu $R \mapsto R_{(s)}$ est $R \mapsto R_\varphi$. Il reste à voir que R_φ ne dépend pas de φ , à isomorphisme unique près. Heuristiquement, c'est le cas parce que l'espace des germes φ avec $\varphi'(0) = 1$ est contractile (15.4).

Explicitons l'argument. Soient φ^0 et φ^1 deux germes d'isomorphisme $(T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ de dérivée 1 en 0. Soit φ^λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) une homotopie entre ces germes. Pour D assez petit, elle induit une homotopie entre les applications φ_2^0 et φ_2^1 de $D - \{0\}$ dans X , et cette homotopie induit un isomorphisme $\varphi_2^{0*} R \xrightarrow{\sim} \varphi_2^{1*} R$, d'où

$$(15.7.1) \quad R_{\varphi^0} \xrightarrow{\sim} R_{\varphi^1} .$$

La contractibilité assure que deux homotopies sont homotopes, donc définissent le même isomorphisme $R_{\varphi^0} \xrightarrow{\sim} R_{\varphi^1}$, et que les isomorphismes obtenus entre les R_φ forment un système transitif d'isomorphismes.

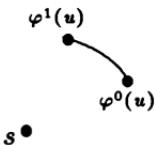
15.8 REMARQUE. Ecrivons simplement φ^0 et φ^1 pour les représentants φ_2^0 et φ_2^1 de φ^0 et φ^1 . L'isomorphisme $\varphi^{0*}R \rightarrow \varphi^{1*}R$ qui définit (15.7.1) admet, sur un disque assez petit, la description suivante. Choisissons une coordonnée locale z sur \overline{X} , centrée en s . Elle identifie un voisinage de s à un voisinage de 0 dans \mathbb{C} et T_s à \mathbb{C} . Parce que $\varphi^0'(u) = \varphi^1'(0) = 1$, pour u proche de zéro, $\varphi^0(u)$ et $\varphi^1(u)$ sont plus proches l'un de l'autre que chacun de $s = 0$. Pour des constantes A et B convenables, on a

$$(15.8.1) \quad |\varphi^0(u) - \varphi^1(u)| \leq A_1|u|^2 \quad \text{si } |u| \leq B_1$$

$$(15.8.2) \quad A_2|u| \leq |\varphi^0(u)| \quad \text{si } |u| \leq B_2, \text{ d'où}$$

$$(15.8.3) \quad |\varphi^0(u) - \varphi^1(u)| < |\varphi^0(u)| \quad \text{si } |u| \leq B_3.$$

Pour $0 < |u| < B_3$, disons qu'un chemin de $\varphi^0(u)$ à $\varphi^1(u)$ ne tourne pas autour de s s'il est homotope à un chemin qui reste dans le disque $|z - \varphi^0(u)| < \varphi^0(u)$.



Ces chemins sont tous homotopes. Si φ^λ est une homotopie entre φ^0 et φ^1 avec $\varphi^{\lambda'}(0) = 1$, le chemin $\varphi^\lambda(u)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) de $\varphi^0(u)$ à $\varphi^1(u)$ vérifie

$$|\varphi^\lambda(u) - \varphi^0(u)| \leq A_4|u|^2 \quad \text{pour } |u| \leq B_4$$

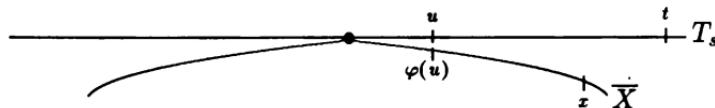
donc, pour $0 < |u| < B_5$, ne tourne pas autour de s . Si $0 < |u| < B_5$, l'isomorphisme $\varphi^{0*}R \rightarrow \varphi^{1*}R$ a donc pour fibre en u : $R_{\varphi^0(u)} \rightarrow R_{\varphi^1(u)}$ l'isomorphisme défini par un quelconque chemin de $\varphi^0(u)$ à $\varphi^1(u)$ qui ne tourne pas autour de s .

15.9. Le foncteur $R \mapsto R_{(s)}$ de 15.7 permet, dans la théorie classique du π_1 , de prendre $t \in T_s^0$ comme point base. La fibre en t d'un revêtement R de X est la fibre en t de $R_{(s)}$. Notation: R_t . Le foncteur "fibre en t " est isomorphe au foncteur "fibre en x " pour $x \in X$. Pour la description d'isomorphismes, cf. ci-dessous. Le revêtement universel de (X, t) est un revêtement universel \tilde{X} de X , muni de $0 \in \tilde{X}_t$. Le groupe fondamental $\pi_1(X, t)$ est le groupe des automorphismes du foncteur $R \mapsto R_t$. Si $(\tilde{X}, 0)$ est le revêtement universel de (X, t) , il s'identifie à la fibre \tilde{X}_t par $\gamma \mapsto \gamma(0)$. Le groupe $\pi_1(X, t)$ est aussi la fibre en t du système local des groupes fondamentaux de X .

Une classe d'homotopie de chemins de t à $x \in X$ est un isomorphisme fonctoriel en le revêtement R de X entre la fibre R_t de R en t et la fibre R_x de R en x . Si $(\tilde{X}, 0)$ est le revêtement universel de (X, t) , l'ensemble des classes de chemin de t à x s'identifie à \tilde{X}_x par $\sigma \mapsto \sigma(0)$. On peut obtenir un chemin comme suit. (a) Choisir φ : (disque D autour de 0 dans T_s) $\hookrightarrow \overline{X}$, avec $\varphi(0) = s$, $\varphi'(0) = 1$. (b) Choisir $u \in D - \{0\}$. (c) Choisir un chemin de t à u et un chemin de φu à x . Par construction, le revêtement de $D - \{0\} \subset T_s^0$ induit par un revêtement R de X est φ^*R , et les chemins choisis donnent des isomorphismes

$$R_t \sim R_u \sim R_{\varphi u} \sim R_x .$$

J'aime me représenter ce chemin comme allant de t à u proche de 0, "sautant" de u à un point correspondant $\varphi(u)$ de X et allant ensuite de φu à x

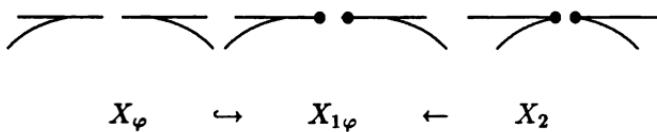


Le saut est d'autant moins ambigu (= dépendant de φ) que u est proche de 0: cf. (15.8.1)(15.8.2).

VARIANTES. Soit φ comme plus haut et soit X_φ obtenu en recollant X et T_s^0 le long de $D - \{0\}$ et $\varphi(D - \{0\})$ par φ . L'espace X_φ a même type d'homotopie que X . Un revêtement R de X se prolonge donc uniquement à X_φ ; prenant la restriction à $T_s^0 \subset X_\varphi$, on obtient $R_{(s)} = R_\varphi$. Les classes d'homotopie de chemins de $t \in T_s^0$ à $x \in X$ s'identifient encore aux classes d'homotopie de chemins, au sens usuel, dans X_φ .

Soit X_1 l'éclaté réel de \overline{X} en s , obtenu en éclatant s en le cercle $S(s)$ des directions autour de s . C'est une variété à bord, de bord $S(s)$. Soient de même T_1^* l'éclaté réel de T_s en 0, et $S(0)$ l'image inverse de 0 en T_s dans T_1^* . Les cercles $S(s)$ et $S(0)$ sont canoniquement isomorphes. Plutôt que de recoller X et $T_s - \{0\}$ par φ , on peut recoller X_1 et T_1^* par φ prolongé par continuité à $(D - \{0\}) \cup S(0)$. Espace obtenu: $X_{1\varphi}$. On peut aussi recoller seulement par l'identification de $S(0)$ à $S(s)$. Espace obtenu:

X_2 . Tous ces espaces sont homotopes. Le dernier ne dépend pas de φ et ceci remontrera que R_φ ne dépend pas de φ .



15.10. Si R est un revêtement de X , de restriction $R_{(s)}$ à T_s^0 , le groupe fondamental $\pi_1(T_s^0, t)$ agit sur $R_t = R_{(s)t}$. De là, un morphisme

$$(15.10.1) \quad \pi_1(T_s^0, t) \longrightarrow \pi_1(X, t).$$

On a $\pi_1(T_s^0, t) = \mathbb{Z}(1)_B = 2\pi i \mathbb{Z}$ (14.2 complété par 14.4) et (15.10.1) se récrit

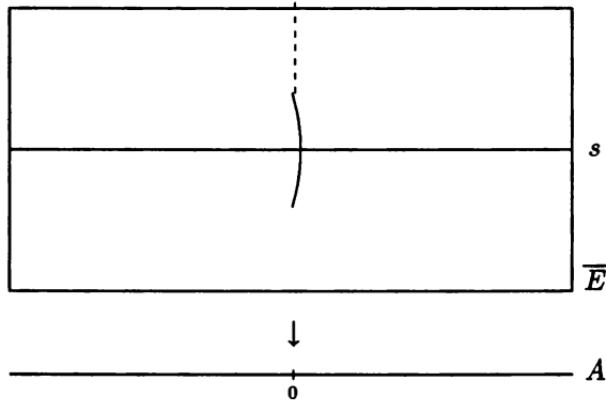
$$(15.10.2) \quad \mathbb{Z}(1)_B \longrightarrow \pi_1(X, t).$$

5.11. Si un revêtement R de X se prolonge en un revêtement R^\wedge de $X \cup \{s\}$, i.e. si R n'est pas ramifié en s , le revêtement $R_{(s)}$ induit sur T_s^0 se prolonge en un revêtement $R_{(s)}^\wedge$ de T_s , avec $R_{(s)0}^\wedge \simeq R_s^\wedge$. Puisque T_s est simplement connexe, on a dans ce cas pour tout t dans T_s^0

$$(15.11.1) \quad R_t \simeq R_s^\wedge \quad (R \text{ non ramifié en } s).$$

15.12. Voici une autre construction du foncteur $R \mapsto R_{(s)}$, inspirée par la déformation au cône normal en théorie des cycles évanescents.

Soit A la droite affine standard (coordonnée t). Eclatons $(0, s)$ dans $A \times \overline{X}$ et soit \overline{E} le complément du transformé pur de $\{0\} \times \overline{X}$



Si \overline{X} est une droite d'origine s et z une coordonnée sur \overline{X} (une forme linéaire), $(t, z/t)$ est un système de coordonnées pour \overline{E} . L'isomorphisme $(A - \{0\}) \times \overline{X} \rightarrow (A - \{0\}) \times \overline{X} : (t, x) \mapsto (t, x/t)$ se prolonge donc en un isomorphisme de \overline{E} avec $A \times \overline{X}$

$$(15.12.1) \quad \overline{E} \xrightarrow{\sim} \text{fibré trivial } \overline{X} \quad (\overline{X} \text{ une droite}).$$

Pour \overline{X} quelconque, appelons *structure linéaire* au voisinage de s le choix d'une classe privilégiée de coordonnées locales, telles qu'on passe de l'une à l'autre par une transformation linéaire affine. Se donner un germe de structure linéaire en s revient à se donner un germe $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ avec $\varphi'(0) = 1$: à φ , attacher les coordonnées locales $\alpha\varphi^{-1}$, avec α linéaire affine. A une coordonnée locale z centrée en s attacher φ tel que $z\circ\varphi = dz$.

Le choix d'une structure linéaire en s nous ramène, près de s , au cas où \overline{X} est une droite. On trouve que \overline{E} est lisse sur A et que la section s de \overline{E} au-dessus de $A - \{0\}$ se prolonge à A . On obtient aussi un isomorphisme de la fibre de \overline{E} en 0 avec l'espace tangent T_s . Cet isomorphisme ne dépend pas de la structure linéaire (ou de la coordonnée locale) choisie.

Soit E le complément de la section s , prolongée à A . L'espace \overline{E} (resp. E) est lisse sur A ; au-dessus de $A - \{0\}$ c'est le fibré trivial de fibre \overline{X} (resp. X) et sa fibre en 0 est T_s (resp. T_s^0).

Soit $((A - \{0\})^\sim, \tilde{1})$ le revêtement universel de $(A - \{0\}, 1)$ et complétons cet espace en A^\sim au-dessus de A par adjonction d'un point 0 au-dessus de 0. Comme topologie sur A^\sim on prend la plus grossière pour laquelle $(A - \{0\})^\sim$ est un ouvert, avec sa topologie habituelle, et $A^\sim \rightarrow A$ est continu. Concrètement: $A^\sim = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; système fondamental de voisinages de ∞ : $\{\infty\} \cup \{z \mid Rz < a\}$; $A^\sim \rightarrow A$: \exp ; $1^\sim = 0$.

Soit $E^\sim := E \times_A A^\sim$ l'image inverse de E sur A^\sim . Pour tout revêtement R de X , soit R_1 son image inverse sur $(A - \{0\})^\sim \times X \hookrightarrow \tilde{E}$. Si \overline{X} est une droite, l'isomorphisme (15.12.1) identifie R_1 à l'image inverse de R sur $\mathbb{C} \times X$ par l'application $(z, x) \mapsto \exp(z) \cdot x$. Cette application est homotope à $(z, x) \mapsto x$, par l'homotopie $(z, x) \mapsto \exp(\lambda z) \cdot x$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) et R_1 est donc isomorphe à pr_2^*R . Le revêtement R_1 se prolonge donc en R^\sim sur E^\sim et la restriction de R^\sim à la fibre $T_s^0 \sim X$ de $\tilde{E} \rightarrow \tilde{A}$ en 0 est R :

$$(15.12.2)$$

$$R^\sim | T_s^0 \xrightarrow{\sim} R \quad (\overline{X} \text{ une droite}; \text{ on utilise que } T_s^0 \sim X \text{ (15.12.1)}).$$

Pour \overline{X} quelconque, le choix d'une structure linéaire en s nous ramène, près de s , au cas où \overline{X} est une droite. On trouve que R_1 se prolonge en

un revêtement R^\sim de E^\sim . La déformation au cône normal $\tau(R)$ de R est la restriction de R^\sim à la fibre T_s^0 de $E^\sim \rightarrow A^\sim$ en 0. Si une structure linéaire est définie par $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$, $\varphi'(0) = 1$, (15.12.2) fournit un isomorphisme de germes de revêtements de T_s^0 près de $0 \in T_s$

$$(15.12.3) \quad \tau(R) \sim \varphi^* R.$$

Les isomorphismes (15.12.3) définissent un isomorphisme entre le foncteur $R \mapsto \tau(R)$ et le foncteur $R \mapsto R_{(s)}$. Que l'espace des φ est connexe assure qu'il ne dépend pas de φ .

Théorie profinie (n° 13 à 27).

15.13. Supposons tout d'abord que \overline{X} est une courbe sur k algébriquement clos de caractéristique 0, et soient S , X , T_s , T_s^0 comme en 15.3. On se propose de construire un foncteur 15.2(A) attachant à un revêtement fini étale R de X un revêtement fini étale $R_{(s)}$ de T_s^0 . Comme en 15.3, la construction est locale autour de s et on suppose X connexe et $S = \{s\}$.

15.14. Si f est une fonction sur une courbe lisse Y , ayant en $y \in Y$ un zéro d'ordre n , la partie principale $\text{Pr}(f)$ de f (avatar: $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série de Taylor) est, intrinsèquement, une fonction homogène de degré n sur l'espace tangent T_y . Plus généralement, si $f : Y \rightarrow Z$ est un morphisme entre courbes lisses ayant en y un point de ramification d'ordre n ($n \geq 1$), la partie principale de f est une application homogène de degré n : $\text{Pr}_y(f) : T_y \rightarrow T_{f(y)}$. Choisissons des coordonnées locales centrées en y et $f(y)$. Elles identifient T_y et $T_{f(y)}$ à la droite A^1 . Si, dans ces coordonnées, f est $z \mapsto az^n + \dots$, alors $\text{Pr}_y(f)$ est $z \mapsto az^n$. L'application $\text{Pr}_y(f)$ induit un revêtement de degré n : $T_y^0 \rightarrow T_{f(y)}^0$. Pour une application composée $f = g \circ h$, on a $\text{Pr}_y(f) = \text{Pr}_{h(y)}(g) \circ \text{Pr}_y(h)$.

15.15. Un revêtement fini étale $R \rightarrow X$ se prolonge en un revêtement fini ramifié $\pi : \overline{R} \rightarrow \overline{X}$, avec \overline{R} lisse. On pose

$$R_{(s)} := \coprod_{\pi(y)=s} T_y^0.$$

C'est un revêtement de T_s^0 pour les applications $\text{Pr}_y(\pi) : T_y^0 \rightarrow T_s^0$. Un morphisme de revêtements

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \xrightarrow{f} & R_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

se prolonge en $\bar{f} : \bar{R}_1 \rightarrow \bar{R}_2$ et les $\text{Pr}_y(\bar{f})$ ($\pi_1(y) = s$) définissent un morphisme de revêtements de $T_s^0 : R_{1(s)} \rightarrow R_{2(s)}$. On a en effet $\text{Pr}_y(\pi_1) = \text{Pr}_{\bar{f}(y)}(\pi_2) \circ \text{Pr}_y(\bar{f})$.

15.16 LEMME. Si \bar{X} est une droite d'origine s , et que T_s est donc \bar{X} , $R_{(s)}$ est canoniquement isomorphe à R .

PREUVE. On se ramène à supposer R connexe. Dans ce cas, $\pi : (\bar{R}, y) \rightarrow (\bar{X}, s)$ est isomorphe à l'application de la droite standard A^1 dans elle-même: $z \mapsto z^n$. En particulier, \bar{R} est une droite. Sa structure linéaire fournit un isomorphisme α de T_y avec \bar{R} . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{R} & \xrightarrow{\sim_\alpha} & T_y \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{Pr}(\pi) \\ \bar{X} & \xlongequal{\quad} & T_s \end{array}$$

est commutatif (le vérifier pour $z \mapsto z^n : A^1 \rightarrow A^1$) et α est l'isomorphisme voulu.

15.17 CONSTRUCTION. Si $k = \mathbb{C}$, l'espace des points $R_{(s)}(\mathbb{C})$ du revêtement $R_{(s)}$ de T_s^0 est le revêtement $R(\mathbb{C})_{(s)}$ de 15.7.

PREUVE. La construction 15.15 garde un sens pour les surfaces de Riemann. Notons-la $R \mapsto R_{[s]}$. Il s'agit de construire un isomorphisme fonctoriel de $R_{[s]}$ avec $R_{(s)}$ défini en 15.7.

Soit φ un germe d'isomorphisme de $(T_s, 0)$ avec (\bar{X}, s) , vérifiant $\varphi'(0) = 1$. Il induit un isomorphisme de $(R_\varphi)_{[0]}$ avec $R_{[s]}$. Par 15.16, $(R_\varphi)_{[0]}$ est canoniquement isomorphe à R_φ , d'où un isomorphisme $R_{(s)} = R_\varphi \xrightarrow{\sim} R_{[s]}$. L'espace des φ étant connexe, il ne dépend pas du choix de φ .

15.18. Pour \bar{X} une courbe lisse sur un corps k de caractéristique 0 et R un revêtement fini étale de X , la construction 15.15 se généralise comme

suit. On peut supposer que $S = \{s\}$, avec s un point fermé de \overline{X} . On prolonge $R \rightarrow X$ en $\overline{R} \rightarrow \overline{X}$, un morphisme fini avec \overline{R} lisse. Après une extension galoisienne k' de k , s devient une famille de points $s_\alpha \in \overline{X}(k')$, conjugués sous $\text{Gal}(k'/k)$, et les points de \overline{R} au-dessus de s_α sont tous définis sur k' . On définit alors comme en 15.15

$$(15.18.1) \quad \coprod R_{(s_\alpha)} \longrightarrow \coprod T_{s_\alpha}^0.$$

La somme disjointe des $T_{s_\alpha}^0$ est déduite par extension des scalaires à k' de T_s^0 . Par descente galoisienne, (15.18.1) fournit donc un revêtement $R_{(s)}$ de T_s^0 . L'espace sous-jacent est encore la somme disjointe des T_y^0 pour y point fermé de \overline{R} au-dessus de s .

15.19. Plus généralement, soient \overline{X} lisse de dimension relative 1 sur une base normale B , S un diviseur de X étale sur B , $X = \overline{X} - S$ et R un revêtement modérément ramifié de X le long de S . On prolonge R en $\pi : \overline{R} \rightarrow X$ fini, avec \overline{R} est lisse sur B , l'image inverse réduite S_1 de S est étale sur B et la partie principale $\text{Pr}(\pi)$ de $\pi : \overline{R} \rightarrow \overline{X}$ le long de S_1 est un morphisme fini étale entre espace tangents relatifs moins la section 0:

$$\text{Pr}(\pi) : T_{S_1}^0 \longrightarrow T_S^0.$$

Par définition, c'est $R_{(S)}$.

15.20. Voici une réinterprétation algébrique de 15.14 à 15.18. Soit (S, s, η) un trait: le spectre d'un anneau de valuation discrète R , d'idéal maximal m , de point fermé s (corps résiduel $k(s) := R/m$) et de point générique η (corps résiduel $k(\eta)$: le corps des fractions K de R). Soit v la valuation (normalisée pour valoir 1 sur un générateur de m) et filtre K par les m^n ($n \in \mathbb{Z}$), où m^n est $\{x \in K \mid v(x) \geq n\}$. L'espace tangent de Zariski T_s est le dual (sur $k(s) = R/m$) de m/m^2 . En tant que schéma, c'est le spectre de l'algèbre symétrique de m/m^2 . On a $\text{Sym}(m/m^2) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}(R)$ et donc

$$(15.20.1) \quad T_s = \text{Spec } \text{Gr}(R).$$

L'espace tangent époiné T_s^0 est le spectre de l'anneau déduit de $\text{Sym}(m/m^2)$ en inversant $t \in m/m^2$ non nul: on a

$$(15.20.2) \quad T_s^0 = \text{Spec } \text{Gr}(K).$$

Soit $f : (S_1, s_1, \eta_1) \rightarrow (S, s, \eta)$ un morphisme de traits, $S_1 = \text{Spec}(R_1)$ et notons v la valuation du corps des fractions K_1 de R_1 normalisée pour prolonger celle de K . Si l'indice de ramification est n , elle est à valeurs dans $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$. Soit V la filtration correspondante, indexée par $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$. Le morphisme $f^* : K \rightarrow K_1$ est compatible aux filtrations m -adiques de K et V de K_1 . La partie principale $\text{Pr}(f)$ de f est le morphisme de T_{s_1} dans T_s spectre de $\text{Gr}(f^*) : \text{Gr}(R) \rightarrow \text{Gr}(R_1)$. Le morphisme induit de $T_{s_1}^0$ dans T_s^0 est le spectre de $\text{Gr}(f^*) : \text{Gr}(K) \rightarrow \text{Gr}(K_1)$.

Si K' est une extension étale de K (un produit d'extensions finies séparables K'_α de K), i.e. si $\text{Spec}(K')$ un revêtement étale de $\text{Spec}(K)$, le normalisé R' de R dans K (le produit des normalisés dans les K'_α) est semi-local, de localisés des anneaux de valuation discrète. Soit $f : \text{Spec}(R') \rightarrow \text{Spec}(R)$ correspondant à l'inclusion $R \hookrightarrow R'$. On pose

$$\text{Spec}(K')_{(s)} := \coprod_{f(s_1)=s} T_{s_1}^0.$$

Ce schéma s'envoie sur T_s^0 par les parties principales de f en les s_1 au-dessus de s , et si K' est modéré (extensions résiduelles $k(s_1)/k(s)$ séparables et indices de ramifications premiers à la caractéristique résiduelle), c'est un revêtement fini étale de T_s^0 .

Etendons les scalaires de R à son complété R^\wedge . Le complété $K'^\wedge = K' \otimes_R R^\wedge$ est un produit de corps $K_\beta'^\wedge$, $R'^\wedge = R' \otimes_R R^\wedge$ est le produit des normalisés $R_\beta'^\wedge$ de R dans les $K_\beta'^\wedge$ et ceux-ci sont des anneaux de valuations discrètes. Ce passage au complété ne change pas T_s ni les T_{s_1} ($s_1 \rightarrow s$) et

$$\text{Spec}(K')_{(s)} = \text{Spec}(K'^\wedge)_{(s)}.$$

Le produit des filtrations V des $K_\beta'^\wedge$ induit une filtration encore notée V de K' ; on a

$$\begin{aligned} \text{Gr}_V(K') &\xrightarrow{\sim} \prod \text{Gr}_V(K_\beta'^\wedge) \quad \text{et donc} \\ \text{Spec}(K')_{(s)} &= \text{Spec Gr}_V(K'). \end{aligned}$$

15.21. Si Y est une courbe lisse sur un corps k de caractéristique 0 et y un point fermé, (15.20.1)(15.20.2) appliqués à l'anneau local \mathcal{O}_y de Y en y et à son corps des fractions K_y donnent

$$T_y = \text{Spec Gr}(\mathcal{O}_y)$$

$$T_y^0 = \text{Spec Gr}(K_y).$$

Si Z est une autre courbe, que $f : Z \rightarrow Y$ est un morphisme ayant en z un point de ramification d'ordre n , et que $f(z) = y$, 15.20 s'applique à $f^* : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathcal{O}_z$. La partie principale $\text{Pr}(f)$ définie en 15.20: $T_z \rightarrow T_y$ coïncide avec celle de 15.14, 15.18.

Soit Z un revêtement fini étale de $Y - y$. Sur $\text{Spec}(K_y)$, il induit un revêtement fini étale, spectre d'une extension finie étale K' de K_y . Le revêtement induit $\text{Spec}(K')_{(y)}$ de T_y^0 défini en 15.20 coïncide avec celui de 15.18.

15.22. Prenons pour \overline{X} une droite d'origine s sur k . L'espace tangent T_s est alors canoniquement isomorphe à \overline{X} . C'est encore l'espace tangent en s du complété \overline{X}_s^\wedge de \overline{X} en s . Soit $X_s^\wedge := \overline{X}_s^\wedge - \{s\}$. Si k est de caractéristique 0, ou si on se limite aux revêtements modérés, 15.20 définit encore $R \mapsto R_{(s)}$ des revêtements finis étalés de X_s^\wedge dans ceux de T_s^0 .

15.23 LEMME. *Avec les hypothèses et notations précédentes, pour k de caractéristique 0,*

(i) *Le foncteur de restriction*

$(\text{revêtements finis étalés de } X) \rightarrow (\text{revêtements finis étalés de } X_s^\wedge)$

est une équivalence de catégories.

(ii) *L'équivalence inverse est $R \mapsto R_{(s)}$.*

On notera l'analogie de (i) avec 15.6.

PREUVE. On se ramène à supposer k algébriquement clos. L'assertion (i) résulte alors de ce que par le lemme d'Abhyankar, on a $\pi_1(X) = \pi_1(X_s^\wedge) = \widehat{\mathbb{Z}}(1)$. Pour (ii) il s'agit de voir que si R est un revêtement fini étale de X , de restriction R^\wedge à X_s^\wedge , il est fonctoriellement isomorphe à $R_{(s)}^\wedge$. On a $R_{(s)}^\wedge = R_{(s)}$ et on applique 15.16.

15.24. Soient à nouveau, comme en 15.13, X et \overline{X} sur k algébriquement clos de caractéristique 0. Soient \overline{X}_s^\wedge le complété de \overline{X} en s et T_s^\wedge celui de T_s en 0. Comme en 15.3, un isomorphisme φ de $(T_s^\wedge, 0)$ avec $(\overline{X}_s^\wedge, s)$ (notations de 15.22) a une dérivée $\varphi'(0) \in k^*$.

15.25 LEMME. *Pour φ comme ci-dessus, avec $\varphi'(0) = 1$, et pour R un revêtement de X_s^\wedge , φ^*R sur $T_s^{0\wedge}$ est fonctoriellement isomorphe à la restriction de $R_{(s)}$ sur T_s^0 à $T_s^{0\wedge}$.*

PREUVE. Le morphisme φ induit l'isomorphisme identique de l'espace tangent à \overline{X}^\wedge en s avec celui de T_s en 0, et un isomorphisme de $R_{(s)}$ avec $(\varphi^*R)_{(0)}$. Par 15.23 la restriction de $(\varphi^*R)_{(0)}$ à $T_s^{0\wedge}$ est canoniquement isomorphe à φ^*R lui-même et 15.25 en résulte.

15.26. Ceci fournit une nouvelle description de $R \mapsto R_{(s)}$: prendre φ comme en 15.24, avec $\varphi'(1) = 1$, et composer φ^* avec l'inverse de 15.23(i).

Comme en 15.18, il n'est pas nécessaire de supposer k algébriquement clos. Pour k de caractéristique quelconque, ou dans le cadre relatif 5.19, la même construction reste valable, pourvu qu'on se limite aux revêtements modérément ramifiés.

Théorie algébrique (no 28 à 36).

15.28. Soient k un corps de caractéristique 0, R une k -algèbre isomorphe à $k[[t]]$, et K son corps des fractions. Posons $\overline{X} = \text{Spec}(R)$ et notons s le point fermé : \overline{X} est un arc de courbe formel passant par s . Soit $X = \overline{X} - \{s\} = \text{Spec}(K)$. On se propose d'attacher à un fibré vectoriel à connexion \mathcal{V} sur X , régulier singulier en s , un fibré vectoriel à connexion $\mathcal{V}_{(s)}$ sur l'espace tangent éponté T_s^0 de \overline{X} en s .

Si \overline{X}_0 est un courbe lisse sur k_0 de caractéristique 0 et que $S, s \in S$, $X_0 = \overline{X}_0 - S$, T_s et T_s^0 sont comme en 15.3, 15.13, le complété de \overline{X}_0 en s est un arc courbe formel passant par s . On a $k =$ corps résiduel en s . Un foncteur comme ci-dessus permet encore d'attacher à \mathcal{V} sur X , régulier singulier en s , $\mathcal{V}_{(s)}$ sur T_s^0 : se restreindre au complété, et appliquer le foncteur promis.

15.29. Le fibré à connexion \mathcal{V} sur X est simplement un espace vectoriel V sur K , muni d'une connexion ∇ . L'hypothèse "régulier singulier" signifie qu'il existe un réseau $L \subset V$ avec les propriétés suivantes:

- (a) L est un réseau, i.e. un R -module libre de type fini avec $L \otimes_R K \xrightarrow{\sim} V$.
- (b) Dans une base e de L , la connexion s'écrit

$$\nabla v = dv + \Gamma v$$

où la matrice de 1-formes Γ est à pôles simples. Le résidu de cette matrice est la matrice d'un endomorphisme de $L \otimes_R k$ qui ne dépend pas de la base e choisie. On le note $\text{Res}(\nabla)$.

Supposons que L ait la propriété suivante:

(c) $\text{Res}(\nabla)$ n'a pas (dans une extension de k) deux valeurs propres différentes par un entier non nul.

On définit alors $\mathcal{V}_{(s)}$ comme suit.

(1) Comme fibré, $\mathcal{V}_{(s)}$ est le fibré trivial de fibre $L \otimes_R k$.

(2) Soit a une forme linéaire sur T_s ; la 1-forme $\frac{da}{a}$ ne dépend pas du choix de a et on munit le fibré trivial $L \otimes_R k$ de la connexion $\nabla = d + \text{Res}(\nabla) \cdot \frac{da}{a}$.

Dans 15.30, nous reformulons cette définition. En 15.31 nous montrerons l'existence de L vérifiant (c) et construirons des isomorphismes montrant que $\mathcal{V}_{(s)}$ ne dépend pas du choix de L .

15.30. Notons m l'idéal maximal de R , $\Omega_{\overline{X}}$ les 1-formes sur \overline{X} , $\Omega_{\overline{X}}(s)$ celles à pôle logarithmique (= pôle simple), et Ω_X les 1-formes sur X . Pour $R = k[[t]]$, on a $\Omega_{\overline{X}} = k[[t]]dt$, $\Omega_{\overline{X}}(s) = k[[t]]\frac{dt}{t}$, $\Omega_X = k((t))dt$.

Filtrons K par les m^n et Ω_X par les $m^{n-1}\Omega_{\overline{X}}$ ($n \in \mathbb{Z}$). On a par (15.20.1) et (15.20.2)

$$T_s = \text{Spec Gr}(R) \quad \text{et} \quad T_s^0 = \text{Spec Gr}(K).$$

La différentielle d est compatible aux filtrations. Passant au gradué, on obtient $d : \text{Gr}(K) \rightarrow \text{Gr}(\Omega_X)$ qui fait de $\text{Gr}(\Omega_X)$ les 1-formes de $\text{Gr}(K)$:

$$\Omega_{T_s^0} = \text{Gr}(\Omega_X).$$

Par cet isomorphisme, à une 1-forme à pôle simple α de résidu 1: $\alpha \in \Omega_{\overline{X}}(s)$, d'image $[\alpha] \in \text{Gr}^0(\Omega_X)$, correspond le générateur $\frac{da}{a}$ (15.29) de $\Omega_{T_s^0}$.

Filtrons V par les $m^n L$. Le fibré trivial de fibre $L/mL = \text{Gr}^0(L)$ sur T_s^0 a pour sections

$$L/mL \otimes \text{Gr}(K) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}(V).$$

Le fibré $\mathcal{V}_{(s)}$ de 15.29 correspond donc au $\text{Gr}(R)$ -module $\text{Gr}(V)$. La connexion $\nabla : V \rightarrow V \otimes \Omega_{\overline{X}}^1$ est compatible aux filtrations. Par passage au gradué, elle fournit

$$\begin{aligned} \text{Gr}(\nabla) : \text{Gr}(V) &\longrightarrow \text{Gr}(V) \otimes \text{Gr} \Omega_{\overline{X}}^1 : \\ &= \text{Gr}(V) \otimes \Omega_{T_s^0} \end{aligned}$$

qui est la connexion de $\mathcal{V}_{(s)}$ telle que décrite en 15.29.

15.31. Choisissons une uniformisante t , i.e. un isomorphisme $k[[t]] \xrightarrow{\sim} R$, et une clôture algébrique \bar{k} de k . Soit L vérifiant 15.29 (a)(b). Les $m^n L$ sont stables sous $\nabla_{t\partial_t}$ et les valeurs propres de $\text{Res } \nabla$ (dans \bar{k}) sont celles de $\nabla_{t\partial_t}$ agissant sur $L/mL = \text{Gr}^0(L)$. Ajoutant n , on obtient celles de $\nabla_{t\partial_t}$ agissant sur $\text{Gr}^n(V)$, car

$$\nabla_{t\partial_t} t^n v = t^n (n + \nabla_{t\partial_t}) v .$$

L'ensemble $A(\bar{k})$ des valeurs propres de $\nabla_{t\partial_t}$ sur les $\text{Gr}^n(V)$ est donc réunion d'un nombre fini de progressions arithmétiques $\alpha + \mathbb{Z}$, et chaque valeur propre n'apparaît que dans un nombre fini de $\text{Gr}^n(V)$. Soit $A := A(\bar{k})/\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

Décomposons le k -espace vectoriel de dimension finie $m^a L/m^b L$ en sous-espaces propres généralisés pour l'action de $\nabla_{t\partial_t}$: si $\alpha \in A$ est l'ensemble des solutions du polynôme P , on définit $(m^a L/m^b L)(\alpha)$ comme le noyau de $P(\nabla_{t\partial_t})^N$ pour N assez grand. C'est le plus grand sous-espace de $m^a L/m^b L$ stable par $\nabla_{t\partial_t}$ sur lequel les valeurs propres de $\nabla_{t\partial_t}$ soient dans α , et on a

$$m^a L/m^b L = \bigoplus_{\alpha \in A} (m^a L/m^b L)(\alpha) .$$

A α donné, dès que a est assez petit: $a \leq a_0$, le sous-espace $(m^a L/m^b L)(\alpha) \subset V/m^b L$ est indépendant de α . Posons

$$V(\alpha) := \lim \text{proj} (m^{a_0} L/m^b L)(\alpha) \subset V = \lim \text{proj} V/m^b L .$$

On a $V(\alpha) \xrightarrow{\sim} (m^{a_0} L/m^b L)(\alpha)$ pour $b \geq b_0$. On a $t^n V(\alpha) = V(\alpha + n)$. Posons

$$V(\alpha + \mathbb{N}) = R \cdot V(\alpha) .$$

C'est le produit des $V(\alpha + n)$ ($n \geq 0$). C'est le plus grand sous- R -module de type fini de V , stable par $\nabla_{t\partial_t}$ et sur lequel le résidu de la connexion ait ses valeurs propres dans α . Cette caractérisation montre que $V(\alpha + \mathbb{N})$ est indépendant du choix de l'uniformisante t .

Une orbite de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ dans \bar{k} ne contient jamais deux éléments différent par un entier $\neq 0$. Si $A_0 \subset A$ contient un et un seul élément dans chaque classe $\alpha + \mathbb{Z}$, le réseau

$$L(A_0) = \bigoplus_{\alpha \in A_0} V(\alpha + \mathbb{N})$$

vérifie 15.29(a)(b)(c), et tout réseau L vérifiant (a)(b)(c) est ainsi obtenu. Le gradué $\text{Gr}(V)$ considéré en 5.30 est encore la somme

$$\text{Gr}(V) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} V(\alpha + \mathbf{N}) / mV(\alpha + \mathbf{N}).$$

Cette description est indépendante de L – et de t – et $\mathcal{V}_{(s)}$ défini en 5.29, 5.30 est indépendant du choix de L .

15.32. En pratique, les valeurs propres de $\text{Res}(\nabla)$ sont souvent dans \mathbb{Q} : $A \subset \mathbb{Q}$ (quasi-unipotence). Dans ce cas, on définit une filtration indexée par \mathbb{Q} de V en posant $V_{\geq \alpha} = \prod_{\beta \geq \alpha} V(\beta)$. Le fibré $\mathcal{V}_{(s)}$ sur $T_s^0 = \text{Spec} \text{Gr}(K)$ est de sections le $\text{Gr}(K)$ -module gradué de V pour cette filtration (la V -filtration de Malgrange et Kashiwara).

15.33. En 15.29, on a décrit $\mathcal{V}_{(s)}$ comme étant le fibré trivial de fibre L/mL . On prend garde que, si $\mathcal{V}_{(s)}$ ne dépend pas de L , la trivialisation en dépend. Par exemple, soit t est une uniformisante et notons encore t la coordonnée correspondante (dt) sur T_s . Remplaçons L par $t^n L$. La multiplication par t^n induit un isomorphisme $[t^n]$ de L/mL avec $t^n L/m t^n L$. L'identité de $\mathcal{V}_{(s)}$ correspond au morphisme de fibrés triviaux sur T_s^0 :

$$t^{-n}[t^n] : \text{fibré } L/mL \longrightarrow \text{fibré } t^n L/m t^n L.$$

15.34. Soient \overline{X} une droite sur k , d'origine s et \overline{X}^\wedge son complété en s . Si on choisit une coordonnée $t : X \xrightarrow{\sim} A$, \overline{X} , \overline{X}^\wedge , $X = \overline{X} - \{s\}$ et $X^\wedge = \overline{X}^\wedge - \{s\}$ deviennent les spectres respectifs de $k[t]$, $k[[t]]$, $k[[t, t^{-1}]]$ et $k((t))$. L'espace tangent T_s de \overline{X} ou \overline{X}^\wedge en s est canoniquement isomorphe à \overline{X} . On écrira 0 pour s .

15.35 PROPOSITION. Avec les notations précédentes,

- (i) Le foncteur de restriction de X à X^\wedge est une équivalence de catégories, des fibrés à connexions sur X , régulier singuliers en 0 et ∞ , dans les fibrés à connexion sur X^\wedge , réguliers singuliers en 0.
- (ii) Le foncteur inverse est $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{(0)}$.

Cet énoncé est parallèle à 15.23.

PREUVE. Complétons \overline{X} en une droite projective P . Soit t une coordonnée sur \overline{X} . Le champ de vecteurs $t\partial_t$ sur P ne dépend pas de la

coordonnée choisie t sur \overline{X} . Pour que \mathcal{V} soit régulier singulier en 0 et ∞ il faut et il suffit qu'il admette une extension \mathcal{V}_0 à P , stable par $\nabla_{t\partial_t}$.

Soit $R_0 = k[t, t^{-1}]$ l'anneau de coordonnées de X . Le fibré \mathcal{V} correspond à un R_0 -module V . C'est la réunion croissante des $H^0(P, \mathcal{V}_0(n0 + n\infty))$, et chacun est stable par $\nabla_{t\partial_t}$. Puisque V est réunion croissante de k -sous-espaces vectoriels de dimension finie stables sous $\nabla_{t\partial_t}$, on peut le décomposer en sous-espaces propres généralisés (indexés par des orbites de $\text{Gal}(\overline{k}/k)$ dans \overline{k} – cf. fin de 15.31): $V = \bigoplus V(\alpha)$. On a $tV(\alpha) = V(\alpha+1)$.

Si V^\wedge est le complété $\underset{R_0}{\otimes} k((t))$ de V , $V^\wedge(\alpha)$, tel que défini en 15.31, est l'image isomorphe de $V(\alpha)$. On en déduit que les foncteurs de (i) et (ii) sont inverse l'un de l'autre.

15.36. Cette proposition permet de donner du foncteur $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{(s)}$ de 15.29 une description parallèle à celle de 15.7 et 15.26. On choisit un isomorphisme $\varphi : T_s^\wedge \xrightarrow{\sim} \overline{X}$, vérifiant $\varphi'(0) = 1$, à \mathcal{V} sur X on attache $\varphi^*\mathcal{V}$ sur $T_s^{0\wedge}$ et on applique 15.35(i) (appliqué à T_s) pour prolonger ce fibré sur $T_s^{0\wedge}$ en un fibré à connexion sur T_s^0 , régulier singulier en 0 et ∞ . On vérifie comme en 15.25 que le foncteur $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_\varphi$ ainsi défini est canoniquement isomorphe à $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{(s)}$.

Le choix de φ : une structure linéaire sur \overline{X} , permet de définir $\mathcal{V}(\alpha)$ et, le module des sections de \mathcal{V}_φ s'identifie à la somme des $\mathcal{V}(\alpha)$. L'indépendance du choix de φ résulte de la réinterprétation de cette somme comme $\oplus \mathcal{V}(\alpha + \mathbb{N})/\mathcal{V}(\alpha + 1 + \mathbb{N})$, indépendant du choix de φ .

Compatibilités (n° 37 à 49).

15.37. Faisons $k = \mathbb{C}$ et soit \overline{X} une courbe sur \mathbb{C} . Pour tout schéma Y sur \mathbb{C} , on note $Y(\mathbb{C})$ l'espace de ses points complexes. On notera que $T_s(\mathbb{C})$ est encore l'espace tangent en s à l'espace analytique $\overline{X}(\mathbb{C})$.

Soit \mathcal{V} un fibré vectoriel à connexion sur X , régulier singulier en s . Nous lui avons attaché $\mathcal{V}_{(s)}$ sur T_s^0 . Soit \mathcal{V}^∇ le système local, sur $X(\mathbb{C})$, des sections holomorphes horizontales de \mathcal{V} . On définit de même $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla$ sur $T_s^0(\mathbb{C})$. Par restriction à $T_s^0(\mathbb{C})$, au sens 15.7, \mathcal{V}^∇ définit un système local $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla$ sur $T_s^0(\mathbb{C})$. On se propose de vérifier que les restrictions 15.7 et 15.29 sont compatibles:

15.38 CONSTRUCTION. Avec les notations précédentes, $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla$ et $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla$ sont fonctoriellement isomorphes.

Soit R l'anneau local complété de \overline{X} en s et K son corps des fractions. Le choix d'une coordonnée locale z centrée en s identifie R à $C[[z]]$ et K à $C((z))$. Par image inverse sur $\text{Spec}(K)$, \mathcal{V} fournit un espace vectoriel V sur K comme en 15.29, et les réseaux L de V (condition 15.29(a)) correspondent aux fibrés vectoriels $\overline{\mathcal{V}}$ sur \overline{X} prolongeant \mathcal{V} sur X . Choisissons L vérifiant 15.29(a)(b)(c). Par définition, $\mathcal{V}_{(s)}$ est alors le fibré trivial $\overline{\mathcal{V}}_s$ sur T_s^0 , muni de la connexion $d + \text{Res}(\nabla) \frac{da}{a}$ pour a une quelconque forme linéaire sur T_s . On le prolonge sur T_s en $\overline{\mathcal{V}}_{(s)}$, fibré trivial de fibre $\overline{\mathcal{V}}_s$.

15.39 LEMME. Soit z une coordonnée locale centrée en s . Il existe au voisinage de s dans $\overline{X}(C)$ une et une seule trivialisation holomorphe de $\overline{\mathcal{V}}$ telle que la connexion soit $d + \Gamma \frac{dz}{z}$ avec Γ un endomorphisme indépendant de z .

Une trivialisation de $\overline{\mathcal{V}}$ identifie $\overline{\mathcal{V}}$ au fibre constant $\overline{\mathcal{V}}_s$. Via cette identification, la condition est que $\nabla = d + \text{Res}(\nabla) \frac{dz}{z}$.

PREUVE. Plaçons-nous dans un disque centré en s . La monodromie autour de s est un automorphisme horizontal T de \mathcal{V} . Il se prolonge à $\overline{\mathcal{V}}$ avec pour fibre en s l'automorphisme $\exp(-2\pi i \text{Res}(\nabla))$ de $\overline{\mathcal{V}}_s$ ([D1] II 1.17). Ceci ne requiert que 15.29(a)(b). L'hypothèse (c) permet de définir $\log(T)$: l'unique détermination du logarithme de T de valeurs propres celles de $-2\pi i \text{Res}(\nabla)$. Posons $A' := -\log T / 2\pi i$ et soit la nouvelle connexion $\nabla' := \nabla - A' \frac{dz}{z}$ sur $\overline{\mathcal{V}}$. Elle est holomorphe en s . Parce que T , donc $\log T$, est horizontal et que $[A', A'] = 0$, on a $\nabla' A' = 0$.

La donnée d'une trivialisation de $\overline{\mathcal{V}}$ équivaut à celle d'une connexion ∇_1 , holomorphe en s . Les conditions de 15.39 équivalent à ce que $\nabla = \nabla_1 + A' \frac{dz}{z}$ avec $\nabla_1 A = 0$. Elles sont vérifiées par $\nabla_1 = \nabla'$ et $A = A'$. Réciproquement, si elles sont vérifiées, on a $\nabla A = 0$ (car $[A, A] = 0$), d'où $[T, A] = 0$, puis $[\log T, A] = 0$, donc $\nabla' A = 0$. Puisque, en s , $A = A' = \text{Res } \nabla$, on a $A = A'$ et $\nabla_1 = \nabla'$.

REMARQUE. La trivialisation 15.39 de $\overline{\mathcal{V}}$ ne dépend que de la structure linéaire définie par z : seule importe la forme $\frac{dz}{z}$.

Soit φ un isomorphisme d'un voisinage de 0 dans T_s avec un voisinage de s dans \overline{X} . On suppose $\varphi(0) = s$, $\varphi'(0) = 1$. Le lemme suivant reformule 15.39.

15.40 LEMME. Il existe un unique isomorphisme horizontal de $\varphi^* \overline{\mathcal{V}}$ avec $\overline{\mathcal{V}}_{(s)}$, qui soit l'identité en 0 .

Passant aux sections horizontales, l'isomorphisme 15.40 fournit au voisinage 0, donc sur T_s^0 tout entier par 15.5, un isomorphisme

$$(15.40.1) \quad \mathcal{V}_{(s)}^\nabla \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{(s)}^\nabla.$$

On a en effet au voisinage de 0 $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla = \varphi^*\mathcal{V}^\nabla = (\varphi^*\mathcal{V})^\nabla$.

15.41 LEMME. *L'isomorphisme (15.40.1) ne dépend pas du choix de φ vérifiant $\varphi(0) = s$, $\varphi'(0) = 1$.*

PREUVE. Soit φ_1 un autre isomorphisme local de $(T_s, 0)$ avec (\overline{X}, s) , vérifiant $\varphi'_1(0) = 1$. Soit $h : \varphi^*\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \varphi_1^*\mathcal{V}$ qui, par passage aux sections horizontales, fournit l'isomorphisme $\varphi^*\mathcal{V}^\nabla = \varphi^*(\mathcal{V}^\nabla) = (\mathcal{V}^\nabla)_{(s)} = \varphi_1^*(\mathcal{V}^\nabla) = \varphi_1^*\mathcal{V}^\nabla$. Sa fibre en x assez petit,

$$h_x : (\varphi^*\mathcal{V})_x = \mathcal{V}_{\varphi x} \longrightarrow (\varphi_1^*\mathcal{V})_x = \mathcal{V}_{\varphi_1 x}$$

est le transport parallèle le long d'un chemin de $\varphi(x)$ à $\varphi_1(x)$ qui ne tourne pas autour de zéro.

L'isomorphisme (15.40.1) s'obtient en identifiant $\mathcal{V}_{(s)}$ et $\varphi^*\mathcal{V}$ par l'unique isomorphisme horizontal qui se prolonge en $\overline{\mathcal{V}}_{(s)} \rightarrow \varphi^*\overline{\mathcal{V}}$ et soit l'identité en 0. Il s'agit donc de vérifier que h se prolonge en un morphisme \overline{h} de $\varphi^*\overline{\mathcal{V}}$ dans $\varphi_1^*\overline{\mathcal{V}}$, et que en 0 \overline{h} est l'identité .

15.42 LEMME. *Pour $x \rightarrow 0$, $h : \mathcal{V}_{\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{V}_{\varphi_1(x)}$ tend vers l'identité de $\overline{\mathcal{V}}_s$.*

PREUVE. Choisissons une coordonnée locale z centrée en s pour laquelle φ soit l'identité , et trivialisons $\overline{\mathcal{V}}$ pour que la connexion s'écrive $d + A \frac{dz}{z}$ avec A constant. On a $\varphi_1(x) = \sigma(x)\varphi(x)$ avec $\sigma(x)$ holomorphe et valant 1 en $s = 0$. Dans ces coordonnées,

$$h_x = \exp(-A \log \sigma(x)),$$

où \log est la détermination principale du logarithme, valant 0 en 1, car le chemin de x à $\varphi_1(x)$ ne tourne pas autour de 0. On a donc $h_x \rightarrow \text{Id}$ pour $x \rightarrow 0$.

15.43 LEMME. *L'isomorphisme (15.40.1) ne dépend pas du choix du prolongement $\overline{\mathcal{V}}$ de \mathcal{V} , défini par un réseau vérifiant (15.29)(a)(b)(c).*

PREUVE. Soit $\overline{\mathcal{V}}_1$ un autre prolongement de \mathcal{V} . Au voisinage de s , décomposons $\overline{\mathcal{V}}$ selon les valeurs propres généralisées de la monodromie locale T

$$\overline{\mathcal{V}} = \bigoplus \overline{\mathcal{V}}(\alpha).$$

Il existe alors des entiers $n(\alpha)$ tels que, au voisinage de s ,

$$\overline{\mathcal{V}}_1 = \bigoplus z^{n(\alpha)} \overline{\mathcal{V}}(\alpha)$$

(z une coordonnée locale centrée en s).

Trivialisons les $\overline{\mathcal{V}}(\alpha)$ pour que la matrice de la connexion s'écrive $A \frac{dz}{z}$ avec A constant. La trivialisation analogue de $z^{n(\alpha)} \overline{\mathcal{V}}(\alpha)$ s'en déduit en multipliant par $z^{n(\alpha)}$. Ceci est un accord avec 15.33 et le lemme en résulte.

15.44. Soient $x \in X$, $t \in T_s^0$ et soit donné un chemin ch de x à t comme en 15.9. Il est défini par $\varphi : (\text{disque } D \text{ autour de } 0 \text{ dans } T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ avec $\varphi'(0) = 1$, un chemin $\sigma_{\varphi(u), x}$ de x à $\varphi(u)$ et un chemin $\sigma_{t, u}$ de u à t . Soit (\mathcal{V}, ∇) un fibré vectoriel à connexion intégrable sur X , méromorphe en s et régulier singulier en s . D'après 15.9 et 15.38, le chemin ch définit un isomorphisme “transport le long de ch ”:

$$(15.44.1) \quad \tau[\text{ch}] : \mathcal{V}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{(s)t}.$$

On se propose de donner un procédé un procédé de calcul de (15.44.1), comme régularisation du transport parallèle de x à s .

Fixons un secteur A de sommet 0 dans T_s^0 , contenant u et soit $v \rightarrow 0$ dans ce secteur. Soit $\sigma_{v, u}$ un chemin de u à v dans $A \cap D$, $\sigma_{u, v}$ son inverse, $\sigma_{t, v} := \sigma_{t, u} \cdot \sigma_{uv}$, et $\sigma_{\varphi(v), x} = \varphi(\sigma_{v, u}) \cdot \sigma_{u, x}$. Soit enfin $\text{ch}(v)$ le chemin suivant

$$\text{ch}(v) = \sigma_{t, v} \circ \text{saut de } \varphi(v) \text{ à } v \circ \sigma_{v, x}.$$

Supposons \mathcal{V} à monodromie unipotente en s , de prolongement canonique \mathcal{V}_{can} . Par définition (15.29), $\mathcal{V}_{(s)}$ est le fibré vectoriel constant de fibre $\mathcal{V}_{\text{can}, s}$ et de connexion $d + \text{Res}(\nabla) \frac{d\alpha}{\alpha}$. Choisissons un quelconque isomorphisme $\psi : \varphi^* \mathcal{V}_{\text{can}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{(s)}$ qui soit l'identité en s . Ce choix revient à celui d'une trivialisation de \mathcal{V}_{can} près de s . Notons $\tau[\sigma]$ la transport parallèle le long de σ .

15.45 PROPOSITION. Supposons \mathcal{V} à monodromie unipotente en s . Avec les notations précédentes, on a

$$(15.45.1) \quad \tau[\text{ch}] = \lim_{v \rightarrow 0} \exp(-\log(t/v)\text{Res}(\nabla)) \circ \psi_v \circ \tau[\sigma_{\varphi(v),x}].$$

La branche du logarithme est définie par $\sigma_{t,v}$.

PREUVE. Soit z une coordonnée locale qui définisse φ ($z = \alpha \circ \varphi^{-1}$ pour α forme linéaire sur T_s). Soit ψ^0 défini par la trivialisation 15.39 de \mathcal{V}_{can} . Si $\psi = \psi^0$, le second membre de (15.45.1) est indépendant de v , et est $\tau[\text{ch}]$ par définition (15.38–15.40). En effet, $\tau[\sigma_{t,v}] = \exp(-\log(t/v)\text{Res}(\nabla))$. On a

$$\begin{aligned} & \tau[\sigma_{t,v}]\psi_v\tau[\sigma_{\varphi(v),x}] \\ &= (\tau[\sigma_{t,v}]\psi_v\psi^{0^{-1}}\tau[\sigma_{t,v}]^{-1})(\tau[\sigma_{t,v}]\psi_v^0\tau[\sigma_{\varphi(v),x}]) \\ &= \exp(-\log(t/v)\text{ad Res } \nabla)(\psi_v\psi_v^{0^{-1}}) \cdot \tau[\text{ch}]. \end{aligned}$$

On a $\psi_v\psi_v^{0^{-1}} = \text{Id} + O(v)$. Puisque ∇ est supposé nilpotent, l'exponentielle est un polynôme en $-\log(t/v)\text{ad Res } \nabla$ et l'assertion résulte de ce que $v(\log v)^N \rightarrow 0$ pour $v \rightarrow 0$.

15.46. Soit V un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique p , absolument non ramifié, de corps résiduel parfait k : on a $V \simeq W(k)$. Soient K son corps des fractions et $S := \text{Spec}(V)$. Soient \overline{X} une courbe propre et lisse sur S , $D \subset \overline{X}$ un diviseur fini étale sur S et $X := \overline{X} - D$. Pour simplifier, on suppose D somme de sections de X/S . Soit d l'une d'elles.

Soit \mathcal{V}_K un fibré vectoriel à connexion sur X_K , régulier singulier à l'infini et soit $\overline{\mathcal{V}}_K$ sur \overline{X}_K un prolongement comme en 11.1. On suppose que \mathcal{V}_K vérifie la propriété de convergence p -adique de 11.4, donc $\overline{\mathcal{V}}_K$ celle de 11.6, de sorte que $F^*\mathcal{V}_K$ est défini (11.9). On peut vérifier que cela implique que le résidu de la connexion en d a ses valeurs propres dans \mathbb{Z}_p . Le cas qui nous importe vraiment est celui où \mathcal{V}_K est nilpotent et où $\overline{\mathcal{V}}_K$ est le prolongement canonique: $\text{Res}(\nabla)$ nilpotent.

L'image inverse par d du fibré tangent relatif est une droite T_d sur S . Soient \overline{T}_d sa complétion en une droite projective et T_d^0 le complément dans T_d de la section 0. Sur K , on dispose de $\mathcal{V}_{K(d)}$ sur T_{dK}^0 . C'est un fibré à connexion du type suivant: fibré constant, connexion $d + \Gamma \frac{d\alpha}{\alpha}$, Γ

constant à valeurs propres dans \mathbf{Z}_p . Il vérifie la propriété de convergence 11.4, et $F^*(\mathcal{V}_{K(d)})$ est donc défini.

15.47 CONSTRUCTION. On a canoniquement

$$F^*(\mathcal{V}_{K(d)}) = (F^*\mathcal{V}_k)_{(d)} .$$

15.48 VARIANTÉ. Supposons que, en d , $\text{Res } \nabla$ n'a pas deux valeurs propres différent par un entier non nul. C'est là une propriété de $\overline{\mathcal{V}}_K$ en s , et elle permet de définir $\overline{\mathcal{V}}_{K(d)}$. On verra qu'elle est héritée par $F^*\overline{\mathcal{V}}_K$. Nous construirons un isomorphisme

$$(15.48.1) \quad F^*(\overline{\mathcal{V}}_{K(d)}) = (F^*\overline{\mathcal{V}}_K)_{(d)}$$

sur T_{dK} et laisserons au lecteur le soin de vérifier que l'isomorphisme 15.47 qu'il induit sur T_{dK}^0 est indépendant du choix du prolongement $\overline{\mathcal{V}}_K$ choisi.

15.49 CONSTRUCTION. Dans la fibre spéciale de $X \cup \{d\}$ sur S , soit U_k un voisinage affine de d . Soit U^\wedge le complété formel de \overline{X} le long de U_k . Choisissons un relèvement $\tilde{F} : U^\wedge \rightarrow U^\wedge$ du Frobenius de U_k , pour lequel on ait l'égalité de diviseurs $\tilde{F}^*((d)) = p(d)$. La partie principale de \tilde{F} le long de d est alors définie. C'est une application homogène de degré $d : T_d \rightarrow T_d$ qui relève le Frobenius en fibre spéciale. Elle se prolonge en un morphisme encore noté \tilde{F} de \overline{T}_d dans \overline{T}_d , avec $\tilde{F}^*(0) = p(0)$ et $\tilde{F}^*(\infty) = p(\infty)$.

Retraçons les définitions. Le fibré $\overline{\mathcal{V}}_{K(d)}$ est le fibré vectoriel constant de fibre $\overline{\mathcal{V}}_{Kd}$, avec la connexion $\nabla = d + \text{Res}(\nabla) \frac{d\alpha}{\alpha}$, pour α une forme linéaire sur T_d . Son F^* est simplement son image inverse par $\tilde{F} : \overline{T}_d \rightarrow \overline{T}_d$. C'est le fibré vectoriel constant de fibre $[\overline{\mathcal{V}}_{K(d)}]^{(p)}$, où $^{(p)}$ est l'extension des scalaires par $\sigma : K \rightarrow K$ relevant le Frobenius $x \mapsto x^p$ de k . Sa connexion est

$$\tilde{F}^*(\nabla) = d + \text{Res}(\nabla)^{(p)} p \frac{d\alpha}{\alpha} .$$

Le fibré $(F^*\overline{\mathcal{V}}_K)_{(d)}$ ne dépend que de la restriction de $F^*\overline{\mathcal{V}}_K$ à U^\wedge . Cette restriction est $\tilde{F}^*\overline{\mathcal{V}}_K$. Sa fibre en d est $[\overline{\mathcal{V}}_{Kd}]^{(p)}$, et le résidu de la connexion est $p \text{Res}(\nabla)^{(p)}$. Parce que les valeurs propres de $\text{Res}(\nabla)$ sont dans \mathbf{Z}_p et ne diffèrent pas par un entier non nul, celles de $p \text{Res}(\nabla)^{(p)}$ ne diffèrent pas par un entier et $(F^*\overline{\mathcal{V}}_K)_{(d)}$ sur T_{dK} est défini. C'est le fibré constant de fibre $[\overline{\mathcal{V}}_{K(d)}]^{(p)}$, muni de la connexion

$$\nabla = d + p \text{Res}(\nabla)^{(p)} \frac{d\alpha}{\alpha} .$$

On retrouve la description ci-dessus de $F^*(\overline{\mathcal{V}}_{K(d)})$ et ceci définit 15.48.1. Pour être complet, il resterait à vérifier que l'isomorphisme ainsi construit ne dépend pas du choix du relèvement choisi de Frobenius ni, pour 15.47, du choix de $\overline{\mathcal{V}}_K$. Ces tâches sont laissées au lecteur.

Théorie motivique (no 50 à 53).

15.50. Soient S un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, étale sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, $f : \overline{X} \rightarrow S$ propre et lisse de dimension relative 1 et D une famille finie de sections disjointes. On suppose \overline{X} de genre 0 pour disposer du §12. Soit $d \in D$ et t un vecteur tangent relatif de \overline{X}/S en d

$$t \in d^*T_{\overline{X}/S}.$$

Supposons t partout non nul. Les constructions qui précédent permettent alors, à l'initiation du §13, de définir le groupe fondamental motivique $\pi_1(X, t)_{\text{mot}}$ et le torseur fondamental $T(X, t)_{\text{mot}}$. Ce sont respectivement un schéma en groupes en la catégorie des systèmes de réalisation sur S , et un torseur sous ce groupe, sur X . Pour $d' \in D$ et $T_{d'}^0$ l'espace tangent éponté relatif le long de d' , on dispose aussi du torseur fondamental sur $T_{d'}^0$.

Restreignant $T(X, t)$ à un S -point x de X , ou de $T_{d'}^0$, on obtient le *torseur des chemins de t à x* .

15.51. Prenons $\overline{X} = \mathbb{P}^1$ et $X = \mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Le complément $\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ est la droite affine A , identifiée à son espace tangent T_0 en 0: on dispose de

$$\varphi : T_0 \xrightarrow{\sim} \overline{X} - \{\infty\}.$$

On a $\varphi'(0) = 1$. Dans chaque théorie du π_1 , le foncteur de restriction à T_0^0 s'identifié donc au foncteur φ^* , et le foncteur “fibre en $t \in T_0^0$ ” est canoniquement isomorphe au foncteur “fibre en $\varphi(t)$ ”.

En particulier, on dispose d'une trivialisation du torseur des chemins du vecteur tangent 1 en 0, noté $(0, 1)$ au point 1 – comme nous dirons, on dispose d'un chemin motivique, dans \mathbb{G}_m , $(0, 1)$ à 1. Les torseurs fondamentaux $T(\mathbb{G}_m(0, 1))$ et $T(\mathbb{G}_m, 1)$ sont donc isomorphes. Par 14.2, on a

$$(15.51.1) \quad T(\mathbb{G}_m, (0, 1)) = K(q)$$

(torseur de Kummer sur \mathbb{G}_m).

15.52. Explicitons, dans le cas d'un point base à l'infini, la relation entre les théories transcendantes et de de Rham.

Nous voulons utiliser et les constructions du §12, et celles du présent paragraphe. Comme nous n'avons traité explicitement que de la dimension 1, le seul cas en jeu est celui où \overline{X} est une droite projective sur C . Soit $X = \overline{X} - S$.

Le π_1 de de Rham est défini en terme de la catégorie tannakienne \mathcal{T} des fibrés vectoriels à connexion unipotents sur X . Pour \mathcal{V} dans \mathcal{T} , l'extension canonique \mathcal{V}_{can} de \mathcal{V} à \overline{X} est un fibré vectoriel trivial, et la restriction à x est un isomorphisme de foncteur fibres

$$\omega_{\text{DR}}(\mathcal{V}) := \Gamma(\overline{X}, \mathcal{V}_{\text{can}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_x,$$

Puisque $\mathcal{V}_{(s)}$ est le fibré trivial sur T_s^0 de fibre $\mathcal{V}_{\text{can}, s}$, on a encore pour tout $t \in T_s^0$

$$\omega_{\text{DR}}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\text{can}, s} = \mathcal{V}_{(s)t}.$$

Les foncteurs fibre \mathcal{V}_x ($x \in X$) et \mathcal{V}_t ($t \in T_s^0$) sont canoniquement isomorphes entre eux, et le $\pi_{1\text{DR}}$ est indépendant du point base, à distance finie ou à l'infini, et les torseurs de chemins sont trivialisés.

Avec les notations de 12.5, son algèbre de Lie est la limite projective des

$$\text{Lie } \pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)} = L(H_1^{\text{DR}}(X), K)^{(N)}.$$

Ici, on a en fait $K = 0$. On a $H_1^{\text{DR}}(X) = H^0(\overline{X}, \Omega^1(\log S))$ et le résidu en s se transpose en

$$e_s \in H_1^{\text{DR}}(X) \subset \text{Lie } \pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}.$$

On dispose de la forme différentielle canonique α à valeurs dans $H_1^{\text{DR}}(X)$. Son résidu en s est e_s . Pour (V, ρ) une représentation de $\pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}$, le fibré vectoriel à connexion \mathcal{V} correspondant est le fibré constant sur X de fibre V . Sa connexion est $\nabla = d - \rho(\alpha)$. Le fibré $\mathcal{V}_{(s)}$ est le fibré constant de fibre V , muni de la connexion $\nabla = d - \rho(e_s) \frac{da}{a}$.

15.53. Soit \mathcal{V} un fibré vectoriel à connexion sur X , régulier singulier à l'infini. Supposons le à monodromie locale unipotente en s et soit \mathcal{V}_{can} son extension canonique à $X \cup \{s\}$.

Soit γ une classe de chemin de t à $x \in X(\mathbb{C})$. Supposons le décrit comme en 15.9 par un chemin de t à t_0 proche de 0, un saut de t_0 à x_0 et un chemin de x_0 à x . Le “saut” est relatif à un germe $\varphi : (T_s, 0) \rightarrow (\overline{X}, s)$ avec $\varphi'(0) = 1$.

On a $\mathcal{V}_{(s)}^\nabla = \mathcal{V}_{(s)}^\nabla$ (15.38). Le chemin γ définit un isomorphisme I_t^x de $\mathcal{V}_t \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{\text{can}, s}$ avec \mathcal{V}_x . Pour toute trivialisation locale de \mathcal{V}_{can} près de s , on a par 15.48

$$I_t^x = \lim_{x_0 \rightarrow s} (\text{transport de } x_0 \text{ à } x) \circ \exp \left(\log \left(\frac{t}{t_0} \right) \text{Res}(\nabla) \right).$$

Pour \mathcal{V} défini par une représentation (V, ρ) de $\pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}$, $I_t^x : V \rightarrow V$ est l'action d'un élément $I_t^x(\alpha)$ de $\pi_1(X)_{\text{DR}}^{(N)}(\mathbb{C})$. D'après 15.48, on a

$$I_t^x(\alpha) = \lim_{x_0 \rightarrow s} I_{x_0}^x(\alpha) \circ \exp \left(\log \left(\frac{t_0}{t} \right) \rho(e_s) \right).$$

Ceci définit

$$T(X, t)_B \longrightarrow T(X, t)_{\text{DR}}^\nabla.$$

§16. \mathbf{P}^1 moins trois points: un quotient du π_1 motivique.

16.1. Soient $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1$ la droite projective sur \mathbb{Q} , S un ensemble fini non vide de points rationnels et $X := \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1 - S$. Soit b un point base défini sur \mathbb{Q} . Si (X, b) a bonne réduction sur un ouvert U de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, on a défini en 13.3 à 13.7 le π_1 motivique $\pi_1(X, b)_{\mathrm{mot}}$ comme un schéma en groupes prounipotent dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations sur U . Il est muni d'une structure entière au sens de 7.4 (variante).

Soient T_s l'espace tangent en $s \in S$ et $T_s^0 = T_s - \{0\}$. Si on prend pour point base un vecteur tangent $v \in T_s^0$ (15.50), on dispose d'un morphisme

$$(16.1.1) \quad \pi_1(T_s^0, v)_{\mathrm{mot}} \longrightarrow \pi_1(X, v)_{\mathrm{mot}},$$

correspondant, dans les diverses théories du π_1 , au foncteur de restriction de X à T_s^0 . Le π_1 motivique d'une droite moins l'origine est $\mathbb{Z}(1)$ (14.2) et (16.1.1) se récrit

$$(16.1.2) \quad \mu_s : \mathbb{Z}(1) \longrightarrow \pi_1(X, v)_{\mathrm{mot}}.$$

Par passage au π_1 rendu abélien, indépendant du point base, les morphismes (16.1.2) induisent en homologie

$$(16.1.3) \quad \mu_s : \mathbb{Z}(1) \longrightarrow H_1(X)_{\mathrm{mot}}.$$

En réalisation de Betti, μ_s envoie le générateur $2\pi i$ de $\mathbb{Z}(1)_B$ sur un petit lacet positif σ_s autour de s . En homologie, les σ_s ont pour seule relation $\sum \sigma_s = 0$. On en déduit que les morphismes (16.1.3) induisent un isomorphisme

$$(16.1.4) \quad \mathbb{Z}(1)^S / \mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\sim} H_i(X)_{\mathrm{mot}},$$

(diviser par $\mathbb{Z}(1)$ diagonal).

16.2. Pour V un espace vectoriel, notons encore $LL(V)$ l'algèbre de Lie librement engendrée par l'espace vectoriel V . Pour e_i une base de V , c'est l'algèbre de Lie libre $\mathrm{Lib}(e_i)$ sur les générateurs e_i . La construction $V \mapsto LL(V)$ garde un sens dans toute catégorie tannakienne \mathcal{T} (avec $LL(V)$ dans $\mathrm{Ind} \mathcal{T}$, gradué, de composantes homogène dans \mathcal{T}).

Pour toute algèbre de Lie \mathcal{L} , le gradué pour la filtration centrale descendante Z est encore une algèbre de Lie, et l'isomorphisme $\mathcal{L}^{\text{ab}} = \text{Gr}_Z^1(\mathcal{L})$ induit un épimorphisme

$$(16.2.1) \quad LL(\mathcal{L}^{\text{ab}}) \longrightarrow \text{Gr}_Z(\mathcal{L}).$$

De même pour \mathcal{L} une pro-algèbre de Lie. Le cas qui nous intéressera est celui où les $\mathcal{L}/Z^N\mathcal{L}$ sont de dimension finie et où \mathcal{L} est leur limite projective.

Ces constructions gardent un sens dans une catégorie tannakienne. Pour l'algèbre de Lie du π_1 motivique, on obtient un épimorphisme

$$(16.2.2) \quad LL(H_1(X)_{\text{mot}}) \twoheadrightarrow \text{Gr}_Z \text{Lie } \pi_1(X, b)_{\text{mot}}.$$

De (16.1.4) et (16.2.2) on déduit

16.3 PROPOSITION. Pour X comme en 16.1,

- (i) $\text{Lie } \pi_1(X, b)_{\text{mot}}^{(N)}$ est un système de réalisations extension itérée de motifs de Tate.
- (ii) $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}$ est un schéma en groupe prounipotent dans la catégorie tannakienne des systèmes de réalisations extension itérée de motifs de Tate.

16.4 PROPOSITION. Pour X comme en 16.1, le morphisme (16.2.2) est un isomorphisme.

PREUVE. Il suffit de le vérifier en réalisation de de Rham. Puisque $H_{\text{DR}}^2(X) = 0$, si V est le dual de $H_{\text{DR}}^1(X)$, on a par 12.10

$$\text{Lie } \pi_1(X, b)_{\text{DR}}^{(N)} = LL(V)^{(N)},$$

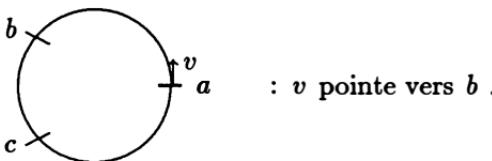
et 16.4 en résulte.

16.5. Soit $a : \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ la droite projective sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Les sections 0,1 et ∞ sont trois sections disjointes de a . Le schéma $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ est lisse de dimension relative un sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Il est donc régulier de dimension 2 et pour chaque section s de a , $s(\text{Spec}(\mathbb{Z}))$ est un diviseur. Son fibré en droite normal T_s est canoniquement isomorphe à l'image inverse par s du fibré tangent relatif. C'est un \mathbb{Z} -module projectif (donc libre) de rang un; il admet deux générateurs opposés. En d'autres termes: la droite T_s sur

$s(\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})) \sim \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, moins la section 0: $T_s^0 = T_s - \{0\}$ a deux sections, opposées, sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$.

La droite affine $A_{\mathbf{Z}}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[X]) \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ est une carte affine contenant les sections 0 et 1. L'espace tangent relatif à toute section s de $A_{\mathbf{Z}}^1$ s'identifie à $A_{\mathbf{Z}}^1$ lui-même et, dans ces coordonnées, les deux générateurs de T_s sont ± 1 .

Le lieu réel $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est un cercle. Marquons-le par les trois points $0, 1, \infty$. Un vecteur tangent non nul en l'un de ses points "pointe" vers un des deux autres. Voici un dessin, plus clair qu'une définition



16.6 NOTATIONS: (i) Dans la carte A^1 , on note (s, t) le vecteur tangent de coordonnée $dX = t$ au point s .

(ii) Pour a, b, c les points $0, 1, \infty$, on note $(a$ vers $b)$ le générateur (sur \mathbf{Z}) de T_a qui pointe vers b .

On a donc

$$\begin{aligned}(0 \text{ vers } 1) &= (0, 1), & (0 \text{ vers } \infty) &= (0, -1) \\ (1 \text{ vers } 0) &= (1, -1), & (1 \text{ vers } \infty) &= (1, 1).\end{aligned}$$

La notation (ii) a les avantages de rester applicable pour $a = \infty$, et d'être compatible à l'action de $\mathfrak{S}(3)$ sur $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ qui permute les sections $0, 1, \infty$.

16.7. Soit X la droite projective $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1$ sur \mathbf{Q} , privé des points $0, 1, \infty$. C'est la fibre générique de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^1$ privé des points $0, 1, \infty$: X a "bonne réduction" sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Le point base à l'infini $(0, 1)$ (notation 16.6(i)) est une section sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ de l'espace tangent éponté $T_0 - \{0\}$ en 0. Il a "bonne réduction". De là résulte que les motifs $\mathrm{Lie} \pi_1(X, (0, 1))_{\mathrm{mot}}^{(N)}$ ont bonne réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$: $\pi_1(X, (0, 1))_{\mathrm{mot}}$ est un groupe unipotent dans la catégorie tannakienne \mathcal{T} des systèmes de réalisations sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ extensions itérées de motifs de Tate. Il est justiciable des conséquences 8.17 de la conjecture 8.1. Nous les expliciterons en 16.27 à 16.33.

Plus généralement, si les points base x et y sont, avec la notation 16.6(ii), de la forme $(a$ vers $b)$, $P_{y,x}$ est un \mathcal{T} -schéma.

Rappelons de 13.15 la terminologie “classe d’homologie de chemin”.

16.8 PROPOSITION. Avec les notations de 16.6 et 16.7, le $H_1(X)_{\text{mot-torseur}} P^{\text{ab}}$ des classes d’homologie de chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0) est trivial.

La trivialisation dont l’existence est promise par 16.8 est unique. Dans la terminologie de 13.15, c’est une classe d’homologie de chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0).

Soient $a, b \in \{0, 1, \infty\}$, $a \neq b$. Transformant le chemin précédent par un élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}(3)$ agissant sur \mathbb{P}^1 en permutant 0,1 et ∞ , on obtient une classe d’homologie de chemin de (a vers b) à (b vers a).

PREUVE DE 16.8. Pour $a \in \{0, 1, \infty\}$, soit $Y_a = X \cup \{a\} \subset \mathbb{P}^1$. Les inclusions de X dans les Y_a induisent un isomorphisme de $H_1(X(\mathbb{C}))$ avec $H_1(Y_0(\mathbb{C})) \oplus H_1(Y_1(\mathbb{C}))$, donc un isomorphisme

$$(16.8.1) \quad H_1(X)_{\text{mot}} \xrightarrow{\sim} H_1(Y_0)_{\text{mot}} \oplus H_1(Y_1)_{\text{mot}}.$$

Par (16.8.1), il suffit de construire une trivialisation du torseur P_i sous $H_1(Y_i)_{\text{mot}}$ déduit de P^{ab} , pour $i = 0, 1$.

Le schéma Y_1 est la droite affine A moins $\{0\}$, et P_1 est le torseur des classes d’homologie de chemins de (0,1) (notation 16.6(i)) ou point 1. D’après 15.51, il est trivial. Identifiant Y_0 à Y_1 par $z \mapsto 1 - z$, on dispose de même d’une classe de chemins, dans Y_0 , de (1,−1) à 0, qui trivialise P_0 .

16.9 REMARQUE. L’automorphisme $t/1+t$ de \mathbb{P}^1 induit un isomorphisme de Y_1 de la droite affine privée de 0 dans $Y_\infty = \mathbb{P}^1 - \{0, 1\}$. Il envoie (0,1) vers (0,1) et 1 vers 1/2. De là, un chemin motivique m_0 , dans Y_∞ , de (0,1) vers 1/2. Son symétrique m_1 par $z \mapsto 1 - z$ est un chemin de (1,−1) vers 1/2, et $m_1^{-1}m_0$ est un chemin motivique de (0,1) à (1,−1). Un $\mathbb{Z}(1)$ -torseur ayant au plus une trivialisation, ce chemin est l’image dans Y_∞ de la classe d’homologie de chemin 16.8.

16.10 DÉFINITION. Pour la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$, appelons chemin réel de (0,1) à (1,−1) le chemin suivant, décrit dans le langage 15.9: par valeurs réelles, aller de (0,1) à $(0, \epsilon)$ ($\epsilon > 0$), sauter de $(0, \epsilon)$ au point ϵ , aller de ϵ à $1 - \epsilon$, sauter de $1 - \epsilon$ à $(1, -\epsilon)$ et aller à (1,−1).

L’image du chemin réel dans les classes d’homologie de chemins est la réalisation de Betti du chemin motivique 16.8.

16.11. Pour tout point base b de X , l'inclusion de X dans \mathbb{G}_m induit $\pi_1(X, b)_{\text{mot}} \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_m, b)_{\text{mot}} = \mathbb{Z}(1)$. Notons $U(b)$ le quotient suivant de $\pi_1(X, b)_{\text{mot}}$ (muni de la structure entière quotient):

$$U(b) := \pi_1(X, b)_{\text{mot}} / \text{Ker}(\pi_1(X, b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))',$$

où ' indique le passage au groupe dérivé. Soit $U_1(b)$ le groupe $\text{Ker}(\pi_1(X, b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))^{\text{ab}}$. On a

$$(16.11.1) \quad 1 \longrightarrow U_1(b) \longrightarrow U(b) \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1.$$

Par abus de notation, on notera $U_1(b)^{(N)}$ l'image de $U_1(b)$ dans $U(b)^{(N)}$: on a

$$(16.11.2) \quad 1 \longrightarrow U_1(b)^{(N)} \longrightarrow U(b)^{(N)} \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1.$$

L'action par automorphismes intérieurs de $U(b)$ sur $U_1(b)$ se factorise par $\mathbb{Z}(1)$. Si b' est un autre point base, $U(b')$ se déduit de $U(b)$ en tordant par le $U(b)$ -torseur des $U(b)$ -chemins de b à b' , et $U_1(b')$ se déduit donc de $U_1(b)$ en tordant par le $\mathbb{Z}(1)$ -torseur image: le torseur des chemins, dans \mathbb{G}_m , de b à b' :

$$(16.11.3) \quad U_1(b') = U_1(b) \text{ tordu par } P_{b',b} \text{ calculé dans } \mathbb{G}_m.$$

Lorsque le point base b est un vecteur tangent en 0, on dispose de la monodromie en 0 : $\mu_0 : \mathbb{Z}(1) \rightarrow U(b)$ qui scinde (16.11.1). Lorsque b est un vecteur tangent en 1, on dispose de $\mu_1 : \mathbb{Z}(1) \rightarrow U_1(b)$.

Prenons pour point base le vecteur tangent 1 en 0 et écrivons simplement U et U_1 pour $U(b)$ et $U_1(b)$. On a

$$(16.11.4) \quad \mu_0 : \mathbb{Z}(1) \longrightarrow U : U = \mathbb{Z}(1) \ltimes U_1.$$

Pour b' un vecteur tangent en 1, le torseur $P_{b',(0,1)}$, calculé dans \mathbb{G}_m , est trivial. Par (16.11.3), on a $U_1(b') = U_1$, d'où

$$(16.11.5) \quad \mu_1 : \mathbb{Z}(1) \longrightarrow U_1.$$

Une reformulation de cette définition de μ_1 nous sera utile. Appliquant 13.15 à (16.11.1), on trouve que pour t un vecteur tangent en 1, le torseur des U_1 -chemins de $(0,1)$ à t est défini. Notons le Q . Le morphisme

$$(16.11.6) \quad q, a \longmapsto q^{-1}\mu_1(a)q : Q \times \mathbb{Z}(1) \longrightarrow U_1$$

envoie $Q_{\mathbf{Z}} \times \mathbb{Z}(1)_B$ dans $U_{1\mathbf{Z}}$. Parce que U_1 est commutatif, $q^{-1}\mu_1(a)q$ est indépendant de q et (16.11.6) se factorise par un morphisme de $\mathbb{Z}(1)$ dans U_1 : c'est le morphisme μ_1 de (16.11.5).

16.12. Sur le produit $\prod_1^N Q(n)$, $Q(1)$ agit (action d'algèbre de Lie abélienne) par les $Q(1) \otimes Q(n) \rightarrow Q(n+1)$:

$$a * (b_i) = (c_i)$$

avec $c_1 = 0$ et $c_{i+1} = ab_i$. Exponentiant cette action nilpotente, on obtient une action du groupe motivique $Q(1)$ sur le produit des $Q(n)$ ($1 \leq n \leq N$). On peut passer à la limite projective sur N . Nous aurons à considérer le groupe produit semi-direct défini par cette action

$$(16.12.1) \quad Q(1) \ltimes \prod_{n \geq 1} Q(n)$$

et les morphismes μ_0 et μ_1 suivant de $Q(1)$ dans ce produit semi-direct: μ_0 est l'isomorphisme identique avec le premier facteur, et μ_1 l'inclusion de $Q(1)$ dans le produit des $Q(n)$.

L'algèbre de Lie de (16.12.1) est le produit semi-direct analogue, pour l'action de Lie de $Q(1)$ sur le produit des $Q(n)$.

16.13 PROPOSITION. *Avec les notations de 16.11, le groupe $U \otimes Q$ muni de μ_0 et μ_1 est isomorphe à (16.12.1), muni de μ_0 et μ_1 . L'isomorphisme est unique.*

Mise en garde. 16.13 décrit le groupe motivique $U \otimes Q$, mais non sa structure entière. Pour celle-ci, voir 16.16.

PREUVE. Il suffit de prouver l'analogue de 16.13 pour les algèbres de Lie de U et du produit semi-direct (16.12.1). Soient encore μ_0 et μ_1 les morphismes définis par μ_0 et μ_1 de $Q(1)$ dans $\text{Lie } U$. Soit $\nu_n := (\text{ad } \mu_0)^{n-1}(\mu_1) : Q(n) \rightarrow \text{Lie } U$ ($n \geq 1$). Le morphisme μ_0 et les ν_n définissent pour chaque N un morphisme d'algèbres de Lie

$$(16.13.1) \quad Q(1) \ltimes \prod_1^N Q(n) \longrightarrow \text{Lie } U^{(N)}.$$

En réalisation de de Rham, $\text{Lie } U_{\text{DR}}^{(N)}$ est engendré par $e_0 := \mu_0(1)$, $e_1 := \mu_1(1)$ et est le plus grand quotient de $\text{Lib}(e_0, e_1)^{(N)} = \text{Lie } \pi_1(X, (0, 1))_{\text{DR}}^{(N)}$

dans lequel l'idéal engendré par e_1 soit commutatif. Ce quotient a pour base e_0 et les $\text{ad } e_0^{n-1}(e_1)$ ($1 \leq n \leq N$), et les $(\text{ad } e_0)^{n-1}(e_1)$ commutent entre eux. Cette description montre que (16.13.1) est un isomorphisme en réalisation de de Rham. C'est donc un isomorphisme. C'est d'ailleurs l'unique isomorphisme qui respecte μ_0 et μ_1 . Passant à la limite sur N , on obtient 16.13.

16.14. Pour le groupe fondamental classique $\pi_1(X(\mathbb{C}), b)$, les construction de 16.11 ont l'analogue suivant. L'inclusion de $X(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ induit $\pi_1(X(\mathbb{C}), b) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_m(\mathbb{C}), b) = \mathbb{Z}(1)_B$ et on définit

$$\begin{aligned}\Gamma(b) &:= \pi_1(X(\mathbb{C}), b)/\text{Ker}(\pi_1(X(\mathbb{C}), b) \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B)' \\ \Gamma_1(b) &:= \text{Ker}(\pi_1(X(\mathbb{C}), b) \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B)^{\text{ab}}.\end{aligned}$$

Prenons $b = (0, 1)$ et écrivons Γ et Γ_1 pour $\Gamma(b)$ et $\Gamma_1(b)$. On dispose encore de $\mu_0, \mu_1 : \mathbb{Z}(1)_B \rightarrow \Gamma$. Le générateur $2\pi i$ de $\mathbb{Z}(1)_B$ a pour images a_0 et a_1 par μ_0 et μ_1 respectivement la monodromie autour de 0, et le conjugué de la monodromie autour de 1 par le chemin réel (16.10) de $(0, 1)$ à $(1, -1)$. Le groupe Γ est engendré par a_0 et a_1 avec pour relation que les conjugués de a_1 commutent. Ces conjugués engendrent Γ_1 .

Faisons agir $t \in \mathbb{Z}(1)_B$ sur Γ_1 par $\gamma \mapsto \mu_0(t)\gamma\mu_0(t)^{-1}$. Cette action fait de Γ_1 une représentation de $\mathbb{Z}(1)_B$, i.e. un module sous l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$. La propriété universelle de Γ assure que Γ_1 est le $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$ module libre de base a_1 , et que Γ est le produit semi-direct $\mathbb{Z}(1)_B \ltimes \Gamma_1$. Se rappelant que μ_1 identifie $\mathbb{Z}_B(1)$ à $a_1^{\mathbb{Z}}$, on a plus intrinsèquement

$$(16.14.1) \quad \Gamma_1 = \mathbb{Z}(1)_B \otimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$$

$$(16.14.2) \quad \Gamma = \mathbb{Z}(1)_B \ltimes \Gamma_1$$

(action de $\mathbb{Z}(1)_B$: par multiplication dans $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$).

16.15. L'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$ est encore l'algèbre affine du tore sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ de groupe de caractères $\mathbb{Z}(1)_B$, noté $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(1)_B, \mathbb{G}_m)$. Le dual de l'algèbre de Lie de ce tore (1-formes invariantes par translations) s'identifie au groupe des caractères $\mathbb{Z}(1)_B$ par $\chi \mapsto d \log \chi := \chi^{-1}d\chi$. Ceci permet de récrire (16.14.1) comme

$$(16.15.1) \quad \Gamma_1 = H^0(\underline{\text{Hom}}(\mathbb{Z}(1)_B, \mathbb{G}_m), \Omega^1).$$

L'action d'un élément de $\mathbf{Z}(1)_B$, identifié à un caractère χ , est la multiplication par χ .

Choisissons un générateur u de $\mathbf{Z}(1)_B$ (par exemple $u = 2\pi i$). Le choix de u identifie $\mathbf{Z}[\mathbf{Z}(1)_B]$ à $\mathbf{Z}[u, u^{-1}]$ et Γ_1 à $\mathbf{Z}[u, u^{-1}] \cdot \frac{du}{u}$. L'action de $u \in \mathbf{Z}(1)_B$ est la multiplication par u . Dans ce modèle, la série centrale descendante de Γ induit sur Γ_1

$$(16.15.2) \quad Z^N(\Gamma) \cap \Gamma_1 = ((u - 1)^{N-1}) \cdot \frac{du}{u} \quad (N \geq 1)$$

et le complété correspondant de Γ_1 est le complété formel le long de $1 \in \mathbf{G}_m$.

16.16. Les constructions 16.14, 16.15 vont nous permettre de déterminer la structure entière des groupes motiviques U et U_1 .

L'isomorphisme 16.13 induit un isomorphisme

$$(16.16.1) \quad U_1 \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \prod \mathbf{Q}(n).$$

limite projective des

$$(16.16.2) \quad U_1^{(N)} \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \prod_1^N \mathbf{Q}(n).$$

Par abus de notation, notons $\Gamma_1^{(N)}$ l'image de Γ_1 dans $\Gamma^{(N)}$. Par (16.15.2), c'est un groupe abélien sans torsion. C'est la structure entière de $U_1^{(N)}$. Par 16.15.2, une fois choisi un générateur u de $\mathbf{Z}(1)_B$, $\Gamma_1^{(N)}$ s'identifie à $\mathbf{Z}[u, u^{-1}] / ((u - 1)^N) \cdot \frac{du}{u}$. Calculons

$$(16.16.3) \quad \frac{du}{u} \cdot \mathbf{Z}[u, u^{-1}] / ((u - 1)^N) \longrightarrow \prod_1^N \mathbf{Q}(n)_B$$

défini par (16.16.2). Par définition, $\frac{du}{u}$ s'envoie dans $u \in \mathbf{Q}(1)_B$ et à la multiplication par $\log u$ correspond l'action de Lie 16.12 de $u \in \mathbf{Q}(1)_B$: on a

$$(\log u)^{n-1} \cdot \frac{du}{u} \longmapsto u^{\otimes n} \in \mathbf{Q}(n)_B.$$

Posons $u = e^v$. Si $f(u) = \sum a_n v^{n-1}$, l'image de $f(u) \frac{du}{u}$ est donc $\sum a_n u^{\otimes n}$. Pour v un générateur de $\mathbf{Q}(1)_B$, la structure entière de $\prod_1^N \mathbf{Q}(n)_B$,

déduite de celle de $U_1^{(N)}$ par (16.16.2), est donc la suivante: on identifie $\prod_1^N \mathbb{Q}(n)_B$ à $\mathbb{Q}[v]/(v^{N-1}) \cdot dv$ par $v^i dv \mapsto v^{\otimes(i+1)}$, et on prend les combinaisons linéaires à coefficients entiers des $\exp(kv)dv$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Cette description fournit la

16.17 PROPOSITION. *Le morphisme*

$$(k-1)! \cdot pr_k \circ (16.16.1) : U_1^{(N)} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}(k)$$

envoie $U_{1,\mathbb{Z}}^{(N)} = \Gamma_1^{(N)}$ dans $\mathbb{Z}(k)_B$, donc définit un morphisme

$$(16.17.1)_k \quad U_1 \longrightarrow \mathbb{Z}(k).$$

La proposition 16.8 permet d'appliquer 13.15 à

$$1 \longrightarrow U_1 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1$$

et de définir.

- 16.18 DÉFINITION. (i) *On note P_1 le U_1 -torseur des U_1 -chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0).*
(ii) *On note $P_{1,k}$ le $\mathbb{Z}(k)$ -torseur déduit de P_1 en poussant par (16.17.1)_k.*

16.19 LEMME. *Le $\mathbb{Z}(1)$ -torseur $P_{1,1}$ est trivial.*

PREUVE. Par 16.8, le U -torseur des chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0) admet une réduction du groupe structural non seulement à U_1 , mais même à $\text{Ker}(U \rightarrow H_1(X))$. Ce groupe est le noyau dans U_1 de (16.17.1)₁ et 16.19 en résulte.

16.20 THÉORÈME. *Pour chaque $k \geq 2$, le $\mathbb{Z}(k)$ -torseur $P_{1,k}$ est isomorphe au $\mathbb{Z}(k)$ -torseur décrit en 3.1, 3.2.*

La preuve sera donnée au paragraphe 19.

16.21. Soient $d \geq 2$ et μ'_d le schéma des racines d -ièmes de 1 autres que 1:

$$\mu'_d = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta^d - 1/\zeta - 1)) \subset X.$$

Le torseur des U -chemins de (0 vers 1) à $\zeta \in \mu'_d$, poussé par $U \rightarrow \mathbb{Z}(1) = \pi_1(\mathbb{G}_m)$, est le $\mathbb{Z}(1)$ -torseur des chemins, sur \mathbb{G}_m , de (0 vers 1) à $\zeta \in \mu'_d$.

Par (15.51.1), c'est le torseur de Kummer $K(q)$ sur \mathbb{G}_m , restreint à μ'_d . D'après 14.3, il est de d -torsion, trivialisé par le changement de structure entière $\mathbb{Z}(1) \rightarrow \frac{1}{d}\mathbb{Z}(1)$.

Définissons de nouvelles structures entières:

(a) Pour tout point base b , $U_1(b)\langle d \rangle$ est $U_1(b) \otimes \mathbb{Q}$, muni de la plus petite structure entière contenant celle de $U_1(b)$ et stable sous $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(1)_B \supset \mathbb{Z}(1)_B$. L'action est comme en 16.11. Pour $b = (0, 1)$, on écrit $U_1\langle d \rangle$.

(b) Pour $b = (0, 1)$, $U\langle d \rangle$ est $U \otimes \mathbb{Q}$, muni de la plus petite structure entière contenant celle de U et l'image par μ_0 de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(1)$: on a

$$(16.21.1) \quad U\langle d \rangle = \frac{1}{d}\mathbb{Z}(1) \ltimes U_1\langle d \rangle.$$

Comme en 16.16, choisissons un générateur v de $\mathbb{Z}(1)_B$ et identifions $U_1 \otimes \mathbb{Q}^{(N)} = \prod_1^N \mathbb{Q}(n)_B$ à $\mathbb{Q}[v]/(v^{N-1}) \cdot dv$. La structure entière $U_1\langle d \rangle_{\mathbb{Z}}^{(N)}$ est le \mathbb{Z} -module engendré par les $\exp(kv/d)dv$ ($k \in \mathbb{Z}$). On a donc

16.22 LEMME. *Le morphisme*

$$(16.22.1) \quad d^{k-1}(k-1)! \operatorname{pr}_k \circ (16.16.1)_k : U_1 \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}(k)$$

envoie $U_1\langle d \rangle_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{Z}(k)_B$: c'est un morphisme

$$(16.22.2)_{d,k} \quad U_1\langle d \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}(k).$$

Pour $d = 1$, on retrouve (16.17.1).

16.23. D'après 16.21, on peut appliquer 13.15 à

$$1 \longrightarrow U_1\langle d \rangle \longrightarrow U\langle d \rangle \longrightarrow \frac{1}{d}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1$$

et définir le $U_1\langle d \rangle$ -torseur des $U_1\langle d \rangle$ -chemin de (0 vers 1) à $\zeta \in \mu'_d$. C'est un $U_1\langle d \rangle$ -torseur sur $\mu'_d[1/d]$. On le prolonge à $\mu_d[1/d] = \mu'_d[1/d] \amalg \{1\}$ en prenant sur 1 le $U_1\langle d \rangle$ -torseur des $U_1\langle d \rangle$ chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0).

NOTATION (i) On note P_d ce torseur.

(ii) On note $P_{d,k}$ le $\mathbb{Z}(k)$ -torseur sur $\mu_d[1/d]$ déduit de P_d en poussant par (16.22.2) $_{d,k}$.

En 1, $P_{d,k}$ est donc d^{k-1} fois le torseur $P_{1,k}$.

16.24 THÉORÈME. *Les torseurs $P_{d,k}$ ci-dessus sont isomorphes à ceux de 3.11.*

La preuve sera donnée au paragraphe 19.

16.25 PROPOSITION. *La restriction de $P_{dd',k}$ à $\mu'_d[1/dd']$ (resp. $\mu_d[1/dd']$ si $k \geq 2$) est $(d')^{k-1}$ fois le torseur $P_{d,k}$.*

PREUVE Ceci reflète le facteur d^{k-1} dans (16.22.1).

16.26 PROPOSITION. *Pour $k = 1$, le $\mathbb{Z}(1)$ -torseur $P_{d,k}$ est, sur μ'_d , le torseur de Kummer $K(1 - \zeta)$.*

PREUVE. L'espace $\mathbb{P}^1 - \{1, \infty\}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$ par $x \mapsto 1-x$. Son π_1 est donc $\mathbb{Z}(1)$. Pour un point base vecteur tangent en 1, l'isomorphisme du π_1 avec $\mathbb{Z}(1)$ est donné par la monodromie autour de 1 (16.1.2). L'inclusion de X dans $\mathbb{P}^1 - \{1, \infty\}$ induit donc un morphisme de $\pi_1(X(0, 1))$ dans $\mathbb{Z}(1)$. Ce morphisme se factorise par $\pi_1^{\text{ab}} = \mathbb{Z}(1) \times \mathbb{Z}(1)$ (par μ_0, μ_1), et même par $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(1) \times \mathbb{Z}(1)$. Il se factorise donc par $U(d)$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, (0, 1)) & \longrightarrow & U(d) \hookleftarrow U_1(d) \\ \searrow & \downarrow & \swarrow (16.22.2)_{d,1} \\ & \mathbb{Z}(1) & \end{array}$$

est commutatif. Le torseur $P_{d,1}$ est donc déduit du torseur des chemins de $(0, 1)$ à $\zeta \in \mu'_d$ en poussant par $\pi_1(x \mapsto 1-x) : \pi_1(X, (0, 1)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_m, 1) = \mathbb{Z}(1)$. Par fonctorialité du torseur fondamental et 14.2(ii), le torseur obtenu est $K(1 - \zeta)$.

16.27. Explicitons ce que 8.17 affirme sur $\pi_1(X, (0, 1))_{\text{mot}}$. Posons $\pi := \pi_1(X, (0, 1))_{\text{mot}}$. On néglige la structure entière. Soit G^π le groupe fondamental de la catégorie tannakienne \mathcal{T} engendrée par les systèmes de réalisations Lie $\pi^{(N)}$. Rappelons que G^π est un \mathcal{T} -schéma en groupes, que, pour chaque foncteur réalisation ω , $\omega(G^\pi)$ est le schéma en groupes des automorphismes du foncteur fibre ω de \mathcal{T} et que les actions de $\omega(G^\pi)$ sur les $\omega(\pi)$ sont induites par une action de G^π sur π . Cette action est fidèle et nous identifierons G^π à un schéma en groupes d'automorphismes de π .

Par 6.17(iv), G^π une extension de \mathbb{G}_m par un groupe unipotent U^π . Comme en 8.9, on dispose en réalisation de de Rham de $\tau : \mathbb{G}_m \rightarrow G_{\text{DR}}^\pi$ qui fait de G_{DR}^π le produit semi-direct de \mathbb{G}_m et de U_{DR}^π .

La pro-algèbre de Lie $\text{Lie } \pi_{\text{DR}}$ est librement engendrée par e_0, e_1, e_∞ soumis à $e_0 + e_1 + e_\infty = 0$. La graduation pour laquelle les e_i sont de

degré 1 donne l'action τ de \mathbb{G}_m . Puisque U_{DR}^π est normalisé par $\tau(\mathbb{G}_m)$, la pro-algèbre de Lie de U_{DR}^π est graduée: c'est le produit de ses composantes homogène $[\text{Lie } U_{\text{DR}}^\pi]^n$ ($n > 0$), et $[\text{Lie } U_{\text{DR}}^\pi]^n$ est formé de dérivations de degré n . Comme en 8.10, il existe $a_0 \in U_{\text{DR}}^\pi(\mathbf{R})$ tel que $a_0\tau(2\pi i)$ transforme la structure rationnelle π_{DR} de $\pi_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C} \simeq \pi_B \otimes \mathbb{C}$ en la structure rationnelle π_B .

Soit V_{DR}^π le schéma en groupes pro-unipotent des automorphismes de Lie π_{DR} qui respectent la filtration W et qui induisent l'identité sur le gradué. Le groupe U_{DR}^π est le plus petit sous-groupe X normalisé par $\tau(\mathbb{G}_m)$ de V_{DR}^π , défini sur \mathbb{Q} , ayant les propriétés suivantes.

- (i) Il existe $b_0 \in X(\mathbf{R})$ tel que $b := b_0\tau(2\pi i)$ transforme π_{DR} en π_B .
- (ii) Soient H_{DR} le produit semi-direct $\mathbb{G}_m \ltimes X$, et H_B la \mathbb{Q} -structure de $H_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C}$ de points rationnels $\text{int}(b)(H_{\text{DR}}(\mathbb{Q}))$. Il agit sur π_B . On veut que l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur π_ℓ se factorise par $H_B(\mathbb{Q}_\ell)$.
- (iii) Pour tout p , on veut que le Frobenius cristallin ϕ_p soit dans $H_{\text{DR}}(\mathbb{Q}_p)$.

Le Frobenius réel F_∞ (un automorphisme de π_B) est, avec les notations de (i)

$$F_\infty = b_0\tau(-1)b_0^{-1}$$

et si X vérifie (i), il contient $F_\infty\tau(-1)$. La conjecture 8.17 est que X est, sur \mathbf{R} , le plus petit sous-groupe Y de $V_{\text{DR}}^\pi \otimes \mathbf{R}$, défini sur \mathbf{R} , normalisé par $\tau(\mathbb{G}_m)$ et contenant $F_\infty\tau(-1)$. Avec les notations de 8.10, $F_\infty\tau(-1) = \exp(2N)$ et l'algèbre de Lie de Y est engendrée par les composantes homogènes de N .

16.28 REMARQUE. Il existe un plus petit sous-groupe $X \subset V_{\text{DR}}^\pi$ vérifiant la condition (i) de 16.27. On peut le déduire du lemme suivant, appliqué aux Lie $\pi_{\text{DR}}^{(N)}$.

16.28.1 LEMME. Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur \mathbb{Q} , munis d'une filtration W , et $\alpha : V_1 \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes \mathbb{C}$ un isomorphisme filtré, avec $\text{Gr}_W(\alpha)$ défini sur \mathbb{Q} . Soit $H \subset GL(V_1)$ le sous-groupe des g respectant W et tels que $\text{Gr}_W(g) = 1$. Il existe un plus petit sous-groupe X défini sur \mathbb{Q} de H pour lequel il existe $b \in X(\mathbb{C})$ qui transporte V_1 en $\alpha^{-1}(V_2) \subset V_1 \otimes \mathbb{C}$.

PREUVE. Soit P le H -torseur des isomorphismes filtrés $V_1 \rightarrow V_2$ de même gradué que α . La condition sur X peut encore s'écrire: l'image de α dans P/X est définie sur \mathbb{Q} . Puisque $P/(X_1 \cap X_2) \hookrightarrow P/X_1 \times P/X_2$,

l'intersection de deux groupes la vérifiant la vérifie encore, et 16.28.1 en résulte.

16.29. Le groupe G^π respecte toutes les structures motiviques de π . Voici des exemples.

Le morphisme $\mu_0 : \mathbf{Q}(1) \rightarrow \pi$ est respecté par G^π . Ceci revient à dire que U_{DR}^π fixe e_0 .

Soit P le π -torseur des chemins de (0 vers 1) à (1 vers 0) (resp. (∞ vers 0)). Transportant la monodromie autour de 1 (resp. ∞) par un tel chemin, on définit un morphisme de schémas motiviques

$$p^{-1}\mu p : P \times \mathbf{Q}(1) \longrightarrow \pi .$$

La classe de conjugaison de μ est donc stable par G^π . Ceci revient à dire que tout $u \in \text{Lie } U_{\text{DR}}^\pi$ transforme e_1 (resp. e_∞) en un crochet $[X_1, e_1]$ (resp. $[X_\infty, e_\infty]$). Si u est de degré n , X_1 et X_∞ sont de degré n , donc uniquement déterminés par u si $n \geq 2$, puisque le centralisateur de e_1 (resp. e_∞) est réduit à $\mathbf{Q}e_1$ (resp. $\mathbf{Q}e_\infty$). La relation $e_0 + e_1 + e_\infty = 0$ impose par ailleurs

$$[X_1, e_1] + [X_\infty, e_\infty] = 0 .$$

Par 16.8 (complété dans le cas de ∞ par 14.3, qui fournit un chemin de (0 vers 1) à (0 vers ∞)), le π -torseur P admet une réduction P' de son groupe structural au groupe dérivé π' . Le torseur P' s'injecte dans la classe de conjugaison de μ_1 (resp. μ_∞) et

$$P' \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbf{Q}(1), \text{Lie } \pi)$$

est motivique. Il en résulte que $\text{Lie } U_{\text{DR}}^\pi$ est de degré ≥ 2 . Une dérivation intérieure de degré ≥ 2 de $\text{Lie } \pi_{\text{DR}}$ qui fixe e_0 est nulle car le centralisateur de e_0 est réduit à $\mathbf{Q}e_0$. Le groupe G^π s'injecte donc dans celui des automorphismes extérieurs de π_{DR} (automorphismes modulo automorphismes intérieurs).

L'action de $\mathfrak{S}(3)$ sur \mathbf{P}^1 qui permute 0, 1, ∞ induit une action extérieure de $\mathfrak{S}(3)$ sur π . Elle est motivique, donc G^π la centralise. Cela signifie que pour u de degré $n \geq 2$ dans $\text{Lie } U_{\text{DR}}^\pi$, si on pose

$$ue_i = [X_i(e_0, e_1, e_\infty), e_i]$$

($i = 0, 1, \infty$, X_i polynôme de Lie de degré n , $X_0 = 0$), alors pour σ une permutation de $\{0, 1, \infty\}$, on a

$$X_i(e_0, e_1, e_\infty) - X_{\sigma^{-1}(i)}(e_{\sigma 0}, e_{\sigma 1}, e_{\sigma \infty})$$

indépendant de i . Ceci signifie

$$X_\infty(e_0, e_1, e_\infty) = X_1(e_0, e_\infty, e_1)$$

$$X_1(e_0, e_1, e_\infty) = -X_1(e_1, e_0, e_\infty)$$

$$X_1(e_0, e_1, e_\infty) + X_1(e_1, e_\infty, e_0) + X_1(e_\infty, e_0, e_1) = 0.$$

On dispose encore d'autres structures motiviques sur π , mais je ne sais pas montrer qu'elles imposent à G^π d'être aussi petit que conjecturé par 8.17.

16.30. Notons γ l'image dans $\pi_{\text{DR}}(\mathbf{R})$ du chemin réel de $(0, 1)$ à $(1, -1)$ (16.10). L'image du π_1 transcendant dans $\pi_{\text{DR}}(\mathbf{C})$ est engendrée par $\exp(2\pi i e_0)$ et $\gamma^{-1} \exp(2\pi i e_1) \gamma$. Soit b'_0 l'automorphisme de Lie π_{DR} qui envoie e_0 sur e_0 et e_1 sur $\text{ad}(\gamma^{-1})(e_1)$. L'automorphisme $b' = b'_0 \tau(2\pi i)$ conjugue π_{DR} en π_B . La conjecture 16.27 affirme que si on remplace b' par $b'c$, avec c un automorphisme convenable de Lie π_{DR} , défini sur \mathbf{Q} , et centralisant $\tau(-1)$, alors le b_0 correspondant a un logarithme dont les composantes homogènes sont dans l'algèbre de Lie de dérivations engendrée par les composantes homogènes du logarithme de $F_\infty \tau(-1) = b_0 \tau(-1) b_0^{-1} \tau(-1)$.

C'est là une propriété de rationalité de γ . On notera que les coordonnées de γ sont les intégrales itérées de Chen, de 0 à 1, convenablement régularisées, de suites de $\frac{dz}{z}$ et $\frac{dz}{z-1}$.

16.31 PROPOSITION. *L'action de U^π sur π/π'' est abélienne.*

Il suffit de le vérifier en réalisation de de Rham, où on applique le

16.32 LEMME. *Soit \mathcal{L} l'algèbre de Lie libre engendrée par e_0 et e_1 . L'algèbre de Lie \mathcal{A} des dérivations D de $\mathcal{L}/\mathcal{L}''$ telles que $De_0 = 0$ et $De_1 \in [\mathcal{L}', e_1]$, est une algèbre de Lie abélienne.*

PREUVE. L'algèbre de Lie abélienne \mathcal{L}/\mathcal{L}' agit sur $\mathcal{L}'/\mathcal{L}''$, d'où une application

$$\alpha : \mathbf{Q}[x, y] \rightarrow \mathcal{L}'/\mathcal{L}'' ; P \mapsto P(\text{ad } e_0, \text{ad } e_1)[e_0, e_1].$$

La propriété universelle de \mathcal{L} assure que cette application est un isomorphisme. Elle munit $\mathcal{L}'/\mathcal{L}''$ d'une structure de $\mathbb{Q}[x, y]$ -module, libre de rang un, traduisant l'action de \mathcal{L}/\mathcal{L}' . Pour D une dérivation de $\mathcal{L}/\mathcal{L}''$, triviale sur \mathcal{L}/\mathcal{L}' , la dérivation induite de $\mathcal{L}'/\mathcal{L}''$ est $\mathbb{Q}[x, y]$ -linéaire.

Soit $D \in \mathcal{A}$ la dérivation pour laquelle

$$De_0 = 0 \quad \text{et} \quad De_1 = [\alpha(P), e_1] = \alpha(-yP) .$$

On a

$$D[e_1, e_1] = [e_0, De_1] = \alpha(-xyP) .$$

Puisque $P \mapsto xyP$ est injectif, \mathcal{A} s'injecte dans l'algèbre de Lie abélienne des endomorphismes $\mathbb{Q}[x, y]$ -linéaires de $\mathcal{L}'/\mathcal{L}''$ et 16.32 en résulte.

16.33. La proposition 16.31 rend π/π'' justiciable des conjectures plus précises 8.18. Les méthodes de [A2] devraient permettre de vérifier 8.18 pour π/π'' .

§17. Relations de distribution: voie géométrique.

Dans ce paragraphe, nous montrons par voie géométrique que les torseurs $P_{d,k}$ de 16.23 vérifient les relations de distribution 3.13.

17.1. L'assertion (3.13.1)(ii) a déjà été prouvée en 16.25. Il reste à prouver (3.13.1)(i). Si $k = 1$, $P_{d,1}$ est le torseur de Kummer $K(1 - \zeta)$ (16.26) et l'assertion résulte de (3.1.3). Nous supposerons $k \geq 2$; cela simplifie les notations, mais la même preuve marcherait encore pour $k = 1$, en remplaçant μ_d par μ'_d et $\mu_{dd'}$ par $\mu_{dd'} - \mu_{d'}$.

Notons Tr la trace, rel. le morphisme fini étale $z \mapsto z^{d'}$ de $\mu_{dd'}[1/dd']$ sur $\mu_d[1/dd']$. Il s'agit de définir un isomorphisme de $\mathbb{Z}(k)$ -torseurs sur $\mu_d[1/dd']$

$$(17.1.1) \quad \text{Tr } P_{dd',k} \xrightarrow{\sim} P_{d,k} .$$

Par descente galoisienne sur les motifs, il suffit de faire localement pour la topologie étale: on définira (17.1.1) sur un corps contenant les racines $(dd')^{\text{ièmes}}$ de l'unité, mais sans en choisir une.

Il s'agit, pour ζ une racine $d^{\text{ième}}$ de 1, de définir

$$(17.1.2) \quad \sum_{\alpha^{d'}=\zeta} P_{dd',k,\alpha} \xrightarrow{\sim} P_{d,k,\zeta} .$$

17.2. Soit R' un revêtement de \mathbb{G}_m , isomorphe au revêtement $z \mapsto z^{d'} : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$. On pourrait prendre R' égal à ce revêtement, mais les arguments seront plus intrinsèques si on ne le suppose pas. Soit S l'image inverse de 1 et $R = R' - S$ le revêtement de $X = \mathbb{G}_m - \{1\}$ induit par R' .

Le revêtement R' de \mathbb{G}_m se prolonge en un revêtement ramifié en 0 de $\mathbb{G}_a \supset \mathbb{G}_m$, isomorphe à $z \mapsto z^{d'} : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$. On note 0 le point au-dessus de $0 \in \mathbb{G}_a$. Parce que $R' \simeq \mathbb{G}_m$, son espace tangent éponté en 0 lui est canoniquement isomorphe. Pour $s \in R'$, on note $t(s)$ le vecteur tangent en 0 correspondant. On dispose, sur R' , d'un chemin motivique de $t(s)$ à s (cf. 15.51).

Fixons dans R un point base b . Posons les notations suivantes:

(a) L'inclusion $R \subset R'$ définit $\pi_1(R, b)_{\text{mot}} \rightarrow \pi_1(R', b)_{\text{mot}} = \mathbb{Z}(1)$, et

$$(17.2.1) \quad \begin{aligned} V(b) &:= \pi_1(R', b)_{\text{mot}} / \text{Ker}(\pi_1(R', b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))' \\ V_1(B) &:= \text{Ker}(\pi_1(R, b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))^{\text{ab}} : \\ 1 &\longrightarrow V_1(b) \longrightarrow V(b) \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 . \end{aligned}$$

(b) Pour chaque $s \in S$, l'inclusion $R' - \{s\} \rightarrow R'$ définit de même $\pi_1(R' - \{s\}, b) \rightarrow \mathbb{Z}(1)$ et

$$U_s(b) := \pi_1(R' - \{s\}, b)_{\text{mot}} / \text{Ker}(\pi_1(R' - \{s\}, b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))'$$

$$U_{s1}(b) := \text{Ker}(\pi_1(R' - \{s\}, b)_{\text{mot}} \rightarrow \mathbb{Z}(1))^{\text{ab}}$$

$$(17.2.2) \quad 0 \longrightarrow U_{s1}(b) \longrightarrow U_s(b) \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 0.$$

Les inclusions $R \subset R' - \{s\} \subset R'$ définissent des diagrammes commutatifs

$$(17.2.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1(b) & \longrightarrow & V(b) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & U_{s1}(b) & \longrightarrow & U_s(b) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 0. \end{array}$$

De (17.2.3), on déduit

$$(17.2.4) \quad V_1(b) \longrightarrow \prod U_{s1}(b)$$

$$(17.2.5) \quad V(b) \longrightarrow \text{produit fibré sur } \mathbb{Z}(1) \text{ des } U_s(b).$$

17.3 PROPOSITION. *Les morphismes (17.2.4), (17.2.5) sont des isomorphismes.*

PREUVE. Il suffit de vérifier que 17.2.5 induit pour chaque N un isomorphisme

$$(17.3.1) \quad V(b)^{(N)} \xrightarrow{\sim} \text{produit fibré des } U_s^{(N)} \text{ sur } \mathbb{Z}(1)$$

et il suffit de vérifier (17.3.1) en réalisation de Betti. Il suffit même de le vérifier pour les groupes discrets qui définissent les structures entières. Soient $\Gamma(b) := \text{Ker}(\pi_1(R(C), b) \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B)^{\text{ab}}$ et $\Gamma_s(b) := \text{Ker}(\pi_1(R'(C) - s, b) \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B)^{\text{ab}}$. Ces groupes sont munis d'une action de $\mathbb{Z}(1)_B$, induite par l'action par conjugaison de π_1 sur lui-même. À gauche de (17.3.1), $V(b)^{(N)}$ est une extension de $\mathbb{Z}(1)_B$ par le plus grand quotient sans torsion de $\Gamma(b)$ sur lequel l'action de $\mathbb{Z}(1)_B$ soit nilpotente d'échelon N . À droite, on a une extension de $\mathbb{Z}(1)_B$ par le produit des plus grands quotients sans torsion des $\Gamma_s(b)$ sur lesquels l'action de $\mathbb{Z}(1)_B$ soit nilpotente d'échelon N .

Il reste à vérifier que

$$(17.3.2) \quad \Gamma(b) \xrightarrow{\sim} \prod_s \Gamma_s(b).$$

Le groupe fondamental $\pi_1(R', b)$ est un groupe libre, et on peut choisir un système générateur libre $(e_0, (e_s)_{s \in S})$ où e_0 (resp. e_s) est la monodromie autour de 0 (resp. s), ramenée dans $\pi_1(R', b)$ par un chemin de b à un vecteur tangent en 0 (resp. s). Pour un tel choix, la projection $\pi_1(R', b) \rightarrow \pi_1(R - \{s\}, b)$ annule les e_t ($t \in S, t \neq s$) et envoie e_0 et e_s sur un système générateur libre. Le groupe commutatif $\Gamma(b)$ (resp. $\Gamma_s(b)$) est un module sous l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}(1)_B$. C'est un module libre, de base les images de e_s ($s \in S$) (resp. de base l'image de e_s) et (17.3.2) en résulte.

17.4. Prenons pour point base b un vecteur tangent en 0. La monodromie en 0 : $\mu_0 : \mathbb{Z}(1) \rightarrow V(b)$ scinde les extensions 17.2.3 :

$$\begin{aligned} V(b) &= \mathbb{Z}(1) \ltimes V_1(b) = \mathbb{Z}(1) \ltimes \prod_s U_{s1}(b) \\ U_s(b) &= \mathbb{Z}(1) \ltimes U_{s1}(b). \end{aligned}$$

Soit a un entier et définissons $V(b)\langle a \rangle$ comme étant $V(b) \otimes \mathbb{Q}$, muni de la plus petite structure entière contenant celle de $V(b)$ et l'image de $\mu_0(\frac{1}{a}\mathbb{Z}(1)_B)$. Soit $V_1(b)\langle a \rangle := V_1(b) \otimes \mathbb{Q}$, muni de la structure entière induite: la plus petite contenant celle de $V_1(b)$ et stable sous l'action de $\frac{1}{a}\mathbb{Z}(1)_B$. Définissons de même $U_s(b)\langle a \rangle$ et $U_{s1}(b)\langle a \rangle$. Le diagramme (17.2.3) devient

$$(17.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & V_1(b)\langle a \rangle & \longrightarrow & V(b)\langle a \rangle & \longrightarrow & \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & U_{s1}(b)\langle a \rangle & \longrightarrow & U_s(b)\langle a \rangle & \longrightarrow & \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \end{array}$$

et la monodromie en 0 est un morphisme

$$(17.4.2) \quad \mu_0 : \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow V(b)\langle a \rangle$$

qui scinde les extensions (17.4.1).

Si b_0 et b_1 sont deux vecteurs tangents en 0, les groupes (17.4.1) en b_1 se déduisent de ceux en b_0 en tordant par le $\mathbb{Z}(1)$ -torseur de Kummer $K(b_1/b_0)$ des chemins, dans l'espace tangent éponté, de b_0 à b_1 .

Prenons pour a un multiple de d' et prenons des vecteurs tangents de la forme $t(s)$ ($s \in S$). Le rapport $t(s_1)/t(s_0)$ est une racine $d'^{\text{ième}}$ de 1 et $K(t(s_1)/t(s_0))$ est donc trivialisé quand on le pousse par $\mathbb{Z}(1) \rightarrow \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1)$. L'action de $\mathbb{Z}(1)$ sur (17.4.1) se prolongeant à $\frac{1}{a}\mathbb{Z}(1)$, les diagrammes 17.4.1 pour $b = t(s)$ sont canoniquement isomorphes entre eux. Pour $d'|a$ et $b = t(s)$ ($s \in S$), on notera

$$(17.4.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & V_1\langle a \rangle & \longrightarrow & V\langle a \rangle & \longrightarrow & \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & U_{s1}\langle a \rangle & \longrightarrow & U_s\langle a \rangle & \longrightarrow & \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \end{array}$$

leur valeur commune. On dispose de

$$(17.4.4) \quad \mu_0 : \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow V\langle a \rangle$$

scindant les extensions (17.4.3). On déduit encore de 17.3 que 17.4.3 fait de $V_1\langle a \rangle$ le produit des $U_{s1}\langle a \rangle$

$$(17.4.5) \quad V_1\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} \prod_s U_{s1}\langle a \rangle.$$

Pour chaque $s \in S$, il existe un unique isomorphisme α_s de \mathbb{G}_m avec R' tel que $R' \rightarrow \mathbb{G}_m$ soit $z \mapsto z^{d'}$ et que $\alpha_s(1) = s$. L'isomorphisme α_s envoie $(0,1)$ sur $t(s)$. Il identifie $U_s(t(s))$ avec U (16.11), et $U_s(t(s))\langle a \rangle$ avec $U\langle a \rangle$ (16.21). Puisque $U_s\langle a \rangle = U_s(t(s_0))\langle a \rangle$ est indépendant de $s_0 \in S$, on a pour tout s

$$U\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} U_s\langle a \rangle$$

et (17.4.5) devient un isomorphisme

$$(17.4.6) \quad V_1\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} (U_1\langle a \rangle)^S.$$

On a donc

$$(17.4.7) \quad V\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} \frac{1}{a}\mathbb{Z}(1) \ltimes (U_1\langle a \rangle)^S.$$

On dispose de $\mu_1 : \mathbb{Z}(1) \rightarrow U_1$ (16.11.5). Notons μ_s ($s \in S$) les morphismes

$$(17.4.8) \quad \mathbb{Z}(1) \longrightarrow V_1\langle a \rangle$$

qui s'en déduisent par 17.4.6.

17.5. Soient $s_0 \in S$ et $b = t(s_0)$. la projection $\pi : R \rightarrow X$ envoie b sur le vecteur tangent 1 en 0: dans des coordonnées où R' est \mathbb{G}_m et où π est $z \mapsto z^{d'}$, les $t(s)$ sont les racines $d'^{\text{ième}}$ de l'unité et la partie principale en 0 $\text{Pr}(\pi)$ est $z \mapsto z^{d'}$. Le diagramme commutatif d'espaces pointés

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \end{array}$$

induit des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(R, t(s)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \\ \downarrow & & \downarrow d' \\ \pi_1(X, 0 \text{ vers } 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & V_1(t(s)) & \longrightarrow & V(t(s)) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d' \\ 1 & \longrightarrow & U_1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Par définition des structures entières $V(dd')$ de $V(t(s)) \otimes \mathbb{Q}$, et $U(d)$ de $U \otimes \mathbb{Q}$, ce diagramme persiste pour les nouvelles structures entières

$$(17.5.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & V_1(dd') & \longrightarrow & V(dd') & \longrightarrow & \frac{1}{dd'}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow d' \\ 1 & \longrightarrow & U_1(d) & \longrightarrow & U(d) & \longrightarrow & \frac{1}{d}\mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1. \end{array}$$

17.6 LEMME. Pour $s \in S$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(1) & \xrightarrow{\mu_s(17.4.8)} & V_1(dd') \\ \parallel & & \downarrow 17.5.1 \\ \mathbb{Z}(1) & \xrightarrow{\mu_1} & U_1(d) \end{array}$$

est commutatif.

PREUVE. Prenons pour point base $t(s)$. Pour t un vecteur tangent en s , on dispose de la monodromie autour de s : $\mu' : \mathbb{Z}(1) \rightarrow V_1(s)$. Parce que,

dans R' , on dispose d'un chemin motivique de $t(s)$ à s , le $V_1(t(s))$ -torseur Q des chemins de $t(s)$ à t est défini (13.15). La composition des chemins définit

$$(17.6.1) \quad Q \times \mathbf{Q}(1) \longrightarrow V_1(t(s)) : (q, t) \longmapsto q^{-1}\mu(t)q.$$

Parce que $V_1(s)$ est commutatif, $q^{-1}\mu(t)q$ ne dépend pas de q et (17.6.1) se factorise par un morphisme de $\mathbf{Q}(1)$ dans $V_1(t(s))$, respectant les structures entières:

$$\mu' : \mathbf{Z}(1) \longrightarrow V_1(t(s)).$$

Si on le compose avec l'inclusion de $V_1(t(s))$ dans $V_1(dd')$, on obtient μ_s . Il s'agit donc de vérifier la commutativité

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(1) & \xrightarrow{\mu'} & V_1(t(s)) \\ \| & & \downarrow \\ \mathbf{Z}(1) & \xrightarrow{\mu_1} & U_1. \end{array}$$

Le morphisme μ_1 admet en effet une construction parallèle à celle de μ' (16.11.6), et le torseur des $V_1(t(s))$ -chemins de $t(s)$ à t se projette par $\pi : R \rightarrow X$, sur celui des $U_1(0$ vers $1)$ -chemin de $(0$ vers $1)$ au vecteur tangent $d\pi(t)$ en 1 .

Négligeons les structures entières. Par (16.16.1) $U_1 \otimes \mathbf{Q} = \prod_n \mathbf{Q}(n)$. Par 17.4.6, $V_1 \otimes \mathbf{Q} = \left(\prod_n \mathbf{Q}(n) \right)^S$.

17.7 LEMME. *Le morphisme 17.5.1 de $V_1 \otimes \mathbf{Q} = \left(\prod_n \mathbf{Q}(n) \right)^S$ dans $U_1 \otimes \mathbf{Q} = \prod_n \mathbf{Q}(n)$ est*

$$(q_{n,s})_{n \geq 1, s \in S} \longmapsto \left(\sum_s d'^{n-1} q_{n,s} \right)_{n \geq 1}.$$

PREUVE. Par 17.6, la formule proposée est correcte sur les facteurs $\mathbf{Q}(1)$. Par 17.5.1, le morphisme cherché n'est pas $\mathbf{Q}(1)$ -équivariant, mais transforme l'action de t en celle de $d't$. La formule proposée fait de même, et est caractérisée par cette propriété.

De ce lemme résulte le

17.8 COROLLAIRE. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 V_1\langle dd' \rangle = U_1\langle dd' \rangle^S & \xrightarrow{(16.22.2)_{dd',n}} & \mathbb{Z}(n)^S \\
 \downarrow & & \downarrow \sum \\
 U_1\langle d \rangle & \xrightarrow{(16.22.2)_{d,n}} & \mathbb{Z}(n)
 \end{array}$$

est commutatif.

17.9. Construisons l'isomorphisme (17.1.2) pour $\zeta \neq 1$. Choisissons $\alpha \in R$ au-dessus de ζ . Le choix de α n'importe pas. Les revêtements pointés (R, α) de (X, ζ) sont d'ailleurs tous isomorphes. On prend un point base b de la forme $t(s)$ ($s \in S$). Puisque, dans \mathbb{G}_m , le torseur des $\frac{1}{dd'}\mathbb{Z}(1)$ -chemins de b à α est trivial, le $V_1\langle dd' \rangle$ -torseur Q_α des $V_1\langle dd' \rangle$ -chemins de b à α est défini.

Si on pousse ce torseur Q_α par $V_1\langle dd' \rangle \rightarrow U_{s1}\langle dd' \rangle$, on obtient le $U_{s1}\langle dd' \rangle$ -torseur des chemins, sur R_s , de b à α . Le choix de b n'importe pas. Prenons $b = t(s)$. L'isomorphisme α_s de X avec R_s (17.4) identifie alors le torseur obtenu au $U_1\langle dd' \rangle$ -torseur $(T_{dd'})_{\alpha_s^{-1}(\alpha)}$ des $U_1\langle dd' \rangle$ -chemins de $(0,1)$ à $\alpha_s^{-1}(\alpha)$. Lorsque s parcourt S , $\alpha_s^{-1}(\alpha)$ parcourt toutes les racines $(d')^{i\text{èmes}}$ de ζ .

Si on pousse Q_α par $V_1\langle dd \rangle \rightarrow U_1\langle d \rangle$, on obtient le $U_1\langle d \rangle$ -torseur des chemins de $(0,1)$ à ζ . Appliquant 17.8, on obtient l'isomorphisme (17.1.2).

17.10. Construisons 17.1.2 pour $\zeta = 1$. On choisit encore α au-dessus de ζ . Cette fois, $\alpha \in S$ ne peut pas servir de point base. On le remplace par le vecteur tangent $(\alpha, -\alpha)$ en α . Son image dans X est le vecteur tangent $(1, -d')$ en 1.

Soit encore Q_α le $V_1\langle dd' \rangle$ -torseur des chemins de b à $(\alpha, -\alpha)$. Le poussant par $V_1\langle dd' \rangle \rightarrow U_{s1}\langle dd' \rangle$, on obtient: (a) si $s \neq \alpha$, le torseur $(T_{dd'})_{\alpha_s^{-1}(\alpha)}$ comme en 17.9; (b) si $s = \alpha$, le $U_1\langle dd' \rangle$ -torseur des chemins de $(0,1)$ à $(1, -1)$. A nouveau, lorsque s parcourt S , $\alpha_s^{-1}(\alpha)$ parcourt toutes les racines $d'^{\text{èmes}}$ de $\zeta = 1$.

Si on pousse Q_α par $V_1\langle dd' \rangle \rightarrow U_1\langle d \rangle$, on obtient le $U_1\langle d \rangle$ -torseur des chemins de $(0,1)$ à $(1, -d')$. Ce torseur, et celui des chemins de $(0,1)$ à $(1, -1)$, ne diffèrent que par l'image par μ_1 du torseur de Kummer $K(d')$. Ils ont donc même image par $(16.22.2)_{d,n}$ pour $n \geq 2$, et on conclut comme en 17.9.

§18. Le torseur $P_{d,k} + (-1)^k \epsilon P_{d,k}$ est de torsion: voie géométrique.

Le but du paragraphe est de montrer, par voie géométrique, que les torseurs $P_{d,k}$ de 16.23 vérifient 3.14.

18.1. L'automorphisme $z \mapsto 1/z$ de $X = \mathbb{G}_m - \{1\}$ envoie le point base à l'infini (0 vers 1), i.e. le vecteur tangent 1 en 0 (16.6) sur (∞ vers 1). Il définit

$$(18.1.1) \quad \eta : U(0 \text{ vers } 1) \longrightarrow U(\infty \text{ vers } 1).$$

Sur le π_1 de \mathbb{G}_m , $z \mapsto 1/z$ induit $t \mapsto -t$. Le morphisme (18.1.1) donne donc lieu à un diagramme commutatif

(18.1.2)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & U_1(0 \text{ vers } 1) & \longrightarrow & U(0 \text{ vers } 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \\ & & \eta_1 \downarrow & & \eta \downarrow & & \downarrow -1 \\ 1 & \longrightarrow & U_1(\infty \text{ vers } 1) & \longrightarrow & U(\infty \text{ vers } 1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}(1) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Sur \mathbb{G}_m , il existe un chemin motivique de (0 vers 1) à (∞ vers 1): passer par 1 et appliquer deux fois 15.51. La formule (16.11.3) fournit

$$(18.1.3) \quad U_1(0 \text{ vers } 1) \xrightarrow{\sim} U_1(\infty \text{ vers } 1).$$

Par (18.1.3), le morphisme η_1 de (18.1.2) s'identifie à un automorphisme encore noté η_1 de $U_1 := U(0 \text{ vers } 1)$. Calculons-le.

18.2 PROPOSITION. *Via l'isomorphisme (16.16.1) de $U_1 \otimes \mathbb{Q}$ avec le produit des $\mathbb{Q}(n)$ ($n \geq 1$), η_1 est $(x_n) \mapsto ((-1)^{n-1} x_n)$.*

18.3 LEMME. *L'automorphisme η_1 de U_1 préserve $\mu_1 : \mathbb{Z}(1) \rightarrow U_1$.*

PREUVE. Le morphisme μ_1 de $\mathbb{Z}(1)$ dans $U_1(0 \text{ vers } 1)$ est la monodromie autour de 1 , ramenée dans $U_1(0 \text{ vers } 1)$ par le chemin motivique, dans \mathbb{G}_m , de (0 vers 1) à 1 . Par $z \mapsto 1/z$, le morphisme μ_1 est donc transformé en la monodromie autour de 1 , ramenée dans $U_1(\infty \text{ vers } 1)$ par le chemin motivique, dans \mathbb{G}_m , de (∞ vers 1) à 1 . Le composé de ces chemins, de (∞ vers 1) à (0 vers 1) ramène donc μ_1 (dans $U_1(0 \text{ vers } 1)$) en le transformé de μ_1 par $z \mapsto z^{-1}$. Il définit aussi l'isomorphisme de $U_1(\infty \text{ vers } 1)$ avec $U_1(0 \text{ vers } 1)$, et ceci vérifie 18.3.

PREUVE DE 18.2. Par 18.1.2, η_1 transforme l'action de $\mathbb{Z}(1)$ sur U_1 en son opposée. Par 18.3, elle respecte μ_d et ceci force 18.2.

18.4. Le torseur $P_{d,k}$ a été défini comme déduit d'un $U_1(d)$ -torseur T_1 sur μ_d en poussant par un morphisme $(16.22.2)_{d,k}$ de $U_1(d)$ dans $\mathbb{Z}(k)$. L'automorphisme η_1 transforme T_1 en $\eta_1 T_1$: un nouveau torseur sur μ_d . Prenant son image inverse par $\epsilon : z \mapsto z^{-1} : \mu_d \rightarrow \mu_d$, on obtient $\epsilon \eta_1 T_1$. D'après 18.2, on a

18.5 LEMME. Le $\mathbb{Z}(k)$ -torseur $P_{d,k} + (-1)^k \epsilon P_{d,k}$ est l'image par $(16.22.2)_{d,k}$ du $U_1(d)$ -torseur $T_1 - \epsilon \eta_1 T_1$.

18.6. Dans la suite de ce paragraphe, nous négligeons les structures entières. Pour alléger les notations, nous omettrons le $\otimes \mathbb{Q}$ qui indique l'omission d'une structure entière. Avec cette convention, il s'agit de prouver que les $P_{d,k} + (-1)^k \epsilon P_{d,k}$ sont triviaux ou, ce qui revient au même, que $T_1 - \epsilon \eta_1 T_1$ est trivial (16.16.1, 18.5).

18.7. Considérons les points base suivant sur X : les points base à l'infini (a vers b) pour $a, b \in \{0, 1, \infty\}$ et $\zeta \in \mu_d$, $\zeta \neq 1$. Pour b_1, b_2 deux de ces points base, le $\mathbb{Q}(1)$ -torseur des chemins, dans \mathbb{G}_m , de b_1 à b_2 est trivial. Appelons "chemin canonique" sa trivialisation. Ceci permet

- (a) Comme en 18.1 d'obtenir un système transitif d'isomorphismes entre ces $U_1(b)$ -tous identifiés à U_1 .
- (b) De définir le torseur Q_{b_2, b_1} des $U_1(b_1)$ -chemins de b_1 à b_2 (13.15).

Sur ces torseurs, l'action droite de $U_1 = U(b_1)$ coïncide avec l'action gauche de $U_1 = U(b_2)$. La composition des chemins fournit un isomorphisme de U_1 -torseurs

$$(18.7.1) \quad Q_{b_3, b_1} = Q_{b_3, b_1} + Q_{b_2, b_1}.$$

Pour $a, b, c = 0, 1, \infty$, dans un ordre quelconque, le $\mathbb{Q}(1)$ -torseur des chemins, dans $T_a - \{0\}$, de $(a$ vers b) à $(a$ vers $c)$ est trivial. Ceci et 18.7.1 permet d'identifier $Q_{a \text{ vers } b, b_1}$ et $Q_{a \text{ vers } c, b_1}$. On notera ce torseur simplement Q_{a, b_1} . De même pour $Q_{b_2, a \text{ vers } b}$, noté $Q_{b_2, a}$.

18.8 LEMME. Le torseur $Q_{\zeta, \infty}$ est $\epsilon \eta_1 T_1$.

En effet, $z \mapsto 1/z$ envoie ∞ vers 0 , ζ sur ζ^{-1} , agit par η_1 sur U_1 et définit un isomorphisme de $\eta_1 Q_{\zeta, \infty}$ avec $(T_1)_{\zeta^{-1}}$

De (18.7.1) on déduit donc

18.9 LEMME. *Le U_1 -torseur $T_1 - \epsilon\eta_1 T_1$ sur μ_d est l'image inverse sur μ_d du U_1 -torseur sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ $Q_{\infty,0}$.*

Ceci nous ramène à prouver le théorème, où μ_d s'apparaît plus:

18.10 THÉORÈME. *Le torseur $Q_{\infty,0}$ est trivial.*

Mise en garde: le théorème affirme seulement l'existence d'un $U \otimes \mathbb{Q}$ -chemin motivique de (0 vers 1) à (∞ vers 1): cf. 18.6.

18.11 CONSTRUCTION. *On construit un morphisme de schémas motiviques*

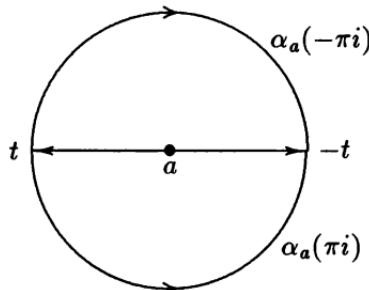
$$h : \mathbb{Q}(1) - \{0\} \longrightarrow Q_{\infty,0}.$$

Dans 18.11, $Q(1) - \{0\}$ est le schéma motivique tel que pour tout foncteur fibre ω sur un schéma S , son image par ω est la droite $\omega Q(1)$ sur S , moins la section 0.

Pour construire 18.11, nous utiliserons le langage 5.11: on choisira $x \in Q(1) - \{0\}$, et on construira $h(x) \in Q_{\infty,0}$. Cela signifie: pour tout foncteur fibre ω sur un schéma S , et pour tout point x de $\omega(Q(1) - \{0\}) = \omega(Q(1)) - \{0\}$ sur S , la construction fournit un point $h(x)$ sur S de $\omega(Q_{\infty,0})$, et on applique 5.11.

18.12. Soit donc $x \neq 0$ dans $Q(1)$. Pour $a = 0, 1$ ou ∞ et t un vecteur tangent $\neq 0$ en a , le $Q(1)$ -torseur des chemin, dans l'espace tangent épointé, de t à $-t$ est trivial. On posera $\alpha_a(x) := (\text{la trivialisation canonique}) + x$.

EXEMPLE. En réalisation de Betti, et pour $x = \pm\pi i \in \mathbb{Q}(1)_B$, $\alpha_a(x)$ est le chemin entier suivant:



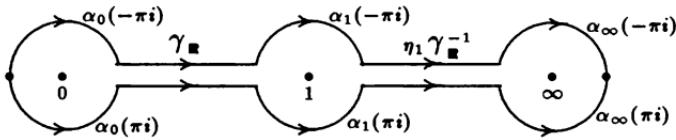
L'automorphisme $z \mapsto 1/z$ de X induit un isomorphisme η_1 -équivariant de $Q_{0,1}$ avec $Q_{\infty,1}$. On le note encore η_1 . On définit $h(x)$ par la

18.13 PROPOSITION. Soit $x \neq 0$ dans $\mathbf{Q}(1)$. Localement $fppf$, il existe un chemin $\gamma \in Q_{1,0}$ de $(0$ vers $1)$ à $(1$ vers $0)$ pour lequel les deux U -chemins suivant de $(0$ vers $\infty)$ à $(\infty$ vers $0)$ coïncident:

$$(18.13.1) \quad \alpha_\infty(x)\eta_1\gamma^{-1}\alpha_1(x)\gamma\alpha_0(x) = \alpha_\infty(-x)\eta_1\gamma^{-1}\alpha_1(-x)\gamma\alpha_0(-x).$$

Le chemin $h(x) := \eta\gamma^{-1} \cdot \gamma \in Q_{\infty,0}$ est indépendant du choix de γ vérifiant 18.13.1.

18.14 REMARQUE. En réalisation de Betti et pour $x = \pi i \in \mathbf{Q}(1)_B$, on peut prendre pour γ le chemin réel γ_R de $(0$ vers $1)$ à $(1$ vers $0)$. La relation (18.13.1) exprime l'homotopie des chemins suivants dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$



On pourrait en déduire l'assertion d'existence de γ dans 18.13.

18.15 REMARQUE. Il est clair sur 18.13.1 qu'on aura $h(x) = -h(-x)$.

18.16 PREUVE DE 18.13. Deux foncteurs fibres étant localement isomorphes, il suffit de prouver 18.13 en réalisation de de Rham. En réalisation de de Rham, $\pi_1(X, b)_{\text{DR}}$, $U(b)_{\text{DR}}$, $U_1(b)_{\text{DR}}$ sont indépendants du point base et le $U(b_1)_{\text{DR}}$ -torseur des chemins de b_1 à b_2 est trivialisé. De même pour le $U_1(b_1)_{\text{DR}}$ -torseur $(Q_{b_2, b_1})_{\text{DR}}$, lorsque ce dernier est défini.

Dans $\text{Lie } U_{\text{DR}}$, notons e_0, e_1 et e_∞ les images par μ_0, μ_1 et μ_∞ de $1 \in Q(1)_{\text{DR}}$. On a

$$e_0 + e_1 + e_\infty = 0.$$

Posons $e_1^n = (\text{ad } e_0)^{n-1}(e_1)$ ($n \geq 1$). La pro-algèbre de Lie $\text{Lie } U_{\text{DR}}$ a pour base e_0 et les e_1^n , et $\text{Lie } U_1{}_{\text{DR}}$ a pour base les e_1^n . Un élément γ de $U_1{}_{\text{DR}}$ s'écrit

$$\gamma = \exp \left(\sum \gamma_n e_1^n \right).$$

On lui attache la série génératrice

$$\gamma(t) = \sum \gamma_n t^n.$$

La série génératrice de $\exp(xe_0)\gamma \exp(-xe_0)$ est $\exp(xt)\gamma(t)$.

Soit $\gamma \in (Q_{1,0})_{\text{DR}} = U_{1 \text{ DR}}$, $\gamma = \exp(\sum \gamma_n t^n)$, et explicitons (18.13.1).

On a

$$\alpha_a(x) = \exp(xe_a),$$

$$\eta_1 \gamma^{-1} = \exp(-\sum (-1)^{n-1} \gamma_n e_1^n)$$

$$\eta_1 \gamma^{-1} \alpha_1(x) \gamma = \exp(xe_1 + 2 \sum \gamma_{2n} e_1^{2n})$$

$$\eta_1 \gamma^{-1} \alpha_1(-x) \gamma = \exp(-xe_1 + 2 \sum \gamma_{2n} e_1^{2n})$$

et (18.13.1) se récrit

(18.16.1)

$$\begin{aligned} \exp(xe_\infty) \exp(xe_1 + 2 \sum \gamma_{2n} e_1^{2n}) \exp(xe_0) = \\ \exp(-xe_\infty) \exp(-xe_1 + 2 \sum \gamma_{2n} e_1^{2n}) \exp(-xe_0). \end{aligned}$$

On voit que l'équation obtenue ne porte que sur les coordonnées paires γ_{2n} de γ .

On a $-xe_\infty = xe_0 + xe_1$. Appliquant Bourbaki Lie II §6 prop. 5, et le fait que tout polynôme de Lie en e_0 et e_1 , homogène de degré ≥ 2 en e_1 est nul, on trouve

$$\exp(-xe_\infty) = \exp\left(\sum \frac{1}{(n+1)!} \text{ad}(xe_0)^n(xe_1)\right) \cdot \exp(xe_0).$$

Le second membre de (18.16.1) est donc

$$\exp\left(\frac{\exp(\text{ad } xe_0)-1}{\text{ad } xe_0}(xe_1)\right) \cdot \exp(xe_0) \exp(-xe_1 + 2 \sum \gamma_{2n} e_1^{2n}) \exp(-xe_0),$$

de série génératrice

$$e^{xt} - 1 + e^{xt}(-xt + 2 \sum \gamma_{2n} t^{2n}).$$

Remplaçant x par $-x$, on obtient de même la série génératrice du premier membre.

Posons $S = 2 \sum \gamma_{2n} t^{2n}$. L'équation (18.16.1) donne,

$$e^{-xt} - 1 + e^{-xt}(xt + S) = e^{xt} - 1 + e^{xt}(-xt + S),$$

$$S(e^{xt} - e^{-xt}) = -(e^{xt} - e^{-xt}) + xt(e^{xt} + e^{-xt}),$$

$$S = -1 + xt \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{e^{xt} - e^{-xt}}.$$

Le membre de droite est une fonction paire de t , nulle en $t = 0$ et (18.16.1) équivaut à

$$\begin{aligned} 2\gamma_{2n} &= \text{coefficient de } t^{2n} \text{ dans } xt \cdot \coth(xt) \quad (n \geq 1) \\ &= b_{2n}(2x)^{2n}/(2n)! . \end{aligned}$$

Ceci prouve l'existence de γ . Enfin,

$$(18.16.2) \quad \eta_1 \gamma^{-1} \gamma = \exp(2 \sum \gamma_{2i} e_1^{2i}) = \exp(2 \sum b_{2n}(2x)^{2n}/(2n)!)$$

est indépendant du choix de γ .

18.17 REMARQUE. Le chemin réel γ_R de (0 vers 1) à (1 vers 0) vérifie 18.13.1 pour $x = \pm\pi i$ (18.14). Son image $\text{comp}_{DR,B}(\gamma_R)$ dans $Q_{1,0} \otimes \mathbb{C} \simeq U_{1,0} \otimes \mathbb{C}$ a donc des coordonnées γ_{Ri} vérifiant

$$2\gamma_{R2n} = b_{2n}(2\pi i)^n/2n! .$$

En 19.4, pour vérifier l'égalité des torseurs 3.1 et 16.18, nous prouverons que

$$\gamma_{Rn} = \zeta(n) .$$

Le calcul 18.16 fournit donc une nouvelle preuve de la formule d'Euler pour $\zeta(2n)$, dans laquelle les nombres de Bernoulli apparaissent comme liés aux coefficients de la loi de Campbell-Hausdorff.

18.18 PROPOSITION. *Le morphisme de schémas motiviques 18.11 de $Q(1) - \{0\}$ dans $Q_{\infty,0}$ se prolonge en un morphisme, encore noté h , de $Q(1)$ dans $Q_{\infty,0}$.*

PREUVE. Il suffit de le vérifier après application du foncteur fibre “DR”, et c'est clair sur 18.16.2.

18.19 PREUVE DE 18.10. $Q_{\infty,0}$ est trivialisé par $h(0)$, défini en 18.18.

§19. Comparaison de $\mathbb{Z}(h)$ -torseurs des paragraphe 3 et 16.

19.1. Dans ce paragraphe, nous noterons $P_{d,k}^0$ les torseurs sous $\mathbb{Z}(k)$ construits au paragraphe 3, et $P_{d,k}$ ceux construits au paragraphe 16 par voie géométrique.

Si $k = 1$, le torseur $P_{d,k}^0$ n'a été défini que sur $\mu'_d := \mu_d[1/d] - \{1\}$, tandis que $P_{d,k}$ a été défini sur μ_d tout entier, mais est intéressant en le point 1, où il se réduit au torseur trivial. Sur μ'_d , $P_{d,1}^0$ et $P_{d,1}$ sont l'un et l'autre isomorphes au torseur de Kummer $K(1 - \zeta)$ (ζ dans μ'_d) (3.12 et 16.26). Pour simplifier les notations, nous supposerons dans la suite de ce paragraphe que $k \geq 2$. Notre but est de prouver que $P_{d,k}^0$ et $P_{d,k}$ sont isomorphes. C'est l'assertion (16.24) et le cas particulier $d = 1$ est (16.20). La même preuve s'appliquerait pour $k = 1$, quitte à remplacer partout μ_d par μ'_d .

Au paragraphe 3, en même temps que $P_{d,k}^0$, nous avons défini une trivialisation u_B du $\mathbb{Z}(k)_B$ -torseur qui en est la réalisation de Betti. Dans ce paragraphe, nous la noterons u_B^0 .

Les torseurs $P_{d,k}$ ont été définis comme image par (16.22.2)_{d,k} d'un $U_1\langle d \rangle$ -torseur P_d . En 19.2 nous définirons une trivialisation v_B du $U_1\langle d \rangle_{\mathbb{Z}}$ -torseur qui en est la réalisation de Betti. Nous prouverons ensuite l'existence d'un isomorphisme

$$(19.1.1) \quad P_{d,k}^0 \xrightarrow{\sim} P_{d,k}$$

qui envoie u_B^0 sur l'image dans $(P_{d,k})_B$ de v_B . Voici ce qu'il s'agit de prouver.

(A) En réalisation de Rham, un $\mathbb{Z}(k)$ ou un $U_1\langle d \rangle$ -torseur est automatiquement trivialisé. Via $\text{comp}_{B,\text{DR}}$, u_B^0 devient la donnée, pour chaque $\zeta \in \mu_d$, d'un nombre $u_{B,\zeta}^0 \in \mathbb{Z}(k)_{\text{DR}} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$. De même, v_B devient la donnée, pour chaque $\zeta \in \mu_d$, de $v_{B,\zeta} \in U_1 \otimes \mathbb{C}$. Il faut vérifier que l'image par (16.22.2)_{d,k} de $v_{B,\zeta}$ est $u_{B,\zeta}^0$.

(B) Soit u_B l'image de v_B dans $P_{d,k}B$. Il faut vérifier que l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell(k)(\mathbb{C})$ -torseur sur $\mu_d(\mathbb{C})$, $(P_{d,k}^0)_\ell \rightarrow (P_{d,k})_\ell$, qui envoie $\text{comp}_{\ell,B}(u_B^0)$ sur $\text{comp}_{\ell,B}(u_B)$, est $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -équivariant.

(C) Identifions la réalisation de Rham de $P_{d,k}^0$ (resp. P_d) au torseur trivial – sur μ_d – sous $\mathbb{Z}(k)_{\text{DR}}$ (resp. $U_1 \otimes \mathbb{C}$). L'inverse ϕ_p^{-1} du Frobenius cristallin de $P_{d,k}^0$ (resp. P_d) est déterminé par sa valeur en 0. Il s'agit de montrer que (16.22.2)_{d,k} envoie $\phi_p^{-1}(0)$ pour P_d dans $\phi_p^{-1}(0)$ pour $P_{d,k}^0$.

Les relations de distribution 3.13.1 ont été prouvées tant pour $P_{d,k}^0$ que pour $P_{d,k}$ (§17). Elles impliquent qu'il suffit de vérifier l'isomorphie de $P_{d,k}^0$ et $P_{d,k}$ sur μ_d' , pour l'avoir sur μ_d tout entier. Nous utiliserons cette remarque en ne prouvant (C) que sur μ_d' . A cela près, les calculs du présent paragraphe sont indépendants de ceux du paragraphe 17. Le lecteur pourra noter que la définition (3.2.6, 3.2.7) du Frobenius cristallin de $P_{d,k}^0$ en $1 \in \mu_d$ est artificielle, concoctée pour rendre vraie la relation de distribution (3.13.1). Pour $p \neq 2$, elle revient aussi à définir $P_{d,k}^0$ en 1 pour avoir un isomorphisme de $\mathbb{Z}(k)$ -torseurs sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/2])$:

$$(1 - 2^{k-1})P_{1,k} \simeq (P_{2,k} \text{ en } -1 \in \mu_2).$$

19.2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, supposé ne pas être réel ≥ 1 . Dans $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* - \{0\}$ appellenos *droit chemin* de $(0, z)$ (vecteur tangent en 0) à z le chemin suivant. Dans le langage 15.9: aller de $(0, z)$ à $(0, \epsilon z)$, ϵ réel > 0 , par valeurs $(0, tz)$ avec t réel ($\epsilon \leq t \leq 1$), sauter de $(0, \epsilon z)$ à ϵz , et aller de ϵz à z par valeurs tz avec t réel ($\epsilon \leq t \leq 1$).

Supposons que z soit une racine $d^{\text{ème}}$ de 1, $z \neq 1$. On dispose alors d'un $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(1)$ -chemin motivique (dans l'espace tangent éponté) de $(0, 1)$ à $(0, z)$. Le composant avec le droit chemin de $(0, z)$ à z , on en déduit, en réalisation de Betti, un $U(d)\mathbb{Z}$ -chemin γ_z de $(0, 1)$ à z . C'est en fait un $U_1(d)\mathbb{Z}$ -chemin: il s'envoie sur le $\frac{1}{d}\mathbb{Z}(1)$ -chemin canonique, sur \mathbb{G}_m , de $(0, 1)$ à z . Pour z le vecteur tangent -1 en 1, on dispose de même du chemin réel (16.10) de $(0, 1)$ à $(1, -1)$. On le note γ_1 . Ces chemins constituent la trivialisation promise en 19.1, v_B , de P_d .

19.3. Vérifions 19.1(A). Nous prendrons sur $U_{\text{DR}}^{(N)}$ les coordonnées u et v_i ($1 \leq i \leq N$) suivantes:

$$(u, (v_i)) \longmapsto \exp \left(\sum v_i (\text{ad } e_0)^{i-1}(e_1) \right) \exp(ue_0)$$

où e_0 et e_1 sont les images par μ_0 et μ_1 de $1 \in \mathbb{Q}(1)_{\text{DR}}$.

19.3.1 LEMME. *Le droit chemin de $(0, z)$ à z a pour image dans $U_{\text{DR}}^{(N)}(\mathbb{C})$ le point de coordonnées $u = 0$ et $v_i = -\ell_i(z)$.*

PREUVE. L'image $I_{z_1}^{z_2}$ d'un chemin de z_1 à z_2 s'obtient en résolvant le long du chemin

$$dI(t) \cdot I(t)^{-1} = \frac{dt}{t} e_0 + \frac{dt}{t-1} e_1 :$$

on prend la condition initiale $I(z_1) = \text{identité}$, et on évalue en z_2 .
L'équation à résoudre est

$$\begin{aligned} du &= \frac{dt}{t} \\ dv_1 &= \frac{dt}{t-1} \\ dv_i &= v_{i-1} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Pour z_1 un vecteur tangent τ en 0, la condition initiale est à remplacer par

$$I(t) \exp(-\log(t/\tau)e_0) \longrightarrow \text{identité}$$

pour $t \rightarrow 0$. Pour le droit chemin de $(0, z)$ à z , on obtient

$$\begin{aligned} u &= \log(t/z) \\ v_i &= -\ell_i(t). \end{aligned}$$

19.4 LEMME. *Le chemin réel de $(0, 1)$ à $(1, -1)$ a pour image dans $U_{\text{DR}}^{(N)}(\mathbb{C})$ le point de coordonnées $u = 0$, $v_1 = 0$, $v_i = \ell_i(1) = \zeta(i)$ pour $i \geq 2$.*

PREUVE. Il s'agit de considérer $I(t)$ défini par

$$\begin{aligned} u &= \log t \\ v_i &= -\ell_i(t) \end{aligned}$$

et de prendre la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$\exp(-\log \epsilon \cdot e_1) I(1 - \epsilon).$$

La multiplication par $\exp(-\log \epsilon \cdot e_1)$ a pour effet de remplacer v_1 par 0 et 19.4 en résulte.

19.5. Soit ζ une racine $d^{\text{ième}}$ de 1 autre que 1. L'image par $(16.22.2)_{d,k}$ du point de $U_1(\mathbb{C})$ de coordonnées $(-\ell_i(\zeta))$ est $(3.11.1)$. De même, l'image par $(16.17.1)_k$ du point de coordonnées $(0, -\ell_i(1))$ pour $i \geq 2$ est $(3.1.1)_k$. Ceci vérifie 19.1(A).

19.6. Vérifions 19.1(C). Plaçons-nous sur \mathbb{Z}_p . L'image directe par Frobenius

$$F_* : \pi_1(X, (0, 1))_{\text{DR}} \longrightarrow \pi_1(X, (0, 1))_{\text{DR}}$$

induit sur l'algèbre de Lie du quotient U_{DR} le morphisme F_* tel que

$$e_0 \longmapsto p e_0 , \quad e_1 \longmapsto p e_1 .$$

C'est l'inverse du Frobenius cristallin.

Calculons la structure cristalline du U_{DR} -torseur P_{DR} des U_{DR} -chemin de $(0,1)$ à $x \in X$. Sur le complété formel de \mathbb{P}^1 le long de $\mathbb{P}^1 - \{1\}$ en caractéristique p , le Frobenius admet le relèvement $\tilde{F} : x \mapsto x^p$. La structure cristalline est déterminée par

$$(19.6.1) \quad F_* : P_{\text{DR}} \longrightarrow \tilde{F}^* P_{\text{DR}} .$$

En termes de l'isomorphisme $P_{\text{DR}} = \text{torseur trivial } U_{\text{DR}}$, le morphisme (19.6.1) est de la forme $g \mapsto v \cdot F_*(g)$.

Quand on pousse par $U_{\text{DR}} \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}_m, (0,1))_{\text{DR}}$, on obtient le torseur de Kummer, avec $F_*(e) = e$. On a donc ici $F_*(e) \in U_{1\text{DR}} \subset P_{\text{DR}} = U_{\text{DR}}$.

Soit $v = F_*(e)$. Que F_* est horizontal s'écrit

$$(19.6.2) \quad F_*(e^{-1} \nabla e) = v^{-1} \nabla v .$$

A gauche, $e^{-1} \nabla e$ est $-\alpha = -(\frac{dt}{t} e_0 + \frac{dt}{t-1} e_1)$ et F_* est l'image par $e_0 \mapsto p e_0$, $e_1 \mapsto p e_1$. A droite, la connexion est celle de $F^* P_{\text{DR}} \sim U_{\text{DR}}$, avec $\nabla e = -\tilde{F}^* \alpha$. En coordonnées: $v = \exp(\sum v_i e_0^{i-1}(e_1))$, (19.6.2) s'écrit

$$-\frac{dt}{t} \cdot p e_0 - \frac{dt}{t-1} \cdot p e_1 = \tilde{F}^*(-\alpha) - [\sum v_i \text{ad } e_0^{i-1}(e_1), \tilde{F}^*(-\alpha)] + dv .$$

Développant, cela donne

$$\begin{aligned} dv_1 &= \tilde{F}^*\left(\frac{dt}{t-1}\right) - p \frac{dt}{t-1} \\ dv_i &= p v_{i-1} \frac{dt}{t} \quad (i > 1) . \end{aligned}$$

Puisque le point base est $(0,1)$, on cherche la solution nulle en $t = 0$. Le développement en série formelle de $v_i(t)$ est donc

$$(19.6.3) \quad v_i(t) = p^i \ell_i^{(p)}(t) .$$

19.7. Puisque \tilde{F} respecte μ'_d , on obtient la structure cristalline du torseur des U_{DR} chemins de $(0,1)$ à $\zeta \in \mu'_d$ simplement en se restreignant à μ'_d . Appliquant (16.22.2)_{d,k} à (19.6.3), on obtient (3.11.4)_{d,k} comme requis.

19.8. Soient N et M deux entiers. Soit $R_{N,M}$ le revêtement de X dont la fibre en un point géométrique z est l'ensemble des systèmes $(u, (v_\zeta))$ avec

$$(19.8.1) \quad \begin{aligned} u^N &= z \\ v_\zeta^M &= 1 - \zeta u \quad (\zeta \in \mu_N) \end{aligned}$$

Le revêtement $R_{N,M}(\mathbb{C})$ de $X(\mathbb{C})$ est donc celui sur lequel $z^{1/N}$ et les $(1 - \zeta z^{1/N})^{1/M}$ sont définis.

Il sera plus commode d'indexer les v_ζ par la racine $N^{\text{ième}} \zeta u$ de z . Avec cette notation, 19.8.1 devient

$$(19.8.2) \quad \begin{aligned} u^N &= z \\ v(x)^M &= 1 - x \quad (x^N = z). \end{aligned}$$

Les revêtements $R_{N,M}$ forment un système projectif, pour N et M donnés par divisibilité. Les morphismes de transition envoient une solution $(u(NN'), v(NN', MM')(x))$ de (19.8.2) sur

$$(19.8.3) \quad \begin{aligned} u(N) &:= u(NN')^{N'} \\ v(N, M)(x) &= \prod_{y^{N'}=x} v(NN', MM')(y)^{M'}. \end{aligned}$$

On pose $R_N := R_{N,N}$.

19.9 PROPOSITION. Soit R un revêtement fini connexe de $X(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe un revêtement X' de X , induit par un revêtement connexe de $\mathbb{C}^* \supset X(\mathbb{C})$, tel que le revêtement R' de X' image inverse de R soit somme de revêtements abéliens. Alors, R est dominé par un R_N .

PREUVE. Le revêtement X' est $z \mapsto z^A : \mathbb{C}^* - \mu_A \rightarrow \mathbb{C}^* - \{1\}$. Si on remplace A par un multiple, R' sera non ramifié en 0, et ses composantes sont dominées par des revêtements kummériens de $\mathbb{C} - \mu_A$, obtenus en extrayant les racines $B^{\text{ièmes}}$ des $1 - \zeta u$ ($\zeta^A = 1$). Le revêtement R est alors dominé par $R_{A,B}$, et par R_N pour N multiple de A de B .

19.10. Les revêtements $R_{N,M}$ sont munis d'un point marqué au-dessus de $(0, 1) : R_{N,M} \rightarrow X$ est le composé de (a) $z \mapsto z^N : \mathbb{G}_m - \mu_N \rightarrow \mathbb{G}_m - \{1\} = X$, et (b) un revêtement induit par un revêtement de $\mathbb{G}_a - \mu_N$, de fibre en 0 les systèmes de racines $M^{\text{ièmes}}$ des $1 - \zeta \cdot 0$. On relève $(0, 1)$ en le vecteur

tangent 1 en 0 de $\mathbf{G}_a - \mu_N \supset \mathbf{G}_m - \mu_N$, et $0 \in \mathbf{G}_a - \mu_N$ en le système des racines $M^{\text{ièmes}} 1$ des $1 - \zeta \cdot 0$. Les morphismes de transition du système projectif des $R_{N,M}$ envoient point marqué sur point marqué .

19.11. Pour G un groupe, faisons agir G par multiplication à gauche sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}/M[G]$ et définissons

$$\Gamma_{G,M} := G \ltimes \mathbb{Z}/M[G](1) .$$

Pour M parcourant les entiers ordonnés par divisibilité , les $\Gamma_{G,M}$ forment un système projectif. Il est fonctoriel en G . Pour N un entier, posons

$$\Gamma_{N,M} := \Gamma_{\mathbb{Z}/N(1),M} .$$

Ces groupes forment un système projectif, pour N et M ordonnés par divisibilité . Notation: on note $\sum a_g \delta_g$ un élément de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}/M[G]$. De même pour $\mathbb{Z}/M[G](1)$, avec cette fois $a_g \in \mathbb{Z}/M(1)$. On définit $\mu_0 : \mathbb{Z}/N(1) \rightarrow \Gamma_{N,M}$ comme inclusion du premier facteur $\mathbb{Z}/N(1)$ et $\mu_1 : \mathbb{Z}/M(1) \rightarrow \Gamma_{N,M}$ par $a \mapsto a\delta_0$.

Il existe une unique action à droite de $\Gamma_{N,M}$ sur $R_{N,M}$ pour laquelle $\mu_0(\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}/N(1) = \mu_N$) agit sur $(u, v(x))$ en multipliant u par α , et $\mu_1(\beta)$ ($\beta \in \mathbb{Z}/M(1) = \mu_M$) agit en multipliant $v(u)$ par β ; les autres coordonnées sont inchangées. L'élément $\sum a_\zeta \delta_\zeta$ de $\mathbb{Z}/M[\mathbb{Z}/N(1)](1)$ agit en multipliant $v(x)$ par $a_x/u \in \mathbb{Z}/M(1) = \mu_M$. Pour N et M ordonnés par divisibilité , et les $R_{N,M}$ forment un système projectif de torseurs sous le système projectif des $\Gamma_{N,M}$.

Posons $\Gamma_N := \Gamma_{N,N}$:

$$\Gamma_N = \mathbb{Z}/N(1) \ltimes \Gamma_{1N} \quad \text{avec}$$

$$\Gamma_{1N} := \mathbb{Z}/N[\mathbb{Z}/N(1)](1) .$$

La limite projective R^\wedge des R_N est un torseur profini sous la limite projective Γ^\wedge des Γ_N .

19.12. Plaçons-nous sur \mathbf{C} . D'après 19.9, Γ^\wedge est le complété profini du quotient Γ de $\pi_1(X(\mathbf{C}), (0, 1))$ défini en 16.14:

$$\Gamma = \pi_1/\text{Ker}(\pi_1 \rightarrow \mathbb{Z}(1)_B)' .$$

Soit

$$(19.12.1)_{N,M} \quad \varphi_{N,M} : \Gamma \longrightarrow \Gamma_{N,M}$$

le système projectif des morphismes tels que $R_{N,M}(\mathbb{C})$ se déduise du Γ -torseur fondamental en poussant $\varphi_{N,M}$.

19.13 LEMME. *Les $\varphi_{N,M}$ envoient les μ_i de (16.14) sur ceux de 19.11 ($i = 0, 1$).*

PREUVE. Pour $a = 2\pi i \in \mathbb{Z}(1)_B$, $\mu_0(a)$ donne la monodromie autour de 0. Elle envoie $(u, v(x))$ sur $(\exp(2\pi i/N)u, v(x))$. De même, $\mu_1(a)$ donne la monodromie autour de 1, joint à 0 par le chemin réel de $(0,1)$ à $(1,-1)$. Par ce chemin, le point marqué de $R_{N,M}$ au-dessus de $(0,1)$ est transformé en un vecteur tangent en un point où la racine $N^{\text{ième}} u$ de $z = 1$ est 1. Cette monodromie multiplie $v(u)$ par $\exp(2\pi i a/M)$ et respecte les autres coordonnées.

19.14 COROLLAIRE. *Les $\varphi_{N,M}$ sont les morphismes évidents de $\mathbb{Z}(1)_B \ltimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B](1)$ dans $\mathbb{Z}/N(1) \ltimes \mathbb{Z}/M[\mathbb{Z}/N(1)](1)$.*

Par passage à la limite projective, 19.14 identifie le complété profini de $\Gamma = \mathbb{Z}(1)_B \ltimes \mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B](1)$ avec la limite projective Γ^\wedge des Γ_N :

$$\Gamma^\wedge = \widehat{\mathbb{Z}}(1) \ltimes \widehat{\mathbb{Z}}[\widehat{\mathbb{Z}}(1)](1),$$

où l'algèbre de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}[\widehat{\mathbb{Z}}(1)]$ est par définition la limite projective des $\mathbb{Z}/N[\mathbb{Z}/N(1)]$.

L'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}(1)_B]$ est l'algèbre affine du tore T sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ de groupe de caractères $\mathbb{Z}(1)_B$. Le complété $\widehat{\mathbb{Z}}[\widehat{\mathbb{Z}}(1)_B]$ est le produit des complétés de cette algèbre affine en tous les points fermés de T .

19.15. Les $\Gamma_N := \Gamma_{N,N}$ pour N une puissance de ℓ forment un système cofinal de ℓ -groupes quotients de Γ , et

$$\Gamma_\ell^\wedge = \mathbb{Z}_\ell(1) \ltimes \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)](1).$$

L'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ est encore le complété de l'algèbre affine du tore T de 19.14 en le point fermé suivant: élément neutre en caractéristique ℓ . Pour

obtenir $\Gamma_\ell^{\wedge(A)}$, il faut la remplacer par son quotient par $(u - 1)^A$, u un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{\wedge(A)} &= \mathbb{Z}_\ell(1) \ltimes \Gamma_\ell^{\wedge(A)} \quad \text{avec} \\ \Gamma_\ell^{\wedge(A)} &:= \mathbb{Z}_\ell[u]/(u - 1)^A(1)\end{aligned}$$

pour u un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$.

19.15 PROPOSITION. *Le morphisme (16.17.1)_k:*

$$\Gamma_1^{\wedge(A)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(k) \quad (1 \leq k \leq A)$$

est la limite projective pour N une puissance de ℓ des

$$(19.15.1)_k \quad \mathbb{Z}/N[\mathbb{Z}/N(1)](1) \longrightarrow \mathbb{Z}/N(k) : \quad \sum a_\zeta \delta_\zeta \longmapsto \sum a_\zeta \cdot \zeta^{\otimes(k-1)}.$$

PREUVE. Regardons $\mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ comme l'espace des mesures sur $\mathbb{Z}_\ell(1)$ à valeurs dans \mathbb{Z}_ℓ . La limite projective des $(19.15.1)_k$ est alors le produit tensoriel par $\mathbb{Z}_\ell(1)$ de

$$(19.15.2)_k \quad \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)] \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(k) : \quad a \longmapsto \int \zeta^{\otimes k-1} da.$$

Le morphisme $(16.17.1)_k$ est le produit tensoriel avec $\mathbb{Z}_\ell(1)$ du morphisme de $\mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ dans $\mathbb{Z}_\ell(k-1)$ suivant: on choisit un générateur u de $\mathbb{Z}_\ell(1)$, on envoie $\mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ sur $\mathbb{Z}_\ell[u]/(u - 1)^A$, on fait $u = e^v$ et on prend le coefficient de $v^{k-1}/(k-1)!$, multiplié par $u^{\otimes k-1}$.

L'image de $\delta_{nu} \in \mathbb{Z}_\ell[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ dans $\mathbb{Z}_\ell[u]/(u - 1)^A$ est u^n . Image par $(19.15.2)_k$: $(nu)^{\otimes k-1}$. Image comme ci-dessus: $u^{\otimes k-1}$ fois le coefficient de $v^{k-1}/(k-1)!$ dans e^{nv} . Ces images coïncident pour tout n , et ceci vérifie 19.15.

19.16. Vérifions 19.1(B) pour $d = 1$. D'après 19.15, le torseur $P_{1,k} \mathbb{Z}/N$ sous $\mathbb{Z}/N(k)$ s'obtient en prenant la fibre de R_N en $(1, -1)$, en restreignant le groupe structural à $\Gamma_{1,N}$ et en poussant par $(19.15.1)_k$. Le $\Gamma_{1,N}$ -torseur obtenu est celui des systèmes v_ζ ($\zeta \in \mu_N$) où $v_\zeta^N = 1 - \zeta$ pour $\zeta \neq 1$ et où $v_\zeta^N = 1/N$ pour $\zeta = 1$. On est retombé sur (3.1.2)_k et on vérifie

qu'au chemin réel de $(0,1)$ à $(1,-1)$ correspond le choix des déterminations principales des racines $N^{\text{èmes}}$.

19.17. Posons

$$\Gamma_N(d) := \Gamma_{G,N} \quad \text{pour} \quad G = \frac{1}{d}\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}(1).$$

C'est le produit semi-direct de G par $\Gamma_{1,N}(d) := \mathbb{Z}/N[G](1)$. L'inclusion de \mathbb{Z} dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}$ induit un morphisme de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1)$ dans $\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}(1)$, d'où

$$(19.17.1) \quad \Gamma_N \longrightarrow \Gamma_N(d).$$

L'isomorphisme "multiplication par d " de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}(1)$ avec $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1)$ définit un isomorphisme

$$(19.17.2) \quad \Gamma_N(d) \xrightarrow{\sim} \Gamma_N.$$

La limite projective des $\Gamma_N(d)$ est le complété profini de $\Gamma(d)$. Si on restreint N à être une puissance de ℓ , on obtient le ℓ -complété

$$\Gamma(d)_\ell^\wedge = \frac{1}{d}\mathbb{Z}_\ell(1) \ltimes \mathbb{Z}_\ell[\frac{1}{d}\mathbb{Z}_\ell(1)](1).$$

Pour obtenir $\Gamma_\ell^{\wedge(A)}$, il faut remplacer l'algèbre de groupe par son quotient par $(u - 1)^A$, pour u un générateur de $\frac{1}{d}\mathbb{Z}_\ell(1)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\ell^{\wedge(A)}(\frac{1}{d}) &= \frac{1}{d}\mathbb{Z}_\ell(1) \ltimes \Gamma_{1,\ell}^\wedge(\frac{1}{d})^{(A)} \quad \text{avec} \\ \Gamma_{1,\ell}^\wedge(\frac{1}{d})^{(A)} &= \mathbb{Z}_\ell[u]/(u - 1)^A(1). \end{aligned}$$

Parallèlement à 19.15, on vérifie que

19.18 PROPOSITION. Le morphisme (16.22.2) $_{d,k}$

$$\Gamma_{1,\ell}^\wedge(\frac{1}{d})^{(A)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(k) \quad (1 \leq k \leq A)$$

est la limite projective pour N une puissance de ℓ des

$$(19.18.1)_{d,k}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/N[\frac{1}{d}\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}(1)](1) &\longrightarrow \mathbb{Z}/N(k) : \\ \sum a_\zeta \delta_\zeta &\longmapsto \sum a_\zeta \cdot (d\zeta)^{\otimes k-1}. \end{aligned}$$

19.19. Vérifions 19.1(B) sur μ'_d . D'après 19.18, le torseur $P_{d,k} \mathbb{Z}/N$ sur μ'_d sous $\mathbb{Z}/N(k)$ s'obtient en restreignant R_N à μ'_d , en poussant ce Γ_N -torseur à $\Gamma_N(\frac{1}{d})$ et en poussant par (19.18.1)_{d,k}. Détaillons ces opérations.

La fibre de R_N en $\zeta \in \mu'_d$ est l'ensemble des systèmes $(u, v(x))$ avec $u^N = \zeta$, $v(x)^N = 1 - x$ ($x^N = \zeta$).

Le morphisme (19.18.1)_{d,k} est le composé de (19.15.1)_k et de l'isomorphisme induit par (19.17.2) de $\Gamma_1 N(d)$ avec $\Gamma_1 N$. Poussons le Γ_N -torseur $R_{N\zeta}$ par le composé “ d ” de (19.17.2) et (19.17.1): $\Gamma_N \rightarrow \Gamma_N$, induit par la multiplication par d dans $\mathbb{Z}/N(1)$. Le torseur obtenu est celui des systèmes $(u', v'(y))$ (où y parcourt μ_N) avec $u'^N = 1$ et $v'(y)^N = \prod(1 - x)$ le produit étant étendu aux racines $d^{\text{ièmes}}$ de y telles que $x^N = \zeta$. On définit en effet un “ d ”-morphisme de $R_{N\zeta}$ dans ce torseur en envoyant $(u, v(x)_{x^N=\zeta})$ sur $(u', v'(y)_{y^N=1})$ avec $u' = u^d$ et $v'(y) = \prod_{x^d=y} v(x)$.

On restreint le groupe structural à $\Gamma_1 N$ en imposant $u' = 1$. Le $\Gamma_1 N$ -torseur obtenu est donc celui des systèmes $v(y)_{y^N=1}$ comme plus haut. Appliquant (19.15.1)_k, on obtient (3.11.2)_{d,k}. Comme précédemment, v_B donne par l'isomorphisme de comparaison la détermination principale des racines $N^{\text{ième}}$.

Index des notations

lim ind, lim proj	0.1
"lim ind"	4.1
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}_\ell, \mathbf{Q}_\ell, \widehat{\mathbf{Z}}, \mathbf{A}^f, \overline{\mathbf{Q}}$	0.2
$Z^i(\dots), A^{[N]}, A^{(N)}$	0.3

Un indice mot désigne un objet motivique, comme dans $H_{\text{mot}}^i(X)$ (1.6). Si X_{mot} est un motif, X affecté d'un indice DR, B, σ, \mathbf{A}^f , $\text{crisp}, \ell, \widehat{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}_\ell, \mathbf{Z}/(n)$ est une réalisation de X : 1.4, 1.18, 1.21, 1.24.
Indice \mathbf{Z} : 7.4.

On désigne par W une filtration par le poids (1.4), par F une filtration de Hodge (1.4). Notation $F^0 P$: 7.7.1.

On note parfois C une clôture algébrique de \mathbf{R} , cf. 1.14.

$\mathbf{Z}(n)$: motif de Tate	2.1
$P_{1,k}$ (noté $P_{1,k}^0$ au §19)	3.1
$P_1, P_{1,k}$	16.18
$P_{d,k}$ (noté $P_{d,k}^0$ au §19)	3.11
$P_d, P_{d,k}$	16.23
$K(q)$: torseur de Kummer	2.9, 2.10

π_1 , T et P désignent respectivement un groupe, un torseur et un groupoïde fondamental, cf. 10.1.

Index Terminologique

anneau (à unité) de T	5.3
Artin: motif d' –	3.15
Betti: voir: réalisation de –	
chemin: classe d'homotopie de – (topologie étale)	10.16
motivique	13.15
U -torseur de –	13.15
détermination principale de $z^{1/N}$ ($z \notin \mathbf{R}^-$)	3.1
enveloppe algébrique	10.24
algébrique unipotente	9.5
filtration graduable	7.11
sous-jacente à une graduation	7.13
par le poids, de Hodge	1.4
par le poids, de Hodge, de Lie(π_1)	12.11
fondamental: groupe – de T	6.1
groupoïde – de T	6.13

groupe, groupoïde, torseur –	10.1
théorie classique	10.2
théorie profinie	10.15, 10.21
(relatif)	10.18, 10.22
théorie de de Rham	10.27, 10.30
théorie motivique	13.2, 13.9
Frobenius: à l'infini	1.4(M7)
cristallin	1.4(M10)
image inverse par – (théorie cristalline)	11.10
groupe de Galois motivique	6.2
groupe, groupoïde: voir: fondamental	
groupoïde localement constant, profini lisse	10.6
transitif	10.9
Hodge: voir: filtration de –	
Ind-objet	4.1
Kummer: torseur de –	2.10, 2.11
motif	1.11
nilpotent: fibré vectoriel à connection intégrable –	10.25
représentation –	9.4
poids: voir: filtration par le –	
profini: complété	10.14
groupe, torseur, groupoïde fondamental – : voir fondamental	
proalgébrique: groupe, torseur, groupoïde fondamental – rel. \mathcal{C}	10.27
pro-objet	4.7
réalisation: de Betti, de de Rham, en cohomologie étale,	
en cohomologie cristalline	1.4
schéma en \mathcal{T} : affine, en groupes, vide, point, vectoriel, fidèlement plat	5.4
structure entière: sur U unipotent motivique	7.4, 7.34
sur un U -torseur	7.28, 7.34
système de réalisations sur $\text{Spec}(\mathbb{Q})$	1.9, 1.14
lisse sur $\text{Spec } \mathcal{O}$	1.18
lisse sur S	1.21
à coefficients dans E	1.22
à coefficients entiers	1.23, 1.24
Tate: motif de –	2.1
torseur	0.6
voir: fondamental	

Bibliographie

- [A1] G. Anderson, Torsion points on Fermat Jacobians, roots of circular units and relative singular homology, Duke Math. J. **53** 2 (1986) pp. 457–502.
- [A2] G. Anderson, The hyperadelic gamma function, Inv. Math. **95** 1 (1989) pp. 63–131.
- [B] A.A. Beilinson, Height pairing between algebraic cycles, Contemp. Math. vol. **67** (1987) pp. 1–24.
- [C] Coleman, Dilogarithms, Regulators and p -adic L -functions, Inv. Math. **69** (1982) pp. 171–208.
- [D1] P. Deligne, Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lectures Notes in Math. **163**, Springer Verlag 1970.
- [D2] P. Deligne, Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES **40** (1971) pp. 5–58.
- [D3] P. Deligne, Théorie de Hodge III, Publ. Math. IHES **44** (1974) pp. 5–77.
- [D4] P. Deligne, Catégories tannakiennes, in *Grothendieck Festschrift, Progress in math.*, Birkhäuser.
- [D5] P. Deligne, Poids dans la cohomologie des variétés algébriques, Actes ICM Vancouver 1974, pp. 79–85.
- [DM] P. Deligne and J. Milne, Tannakian categories – in *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900**, Springer Verlag 1982, pp. 101–228.
- [Fa] G. Faltings, Crystalline cohomology and p -adic Galois representations, preprint.
- [FL] J.-M. Fontaine et G. Laffaille, Construction de représentations p -adiques, Ann. Sci. ENS **15** (1982) pp. 547–608.
- [FM] J.-M. Fontaine et B. Messing, to appear.
- [G] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. IHES **29** (1966) pp. 95–103.
- [I] Y. Ihara, Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplication, Ann. of Math. **123** (1986) pp. 3–106.
- [IKY] Y. Ihara, M. Kaneko and A. Yukinari, On some properties of the universal power series for Jacobi sums, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987) pp. 65–86.

- [J] U. Jannsen, Mixed motives and algebraic K -theory, preprint Universität Regensburg, 1988.
- [Ki] R. Kiehl, Der Endlichkeitssatz für eigeinliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. **2** (1967) pp. 191–214.
- [Kl] S. Kleiman, Motives – in *Proc. 5th Nordic Summer School, Oslo 1970*, Wolters-Noordhoff, Holland 1972.
- [Ko] N. Koblitz, A new proof of certain formulas for p -adic L -functions, Duke Math. J. **46** (1979) pp. 455–468.
- [Mal] A.I. Malcev, Nilpotent torsion free groups, Izv. Akad. Nauk. **13** (1949) pp. 201–212.
- [Man] Yu. Manin, Correspondences, motives and monoïdal transformations, Mat. Sb. **77 (119)** (1968) pp. 475–507. Translated: Math. USSR-Sb. **6** (1968) pp. 439–470.
- [Mo] J. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic varieties, Publ. Math. IHES **48** (1978) pp. 137–204.
- [R] Michel Raynaud, Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... in *Table ronde d'analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, Bull. SMF, Memoire 39–40, pp. 319–327.
- [RSS] Beilinson's conjectures on special values of L -functions. Edited by M. Rapaport, P. Schneider and N. Schappacher. Perspectives in Math., vol. 4, Acad. Press 1988.
- [Sa] N. Saavedra, Catégories tannakiennes, Lectures Notes in Math **265**, Springer Verlag 1972.
- [SZ] J. Steenbrink et S. Zucker, Variations of mixed Hodge structures I, Inv. Math. **80** (1985) pp. 489–542.
- [Su] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology, Publ. Math. IHES **47** (1977) pp. 269–332.

Sigles

- SGA Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, dirigé par A. Grothendieck et al., parus, sauf SGA2, aux Springer Lecture Notes in Math., Springer Verlag.
- SGA1 Revêtements étalés et groupe fondamental, SLN 224.

- SGA2 Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Adv. Studies in Pure Math., vol. 2, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1968.
- SGA3 Schémas en groupes, SLN 151, 152, 153.
- SGA4 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, SLN 269, 270, 305.
- SGA5 Cohomologie ℓ -adique et fonctions L , SLN 589.