

# 現代数学シリーズ

---

中村 周／山田 澄生 編集



上原北斗／戸田幸伸 著

# 連接層の導來圈と 代数幾何学

丸善出版



# 序 文

代数多様体  $X$  上の連接層のなす Abel 圏  $\text{Coh}(X)$  の導來圏  $D^b(X) = D^b(\text{Coh}(X))$  は、連接層の複体を対象として持つ三角圏である。これは 1960 年代に Grothendieck と Verdier により導入された概念であり、その導入のもともとの目的は層係数コホモロジーの Serre 双対性の概念を大幅に一般化することにあった。一般に Abel 圏が与えられると、その導來圏が定義される。連接層の導來圏以外にも、例えば代数多様体上の構成可能層の導來圏なども定義でき、こちらは数論幾何学や代数解析学などで有用な道具、言語として活躍してきた。他にも多元環上の加群のなす Abel 圏の導來圏も考えることができ、多元環の研究に大きな影響を与えてきた。

連接層の導來圏もその導入以降、代数幾何学の興味深い研究対象として研究されてきた。例えば 1980 年頃、Mukai によって証明された、Abel 多様体とその双対 Abel 多様体の連接層の導來圏が同値である、という事実は非常に有名である。Mukai の結果はその後、K3 曲面とその安定層のモジュライ空間の間の導來同値に拡張され、代数多様体上の連接層のモジュライ空間の研究に導來圏が有用であることが明らかになった。

一方、代数多様体には様々な不変量が存在する。コホモロジー群、基本群、自己同型群、連接層のなす Abel 圏の Grothendieck 群、小平次元、不正則数などがその例である。代数多様体の幾何的性質を探る上で、不変量を調べることは非常に重要である。連接層の導來圏  $D^b(X)$  が不変量として本格的に研究され始めたのは 1990 年半ばに Bondal–Orlov による論文 [BO] が出てからであろう。これにより、代数多様体の幾何学と連接層の導來圏との間に密接な関係が存在すると考えられるようになった。例えば、代数多様体の極小モデル理論における重要な双有理変換としてフロップという操作がある。Bondal–Orlov によって一般にフロップで結ばれる代数多様体の連接層の導來圏が同値になると予想され、この予想はその後

Bridgeland, Van den Bergh, Kawamata らによって様々な場合に証明されていった。

さらに 1994 年頃, Kontsevich によってホモロジカルミラー対称性予想が提唱された。この予想は, 2 つの Calabi-Yau 多様体  $X, Y$  がミラー対であるとき,  $D^b(X)$  と,  $Y$  のシンプレクティック構造から定まるある種の三角圏（深谷圏）の間に同値が存在することを主張する。このことからシンプレクティック幾何やミラー対称性の背景である物理の超弦理論との関わりからも代数多様体の導来圏は興味深い研究対象であると認識された。また §4.5 で述べるように  $D^b(X)$  が傾斜対象を持つとき,  $D^b(X)$  はある種の多元環上の加群の導来圏と同値になり, よって連接層の導来圏の研究は多元環の表現論とも関わりがある。さらには高次元代数多様体の分類理論（特に極小モデル理論）、代数多様体の有理性問題、McKay 対応、幾何学的不变式論、特異点解消など、様々な研究分野との間の興味深い関係が研究されてきた。現在では連接層の導来圏の研究は代数幾何学における最も研究の盛んな分野の 1 つになったといえよう。本書では、こうした連接層の導来圏にまつわるトピックで、特に重要な発展と思われるものをいくつか選び解説していく。

著者 2 人の指導教官である川又雄二郎先生は、連接層の導来圏研究の先駆者の 1 人である。我々が導来圏の研究を始めたのは師の研究に触発され、また間近で展開される導来圏の研究の面白さに触れることができたということが大きく影響している。川又先生に深く感謝する。

査読者には（驚くべき）多くの本質的な助言を頂いた。我々には査読者がどなたかは知る由もないが、せめてどちらの方向に足を向けて寝てはいけないかでも知っておきたい思いである。他にも金沢篤氏、三田史彦氏、高橋亮氏、原和平氏、森村勇人氏、吉岡康太氏、渡辺智信氏らを含め多くの方に有益な助言を頂いた。深く感謝する。

著者 2 人の良き友人であり、2013 年 10 月 22 日に夭折された長尾健太郎君とは、2 人とも、本書の内容のいくつかの部分に関して度々議論した記憶がある。彼が本書に目を通したら何と言うだろうか？ あまりよい言葉はもらえない気がするが、彼に小著を捧げたい。

2020 年 9 月

著者するす

# 目 次

<b>第 1 章 本書の構成と記号</b>	<b>1</b>
1.1 本書の構成	1
1.2 記号	5
<b>第 2 章 導来圏の定義と性質</b>	<b>9</b>
2.1 なぜ導来圏を考えるのか？	9
2.2 Abel 圈の複体のホモトピー圏	11
2.3 三 角 圈	13
2.4 コホモロジー的関手	21
2.5 三角圏の局所化	23
2.6 Abel 圈の導来圏	26
2.7 導 来 関 手	31
2.8 代数多様体上の連接層の導来圏	39
2.9 導来関手の性質	43
2.10 Fourier–Mukai 変換	46
<b>第 3 章 三角関手の同値性の判定条件</b>	<b>49</b>
3.1 随伴関手と Serre 関手	49
3.2 三角圏の生成元	54
3.3 三角関手の充満忠実性, 同値性の判定条件	57
<b>第 4 章 導来圏の半直交分解と例外生成列</b>	<b>61</b>
4.1 代数多様体の導来圏の不変量	61

4.2	半直交分解	72
4.3	例外生成列	79
4.4	例外生成列を持つ代数多様体	85
4.5	傾斜対象	90
4.6	半直交分解および例外列の変異	95
4.7	お化けが出た！	102
<b>第 5 章</b>	<b>安定層のモジュライ空間と Fourier–Mukai 変換</b>	<b>109</b>
5.1	代数曲線上の（半）安定ベクトル束	109
5.2	高次元代数多様体上の（半）安定層	113
5.3	(半) 安定層のモジュライ空間	116
5.4	(半) 安定層のモジュライ空間の構成	119
5.5	安定層の局所変形理論	121
5.6	普遍層による導来同値	126
5.7	K3 曲面上の安定層のモジュライ空間	130
5.8	相対的安定層のモジュライ空間	134
5.9	Pfaffian–Grassmannian 導来同値	135
5.10	捻れ層と Fourier–Mukai 変換	139
<b>第 6 章</b>	<b>導来 McKay 対応</b>	<b>143</b>
6.1	クレバント解消 (CCR) とフロップ	143
6.2	$G$ -Hilb( $M$ )	148
6.3	交叉定理	151
6.4	導來 McKay 対応	156
<b>第 7 章</b>	<b>フロップによる導來同値</b>	<b>163</b>
7.1	$t$ -構造と捩れ対	163
7.2	一般的なひねくれ者	169
7.3	ひねくれた同僚	172
7.4	ひねくれた妻	177
7.5	Van den Bergh によるフロップの導來同値	180
7.6	非可換クレバント解消 (NCCR)	183
7.7	なぜ NCCR と呼ぶのか？	186
7.8	NCCR vs. CCR	187

7.9	フロップ-フロップ関手	189
7.10	非可換変形とフロップ	194
<b>第 8 章 連接層の導來圏と行列因子化</b>		<b>197</b>
8.1	完全圏の導來圏	197
8.2	Serre 商と Verdier 商	198
8.3	次数付き加群の商圏	202
8.4	Gorenstein 多様体の導來圏	214
8.5	行列因子化の圏と極大 Cohen–Macaulay 加群の安定圏	216
8.6	gauged LG 模型の因子化の圏	223
8.7	行列因子化の圏と特異点の三角圏	231
8.8	行列因子化の圏と Calabi–Yau 超曲面の導來圏	235
<b>第 9 章 ホモロジー的射影双対理論</b>		<b>239</b>
9.1	Lefschetz 分解	239
9.2	普遍超平面	240
9.3	ホモロジー的射影双対	243
9.4	2 次超曲面の HPD	247
9.5	圏論的特異点解消	250
9.6	Grassmann 多様体の HPD	252
9.7	4 次元 3 次超曲面の導來圏	256
9.8	長方形型 Lefschetz 分解に関する HPD の証明	259
<b>第 10 章 連接層の導來圏と幾何学的不变式論</b>		<b>269</b>
10.1	幾何学的不变式論	269
10.2	導來圏と GIT (アファイン空間の場合)	277
10.3	導來圏と GIT (一般の場合)	288
10.4	トーリック Deligne–Mumford スタック	294
10.5	トーリック Deligne–Mumford スタックと例外生成列	301
10.6	特異点の三角圏と GIT	306
<b>第 11 章 Bridgeland 安定性条件</b>		<b>311</b>
11.1	Abel 圏の安定性条件	311
11.2	三角圏の安定性条件	313

11.3	安定性条件の空間	315
11.4	橢円曲線上の安定性条件の空間	321
11.5	ミラー対称性との関係	324
11.6	極大体積極限の近傍	327
11.7	連接層のなす Abel 圏の傾斜	329
11.8	代数曲面上の安定性条件	331
11.9	代数曲面の極大体積極限	337
11.10	壁と部屋の構造	339
11.11	K3 曲面上の安定性条件の空間	345
11.12	3 次元代数多様体上の安定性条件	359
11.13	Bogomolov–Gieseker 型不等式予想	361
<b>第 12 章 Donaldson–Thomas 不変量</b>		<b>365</b>
12.1	3 次元 Calabi–Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間	365
12.2	完全障害理論	366
12.3	仮想サイクル	370
12.4	Behrend 関数	373
12.5	曲線を数え上げる DT 不変量	377
12.6	君のママは僕のママ (GW/DT 対応)	380
12.7	安定対不変量	382
12.8	君のママもか! (DT/PT 対応)	383
12.9	Artin スタックの Grothendieck 群	385
12.10	モチーフ的 Hall 代数	388
12.11	道代数のモチーフ的 Hall 代数	394
12.12	Poisson 代数	397
12.13	イプシロン関数	402
12.14	一般化 DT 不変量	406
12.15	Poisson トーラス	408
12.16	一般化 DT 不変量の壁越え	412
12.17	君のママが僕のママであるために	415
<b>付録 A Grothendieck 双対性</b>		<b>423</b>
A.1	双対化複体	423
A.2	Cohen–Macaulay 加群と Gorenstein 環	426

A.3 標 準 層 . . . . .	430
<b>付録 B 代数上の加群</b>	<b>433</b>
B.1 有限次元代数 . . . . .	433
B.2 簾 . . . . .	433
B.3 簾上の道代数 . . . . .	434
B.4 簾上の表現 . . . . .	436
<b>付録 C 代数群の代数多様体への作用</b>	<b>441</b>
C.1 代数群の座標環への作用 . . . . .	441
C.2 $G$ -同変層 . . . . .	444
C.3 代数群のベクトル束への作用 . . . . .	446
<b>付録 D 商スタック</b>	<b>451</b>
D.1 スタック . . . . .	451
D.2 2-圏の補足 . . . . .	454
D.3 スタックとしてのスキーム . . . . .	455
D.4 Artin スタック, Deligne–Mumford スタック . . . . .	456
D.5 商スタック . . . . .	458
<b>参考文献</b>	<b>461</b>
<b>索引</b>	<b>479</b>



# 第1章 本書の構成と記号

## 1.1 本書の構成

第2章では、本書で必要となる三角圏や導來圏に関する基本事項について解説する。まず Abel 圏の複体のホモトピー圏を構成し、それを擬同型射で局所化することで Abel 圏の導來圏が定義される。これは Abel 圏にはならないが、三角圏の構造を持つ。さらに Abel 圏の間の関手が誘導する導來圏の間の右（左）導來関手を導入する。これらを用いて代数多様体の連接層の導來圏の間の Fourier–Mukai 関手が構成される。このような関手は Mukai によって導入され、Abel 多様体とその双対 Abel 多様体の連接層の導來圏の間の同値が Fourier–Mukai 関手を用いて示された。以降、導來圏の間の Fourier–Mukai 関手の研究は連接層の導來圏の研究における重要なトピックの1つとなった。

第3章では、三角関手がいつ充満忠実になるか、また同値になるかといった判定法について解説する。連接層の導來圏の研究が進むにつれ、三角関手がどのような条件の下、充満忠実になるか、また同値になるかといった抽象論の構築が必要になってきた。Bondal と Orlov によって連接層の導來圏の間の三角関手がいつ充満忠実になるかという研究がなされ、また彼らの結果は Bridgeland によって、さらに一般化され、三角関手がいつ同値となるかという判定法が発見された。以降連接層の導來圏の間の同値性がこれらの判定法を当てはめることで、以前よりはるかに簡明に示されることとなった。この章の結果やアイデアは以降の章でも頻繁に使われる。

第4章では半直交分解と例外生成列に関して解説する。有限次元ベクトル空間はその基底を見つけることで1次元の部分空間に分解できる。同様に導來圏を、あるいはより一般に三角圏を何らかの意味で分解できないであろうか、という問

いに解答を与えるのが 1990 年頃に Bondal らによって発見された半直交分解であり、また最も細かい半直交分解が例外生成列である。

例外生成列は代数多様体の連接層の導来圏の研究において、実際に多くの問題を生み出してきた。例えば、例外生成列を持つ代数多様体は幾何的にどのような性質や、不変量を持つであろうか、というのは非常に自然な問い合わせである。また強例外生成列をもつような代数多様体の導来圏はある種の（非可換）代数上の加群のなす圏の導来圏と同値になることから、この場合は代数多様体の導来圏の研究がある種の代数上の表現論と結びつき、非常に多くの応用を供給する。第 4 章ではこういった、例外生成列にまつわる豊富なトピックの一端を紹介する。

第 5 章では、連接層のモジュライ理論について解説する。一般に、良いモジュライ理論を構成するには連接層の圏に安定性を導入する必要がある。この章では Gieseker による（半）安定層を導入し、それらのモジュライ空間を考察する。このようなモジュライ空間とともに代数多様体の連接層の導来圏の間に自然に Fourier–Mukai 関手が構成されるが、ある条件を満たす場合にはこの Fourier–Mukai 関手が導来圏の同値を与えることを証明する。ちなみにこの証明は第 3 章で展開された理論の応用である。この結果を用いると、上述の Mukai による Abel 多様体とその双対 Abel 多様体の導来圏の同値が示される。また、K3 曲面とその上の安定層のモジュライ空間の導来圏の同値も示される。

第 6 章では導来 McKay 対応について解説する。 $G$  を  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の有限部分群とし、その  $\mathbb{C}^2$  への自然な作用による商空間  $\mathbb{C}^2/G$  を考えると、これは ADE 型特異点と呼ばれる特異点を持つ、極小特異点解消

$$f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$$

を考えると、その例外集合の双対グラフは  $G$  の分類に応じて、A,D,E 型の Dynkin 図形となる。一方 1970 年代後半に McKay によって  $G$  の表現論だけを使って、その Dynkin 図形が復元できることが示された。これが古典的な McKay 対応である。

$G$  を  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$  の有限部分群としたときは、 $\mathbb{C}^3/G$  の極小特異点解消（クレパント解消）の存在すら非常に難しい問題となる。Bridgeland–King–Reid はこの場合に、 $G$ -Hilb  $\mathbb{C}^3$  が  $\mathbb{C}^3/G$  のクレパント特異点解消を与えることと、その普遍族を核に持つ Fourier–Mukai 変換が導来圏レベルの McKay 対応を与えることを示した。これが導来 McKay 対応である。第 6 章では、この 3 次元導来 McKay 対応の証明を与える。

第 7 章では、フロップという双有理写像によって導かれる導来同値について解

説する。双有理同値な 3 次元 Calabi–Yau 多様体の導来圏は超弦理論の要請から、互いに同値となるであろうと予想されていた。一方 2000 年頃に Bridgeland によってフロップで結べる滑らかな 3 次元代数多様体は互いに導來同値であることが示された。双有理同値な 3 次元 Calabi–Yau 多様体はフロップの合成で結べることが知られていたので、これらは互いに導來同値であることが結論付けられた。Bridgeland による証明は、フロップで得られる代数多様体をもとの代数多様体上の偏屈連接層のモジュライ空間として構成し、その普遍族を核に持つ Fourier–Mukai 変換でそれらの導來圏を結びつける、というものであった。第 5 章で見るよう、代数多様体とその上の層のモジュライ空間は、その普遍族を使って導來同値となることがしばしば観察されていたので、Bridgeland による証明はある意味自然なものであった。本書では Bridgeland より少し後に得られた Van den Bergh による別証明の解説をする。Van den Bergh の証明は与えられた 3 次元代数多様体と、それとフロップで結ばれる 3 次元代数多様体の導來圏を、ある種の非可換環上の加群の導來圏を介して結びつけるという、全く新しいアイデアによるものであった。彼の証明のアイデアから、非可換クレバント解消という概念が生まれた。この章の最後に非可換クレバント解消、およびフロップによって誘導される自己同値に関する触れる。

第 8 章では連接層の導來圏と行列因子化の圏の関係に関する Orlov による定理を解説する。行列因子化は MCM (maximal Cohen–Macaulay) 加群の研究のために 1980 年頃 Eisenbud によって導入された。一方、2009 年に Orlov は行列因子化の圏と超曲面の連接層のなす導來圏の間に関係があることを発見した。この事実は超弦理論による Calabi–Yau/Landau–Ginzburg (CY/LG) 対応によって示唆されたものであった。第 8 章ではまず行列因子化の定義を与え、さらに行列因子化の圏と連接層の導來圏の一般化である gauged LG 模型の因子化の圏の定義を与えた後、Orlov による定理の証明を与える。例えば Orlov の定理により、 $(d+2)$  次の  $d$  次元 Calabi–Yau 超曲面の導來圏はその定義方程式の行列因子化の圏と同値であることがわかる。最後に Calabi–Yau 超曲面の場合に、Orlov が与えた同値に関して具体的な計算をしてみる。

第 9 章では Kuznetsov によるホモロジー的射影双対理論について解説する。2 つの代数多様体がホモロジー的射影双対の関係にあるとき、それらの導來圏の間には非常に強い関係があることが証明される。これを用いると、様々な連接層の導來圏の間の同値を示すことができる。例えば、Grassmann 多様体、Pfaffian 多様体の超平面切断で得られる 2 つの Calabi–Yau 多様体は、双有理同値ではないにもかかわらずそれらの連接層の導來圏は同値になる。この結果は超弦理論に触

発されて Borisov–Căldăraru により Fourier–Mukai 変換を用いて証明されたが、Kuznetsov によるホモロジー的射影双対理論に依っても証明することが可能になった。本章では Kuznetsov によるホモロジー的射影双対理論の基本定理を、簡単な場合に限定して証明を与える。

第 10 章では幾何学的不变式論と連接層の導来圏の関係について解説する。幾何学的不变式論を使って、代数多様体の連接層の導来圏の間に非自明な関係を見出すといった研究は Kawamata, Herbst–Hori–Page, Segal ら多くの研究者によってなされていた。この方面での決定的な仕事が Ballard–Favero–Katzarkov と Halpern–Leistner による結果であり、第 10 章では Ballard–Favero–Katzarkov の結果を解説する。彼らの結果は gauged LG 模型の因子化の圏を用いて述べられているが、その証明は技術的で多くの準備を要するので、アファイン空間にトーラス  $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$  が作用しており、また (gauged LG 模型の因子化の圏でなく) 連接層の導来圏の場合に限定して証明を与える。また彼らの結果の応用として、トーリック DM スタックの導来圏上の例外生成列の存在の証明と、第 8 章で述べた Orlov による定理の別証明を見ていく。

第 11 章では、Bridgeland による導来圏の安定性条件の理論について解説する。Bridgeland 安定性条件の概念は超弦理論における Douglas の仕事を数学的に定式化したものである。Bridgeland による安定性条件の理論の基本定理は、与えられた三角圏の安定性条件全体の集合が複素多様体の構造を持つというものである。この複素多様体はミラー対称性における弦理論的 Kähler モジュライ空間と密接な関係がある。Bridgeland が 2002 年にこの概念を導入して以降、安定性条件の研究は導来圏の研究における中心的なトピックの 1 つとなった。特に K3 曲面上の安定性条件の空間は Bridgeland により詳しく研究され、この空間のホモトピー型と導来圏の自己同値群の間の密接な関係が示された。一方、3 次元以上の代数多様体については安定性条件の研究は発展途上であり、特に安定性条件の存在でさえも重要な未解決問題である。この問題は Bayer–Macri–Toda により Bogomolov–Gieseker 型不等式予想と関連付けられており、現時点におけるこの予想の進展についても解説する。

第 12 章では、Donaldson–Thomas (DT) 理論と、導来圏の理論の DT 不变量への応用について解説する。DT 不变量は 1998 年に Thomas により導入された 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の連接層を数え上げる不变量であり、特別な場合には Calabi–Yau 多様体上の代数曲線を数え上げる不变量である。一方、Gromov–Witten (GW) 不变量と呼ばれる不变量も存在する。2003 年に Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande (MNOP) によってこれらの不变量の生成関数が解

析接続によって関係することが予想された。上記の予想は 2006 年国際数学者会議における Okounkov のフィールズ賞受賞講演の主トピックの 1 つとなり、以降 DT 不变量の研究は大きな関心を集めることになった。一方、Joyce–Song や Kontsevich–Soibelman によってモチーフ的 Hall 代数の概念を用いた DT 不变量の壁越え理論が構成された。この壁越え理論と Bridgeland 安定性条件の理論を組み合わせることで、MNOP 予想に関連した DT 不变量の生成関数の種々の性質が証明される。この章では、特に Pandharipande–Thomas により提唱された DT 不变量と安定対不変量の間の関係に焦点を絞って壁越え理論を解説する。

## 1.2 記号

本書の記号や用語は、特に断らない限り [Har77] と同じものとする。<sup>1</sup> 例えば、(代数) 多様体とは、代数閉体上有限型で分離的な整スキームである。また射影空間を表す際に Grothendieck 流の記法を用いる。例えば 9 章で引用する論文 [Kuz07] では非 Grothendieck 流の記法を用いていることに注意する。つまりベクトル空間  $V$  に対して、本書では  $\mathbb{P}(V)$  は  $V$  の 1 次元商空間の集合を意味するが、論文 [Kuz07] では 1 次元部分空間の集合を意味する。同様に本書では Grassmann 多様体  $\mathbb{G}(V, r)$  は  $r$  次元商ベクトル空間  $V \twoheadrightarrow L$  の集合、もしくは  $V$  の  $(\dim V - r)$  次元部分空間の集合として定める。代数多様体  $X$  上の有限階数の局所自由層  $\mathcal{E}$  に対応するベクトル束を

$$V(\mathcal{E}) := V_X(\mathcal{E}) = \mathbf{Spec} S(\mathcal{E})$$

と定義し、 $\mathcal{E}$  に対応する射影束を

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj} S(\mathcal{E})$$

とする。 $V(\mathcal{E})$  を  $\mathbf{Spec} S(\mathcal{E}^\vee)$  や  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  を  $\mathbf{Proj} S(\mathcal{E}^\vee)$  と定める流儀もあるから注意が必要である。ここで  $\mathcal{E}^\vee$  は  $\mathcal{E}$  の双対局所自由層  $\mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$  である。慣例に従い、“局所自由層”的意味で、“ベクトル束”，“可逆層”的意味で，“直線束”という用語をしばしば用いる。

本書では代数多様体の間の“射”は“morphism”的訳語として用いられ、“写像”は“map”的訳語として用いられる。例えば  $f: X \dashrightarrow Y$  が有理写像 (ratio-

---

<sup>1</sup> [Har77] はおおよそ *Eléments de géométrie algébrique* (EGA) に従っているので、本書は結局 EGA の記号と用語に従っている、ともいえる。

nal map) であるとは、 $X$  のある空でない開集合で射となるものである。

代数多様体  $X$  上の閉点  $x \in X$  に対し、 $\mathfrak{m}_x$  を局所環  $\mathcal{O}_{X,x}$  の極大イデアルとしたとき

$$\mathcal{O}_x := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

と定義する。<sup>2</sup>

(複素) 射影的代数多様体  $X$  の Néron–Severi 群  $\mathrm{NS}(X)$  の階数、つまり Picard 数を  $\rho(X)$  と書く。さらに Chow 群を  $A(X)$  で表す。例えば  $A_i(X)$  は (複素)  $i$  次元のサイクルたちの有理同値類のなす群である。

環  $A$  に対し、 $A^\circ$  をその反対環とする。Mod  $A$  で右  $A$ -加群のなす Abel 圈、mod  $A$  で有限生成右  $A$ -加群のなす加法圏を表す。 $A$  が右 Noether 環のとき mod  $A$  は Abel 圈となる。有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間のなす Abel 圈を Vect  $\mathbb{C}$  と表し、また圏  $\mathcal{C}$  に対し、その反対圏を  $\mathcal{C}^\circ$  で表す。

次数付き環  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$  に対し、Gr  $A$  で  $\mathbb{Z}$  による次数付きの右  $A$ -加群のなす圏、gr  $A$  で  $\mathbb{Z}$  による次数付き有限生成右  $A$ -加群のなす圏を表す。次数付き加群を考えるときは  $\mathbb{Z}$  による次数付けを考える。

有限生成 Abel 群  $G$ 、体  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  に対し、 $G_K$  を  $G \otimes_{\mathbb{Z}} K$  で定める。

スキーム  $X$  に対し、 $X$  上のスキームのなす圏を  $(\mathsf{Sch}/X)$  で表す。 $X = \mathrm{Spec} \mathbb{C}$  などのときは  $(\mathsf{Sch}/\mathrm{Spec} \mathbb{C})$  を  $(\mathsf{Sch}/\mathbb{C})$  と書く。スタッツ  $\mathcal{S}$  に対し、 $\mathcal{S}$  上のスタッツのなす圏も同様に  $(\mathsf{Sta}/\mathcal{S})$  で表す。さらに Sets を集合の圏とする。

Abel 圈  $\mathcal{A}$  の導來圏  $D(\mathcal{A})$  の対象  $E, F$  をとる。このとき射の集合  $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F[i])$  を

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}^i(E, F) \text{ もしくは } \mathrm{Ext}_{D(\mathcal{A})}^i(E, F)$$

などと表し、さらに誤解の恐れがないときは

$$\mathrm{Hom}^i(E, F) \text{ もしくは } \mathrm{Ext}^i(E, F)$$

と書くこともある。また Abel 圈  $\mathcal{A}$  として代数多様体  $X$  の準連接層のなす Abel 圈  $\mathrm{QCoh}(X)$  を考えるときは  $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{QCoh}(X))}(E, F[i])$  を

---

<sup>2</sup> [Har77] では  $\mathcal{O}_x$  は  $k(x)$  と表記されているが、本書で引用する多くの文献で用いられているこちらの記号を用いる。

$\text{Hom}_X^i(E, F)$  もしくは  $\text{Ext}_X^i(E, F)$

などと表すこともある。また Abel 圏  $\mathcal{A}$  として環  $A$  上の有限生成右加群のなす圏  $\text{mod } A$  を考えるときは  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F[i])$  をしばしば

$\text{Hom}_A^i(E, F)$  もしくは  $\text{Ext}_A^i(E, F)$

などと表す。また  $\text{Hom}(E, F)$  や  $\text{Ext}^i(E, F)$  が有限次元ベクトル空間であるときは

$$\text{hom}(E, F) := \dim \text{Hom}(E, F), \quad \text{ext}^i(E, F) := \dim \text{Ext}^i(E, F)$$

とおく。



# 第2章 導來圏の定義と性質

本章では、本書で必要となる三角圏や導來圏に関する基本事項について解説する。まず Abel 圈の複体のホモトピー圏を構成し、それを擬同型射で局所化することで Abel 圈の導來圏が定義される。これは Abel 圈にはならないが、三角圏と呼ばれる構造を持つ。さらに Abel 圈の間の関手が誘導する導來圏の間の右（左）導來関手を導入する。最後にこれらを用いて代数多様体の連接層の導來圏の間の Fourier–Mukai 関手を構成する。ここで取り上げられている内容は、紙面の都合上、本書で後に必要となるものに絞られている。三角圏や導來圏について本格的に学びたい読者は [Har66] や [中 15] などを参照されたい。

## 2.1 なぜ導來圏を考えるのか？

Abel 圈が与えられると、その導來圏が定義される。導來圏の定義を述べる前に、なぜそのような圏を考える必要があるのか解説しよう。 $R$  を可換環とすると、任意の  $R$ -加群  $M$  に対し、関手

$$\mathrm{Hom}(M, -) : \mathrm{Mod} R \rightarrow \mathrm{Mod} R \tag{2.1}$$

が定まる。この関手は自然なものであり、 $R$ -加群を調べる際に重要な役割を果たす。しかし、上のような関手は一般に  $\mathrm{Mod} R$  における全射性を保たない。

**例 2.1**  $R = \mathbb{Z}$  とし、 $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  とする。自然な全射  $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  に  $\mathrm{Hom}(M, -)$  を施すと  $0 \rightarrow M$  となり、これは全射ではない。

一般に

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow 0 \tag{2.2}$$

を  $\text{Mod } R$  における完全系列とする.  $\text{Hom}(M, -)$  は  $\text{Mod } R$  における完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}(M, N_2) \rightarrow \text{Hom}(M, N_3) \quad (2.3)$$

を引き起こすが, 右方向の完全性は保たない. その代わり,  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して関手

$$\text{Ext}^i(M, -) : \text{Mod } R \rightarrow \text{Mod } R \quad (2.4)$$

が存在して, 完全系列 (2.3) は次の長完全系列に伸びる:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}(M, N_1) \rightarrow \text{Hom}(M, N_2) \rightarrow \text{Hom}(M, N_3) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(M, N_1) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N_2) \rightarrow \text{Ext}^1(M, N_3) \\ &\rightarrow \text{Ext}^2(M, N_1) \rightarrow \cdots . \end{aligned}$$

$R$ -加群  $N$  に対して,  $\text{Ext}^i(M, N)$  は次のように与えられる. まず  $N$  の単射的分解をとる.

$$0 \rightarrow N \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^i \rightarrow I^{i+1} \rightarrow \cdots . \quad (2.5)$$

ここで各  $I^i$  は単射的  $R$ -加群であり, (2.5) は  $R$ -加群の完全系列である. (2.5) に  $\text{Hom}(M, -)$  を施して, 複体

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, I^0) \rightarrow \text{Hom}(M, I^1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}(M, I^i) \rightarrow \cdots \quad (2.6)$$

を得る.  $\text{Ext}^i(M, N)$  は複体 (2.6) の  $i$  番目のコホモロジーとして与えられる.

以上はホモロジー代数の基礎である. 重要なことは, 関手 (2.1) によって失われてしまう全射性という性質が, 高次の関手 (2.4) を導入することで補完されることにある. そこで,  $\mathbf{R}\text{Hom}(M, N)$  を複体 (2.6) として定義する. 対応

$$N \mapsto \mathbf{R}\text{Hom}(M, N) \quad (2.7)$$

が何らかの圏の間の関手として意味を成すならば, これはその圏の何らかの性質を保つ「良い」関手と期待できる. 関手 (2.7) が意味を成すであろうと期待される圏を仮に  $D(\text{Mod } R)$  とおく. この圏は, 次の性質を満たす必要がある:

- (i) 対応 (2.7) の右辺が意味を成すために,  $D(\text{Mod } R)$  は  $R$ -加群の複体を対象として持つ必要がある.
- (ii) 対応 (2.7) が  $D(\text{Mod } R)$  に拡張されるために,  $N$  と複体  $I^\bullet$  が同一視されなければいけない.

上の 2 条件を満足する圏  $D(\text{Mod } R)$  が  $\text{Mod } R$  の導來圏である. これはもはや

Abel 圈とはならないが、代わりに三角圏と呼ばれる構造を持ち、対応 (2.7) は  $D(\text{Mod } R)$  の間の三角圏の構造を保つ関手に拡張される。これまででは関手  $\text{Hom}(M, -)$  について考えたが、 $\otimes M$  といった他の関手についても同様に導來圏の間の三角圏の構造を保つ関手に拡張できる。これにより、 $\text{Mod } R$  を考えていたのでは不満だった技術的な点が解消でき、 $R$ -加群たちが本来持っている情報を失わない形で様々な関手が構成できる。

## 2.2 Abel 圈の複体のホモトピー圏

この節では、導來圏を定義する準備段階として Abel 圈  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏を導入する。 $\mathcal{A}$  の対象の複体とは、 $\mathcal{A}$  の対象  $E^i$  とそれらの間の射の系列

$$E^\bullet = (\cdots \rightarrow E^0 \xrightarrow{d_E^0} E^1 \xrightarrow{d_E^1} \cdots \rightarrow E^i \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots)$$

であって、すべての  $i$  に対して  $d_E^{i+1} \circ d_E^i = 0$  が成立するものをいう。複体  $E^\bullet$  は  $E^i = 0$  が  $i \gg 0, i \ll 0, |i| \gg 0$  で成立するときに、それぞれ、上に有界、下に有界、有界であるという。

**定義 2.2**  $C(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{A}$  の複体のなす圏とする。つまり  $C(\mathcal{A})$  の対象は  $\mathcal{A}$  の複体であり、複体  $E^\bullet$  から  $F^\bullet$  への射  $f^\bullet$  は

$$\begin{array}{ccccccc} E^\bullet & \cdots & \longrightarrow & E^{i-1} & \xrightarrow{d_E^{i-1}} & E^i & \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \longrightarrow \cdots \\ f^\bullet \downarrow & & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & \downarrow f^{i+1} \\ F^\bullet & \cdots & \longrightarrow & F^{i-1} & \xrightarrow{d_F^{i-1}} & F^i & \xrightarrow{d_F^i} F^{i+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

という図式のすべての四角形が可換となるような  $\mathcal{A}$  の射  $f^i: E^i \rightarrow F^i$  たちからなる。

$f^\bullet \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(E^\bullet, F^\bullet)$  に対し、各  $i$  に対し、 $\text{Ker } f^i$  や  $\text{Coker } f^i$  からなる複体を構成することで、 $f^\bullet$  の核  $\text{Ker } f^\bullet$  や余核  $\text{Coker } f^\bullet$  が存在することがわかる。特に  $C(\mathcal{A})$  は Abel 圈になる。さらに、 $* \in \{\pm, b\}$  に対して部分 Abel 圈

$$C^*(\mathcal{A}) \subset C(\mathcal{A})$$

が定まる。 $C^*(\mathcal{A})$  は対象が下に有界 ( $* = +$  の場合)、上に有界 ( $* = -$  の場合)、有界 ( $* = b$  の場合) な複体からなる圏である。

$E^\bullet, F^\bullet$  を  $C(\mathcal{A})$  の対象とし、 $f, g$  を  $E^\bullet$  から  $F^\bullet$  への  $C(\mathcal{A})$  における射とす

る.  $f$  と  $g$  がホモトピック (homotopic) であるとは, 各  $i$  に対して  $\mathcal{A}$  における射  $h^i: E^i \rightarrow F^{i-1}$  ( $f$  から  $g$  へのホモトピーと呼ばれる) が存在して

$$d_F^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_E^i = f^i - g^i$$

が成立することをいう :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & E^{i-1} & \longrightarrow & E^i & \xrightarrow{d_E^i} & E^{i+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & \nearrow h^i & \downarrow f^i & \nearrow h^{i+1} & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & F^{i-1} & \xrightarrow[d_F^{i-1}]{} & F^i & \longrightarrow & F^{i+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ホモトピーは複体の射の集合に同値関係を定める. この同値類をホモトピー類と呼ぶ.  $f', g': F^\bullet \rightarrow G^\bullet$  を同様にホモトピックな射とすると,  $f' \circ f$  と  $g' \circ g$  も  $E^\bullet$  から  $G^\bullet$  へのホモトピックな射を定めることができることが確認できる. したがって, 次に定義するホモトピー圏が矛盾なく定義できる.

**定義 2.3**  $C(\mathcal{A})$  の ホモトピー圏 (homotopy category)  $K(\mathcal{A})$  とは, 対象が  $\mathcal{A}$  の複体からなり, 複体  $E^\bullet$  から  $F^\bullet$  への射の空間を  $C(\mathcal{A})$  における射のホモトピー類の集合として定まる圏である.

$E^\bullet, F^\bullet \in C(\mathcal{A})$  に対し, 射  $f: E^\bullet \rightarrow F^\bullet, g: F^\bullet \rightarrow E^\bullet$  が存在し,  $f \circ g$  が  $\text{id}_{F^\bullet}$  とホモトピックで,  $g \circ f$  が  $\text{id}_{E^\bullet}$  とホモトピックであるとき,  $E^\bullet$  と  $F^\bullet$  はホモトピー同値 (homotopy equivalent) である, という. これは  $E^\bullet, F^\bullet \in K(\mathcal{A})$  とみなしたときに,  $E^\bullet \cong F^\bullet$  であることに他ならない.

$C^*(\mathcal{A})$  と同様に,  $* \in \{\pm, b\}$  に対して部分圏

$$K^*(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$$

も定まる. 一方,  $C(\mathcal{A})$  とは異なり,  $\mathcal{A}$  が Abel 圏であっても  $K(\mathcal{A})$  は複体の項ごとの核や余核をとって Abel 圏になるわけではない. 次の例でこのことを観察する.

**例 2.4**  $\mathcal{A} = \text{Mod } \mathbb{Z}$  とし,  $K(\mathcal{A})$  が複体の項ごとの核や余核をとって Abel 圏になると仮定する.  $K(\mathcal{A})$  における次の射  $f: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  を考える :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E^{\bullet} & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 f \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \text{id} \\
 F^{\bullet} & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

各  $f^i$  ごとに核をとって得られる複体は 0 複体 ( $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ ) である。一方、射  $f$  は 0 射にホモトピックである。実際、次の図式が  $f$  と 0 射の間のホモトピーを与える：

$$\begin{array}{ccccccc}
 E^{\bullet} & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & & \searrow & \swarrow & & \\
 F^{\bullet} & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

よって、もし  $K(\mathcal{A})$  が Abel 圈であるなら入るなら射  $f$  の核は  $E^{\bullet}$  でなければいけない。 $E^{\bullet}$  は 0 複体とホモトピー同値ではないので、矛盾である。

## 2.3 三 角 圈

定義 2.3 のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  は Abel 圈にならないが、その代わり次の構造を持つ。まず、複体の次数を 1 つずらす自己同値

$$[1]: K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A}) \quad (2.8)$$

が存在する。これは、複体

$$E^{\bullet} = (\cdots \rightarrow E^0 \xrightarrow{d_E^0} E^1 \xrightarrow{d_E^1} \cdots \rightarrow E^i \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots)$$

に対して

$$E^{\bullet}[1]^i = E^{i+1}, \quad d_{E[1]}^i = -d_E^{i+1}$$

とおくことで定まる。さらに、 $K(\mathcal{A})$  における射  $f^{\bullet}: E^{\bullet} \rightarrow F^{\bullet}$  に対し、その写像錐  $\text{Cone}(f^{\bullet})$  が次のように定まる：

$$\text{Cone}(f^\bullet)^i = F^i \oplus E^{i+1}$$

$$d_{\text{Cone}(f^\bullet)}^i = \begin{pmatrix} d_F^i & 0 \\ f^{i+1} & -d_E^{i+1} \end{pmatrix}$$

ここで  $F^i \oplus E^{i+1}$  の元を行ベクトルとみなして微分の作用を考えている。構成から、次の自然な射の系列が存在する：

$$E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \rightarrow \text{Cone}(f^\bullet) \rightarrow E^\bullet[1] \quad (2.9)$$

ホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  は Abel 圏ではないが、関手 (2.8) と射の系列 (2.9) が存在してある種の性質を満たすことがわかる。このような性質を満たす圏は、次で定義する三角圏と呼ばれるものになる。

**定義 2.5 (三角圏)** 加法圏  $\mathcal{D}$  に対し、以下で述べる転換関手と完全三角形のクラスが指定されていて、(公理 1) から (公理 4) を満たすときに  $\mathcal{D}$  は三角圏 (triangulated category) と呼ばれる：

(i) 転換関手 (shift functor) とは

$$[1]: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

と書かれる自己同値である。対象  $E, F \in \mathcal{D}$ 、射  $f: E \rightarrow F$  に対し、 $[1](E)$  を  $E[1]$ 、 $[1](f)$  を  $f[1]$  などと書くことにする。さらに  $[1]$  の  $n (> 0)$  回合成を  $[n]$  と書き、その擬逆関手を  $[-n]$  と書く。

(ii) 完全三角形 (exact triangle) は射の系列

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1[1]$$

のことである。上の射の系列は、最後の射を省略して

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$$

と書いたり、また

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_2 \\ & \nwarrow [1] & \swarrow \\ & E_3 & \end{array}$$

と三角形の形に書くこともある。ここで、 $E_3 \xrightarrow{[1]} E_1$  は射  $E_3 \rightarrow E_1[1]$  を意

味する。2つの完全三角形  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$  と  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$ , 射  $f, g, h$  が存在して、図式

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & E_1[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_3 & \longrightarrow & F_1[1] \end{array} \quad (2.10)$$

の3つの四角形が可換になるとき、射の組  $(f, g, h)$  を完全三角形の間の射と呼ぶ。

これらは次の公理を満たす。

(公理 1) :

- (a)  $E \xrightarrow{\text{id}} E \rightarrow 0 \rightarrow E[1]$  は完全三角形である。
- (b) 完全三角形と同型な射の系列は完全三角形である。つまり可換な図式 (2.10)において  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$  が完全三角形であり、射  $f, g, h$  が同型であるとき、 $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  も完全三角形である。
- (c) 任意の射  $E_1 \rightarrow E_2$  は完全三角形  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1[1]$  に拡張できる。

(公理 2) : 2つの射の系列

$$\begin{aligned} E_1 &\xrightarrow{u} E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1[1] \\ E_2 &\xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1[1] \xrightarrow{-u[1]} E_2[1] \end{aligned}$$

について、一方が完全三角形であることと他方が完全三角形であることは同値である。

(公理 3) : 2つの完全三角形および次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & E_1[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[1] \\ F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_3 & \longrightarrow & F_1[1] \end{array}$$

を可換にする  $f, g$  が与えられているとする。このとき、射  $h: E_3 \rightarrow F_3$  が存在して  $(f, g, h)$  が完全三角形の間の射となる。<sup>1</sup>

(公理 4) : 8面体図式を、 $\mathcal{D}$  の射からなる次の2つの図式とする：

---

<sup>1</sup> ただし、 $h$  は一意的に決まるとは限らない。

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_1 & \xleftarrow{\quad} & E_3 & \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow \\
 F_1 & \xleftarrow{\quad} & E_2 & \xrightarrow{\quad} & E_3 \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow \\
 & F_3 & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow
 \end{array} \quad (2.11)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_1 & \xleftarrow{\quad} & E_3 & \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow \\
 F_1 & \xleftarrow{\quad} & F_2 & \xrightarrow{\quad} & E_3 \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow \\
 & F_3 & \xrightarrow{\quad} & E_1 & \\
 & \downarrow [1] & \nearrow \circlearrowleft \quad \searrow \circlearrowright & & \uparrow
 \end{array} \quad (2.11)$$

$\triangle$  は完全三角形の意味であり、 $\circlearrowleft$  は可換という意味である。さらに、 $E_2$  から  $F_2$  への 2 つの射 ( $E_3$  を経由するものと  $F_3$  を経由するもの) は一致し、また、 $F_2$  から  $E_2[1]$  への 2 つの射 ( $E_1[1]$  を経由するものと  $F_1$  を経由するもの) は一致するとする。このとき、(2.11) の左の図式が与えられると、これを八面体図式に拡張する右の図式も存在する。

**注意 2.6** (i) 定義 2.5 の公理 1において射  $f: E_1 \rightarrow E_2$  に対して、 $E_3$  は同型を除いて一意に定まる（問題 2.15 参照）。 $E_3$ （の同型類）を  $\text{Cone}(f)$  と書き  $f$  の写像錐 (mapping cone) と呼ぶ。補題 2.11 で述べるように Abel 圈  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  は三角圏となるが、 $K(\mathcal{A})$  の射に対して定義された写像錐と、三角圏に対してここで定義した写像錐は一致する（同型になる）ため、混乱を生じない。

(ii) 定義 2.5 の公理 4 は八面体公理 (octahedral axiom) と呼ばれるものである。図式 (2.11) にある射  $f: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $g: E_2 \rightarrow E_3$  に対し、

$$\text{Cone}(f) = F_3, \quad \text{Cone}(g \circ f) = F_2, \quad \text{Cone}(g) = F_1$$

であるから、八面体公理は完全三角形

$$\text{Cone}(f) \rightarrow \text{Cone}(g \circ f) \rightarrow \text{Cone}(g) \rightarrow \text{Cone}(f)[1]$$

の存在を保証し、さらに次の図式にあるすべての四角形が可換であることを主張する：

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 & \longrightarrow & \text{Cone}(f) & \longrightarrow & E_1[1] \\
 \parallel & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_1 & \xrightarrow{g \circ f} & E_3 & \longrightarrow & \text{Cone}(g \circ f) & \longrightarrow & E_1[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow l & \stackrel{(*)}{\longrightarrow} & \downarrow f[1] \\
 & & \text{Cone}(g) & \xlongequal{\quad} & \text{Cone}(g) & \xrightarrow{h} & E_2[1] \\
 & & \downarrow h & & \downarrow & & \\
 & & E_2[1] & \longrightarrow & \text{Cone}(f)[1] & & 
 \end{array}$$

ここで  $(*)$  のある四角形の可換性より、次の完全三角形の射があることに注意せよ。

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \text{Cone}(g \circ f) & \longrightarrow & E_1[1] \\
 \downarrow f & & \downarrow \text{id} & & \downarrow l & & \downarrow f[1] \\
 E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & \text{Cone}(g) & \longrightarrow & E_2[1].
 \end{array}$$

公理により、次が容易にわかる。

**補題 2.7**  $\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \rightarrow E[1]$  を  $\mathcal{D}$  における完全三角形とする。このとき、 $v \circ u = 0$  である。

**証明** 公理 1(a) と公理 3 により、次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccccc}
 E & \xrightarrow{\text{id}} & E & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E[1] \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow \text{id}[1] \\
 E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & G & \longrightarrow & E[1]
 \end{array}$$

よって、 $v \circ u = 0$  である。  $\square$

**補題 2.8** 三角圏  $\mathcal{D}$  における次の図式の左上の四角形が最初に与えられており、 $\phi_2 \circ e_1 = f_1 \circ \phi_1$  が成り立つとする。

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1 & \xrightarrow{e_1} & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & E_1[1] \\
 \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow & & \downarrow \phi_1[1] \\
 F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_2 & \longrightarrow & F_3 & \longrightarrow & F_1[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_1[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E_1[1] & \longrightarrow & E_2[1] & \longrightarrow & E_3[1] & & 
 \end{array} \tag{2.12}$$

このとき図式のすべての行と列を完全三角形とし、さらにすべての四角形を可換とするような対象  $E_3, F_3, G_1, G_2, G_3$  と射が存在する。

**証明**  $E_3 = \text{Cone}(e_1), F_3 = \text{Cone}(f_1)$  とし、さらに  $H := \text{Cone}(\phi_2 \circ e_1)$  とおくと完全三角形

$$E_1 \rightarrow F_2 \rightarrow H \rightarrow E_1[1] \tag{2.13}$$

が得られる。さらに

$$G_1 := \text{Cone}(\phi_1), G_2 := \text{Cone}(\phi_2)$$

とおくと、 $\phi_2 \circ e_1 = f_1 \circ \phi_1$  であることから八面体公理より完全三角形

$$\begin{aligned}
 E_3 &\xrightarrow{u} H \rightarrow G_2 \rightarrow E_3[1] \\
 G_1 &\rightarrow H \xrightarrow{v} F_3 \rightarrow G_1[1]
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

が得られる。 $\phi_3 := v \circ u$  とし

$$G_3 := \text{Cone}(\phi_3)$$

とおくと、再び八面体公理から完全三角形

$$G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_1[1]$$

が得られる。

図式 (2.12) の 1 行目の完全三角形から完全三角形 (2.13) への射があり、完全三角形 (2.13) から図式 (2.12) の 2 行目の完全三角形への射が存在する（注意 2.6 (iii)）。これらの合成が図式 (2.12) の 1 行目から 2 行目の完全三角形への射である

から、図式 (2.12) の上段の各四角形は可換である。

図式 (2.12) の 2 行目の完全三角形から完全三角形 (2.14) への射があり、完全三角形 (2.14) から図式 (2.12) の 3 行目の完全三角形への射が存在する。これらの合成が図式 (2.12) の 2 行目から 3 行目の完全三角形への射であるから、図式 (2.12) の中段の各四角形は可換である。□

**定義 2.9**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を三角圏とし、 $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を加法関手とする。 $\Phi$  は次の条件を満たすとき、三角関手 (triangle functor)、もしくは完全関手 (exact functor) と呼ぶ：

- (i)  $\Phi$  は  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  の転換関手と可換である。つまり、関手の同型  $\Phi \circ [1] \cong [1] \circ \Phi$  が存在する。
- (ii)  $\Phi$  は  $\mathcal{C}$  の完全三角形を  $\mathcal{D}$  の完全三角形に移す。つまり、 $\mathcal{C}$  における完全三角形

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1[1]$$

に  $\Phi$  を施し、(i) の同型  $\Phi(E_1[1]) \cong \Phi(E_1)[1]$  と合成して得られる系列

$$\Phi(E_1) \rightarrow \Phi(E_2) \rightarrow \Phi(E_3) \rightarrow \Phi(E_1)[1]$$

は  $\mathcal{D}$  における完全三角形である。

三角関手  $\Phi$  が圏の同値を与えるとき、擬逆関手も三角関手になることがわかる ([Huy06, Proposition 1.41])。そこでこのとき  $\Phi$  を三角同値 (triangulated equivalence) と呼ぶ。

$\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の充満部分圏とする。 $\mathcal{C}$  は次の条件を満たすときに充満部分三角圏 (full triangulated subcategory) と呼ぶ。

- (i)  $\mathcal{D}$  の転換関手  $[1]$  は  $\mathcal{C}$  の自己同値  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  に制限される。
- (ii)  $\mathcal{D}$  の完全三角形  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1[1]$  に対して、 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$  ならば  $E_3 \in \mathcal{C}$  である。

このとき、 $\mathcal{C}$  には  $\mathcal{D}$  から自然に誘導される三角圏の構造が入り、埋め込み関手  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  が三角関手となる。逆に、すべての充満部分三角圏はこのように充満忠実な三角関手の像として得られる。

**注意 2.10** 定義 2.9において、 $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ ,  $\Phi = [1]$  とおいてみる。まず、定義 2.9(i)

の同型  $[1] \circ [1] \cong [1] \circ [1]$  として  $\text{id}$  をとる。このとき、三角圏  $\mathcal{D}$  における完全三角形

$$E_1 \xrightarrow{u} E_2 \xrightarrow{v} E_3 \xrightarrow{w} E_1[1] \quad (2.15)$$

に転換関手  $[1]$  を施すと、系列

$$E_1[1] \xrightarrow{u[1]} E_2[1] \xrightarrow{v[1]} E_3[1] \xrightarrow{w[1]} E_1[2] \quad (2.16)$$

を得る。一方、定義 2.5 の公理 2 から従うのは

$$E_1[1] \xrightarrow{-u[1]} E_2[1] \xrightarrow{-v[1]} E_3[1] \xrightarrow{-w[1]} E_1[2] \quad (2.17)$$

が完全三角形であるということであり、これは一般に (2.16) と同型ではない。実際、(2.16) は完全三角形になるとは限らない。

一方、(i) の同型  $[1] \circ [1] \cong [1] \circ [1]$  として  $-\text{id}$  をとる。このとき、完全三角形 (2.15) に転換関手  $[1]$  を施し、(i) の同型と合成して得られる系列

$$E_1[1] \xrightarrow{u[1]} E_2[1] \xrightarrow{v[1]} E_3[1] \xrightarrow{-w[1]} E_1[2]$$

は (2.17) と同型であり、よって完全三角形となる。特に、転換関手  $[1]$  は完全関手である。このように、完全関手について述べる際には (i) の同型の取り方が重要になる。

$\mathcal{A}$  を Abel 圏とし、 $K(\mathcal{A})$  を定義 2.3 のホモトピー圏とする。 $K(\mathcal{A})$  には関手 (2.8) と射の系列 (2.9) が存在することを見た。関手 (2.8) を転換関手と定め、(2.9) と同型な射の系列を完全三角形と定めると、 $K(\mathcal{A})$  は定義 2.5 の公理をすべて満たすことがわかる。つまり、次が成立する。

**補題 2.11**  $K(\mathcal{A})$  は三角圏であり、 $* \in \{\pm, b\}$  に対して  $K^*(\mathcal{A}) \subset K(\mathcal{A})$  は充満部分三角圏を定める。

**証明**  $K(\mathcal{A})$  が定義 2.5 の公理を満たすことは容易にチェックできる。ただし、 $C(\mathcal{A})$  は定義 2.5 の公理を満たさず、ホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  をとる必要があることに注意する。例えば  $E \in \mathcal{A}$  に対して、 $\text{id}: E \rightarrow E$  の写像錐をとると複体  $(\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{id}} E \rightarrow 0 \cdots)$  となる。この複体は 0 とホモトピー同値であるが、 $C(\mathcal{A})$ において 0 と同型ではないため  $C(\mathcal{A})$  は公理 1(a) を満たさない。定義 2.5 がチェックされれば、 $K^*(\mathcal{A})$  が  $K(\mathcal{A})$  の充満部分三角圏であることは明らかである。□

## 2.4 コホモロジー的関手

三角圏の構造を調べる際に重要なのが、コホモロジー的関手という概念である。以下に、定義を与える：

**定義 2.12 (コホモロジー的関手)**  $\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $\mathcal{A}$  を Abel 圈、 $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$  を加法関手とする。任意の完全三角形  $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E[1]$  に対して系列

$$\cdots \rightarrow \Phi^i(E) \rightarrow \Phi^i(F) \rightarrow \Phi^i(G) \rightarrow \Phi^{i+1}(E) \rightarrow \cdots$$

が  $\mathcal{A}$  における長完全系列となるとき、 $\Phi$  をコホモロジー的関手 (cohomological functor) と呼ぶ。ただし、 $\Phi^i(E) := \Phi(E[i])$  とおいた。

重要なコホモロジー的関手の例を挙げよう。

**補題 2.13**  $\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $M \in \mathcal{D}$  とする。このとき、関手

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, -): \mathcal{D} \rightarrow \text{Mod } \mathbb{Z}$$

はコホモロジー的関手である。

**証明** 定義 2.5 の公理 2 より、任意の完全三角形  $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \rightarrow E[1]$  に対して定まる系列

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, G) \quad (2.18)$$

が完全であることを示せばよい。補題 (2.7) より、系列 (2.18) における射の合成は 0 である。 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, F)$  で  $v \circ f = 0$  となるものをとる。すると、定義 2.5 の公理 1 (a) と公理 3 より、射  $g: M \rightarrow E$  と次の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\text{id}} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M[1] \\ \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g[1] \\ E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & G & \longrightarrow & E[1]. \end{array}$$

よって  $f = u \circ g$  となり、系列 (2.18) の完全性がわかる。□

$\mathcal{A}$  を Abel 圈とし、 $E^\bullet = (\cdots \rightarrow E^i \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots)$  を  $\mathcal{A}$  の対象の複体とする。 $E^\bullet$  の  $i$  番目のコホモロジーを

$$\mathcal{H}^i(E^\bullet) := \text{Ker } d^i / \text{Im } d^{i-1} \in \mathcal{A}$$

と定義する. 複体の射  $f^\bullet: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  に対して  $\mathcal{H}^i(f^\bullet): \mathcal{H}^i(E^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(F^\bullet)$  は  $f^\bullet$  のホモトピー類に依存しないことが容易に確認でき, 関手

$$\mathcal{H}^i(-): K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} \quad (2.19)$$

が定まる.

**補題 2.14** 関手  $\mathcal{H}^i(-)$  はコホモロジー的関手である.

**証明**  $K(\mathcal{A})$  における完全三角形  $E^\bullet \rightarrow F^\bullet \rightarrow G^\bullet \rightarrow E^\bullet[1]$  が誘導する  $\mathcal{A}$  における系列

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}^i(E^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(F^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(G^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(E^\bullet) \rightarrow \cdots \quad (2.20)$$

が完全系列であることを示せばよい. これを示すには,  $G^\bullet$  が複体の間の射  $f^\bullet: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  の写像錐であるとしてよい. すると主張は写像錐の記述を用いて容易に確認できる.  $\square$

**問題 2.15** 三角圏  $\mathcal{D}$  を考える.

(i)  $\mathcal{D}$  の図式

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_3 & \longrightarrow & E_1[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_3 & \longrightarrow & F_1[1] \end{array} \quad (2.21)$$

を完全三角形の間の射とする.  $f, g$  が同型のとき,  $h$  も同型であることを示せ. (ヒント: 図式 (2.21) に関手  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_3, -)$  を当てはめ, 得られた Abel 群の可換図式に 5 項補題を用いる.) さらに定義 2.5 の公理 1(c) で得られる  $E_3$  は同型を除いて一意的であることを示せ.

(ii)  $\mathcal{D}$  の 2 つの完全三角形  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3$ ,  $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$  と射  $g: E_2 \rightarrow F_2$  が与えられているとする. もし

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, F_3) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, F_3[-1]) = 0$$

ならば, 図式 (2.21) を可換にする射  $f, h$  がそれぞれただ 1 つずつ存在するこ

とを示せ.

定義 2.5 の公理 3 で存在を保証した  $h$  はただ 1 つとは限らないことをすでに述べたが、問題 2.15(ii) のような設定では  $h$  はただ 1 つ存在する。この事実を使って、例えば問題 4.19 にある関手の存在が示される。

## 2.5 三角圏の局所化

ホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  は三角圏となるが、導来圏を定義するにはさらに局所化というステップが必要になる。この局所化の操作は、環の積閉集合による局所化の一一般化である。実際、三角圏上に次で定義される積閉系を与えるとその局所化を構成できる：

**定義 2.16 (積閉系)**  $\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $S$  を  $\mathcal{D}$  における射の集合とする。 $S$  は次の公理を満たすとき、 $\mathcal{D}$  における射の積閉系 (multiplicative system) と呼ばれる。

(公理 1) :  $f, g \in S$  とし、 $fg$  が存在するならば  $fg \in S$  である。また、任意の  $E \in \mathcal{D}$  に対して  $\text{id}_E \in S$  である。

(公理 2) :  $\mathcal{D}$  における任意の図式

$$\begin{array}{ccc} & E_3 & \\ & \downarrow s & \\ E_1 & \xrightarrow{u} & E_2 \end{array} \tag{2.22}$$

で  $s \in S$  となるものを与える。すると  $t \in S$  と  $\mathcal{D}$  における射  $v$  が存在し、上の図式は  $\mathcal{D}$  における可換図式

$$\begin{array}{ccc} & E_3 & \\ & \downarrow s & \\ E_4 & \xrightarrow{v} & E_3 \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ E_1 & \xrightarrow{u} & E_2 \end{array} \tag{2.23}$$

に拡張する。また、この性質は図式 (2.22), (2.23) の矢印の向きをすべて逆にしても成立する。

(公理 3) :  $f, g: E \rightarrow F$  を  $\mathcal{D}$  における射とすると、次の 2 条件は同値である：

(a)  $S$  における射  $s: F \rightarrow F'$  が存在して、 $sf = sg$ .

(b)  $S$  における射  $t: E' \rightarrow E$  が存在して,  $ft = gt$ .

(公理4) :  $s \in S$  であることと  $s[1] \in S$  であることは同値である. ここで,  $[1]$  は  $\mathcal{D}$  における転換関手である.

(公理5) : 定義2.5の図式(2.10)で与えられる完全三角形の間の射において,  $f, g \in S$  ならば  $h \in S$  である.

$S$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の積閉系として,  $\mathcal{D}$  の  $S$  による局所化  $S^{-1}\mathcal{D}$  を構成しよう. まず,  $S^{-1}\mathcal{D}$  の対象は  $\mathcal{D}$  の対象と同じものとする.  $E, F$  を  $\mathcal{D}$  の対象として,  $S^{-1}\mathcal{D}$  における  $E$  から  $F$  への射の集合を

$$\varinjlim_{I_E} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E', F) \quad (2.24)$$

と定義する. ここで,  $I_E$  は圏であり, 対象は  $S$  における射  $s_1: E_1 \rightarrow E$  からなり,  $s_1$  から  $(s_2: E_2 \rightarrow E) \in I_E$  への射は可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\quad} & E_2 \\ & \searrow s_1 & \swarrow s_2 \\ & E & \end{array}$$

で定める. こうして定めた圏  $I_E$  に対し, 反変関手

$$I_E \rightarrow \text{Mod } \mathbb{Z}, (E' \rightarrow E) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E', F)$$

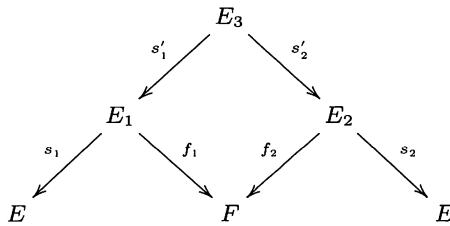
の極限をとったものが(2.24)である. 別の言い方をすると, (2.24)の元は  $s_1 \in S$  と図式

$$\begin{array}{ccc} & E_1 & \\ s_1 \swarrow & & \searrow f_1 \\ E & & F \end{array} \quad (2.25)$$

によって代表され, 図式(2.25)と次の図式

$$\begin{array}{ccc} & E_2 & \\ s_2 \swarrow & & \searrow f_2 \\ E & & F \end{array}$$

は,  $f_1 \circ s'_1 = f_2 \circ s'_2$ , および  $s_1 \circ s'_1 = s_2 \circ s'_2$  が成り立つような  $S$  の射  $s'_1: E_3 \rightarrow E_1$  と  $s'_2: E_3 \rightarrow E_2$  が存在するときに(2.24)において同じ元を定める:



図式 (2.25) で代表される  $\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{D}}(E, F)$  の元をしばしば  $f_1 s_1^{-1}$  などと記す.

さて次に  $s, t \in S$  と 2 つの図式

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & & F_1 \\
 \swarrow s & \searrow f & \swarrow t & \searrow g \\
 E & F & F & G
 \end{array} \tag{2.26}$$

の合成を定めよう. 定義 2.16 の公理 2 と  $t \in S$  により,  $u \in S$  と次の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc}
 E_2 & \xrightarrow{h} & F_1 \\
 \downarrow u & & \downarrow t \\
 E_1 & \xrightarrow{f} & F
 \end{array}$$

これを用いて, (2.26) の 2 つの図式の合成を図式

$$\begin{array}{ccc}
 E_2 & & F_1 \\
 \swarrow s \circ u & \searrow g \circ h & \\
 E & & G
 \end{array} \tag{2.27}$$

で定める. 定義 2.16 の公理 1 により  $s \circ u \in S$  なので, 図式 (2.27) は (2.24) の元を定める. これは矛盾なく定まり, さらに射の結合法則を満たすことも確認でき,  $S^{-1}\mathcal{D}$  は圏になる. また, 定義 2.16 の公理 3, 4, 5 を用いると,  $E \mapsto E$  による自然な閑手

$$Q: \mathcal{D} \rightarrow S^{-1}\mathcal{D} \tag{2.28}$$

が三角閑手となるように  $S^{-1}\mathcal{D}$  上の三角圏の構造を一意的に定めることができ. つまり,  $S^{-1}\mathcal{D}$  における転換閑手は  $\mathcal{D}$  の転換閑手から誘導されるものとし,  $S^{-1}\mathcal{D}$  における完全三角形を  $\mathcal{D}$  における完全三角形の  $Q$  による像と同型となるも

のと定めると,  $S^{-1}\mathcal{D}$  は三角圏になる. 構成により, 任意の  $s \in S$  に対して  $Q(s)$  は同型射である. さらに, 局所化  $S^{-1}\mathcal{D}$  は次の普遍性を持つこともわかる. 証明は容易であるため, 読者に委ねる.

**補題 2.17**  $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  を三角圏の間の三角関手とし,  $S$  を  $\mathcal{D}$  における積閉系とする. 任意の  $s \in S$  に対して  $\Phi(s)$  が同型射であるとする. このとき, (自然同型を除いて) 一意的に三角関手  $\Phi': S^{-1}\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  が存在して  $\Phi \cong \Phi' \circ Q$  が成立する.

**注意 2.18** 定義 2.16 の公理を用いると,  $S^{-1}\mathcal{D}$  における射の空間 (2.24) は次のようにも記述できる:

$$\varinjlim_{J_F} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F') \quad (2.29)$$

ここで  $J_F$  は対象が  $S$  における射  $F \rightarrow F'$  からなる圏である. 証明は読者に委ねる.

## 2.6 Abel 圏の導來圏

$\mathcal{A}$  を Abel 圏とする.  $\mathcal{A}$  の対象の複体のなす圏のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  は三角圏になることを補題 2.11 で見た. この節では,  $K(\mathcal{A})$  における積閉系  $S$  を構成し,  $K(\mathcal{A})$  を  $S$  で局所化することで  $\mathcal{A}$  の導來圏  $D(\mathcal{A})$  を定義する.  $f^*: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  を  $K(\mathcal{A})$  における射とすると, コホモロジーをとるという関手  $\mathcal{H}^i(-)$  により  $f$  はコホモロジーの間の射

$$\mathcal{H}^i(f^*): \mathcal{H}^i(E^\bullet) \rightarrow \mathcal{H}^i(F^\bullet)$$

を誘導する. すべての  $i$  について  $\mathcal{H}^i(f^*)$  が同型となる時,  $f^*$  は擬同型 (quasi-isomorphism) であるといい, また複体  $E^\bullet$  は任意の  $i \in \mathbb{Z}$  に対して  $\mathcal{H}^i(E^\bullet) = 0$  となる時, 非輪状 (acyclic) と呼ばれる. 次の補題は便利である:

**補題 2.19**  $K(\mathcal{A})$  における射  $f^*: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  が擬同型であることと, 写像錐  $\text{Cone}(f^*)$  が非輪状であることは同値である.

**証明** 補題 2.14 より明らかである. □

$S$  を  $K(\mathcal{A})$  におけるすべての擬同型射を集めた集合とする. 次が成立する:

**補題 2.20**  $S$  は  $K(\mathcal{A})$  における積閉系である.

**証明** 定義 2.16 における公理をすべて確認すればよい。公理 1 と 4 は自明である。公理 5 は長完全系列 (2.20) と 5 項補題から従う。公理 2 を示すために、 $E_1, E_2, E_3 \in K(\mathcal{A})$  と  $K(\mathcal{A})$  における図式 (2.22) を与える。定義 2.5 の公理 1(c) を用いて、次の完全三角形を得る：

$$\begin{array}{ccc} E_3 & \xrightarrow{s} & E_2 \\ \nearrow [1] & \searrow f & \\ F & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_4 & \xrightarrow{t} & E_1 \\ \nearrow [1] & \searrow f \circ u & \\ F & & \end{array}$$

さらに可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} E_4 & \xrightarrow{t} & E_1 & \xrightarrow{f \circ u} & F & \longrightarrow & E_4[1] \\ \downarrow v & & \downarrow u & & \downarrow \text{id} & & \downarrow v[1] \\ E_3 & \xrightarrow{s} & E_2 & \xrightarrow{f} & F & \longrightarrow & E_3[1] \end{array} \quad (2.30)$$

と定義 2.5 の公理 3 により、射  $v: E_4 \rightarrow E_3$  が存在して、図式 (2.23) が可換になる。よって  $t$  が擬同型であることを示せばよいが、これは図式 (2.30) の下段、上段それぞれに補題 2.19 を適用することで得られる。図式 (2.22), (2.23) の矢印の向きを逆にしても、同様の性質が成り立つことが同様の議論で証明できる。

最後に公理 3 を示す。 $f, g$  を定義 2.16 の公理 3 の記号の通りとし、 $h = f - g$  とおく。公理 3 の (a) を仮定すると、擬同型  $s: F \rightarrow F'$  で  $s \circ h = 0$  を満たすものが存在する。 $s$  を完全三角形  $G \rightarrow F \rightarrow F' \rightarrow G[1]$  に拡張する。すると、補題 2.13 により  $h$  は射  $E \rightarrow G$  を経由する。この射を完全三角形  $E' \xrightarrow{t} E \rightarrow G \rightarrow E'[1]$  に拡張する。まとめると、次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{h} & F & \xrightarrow{s} & F' \\ \uparrow t & \searrow & \uparrow & & \nearrow [1] \\ E' & \xleftarrow{[1]} & G & & \end{array} \quad (2.31)$$

上の図式と、補題 2.7 により  $h \circ t = 0$  であり、よって  $f \circ t = g \circ t$  となる。(b) の成立を示すには  $t$  が擬同型であることを示せばよいが、これは補題 2.19 を図式 (2.31) の完全三角形に当てはめることで従う。よって (a) が成り立てば (b) が成り立つことが示された。(b) が成り立てば (a) が成り立つことも同様に示される。□

**定義 2.21 (導來圏)**  $\mathcal{A}$  を Abel 圏とする。 $S$  を  $K(\mathcal{A})$  における擬同型射からなる積閉系とする。このとき、 $D(\mathcal{A})$  を

$$D(\mathcal{A}) := S^{-1}K(\mathcal{A})$$

と定義する。 $D(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{A}$  の導來圏 (derived category) と呼ぶ。

**問題 2.22**  $\mathcal{A}$  を Abel 圏、 $f \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(E, F)$  に対し、

$$C(\mathcal{A}) \text{ で } f = 0 \Rightarrow K(\mathcal{A}) \text{ で } f = 0 \Rightarrow D(\mathcal{A}) \text{ で } f = 0 \Rightarrow \forall i \mathcal{H}^i(f) = 0$$

が成り立つ。<sup>2</sup>以下を示すことで、それぞれの逆が成り立たないことを確認せよ。

- (i) 射  $(E \xleftarrow{s} E' \xrightarrow{f} F) \in \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F)$  が 0 射であるための必要十分条件は、ある擬同型射  $t: E'' \rightarrow E'$  が存在し、 $f \circ t$  が 0 とホモトピックになることがある。
- (ii) Abel 群の非輪状複体

$$E^\bullet := (0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0)$$

を考える。0 射  $t: 0 \rightarrow E^\bullet$  は擬同型であり、 $\text{id}_{E^\bullet} \circ t = 0$  であるが、 $\text{id}_{E^\bullet}$  は  $0: E^\bullet \rightarrow E^\bullet$  とホモトピックにはならない。

- (iii) 複体の射  $f: E^\bullet \rightarrow F^\bullet$  を

$$\begin{array}{ccccccc} E^\bullet & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E^0 = \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & E^1 = \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \\ \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow f^0 = \text{id}_{\mathbb{Z}} & & \downarrow f^1 = 2 \\ F^\bullet & \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F^0 = \mathbb{Z} & \xrightarrow[1]{} & F^1 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

と定めると、任意の  $i$  に対し、 $\mathcal{H}^i(f) = 0$  が成り立つが、 $f \circ t$  が 0 とホモトピックになるような擬同型射  $t: E'^\bullet \rightarrow E^\bullet$  は存在しない。(ヒント: このようなホモトピー  $h^i: E'^i \rightarrow F^{i-1}$  と擬同型  $t$  が存在すると仮定し、 $x \in \text{Ker } d_{E'^\bullet}^1$  を  $\bar{x}$  が  $\mathcal{H}^1(E'^\bullet) \xrightarrow{t^1} \mathcal{H}^1(E^\bullet) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を生成しているようにとる。さらに  $y \in E'^0$  であって、 $d_{E'^\bullet}^0(y) = 2x$  を満たすものをとると、 $t^0(y) = 2h^1(x)$  となり、特にこれは偶数となる。一方  $t^0(y) = t^1(x)$  であり、これは  $\overline{t^1(x)}$  が  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  を生成していることに反する。)

構成から、 $D(\mathcal{A})$  は三角圏である。また  $* \in \{\pm, b\}$  に対して  $K^*(\mathcal{A})$  を擬同型

<sup>2</sup>  $f = f \text{id}_E^{-1}$  とみなすことで、 $D(\mathcal{A})$  の射であると思える。

射で局所化することで充満部分三角圏

$$D^*(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A})$$

も得る。さらに、 $\mathcal{A}$  から  $D^*(\mathcal{A})$  への加法関手

$$E \mapsto (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

が充満忠実であることも容易にわかる。ただし右の複体の 0 番目の項が  $E$  である。この対応により、以後  $\mathcal{A}$  を  $D^*(\mathcal{A})$  の部分圏とみなす。次の補題により導來圏における完全三角形が  $\mathcal{A}$  における完全系列を拡張した概念であることがわかる：

**補題 2.23**  $C(\mathcal{A})$  における完全系列

$$0 \rightarrow E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \rightarrow 0$$

は  $D(\mathcal{A})$  における完全三角形

$$E^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} F^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} G^\bullet \rightarrow E^\bullet[1]$$

を与える。

**証明**  $\text{Cone}(f^\bullet)$  から  $G^\bullet$  への複体としての射を

$$\text{Cone}(f^\bullet)^i = F^i \oplus E^{i+1} \ni (x, y) \mapsto g^i(x) \in G^i$$

と定める。これは  $\text{Cone}(f^\bullet)$  と  $G^\bullet$  の間の擬同型であることが容易にわかる。よって、 $\text{Cone}(f^\bullet)$  と  $G^\bullet$  は  $D(\mathcal{A})$  において同型であり、補題が従う。□

各  $i \in \mathbb{Z}$  と  $E^\bullet = (\cdots \rightarrow E^i \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots) \in D(\mathcal{A})$  に対して、標準フィルトレーション (canonical filtration)  $\tau_{\leq i} E^\bullet (= \tau_{< i+1} E^\bullet)$  と  $\tau_{> i} E^\bullet (= \tau_{\geq i+1} E^\bullet)$  を次で定める：

$$\begin{aligned} \tau_{\leq i} E^\bullet &:= (\cdots \rightarrow E^{i-2} \rightarrow E^{i-1} \rightarrow \text{Ker } d_E^i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots) \\ \tau_{> i} E^\bullet &:= (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Im } d_E^i \rightarrow E^{i+1} \rightarrow E^{i+2} \rightarrow \cdots) \end{aligned} \quad (2.32)$$

すると、補題 2.23 により次の  $D(\mathcal{A})$  における完全三角形が存在する：

$$\tau_{\leq i} E^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow \tau_{> i} E^\bullet \rightarrow \tau_{\leq i} E^\bullet[1] \quad (2.33)$$

また、標準フィルトレーションは次を満たす：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^j(\tau_{\leq i} E^\bullet) &= \begin{cases} \mathcal{H}^j(E^\bullet) & j \leq i \\ 0 & j > i \end{cases} \\ \mathcal{H}^j(\tau_{>i} E^\bullet) &= \begin{cases} 0 & j \leq i \\ \mathcal{H}^j(E^\bullet) & j > i. \end{cases}\end{aligned}$$

**注意 2.24** 対応  $E^\bullet \mapsto \tau_{\leq i} E^\bullet$ ,  $E^\bullet \mapsto \tau_{>i} E^\bullet$  は擬同型を擬同型に移すため、関手

$$\tau_{\leq i}, \tau_{>i}: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$$

が定まる。一方、上の関手は転換関手と可換ではないため、三角関手ではないことに注意する。

標準フィルトレーションを用いて、次の補題を示すことができる。

**補題 2.25** 対象  $E^\bullet \in D(\mathcal{A})$  が  $D^+(\mathcal{A})$  の対象と同型になることと、 $\mathcal{H}^i(E^\bullet) = 0$  が  $i \ll 0$  で成立することは同値である。

**証明**  $E^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$  ならば、 $i \ll 0$  で明らかに  $\mathcal{H}^i(E^\bullet)$  は 0 になる。逆に  $\mathcal{H}^i(E^\bullet) = 0$  が  $i \ll 0$  で成立するなら、 $D(\mathcal{A})$  において  $\tau_{\leq i}(E^\bullet) = 0$  が  $i \ll 0$  で成り立つ。よって完全三角形 (2.33) により  $E^\bullet \rightarrow \tau_{>i} E^\bullet$  は  $i \ll 0$  で擬同型になり、よって  $D(\mathcal{A})$  において同型になる。 $\tau_{>i} E^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$  なので、補題が従う。□

補題 2.25 と同様に、 $E^\bullet \in D(\mathcal{A})$  が  $D^-(\mathcal{A})$  の対象と同型になることと、 $\mathcal{H}^i(E^\bullet) = 0$  が  $i \gg 0$  で成立することは同値である。また (2.23)において、 $E^\bullet$  の代わりに

$$\tau_{\geq i} \tau_{\leq i+1} E^\bullet = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Im } d_E^{i-1} \rightarrow E^i \rightarrow \text{Ker } d_E^{i+1} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

をおくことにより、完全三角形

$$\mathcal{H}^i(E^\bullet)[-i] \rightarrow \tau_{\geq i} \tau_{\leq i+1} E^\bullet \rightarrow \mathcal{H}^{i+1}(E^\bullet)[-i-1] \xrightarrow{e^{i+1}(E^\bullet)} \mathcal{H}^i(E^\bullet)[-i+1] \quad (2.34)$$

が存在する。各  $i$  に対して定めた  $e^i(E^\bullet)$  は  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\mathcal{H}^i(E^\bullet), \mathcal{H}^{i-1}(E^\bullet)[2])$  の元であることに注意されたい。実は  $\text{gl.dim } \mathcal{A} \leq 2$  (定義 6.17 を参照) を満たすときは  $e^i(E^\bullet)$  と  $E^\bullet$  の各コホモロジーで  $E^\bullet$  の同型類が定まることを保証するのが次の命題である。

**命題 2.26** Abel 圏  $\mathcal{A}$  が  $\text{gl.dim } \mathcal{A} \leq 2$  を満たすとする.  $\mathcal{A}$  の有界な導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  と整数  $i \in \mathbb{Z}$  に対し, 有限個の  $i$  を除いて 0 となるような対象  $F^i \in \mathcal{A}$  と, 元  $e^i \in \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(F^i, F^{i-1}[2])$  が与えられているとする. このとき対象  $E^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$  と同型  $\mu_i : \mathcal{H}^i(E^\bullet) \xrightarrow{\sim} F^i$  が存在し,  $\mu_{i-1}[2] \circ e^i(E^\bullet) = e^i \circ \mu_i$  が成り立つ. この  $E^\bullet$  は同型を除いてただ 1 つ存在する.

命題 2.26 の証明は [IU05, Proposition 4.2] にある.

**注意 2.27** 複体 (2.32) と類似であるが, より単純な次の **stupid** フィルトレーション (stupid filtration) も構成できる:

$$\sigma_{\leq i} E^\bullet = \sigma_{< i+1} E^\bullet := (\cdots \rightarrow E^{i-2} \rightarrow E^{i-1} \rightarrow E^i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots) \quad (2.35)$$

$$\sigma_{>i} E^\bullet = \sigma_{\geq i+1} E^\bullet := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E^{i+1} \rightarrow E^{i+2} \rightarrow E^{i+3} \rightarrow \cdots)$$

stupid フィルトレーションは,  $D(\mathcal{A})$  における次の完全三角形を与える:

$$\sigma_{>i} E^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow \sigma_{\leq i} E^\bullet \rightarrow \sigma_{>i} E^\bullet[1] \quad (2.36)$$

最後にある種の導來圏に関する次の注意を述べておこう.

**注意 2.28** Abel 圏  $\mathcal{A}$  が  $\text{gl.dim } \mathcal{A} \leq 1$  を満たすとする. 例えば関係式のない簇の表現のなす Abel 圏, 滑らかな代数曲線の連接層のなす Abel 圏, ベクトル空間のなす Abel 圏などはこの仮定を満たす. このとき導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  の任意の対象  $E^\bullet$  とすべての  $i \in \mathbb{Z}$  に対し,  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\mathcal{H}^i(E^\bullet), \mathcal{H}^{i-1}(E^\bullet)[2])$  の元  $e^i(E^\bullet)$  は 0 となり, 命題 2.26 から明らかに

$$E^\bullet \cong \bigoplus_i \mathcal{H}^i(E^\bullet)[-i]$$

が成り立つ. したがってこの場合, 導來圏は極めて扱いが容易である.

## 2.7 導來関手

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  を Abel 圏,  $* \in \{\pm, b\}$  とし, ホモトピー圏の間の三角関手

$$\Phi: K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B}) \quad (2.37)$$

を考える.

**例 2.29**  $\Upsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を加法関手とする. すると,  $\mathcal{A}$  の対象の複体  $E^\bullet$  に対して  $\mathcal{B}$

の対象の複体

$$\Phi(E^\bullet) := \cdots \rightarrow \Upsilon(E^{i-1}) \rightarrow \Upsilon(E^i) \rightarrow \Upsilon(E^{i+1}) \rightarrow \cdots$$

が得られる。対応  $E^\bullet \mapsto \Phi(E^\bullet)$  は、三角関手  $\Phi: K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  を与える。しかし、必ずしもすべての三角関手 (2.37) がこのように得られるわけではない。

三角関手  $\Phi: K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  は擬同型射を擬同型射に移すとは限らないので、必ずしも導來圏の間の関手を誘導するわけではない。もとの  $\Phi$  に最も近い形で導來圏の間の関手を構成することを考えるのは自然であり、このような関手は導來関手と呼ばれる。導來関手は次の普遍性で特徴付けられる。

**定義 2.30** (右導來関手)  $* \in \{\emptyset, \pm, b\}$  とする。 $\Phi$  の右導來関手 (right derived functor) とは、三角関手

$$\mathbf{R}\Phi: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$$

および  $K^*(\mathcal{A})$  から  $D(\mathcal{B})$  への関手の間の自然変換

$$\eta: Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi \rightarrow \mathbf{R}\Phi \circ Q_{\mathcal{A}} \quad (2.38)$$

であって、次の普遍性を持つものである：任意の三角関手  $\Psi: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$  および自然変換  $\iota: Q_{\mathcal{A}} \circ \Phi \rightarrow \Psi \circ Q_{\mathcal{B}}$  に対して、同型を除いて一意的に自然変換  $\sigma: \mathbf{R}\Phi \rightarrow \Psi$  が存在して  $\iota = Q_{\mathcal{A}}^* \sigma \circ \eta$  が成立する。ここで  $Q_{\mathcal{A}}: K(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$  は (2.28) における自然な関手であり、 $Q_{\mathcal{B}}$  も同様である。

**注意 2.31**  $\Phi$  の左導來関手も、三角関手

$$\mathbf{L}\Phi: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$$

および自然変換  $\mathbf{L}\Phi \circ Q_{\mathcal{B}} \rightarrow Q_{\mathcal{A}} \circ \Phi$  で、定義 2.30 と同様の普遍性を持つものとして定義される。

**注意 2.32** 例 2.29 のように三角関手  $\Phi: K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  が Abel 圏の間の加法関手  $\Upsilon: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  から誘導される場合、 $\mathbf{R}\Phi$ ,  $\mathbf{L}\Phi$  をそれぞれ  $\Upsilon$  の右導來関手、左導來関手とも呼ぶ。

定義 2.30 の普遍性により、導來関手は存在すれば同型を除いて一意に定まる。また次の命題を用いると、様々な状況で導來関手を構成できる：

**命題 2.33**  $* \in \{\emptyset, \pm, b\}$  とし、三角関手  $\Phi: K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  が与えられている

とする。また  $\mathcal{C}$  を  $K^*(\mathcal{A})$  の充満部分三角圏とし、次の 2 条件を仮定する。

- (i) 任意の  $E^\bullet \in K^*(\mathcal{A})$  に対して  $I^\bullet \in \mathcal{C}$  と擬同型  $E^\bullet \rightarrow I^\bullet$  が存在する。
- (ii) 対象  $I^\bullet \in \mathcal{C}$  が非輪状であるなら、 $\Phi(I^\bullet)$  も非輪状である。

このとき、 $\Phi$  は右導來関手  $(\mathbf{R}\Phi, \eta)$  を持ち、任意の  $I^\bullet \in \mathcal{C}$  に対して射

$$\eta(I^\bullet): Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi(I^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}\Phi \circ Q_{\mathcal{A}}(I^\bullet) \quad (2.39)$$

は  $D(\mathcal{B})$  において同型となる。

**証明**  $S_{\mathcal{C}}$  を  $\mathcal{C}$  における擬同型射の集合とする。補題 2.20 の証明と同様に  $S_{\mathcal{C}}$  は  $\mathcal{C}$  の積閉系を定める。補題 2.17 により、自然な関手  $\mathcal{C} \hookrightarrow K^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$  は三角関手

$$T: S_{\mathcal{C}}^{-1}\mathcal{C} \rightarrow D^*(\mathcal{A})$$

を誘導する。ここで条件 (i) を用いると、三角関手  $T$  が三角同値になることが従う。一方、条件 (ii) と補題 2.19 により  $\mathcal{C}$  から  $K(\mathcal{B})$  への関手  $\Phi|_{\mathcal{C}}$  は擬同型射を擬同型射に移す。よって再び補題 2.17 を用いると、三角関手

$$\Phi_{\mathcal{C}}: S_{\mathcal{C}}^{-1}\mathcal{C} \rightarrow D(\mathcal{B})$$

が誘導される。そこで  $U$  を  $T$  の逆三角関手とし、 $\mathbf{R}\Phi$  を次の合成で定める：

$$\mathbf{R}\Phi: D^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{U} S_{\mathcal{C}}^{-1}\mathcal{C} \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{C}}} D(\mathcal{B}).$$

$\mathbf{R}\Phi$  は  $D^*(\mathcal{A})$  から  $D(\mathcal{B})$  への三角関手である。

次に、自然変換 (2.38) を構成する。 $U$  は  $T$  の逆関手だったので、関手の同型  $\alpha: \text{id} \xrightarrow{\cong} T \circ U$  が存在する。また  $E^\bullet \in K^*(\mathcal{A})$  に対して、 $I^\bullet \in \mathcal{C}$  が存在して  $Q_{\mathcal{C}}(I^\bullet) = U \circ Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet)$  となる。すると、 $D^*(\mathcal{A})$  における同型

$$Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet) \xrightarrow{\alpha} T \circ U \circ Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet) = T \circ Q_{\mathcal{C}}(I^\bullet)$$

を得る。上の同型は、注意 2.18 を用いると  $K^*(\mathcal{A})$  における射の図式

$$\begin{array}{ccc} E^\bullet & & I^\bullet \\ & \searrow & \swarrow s \\ & J^\bullet & \end{array}$$

で代表される。ここで  $s$  は擬同型である。さらに条件 (i) を用いて、 $J^\bullet \in \mathcal{C}$  とし

てよい。上の図式に  $\Phi$  を施すと、 $K(\mathcal{B})$  における図式

$$\begin{array}{ccc} \Phi(E^\bullet) & & \Phi(I^\bullet) \\ & \searrow & \swarrow \Phi(s) \\ & \Phi(J^\bullet) & \end{array}$$

を得る。ここで条件 (ii) と補題 2.19 より、 $\Phi(s)$  は擬同型である。よって、上の図式は  $D(\mathcal{B})$  における射

$$Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi(E^\bullet) \rightarrow Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi(I^\bullet)$$

を与える。上の射の右辺は

$$Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi(I^\bullet) = \Phi_{\mathcal{C}} \circ Q_{\mathcal{C}}(I^\bullet) = \Phi_{\mathcal{C}} \circ U \circ Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet) = \mathbf{R}\Phi \circ Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet)$$

となるため、 $D(\mathcal{B})$  における射

$$\eta(E^\bullet): Q_{\mathcal{B}} \circ \Phi(E^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}\Phi \circ Q_{\mathcal{A}}(E^\bullet)$$

が構成できた。このようにして構成した  $\eta$  が矛盾なく自然変換を与えることや  $(\mathbf{R}\Phi, \eta)$  が右導來関手を与えることは容易に確認でき、また同型 (2.39) は構成から明らかに従う。□

Abel 圏  $\mathcal{A}$  が十分多くの単射的対象を持つとは、任意の対象  $E \in \mathcal{A}$  に対して単射的対象  $I \in \mathcal{A}$  と単射  $E \hookrightarrow I$  が存在することを指した。この場合、命題 2.33 の条件 (i), (ii) が満たされる。

**補題 2.34** Abel 圏  $\mathcal{A}$  が十分多くの単射的対象を持つと仮定し、 $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A})) \subset K^+(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{A}$  の単射的対象の複体からなる充満部分三角圏とする。<sup>3</sup> このとき、三角関手  $\Phi: K^+(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  と  $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  に対し、命題 2.33 の条件 (i), (ii) が満たされる。特に  $\Phi$  の右導來関手が存在する。

**証明** まず、条件 (i) を示す。 $K^+(\mathcal{A})$  の対象  $E^\bullet$  に対して、 $I^\bullet \in K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  と擬同型  $E^\bullet \rightarrow I^\bullet$  を構成すればよい。そのためには、 $E^i = 0$  が  $i < 0$  で成立すると仮定してよい。単射的対象  $I^0, \dots, I^p$  と射  $f^i: E^i \rightarrow I^i$  が  $i \leq p$  で構成されたと仮定する。 $\mathcal{A}$  における射

<sup>3</sup>  $\text{Inj}(\mathcal{A})$  は Abel 圏ではないが完全圏（8.1 節参照）になり、そのホモトピー圏も定義できる。

$$(f^p, d_E^p): E^p \rightarrow I^p \oplus E^{p+1}$$

の余核  $\text{Coker}(f^p, d_E^p)$  を考え、これを単射的対象  $I^{p+1}$  に埋め込む。すると、自然な射  $I^p \rightarrow I^{p+1}$  および  $E^{p+1} \rightarrow I^{p+1}$  が存在する。これを繰り返すと、 $K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  の対象  $I^\bullet$  と複体の射  $E^\bullet \rightarrow I^\bullet$  が得られるが、上述の構成からこれが擬同型であることが確認できる。

**問題 2.35(i)** より 非輪状複体  $I^\bullet \in K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  に対し、 $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(I^\bullet, I^\bullet) = 0$ 、つまり  $I^\bullet$  は 0 とホモトピー同値であり、特に  $\Phi(I^\bullet)$  も 0 とホモトピー同値になることから条件 (ii) は従う。□

**問題 2.35** Abel 圏  $\mathcal{A}$  に対し、次を示せ。

- (i)  $I^\bullet \in K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$ , 非輪状複体  $E^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$  に対し、 $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(E^\bullet, I^\bullet) = 0$  となる。
- (ii)  $F^\bullet \in K^+(\mathcal{A})$  とし、さらに  $s: I^\bullet \rightarrow F^\bullet$  を擬同型射とする。このとき射  $t: F^\bullet \rightarrow I^\bullet$  が存在し、 $t \circ s$  が  $\text{id}_{I^\bullet}$  とホモトックとなる。(ヒント：射影  $p_2: \text{Cone}(s)(= F^\bullet \oplus I^\bullet[1]) \rightarrow I^\bullet[1]$  に対し、(i) を適用すると  $p_2$  から 0 射へのホモトピー  $(t, u): F^\bullet \oplus I^\bullet[1] \rightarrow I^\bullet$  が存在する。この  $t$  が求める射となる。)
- (iii)  $E^\bullet \in K^+(\mathcal{A}), I^\bullet \in K^+(\text{Inj}(\mathcal{A}))$  に対し、

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(E^\bullet, I^\bullet) \cong \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E^\bullet, I^\bullet)$$

が成り立つ。

**例 2.36** 2.1 節の記号を用いて、 $R$  を可換環とし  $\mathcal{A} = \text{Mod } R$  とする。Abel 圏  $\mathcal{A}$  には十分多くの単射的対象が存在するため、 $M \in \text{Mod } R$  に対して関手 (2.1) の右導來関手

$$\mathbf{R}\text{Hom}(M, -): D^+(\text{Mod } R) \rightarrow D^+(\text{Mod } R)$$

が定まる。右導來関手の構成から、 $N \in \text{Mod } R$  に対して  $\mathbf{R}\text{Hom}(M, N)$  は複体 (2.6) に他ならない。

**例 2.37** Abel 圏  $\mathcal{A}$  の対象  $E, F$  に対し

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(E, F) := \text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F[i])$$

と定義する。 $\mathcal{A}$  が十分多くの単射的対象を持つときは  $F$  の単射分解を用いて

$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(E, F)$  を定義したが、これが上で与えた定義と一致することを以下で確認しよう。

$\mathcal{A}$  を十分多くの単射的対象を持つ Abel 圏とし、 $E^\bullet, F^\bullet \in C(\mathcal{A})$  をとる。このとき、Abel 群の複体  $(\text{Hom}^\bullet(E^\bullet, F^\bullet), d^\bullet)$  の第  $i$  項とその微分  $d^i$  を

$$\begin{aligned}\text{Hom}^i(E^\bullet, F^\bullet) &= \prod_{j \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E^j, F^{j+i}), \\ d^i(\{f^j\}_{j \in \mathbb{Z}}) &= \{f^{j+1} \circ d_E^j - (-1)^i d_F^{j+i} \circ f^j\}_{j \in \mathbb{Z}}\end{aligned}\tag{2.40}$$

と定める。このとき

$$\text{Ker } d^i = \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(E^\bullet, F^\bullet[i])$$

であり、また、

$$\mathcal{H}^i(\text{Hom}^\bullet(E^\bullet, F^\bullet)) = \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(E^\bullet, F^\bullet[i])$$

が成り立つことに注意されたい。さて、複体  $E^\bullet$  を固定すると、三角関手

$$\text{Hom}^\bullet(E^\bullet, -) : K^+(\mathcal{A}) \rightarrow K(\text{Mod } \mathbb{Z})\tag{2.41}$$

を得る。よって、補題 2.34 により (2.41) の右導來関手

$$\mathbf{R}\text{Hom}(E^\bullet, -) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D(\text{Mod } \mathbb{Z})$$

を得る。導來関手の構成から、次の同型を示すことができる ([Har66, Theorem I.6.4] を参照) :

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E^\bullet, F^\bullet[i]) \cong \mathcal{H}^i(\mathbf{R}\text{Hom}(E^\bullet, F^\bullet))\tag{2.42}$$

特に  $E, F \in \mathcal{A}$  なら、 $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F[i])$  は  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(E, F)$  と同型である。

左導來関手の存在についても、命題 2.33 および射影的対象による補題 2.34 の類似が成立する。証明は右導來関手の場合と同様であるので、結果のみ述べる。

**命題 2.38**  $* \in \{\emptyset, \pm, b\}$  とし、 $\mathcal{C} \subset K^*(\mathcal{A})$  を充満部分三角圏とする。次の 2 条件を仮定する。

- (i) 任意の  $E^\bullet \in K^*(\mathcal{A})$  に対して  $P^\bullet \in \mathcal{C}$  と擬同型  $P^\bullet \rightarrow E^\bullet$  が存在する。
- (ii) 対象  $P^\bullet \in \mathcal{C}$  が非輪状であるなら、 $\Phi(P^\bullet)$  も非輪状である。

このとき、 $\Phi$  は左導來関手を持つ。

以下の主張で、Abel 圈  $\mathcal{A}$  が十分多くの射影的対象を持つとは、任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して射影的対象  $P \in \mathcal{A}$  と全射  $P \rightarrow E$  が存在することを意味する。

**補題 2.39** Abel 圈  $\mathcal{A}$  が十分多くの射影的対象を持つと仮定し、 $K^-(\text{Proj}(\mathcal{A})) \subset K^-(\mathcal{A})$  を射影的対象の複体からなる充満部分圏とする。このとき、三角関手  $\Phi: K^-(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$  と  $K^-(\text{Proj}(\mathcal{A}))$  に対し、命題 2.38 の条件 (i), (ii) が満たされる。特に  $\Phi$  の左導來関手が存在する。

**例 2.40** 例 2.36 の状況で、関手

$$M \otimes -: \text{Mod } R \rightarrow \text{Mod } R$$

を考える。Abel 圈  $\text{Mod } R$  は十分多くの射影的対象を持つため、上の関手の左導來関手

$$M \overset{\mathbf{L}}{\otimes} -: D^-(\text{Mod } R) \rightarrow D^-(\text{Mod } R)$$

が構成される。構成から、 $N \in \text{Mod } R$  に対して  $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes} N$  の  $-i$  番目のコホモロジーは  $\text{Tor}_i^R(M, N)$  に他ならない。

例 2.37において  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  を  $\text{Hom}_{D(\mathcal{A})}(E, F[n])$  として定めたが、Yoneda 拡大による  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  の解釈の方法にも触れておこう。

**問題 2.41**  $n$  を正の整数、 $\mathcal{A}$  を Abel 圈とし、 $E, F$  を  $\mathcal{A}$  の対象とする。 $\mathcal{A}$  の完全列

$$X: 0 \rightarrow F \rightarrow G_{n-1} \rightarrow G_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (2.43)$$

を  $E$  の  $F$  による次数  $n$  の Yoneda 拡大 (Yoneda extension) と呼ぶ。以下ではしばしば  $X$  を  $G_0$  が 0 次の場所にあるような複体とみなす。次数  $n$  の Yoneda 拡大  $X, X'$  が同値であるとは、次数  $n$  の Yoneda 拡大  $X''$  が存在し、図式

$$\begin{array}{ccccccc} X: 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{id}_F & & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow \text{id}_E & & \\ X'': 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G''_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & G''_0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id}_F & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_E & & \\ X': 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & G'_0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が可換になることである。これは Yoneda 拡大のなす集合に同値関係を定める。 $E$  の  $F$  による次数  $n$  の Yoneda 拡大の同値類全体の集合を

$$\mathrm{E}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$$

とおく。以下では、 $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  と  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  の間に 1 対 1 対応が存在することを示し、さらに  $0 \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  に対応する次数  $n$  の Yoneda 拡大の同値類がどのようなものになるかを見る。

- (i)  $E$  の  $F$  による次数  $n$  の Yoneda 拡大 (2.43) が与えられたとき、擬同型射  $s: \sigma_{\leq 0} X \rightarrow E[0]$  と、自然な射  $f: \sigma_{\leq 0} X \rightarrow F[n]$  に対し、

$$\delta(X) := fs^{-1} \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$$

と定める。 $X$  と  $X'$  が同値な Yoneda 拡大であるならば、 $\delta(X) = \delta(X')$  が成り立つことを示すことで、写像

$$\delta: \mathrm{E}_{\mathcal{A}}^n(E, F) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$$

が定まることを確認せよ。

- (ii) ( $\delta$  の全射性) まず  $Y = (\cdots \rightarrow Y_i \xrightarrow{d_i} Y_{i-1} \rightarrow \cdots)$  を  $\mathcal{A}$  の複体とし、射  $(E \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} F[n]) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  ( $s$  は擬同型) を与える。擬同型  $t: \tau_{\leq 0} Y \rightarrow Y$  に対し、 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(E, F)$  の元として  $fs^{-1} = (f \circ t)(s \circ t)^{-1}$  であるから初めから  $\tau_{\leq 0} Y = Y$  と仮定してよい。 $E$  の  $F$  による次数  $n$  の Yoneda 拡大  $X$  を

$$X: 0 \rightarrow F \rightarrow F \amalg_{Y_n / \mathrm{Im} d_{n+1}} Y_{n-1} \rightarrow Y_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow Y_0 \rightarrow E \rightarrow 0$$

とおくと  $\delta(X) = fs^{-1}$  であることを示せ。ここで  $F \amalg_{Y_n / \mathrm{Im} d_{n+1}} Y_{n-1}$  は双対ファイバー積（もしくは押し出しともいう）、つまり

$$\overline{d_n}: Y_n / \mathrm{Im} d_{n+1} \rightarrow Y_{n-1}, \quad \overline{f_n}: Y_n / \mathrm{Im} d_{n+1} \rightarrow F$$

に対し、

$$\mathrm{Coker}((\overline{f_n}, -\overline{d_n}): Y_n / \mathrm{Im} d_{n+1} \rightarrow F \oplus Y_{n-1})$$

のことである。

- (iii) ( $\delta$  の単射性) 2 つの次数  $n$  の Yoneda 拡大  $X, X'$  に対し、 $\delta(X) = \delta(X')$  であるとき、 $X$  と  $X'$  は同値であることを示せ。

- (iv) 次数  $n$  の Yoneda 拡大  $X_0$  を

$$\begin{cases} 0 \rightarrow F \xrightarrow{\text{id}_F} F \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{id}_E} E \rightarrow 0 & (n \geq 2 \text{ のとき}) \\ 0 \rightarrow F \rightarrow F \oplus E \rightarrow E \rightarrow 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義すると,  $\delta(X_0) = 0$  となることを示せ. また (2.43) で与えられた Yoneda 拡大  $X$  に対し,  $\delta(X) = 0$  であるならば,  $\sigma_{\leq 0} \circ \sigma_{>-n} X$  は  $D^b(\mathcal{A})$  の対象として  $F[n-1] \oplus E$  と同型であることを示せ.

## 2.8 代数多様体上の連接層の導來圏

$\mathcal{A}$  を Abel 圈とし,  $\mathcal{B}$  をその Serre 充満部分 Abel 圈とする. つまり,  $\mathcal{A}$  における完全系列  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$  において  $E_2 \in \mathcal{B}$  であることと  $E_1, E_3 \in \mathcal{B}$  であることが同値であるような  $\mathcal{A}$  の充満部分 Abel 圈  $\mathcal{B}$  を考える. このとき  $* \in \{\emptyset, \pm, b\}$  に対して, 次の  $D^*(\mathcal{A})$  の充満部分三角圏を定義する:

$$D_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{A}) := \left\{ E^\bullet \in D^*(\mathcal{A}) : \begin{array}{l} \text{任意の整数 } i \text{ に対して} \\ \mathcal{H}^i(E^\bullet) \in \mathcal{B} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{B}$  が Serre 部分圏である, という仮定は  $D_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{A})$  が部分三角圏になるために必要な仮定である.

$X$  を準射影的代数多様体とする. 以降, 特に断らない限りすべての代数多様体は複素数体  $\mathbb{C}$  上定義されているものとする. 本書で専ら扱う導來圏は, 連接層の有界な導來圏  $D^b(\mathrm{Coh}(X))$  である. 以下では簡単のため,  $* \in \{\pm, b, \emptyset\}$  に対して

$$D^*(X) := D^*(\mathrm{Coh}(X))$$

と表すこととする. 連接層の圏は十分多くの単射的対象を持つわけではないが, 一方で準連接層のなす圏は十分多くの単射的対象を持つ [Har66, Theorem II.7.18]. そこで導來関手を扱う際には連接層の導來圏の代わりに, しばしば準連接層の導來圏まで拡張して考察する必要がある. そのため  $D_{\mathrm{Coh}(X)}^*(\mathrm{QCoh}(X))$  はしばしば有用となる. 次の補題が成立する ([KS94, Proposition 1.7.11], [KS06, Theorem 13.2.8], [Huy06, Proposition 3.5] も参照のこと).

**補題 2.42**  $* \in \{-, b\}$  に対して, 自然な三角関手

$$D^*(X) \rightarrow D_{\mathrm{Coh}(X)}^*(\mathrm{QCoh}(X)) \tag{2.44}$$

は三角同値である.

**証明**  $* = -$  の場合のみ示す。導來圏の射の構成から、各コホモロジーが連接層である複体  $E^\bullet \in C^-(\mathrm{QCoh}(X))$  に対し、 $F^\bullet \in C^-(\mathrm{Coh}(X))$  と擬同型  $F^\bullet \rightarrow E^\bullet$  が存在することを示せば十分である。そこで、 $E^i$  が  $i > p$  で連接層であると仮定する。 $p$  に関する帰納法により、 $F^{>p} = E^{>p}$  が成り立ち、かつ  $F^p$  が連接層となる対象  $F^\bullet \in C^-(\mathrm{QCoh}(X))$  と、擬同型  $F^\bullet \rightarrow E^\bullet$  を構成すれば十分である。 $\mathrm{Im} d_E^p, \mathcal{H}^p(E^\bullet)$  は連接層であるため、問題 2.43 を使うと  $E^p$  の部分連接層  $F^p$  で次の条件を満たすものがとれる：

- (i) 合成  $F^p \subset E^p \rightarrow \mathrm{Im} d_E^p$  は全射である。
- (ii) 合成  $F^p \cap \mathrm{Ker} d_E^p \subset \mathrm{Ker} d_E^p \rightarrow \mathcal{H}^p(E^\bullet)$  は全射である。

さらに  $i < p$  に対して部分準連接層  $F^i \subset E^i$  を帰納的に

$$F^i = \{(x, y) \in F^{i+1} \oplus E^i : x = d_E^i(y)\}$$

と定める。すると自然な射  $F^i \rightarrow F^{i+1}$  により  $F^\bullet$  は  $C^-(\mathrm{QCoh}(X))$  の対象を定める。また、複体の埋め込み  $F^\bullet \subset E^\bullet$  が擬同型であることも容易に確認できる。以上より補題が示された。 $* = b$  の場合も同様である。□

補題 2.42 の証明で次を用いた。

**問題 2.43**  $X$  を Noether スキームとする。 $F \in \mathrm{QCoh}(X), G \in \mathrm{Coh}(X)$  と全射  $\varphi: F \rightarrow G$  が与えられているとき、 $F$  の部分連接層  $E$  が存在し、制限射  $\varphi|_E: E \rightarrow G$  が全射となることを示せ。（ヒント：まず  $X$  がアファインスキームであるときに示し、さらに [Har77, Exercises II.5.15(c)] を用いよ。）

$f: X \rightarrow Y$  を準射影的代数多様体の間の射とし、

$$f_*: \mathrm{QCoh}(X) \rightarrow \mathrm{QCoh}(Y) \tag{2.45}$$

を押し出し関手とする。 $\mathrm{QCoh}(X)$  は十分多くの単射的対象を持つので、 $f_*$  の右導來関手

$$\mathbf{R}f_*: D^+(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow D^+(\mathrm{QCoh}(Y)) \tag{2.46}$$

が存在する。関手 (2.46) は導來押し出しと呼ばれる。ここで、任意の  $E \in \mathrm{QCoh}(X)$  に対して右導來関手の構成から

$$\mathcal{H}^i(\mathbf{R}f_* E) = \mathbf{R}^i f_* E$$

となることに注意する.  $f$  が射影的射の場合には, 三角関手 (2.46) は有界な連接層の導来圏の間の右導来関手を与えることがわかる:

**補題 2.44**  $f: X \rightarrow Y$  を射影的射とする. すると, 関手 (2.46) は三角関手

$$\mathbf{R}f_*: D^b(X) \rightarrow D^b(Y) \quad (2.47)$$

を誘導する.

**証明**  $f$  が射影的射なら,  $E \in \mathrm{Coh}(X)$  に対して準連接層  $\mathbf{R}^i f_* E$  は連接層であり,  $|i| \gg 0$  で 0 になる. よって補題 2.25 により,  $\mathbf{R}f_* E$  は  $D_{\mathrm{Coh}(Y)}^b(\mathrm{QCoh}(Y))$  の対象を与える. 一般に  $E^\bullet \in D_{\mathrm{Coh}(X)}^b(\mathrm{QCoh}(X))$  に対して, 適当な  $i \in \mathbb{Z}$  と完全三角形 (2.33) を考える. すると  $\mathbf{R}f_*$  を施して  $D^+(\mathrm{QCoh}(Y))$  における完全三角形

$$\mathbf{R}f_* \tau_{\leq i} E^\bullet \rightarrow \mathbf{R}f_* E^\bullet \rightarrow \mathbf{R}f_* \tau_{> i} E^\bullet \rightarrow \mathbf{R}f_* \tau_{\leq i} E^\bullet [1]$$

を得る. 上の完全三角形と  $\mathcal{H}^j(E^\bullet) \neq 0$  となる  $j$  の個数に関する帰納法により,  $\mathbf{R}f_* E^\bullet \in D_{\mathrm{Coh}(Y)}^b(\mathrm{QCoh}(Y))$  が従う. よって  $\mathbf{R}f_*$  は三角関手

$$\mathbf{R}f_*: D_{\mathrm{Coh}(X)}^b(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow D_{\mathrm{Coh}(Y)}^b(\mathrm{QCoh}(Y))$$

に制限される. 補題 2.42 を用いて, 三角関手 (2.47) を得る.  $\square$

**注意 2.45**  $Y = \mathrm{Spec} \mathbb{C}$  の場合, 射  $f: X \rightarrow Y$  の押し出し (2.45) は大域切断をとる関手  $E \mapsto \Gamma(X, E)$  と自然同型である. よってこの場合,  $\mathbf{R}f_* E^\bullet$  を  $\mathbf{R}\Gamma(X, E^\bullet)$  と書く.  $E \in \mathrm{QCoh}(X)$  の場合,  $\mathcal{H}^i(\mathbf{R}\Gamma(X, E))$  は層係数コホモロジー  $H^i(X, E)$  に他ならない.

次に, 導来引き戻しを与える.  $f: X \rightarrow Y$  を準射影的代数多様体の間の射とし,

$$f^*: \mathrm{Coh}(Y) \rightarrow \mathrm{Coh}(X) \quad (2.48)$$

を引き戻し関手とする.  $Y$  がアファイン代数多様体の場合には  $\mathrm{Coh}(Y)$  は十分多くの射影的対象を持つため,  $f^*$  の左導来関手が構成できる. しかし, この性質はアファインではない場合には成立しない. その場合, 次の補題を用いるとよい.

**補題 2.46**  $Y$  を滑らかな準射影的代数多様体とし,  $\mathcal{C} \subset K^b(\mathrm{Coh}(Y))$  を局所自由層の有界複体からなる充満部分三角圏とする. すると,  $f^*$  に関して  $\mathcal{C}$  は命題 2.38 の条件 (i), (ii) を満足する.

**証明** 命題2.38の条件(ii)を満足することは明らかである。 $\mathcal{L}$ を $Y$ 上の豊富な可逆層とすると、任意の $E \in \text{Coh}(Y)$ に対して $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ と有限次元ベクトル空間 $V$ 、および全射 $V \otimes \mathcal{L}^n \rightarrow E$ が存在する([Har77, Corollary II.5.18])。 $V \otimes \mathcal{L}^n$ は局所自由層であるため、この性質を用いると補題2.34の証明と同様の議論で次がわかる：任意の $E^\bullet \in K^b(\text{Coh}(Y))$ に対して上に有界な局所自由層からなる複体 $P^\bullet$ および擬同型 $P^\bullet \rightarrow E^\bullet$ が存在する。一方、 $i \ll 0$ に対して(2.33)により定まる完全三角形

$$\tau_{\leq i} P^\bullet \rightarrow P^\bullet \rightarrow \tau_{>i} P^\bullet \rightarrow \tau_{\leq i} P^\bullet[1]$$

を考える。複体 $E^\bullet$ は有界なので、 $i \ll 0$ に対して擬同型 $\tau_{>i} P^\bullet \rightarrow E^\bullet$ が得られる。一方、複体 $\tau_{\leq i} P^\bullet$ は

$$\cdots \rightarrow P^{i-2} \xrightarrow{d_P^{i-2}} P^{i-1} \xrightarrow{d_P^{i-1}} \text{Ker } d_P^i \rightarrow 0$$

となるが、これは連接層の完全系列である。ここで、定理A.12から従う次の事実を用いる： $R$ を正則環とし、 $M$ を有限生成 $R$ -加群とする。このとき、射影的 $R$ -加群 $Q^i$ による完全系列

$$\cdots \rightarrow Q^{-2} \xrightarrow{d_Q^{-2}} Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

をとると、 $i \ll 0$ で $\text{Ker } d_Q^i$ は射影的 $R$ -加群になる。

この事実と $Y$ が滑らかであることを用いると、 $i \ll 0$ に対して $\text{Ker } d_P^{i+1} = \text{Im } d_P^i$ は局所自由層になる。よって、 $\tau_{>i} P^\bullet \in \mathcal{C}$ となり、 $\mathcal{C}$ が命題2.38の条件(i)を満たすことが示された。(定理6.22(i)も参照のこと。) □

上の補題を用いて、次を得る：

**補題2.47**  $f: X \rightarrow Y$ を準射影的代数多様体の間の射とし、 $Y$ が滑らかであると仮定する。このとき、関手(2.48)の左導來関手

$$\mathbf{L}f^*: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$$

が存在する。

**証明**  $f^*$ の左導來関手の存在は、補題2.46と命題2.38により従う。 $E^\bullet \in D^b(\text{Coh}(Y))$ とすると、補題2.46により局所自由層からなる有界複体 $P^\bullet$ と擬同型 $P^\bullet \rightarrow E^\bullet$ が存在して $\mathbf{L}f^* E^\bullet = f^* P^\bullet$ となる。これは連接層の有界複体であるため、補題が従う。□

本節の最後に、導來内部 Hom と導來テンソル積について述べる。 $X$  を滑らかな準射影的代数多様体とし、 $E^\bullet, F^\bullet \in C^b(\mathrm{Coh}(X))$  をとする。複体 (2.40) における Hom を  $\mathcal{H}om$  で置き換えることで、連接層の複体

$$\mathcal{H}om^\bullet(E^\bullet, F^\bullet) \in C^b(\mathrm{Coh}(X))$$

を得る。これは  $K^b(\mathrm{Coh}(X))$  の間の三角関手

$$\mathcal{H}om^\bullet(E^\bullet, -): K^b(\mathrm{Coh}(X)) \rightarrow K^b(\mathrm{Coh}(X))$$

を与える。補題 2.44 の証明と同様に、右導來関手

$$\mathbf{R}\mathcal{H}om(E^\bullet, -): D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

が得られる。また、連接層の複体  $E^\bullet \otimes F^\bullet$  を

$$(E^\bullet \otimes F^\bullet)^i = \bigoplus_{j+k=i} E^j \otimes F^k,$$

$$d^i(x \otimes y) = d_E^j(x) \otimes y + (-1)^j x \otimes d_F^k(y)$$

と定める。ただし、 $x \in E^j, y \in F^k$  である。複体  $E^\bullet$  を固定すると、三角関手

$$E^\bullet \otimes -: K^b(\mathrm{Coh}(X)) \rightarrow K^b(\mathrm{Coh}(X)) \quad (2.49)$$

を得る。ここで補題 2.46 の充満部分三角圏  $\mathcal{C}$  は、関手 (2.49) について命題 2.38 の条件 (i), (ii) を満たす。よって補題 2.47 の証明と同様に、三角関手 (2.49) の左導來関手

$$E^\bullet \otimes^L -: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

を得る。

## 2.9 導來関手の性質

前節で構成した連接層の導來圏の間の導來関手は、様々な性質を持つ。その内のいくつかを解説する。（本節ではすべての代数多様体が滑らかであると仮定するが、この仮定は本質的ではない。より一般的な主張については [Har66] を参照されたい。）

**命題 2.48**  $X, Y, Z$  を滑らかな準射影的代数多様体とし、 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$

を射影的な射とする。このとき、次の関手的同型が存在する：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(g \circ f)_* &\xrightarrow{\sim} \mathbf{R}g_* \circ \mathbf{R}f_* \\ \mathbf{L}(g \circ f)^* &\xrightarrow{\sim} \mathbf{L}f^* \circ \mathbf{L}g^*.\end{aligned}\tag{2.50}$$

**証明** 同型 (2.50) のみ示す。左辺から右辺への自然変換の存在は導來関手の普遍性から従う。 $E^\bullet \in D^b(X)$  に対し、 $\mathrm{QCoh}(X)$  の単射的対象からなる複体  $I^\bullet$  と擬同型  $E^\bullet \rightarrow I^\bullet$  をとる。すると (2.50) の左辺は  $(g \circ f)_* I^\bullet$ 、右辺は  $\mathbf{R}g_* f_* I^\bullet$  となる。一方、 $I \in \mathrm{QCoh}(X)$  が単射的対象ならばすべての  $j > 0$  について  $\mathbf{R}^j f_* I = 0$  および  $H^j(X, I) = 0$  が成立する。よって  $f_* I$  はすべての  $j > 0$  について  $\mathbf{R}^j g_* f_* I = 0$  を満たす ([Har77, Exercise III.8.1] を参照)。そこで、 $\mathcal{C} \subset K^+(\mathrm{QCoh}(Y))$  をすべての  $j > 0$  について  $\mathbf{R}^j g_* J = 0$  となる  $J \in \mathrm{QCoh}(Y)$  の複体からなる部分圏とする。すると、 $\mathcal{C}$  は  $\mathrm{QCoh}(Y)$  の単射的対象の複体を含むため、命題 2.33 の条件 (i) が満たされる。また、 $g_*$  について  $\mathcal{C}$  が命題 2.33 の条件 (ii) を満たすことも  $\mathcal{C}$  の定義から容易に確認できる。よって  $f_* I^\bullet \in \mathcal{C}$  と導來関手の一意性から (2.50) の右辺は  $g_* f_* I^\bullet$  と同型であり、よって (2.50) は同型である。□

次に射影公式 (projection formula) について述べる：

**命題 2.49**  $f: X \rightarrow Y$  を滑らかな準射影的代数多様体の間の射影的な射とする。このとき、 $E \in D^b(X)$  および  $F \in D^b(Y)$  に対して  $D^b(Y)$  における自然な関手的同型

$$\mathbf{R}f_* E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} F \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_*(E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}f^* F)\tag{2.51}$$

が存在する。

**証明**  $E$  を単射的対象からなる複体  $I^\bullet$ 、 $F$  を局所自由層からなる有界複体  $P^\bullet$  に置き換えてよい。すると、(2.51) の左辺は  $f_* I^\bullet \otimes P^\bullet$ 、右辺は  $\mathbf{R}f_*(I^\bullet \otimes f^* P^\bullet)$  となる。そこで、(2.51) における左辺から右辺への射を合成

$$f_* I^\bullet \otimes P^\bullet \rightarrow f_*(I^\bullet \otimes f^* P^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}f_*(I^\bullet \otimes f^* P^\bullet)\tag{2.52}$$

で定める。ここで左の射は層の射影公式から従う同型 ([Har77, Exercise II.5.1] を参照) であり、右の射は定義 2.30 の自然変換 (2.38) により与えられる射である。合成 (2.52) が  $D(\mathrm{QCoh}(Y))$  で同型であることを示せばよいが、これは  $Y$  に

について局所的な性質であるため、 $Y$  を十分小さく取り替えて各  $P^i$  が  $\mathcal{O}_Y$  の直和であると仮定してよい。複体  $P^\bullet$  に注意 2.27 の切断 (2.35) を施し、完全三角形 (2.36) に射 (2.52) を適用することで、次の完全三角形の間の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} f_* I^\bullet \otimes \sigma_{\geq i} P^\bullet & \longrightarrow & f_* I^\bullet \otimes P^\bullet & \longrightarrow & f_* I^\bullet \otimes \sigma_{< i} P^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}f_*(I^\bullet \otimes \sigma_{\geq i} f^* P^\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{R}f_*(I^\bullet \otimes f^* P^\bullet) & \longrightarrow & \mathbf{R}f_*(I^\bullet \otimes \sigma_{< i} f^* P^\bullet). \end{array}$$

上の可換図式と 5 項補題を用いると、 $P^j \neq 0$  となる  $j$  の個数に関する帰納法によって  $P^\bullet$  が  $\mathcal{O}_Y$  の直和である場合に帰着できる。この場合、合成 (2.52) は明らかに同型である。□

**命題 2.50** 命題 2.49 の状況の下で、次の関手的同型が存在する：

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}f^* F, E) \cong \mathrm{Hom}(F, \mathbf{R}f_* E). \quad (2.53)$$

つまり、 $\mathbf{L}f^*$  は  $\mathbf{R}f_*$  の左随伴関手（定義は 3.1 節参照）である。

**証明** 命題 2.49 と同様に  $E$  を単射的対象からなる複体  $I^\bullet$ 、 $F$  を局所自由層からなる有界複体  $P^\bullet$  に置き換えて議論することにより、 $D^b(Y)$  における同型

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{L}f^* F, E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, \mathbf{R}f_* E)$$

を得る。上の同型に  $\mathbf{R}\Gamma(Y, -)$  を施し、命題 2.48 を用い、さらに 0 番目のコホモロジーを考えると同型 (2.53) が得られる。□

この節の最後に、[Har66] の主結果である **Grothendieck 双対性** (Grothendieck duality) の特別な場合を述べる。

**定理 2.51**  $f: X \rightarrow Y$  を滑らかな準射影的代数多様体間の射影的な射とする。このとき  $E \in D^b(X)$ ,  $F \in D^b(Y)$  に対し、次の同型が存在する：

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(E, f^! F) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_Y(\mathbf{R}f_* E, F)$$

ここで  $f^! F = \mathbf{L}f^* F \otimes \omega_X \otimes f^* \omega_Y^{-1} [\dim X - \dim Y]$  である。

より一般的な形は定理 A.7 を参照されたい。

**注意 2.52**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし、その構造射を  $f: X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{C}$  とする。定理 2.51 を  $f, F = \mathbb{C}, E = E_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes} E_2^\vee$  に適用すると

$$\mathrm{Hom}_X(E_1, E_2 \otimes \omega_X[\dim X]) \cong \mathrm{Hom}_X(E_2, E_1)^\vee \quad (2.54)$$

を得る. ただし式 (2.54) の右辺の  $\vee$  はベクトル空間の双対であり,  $E_2^\vee$  は導來双対の意味, つまり

$$E_2^\vee := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(E_2, \mathcal{O}_X) \quad (2.55)$$

と定義する.  $E_2$  が局所自由層のとき  $E_2^\vee \cong \mathrm{Hom}_X(E_2, \mathcal{O}_X)$  が成り立ち, これは単に  $E_2$  の双対局所自由層である.

さらに式 (2.54) で,  $E_1$  を局所自由層とし,  $E_2 = \mathcal{O}_X$  とするとき Serre 双対性 (Serre duality) ([Har77, Theorem III.7.6] 参照)

$$H^{\dim X - i}(X, E_1^\vee \otimes \omega_X) \cong H^i(X, E_1)^\vee$$

が得られる.

## 2.10 Fourier–Mukai 変換

$X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とする. 対象  $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$  が与えられると, 図式

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \end{array}$$

および 2.8 節の導來関手の構成により, 次の三角関手を得る<sup>4</sup>:

$$\mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathcal{P} \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathbf{L}\pi_X^*(-)): D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

上の関手を  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  と表そう. 導來圏の間のこのような関手は Mukai の論文 [Muk81] で初めて扱われ, Fourier 変換の類似物であることから Fourier–Mukai 関手 (Fourier–Mukai functor) と呼ばれる. さらに  $\mathcal{P}$  を Fourier–Mukai 関手  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  の核 (kernel) と呼ぶ.

後で見る問題 3.1 により Fourier–Mukai 関手の随伴関手や合成も再び Fourier–Mukai 関手となる. また Fourier–Mukai 関手が圏同値を与えるときは Fourier–

<sup>4</sup>  $X, Y$  が準射影的多様体で,  $\pi_Y$  が固有射, かつ  $\mathcal{P}$  のホモロジカル次元 (定義 6.11 参照) が有限でさえあればこの関手は定義される. 実際に今後このような設定でこの関手を考えることがある.

**Mukai 変換** (Fourier–Mukai transform) と呼ばれる。Fourier–Mukai 関手は代数多様体の連接層の導來圏を研究する際に基本的となる関手である。実際、Orlov [Orl97] による次の定理が成立する：

**定理 2.53 (Orlov)**  $X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とし、

$$\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

を充満忠実な三角関手とする。このとき、同型を除いて高々一意的に対象  $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$  が存在して、 $\Phi \cong \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  となる。

ここで、上述した Mukai の論文 [Muk81] による結果を述べる。 $n$  次元の滑らかな  $\mathbb{C}$  上の射影的代数多様体  $A$  は、複素多様体として複素トーラス  $V/\Gamma$  と同型になるときに Abel 多様体と呼ばれる。ここで  $V$  は  $n$  次元複素ベクトル空間、 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$  は階数が  $2n$  の自由 Abel 群であり、自然な射  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  が同型になるものである。1 次元の Abel 多様体は橍円曲線に他ならないことに注意する。Abel 多様体  $A$  上の位相的に自明な代数的直線束の同型類の集合  $\widehat{A}$  には Abel 多様体の構造が入り、双対 Abel 多様体と呼ばれる。双対 Abel 多様体  $\widehat{A}$  は複素トーラスとして  $\overline{V}^\vee / \overline{\Gamma}^\vee$  と同型である ([GH78, Ch. 6] を参照)。ここで  $\overline{V}^\vee$  は  $V$  の複素共役の双対であり、 $\overline{\Gamma}^\vee$  は次で与えられる：

$$\overline{\Gamma}^\vee = \{f \in \overline{V}^\vee : 2 \operatorname{Re} f(\Gamma) \subset \mathbb{Z}\}.$$

構成から、 $A \times \widehat{A}$  上の直線束  $\mathcal{P}$  が存在して各  $x \in \widehat{A}$  に対して  $\mathcal{P}|_{A \times \{x\}}$  が  $x$  に対応する直線束になるものが存在する。このとき次が成り立つ ([Muk81])。証明は 5.6 節で与える。

**定理 2.54 (Mukai)** Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{\widehat{A} \rightarrow A}^{\mathcal{P}}: D^b(\widehat{A}) \rightarrow D^b(A)$$

は三角圏の同値を与える。

また、Seidel–Thomas [ST01] による  $D^b(X)$  の自己同値の構成も重要である。これは、次で定義される球面対象に付随して得られる：

**定義 2.55 (球面対象)**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とする。 $E \in D^b(X)$  は次の 2 条件を満足するときに球面対象 (spherical object) と呼ばれる：

- (i)  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[-\dim X]$  が成り立つ。

(ii)  $E \otimes \omega_X \cong E$  となる.

$i = 1, 2$  に対して  $\pi_i: X \times X \rightarrow X$  をそれぞれの成分への射影とし,  $\Delta \subset X \times X$  を対角線集合とする.  $E \in D^b(X)$  に対して, 命題 2.48 および命題 2.50 を用いて次の同型を得る :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi_1^* E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_2^* E^\vee, \mathcal{O}_\Delta) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{L}\Delta^*(\pi_1^* E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_2^* E^\vee), \mathcal{O}_X) \\ &\cong \mathrm{Hom}(E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} E^\vee, \mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

よって  $D^b(X)$  における標準的な射  $E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} E^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X$  は, 上の同型の下で  $D^b(X \times X)$  における射

$$\mathrm{ev}: \pi_1^* E \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \pi_2^* E^\vee \rightarrow \mathcal{O}_\Delta$$

に対応する.  $\mathcal{P}_E := \mathrm{Cone}(\mathrm{ev})$  とすると, 次の定理 ([ST01]) を得る :

**定理 2.56 (Seidel–Thomas)**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $E \in D^b(X)$  を球面対象とする. このとき, Fourier–Mukai 関手

$$T_E := \Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{P}_E}: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

は圏同値を与える. さらに,  $F \in D^b(X)$  に対して次の完全三角形が存在する :

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \rightarrow F \rightarrow T_E(F). \quad (2.56)$$

上で定義した自己同値関手  $T_E$  を捻り関手 (twist functor) と呼ぶ. 完全三角形 (2.56) の存在は, 捻り関手の定義から明らかである.  $T_E$  が同値を与えることの証明は問題 3.19 で考えよう.

**注意 2.57** 定理 2.56 で  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, F)$  は  $D^b(\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}})$  の対象とみなせる. このとき  $d_i := \dim \mathrm{Hom}^i(E, F)$  とおくと, 注意 2.28 により

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{\oplus d_i}[-i]$$

と書ける. この事実はしばしば  $T_E(F)$  の計算をする際に有用である.

# 第3章 三角関手の同値性の判定条件

この章では Bondal, Orlov, Bridgeland などによって発見された三角関手が充満忠実, もしくは同値となる判定法を与える. これらは後々非常に有用になる.

## 3.1 随伴関手と Serre 関手

この節では後で必要となる概念や事実に触れておこう. 関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  の右随伴関手 (right adjoint functor) とは, 関手  $\Phi^R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  であって, 各  $E \in \mathcal{C}$ ,  $F \in \mathcal{D}$  に対して同型<sup>1</sup>

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R(F))$$

が存在し,  $E, F$  それぞれに関して関手的であるもの, すなわちこの同型は関手の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R(-))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(-), F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \Phi^R(F))$$

から導かれるものであった. さらにこのとき  $\Phi$  は  $\Phi^R$  の左随伴関手 (left adjoint functor) といった. このときしばしば

$$\Phi \dashv \Phi^R$$

と書かれる. 例えば, 命題 2.50 の状況では

$$\mathbf{L}f^* \dashv \mathbf{R}f_*$$

---

<sup>1</sup>  $\Phi$  が加法圏のときは群同型,  $\Phi$  が  $\mathbb{C}$ -線形のときは  $\mathbb{C}$  上ベクトル空間の間の同型を考える.

が成り立っていた.

**問題 3.1**  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}, \Phi_{Y \rightarrow Z}^{\mathcal{Q}}$  を Fourier–Mukai 関手とする. 以下では

$$\pi_X: X \times Y \rightarrow X, \quad \pi_{X \times Y}: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$$

を射影とし, 同様に  $\pi_Y, \pi_{X \times Z}, \pi_{Y \times Z}$  を定める.

(i)  $D^b(Y)$  から  $D^b(X)$  への Fourier–Mukai 関手

$$\Phi^L := \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}^\vee \overset{L}{\otimes} \pi_Y^* \omega_Y [\dim Y]}, \quad \Phi^R := \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}^\vee \overset{L}{\otimes} \pi_X^* \omega_X [\dim X]} \quad (3.1)$$

はそれぞれ  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  の左随伴関手, 右随伴関手を与えることを示せ. ただし,

$\mathcal{P}^\vee = \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{X \times Y})$  である.

(ii)

$$\mathcal{R} := \mathbf{R}\pi_{X \times Z *}(L\pi_{X \times Y}^* \mathcal{P} \overset{L}{\otimes} L\pi_{Y \times Z}^* \mathcal{Q})$$

とおくと

$$\Phi_{Y \rightarrow Z}^{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}} \cong \Phi_{X \rightarrow Z}^{\mathcal{R}}$$

が成り立つことを示せ.

対象  $E \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{D}$  に対し, 同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R \circ \Phi(F))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi^R(E), \Phi^R(F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi \circ \Phi^R(E), F)$$

によって, それぞれ  $\mathrm{id}_{\Phi(E)}, \mathrm{id}_{\Phi^R(F)}$  の像

$$\epsilon(E) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R \circ \Phi(E)), \quad \eta(F) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi \circ \Phi^R(F), F)$$

が定まり, さらに自然変換

$$\epsilon: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi, \quad \eta: \Phi \circ \Phi^R \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \quad (3.2)$$

が定まる.

**問題 3.2** 随伴性  $\Phi \dashv \Phi^R$  によって得られる同型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E_1), \Phi(E_2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi^R \circ \Phi(E_2))$$

によって  $f$  は  $\Phi^R(f) \circ \epsilon(E_1)$  に移り, また同型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi^R(F_1), \Phi^R(F_2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi \circ \Phi^R(F_1), F_2)$$

によって  $g$  は  $\eta(F_2) \circ \Phi(g)$  に移ることを示せ。

さらに自然変換

$$\Phi^R \xrightarrow{\epsilon \circ \Phi^R} \Phi^R \circ \Phi \circ \Phi^R \xrightarrow{\Phi^R \circ \eta} \Phi^R, \quad \Phi \xrightarrow{\Phi \circ \epsilon} \Phi \circ \Phi^R \circ \Phi \xrightarrow{\eta \circ \Phi} \Phi \quad (3.3)$$

が恒等変換となることが以下のようにわかる。

まず問題 3.2 を使うと、 $E \in \mathcal{C}$  に対し次の図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E)) \\
 \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E)) & & \downarrow \dashv \\
 \downarrow \dashv \times \Phi^R & & \downarrow \dashv \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R \circ \Phi(E)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Phi^R \circ \Phi(E)) \\
 \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi^R \circ \Phi(E), \Phi^R \circ \Phi(E)) & & \downarrow \dashv \\
 \downarrow \Phi \times \dashv & & \downarrow \dashv \\
 \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi \circ \Phi^R \circ \Phi(E)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E)) \\
 \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi \circ \Phi^R \circ \Phi(E), \Phi(E)) & & 
 \end{array}$$

は可換であることがわかる。ただしここで横向きの写像は写像の合成で定義され、また随伴性によって得られる同型写像を  $\dashv$  で表した。

$$(\mathrm{id}_{\Phi(E)}, \mathrm{id}_{\Phi(E)}) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E)) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), \Phi(E))$$

を図式の写像で移してみる。右側の 2 つの縦の写像は明らかに互いに逆写像になっているので、その合成は恒等写像になることに注意すると、可換性から (3.3) の 2 番目の自然変換が恒等変換であることがわかる。(3.3) の最初の自然変換についても同様に示せる。

次の補題は米田の補題 (Yoneda's lemma) と呼ばれ、しばしば有用である。証明は例えば [GM03, Theorem II.3.3] を参照されたい。

**補題 3.3 (米田の補題)**  $\mathcal{C}$  を圏、 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C})$  を反変関手のなす圏、つまり  $\mathcal{C}^\circ$  から  $\mathsf{Sets}$  への関手のなす圏とする。このとき関手

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}) \quad E \mapsto h_E := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, E)$$

は充満忠実である。<sup>2</sup>

**問題 3.4** 関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  の右（左）随伴関手は、存在すれば同型を除いてただ1つであることを示せ。（ヒント：米田の補題を使え。）

**補題 3.5** (i) 関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  と関手  $\Psi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  が与えられているとする。 $\Psi$  が  $\Phi$  の右随伴関手であることの必要十分条件は、自然変換

$$\epsilon: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Psi \circ \Phi, \quad \eta: \Phi \circ \Psi \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

が存在し、(3.3)と同様に得られる2つの自然変換が恒等変換になることがある。

(ii) 関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が右随伴関手  $\Phi^R$  を持つとき、 $\Phi$  が充満忠実であることと、自然変換  $\epsilon: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi$  が同型となることは同値である。また  $\Phi$  が左随伴関手  $\Phi^L$  を持つときは、 $\Phi$  が充満忠実であることと、 $\eta: \Phi^L \circ \Phi \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  は同型となることは同値である。

**証明** (i) 必要性は上で触れた。十分性に関しては、任意の  $E \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{D}$  に対し、写像を

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Psi(F)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), F) \quad f \mapsto \eta(F) \circ \Phi(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E), F) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \Psi(F)) \quad g \mapsto \Psi(g) \circ \epsilon(E) \end{aligned}$$

と定めると互いに逆写像となることにより、チェックできる。

(ii) 右随伴関手  $\Phi^R$  が存在するとする。任意の  $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$  に対し、 $\epsilon(E_2) \circ (-)$  は自然な準同型写像の合成

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_1, E_2) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(E_1), \Phi(E_2)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi^R \circ \Phi(E_2))$$

と一致する。1つ目の写像も同型になるときは、米田の補題より  $\epsilon$  は同型であることがわかる。逆に  $\epsilon$  が同型のときは、 $\epsilon(E_2) \circ (-)$  も同型であるから、1つ目の写像が同型、つまり  $\Phi$  は充満忠実となる。左随伴関手  $\Phi^L$  に関する主張も同様に示される。□

---

<sup>2</sup> Abel 群のなす圏を  $\text{Ab}$  とする。 $\mathcal{C}$  が加法圏のときは  $\text{Fun}(\mathcal{C})$  を加法反変関手のなす圏、つまり  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  から  $\text{Ab}$  への関手のなす圏、と書き換えても米田の補題は成り立つ。

**定義 3.6 (Serre 関手)**  $\mathcal{D}$  を  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏とし、すべての  $E, F \in \mathcal{D}$  に対し、 $\sum_i \dim \text{Hom}^i(E, F) < \infty$  が成り立つとする。自己同値

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

は任意の  $E, F \in \mathcal{D}$  に対して次の関手的同型が存在するときに **Serre 関手 (Serre functor)** という：

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(E))^{\vee}.$$

Serre 関手は、存在するならば一意的である。

$X$  を滑らかな射影的代数多様体とし、 $D^b(X)$  の自己同値関手

$$\mathcal{S}_X(-) := - \otimes \omega_X [\dim X]$$

は (2.54)で見たように Serre 関手である。 $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  が成り立つような滑らかな射影的代数多様体を **Calabi–Yau 多様体** (Calabi–Yau manifold, Calabi–Yau variety)<sup>3</sup> と呼ぶが、その Serre 関手は  $[\dim X]$  である。そこで与えられた  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏  $\mathcal{D}$  において、その Serre 関手  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  が転換関手の  $n$  回の合成で書ける、つまり  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = [n]$  が成り立つとき、 $\mathcal{D}$  を  $n$  次元の **Calabi–Yau 圈** (Calabi–Yau category) と呼ぶ。

**問題 3.7**  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  がそれぞれ Serre 関手  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}, \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  を持つとする。また  $\mathbb{C}$ -線形三角関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を考える。このとき次を示せ。

- (i)  $\Phi$  に対し、右随伴関手の存在と左随伴関手の存在は同値である。例えば左随伴関手  $\Phi^L$  が存在するとき、

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}} \circ \Phi^L \circ \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$$

は  $\Phi$  の右随伴関手となる。

- (ii)  $\Phi$  が同値であるとき、

$$\Phi \circ \mathcal{S}_{\mathcal{C}} \cong \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \Phi$$

が成り立つ。

<sup>3</sup>  $1 \leq i \leq \dim X - 1$  なる  $i$  に対し  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  が成り立つと仮定したり、滑らかでないものや、射影的でないものを考えるときもある。5.9 節や 12 章では、 $1 \leq i \leq \dim X - 1$  に対し  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  が成り立つものを考えている。

最後に関手の同値性を与える基本的な補題を与えておく（例えば [KS06, Theorem 1.3.13] を参照）。証明には Zorn の補題を使う。

**補題 3.8** 関手  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を考える。 $\Phi$  が同値であることと、 $\Phi$  が本質的全射な充満忠実関手であることは同値である。ここで  $\Phi$  が本質的全射 (essentially surjective) であるとは任意の対象  $F \in \mathcal{D}$  に対し、 $E \in \mathcal{C}$  が存在し  $\Phi(E) \cong F$  となることである。<sup>4</sup>

## 3.2 三角圏の生成元

$\mathcal{D}$  を三角圏、 $\mathcal{C}$  をその充満部分加法圏とし、 $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$  を  $\mathcal{D}$  の対象の集合、もしくは部分圏とする。

**定義 3.9** (i)  $\mathcal{D}$  における右 (左) 直交部分圏 (right (left) orthogonal subcategory)  $\mathcal{C}^\perp, {}^\perp \mathcal{C}$  をそれぞれ  $\mathcal{D}$  の充満部分圏として、

$$\mathcal{C}^\perp := \{E \in \mathcal{D} : \text{すべての } F \in \mathcal{C} \text{ に対し } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F, E) = 0\}$$

$${}^\perp \mathcal{C} := \{E \in \mathcal{D} : \text{すべての } F \in \mathcal{C} \text{ に対し } \text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, F) = 0\}$$

と定義する。

- (ii)  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  の狭義充満部分圏 (strictly full subcategory) であるとは、 $\mathcal{C}$  が同型をとる操作で閉じている、すなわち  $E \in \mathcal{C}$  と  $F \in \mathcal{D}$  が同型であるならば、 $F \in \mathcal{C}$  が成り立つことをいう。
- (iii)  $\mathcal{C}$  の  $\mathcal{D}$  における thick 閉包 (thick closure) とは  $\mathcal{C}$  を含み、直和因子をとる操作で閉じているような  $\mathcal{D}$  の最小の狭義充満部分三角圏のことである。これを  $\text{thick}_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$ 、もしくは  $\text{thick } \mathcal{C}$  と表す。 $\mathcal{C} = \text{thick } \mathcal{C}$  が成り立つとき  $\mathcal{C}$  は  $\mathcal{D}$  の thick 部分圏 (thick subcategory) であるという。
- (iv)  $\Omega$  を含む、 $\mathcal{D}$  の最小の thick 部分三角圏を  $\langle \Omega \rangle$  や  $\langle \omega_i : i \in I \rangle$  などと書く。 $\Omega$  が  $\mathcal{D}$  を古典的に生成する (classically generate) とは、 $\mathcal{D} = \langle \Omega \rangle$  が成り立つことをいう。
- (v)  $\Omega$  が  $\mathcal{D}$  を生成する (generate) とは、 $\langle \Omega \rangle^\perp = 0$  となるときをいう。これは明らかに、すべての  $\omega \in \Omega$  と整数  $i$  に対し  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\omega, E[i]) = 0$  となるような  $E \in \mathcal{D}$  は 0 対象だからなること、と同値である。

---

<sup>4</sup> 補題 3.8 は三角圏の間の三角関手などにも適用できる。

定義 3.9(i)において、 $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  の充満部分三角圏のときは、 $\mathcal{C}^\perp, {}^\perp\mathcal{C}$  も充満部分三角圏となる。このとき  $\mathcal{C}^\perp$  を  $\mathcal{D}$  における  $\mathcal{C}$  の右直交部分三角圏 (right orthogonal triangulated subcategory),  ${}^\perp\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  における  $\mathcal{C}$  の左直交部分三角圏 (left orthogonal triangulated subcategory) という。

古典的生成元の例として定義 4.39 で与える例外生成列がある。

**定義 3.10**  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\Omega$  が  $\mathcal{D}$  のスパニング類 (spanning class) であるとは、次の 2 つの条件を満たすことである。ただし  $E \in \mathcal{D}$  とする。

- (i) すべての  $F \in \Omega, i \in \mathbb{Z}$  に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(F, E) = 0$  が成り立つならば、 $E \cong 0$  が成り立つ。
- (ii) すべての  $F \in \Omega, i \in \mathbb{Z}$  に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, F) = 0$  が成り立つならば、 $E \cong 0$  が成り立つ。

つまり、 $\langle \Omega \rangle^\perp = {}^\perp \langle \Omega \rangle = 0$  を満たすことである。

スパニング類は、以下で述べるように三角圏の間の三角関手が充満忠実となるための（定理 3.15）、さらには同値を与えるための（定理 3.18）必要十分条件を述べるのに用いられ、非常に有用な概念である。

もし  $\mathcal{D}$  が Serre 関手を持てば、 $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\Omega$  に対し、

$$\langle \Omega \rangle^\perp = 0 \iff {}^\perp \langle \Omega \rangle = 0$$

となるので、 $\Omega$  が  $\mathcal{D}$  の生成元であることと、 $\mathcal{D}$  のスパニング類であることは同値である。

Abel 圈  $\mathcal{A}$  の導来圏  $D^b(\mathcal{A})$  の対象  $E, F$  に対してスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_i \text{Ext}_{\mathcal{A}}^p(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^{i+q}(F)) \Rightarrow \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}^{p+q}(E, F) \quad (3.4)$$

が定まる [GM03, Exercise IV.2.2]。このスペクトル系列は本書では次の例 3.11 のみならず、よく使われる。

**例 3.11** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  の導来圏のスパニング類の例を挙げよう。 $D^b(X)$  には Serre 関手が存在するから、ある対象の集合  $\Omega$  がスパニング類であることを示すためには、 $\langle \Omega \rangle^\perp = 0$ 、もしくは  ${}^\perp \langle \Omega \rangle = 0$  のどちらか一方を示せばよい。

(i) 集合

$$\Omega := \{\mathcal{O}_x : x \text{ は } X \text{ の閉点}\}$$

は  $D^b(X)$  のスパニング類であることが次のようにわかる.

$0 \neq E \in D^b(X)$  をとると,  $\mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0$  となる  $q$  がとれる. そのような  $q$  の内, 最小のものを  $q_1$  とする.  $x$  を  $\mathcal{H}^{-q_1}(E)$  の台に含まれる点とし, スペクトル系列 ((3.4)を参照)

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Hom}^p(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_x) \Rightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}(E, \mathcal{O}_x) \quad (3.5)$$

を考えると  $E_2^{0,q_1} \neq 0$  であり, また  $q_1$  のとり方から

$$E_2^{0,q_1} \cong E_3^{0,q_1} \cong \cdots \cong E_\infty^{0,q_1}$$

が成り立つ. よって  $\mathrm{Hom}^{q_1}(E, \mathcal{O}_x) \neq 0$  がわかる. したがって  $\Omega$  は  $D^b(X)$  のスパニング類となる.

(ii)  $G \in D^b(X)$  とする.

$$\Omega := \{G\} \cup \langle G \rangle^\perp$$

とすれば  $\Omega$  は  $D^b(X)$  のスパニング類となる.

実際すべての  $F \in \Omega$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対し  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(F, E) = 0$  が成り立つならば, 特にすべての  $i \in \mathbb{Z}$  に対し  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(G, E) = 0$  が成り立つので,  $E \in \langle G \rangle^\perp \subset \Omega$  である. よって  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E) = 0$  が成り立つので  $\mathrm{id}_E = 0$ , つまり  $E \cong 0$  がわかる.

ちなみに  $E \in D^b(X)$  に対し,  $E$  の台 (support)  $\mathrm{Supp} E$  を

$$\mathrm{Supp} E := \bigcup_i \mathrm{Supp} \mathcal{H}^i(E)$$

と定めると例 3.11(i) の議論から

$$\mathrm{Supp} E = \{x \in X : \text{ある } q \text{ に対し } \mathrm{Hom}^q(E, \mathcal{O}_x) \neq 0\}$$

が成り立つことがわかる.

**注意 3.12**  $\Omega$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の対象の集合とし,  $\mathcal{C}$  を  $\Omega$  を含む  $\mathcal{D}$  の最小の狭義部分三角圏する. このとき明らかに

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} \implies \mathcal{D} = \langle \Omega \rangle \implies \langle \Omega \rangle^\perp = 0$$

が成り立つが、すべての矢印の逆は成り立たない。

- (i) 有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間のなす Abel 圏  $\text{Vect } \mathbb{C}$  の導來圏  $\mathcal{D} := D^b(\text{Vect } \mathbb{C})$  において集合

$$\Omega := \{V \in \mathcal{D} : K(\text{Vect } \mathbb{C}) \text{ の中で } [V] = 0\}$$

を考える。ここで  $K(\text{Vect } \mathbb{C})$  は  $\text{Vect } \mathbb{C}$  の Grothendieck 群（4.1 節参照）である。 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}[1] \in \Omega$  であるから  $\mathbb{C} \in \langle \Omega \rangle$  であり、注意 2.28 から  $\mathcal{D} = \langle \Omega \rangle$  が成り立つことわかる。しかし  $\Omega$  は Grothendieck 群を生成しないので、 $\mathcal{D} \neq C$  となる。

- (ii) 正の次元を持つ滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、例 3.11(i) で定めた  $\Omega$  は  $D^b(X)$  を生成するが、 $\langle \Omega \rangle$  の任意の対象の台は高々 0 次元なので  $D^b(X) = \langle \Omega \rangle$  は成り立たない。

**定義 3.13** 三角圏  $\mathcal{D}$  が直交分解可能とは充満部分三角圏  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  で  $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2^\perp \cap {}^\perp \mathcal{C}_2$ （これは  $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1^\perp \cap {}^\perp \mathcal{C}_1$  と同値）を満たすものが存在し、すべての  $E \in \mathcal{D}$  に対し、 $F_i \in \mathcal{C}_i$  が存在し、 $E \cong F_1 \oplus F_2$  が成り立つことである。三角圏  $\mathcal{D}$  が直交分解可能でないとき、 $\mathcal{D}$  は直既約 (indecomposable) であるという。

次の補題は命題 3.17、定理 3.18 を  $D^b(X)$  や  $D_G^b(X)$  に適用するときに使う。証明は [Bri99], [BKR01] を参照されたい。

**補題 3.14**  $X$  を（連結な）準射影的代数多様体とする。このとき次が成り立つ。

- (i)  $D^b(X)$  は直既約である。
- (ii) 有限群  $G$  が  $X$  に忠実に作用しているとする。このとき  $D_G^b(X)$ （定義は付録 C 参照）は直既約である。

### 3.3 三角関手の充満忠実性、同値性の判定条件

**定理 3.15**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を三角圏とする。 $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を三角圏の間の三角関手とし、左随伴関手  $\Phi^L$ 、および右随伴関手  $\Phi^R$  を持つとする。 $\Omega$  を  $\mathcal{C}$  のスパニング類とし、任意の  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  と  $i \in \mathbb{Z}$  に対し、自然な写像

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(\omega_1), \Phi(\omega_2))$$

が同型となるとき、 $\Phi$  は充満忠実となる。

証明 随伴性から、(3.2)で見たように自然変換

$$\eta: \Phi^L \circ \Phi \rightarrow \text{id}, \quad \epsilon: \text{id} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi$$

が存在する。このとき任意の  $E, F \in \mathcal{C}$  に対し、次の可換図式が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, F) & \xrightarrow{\epsilon(F) \circ (-)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, \Phi^R(\Phi(F))) \\ (-) \circ \eta(E) \downarrow & \searrow \Phi & \downarrow \sim \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\Phi^L(\Phi(E)), F) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(E), \Phi(F)) \end{array} \quad (3.6)$$

まず任意の  $E \in \Omega$  に対し、準同型  $\eta(E)$  が同型となることを示す。 $\eta(E)$  の写像錐をとると、完全三角形

$$\Phi^L(\Phi(E)) \xrightarrow{\eta(E)} E \rightarrow G \rightarrow \Phi^L(\Phi(E))[1]$$

が得られる。任意の  $F \in \Omega$  に対し、この完全三角形に  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, F)$  を適用して、

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(G, F) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, F) & \xrightarrow{(-) \circ \eta(E)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\Phi^L(\Phi(E)), F) \longrightarrow \\ & & \searrow \Phi & & \downarrow \sim \\ & & & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(E), \Phi(F)) \end{array}$$

を得る。ここで、右下の図式は可換であり、 $E, F \in \Omega$  であるから、斜めの写像  $\Phi$  は仮定より同型となる。よって  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(G, F) = 0$  であるから、 $G \cong 0$  がわかる。したがって  $E \in \Omega$  に対し  $\eta(E)$  は同型となる。

このことにより、 $E \in \Omega, F \in \mathcal{C}$  に対しては図式(3.6)のすべての準同型写像は同型写像となる。特に

$$\epsilon(F) \circ (-): \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, \Phi^R(\Phi(F)))$$

は同型である。そこで完全三角形

$$F \xrightarrow{\epsilon(F)} \Phi^R(\Phi(F)) \rightarrow G' \rightarrow F[1]$$

と  $E \in \Omega$  に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, -)$  を適用して、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^i(E, G') = 0$  がわかる。したがって  $G' \cong 0$ 、つまり  $\epsilon(F)$  は同型となる。このとき  $\epsilon$  も同型であり、補題3.5で見たように、 $\Phi$  は充満忠実となる。□

次は上の定理の類似である。

**問題 3.16**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を三角圏とする。 $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を三角圏の間の三角関手とし、 $\mathcal{C}$  の対象の集合  $\Omega$  に対し、 $\langle \Omega \rangle = \mathcal{C}$  が成り立つとする。任意の  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  と  $i \in \mathbb{Z}$  に対し、自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(\omega_1), \Phi(\omega_2))$$

が同型であるとする。

(i) 任意の  $\omega_1 \in \Omega$  に対し、自然な写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\omega_1, E) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(\omega_1), \Phi(E))$$

が同型となるような対象  $E \in \mathcal{D}$  からなる  $\mathcal{C}$  の部分圏  $\mathcal{C}'$  は、 $\mathcal{C}$  の thick 部分圏であることを示せ。

(ii)  $\Phi$  は充満忠実となることを示せ。（ヒント：まず  $\mathcal{C}' = \langle \Omega \rangle$  を示せ。）

以下の命題 3.17、定理 3.18において  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を三角圏で、それぞれ Serre 関手  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}, \mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  を持つとする。また  $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を充満忠実な三角関手とし、左随伴関手  $\Phi^L$  を持つとする。このとき問題 3.7 で見たように右随伴関手  $\Phi^R$  も存在することに注意されたい。

**命題 3.17**  $\mathcal{C}$  を非自明、 $\mathcal{D}$  を直既約とする。 $E \in \mathcal{D}$  に対し、 $\Phi^R(E) \cong 0$  ならば  $\Phi^L(E) \cong 0$  が成り立つとき、 $\Phi$  は三角圏の同値を与える。

**証明** 命題 4.31 により半直交分解  $\mathcal{D} = \langle \Phi(\mathcal{C})^\perp, \Phi(\mathcal{C}) \rangle$  が存在する。つまり任意の  $E \in \mathcal{D}$  に対し、 $F \in \Phi(\mathcal{C})^\perp$  と完全三角形

$$\Phi \circ \Phi^R(E) \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow \Phi \circ \Phi^R(E)[1]$$

が存在する。このとき  $\Phi^R(F) \cong 0$  が成り立つから仮定より  $\Phi^L(F) \cong 0$  となり

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F, \Phi \circ \Phi^R(E)[1]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi^L(F), \Phi^R(E)[1]) \cong 0$$

が成り立つ。よって上の完全三角形から

$$E \cong \Phi \circ \Phi^R(E) \oplus F$$

がわかる。 $\mathcal{D}$  は直既約で、かつ  $\Phi(\mathcal{C})$  は非自明なので、 $\Phi(\mathcal{C})^\perp = 0$ 、つまり  $\Phi \circ \Phi^R(E) \cong E$  となり、補題 3.8 を使えば、 $\Phi$  は同値であることがわかる。□

**定理 3.18**  $\mathcal{C}$  を非自明、 $\mathcal{D}$  を直既約な三角圏とする。 $\mathcal{C}$  のスパニング類  $\Omega$ 、任意

の  $\omega \in \Omega$  に対し

$$\Phi \circ \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\omega) \cong \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \Phi(\omega)$$

が成り立つとき、 $\Phi$  は三角圏の同値を与える。

証明  $E \in \mathcal{D}$  とする。 $\omega \in \Omega, i \in \mathbb{Z}$  に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\omega, \Phi^L(E)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\Phi^L(E), \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\omega))^{\vee} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, \Phi \circ \mathcal{S}_{\mathcal{C}}(\omega)))^{\vee} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, \mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \Phi(\omega))^{\vee} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(\Phi(\omega), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^i(\omega, \Phi^R(E)) \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\Phi^R(E) \cong 0$  ならば  $\Phi^L(E) \cong 0$  が成り立つ。よって命題 3.17 より主張を得る。□

**問題 3.19** 定理 2.56、つまり  $T_E$  が同値関手となることを示せ。（ヒント：捻り関手の定義から、球面対象  $E \in D^b(X)$  に対して同型  $T_E(E) \cong E[1 - \dim X]$  が存在し、また  $F \in \langle E \rangle^{\perp}$  に対して  $T_E(F) \cong F$  となることがわかる。一方、例 3.11 より  $\Omega = \{E\} \cup \langle E \rangle^{\perp}$  は  $D^b(X)$  のスパニング類である。この  $\Omega$  に対し、定理 3.15、定理 3.18 を適用する。）

なおこの章で述べた結果は連接層の導來圏の同値性の判定条件である定理 5.35 などに結びついていく。

# 第4章 導來圏の半直交分解と例外生成列

有限次元ベクトル空間において、任意の元はその基底の一次結合で表記できる。このようにベクトル空間はその基底を見つけることで1次元の部分空間に分解できる。同様に導來圏、より一般に三角圏を何らかの意味で分解できないであろうか、という問いに解答を与えるのが1990年頃にBondalらによって発見された半直交分解であり、最も細かい半直交分解が例外生成列である。

例外生成列は代数多様体の連接層の導來圏の研究において、実際に多くの問題を生み出してきた。例えば、例外生成列を持つ代数多様体は幾何的にどのような性質や、不変量を持つであろうか、というのは非常に自然な問い合わせである。また強例外生成列をもつような代数多様体の導來圏はある種の（非可換）代数上の加群のなす圏の導來圏と同値になることから、この場合は代数多様体の導來圏の研究がある種の代数上の表現論と結びつき、非常に多くの応用を供給する。この章ではこういった、例外生成列にまつわる豊富なトピックの一端を紹介しよう。

簡単のため、断らない限り出てくる代数多様体は $\mathbb{C}$ 上で定義された滑らかな射影的代数多様体とする。

## 4.1 代数多様体の導來圏の不変量

導來圏  $D^b(X)$ ,  $D^b(Y)$  の間に  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏として同値

$$\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

があるとき、 $X$  と  $Y$  は導來同値であるとか、Fourier–Mukai パートナー (Fourier–Mukai partner) であるといわれる。定理 2.53 によれば、図式

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \end{array}$$

に対し、対象  $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$  が存在し、

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}} := \mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathcal{P} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}\pi_X^*(-)): D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

と定めると  $\Phi \cong \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  が成り立ったことに注意されたい。この事実を用いると、次が容易にわかる。

**補題 4.1**  $X$  と  $Y$  が導來同値なら、 $\dim X = \dim Y$  である。<sup>1</sup>

**証明** Fourier–Mukai 変換  $\Phi^{-1}$  は (3.1) で与えた右随伴関手  $\Phi^R$ 、左随伴関手  $\Phi^L$  と同型になるから、定理 2.53 の  $\Phi^{-1}$  の核の一意性から

$$\mathcal{P}^\vee \otimes \pi_Y^* \omega_Y [\dim Y] \cong \mathcal{P}^\vee \otimes \pi_X^* \omega_X [\dim X]$$

が成り立つ。両辺のコホモロジーをとり、それが 0 でない次数を比べることにより  $\dim X = \dim Y$  がわかる。□

上の補題より、射影的代数多様体の次元はその連接層の導來圏の不变量となる。以下では他の不变量を探していこう。

Abel 圈（より一般に完全圏（8.1 節参照）） $\mathcal{A}$  に対し、その Grothendieck 群（Grothendieck group） $K(\mathcal{A})$  は次のように定義される。<sup>2</sup>  $\mathcal{A}$  のすべての対象の同型類  $[E]$  で自由に生成される Abel 群をその部分群

$$\langle [F] - [E] - [G]: \mathcal{A} \text{ の短完全列 } 0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0 \text{ が存在する } \rangle$$

で割ったのが  $K(\mathcal{A})$  である。

**問題 4.2** Abel 圈  $\text{Vect } \mathbb{C}$  に対し、その Grothendieck 群  $K(\text{Vect } \mathbb{C})$  は  $\mathbb{Z}$  と同型

<sup>1</sup> ちなみに  $D^b(X)$  が  $D^b(Y)$  の充満部分三角圏であるとき  $\dim X \leq \dim Y$  となることが信じられているが、まだ証明は知られていないようである。

<sup>2</sup> 記号  $K(\mathcal{A})$  は  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏に対しても使われていたが、誤解の恐れがないと思われる所以  $\mathcal{A}$  の Grothendieck 群に対しても同じ記号を用いる。また Grothendieck 群の定義では、 $\mathcal{A}$  のすべての対象の同型類が集合をなすことを要請したいので、正確には  $\mathcal{A}$  は本質的に小さい（essentially small）圏であることを仮定する。三角圏の Grothendieck 群を定義するときも同様である。

になることを示せ.

また三角圏  $\mathcal{D}$  に対しては、すべての対象の同型類  $[E]$  で自由に生成される Abel 群を、その部分群

$$\langle [F] - [E] - [G] : \mathcal{D} \text{ の完全三角形 } E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E[1] \text{ が存在する } \rangle$$

で割って得られる群を三角圏  $\mathcal{D}$  の **Grothendieck 群** (Grothendieck group) (もしくは  **$K$ -群** ( $K$ -group)) と呼び、 $K(\mathcal{D})$  で表す。 $E \in \mathcal{D}$  (もしくは  $E \in \mathcal{A}$ ) に対し、それに対応する Grothendieck 群  $K(\mathcal{D})$  (もしくは  $K(\mathcal{A})$ ) の元も  $[E]$  で表すこととする。

**問題 4.3** Abel 圏  $\mathcal{A}$  の導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  を考える。

(i)  $E^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$  に対し、Grothendieck 群  $K(D^b(\mathcal{A}))$  の中で

$$[E^\bullet] = \sum_i (-1)^i [\mathcal{H}^i(E^\bullet)] = \sum_i (-1)^i [E^i]$$

が成り立つことを示せ。

(ii)  $\mathcal{A}$  の対象を  $D^b(\mathcal{A})$  の対象と自然に思うことによって得られる写像

$$K(\mathcal{A}) \rightarrow K(D^b(\mathcal{A}))$$

は群の同型を与えることを示せ。

以下、問題 4.3(ii) により、 $K(\mathcal{A})$  と  $K(D^b(\mathcal{A}))$  を同一視する。

滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し  $\mathcal{D} = D^b(X)$  とし、 $X$  の局所自由層からなる完全圏の Grothendieck 群を  $K(X)$  とおくことにする。 $X$  上の任意の連接層  $E$  は局所自由層による有限の長さを持つ複体と擬同型になる（補題 2.46 を参照）。上の問題 4.3 と合わせれば、自然な群同型  $K(X) \cong K(D^b(X))$  が存在することがわかる。これにより  $K(X)$  と  $K(D^b(X))$  を同一視する。さらに  $E, F \in D^b(X)$  に対し、その  $K(X)$  での積を

$$[E] \cdot [F] := [E \xrightarrow{\mathbf{L}} F]$$

と定めることができ、 $K(X)$  は  $[\mathcal{O}_X]$  を単位元に持つ環構造を持つこともわかる。Grothendieck 群を環の構造まで見たときは **Grothendieck 環** (Grothendieck ring) と呼ぶ。

さて

$$\mathrm{Coh}^{\geq i}(X) := \{F \in \mathrm{Coh}(X) : F \text{ の台の余次元は } i \text{ 以上 }\}$$

とおくと、各  $i$  に対しこれは  $\mathrm{Coh}(X)$  の部分 Abel 圏となる。そこで自然な写像  $K(\mathrm{Coh}^{\geq i}(X)) \rightarrow K(\mathrm{Coh}(X))$  の像を

$$F^i(K(X)) := \mathrm{Im}(K(\mathrm{Coh}^{\geq i}(X)) \rightarrow K(\mathrm{Coh}(X)))$$

とおくと、これは  $K(X)$  のフィルトレーション (**coniveau** フィルトレーション (coniveau filtration) と呼ばれる) を定め

$$F^i(K(X)) \cdot F^j(K(X)) \subset F^{i+j}(K(X))$$

が成り立つことがわかる。

$$\mathrm{Gr}^i(K(X)) := F^i(K(X))/F^{i+1}(K(X))$$

とおくと

$$\mathrm{rank} : \mathrm{Gr}^0(K(X)) \rightarrow A^0(X) \cong \mathbb{Z}$$

$$\det : \mathrm{Gr}^1(K(X)) \rightarrow A^1(X) = \mathrm{Pic}(X)$$

$$c_2 : \mathrm{Gr}^2(K(X)) \rightarrow A^2(X)$$

は同型であることが知られている [Ful98, Example 15.3.6].

三角圏の同値  $\Phi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  が与えられているとき、 $\Phi$  は完全三角形を完全三角形に移すことを条件に課すから、定義から自然にそれらの Grothendieck 群  $K(\mathcal{D}_1)$  と  $K(\mathcal{D}_2)$  は同型となる。特に  $X$  と  $Y$  が互いに Fourier–Mukai パートナーであるとき、それらの Grothendieck 群は同型である。

**注意 4.4** 与えられた  $D^b(X)$  と  $D^b(Y)$  の同値によって  $[\mathcal{O}_X]$  が  $[\mathcal{O}_Y]$  に移るとは限らない。したがってこの同値が  $K(X)$  と  $K(Y)$  の間の環同型を導くとは限らない。一方でこの同値が環の同型を導かなくても、他に同型があるかも知れないと疑うのは自然である。ところが注意 5.50 で見るよう、互いに Fourier–Mukai パートナーでありながら、Grothendieck 環は同型でないような例がある。

後ほど使う Grothendieck–Riemann–Roch の定理を述べておく。

**定理 4.5 (Grothendieck–Riemann–Roch の定理)** 滑らかな準射影的代数多様体の間の射影的射  $f: X \rightarrow Y$  に対し次の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccc}
 D^b(X) & \xrightarrow{\mathbf{R}f_*} & D^b(Y) \\
 \text{ch}(-) \text{td}_X \downarrow & & \downarrow \text{ch}(-) \text{td}_Y \\
 A(X)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{f_*} & A(Y)_{\mathbb{Q}}
 \end{array}$$

Grothendieck–Riemann–Roch の定理において  $Y = \text{Spec } \mathbb{C}$  とすれば Hirzebruch–Riemann–Roch の定理を得る.

**系 4.6 (Hirzebruch–Riemann–Roch の定理)** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  と  $E \in D^b(X)$  に対し,

$$\chi(E) = \int_X \text{ch}(E) \text{td}_X \quad (4.1)$$

が成り立つ.

対象  $E, F \in D^b(X)$  に対し, **Euler 形式** (Euler form) を

$$\chi(E, F) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}^i(E, F)$$

と定義する.<sup>3</sup> Euler 形式は Ext の長完全列をとて計算すればわかるように  $E, F$  の  $K(X)$  でのクラス  $[E], [F]$  で決まる整数値の双線形写像

$$\chi(-, -) : K(X) \times K(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

を定め, Hirzebruch–Riemann–Roch の定理を使って

$$\chi(E, F) = \int_X \text{ch}(E^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} F) \text{td}_X \quad (4.2)$$

と計算される. この式もしばしば Hirzebruch–Riemann–Roch の定理と呼ばれる.

$\Phi : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$  が同値を与えるとき,  $\text{Hom}(E, F) = \text{Hom}(\Phi(E), \Phi(F))$  であるから,  $K(X)$  と  $K(Y)$  の同型は Euler 形式を保つこともわかる.

**問題 4.7** 滑らかな  $n$  次元射影的代数多様体のコホモロジー環の元

$$v = (1, a_1, a_2, \dots, a_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q}) \quad (a_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Q}))$$

に対し,  $u = (1, b_1, b_2, \dots, b_n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  であって,  $(u \cdot u) = v$  を満たすもの

<sup>3</sup> より一般に  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏  $\mathcal{T}$  が, 任意の  $E, F \in \mathcal{T}$  に対し  $\sum_i \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(E, F[i]) < \infty$  を満たすとき, Euler 形式は同様に定義される.

が一意的に存在することを示せ. この  $u$  を  $\sqrt{v}$  とおく. ここで  $(-,-)$  はカップ積を表す.

$\alpha \in K(X)$  に対し, Mukai ベクトル (Mukai vector)  $v(\alpha) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  を

$$v(\alpha) := \text{ch}(\alpha) \sqrt{\text{td}_X} \quad (4.3)$$

で定義する.  $E \in D^b(X)$  に対しては, もちろん  $v(E) := v([E])$  と定める. 次が成り立つ.

**命題 4.8**  $X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とし, 対象  $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$  を核とする Fourier–Mukai 変換

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

が与えられているとする. このとき, 図式

$$\begin{array}{ccc} D^b(X) & \xrightarrow{\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}} & D^b(Y) \\ v(-) \downarrow & & \downarrow v(-) \\ H^*(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}} & H^*(Y, \mathbb{Q}) \end{array}$$

は可換となり,  $\phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  は  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間の間の同型を与える. ここで  $\phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  は

$$\beta \longmapsto \pi_{Y*}(v(\mathcal{P}).\pi_X^*(\beta))$$

で与えられる.

**証明** Grothendieck–Riemann–Roch の定理を適用すれば直ちに命題が従う.  $\square$

多くの例において  $\phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  はコホモロジーの次数を保たない. 例えば定理 2.54において,  $\hat{A}$  の閉点  $x$  の構造層  $\mathcal{O}_x$  に対し,  $\Phi_{\hat{A} \rightarrow A}^{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_x)$  は  $A$  上の直線束になるから,  $\phi_{\hat{A} \rightarrow A}^{\mathcal{P}}$  はコホモロジーの次数を保っていないことがわかる.

**系 4.9**  $X$  と  $Y$  が導來同値なら,  $e(X) = e(Y)$  である. ここで  $e(-)$  は位相的 Euler 数である.

**証明** 命題 4.8において  $v(\mathcal{P}) \in H^{2*}(X \times Y, \mathbb{Q})$  であることから,  $\phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}$  は  $H^*(X, \mathbb{Q}), H^*(Y, \mathbb{Q})$  の奇数次数部分と偶数次数部分をそれぞれ保つこともわかる. このことから位相的 Euler 数も導來圏の不変量となることがわかる.  $\square$

さて、滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、その Hochschild コホモロジー、Hochschild ホモロジーを定義したい。その前に 2 重次数付き環  $\mathrm{HH}(X)$  を定める。 $\Delta$  を対角埋め込み  $X \hookrightarrow X \times X$  による像とする。まず Abel 群を

$$\mathrm{HA}_{k,l}(X) := \mathrm{Ext}_{X \times X}^k(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^l)$$

と定め、さらにその直和

$$\mathrm{HH}(X) := \bigoplus_{k,l} \mathrm{HA}_{k,l}(X)$$

に次のような積構造を与える。 $\varphi \in \mathrm{HA}_{k,l}(X), \psi \in \mathrm{HA}_{k',m}(X)$  に対し  $\psi$  を  $\mathrm{Ext}_{X \times X}^{k'+l}(\omega_\Delta^l, \omega_\Delta^{m+l}) (\cong \mathrm{Ext}_{X \times X}^{k'}(\mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^* \omega_X^l, \omega_\Delta^m \otimes p_1^* \omega_X^l) \cong \mathrm{HA}_{k',m}(X))$  の元と思って導来圏の射として  $\varphi$  と合成させ、

$$\psi \cdot \varphi := \psi \circ \varphi \in \mathrm{Ext}_{X \times X}^{k+k'}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta^{l+m}) = \mathrm{HA}_{k+k',l+m}(X)$$

と定義する。すると  $\mathrm{HH}(X)$  は 2 重次数付き環となる。

**定義 4.10** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  の  $k$  番目の **Hochschild コホモロジー** (Hochschild cohomology) は次のように定義される：

$$\mathrm{HH}^k(X) := \mathrm{HA}_{k,0}(X) = \mathrm{Ext}_{X \times X}^k(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

また  $k$  番目の **Hochschild ホモロジー** (Hochschild homology) は次のように定義される<sup>4</sup>：

$$\mathrm{HH}_k(X) := \mathrm{HA}_{k+\dim X,1}(X) = \mathrm{Ext}_{X \times X}^{k+\dim X}(\mathcal{O}_\Delta, \omega_\Delta)$$

各次数の Hochschild コホモロジーの直和

$$\mathrm{HH}^*(X) := \bigoplus_k \mathrm{HH}^k(X) = \bigoplus_k \mathrm{HA}_{k,0}(X)$$

は自然に  $\mathrm{HH}(X) = \bigoplus_{k,l} \mathrm{HA}_{k,l}(X)$  の次数付き部分環になる。これを **Hochschild コホモロジー環** (Hochschild cohomology ring) と呼ぶ。また各次数の Hochschild ホモロジーの直和

---

<sup>4</sup> 例えば [Căl05, Huy06, Kuzb] では  $\mathrm{HH}_k(X)$  の定義に次数の違いがある。つまり、[Căl05] では  $\mathrm{HA}_{\dim X-k,1}(X)$ , [Huy06] では  $\mathrm{HA}_{k,1}(X)$ , [Kuzb] では  $\mathrm{HA}_{\dim X+k,1}(X)$  をそれぞれ  $k$  番目の Hochschild ホモロジー  $\mathrm{HH}_k(X)$  と定義している。本書の定義は [Kuzb] のものと同じである。

$$\mathrm{HH}_*(X) := \bigoplus_k \mathrm{HH}_k(X) = \bigoplus_k \mathrm{HA}_{k+\dim X, 1}(X)$$

には Hochschild コホモロジー環  $\mathrm{HH}^*(X)$  上の次数付き左加群の構造が入る。 $\mathrm{HH}^*(X), \mathrm{HH}_*(X)$  は各次数ごとに代数多様体の導來圏の不变量となる。より正確には次が知られている。

**定理 4.11 ([Căl05, Huy06])**  $X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とし、互いに導來同値であるとする。このとき（導來同値の関手の選び方に依存して）2重次数付き環の同型

$$\mathrm{HH}(X) \cong \mathrm{HH}(Y)$$

が得られる。この同型を通して、その部分環である Hochschild コホモロジー環の同型

$$\mathrm{HH}^*(X) \cong \mathrm{HH}^*(Y)$$

が得られ、さらに次数付き加群の同型

$$\mathrm{HH}_*(X) \cong \mathrm{HH}_*(Y)$$

が存在する。

2重次数付き環  $\mathrm{HH}(X) = \bigoplus_{k,l} \mathrm{HA}_{k,l}(X)$  の  $k = 0, l \geq 0$  の部分を考えると次数付き部分環

$$R(X) := \bigoplus_{l \geq 0} \mathrm{HA}_{0,l}(X) = \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \omega_X^l)$$

が得られる。 $R(X)$  は  $X$  の標準環 (canonical ring) と呼ばれる。 $R(X) = 0$  であるとき  $X$  の小平次元 (Kodaira dimension)  $\kappa(X)$  を  $-\infty$  と定め、さらに  $R(X) \neq 0$  であるときは  $R(X)$  の超越次元から 1 引いたものを  $X$  の小平次元として定める。小平次元は双有理不变量であることが知られており、(特に高次元の) 代数多様体の分類論において最も基本的な不变量であるといえる。

実は定理 4.11 で得られた 2重次数付き環の同型  $\mathrm{HH}(X) \cong \mathrm{HH}(Y)$  において次数  $k = 0, l \geq 0$  の部分を考えることで小平次元は導來圏の不变量であることもわかる。

**系 4.12**  $X, Y$  を導來同値な滑らかな射影的代数多様体とすると、その標準環

$R(X)$  と  $R(Y)$  は同型である。特に  $X$  と  $Y$  の小平次元は一致する。

次の補題はよく知られている。証明は例えば [Ji 97, 定理 1.7.24] や [Har77, Exercises II.5.10, 5.13] を参照されたい。

**補題 4.13**  $X$  を射影的代数多様体とし  $\mathcal{L}$  を  $X$  上の豊富可逆層とする。 $R := \bigoplus_{l \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^l)$  とおくと、 $X \cong \text{Proj } R$  となる。

$X$  の Fourier–Mukai パートナー  $Y$  に対して系 4.12 より  $X$  と  $Y$  の標準環は同型であった。もし  $K_X, K_Y$  が共に豊富であれば、補題 4.13 より同型

$$X \cong \text{Proj } R(X) \cong \text{Proj } R(Y) \cong Y$$

が得られる。まったく同様の議論が  $-K_X$  が豊富（つまり  $X$  が Fano 多様体）であるときも成り立つ。実際 [BO] では、 $K_X$  もしくは  $-K_X$  が豊富であるとき、 $X$  の Fourier–Mukai パートナーは  $Y$  は  $X$  と同型になることを示した。<sup>5</sup>

Hochschild コホモロジー、ホモロジーは **Hochschild–Kostant–Rosenberg (HKR)** 同型 (Hochschild–Kostant–Rosenberg isomorphism) と呼ばれる次のような同型写像によって、代数多様体の接束、余接束のコホモロジーと結びつく。

**定理 4.14 ([HKR62])**  $X$  を滑らかな準射影的代数多様体とする。このときベクトル空間の同型写像

$$\text{HH}^n(X) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \bigwedge^p T_X), \quad \text{HH}_n(X) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p)$$

が存在する。

**例 4.15** 定理 4.14 より次がわかる。まず  $\text{HH}^*(\text{Spec } \mathbb{C}) = \text{HH}_*(\text{Spec } \mathbb{C}) = \mathbb{C}$  である。また  $C$  を種数  $g$  の滑らかな射影曲線とすると、

---

<sup>5</sup> [BO] における証明は上記で述べたような定理 4.11 を使う証明ではない。また [BO] の結果より、もし  $K_X$  (もしくは  $-K_X$ ) が豊富であるとき、 $K_Y$  (もしくは  $-K_Y$ ) も豊富であることは従う。

$$\mathrm{HH}^*(C) = \begin{cases} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3[-1] & (g=0) \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2[-1] \oplus \mathbb{C}[-2] & (g=1) \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^g[-1] \oplus \mathbb{C}^{3g-3}[-2] & (g \geq 2) \end{cases}$$

であり、さらに次が成り立つ。

$$\mathrm{HH}_*(C) = \mathbb{C}^g[1] \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^g[-1].$$

定理 4.11 で述べたように Hochschild コホモロジー・ホモロジーは導來不変量であったから定理 4.14 を使って次を得る。

**系 4.16**  $X, Y$  を導來同値な滑らかな射影的代数多様体とすると、各  $n$  ごとに次のベクトル空間の同型が存在する。

$$\begin{aligned} \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \bigwedge^p T_X) &\cong \bigoplus_{p+q=n} H^q(Y, \bigwedge^p T_Y) \\ \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p) &\cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(Y, \Omega_Y^p) \end{aligned}$$

滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、

$$h^{p,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$$

は **Hodge 数** (Hodge number) と呼ばれる重要な不変量である。例えば  $h^{0,\dim X}(X)$  は **幾何的種数** (geometric genus),  $h^{0,1}(X)$  は **不正則数** (irregularity) と呼ばれ、それぞれ  $p_g(X), q(X)$  と書かれる。これらは特に代数曲面の分類で重要な役割を果たす。

**問題 4.17**  $X, Y$  を導來同値な滑らかな射影的代数多様体とする。

- (i)  $\dim X = \dim Y = 2$  であるとき、等式  $\rho(X) = \rho(Y)$  を示せ。
- (ii) Serre 双対性定理から  $h^{p,q}(X) = h^{\dim X - p, \dim X - q}(X)$  が成り立ち、Hodge 対称性から  $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$  が成り立つ。また導來同値な  $X, Y$  に対し  $h^{1,0}(X) = h^{1,0}(Y)$  が成り立つことが知られている [PS11, Corollary B]。これらを使い、 $\dim X = \dim Y = 3$  であるとき、 $h^{p,q}(X) = h^{p,q}(Y)$ 、つまりすべての Hodge 数が等しいことを示せ。

導來同値な 2 つの滑らかな射影的代数多様体の Hodge 数が等しいかどうかは未解決問題である。また上で述べたように  $X$  と  $Y$  が導來同値ならば, [PS11, Corollary B] より同型  $H^1(X, \mathbb{Q}) \cong H^1(Y, \mathbb{Q})$  が存在する。一方

$$H^1(X, \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(X), \mathbb{Q})$$

であるから、基本群  $\pi_1(X)$  が導來同値で不变になるかどうかという問題が気になるところである。一方、Schnell によって、单連結な 3 次元 Calabi–Yau 多様体  $X$  と群  $G = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$  の  $X$  への自由な作用であって、 $X/G$  が  $X$  と導來同値になるような例が発見された ([Sch12])。 $\pi_1(X/G) \cong G$  であるから、これは基本群が導來圏の不变量にはならない例を与えていた。

この節の最後に滑らかな射影的代数多様体  $X$  の Fourier–Mukai パートナーの研究について触れておく。1980 年前半に Abel 多様体とその双対 Abel 多様体が互いに Fourier–Mukai パートナーである（定理 2.54）ことが観察されてから、それ以降しばらくの間、Fourier–Mukai パートナーに関する目立った研究はなかったように思われる。ところが上でも触れたように、1990 年台半ばになって [BO] において、 $K_X$  もしくは  $-K_X$  が豊富であるとき、 $X$  の Fourier–Mukai パートナーは  $X$  と同型となることが示され、連接層の導來圏が代数多様体の不变量として注目され始めた。2000 年頃になると [BM01, Kaw02a] において、代数曲面の Fourier–Mukai パートナーが決定され、また [Bri02] において、2 つの双有理同値な 3 次元 Calabi–Yau 多様体は互いに Fourier–Mukai パートナーとなることが示された（7 章参照）。これらの論文に触発され、著者たちも 3 次元代数多様体の Fourier–Mukai パートナーの研究 [Tod06], [Kaw02a] で挙げられた D–K 予想の反例となる Fourier–Mukai パートナーの構成 [Ueh04], 双有理 Torelli 問題の反例となる Fourier–Mukai パートナーの構成 [Ueh12] を行った。

Fourier–Mukai パートナーの研究は、滑らかな射影的代数多様体  $X, Y$  の導來圏の間の Fourier–Mukai 変換の研究ともいえるが、 $X = Y$  である場合、Fourier–Mukai 変換は導來圏の自己同値を与える。そこで上述の Fourier–Mukai パートナーの研究から派生し、楕円曲面、さらには代数曲面の導來圏の自己同値群の研究を行ったのが [Ueh16, Ueh19] である。さらに自己同値群の研究は [Bri08] により、11 章で述べる Bridgeland 安定性条件の空間の研究にも結びついていった [Tod08b, Tod09, IUU10]。

Fourier–Mukai パートナーの研究は著者たちにとっても連接層の導來圏の研究を始めるきっかけとなつた思い入れのある分野である。

## 4.2 半直交分解

Noether スキーム  $X$  に対し,  $D^b(X)$  が直既約であることと,  $X$  が連結であることは同値である (補題 3.14 参照). それでは連結なスキームの導來圏を新たなアイデアを使って, 何らかの意味でさらに細かく分解できないだろうか? それが半直交分解の考え方である.

**定義 4.18 (半直交分解)** 三 角 圏  $\mathcal{D}$  の 半 直 交 分 解 (semi-orthogonal decomposition) とは,  $\mathcal{D}$  の狭義充満部分三角圏の組  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  であって,  $i < j$  ならば  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^\perp$  が成り立ち, さらにすべての  $\mathcal{D}$  の対象  $F$  に対して次の図式が存在することである:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_m & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_3 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F \\ & \swarrow [1] & \nearrow & & & \swarrow [1] & \nearrow \\ & C_m & & & & C_2 & \\ & & & & & & C_1 \end{array}$$

ここですべての三角図式は完全三角形であり, 各  $i$  に対し  $C_i \in \mathcal{C}_i$  が成り立つ. このとき  $\mathcal{D}$  は  $C_i$  たちの対象すべてで古典的に生成されているので (特に順番も気にして)

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

と書くことにする. また, この半直交分解が極大 (maximal) であるとは, 各  $\mathcal{C}_i$  が非自明な半直交分解を持たないことをいう.

**問題 4.19** 対象  $F \in \mathcal{D}$  に対し, 定義 4.18 に現れる図式を考える.  $F$  に対し,  $F_i, C_i$  は同型を除いて一意的に決まり, さらに  $F$  に対して  $F_i, C_i$  を決める対応が関手的であることを示せ. (ヒント: 問題 2.15 を使え.)

問題 4.19 により, 半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が存在したとき, 三角関手

$$\begin{aligned} p_i: \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C}_i \quad F \mapsto C_i \\ p_{i,m}: \mathcal{D} &\rightarrow \langle \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{i+1}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle \quad F \mapsto F_i \end{aligned}$$

が存在する。 $p_i$  や  $p_{i,m}$  をしばしば上の半直交分解における射影関手 (projection functor) と呼ぶ。後で述べる命題 4.31 の証明から、 $m = 2$  のときは  $p_1$  は埋め込み関手  $\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{D}$  の左随伴関手と、また  $p_2$  は埋め込み関手  $\mathcal{C}_2 \hookrightarrow \mathcal{D}$  の右随伴関手と一致することがわかる。

半直交分解の理解を深めるためにいくつか問題を与えておく。

**問題 4.20** 半直交分解  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$  が存在するとき、群準同型

$$K(\mathcal{D}) \rightarrow K(\mathcal{C}_1) \oplus \cdots \oplus K(\mathcal{C}_m) \quad [F] \mapsto ([p_1(F)], \dots, [p_m(F)])$$

が定まり、さらにこれは同型となることを示せ。

**問題 4.21** 三角圏  $\mathcal{D}$  の狭義充満部分三角圏  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  たちが、 $i < j$  ならば  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_j^\perp$  を満たすとする。このとき  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  が  $\mathcal{D}$  の半直交分解を与えることと、 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  たちが三角圏  $\mathcal{D}$  を古典的に生成することは同値であることを次の手順で示したい。

(i)  $\mathcal{D}$  の充満部分圏  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  は、 $C_i \in \mathcal{C}_i$  ( $i = 1, 2$ ) および完全三角形

$$C_2 \rightarrow E \rightarrow C_1 \rightarrow C_2[1]$$

が存在するような対象  $E \in \mathcal{D}$  からなるとする。このとき、 $\mathcal{D}'$  は  $\mathcal{D}$  の充満部分三角圏となることを示せ。(ヒント：補題 2.8、問題 2.15(ii) を使え。)

(ii)  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  たちが三角圏  $\mathcal{D}$  を古典的に生成するとき、 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  は  $\mathcal{D}$  の半直交分解を与えることを示せ。(ヒント： $m$  に関する帰納法を使う。)

**問題 4.22** 三角圏  $\mathcal{D}$  の半直交分解  $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$  が与えられているとする。このとき  $1 \leq k \leq l \leq m$  に対し、

$$\langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \langle \mathcal{C}_k, \dots, \mathcal{C}_l \rangle, \mathcal{C}_{l+1}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

も  $\mathcal{D}$  の半直交分解を与えることを示せ。また

$$\langle \mathcal{C}_k, \dots, \mathcal{C}_l \rangle = {}^\perp \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1} \rangle \cap \langle \mathcal{C}_{l+1}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle^\perp$$

を示せ。

命題 4.31 で半直交分解と、次に与える許容部分三角圏との関係が述べられる。

**定義 4.23** (許容部分三角圏)  $\mathcal{C}$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の狭義充満部分三角圏とし、 $i: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を充満部分三角圏の構造を与える埋め込みとする。 $i$  が右 (左) 随伴関手を持つとき、 $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  の右 (左) 許容部分三角圏と呼ぶ。右許容かつ左許容な部分三角圏を単に許容部分三角圏 (admissible subcategory) と呼ぶ。

**問題 4.24**  $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}$  を狭義充満部分三角圏の列とする。次を示せ。

- (i)  $\mathcal{C}_2$  が  $\mathcal{C}_1$  の右 (左) 許容部分三角圏であるとき、 $\mathcal{C}_2$  は  $\mathcal{D}$  の右 (左) 許容部分三角圏にもなる。
- (ii)  $\mathcal{C}_2$  が  $\mathcal{D}$  の右 (左) 許容部分三角圏であるとき、 $\mathcal{C}_2$  は  $\mathcal{C}_1$  の右 (左) 許容部分三角圏にもなる。

$X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とし、

$$\Phi: D^b(X) \hookrightarrow D^b(Y)$$

を充満忠実な関手とする。このとき問題 3.1、定理 2.53 より  $\Phi$  は右随伴関手、左随伴関手を持つから、 $D^b(X)$  は  $D^b(Y)$  の許容部分三角圏となる。

**注意 4.25** 定義 4.18 で与えた半直交分解を [Orl09] では弱半直交分解と呼んでいる。さらに各充満部分三角圏  $\mathcal{C}_i$  が  $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏であるときに、半直交分解と呼ぶ文献も多い。ちなみに本書で出てくる三角圏  $\mathcal{D}$  の多くは、滑らかな射影的代数多様体  $X$  の導來圏  $D^b(X)$  で、もし  $D^b(X)$  が定義 4.18 のような半直交分解を持てば、各  $\mathcal{C}_i$  たちは常に許容部分三角圏となることが知られている。この事実は系 4.33 で証明を与える。

$\mathbb{C}$  上の準射影的代数多様体の導來圏  $D^b(X)$  の半直交分解で最も簡単なのは、各  $\mathcal{C}_i$  が  $\text{Spec } \mathbb{C}$  の導來圏  $D^b(\text{Spec } \mathbb{C})$  と同値になるときで、このとき各  $\mathcal{C}_i$  は例外対象と呼ばれる対象で古典的に生成される。これについては後で詳しく述べる。

$Y$  を滑らかな準射影的代数多様体とし、 $C$  を滑らかな  $Y$  の閉部分多様体で余次元が  $c$  であるものとする。 $f: X \rightarrow Y$  を  $C$  でのブローアップとし、さらに  $E$  を  $f$  の例外因子とすると、 $f|_E: E \rightarrow C$  は射影束  $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{C/Y}^\vee) \rightarrow C$  と同型であった [Har77, Theorem 8.24]:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \uparrow & & \uparrow i \\ E & \xrightarrow{f|_E} & C \end{array}$$

整数  $k \in \mathbb{Z}$  に対し、関手  $\Phi_k: D^b(C) \rightarrow D^b(X)$  を

$$\Phi_k(-) = j_* \circ ((f|_E)^*(-) \otimes \mathcal{O}_E(-k))$$

として定義する。ここで  $\Phi_k$  の定義に現れる関手  $j_*$  は Abel 圈の完全関手であるから  $j_* = \mathbf{R}j_*$  であり、 $(f|_E)^*, \otimes \mathcal{O}_E(-k)$  も同様であることに注意されたい。このような状況の下、次の定理が成り立つ。

**定理 4.26 (Orlov[Orl93])**  $\mathbf{L}f^*$ , 各  $\Phi_k$  は充満忠実であり、さらに  $D^b(X)$  の次のような半直交分解が存在する：

$$D^b(X) = \langle \Phi_{-c+1}(D^b(C)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(C)), \mathbf{L}f^*(D^b(Y)) \rangle.$$

**証明** 命題 9.31において類似の結果を証明するため、ここでは  $\mathbf{L}f^*$  が充満忠実になることのみ説明しておこう。命題 2.50, 射影公式（命題 2.49）を使うと

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{L}f^*E, \mathbf{L}f^*F) \cong \mathrm{Hom}(E, \mathbf{R}f_*(\mathbf{L}f^*F)) \cong \mathrm{Hom}(E, F \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{R}f_*\mathcal{O}_X)$$

が得られる。ところが  $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$  であることから、 $\mathbf{L}f^*$  が充満忠実になることがわかる。□

**注意 4.27** 上の説明からわかるように、 $X, Y$  が滑らかな準射影的代数多様体であって、 $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$  が成り立つような射影的射  $f: X \rightarrow Y$  に対して  $\mathbf{L}f^*: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$  は充満忠実になることもわかる。

**注意 4.28**  $Y$  が滑らかでないときは、そもそも導來関手  $\mathbf{L}f^*$  が  $D^b(Y)$  上では定義されず、その代わりに  $D^-(Y)$  から  $D^-(X)$  への関手として定義される。 $Y$  が滑らかでないときは  $Y$  上の連接層の有界な複体が、局所自由層の上有界な複体に擬同型になるものの、有界な複体とは必ずしも擬同型にはならないからである（補題 2.46 参照）。

$Y$  を滑らかな準射影的代数多様体とし、 $\mathcal{E}$  を  $Y$  上の階数  $r$  の局所自由層とし、射影束  $f: X := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow Y$  を考える。 $k \in \mathbb{Z}$  に対し、関手  $\Phi_k: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$

を

$$\Phi_k(-) := f^*(-) \otimes \mathcal{O}_X(k)$$

と定める。 $f$  は平坦射であるから、 $f^*$  は導來関手  $\mathbf{L}f^*$  と一致することに注意されたい。このとき次が成り立つ。

**定理 4.29 (Orlov[Orl93])**  $f^*$  と各  $\Phi_k$  は充満忠実で、さらに  $D^b(X)$  の次のような半直交分解が存在する：

$$D^b(X) = \langle \Phi_{-r+1}(D^b(Y)), \dots, \Phi_{-1}(D^b(Y)), f^* D^b(Y) \rangle.$$

**証明** 射影束  $f$  に対しても、 $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$  が成り立つの  $f^* = \mathbf{L}f^*$  が充満忠実であるのは、定理 4.26 のときと同様に示せる。証明は命題 9.31 と同様であるからそちらを参考にされたい。□

**注意 4.30** 定理 4.26 に現れるブローアップと定理 4.29 に現れる射影束は、極小モデル理論における端射的収縮射 (extremal contraction) の典型例である。

許容部分三角圏と半直交分解の関係は次のように述べられる。

**命題 4.31**  $\mathcal{C}$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の充満部分三角圏とし、 $i: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を充満部分三角圏の構造を与える充満忠実な埋め込みとする。このとき次は同値である。

- (i)  $i$  は右（左）随伴関手を持つ。つまり  $\mathcal{C}$  は  $\mathcal{D}$  の右（左）許容部分三角圏となる。
- (ii) 半直交分解  $\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C})^\perp, i(\mathcal{C}) \rangle (\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C}), {}^\perp i(\mathcal{C}) \rangle)$  が存在する。

**証明**  $i$  の右随伴関手を  $i^R$  とする。 $(3.2)$  で得た自然変換

$$\eta: i \circ i^R \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$$

を考える。任意の対象  $F \in \mathcal{D}$  に対し、定義 2.5（公理 1）(c) により、完全三角形

$$i \circ i^R(F) \xrightarrow{\eta(F)} F \rightarrow G$$

を得る。このとき任意の  $C \in \mathcal{C}$  に対しコホモロジー的関手

$$\text{Hom}(i(C), -): \mathcal{D} \rightarrow \text{Mod } \mathbb{Z}$$

を考えると、長完全列

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{Hom}^k(i(C), i \circ i^R(F)) \xrightarrow{\phi_k} \text{Hom}^k(i(C), F) \rightarrow \text{Hom}^k(i(C), G) \\ &\rightarrow \text{Hom}^{k+1}(i(C), i \circ i^R(F)) \xrightarrow{\phi_{k+1}} \dots \end{aligned}$$

を得るが、各  $\phi_k$  は  $\eta(F)$  の作り方から同型であることがわかる。したがって  $\text{RHom}(i(C), G) = 0$ 、つまり  $G \in i(\mathcal{C})^\perp$  となる。

逆に半直交分解  $\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C})^\perp, i(\mathcal{C}) \rangle$  が与えられたとき、任意の対象  $E \in \mathcal{D}$  に対し、完全三角形

$$F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F[1] \quad (F \in i(\mathcal{C}), G \in i(\mathcal{C})^\perp)$$

が存在する。 $F := i^R(E)$  とおく。問題 2.15 を使うと  $i^R$  は  $\mathcal{D}$  から  $\mathcal{C}$  への関手を定めることができ、さらに任意の対象  $C \in \mathcal{C}$  に対し、関手  $\text{Hom}(i(C), -)$  をこの完全三角形に施すことにより、 $i^R$  が  $i$  の右随伴関手であることも従う。

半直交分解  $\mathcal{D} = \langle i(\mathcal{C}), {}^\perp i(\mathcal{C}) \rangle$  の存在と左随伴関手の存在の同値性も同様に示せる。□

**問題 4.32** (i) 三角圏  $\mathcal{D}$  の右（左）許容部分三角圏は  $\mathcal{D}$  の thick 部分圏となることを示せ。

(ii) 三角圏  $\mathcal{D}$  の右（左）許容部分三角圏  $\mathcal{C}$  に対し、

$$\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{C}^\perp) \quad (\mathcal{C} = ({}^\perp\mathcal{C})^\perp)$$

であることを示せ。

**系 4.33** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が存在すれば、各  $\mathcal{C}_i$  たちは常に許容部分三角圏となる。

**証明** まず [BK90, Theorem 2.14] により、 $D^b(X)$  は飽和である。<sup>6</sup> このとき [BK90, Propositions 2.6, 2.8] から各  $\mathcal{C}_i$  に関して、右許容、左許容、右飽和、左飽和であることはすべて同値である。 $i \in \{1, \dots, m\}$  を 1 つ固定する。問題 4.22 より、

---

<sup>6</sup> 飽和 (saturated)、右飽和、左飽和であることの定義は [BK90] を参照をされたい。

$$\langle\langle C_1, \dots, C_{i-1} \rangle, \langle C_i, \dots, C_m \rangle\rangle$$

は  $D^b(X)$  の半直交分解を与える。命題 4.31 より  $\langle C_i, \dots, C_m \rangle$  は  $D^b(X)$  の右許容部分三角圏となり、[BK90, Propositions 2.6, 2.8] から左許容部分三角圏となる。再び命題 4.31 より  $C_i$  は  $\langle C_i, \dots, C_m \rangle$  の左許容部分三角圏となるから、結局  $C_i$  は  $D^b(X)$  の許容部分三角圏である。□

最後に三角圏の Noether 性、Jordan–Hölder 性の定義を考えておこう。

**定義 4.34** (i) 三角圏  $\mathcal{D}$  が **Noether 性** (Noetherian property) を持つとは、 $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏が昇鎖条件を満たす、つまり許容部分三角圏の昇鎖列

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{D} \quad (4.4)$$

があるとすると、十分大きい  $i$ において、 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i+1} = \cdots$  が成り立つことをいう。

(ii) 三角圏  $\mathcal{D}$  が **Jordan–Hölder 性** (Jordan–Hölder property) を持つとは、 $\mathcal{D}$  が Noether 性を持ち、さらに次の性質を満たすこととする： $\mathcal{D}$  が許容部分三角圏たちからなる 2 つの極大な半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle C_1, C_2, \dots, C_m \rangle = \langle C'_1, C'_2, \dots, C'_n \rangle$$

を持つならば、 $n = m$  であり、またある  $n$  文字の置換  $\sigma$  が存在し、任意の整数  $1 \leq i \leq n$  に対し、同値  $C_i \cong C'_{\sigma(i)}$  が成り立つ。<sup>7</sup>

問題 4.69 では  $D^b(\mathbb{P}^1)$  は Noether 性、さらには Jordan–Hölder 性を持つことを示す。

ちなみに (4.4) のような昇鎖列が存在したとき、許容部分圏の降鎖列

$$\mathcal{D} \supset \mathcal{A}_1^\perp \supset \mathcal{A}_2^\perp \supset \cdots$$

が存在する。一方、問題 4.32(ii) より  $\mathcal{A}_i = {}^\perp(\mathcal{A}_i^\perp)$  が成り立った。 $\mathcal{D}$  の許容部分圏が降鎖条件を満たすときに  $\mathcal{D}$  は Artin 性を持つ、と呼ぶことにすると、 $\mathcal{D}$  が Noether 性を持つことと Artin 性を持つことは同値な性質である。このことから、三角圏  $\mathcal{D}$  が Noether 性を持つならば、 $\mathcal{D}$  は必ず極大な半直交分解を持つことになる。4.7 節でも述べるように、与えられた滑らかな射影的代数多様体の導來圏

<sup>7</sup> [Kuzc] では Jordan–Hölder 性の定義に Noether 性を仮定していない。

$D^b(X)$  が Noether 性を持つか、という問題は未解決な問題である。

導来圏  $D^b(X)$  が Jordan–Hölder 性を持てば、導来圏の研究を代数多様体の有理性の研究に応用できると Kuznetsov は考えていた ([Kuz16] 参照)。しかし  $D^b(X)$  が Jordan–Hölder 性を持たないような代数多様体  $X$  の例が後ほど見つかった (例 4.64, 注意 4.71 参照)。

### 4.3 例外生成列

この節では、 $\mathcal{D}$  は  $\mathbb{C}$ -線形な三角圏を表す。

**定義 4.35 (例外対象)**  $\mathcal{D}$  の対象  $E$  が  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$  を満たす、つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^i(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つとき、 $E$  を  $\mathcal{D}$  の例外対象 (exceptional object) と呼ぶ。

$\mathbb{C}$  上の滑らかな射影的代数多様体  $X$  が  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  ( $i \neq 0$ ) を満たすとする。このときすべての直線束は例外対象である。例えば射影空間と双有理同値な多様体 (有理多様体 (rational variety) と呼ばれる) や、Fano 多様体、Enriques 曲面はこの条件を満たすので、直線束は例外対象である。例外対象の他の構成の仕方を次の問題で見てみよう。

**問題 4.36**  $X$  を滑らかな射影的代数曲面とし、 $C$  を  $X$  に含まれる滑らかな有理曲線 (すなわち  $C \cong \mathbb{P}^1$ )、 $L$  を  $C$  上の直線束とする。 $L$  が  $D^b(X)$  の例外対象となることと、 $C$  が  $(-1)$ -曲線となることは同値であることを示せ。また  $L$  が  $D^b(X)$  の球面対象となることと、 $C$  が  $(-2)$ -曲線となることは同値であることを示せ。

さらに例えば  $X$  を del Pezzo 曲面 (2 次元 Fano 多様体) に限定すれば、その導来圏の例外対象はすべて局所自由層のシフト、もしくは  $(-1)$ -曲線上の直線束のシフトであることが知られている [KO94]。

例外対象  $E \in D^b(X)$  と自己同値  $\Phi \in \mathrm{Auteq} D^b(X)$  に対し、 $\Phi(E)$  も例外対象となるので、複雑な自己同値群を持つような代数多様体上の例外対象は、よりたくさんあると期待される。例えば代数曲面が  $(-2)$ -曲線を持つ問題 4.36 より球面対象を持ち、定理 2.56 から (複雑な自己同値である) 捻り閑手が存在する。[OU15] では  $(-2)$ -曲線を持つ線織曲面  $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$  上の例外層 (例外

対象となる連接層) を分類した.

以下では例外対象があれば、半直交分解が得られることを見ていこう.

**問題 4.37**  $\mathcal{D}$  の例外対象  $E$  とすると、関手

$$- \otimes_{\mathbb{C}} E: D^b(\mathrm{Spec} \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}$$

は充満忠実となり、その本質的像は  $\langle E \rangle$  となることを示せ.

任意の対象  $E_1, E_2 \in \mathcal{D}$  に対し

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2) \in D^b(\mathrm{Vect} \mathbb{C})$$

が満たされる、すなわち  $\sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E_1, E_2[i]) < \infty$  が成り立つとき、 $\mathcal{D}$  は有限型 (of finite type) であると呼ばれる. 滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、 $D^b(X)$  は有限型である (定理 6.22(i), 問題 6.21 参照).

**補題 4.38**  $\mathcal{D}$  が有限型であると仮定する.  $E \in \mathcal{D}$  を例外対象とすると、 $\langle E \rangle$  は  $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏である.

**証明**  $\mathcal{D}$  の例外対象  $E$  が与えられたとき、任意の対象  $F$  に対し、次のような完全三角形を考える.

$$G \rightarrow F \xrightarrow{\mathrm{coev}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, E)^{\vee} \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, E)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} E \rightarrow G[1] \quad (4.5)$$

ただし  $G = \mathrm{Cone}(\mathrm{coev})[-1]$  とおいた. このときこの完全三角形にコホモロジー的関手

$$\mathrm{Hom}(-, E): \mathcal{D}^{\circ} \rightarrow \mathrm{Vect} \mathbb{C}$$

を施すと  $E$  が例外対象であるから、 $k \in \mathbb{Z}$  に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^k(\mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, E)^{\vee} \xrightarrow{\mathbf{L}} E, E) &\cong \mathrm{Hom}^k(E, E \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, E)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(E, E \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^k(F, E)) \end{aligned}$$

となるので  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間の長完全列

$$\begin{aligned} &\rightarrow \mathrm{Hom}^k(F, E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, E) \xrightarrow{\phi_k} \mathrm{Hom}^k(F, E) \rightarrow \mathrm{Hom}^k(G, E) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}^{k+1}(F, E) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, E) \xrightarrow{\phi_{k+1}} \dots \end{aligned}$$

を得る. 各  $\phi_k$  は同型となり、結局  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(G, E) = 0$ , つまり  $G \in {}^{\perp} \langle E \rangle$  を得る.  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(F, E)^{\vee} \otimes_{\mathbb{C}} E$  は  $\langle E \rangle$  の対象であるから (注意 2.57 参照) これにより

$\mathcal{D}$  の半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \langle E \rangle, {}^\perp \langle E \rangle \rangle$$

を得る。まったく同様に  $\mathcal{D}$  の例外対象  $E$  と、任意の対象  $F$  に対し、完全三角形

$$G' \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, F) \xrightarrow{\mathbf{L}} E \xrightarrow{\mathrm{ev}} F \rightarrow G'[1] \quad (4.6)$$

によって  $G'$  を定めれば、 $G' \in \langle E \rangle^\perp$  となり、 $\mathcal{D}$  の半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \langle E \rangle^\perp, \langle E \rangle \rangle$$

を得る。以上のことから命題 4.31 を用いると、 $\langle E \rangle$  は  $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏であることがわかる。□

次に半直交分解の定義 4.18 で、すべての  $C_i$  が例外対象の生成する充満部分三角圏になる場合を考えたい。そこで現れるのが次の述べる例外生成列である。

**定義 4.39 (例外生成列)**  $E_1, \dots, E_m$  を  $\mathcal{D}$  の例外対象とする。

- (i)  $(E_1, \dots, E_m)$  が例外列 (exceptional collection) であるとは、 $i < j$  であるとき  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_j, E_i) = 0$  が成り立つときをいう。
- (ii) 例外列  $(E_1, \dots, E_m)$  が  $\mathcal{D}$  を古典的に生成するとき、例外列  $(E_1, \dots, E_m)$  を例外生成列 (full exceptional collection) であるという。
- (iii) 例外列  $(E_1, \dots, E_m)$  が強例外列 (strong exceptional collection) であるとは、任意の  $i, j$ 、任意の  $k \neq 0$  に対し、 $\mathrm{Hom}^k(E_j, E_i) = 0$  が成り立つときをいう。

滑らかな射影的代数多様体やスタック  $X$  に対し、その導來圏  $D^b(X)$  が例外生成列をもつとき、しばしば  $X$  は例外生成列を持つ、などということもある。

**例 4.40**  $(Q, \rho)$  を順序付き関係式付き簇とし、 $Q_0 = \{1, \dots, m\}$  とおく。 $A = CQ/I$  をその道代数とすると

$$\mathrm{Hom}^k(P(i), P(j)) = \begin{cases} e_j A e_i & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

であるから、 $(P(1), P(2), \dots, P(m))$  は強例外列になる（実は定理 4.63 で見るようく生成列にもなる）ことがわかる。

$(E_1, \dots, E_m)$  を  $\mathcal{D}$  の例外生成列としよう。このとき問題 4.21 より、 $\mathcal{D}$  の半直

交分解

$$\mathcal{D} = \langle \langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_m \rangle \rangle$$

を得る。これは

$$\mathcal{D} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$$

と書き表されることが普通である。以下ではこの半直交分解に関して、定義4.18に現れた図式の構成の仕方をより具体的に見てみよう。

まず(4.5)で見たように、任意の対象  $F$  に対し  $F_2 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle, C_1 \in \langle E_1 \rangle$  が存在し、完全三角形

$$F_2 \rightarrow F \rightarrow C_1 \rightarrow F_2[1]$$

が得られる。次にこの  $F_2$  に対し  $F_3 \in {}^\perp \langle E_2 \rangle, C_2 \in \langle E_2 \rangle$  が存在し、完全三角形

$$F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow C_2 \rightarrow F_3[1]$$

が得られる。 $F_2, C_2 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle$  であるから、 $F_3 \in {}^\perp \langle E_1 \rangle$  となっていることもわかる。これを繰り返し、各  $k \leq m$  に対し、 $F_{k+1} \in \bigcap_{i=1}^k {}^\perp \langle E_i \rangle, C_k \in \langle E_k \rangle$  が存在し、

$$F_{k+1} \rightarrow F_k \rightarrow C_k \rightarrow F_{k+1}[1]$$

を得る。さらに  $(E_1, \dots, E_m)$  が  $\mathcal{D}$  の生成列であることから

$$\bigcap_{i=1}^m {}^\perp \langle E_i \rangle = \{0\}$$

であることがわかるので  $F_{m+1} = 0$  となり、定義4.18に現れた図式を得る。

**注意4.41**  $\mathcal{D}$  の例外列  $(E_1, \dots, E_m)$  が与えられたとき、 $\mathcal{C} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$  とおくと、上の証明から半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp, E_1, \dots, E_m \rangle$$

が存在することがわかる。特に  $\mathcal{C}^\perp = 0$  と  $\mathcal{D} = \mathcal{C}$  が同値であることがわかる。したがって例外列  $(E_1, \dots, E_m)$  が生成列になるかどうか、つまり集合  $\{E_1, \dots, E_m\}$  が  $\mathcal{D}$  を古典的に生成するかどうかは、それが  $\mathcal{D}$  を生成するかどうかを見ればよい。後者の条件のほうがチェックが容易であることが多い。

$\mathcal{D}$  に例外生成列  $(E_1, \dots, E_m)$  が存在するとき、問題 4.20 から  $K(\mathcal{D})$  は  $[E_1], \dots, [E_m]$  で自由に生成されることがわかる：

$$K(\mathcal{D}) = \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_m]$$

これは  $\mathcal{D}$  が例外生成列を持つための必要条件を与える。例えば、滑らかな射影的代数曲線  $X$  に対しては、

$$K(X) \cong \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$$

である ([Har77, Exercise II.6.11]) から、射影直線  $\mathbb{P}^1$  以外は例外生成列を持たない。<sup>8</sup> また滑らかで射影的なトーリック多様体  $X$  に対し、その Grothendieck 群  $K(X)$  は有限生成な自由 Abel 群であることが知られているが、より強く [Kaw06] によって  $X$  は例外生成列を持つことが示された。また [Ueh14] では滑らかな 3 次元トーリック Fano 多様体  $X$  に対し、 $X$  上の直線束からなる強例外生成列を Frobenius 射を使って構成している。一方、滑らかな射影的代数多様体  $X$  であり、 $K(X)$  が自由に生成されているが、 $X$  は例外生成列を持たない例を後で見る（定理 4.75）。

また次を使えば、 $D^b(X)$  が例外生成列を持つならば  $\text{Pic}(X)$  には非自明な捻じれ元がないこともわかる。

**補題 4.42**  $K(X)$  が非自明な捻じれ元を持たなければ、 $\text{Pic}(X)$  も非自明な捻じれ元を持たない。

**証明** 対偶を示す。 $L \in \text{Pic}(X)$  を非自明な捻じれ元とすると、ある  $N > 1$  に対し、 $L^{\otimes N} \cong \mathcal{O}_X$  となる。

$$\alpha := [L] - 1 = [L] - [\mathcal{O}_X] \in K(X)$$

とおくと、 $\text{rk } \alpha = 0$  となるので、coniveau フィルトレーションの存在により  $\alpha^{\dim X+1} = 0$  が成り立つことがわかる。 $M$  を  $\alpha^M = 0$  となる最小の正の整数とする。もし  $M = 1$  のときは  $[L] = [\mathcal{O}_X]$  であり、さらに  $\text{Gr}^1(K(X)) \cong \text{Pic}(X)$  であるから  $L \cong \mathcal{O}_X$  が成り立つので、 $L$  が非自明であることに反する。よって  $M > 1$  である。このときは  $[L] = 1 + \alpha$  の  $N$  乗を考えると、

$$1 = 1 + N\alpha + \alpha^2\beta \quad (\beta \in K(X))$$

---

<sup>8</sup> Serre 双対性を使えば、 $\mathbb{P}^1$  以外は例外対象さえ持たないことも容易に見てとれる。

となり,

$$0 = N\alpha + \alpha^2\beta$$

を得る. 両辺に  $\alpha^{M-2}$  を掛けて  $N\alpha^{M-1} = 0$  が得られ,  $\alpha^{M-1}$  は  $N$ -捻じれ元であることがわかった.  $\square$

例えば Enriques 曲面  $X$  の直線束は例外対象であったが,  $\omega_X$  は  $\text{Pic}(X)$  の 2-捩れ元であるため, 補題 4.42 より  $X$  は例外生成列を持たないことがわかる.

代数多様体の導來圏が例外生成列を持つための必要条件をもう少し見ていく. そのために, まず  $D^b(X)$  の許容部分三角圏  $\mathcal{C}$  の Hochschild コホモロジー, ホモロジーを以下で定義しよう. 命題 4.31 で見たように, 半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle$$

が存在する. このとき問題 4.19 より射影関手

$$\Psi: D^b(X) \rightarrow \mathcal{C}(\subset D^b(X))$$

が存在する. Kuznetsov ([Kuzb, Theorem 3.7] 参照) によると, ある対象  $\mathcal{P} \in D^b(X \times X)$  が同型を除いてただ 1 つ存在し,  $\Psi \cong \Phi^{\mathcal{P}}$  となる. このとき  $\mathcal{C}$  の  $k$  次の Hochschild コホモロジー  $\text{HH}^k(\mathcal{C})$ , ホモロジー  $\text{HH}_k(\mathcal{C})$  を次のように定義する:

$$\text{HH}^k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(\mathcal{P}, \mathcal{P}), \quad (4.7)$$

$$\text{HH}_k(\mathcal{C}) := \text{Hom}_{X \times X}^k(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \xrightarrow{\mathbf{L}} p_2^* \omega_X [\dim X]$$

許容部分三角圏  $\mathcal{C}$  として  $D^b(X)$  自身をとると,  $\mathcal{P} = \mathcal{O}_\Delta$  ととれるから, (4.7) で与えた定義は 4.1 節で与えた代数多様体  $X$  の Hochschild(コ)ホモロジーの定義と一致することに注意されたい. 次が成り立つ.

**定理 4.43 ([Kuzb])**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とする.

(i) 半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$$

が存在するとする. このとき, 次の Hochschild ホモロジーおよび Grothendieck 群の同型が存在する.

$$\mathrm{HH}_k(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{HH}_k(\mathcal{C}_i), \quad K(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m K(\mathcal{C}_i).$$

(ii)  $\mathcal{C}$  を  $D^b(X)$  の許容部分三角圏とし、 $\mathcal{C}$  が半直交分解  $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$  を持つとする。このとき各  $\mathcal{C}_i$  も  $D^b(X)$  の許容部分三角圏である。また  $\mathcal{P}_i$  を射影関手  $\Psi_i: D^b(X) \rightarrow \mathcal{C}_i$  の核とするとき、長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}) \rightarrow \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}_1) \oplus \mathrm{HH}^k(\mathcal{C}_2) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}_{X \times X}^{k+1}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \rightarrow \mathrm{HH}^{k+1}(\mathcal{C}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

が存在する。

定理 4.43(ii) において、2通りの半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, {}^\perp \mathcal{C} \rangle$$

が考えられる。どちらを考えるかで射影関手  $D^b(X) \rightarrow \mathcal{C}_i$  の取り方が異なり、したがってその核の取り方も異なってくる。しかしふектル空間  $\mathrm{Hom}_{X \times X}^{k+1}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  は同型を除いて、一意に決まることが知られており ([Kuzb, Proposition 7.1])。よって (ii) の主張は意味を持つ。

上の定理を例外生成列によって得られる半直交分解に当てはめてみよう。 $D^b(X)$  に例外生成列  $(E_1, \dots, E_m)$  が存在するとき、上で見たように半直交分解

$$D^b(X) = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$$

が存在する。また  $\langle E_i \rangle \cong D^b(\mathrm{Spec} \mathbb{C})$  であって、例 4.15 で見たように  $\mathrm{HH}_*(\mathrm{Spec} \mathbb{C}) = \mathbb{C}$  であるから定理 4.43 により、

$$\mathrm{HH}_*(X) \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathrm{HH}_*(\mathrm{Spec} \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^m$$

がわかる。この式と定理 4.14 を使うと次が成り立つことがわかる。

**命題 4.44**  $D^b(X)$  に例外生成列  $(E_1, \dots, E_m)$  が存在するとき、 $p \neq q$  ならば  $h^{p,q}(X) = 0$  が成り立つ。また  $\sum_{p=0}^{\dim X} h^{p,p}(X) = m$  が成り立つ。

## 4.4 例外生成列を持つ代数多様体

射影的な代数多様体  $X$  の導来圏  $D^b(X)$  が強例外生成列  $(E_1, \dots, E_m)$  を持つ

とき,  $A := \text{End}(\bigoplus_i E_i)$  とおくと, 命題 4.53 で見るように

$$\Phi := \mathbf{R}\text{Hom}_X\left(\bigoplus_i E_i, -\right) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A)$$

は  $\mathbb{C}$ -線形三角圏の同値を与える. さらにこの有限次元代数  $A$  は基本代数であり, ある範  $Q = (Q_0, Q_1)$  の道代数  $\mathbb{C}Q$  を, ある許容イデアルで割ったものと同型である (付録 B.3 参照).

$Q$  の与え方を見てみよう.  $Q_0 = \{1, 2, \dots, m\}$  とおく. 頂点  $i$  に対応する  $A$  のべき等元を  $e_i$  とすると, 頂点  $i$  から頂点  $j$  への道はベクトル空間  $e_i A e_j$  の元とみなせる. 一方  $\Phi(E_i) = e_i A$  であるから

$$e_i A e_j = \text{Hom}_A(e_i A, e_j A) = \text{Hom}_X(E_i, E_j) \quad (4.8)$$

が成り立つ. そこで  $i < j$  に対し写像の合成によって定まる自然な写像

$$\phi_{i,j} : \prod_{k; i < k < j} \text{Hom}(E_i, E_k) \times \text{Hom}(E_k, E_j) \rightarrow \text{Hom}(E_i, E_j) \quad (4.9)$$

を考え, ベクトル空間  $\text{Hom}(E_i, E_j)/\text{Im } \phi_{i,j}$  の基底を 1 つ決め, それに  $i$  から  $j$  への矢印 ( $Q_1$  の元) を 1 つ対応させる.

具体的に考えた方が簡単なので, 以下で例を見ていこう. 最初に発見された代数多様体の例外生成列は, 以下で述べる Beilinson による  $n$  次元射影空間  $\mathbb{P}^n$  の導來圏  $D^b(\mathbb{P}^n)$  の強例外生成列であった. 定理 4.45 はすでに述べた射影束の半直交分解 (定理 4.29) において, 底空間を  $Y = \text{Spec } \mathbb{C}$  とした場合とみなせることにも注意されたい.

**定理 4.45 ([Bei78])**  $D^b(\mathbb{P}^n)$  には強例外生成列

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$$

が存在する.

**証明** 与えられた直線束の列が強例外列を与えることは  $\mathbb{P}^n$  上の単純なコホモロジーの計算 ([Har77, Theorem III.5.5] 参照) によってわかる. 生成性は, 次に示す補題 4.46 から従う.  $\square$

Beilinson による生成性の証明は,  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  の対角部分の構造層  $\mathcal{O}_{\Delta_{\mathbb{P}^n}}$  の Koszul 分解を用いるものであり, ここでの証明も補題 4.46 において Koszul 分解を用いている. また 8.3 節, 例 10.16 では, 重み付き射影空間に対しても同様の例外生成列が存在することを示すが, 例 10.16 における証明は, Koszul 分解 (4.10) を用い

ていて、本質的には Beilinson による生成性の証明と同じアイデアを使っている。

**補題 4.46**  $f: X \rightarrow Y$  を Noether スキーム間の射影的な射とし、すべてのファイバーの次元は  $n$  以下とする。さらに  $Y$  をアファインとし、 $\mathcal{L}$  を  $X$  上の豊富な直線束で大域切断で生成されているものとする。このとき  $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{L}^{-i}$  は  $D^-(X)$  を生成する。

**証明**  $\mathcal{L}$  によって有限射  $X \rightarrow \mathbb{P}_Y^N (= \mathbb{P}^N \times Y)$  が得られる。 $N+1$  変数の多項式環の Koszul 複体により

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^N}(-N-1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^N}(-k)^{\oplus \binom{N+1}{k}} \rightarrow \\ \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^N}(-1)^{\oplus N+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y^N} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

が得られ、これを  $X$  上に引き戻すことにより、

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{-N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathcal{L}^{-k})^{\oplus \binom{N+1}{k}} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

を得る。また  $K$  を写像  $(\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \rightarrow (\mathcal{L}^{-n})^{\oplus \binom{N+1}{n}}$  の核とすると、 $\text{Ext}_X^{n+1}(\mathcal{O}_X, K)$  の元として

$$0 \rightarrow K \rightarrow (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus (N+1)} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

を得る。ファイバーの次元の仮定より  $\text{Ext}_X^{n+1}(\mathcal{O}_X, K) = 0$  なので問題 2.41(iv) より、 $\mathcal{O}_X$  は  $D^b(X)$  の対象として、複体

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (\mathcal{L}^{-n-1})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathcal{L}^{-1})^{\oplus (N+1)} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

の直和因子であることがわかる。この複体の双対をとって  $j \geq 0$  に対し、帰納法を用いることで、 $\mathcal{L}^{-n-j-1}$  は  $D^b(X)$  の対象として、複体

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow (\mathcal{L}^{-n-j})^{\oplus (N+1)} \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathcal{L}^{-j})^{\oplus \binom{N+1}{n+1}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

の直和因子である。つまり  $D^-(X)$  の充満部分三角圏  $\langle \mathcal{L}^{-i} \mid 0 \leq i \leq n \rangle$  は  $\mathcal{L}^{-j}$  を含むことがわかる。 $E \in D^-(X)$  に対し、

$$\mathbf{R}\text{Hom}\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{L}^{-i}, E\right) = 0$$

が成り立つとき、任意の  $j \geq 0$  に対しても  $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{L}^{-j}, E) = 0$  が成り立つことがいえた。ここで  $E$  をシフトして  $E \in D(X)^{\leq 0}$  とする。 $j \gg 0, -n \leq i \leq 0$  なる  $i$  に対し

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j) = \Gamma(X, \mathcal{H}^i(E) \otimes \mathcal{L}^j)$$

が成り立つ。また、ファイバーの次元に関する仮定より

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \in D(\mathrm{Vect} \mathbb{C})^{<0} \quad (4.11)$$

もわかる。そこで完全三角形

$$\mathbf{R}\Gamma(X, \tau_{\leq -n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, \tau_{>-n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j))$$

を考えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{R}^0\Gamma(X, E \otimes \mathcal{L}^j) \cong \mathbf{R}^0\Gamma(X, \tau_{>-n-1}(E \otimes \mathcal{L}^j)) \\ &\cong \Gamma(X, \mathcal{H}^0(E) \otimes \mathcal{L}^j) \end{aligned}$$

となる。 $j$  は十分大きくとったので、 $\mathcal{H}^0(E) = 0$ 、すなわち  $E \in D(X)^{\leq -1}$  がわかった。以下帰納的に  $E \cong 0$  となることがわかる。□

**例 4.47**  $\mathbb{P}^3$  の場合を考えよう。有限次元代数を

$$A := \mathrm{End}_{\mathbb{P}^3}(\bigoplus_{i=0}^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i))$$

と定めると、命題 4.53 で見るように

$$\Phi(-) := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^3}(\bigoplus_{i=0}^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i), -) : D^b(X) \rightarrow D^b(\mathrm{mod} A)$$

は同値となる。ここで  $A$  は次の簇  $Q = (Q_0, Q_1)$

$$0 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}} 1 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}} 2 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}} 3$$

の道代数の許容イデアルによる商  $\mathbb{C}Q/I$  と同型である。頂点  $i$  の元に対応するべき等元を  $e_i$  とおくと、 $\mathrm{mod} A$  の射影加群  $P(i)$  は

$$P(i) = e_i A = \mathrm{Hom}(\bigoplus_{j=0}^3 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(j), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i))$$

と書け、頂点  $i$  から頂点  $i+1$  への矢印、つまり  $Q_1$  の元は (4.8) を使うと

$$e_i A e_{i+1} \cong H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \cong \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]_1$$

の基底  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  の各元に対応する。またこの場合に写像 (4.9)を考えると、 $j - i \geq 2$  のときは  $\phi_{ij}$  は全射になるので、例えば頂点  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$  から  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$  への矢印はない。関係式は

$$x_k x'_j - x_j x'_k \quad (j, k = 0, 1, 2, 3)$$

の形をしている。ここで頂点  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i)$  から頂点  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i+1)$  への矢印としての  $x_j$  と、頂点  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i+1)$  から頂点  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(i+2)$  への矢印としての  $x_j$  を区別するために、後者を  $x'_j$  と記した。これらの関係式が生成するイデアルが  $I$  である。ちなみにこの例では各頂点に対応する単純対象は

$$\begin{aligned} S(0) &= \Phi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}), \quad S(1) = \Phi(\Omega_{\mathbb{P}^3}(1)[1]), \\ S(2) &= \Phi(\Omega_{\mathbb{P}^3}^2(2)[2]), \quad S(3) = \Phi(\Omega_{\mathbb{P}^3}^3(3)[3]) \end{aligned}$$

となる。

**注意 4.48** 写像 (4.9)を考えるときに“各頂点に例外対象  $E_i$  を対応させ頂点を決める”と述べたのは同值  $\Phi$  によって、 $E_i$  が  $\text{mod } A$  の単純対象  $S(i)$  に移る、という意味ではない。頂点  $i$  から頂点  $j$  への道が (4.8)により  $\text{Hom}_X(E_i, E_j)$  の元とみなせるので、各頂点  $i$  に  $E_i$  を置くと矢印や道が自然に解釈できる、という意味である。

次に Hirzebruch 曲面

$$\Sigma_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)) \quad (e \geq 0)$$

を考える。 $\Sigma_e$  は  $\mathbb{P}^1$  上の  $\mathbb{P}^1$  束の構造を持つ代数曲面である ([Har77, V.2] 参照)。 $\Sigma_e$  の導来圏も次のような強例外生成列を持つ：

$$D^b(\Sigma_e) = \langle \mathcal{O}_{\Sigma_e}, \mathcal{O}_{\Sigma_e}(F), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + eF), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + (e+1)F) \rangle$$

ただし  $F$  を  $\mathbb{P}^1$  束のファイバーとし、 $C_0$  を  $\mathbb{P}^1$  束の切断で  $C_0^2 = -e$  を満たすものとする。

**問題 4.49** 定理 4.29 により、

$$\mathcal{O}_{\Sigma_e}, \mathcal{O}_{\Sigma_e}(F), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + eF), \mathcal{O}_{\Sigma_e}(C_0 + (e+1)F)$$

が例外生成列であることを示せ。さらにこれが強例外生成列であることを示せ。

対応する関係式付き簇  $(Q, \rho)$  は次のようなものである。以下の簇の図では注意

4.48 を踏まえ、各頂点に例外対象を置くこととする。

$\Sigma_0$  の場合：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\quad x_0 \quad} & \mathcal{O}(F) \\ \downarrow y_0y_1 & & \downarrow y'_0y'_1 \\ \mathcal{O}(C_0) & \xrightarrow[x_1]{\quad x'_0 \quad} & \mathcal{O}(C_0 + F) \\ & \downarrow x'_1 & \end{array}$$

$$y_0x'_0 - x_0y'_0, y_1x'_1 - x_1y'_1, x_1y'_0 - y_0x'_1, x_0y'_1 - y_1x'_0$$

$\Sigma_1$  の場合：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\quad x_0 \quad} & \mathcal{O}(F) & & \\ & \searrow y & \downarrow z & \swarrow y' & \\ & & \mathcal{O}(C_0 + F) & \xrightarrow[x_1]{\quad x'_0 \quad} & \mathcal{O}(C_0 + 2F) \\ & & & \downarrow & \\ & & & & \end{array}$$

$$yx'_0 - x_0y', yx'_1 - x_1y', x_0zx'_1 - x_1zx'_0$$

$\Sigma_e (e \geq 2)$  の場合：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\quad x_0 \quad} & \mathcal{O}(F) & & \\ & \searrow y & \downarrow z_1 & \cdots & \swarrow y' \\ & & \mathcal{O}(C_0 + eF) & \xrightarrow[x_1]{\quad x'_0 \quad} & \mathcal{O}(C_0 + (e+1)F) \\ & & & \downarrow & \\ & & & & \end{array}$$

$$yx'_0 - x_0y', yx'_1 - x_1y', z_i x'_1 - z_{i+1} x'_0, x_0 z_{i+1} - x_1 z_i \quad (i = 1, \dots, e-1)$$

## 4.5 傾斜対象

$X$  を Krull 次元が有限な Noether スキームとし、アファイン Noether スキーム  $\text{Spec } R$  上射影的であるとする。

**定義 4.50**  $* = -, b$  とする。対象  $\mathcal{E} \in D^b(X)$  の狭義完全対象（注意 6.13 参照）であり  $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$  が  $i \neq 0$  で成り立つとする。さらに  $\mathcal{E}$  が<sup>g</sup>  $D^*(X)$  の生成元となるとき ( $D^*(X)$  の) 傾斜対象 (tilting object) と呼ぶ。傾斜対象  $\mathcal{E}$  がベクトル束のときは  $\mathcal{E}$  を  $D^*(X)$  の傾斜ベクトル束 (tilting vector bundle) と呼ぶ。

**例 4.51**  $X$  を射影的代数多様体とし、 $(E_1, E_2, \dots, E_m)$  を  $D^b(X)$  の強例外生成列とする。それらの直和

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_m$$

は  $D^b(X)$  の傾斜対象である。さらにその自己準同型環  $A = \mathrm{End}_X(\mathcal{E})$  は基本代数であり、関係式付き簇の道代数として書ける。その簇は非輪状となるから、 $A$  の大域次元  $\mathrm{gl.dim} A$  は有限となる（付録 B.3 参照）。

以下では傾斜ベクトル束  $\mathcal{E}$  に対し、三角圏の同値  $D^b(X) \cong D^b(\mathrm{mod} \mathrm{End}_X(\mathcal{E}))$  が得られることを見ていく。この同値が得られれば、 $D^b(X)$  を調べるのに  $R$  代数  $\mathrm{End}_X(\mathcal{E})$  の表現論を適用でき有用である。

まず  $X$  上のベクトル束  $\mathcal{E}$  が  $i \neq 0$  に対し  $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$  を満たすとし、その自己準同型環を

$$A := \mathrm{End}_X(\mathcal{E})$$

とおく。

複体  $\mathcal{F}^\bullet \in C(\mathrm{QCoh}(X))$  に対し、次数  $i$  の項  $\mathrm{Hom}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}^\bullet)$  が<sup>g</sup>

$$\prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}^i)$$

となる複体  $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E}, \mathcal{F}^\bullet)$  は、射の合成によって右  $A$ -加群の複体とみなせるので三角関手

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E}, -): K^+(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow K^+(\mathrm{Mod} A)$$

が定まる。このとき命題 2.33 が適用でき、この関手の右導來関手

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -): D^+(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow D^+(\mathrm{Mod} A)$$

が存在する。さらに  $X$  が Krull 次元が有限な Noether スキームであるから [Har66, §2.2] にあるように、

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -): D(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow D(\mathrm{Mod} A)$$

も定まる。ここで  $\mathcal{F} \in D^-(\mathrm{QCoh}(X))$  に対してもスペクトル系列 (3.4) が使え、 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D^-(\mathrm{Mod} A)$  がわかり、結局

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -): D^-(\mathrm{QCoh}(X)) \rightarrow D^-(\mathrm{Mod} A)$$

が定まる。補題 2.42 で得られた同値  $D^-(X) \cong D_{\mathrm{Coh}(X)}^-(\mathrm{QCoh}(X))$  と  $D^-(\mathrm{mod} A) \cong D_{\mathrm{mod} A}^-(\mathrm{Mod} A)$  を使えば、上の右導來関手  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -)$  の制限として

$$\Phi(-) := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, -): D^-(X) \rightarrow D^-(\mathrm{mod} A)$$

が定まることがわかる。

次に

$$\Psi(-) := (-) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A \mathcal{E}: D^-(\mathrm{mod} A) \rightarrow D^-(X)$$

を考える。さらに  $\Phi$  を  $D^b(X)$  に制限すると  $D^b(X)$  から  $D^b(\mathrm{mod} A)$  への関手を定め、また  $A$  の大域次元が有限のとき、 $\Psi$  を  $D^b(\mathrm{mod} A)$  に制限すると  $D^b(\mathrm{mod} A)$  から  $D^b(X)$  への関手を定める。

**命題 4.52**  $X$  をあるアファイン Noether スキーム上射影的な Noether スキームで Krull 次元が有限なものとし、 $\mathcal{E}$  を  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束とする。このとき  $\Phi, \Psi$  を有界な導來圏に制限すると、 $D^b(X)$  と  $D^b(\mathrm{mod} A)$  の間の同値を与え、さらに互いに擬逆関手となる。

**証明** まず  $\Phi \circ \Psi \cong \mathrm{id}_{D^-(\mathrm{mod} A)}$  であるから、 $\mathcal{F} \in D^-(X)$  と随伴射  $\Psi \circ \Phi(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$  の写像錐  $C$  に対し、 $\Phi(C) = 0$  である。 $\mathcal{E}$  は  $D^-(X)$  の生成元であるから、 $C = 0$  となる。このことから  $\Psi \circ \Phi \cong \mathrm{id}_{D^-(X)}$  が成り立ち、さらに  $D^-(X)$  と  $D^-(\mathrm{mod} A)$  の同値がいえる。

任意の  $\mathcal{F} \in D^b(X)$  に対し、 $\Phi(\mathcal{F}) \in D^b(\mathrm{mod} A)$  が成り立つ（補題 2.44 参照）ので  $M \in D^b(\mathrm{mod} A)$  に対し、 $\Psi(M) \in D^b(X)$  を示そう。まず  $M \in \mathrm{mod} A$  としてよい。整数  $m$  に対し、(2.33) で現れた射

$$\phi: \tau_{<m}(\Psi(M)) \rightarrow \Psi(M)$$

を考える。これに  $\Phi$  を当てはめて

$$\Phi(\phi): \Phi(\tau_{<m}(\Psi(M))) \rightarrow \Phi \circ \Psi(M) \cong M$$

を得る。 $m$  を十分小さくとれば、 $\Phi(\tau_{<m}\Psi(M)) \in D(X)^{\leq -1}$  となるのでこれは

0射となる.  $\Phi: D^-(X) \rightarrow D^-(\text{mod } A)$  は同値であったから,  $\phi$  も 0射となる. これは  $\Psi(M) \in D^b(X)$  を意味する.  $\square$

次は命題 4.52 の類似であり, よく知られている.

**命題 4.53 (Bondal [Bon89])**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $(E_1, E_2, \dots, E_m)$  を  $D^b(X)$  の強例外生成列,  $A := \text{End}(\bigoplus_{i=1}^m E_i)$  とすると関手

$$\Phi(-) := \mathbf{R}\text{Hom}_X\left(\bigoplus_{i=1}^m E_i, -\right): D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A)$$

は同値を与える.

**補題 4.54**  $f: X \rightarrow Y = \text{Spec } R$  を Noether スキーム間の射影的射とし,  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元で, さらに  $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  が成り立つものとする. このとき  $X$  上には大域切断で生成される傾斜ベクトル束が存在する.

証明 まず  $X$  上の大域切断で生成されている豊富な直線束  $\mathcal{L}$  をとる.

$$H^1(X, \mathcal{L}^{-1}) = \text{Ext}_X^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$$

の  $R$ -加群としての生成元の集合が  $r$  個の元からなるとして, それらに対応する拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

を考える. 以下  $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}$  が大域切断で生成される傾斜ベクトル束であることを見ていこう.

まず短完全列 (4.12) から得られる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{O}_X^{\oplus r}) \otimes \mathcal{O}_X & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_X & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\oplus r} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{L} \longrightarrow 0 \end{array}$$

において, 両脇の縦の射が全射であるから, 真ん中の縦の射も全射となり,  $\mathcal{M}$ , さらには  $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}$  は, 大域切断で生成されることがわかる.

また (4.12) に関手  $\text{Hom}_X(-, \mathcal{O}_X)$  を当てはめてできる長完全列

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, \mathcal{O}_X) &\rightarrow \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, \mathcal{O}_X) = 0\end{aligned}$$

において、(4.12)の定め方から最初の写像は全射となるので、 $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$  がわかる。さらに  $D$  を線形系  $|\mathcal{L}|$  の一般元とすると  $f|_D$  のファイバーの次元は 0 次元となるから  $H^1(X, \mathcal{L}) \cong H^1(D, \mathcal{L}|_D)$  は 0 となる。よって (4.12) に関手  $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, -)$  を当てはめてできる長完全列より

$$\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \cong \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}) = 0$$

がわかる。

次に完全系列 (4.12) に関手  $\mathrm{Hom}_X(-, \mathcal{L})$  を当てはめてできる長完全列から  $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = 0$  がわかる。さらにこれと (4.12) に関手  $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{M}, -)$  を当てはめてできる長完全列から、 $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = 0$  が得られ、 $i \neq 0$  に対し、 $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}, \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}) = 0$  であることが確認できた。

また  $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}$  が生成元であることは補題 4.46 によりわかる。  $\square$

上の補題 4.54 で、 $R = \mathbb{C}$  とし、ファイバーの次元（この場合  $Y$  は 1 点だから  $X$  自身の次元が 2 次元）を 2 次元としたのが次の定理である。ただし  $i > 0$  に対し  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  を仮定する代わりにより強く、 $X$  が有理曲面であることを仮定する。

**定理 4.55 ([HP11])**  $X$  を滑らかで射影的な有理曲面とする。このとき  $D^b(X)$  は傾斜ベクトル束を持つ。

滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、傾斜ベクトル束  $\mathcal{E}$  が存在するとき、命題 4.52 より  $D^b(X)$  は有限次元代数  $A = \mathrm{End}_X(\mathcal{E})$  上の加群のなす圏の導來圏  $D^b(\mathrm{mod} A)$  と圏同値となった。後者の Grothendieck 群は定理 B.5 によると有限生成自由加群であるから、 $K(X)$  もそうである。また [BH13, Theorem 4.3] によると  $i \neq 0$  に対し、 $\mathrm{HH}_i(X) = 0$  が成り立つことが知られているので定理 4.14 から  $p \neq q$  のときは  $h^{p,q}(X) = 0$  が成り立つことがわかる。<sup>9</sup>

定理 4.55 の高次元での類似は成り立たないことが次よりわかる。

**問題 4.56**  $\mathbb{P}^3$  を梢円曲線に沿ってブローアップさせて得られた有理代数多様体を

<sup>9</sup> 4.3 節では例外生成列を持つ  $\mathbb{C}$ -線形三角圏の Grothendieck 群は有限生成自由加群であることを見た。さらに命題 4.44 では  $D^b(X)$  が例外生成列を持つならば  $p \neq q$  のときは  $h^{p,q}(X) = 0$  が成り立つことを示した。

$X$  とおく.  $D^b(X)$  は例外生成列や, 傾斜対象を持たないことを示せ. (ヒント: 例 4.15 と定理 4.26 を使い,  $h^{p,q}(X) \neq 0$  が成り立つような  $p \neq q$  が存在することを証明せよ.)

Grothendieck 群が有限生成自由加群になることや,  $p \neq q$  のときは  $h^{p,q}(X) = 0$  が成り立つことは,  $X$  に非常に強い制約を与える. このように傾斜対象を持つような代数多様体は非常にまれである. また,  $A$  は関係式付き簇上の道代数と森田同値である. 例 4.40 によると, この簇が非輪状であれば,  $D^b(X)$  には強例外生成列が存在することがわかるが, 一般には非輪状であるとは限らない. そこで滑らかな射影的代数多様体  $X$  上に ( $D^b(X)$ , もしくは  $D^-(X)$ ) の傾斜対象  $\mathcal{E}$  が存在するとき,  $D^b(X)$  は強例外生成列を持つか, という問い合わせ興味深い.

ちなみに定理 4.55 で  $X$  を有理曲面と仮定する代わりに,  $i > 0$  に対し  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  であることを仮定しても, 傾斜ベクトル束は存在するとは限らない. 例えれば Enriques 曲面  $X$  は  $i > 0$  に対し,  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  を満たすが, 補題 4.42 より  $K(X)$  は自由加群となり得ず, 傾斜対象  $\mathcal{E}$  を持たない.

今まで傾斜対象の存在が知られている滑らかな射影的代数多様体  $X$  は有理的なものだけのようであるから, もし  $D^b(X)$  が傾斜対象（もしくは例外生成列）を持つならば,  $X$  は有理的であるかという問い合わせ自然である. この問い合わせ  $\dim X = 2$  の場合でさえも解決されていないが,  $X$  が曲線のときは, 肯定的である.

**問題 4.57**  $X$  が滑らかな射影的代数曲線で,  $D^b(X)$  に傾斜対象が存在するとき,  $X$  は  $\mathbb{P}^1$  と同型であることを示せ.

[BS17] では, 代数曲面上に直線束からなる強例外生成列が存在するならば, その代数曲面は有理的であることが示されている.

滑らかな射影的代数多様体の導來圏が例外生成列を持つための必要十分条件に関する予想が [EL16] で述べられている.

## 4.6 半直交分解および例外列の変異

$\mathbb{C}$ -線形な三角圏  $\mathcal{D}$  が例外生成列を 1 つ持つとき, それらを  $\mathcal{D}$  の自己同値で移せば新たな例外生成列が得られる. それ以外にも例外生成列は存在するのだろうか, また最初に与えられた例外生成列と他の例外生成列に何らかの関係がつくであろうか, というのは自然な問題である. 完全な答えを与えるのは非常に難しいが, 与えられた例外列から（自己同値以外の方法で）新たな例外列を作る方法を説明し, こ

の問題にアプローチしよう。

まず  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏とすると、命題 4.31 より半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle = \langle \mathcal{C}, {}^\perp \mathcal{C} \rangle$$

が存在する。このとき次が成立する。

**補題 4.58**  $\mathcal{C}$  上で 0 射になる三角関手

$$R_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, L_{\mathcal{C}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

が存在して、互いに逆関手となる同値  $\mathcal{C}^\perp \rightarrow {}^\perp \mathcal{C}$ ,  ${}^\perp \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\perp$  を誘導する。

**証明**  $i^R, i^L$  をそれぞれ埋め込み  $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  の右随伴関手、左随伴関手とする。 $F \in \mathcal{D}$  に対して  $R_{\mathcal{C}}(F), L_{\mathcal{C}}(F)$  を

$$R_{\mathcal{C}}(F) := \text{Cone}(F \rightarrow i \circ i^L(F)),$$

$$L_{\mathcal{C}}(F) := \text{Cone}(i \circ i^R(F) \rightarrow F)[-1]$$

と定める。命題 4.31 で見たように、これらはそれぞれ  ${}^\perp \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^\perp$  の対象であり、また問題 2.15 より、 $R_{\mathcal{C}}, L_{\mathcal{C}}$  は  $\mathcal{D}$  から  $\mathcal{D}$  への関手を定めることもわかる。

$F \in {}^\perp \mathcal{C}$  に対して  $R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \cong F$  をチェックしよう。 $L_{\mathcal{C}}, R_{\mathcal{C}}$  の定義から、次の図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc}
 & R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F)[-1] & & & \\
 \downarrow & & \searrow \text{0射} & & \nearrow \text{Cone}(u) \\
 L_{\mathcal{C}}(F) & \xrightarrow{\quad} & i \circ i^R(F) & \xrightarrow{\quad} & F \\
 \downarrow & & \nearrow u & & \\
 i \circ i^L \circ L_{\mathcal{C}}(F) & & & &
 \end{array}$$

ここで、水平および垂直な射の列は完全三角形である。図の点線は  ${}^\perp \mathcal{C}$  の対象から  $\mathcal{C}$  の対象への射であるため、0 射である。よって、図を可換にする射  $u$  が存在する。八面体公理を使うと、上の図式から完全三角形

$$R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \rightarrow F \rightarrow \text{Cone}(u)$$

が得られるが、右側の射は  $F \in {}^\perp \mathcal{C}$ ,  $\text{Cone}(u) \in \mathcal{C}$  より 0 射になる。したがって  $R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \cong F \oplus \text{Cone}(u)[-1]$  となるが、 $R_{\mathcal{C}} \circ L_{\mathcal{C}}(F) \in {}^\perp \mathcal{C}$  であるため

$\text{Cone}(u) = 0$  となる.  $L_C \circ R_C$  が  $\mathcal{C}^\perp$  上で恒等関手と同型であることも同様に示せる.  $\square$

$R_C$  を  $\mathcal{C}$  による右変異関手 (right mutation functor),  $L_C$  を  $\mathcal{C}$  による左変異関手 (left mutation functor) と呼ぶ. 系として次を得る.

**系 4.59**  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m \rangle$  を半直交分解とし, 各  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{D}$  が許容部分三角圏であるとする. このとき,  $1 \leq k \leq m-1$  に対して次の半直交分解が存在する.

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{C}_{k+1}, R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k), \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle \quad (4.13)$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}), \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle \quad (4.14)$$

**証明**  $\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}$  はそれぞれ  $\langle \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1} \rangle$  の許容部分三角圏となるから補題 4.58 より主張が成り立つ.  $\square$

**注意 4.60**  $L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1})$  や  $R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k)$  は  $\mathcal{D}$  の許容部分三角圏となるかどうかはわからない. 一方,  $\mathcal{D}$  が滑らかな射影的代数多様体  $X$  の導来圏  $D^b(X)$  であるときは, 系 4.33 より, これらは許容部分三角圏となり, 系 4.59 で得られた新たな半直交分解に対しても, 変異を考えることができる.

ここで, 後で必要になる補題をいくつか述べておく.

**補題 4.61** 系 4.59 の状況下で,  $\text{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$  が成り立つとする. このとき,  $L_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+1}$ ,  $R_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_k$  が成り立つ. よって半直交分解 (4.13), (4.14) は単に次の半直交成分の入れ替えとなる.

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{C}_{k+1}, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+2}, \dots, \mathcal{C}_m \rangle.$$

**証明** 左 (右) 変異関手の構成から明らかである.  $\square$

**補題 4.62**  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$  を半直交分解,  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  を  $\mathcal{D}$  の Serre 関手とすると, 次が成り立つ.

$$R_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C}_1), \quad L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2).$$

**証明** まず  $L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_1^\perp = \mathcal{C}_2^{\perp\perp}$  である. また Serre 関手の性質を使うと  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_2^{\perp\perp}$  かつ  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{-1}(\mathcal{C}_2^{\perp\perp}) \subset {}^\perp(\mathcal{C}_2^\perp)$  が示せる. 問題 4.32(ii) より  ${}^\perp(\mathcal{C}_2^\perp) = \mathcal{C}_2$  であるから結局  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2^{\perp\perp}$  が示せ,  $L_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}_2)$  が従う. 右変異関

手に関しても同様である。  $\square$

右（左）変異関手を例外列に当てはめてみる。 $\mathbb{C}$ -線形な三角圏 $\mathcal{D}$ が有限型であると仮定しておく。 $\mathcal{D}$ の例外列 $(E, F)$ に対し、 $\mathcal{D}$ の許容部分圏三角圏 $\langle E \rangle, \langle F \rangle$ によって定まる右変異関手 $R_{\langle E \rangle}$ 、左変異関手 $L_{\langle F \rangle}$ を考えよう。

まず対象 $R_F E, L_E F$ を次の完全三角形によって定義する。

$$E \xrightarrow{\text{coev}} \mathbf{R}\text{Hom}(E, F)^\vee \otimes_{\mathbb{C}} F \longrightarrow R_F E \quad (4.15)$$

$$L_E F \longrightarrow \mathbf{R}\text{Hom}(E, F) \otimes_{\mathbb{C}} E \xrightarrow{\text{ev}} F \quad (4.16)$$

補題4.38の証明中で見たように、 $L_E F \in \langle E \rangle^\perp$ である。したがって問題2.15を使うと、(4.16)は完全三角形

$$L_{\langle E \rangle}(F) \rightarrow i \circ i^R(F) \rightarrow F$$

と同型となる。したがって $L_E F = L_{\langle E \rangle}(F)$ であり、同様に

$$R_F E = R_{\langle F \rangle}(E) \in {}^\perp \langle F \rangle$$

が成り立つ。

例えば、(4.15)に $\text{Hom}(-, E)$ を適用して、

$$\mathbf{R}\text{Hom}(R_F E, E) \cong \mathbf{R}\text{Hom}(E[1], E) \cong \mathbb{C}[-1]$$

となり、次に(4.15)に $\text{Hom}(R_F E, -)$ を適用すると $R_F E$ は例外対象であることがわかり、同様に $L_E F$ も例外対象となる。そこで新たな例外列 $(F, R_F E)$ 、 $(L_E F, E)$ が存在して

$$\langle E, F \rangle = \langle F, R_F E \rangle = \langle L_E F, E \rangle$$

が成り立つ。 $R_F E$ を $E$ の $F$ による右変異(right mutation)、 $L_E F$ を $F$ の $E$ による左変異(left mutation)と呼ぶ。また与えられた $\mathcal{D}$ の例外(生成)列 $\sigma = (E_1, \dots, E_m)$ 、 $1 \leq k \leq m-1$ に対し、系4.59より

$$R_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, E_{k+1}, R_{E_{k+1}} E_k, E_{k+2}, \dots, E_m),$$

$$L_k \sigma := (E_1, \dots, E_{k-1}, L_{E_k} E_{k+1}, E_k, E_{k+2}, \dots, E_m)$$

も例外(生成)列となる。

変異を使うと、例4.40で見た強例外列 $(P(m), P(m-1), \dots, P(1))$ が生成列になることもわかる。

**定理 4.63**  $(Q, \rho)$  を順序付き関係式付き簇とし、 $Q_0 = \{1, \dots, m\}$  とする。 $A = kQ/I$  をその道代数とすると  $(S(1), S(2), \dots, S(m))$  は  $D^b(\text{mod } A)$  の例外生成列を与える、さらに  $(P(m), P(m-1), \dots, P(1))$  は強例外生成列を与える。

**証明** 例 4.40 で  $\sigma = (P(m), P(m-1), \dots, P(1))$  が強例外列になることは見た。一方

$$\begin{aligned} & L_1(L_1L_2)(L_1L_2L_3) \cdots (L_1 \cdots L_{m-1})\sigma \\ &= (L_{P(m)}L_{P(m-1)} \cdots L_{P(2)}P(1), L_{P(m)}L_{P(m-1)} \cdots L_{P(3)}P(2), \dots, P(m)) \\ &= (S(1)[-m+1], S(2)[-m+2], \dots, S(m-1)[-1], S(m)) \end{aligned}$$

が成り立つ ([Bon89, Lemma 5.6])。また  $\text{mod } A$  の単純対象は  $S(i)$  たちのみ（補題 B.4）で

$$\text{mod } A = \langle S(1), S(2), \dots, S(m) \rangle_{\text{ex}}$$

が成り立つ<sup>10</sup>から、例外列  $(S(1), S(2), \dots, S(m))$  は例外生成列となる。したがって  $\sigma$  は強例外生成列となる。□

**例 4.64** Bondal によって発見された、Jordan–Hölder 性を持たない導來圏の例を紹介しよう。次のような順序付き関係式付き簇  $(Q, \rho)$  を考える。

$$1 \rightrightarrows_{\gamma}^\alpha 2 \rightrightarrows_{\delta}^\beta 3 \quad \alpha\delta = \gamma\beta = 0$$

定理 4.63 により、 $(P(3), P(2), P(1))$  は  $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$  の強例外生成列となる。これを Grothendieck 群  $K(\text{rep}(Q, \rho))$  の自由基底とすると、Euler 形式を表す行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。一方

$$W = (\mathbb{C} \rightrightarrows_0^{\text{id}} \mathbb{C} \rightrightarrows_0^{\text{id}} \mathbb{C}) \in \text{rep}(Q, \rho)$$

を考えると、 $W$  は例外対象で、その次元ベクトルを見ることで Grothendieck 群

<sup>10</sup> 右辺は拡大閉包 (extension closure)、つまり拡大で閉じていて集合  $\{S(1), S(2), \dots, S(m)\}$  を含む  $\text{mod } A$  の最小の部分加法圏である。

において

$$[W] = [P(3)] - [P(2)] + [P(1)]$$

となる。そこで上で求めた行列を使うと、 $\chi([W], [E]) = 0$ かつ $\chi([E], [E]) = 1$ を満たす元 $[E] \in K(\text{rep}(Q, \rho))$ は存在せず、結局 $\langle W \rangle^\perp$ は例外対象を含まないことがわかる。つまり半直交分解

$$D^b(\text{rep}(Q, \rho)) = \langle \langle W \rangle^\perp, W \rangle$$

をさらに分解して、3つの例外対象に分けることができない。したがって、 $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$ は Jordan–Hölder 性を持たない。<sup>11</sup>

ちなみに Kuznetsov は  $\mathbb{P}^3$  を 2 回、ある滑らかな有理曲線でブローアップした射影的代数多様体  $X$  で、その導來圏  $D^b(X)$  が例外生成列  $(E_1, \dots, E_6)$  を持ち、さらに部分三角圏  $\langle E_1, E_2, E_3 \rangle$  が上で考えた  $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$  と同値になるようなものを構成した ([Kuzc]). この構成の仕方から  $D^b(X)$  は Jordan–Hölder 性を持たないことがわかる。導來圏が Jordan–Hölder 性を持たないような他の代数多様体の例は注意 4.71 で触ることにする。

以下で見るように、変異は例外生成列の集合に組み紐群の作用を誘導する。

**命題 4.65 ([Bon89])**  $\mathcal{D}$  の例外列  $\sigma = (E_1, \dots, E_m)$  に対し、

$$R_i L_i \sigma = L_i R_i \sigma = \sigma$$

が成り立つ。また  $|i - j| > 1$  なる  $i, j$  に対しては

$$L_i L_j \sigma = L_j L_i \sigma$$

が成り立ち、さらに

$$R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}, \quad L_i L_{i+1} L_i = L_{i+1} L_i L_{i+1}$$

<sup>11</sup>  $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$  が Noether 性を持つかどうかは、著者は知らないし、Kuznetsov も [Kuzc] で示しているわけではない。ここで示したのは、 $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$  が Noether 性を持たないか、もしくは持ったとしても半直交分解の一意性が成り立っていない、ということである。定義 4.34 の脚注で述べたように、Kuznetsov は Jordan–Hölder 性の定義に Noether 性を仮定していないので、上の議論だけでは  $D^b(\text{rep}(Q, \rho))$  が (Kuznetsov の意味での) Jordan–Hölder 性を持たないことを結論付けることはできない。この点で [Kuzc] にはギャップがあると思われる。

が成り立つ。特に  $\mathcal{D}$  の例外生成列全体の集合  $\mathfrak{E}$  には  $m$  本の紐からなる組み紐群  $B_m$  が作用する。

$\mathbb{Z}^m$  の標準基底を  $\{e_i\}$  とし、上の  $\sigma$  に対し、

$$e_i \sigma := (E_1, \dots, E_{i-1}, E_i[1], E_{i+1}, \dots, E_m)$$

と定めると  $\mathbb{Z}^m$  は集合  $\mathfrak{E}$  に作用することがわかる。定義から

$$L_E(F[1]) = (L_E F)[1], \quad L_{E[1]} F = L_E F$$

などがわかり、これらを使うと、

$$L_i e_i R_i = e_{i+1}, \quad L_i e_{i+1} R_i = e_i, \quad L_i e_j R_i = e_j \quad (j \neq i, i+1)$$

などがわかる。上で見たようにこうして定まる半直積

$$G_m := \mathbb{Z}^m \rtimes B_m$$

は  $\mathfrak{E}$  に作用する。

**予想 4.66 (Bondal–Polishchuk)**  $\mathcal{D}$  を長さ  $m$  の例外生成列を持つような C-線形な三角圏とし、 $\mathfrak{E}$  を  $\mathcal{D}$  の例外生成列の同型類全体のなす集合とすると、群  $G_m$  の  $\mathfrak{E}$  への作用は推移的である。

また  $\Phi$  を  $\mathcal{D}$  の自己同値とすると、与えられた例外生成列  $\sigma = (E_1, \dots, E_m)$  に対し、

$$\Phi \sigma := (\Phi(E_1), \dots, \Phi(E_m))$$

も例外生成列である。 $\mathcal{D}$  はしばしば複雑な自己同値を持つため、こうして得られた新たな例外生成列  $\Phi \sigma$  を  $\sigma$  から  $G_m$  の作用だけで結びつけるのは極めて難しそうに見える。そういう意味で、著者は予想 4.66 はあまりにも楽観的であると感じている。

Del Pezzo 曲面  $X$  の導來圏  $D^b(X)$  の場合は、例外生成列が存在し、さらに予想 4.66 が正しいことが知られている [KO94], [GK04]。

また例えば  $n$  次元射影空間  $\mathbb{P}^n$  に限定しても予想 4.66 は面白い。一般に滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、 $\text{rk } K(X) \geq \dim X + 1$  が成り立ち、さらに例えば  $\mathbb{P}^n$  や奇数次元の 2 次超曲面などでは

$$\mathrm{rk} K(X) = \dim X + 1 \quad (4.17)$$

が成り立つ。このような代数多様体に関して次が知られている。

**定理 4.67 (Bondal, Positselski)** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、式 (4.17) が成り立つとする。上記の群  $G_m$  の集合  $\mathfrak{E}$  への作用を考える。

- (i)  $\sigma = (E_1, \dots, E_m) \in \mathfrak{E}$  に対し、各  $E_i$  が連接層であるときは、任意の  $g \in B_m$  に対し、 $g\sigma$  も連接層からなる。
- (ii)  $\sigma = (E_1, \dots, E_m) \in \mathfrak{E}$  に対し、次は同値である。
  - (1) ある整数  $n$  が存在し、各  $E_i[n]$  は局所自由層となる。
  - (2) ある整数  $n$  が存在し、各  $E_i[n]$  は連接層となる。
  - (3)  $\sigma$  が強例外生成列となる。

[Bon89, Assertion 9.2] で (i) が示されている。 (ii) の (1) から (2) は明らかで、 (2) から (3) は [Bon89, Theorem 9.3] で示され、 (3) から (1) は [Pos] で示されている。ちなみに (ii) で得られた結果より、(i) の例外生成列  $g\sigma$  は局所自由層からなる強例外生成列であることもわかる。

$\mathbb{P}^n$  上では  $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$  は強例外生成列であった。もし予想 4.66 が  $D^b(\mathbb{P}^n)$  に対して成り立てば、上記定理 4.67 を使うと、任意の  $\sigma \in \mathfrak{E}$  は局所自由層のシフトからなることがわかるが、これに関する予想 4.66 を仮定せずに証明はされていないようである。またこれに関連して、 $D^b(\mathbb{P}^n)$  のすべての例外対象は局所自由層のシフトになっているのか、といった問題も興味深い。

## 4.7 お化けが出た！

この節で考える代数多様体はすべて滑らかであるとする。射影的代数多様体  $X$  に対し、 $D^b(X)$  が例外列  $\sigma = (E_1, \dots, E_m)$  を持つとき、 $\sigma$  が生成列になるかどうかを見るのは、多くの場合やさしくない。もし  $\sigma$  が実際に例外生成列になるならば、4.3 節で見たように  $K(X) \cong \mathbb{Z}^m$ ,  $\mathrm{HH}_*(X) \cong \mathbb{C}^m$  が成り立ったので、逆に  $K(X) \cong \mathbb{Z}^m$ , もしくは  $\mathrm{HH}_*(X) \cong \mathbb{C}^m$  が成り立つとき、 $\sigma$  は  $D^b(X)$  を生成すると期待するのは自然に思える。そこで考えられた概念がファントムである。

**定義 4.68**  $\mathcal{C}$  を  $D^b(X)$  の非自明な許容部分三角圏とする。 $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C}) = 0$  を満たすとき、 $\mathcal{C}$  を  **$H$ -ファントム** ( $H$ -phantom) と呼ぶ。 **$H$ -ファントム**  $\mathcal{C}$  がさらに  $K(\mathcal{C}) = 0$  を満たすとき、 $\mathcal{C}$  を **ファントム** (phantom) と呼ぶ。

Kuznetsov は  $H$ -ファントムは存在しないと予想していた [Kuzb, Conjecture 9.1]. 例えば,  $D^b(X)$  が例外列  $\sigma = (E_1, \dots, E_m)$  を持つとし,  $\mathcal{C} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle$  とおくと,  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C}) \cong \mathbb{C}^m$  である. さらに  $\mathrm{HH}_*(X) \cong \mathbb{C}^m$  が成り立つと仮定すると, 定理 4.43 から  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C}^\perp) = 0$  となる. そこでもし  $H$ -ファントムが存在しないとすると  $\mathcal{C}^\perp = 0$  となり,  $\sigma$  は  $D^b(X)$  を生成することがわかる. 定理 4.14 から  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C}) \cong \bigoplus_k H^k(X, \mathbb{C})$  であるから, 例外列  $\sigma$  が生成列にもなることがコホモロジー  $\bigoplus_k H^k(X, \mathbb{C})$  の次元から読み取れたことになる.

また定義 4.34 の下で述べたように  $D^b(X)$  は Noether 性を持つか, という問題は重要な未解決問題である. 例えば許容部分圏の昇鎖列

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \subset D^b(X)$$

があるとすると, Hochschild コホモロジーの昇鎖列

$$\mathrm{HH}_*(\mathcal{A}_1) \subset \mathrm{HH}_*(\mathcal{A}_2) \subset \cdots \subset \mathrm{HH}_*(X)$$

が存在する.  $\mathrm{HH}_*(X)$  は有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間であるから, 十分に大きい任意の  $i$  に対し,  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{A}_i) = \mathrm{HH}_*(\mathcal{A}_{i+1})$  が成り立つ. 一方  $\mathcal{C}_i := {}^\perp \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1}$  は  $D^b(X)$  の許容部分圏であり, また  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{C}_i) = 0$  が成り立つ. もしこのことから  $\mathcal{C}_i = 0$  がいえれば,  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i+1}$  が従い,  $D^b(X)$  が Noether 性を持つことになる.

**問題 4.69** 射影直線  $\mathbb{P}^1$  の導来圏  $D^b(\mathbb{P}^1)$  を考える.

- (i)  $D^b(\mathbb{P}^1)$  の非自明な許容部分圏  $\mathcal{A}$  が  $\mathrm{rank} \alpha \neq 0$  となる対象  $\alpha$  を含むとき,  $\mathcal{A}$  は直線束を対象として含むことを示せ. (ヒント: 注意 2.28,  $\mathbb{P}^1$  上の連接層は直線束と捩れ層の直和で書かれること, 問題 4.32(i) をそれぞれ使う.)
- (ii) (i) でえた  $\mathcal{A}$  の右直交部分三角圏  $\mathcal{A}^\perp$  も直線束を対象として含むことを示せ.
- (iii)  $D^b(\mathbb{P}^1)$  の極大な半直交分解は  $\langle \langle O_{\mathbb{P}^1}(i) \rangle, \langle O_{\mathbb{P}^1}(i+1) \rangle \rangle$  の形をしていることを示せ.
- (iv)  $D^b(\mathbb{P}^1)$  は  $H$ -ファントムを持たず, さらに Jordan–Hölder 性を持つことを示せ.

以上で見たように, ファントムが存在しないなら理論上都合がよいのだが, 残念なことにある種の代数多様体に対してはファントムは存在する. この事実を以下で

紹介する。この節では証明のほとんどは略するので興味ある読者は元論文を参照されたい。

$X$  を一般型代数曲面とし、 $p_g(X) = q(X) = 0$  とする。このとき  $\text{Pic}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$  が成り立つので、 $\text{Pic}(X)$  は有限生成である。また Bloch 予想<sup>12</sup>が正しいと仮定すると、次数写像  $\deg: A^2(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  が同型となり、さらに

$$K(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\rho(X)+2} \oplus (\text{Pic}(X))_{\text{Tor}}$$

が成り立つ。また Noether の公式を使うと、

$$\rho(X) + 2 = b_2(X) + 2 = e(X) = 12 - c_1(X)^2$$

がわかる。さらに  $X$  が極小（定義 6.1(iii) 参照）であるとすると、 $c_1(X)^2 = K_X^2 > 0$  となるから

$$3 \leq e(X) \leq 11$$

が成り立ち、実際に 3 以上 11 以下の任意の整数値を位相的 Euler 数  $e(X)$  として実現する  $X$  が存在することが知られている [BHPdV04, VII.10]。仮に  $D^b(X)$  が例外列  $(E_1, \dots, E_{e(X)})$  を持つとする。

$$\mathcal{C} := \langle E_1, \dots, E_{e(X)} \rangle, \quad \mathcal{D} := {}^\perp \mathcal{C}$$

とおけば、半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$$

が存在する。このとき  $K(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}^{e(X)}$  であり、 $K(\mathcal{D}) \cong (\text{Pic}(X))_{\text{Tor}}$  となる。

古典的 Godeaux 曲面  $X$  は  $\mathbb{P}^3$  内の Fermat 5 次式

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0$$

を  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  の作用

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\xi x_0 : \xi^2 x_1 : \xi^3 x_2 : \xi^4 x_3) \quad (\xi \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$

で割って作られる一般型極小代数曲面で  $p_g(X) = q(X) = 0$  を満たす。さらに  $e(X) = 11$ 、 $K(X) \cong \mathbb{Z}^{11} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  であることがわかる。H-ファンタムは計算機の

<sup>12</sup> 射影的代数曲面  $X$  が  $p_g(X) = 0$  を満たすなら、余次元 2 のサイクルのなす Chow 群  $A^2(X)$  のうち、次数 0 のサイクルのなす部分群  $\text{Ker}(\deg: A^2(X) \rightarrow \mathbb{Z})$  が  $X$  の Albanese 多様体  $\text{Alb}(X)$  と同型であることを予想する。

助けを借りて [BvBS13] で初めて発見された.

**定理 4.70 ([BvBS13])**  $X$  を古典的 Godeaux 曲面とすると,  $D^b(X)$  には直線束からなる例外列  $(L_1, \dots, L_{11})$  と半直交分解

$$D^b(X) = \langle L_1, \dots, L_{11}, \mathcal{D} \rangle$$

が存在する. このとき  $\mathcal{D}$  は  $H$ -ファントムで,  $K(\mathcal{D}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  となる.

**注意 4.71** さらに [BvBS13] と同じ著者らによって, 古典的 Godeaux 曲面  $X$  に対し,  $D^b(X)$  の長さが 9 の例外列で, それ以上例外列として延長できないものが構成された [BGvBS14]. 定理 4.70 にあるように, 長さ 11 の例外列を含む半直交分解も存在するから,  $D^b(X)$  は Jordan–Hölder 性を持たないことがわかる. 例 4.64 も参照のこと.

Burniat 曲面  $X$  は,  $p_g(X) = q(X) = 0$  が成り立つ一般型極小代数曲面であり,  $6 \leq e(X) \leq 10$  を満たす. このうち  $e(X) = 6$  を満たす Burniat 曲面  $X$  は, しばしば primary Burniat 曲面と呼ばれ,  $\mathbb{P}^2$  の 3 点でのプローアップの  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -Galois 被覆で得られる. また  $K(X) \cong \mathbb{Z}^6 \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  が成り立つ. primary Burniat 曲面は 4 次元の族をなす.

**定理 4.72 ([AO13])**  $X$  を任意の primary Burniat 曲面とすると,  $D^b(X)$  には直線束からなる例外列  $(L_1, \dots, L_6)$  と半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{C}, \mathcal{D} \rangle$$

が存在する. ただし,  $\mathcal{C} := \langle L_1, \dots, L_6 \rangle$  とおいた. このとき  $\mathcal{D}$  は  $H$ -ファントムで,  $K(\mathcal{D}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  となる. さらに三角圏  $\mathcal{C}$  は, どの primary Burniat 曲面をとっても互いに同値である.

次の補題を使い, ファントムを持つ導来圏を作ることができる.

**補題 4.73**  $X, X'$  をそれぞれ射影的代数曲面で, さらに  $p_g = q = 0$  と  $A^2(X) \cong A^2(X') \cong \mathbb{Z}$  が成り立つとする. またそれぞれの導来圏が長さ  $e(X), e(X')$  の例外生成列を持つとし,  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  をこの例外列と左半直交な許容部分三角圏とする.<sup>13</sup>もしも  $K(\mathcal{D})$  と  $K(\mathcal{D}')$  の位数が互いに素であるならば,  $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}' \subset D^b(X \times X')$  はファントムとなる.

---

<sup>13</sup> このとき上で見たように  $K(\mathcal{D}) \cong (\text{Pic}(X))_{\text{Tor}}$  が成り立つのでこれらは有限群である.

証明 証明の概略を述べる. 環準同型

$$m: K(X) \otimes K(X') \rightarrow K(X \times X') \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \boxtimes \beta \quad (4.18)$$

は上のような仮定の下で全射になることが示される ([GO13, Proposition 3.1]).  $m$  による  $K(\mathcal{D}) \otimes K(\mathcal{D}')$  の像は  $K(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}')$  である. ところが仮定より,  $K(\mathcal{D}) \otimes K(\mathcal{D}') = 0$  がわかるので  $K(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}') = 0$  を得る. また HKR 同型 (定理 4.14)

$$\mathrm{HH}_n(X) \cong \bigoplus_{q-p=n} H^q(X, \Omega_X^p)$$

と Künneth の公式より,  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}') = 0$  が成り立つ.  $\square$

以上の準備により次が直ちにわかる.

**定理 4.74 ([GO13])**  $X$  を古典的 Godeaux 曲面,  $X'$  を primary Burniat 曲面とする. さらに  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  を定理 4.70, 4.72 で見つけた擬ファントムとすると  $\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}' \subset D^b(X \times X')$  はファントムとなる.

定理 4.74 より, ファントムを持つような 4 次元代数多様体が存在する. 一方, 一般型極小代数曲面においてもファントムの存在が知られていることについて触れておこう.

Determinantal Barlow 曲面と呼ばれる  $p_g(X) = q(X) = 0$  となる一般型代数曲面のモジュライ空間は 2 次元であり,  $e(X) = 11$ ,  $K(X) \cong \mathbb{Z}^{11}$  になることが知られている. そこで, 古典的 Godeaux 曲面と primary Burniat 曲面で観察されたように, もし長さが最大 (つまり  $K(X)$  の階数 11 と長さが等しい) の例外列があれば, それが生成する部分三角圏の右直交部分圏はファントムになるのではないかと期待されていた. この事実を示したのが次である.

**定理 4.75 ([BGvBKS15])**  $X$  を Barlow 曲面とし, そのモジュライの点  $[X]$  の小さな近傍  $U$  で一般にとった Barlow 曲面を  $X_t$  とすると,  $D^b(X_t)$  には直線束からなる例外列  $(L_{t,1}, \dots, L_{t,11})$  と半直交分解

$$D^b(X_t) = \langle \mathcal{C}_t, \mathcal{D}_t \rangle$$

が存在する. ただし,  $\mathcal{C}_t := \langle L_{t,1}, \dots, L_{t,11} \rangle$  とおいた. 三角圏  $\mathcal{C}_t$  は,  $U$  内のどの一般的 Barlow 曲面  $X_t$  をとっても互いに同値である. さらに, このとき  $\mathcal{D}_t$  はファントムとなる.

[BGvBKS15] ではまず  $U$  内の一般的な点  $s, t$  において, 同値  $\mathcal{C}_s \cong \mathcal{C}_t$  が示され

る。またこのとき  $\mathrm{HH}_*(\mathcal{D}_t) = \mathrm{HH}_*(\mathcal{D}_s) = 0$ ,  $K(\mathcal{D}_t) = K(\mathcal{D}_s) = 0$  も確認できる。もし  $\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_s$  がファンтомでない、つまり  $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_s = 0$  であると仮定すると、 $D^b(X_t) = \mathcal{C}_t \cong \mathcal{C}_s = D^b(X_s)$  がわかる。一方滑らかな極小一般型代数曲面の Fourier–Mukai パートナーは自分自身と同型であることが知られている ([BM01]) から、 $X_t \cong X_s$  となり、 $s, t$  を  $U$  内の異なる 2 点にとれば矛盾がいえ、結局  $\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_s$  がファンтомであることがわかる。

現在では他にも擬射影平面 (fake projective plane)[GKMS15] や Dolgachev 曲面と呼ばれる小平次元が 1 の楕円曲面 [CL18] など、多くの代数曲面で  $H$ -ファンтом、ファンтомの研究が行われている。



# 第5章 安定層のモジュライ空間と Fourier-Mukai 変換

定理 2.54 で見たように、Abel 多様体とその双対 Abel 多様体は導來同値になる。一方、双対 Abel 多様体は元の Abel 多様体の次数 0 の直線束全体の集合とみなせる。一般に代数多様体上で（半）安定性という条件を満たす連結層全体の集合を考えると、スキームの構造を持つことが示される。そのようなスキームは（半）安定層のモジュライ空間と呼ばれ、双対 Abel 多様体はそのようなモジュライ空間の例となる。本章では（半）安定層のモジュライ理論を導入し、モジュライ空間を用いて構成される導來同値について解説する。

本章では断らない限り、考察する代数多様体やスキームはすべて  $\mathbb{C}$  上で定義されているものとする。

## 5.1 代数曲線上の（半）安定ベクトル束

$C$  を滑らかな射影的代数曲線とし、 $C$  上の代数的ベクトル束全体の同型類の集合  $M$  を考える。仮に  $M$  に「良い」幾何的構造が入るなら、 $M$  を  $C$  上のベクトル束のモジュライ空間と呼ぶ。この「良い」幾何構造として何を要求するかは目的により異なってくるが、ここでは有限型の代数的スキームを「良い」幾何構造と呼ぶことにしよう。すると、残念ながら  $M$  にはこの意味で良い幾何構造が入らない。まず、考えるベクトル束の階数と次数が無限に存在するため、仮に  $M$  に何らかの幾何構造が入るとしても  $M$  には無限個の連結成分が存在することになる。そこで階数  $r$  と次数  $d$  を固定したベクトル束の同型類の集合  $M(r, d) \subset M$  を考えることにしても  $M(r, d)$  には良い幾何構造が入らない。例えば  $C = \mathbb{P}^1$  とすると、

$$M(2, 0) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a) : a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \quad (5.1)$$

となり、 $M$  は有限型ではなくなってしまう。

**注意 5.1** 上で述べたことを正確に述べると次のようになる.  $\mathcal{M}$  を  $\mathbb{P}^1$  上の代数的ベクトル束のなすスタック(付録 D を参照)とする. つまり  $\mathcal{M}$  は  $\mathbb{C}$  上のスキーム  $S$  に対して  $\mathbb{P}^1 \times S$  上の代数的ベクトル束  $\mathcal{E}$  を対象とする亜群を対応させる反変2-関手である. このとき,  $\mathcal{M}$  は有限型でもなく, また分離的でもない. 有限型でないのは上で述べた通りである. 分離性が崩れるのは, 任意の  $0 \leq b < a$  に対して  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$  を小変形して  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b)$  が得られることによる.

ここでベクトル束  $E$  に対し, その傾斜(slope)  $\mu(E) \in \mathbb{Q}$  を

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\operatorname{rank}(E)}$$

と定める. 等式(5.1)の右辺に出てくるベクトル束  $E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$  はすべて  $\mu(E) = 0$  であるが,  $a > 0$  ならば  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \subset E$  でありかつ  $\mu(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) > \mu(E) = 0$  となる. そこで, 次の概念を導入すると考察するベクトル束が減少することになる.

**定義 5.2** 滑らかな射影的代数曲線  $C$  上の代数的ベクトル束  $E$  は, 任意の部分束  $0 \neq F \subsetneq E$  に対して不等式

$$\mu(F) < (\leq) \mu(E) \tag{5.2}$$

が成立するときに(半)安定((semi)stable)であると呼ぶ.

等式(5.1)の右辺に出てくるベクトル束  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$  で安定であるものは存在せず, 半安定なものは  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$  に限る. また滑らかな射影的代数曲線  $C$  上の直線束は必ず安定となることがわかる.

**問題 5.3** Birkhoff-Grothendieck の定理より,  $\mathbb{P}^1$  上のベクトル束はすべて

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_r)$$

の形をしている([Har77, Exercise V.2.6]). このことから,  $\mathbb{P}^1$  上の安定ベクトル束は  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$  の形のもの, 半安定ベクトル束は  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)^{\oplus r}$  の形のものに限ることを示せ.

**問題 5.4**  $C$  を滑らかな射影的代数曲線とする.

(i)  $C$  上のベクトル束  $E$  が(半)安定であることと, 任意のベクトル束の全射  $E \rightarrow F$  に対して  $\mu(E) < (\leq) \mu(F)$  となることが同値であることを示せ.

(ii)  $E, F$  を  $C$  上の半安定ベクトル束とし,  $\mu(E) > \mu(F)$  であるならば

$\text{Hom}(E, F) = 0$  が成り立つことを示せ.

$M(r, d)$  の部分集合

$$M^s(r, d) \quad (M^{ss}(r, d))$$

を（半）安定ベクトル束からなるものとする. （半）安定ベクトル束のみに考えるベクトル束を減少させることで、部分集合  $M^s(r, d)$ ,  $M^{ss}(r, d)$  が良い幾何構造を持ち、特に有限型になると期待する。

以下の定理により  $C$  上の階数  $r$ , 次数  $d$  のベクトル束に対し、フィルトレーションが存在し、半安定層に分解でき、さらに半安定層は安定層に分解できることがわかる。つまり  $M^s(r, d)$ ,  $M^{ss}(r, d)$  を考察することで  $M(r, d)$  が本質的に復元される。

**定理 5.5** (i)  $C$  上の任意のベクトル束  $E$  に対してフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E \tag{5.3}$$

が存在して各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  は半安定であり

$$\mu(F_1) > \mu(F_2) > \cdots > \mu(F_k)$$

が成立する。フィルトレーション (5.3) は **Harder–Narasimhan (HN)** フィルトレーション (Harder–Narasimhan filtration) と呼び、各  $F_i$  を  $E$  の **Harder–Narasimhan (HN)** 因子 (Harder–Narasimhan factor) と呼ぶ。

(ii)  $C$  上の任意の半安定ベクトル束  $F$  に対してフィルトレーション

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_l = F \tag{5.4}$$

が存在して各  $G_i = F_i/F_{i-1}$  は安定であり

$$\mu(G_1) = \mu(G_2) = \cdots = \mu(G_l) = \mu(F)$$

が成立する。フィルトレーション (5.4) を **Jordan–Hölder (JH)** フィルトレーション (Jordan–Hölder filtration) と呼び、各  $G_i$  を  $F$  の **Jordan–Hölder (JH)** 因子 (Jordan–Hölder factor) と呼ぶ。

ここでは (i) のみ証明する。 (ii) の証明については [HL10, Proposition 1.5.2] を参照されたい。証明をいくつかのステップに分ける。

**ステップ 1**  $C$  上の任意のベクトル束  $E$  は  $\mu(A) \geq \mu(E)$  を満たす半安定ベクト

ル束  $A$  を含む。同様に、 $\mu(E) \geq \mu(B)$  を満たす半安定ベクトル束  $B$  と全射  $E \twoheadrightarrow B$  が存在する。

**証明**  $E$  が半安定なら  $A = E$  ととれ、また  $E$  が半安定でないなら  $E$  は  $\mu(E') > \mu(E)$  となるベクトル束  $E'$  を含むことになる。 $\text{rank}(E') < \text{rank}(E)$  となり、また直線束は安定であるから 階数に関する帰納法より求める  $A$  を得る。全射の方も同様である。□

**ステップ 2** ベクトル束  $E$  をとる。ベクトル束の全射  $E \twoheadrightarrow B$  は次の条件を満たすときに、 $E$  の mdq<sup>1</sup> と呼ばれる。

- $\mu(E) \geq \mu(B)$  である。
- 任意の全射  $E \twoheadrightarrow B'$  に対して  $\mu(B') \geq \mu(B)$  であり、さらに  $\mu(B') = \mu(B)$  ならば  $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$  と分解する。

このとき、 $C$  上の任意のベクトル束  $E$  は mdq を持つ。

**証明** mdq の定義より、 $E \twoheadrightarrow B$  が mdq ならば  $B$  は半安定である。さらにステップ 1 より、 $E \twoheadrightarrow B$  が mdq であることをチェックするには半安定な  $B'$  に対して条件をチェックすればよい。もし  $E$  が半安定ならば、 $\text{id}: E \rightarrow E$  が mdq を与える。 $E$  が半安定でなければ、ベクトル束の完全系列

$$0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow 0 \tag{5.5}$$

で、 $A$  は半安定であり  $\mu(A) > \mu(E)$  を満たすものが存在する。階数に関する帰納法により、 $E' \twoheadrightarrow B$  が mdq であるならば、合成

$$E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B \tag{5.6}$$

も mdq であることを示せばよい。そこで半安定な  $B'$  と全射  $E \twoheadrightarrow B'$  の存在を仮定する。もし  $\mu(B') \leq \mu(B)$  なら、次の不等式を得る：

$$\mu(A) > \mu(E) > \mu(E') \geq \mu(B) \geq \mu(B').$$

よって完全系列 (5.5) と問題 5.4 (ii) より、 $E \twoheadrightarrow B'$  は  $E \twoheadrightarrow E' \twoheadrightarrow B'$  と分解する。しかし  $E' \twoheadrightarrow B$  は mdq であるため、 $\mu(B') \geq \mu(B)$  となり、 $\mu(B') = \mu(B)$  を得る。さらにこのとき、 $E' \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$  と分解するため、分解  $E \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow B'$  が存在する。よって (5.6) は mdq である。□

---

<sup>1</sup> maximal destabilizing quotient の略。

**ステップ3** 任意の  $C$  上のベクトル束  $E$  は HN フィルトレーションを持つ.

証明  $E \twoheadrightarrow B^1$  を mdq とし, 完全系列

$$0 \rightarrow E^1 \rightarrow E \rightarrow B^1 \rightarrow 0$$

をとる.  $E^1$  が半安定であるなら上が  $E$  の HN フィルトレーションを与える.  $E^1$  が半安定でなければ,  $E^1 \twoheadrightarrow B^2$  を mdq とし, 再び完全系列

$$0 \rightarrow E^2 \rightarrow E^1 \rightarrow B^2 \rightarrow 0$$

を得る.  $Q = E/E^2$  とすると,  $E \twoheadrightarrow B^1$  が mdq であることから  $\mu(Q) \geq \mu(B^1)$  であり, これと完全系列

$$0 \rightarrow B^2 \rightarrow Q \rightarrow B^1 \rightarrow 0$$

から  $\mu(B^2) \geq \mu(Q)$  が得られる. もし  $\mu(B^2) = \mu(Q) = \mu(B^1)$  なら,  $E \twoheadrightarrow B^1$  が mdq であることから  $E \twoheadrightarrow B^1 \twoheadrightarrow Q$  と分解し, したがって  $B^1 \cong Q$ ,  $B^2 = 0$  を得る. これは矛盾であるから,  $\mu(B^2) > \mu(B^1)$  が成り立つ. 以下, この操作を繰り返して得られる列

$$\cdots \subsetneq E^3 \subsetneq E^2 \subsetneq E^1 \subsetneq E$$

は,  $\text{rank}(E) > \text{rank}(E_1) > \text{rank}(E_2) > \cdots$  となるため無限に続くことはできない. よって, 最後に半安定なベクトル束  $E^{k-1}$  を得る.  $E_i := E^{k-i}$  とおけば求める HN フィルトレーションが得られる.  $\square$

上の定理より部分集合  $M^s(r, d)$ ,  $M^{ss}(r, d)$  は本来のベクトル束全体から減らしそぎてはいないということができる.

**問題 5.6**  $C$  上のベクトル束  $E$ , 半安定なベクトル束  $F$  をとる.

- (i)  $E$  の HN フィルトレーションは同型を除いて一意に定まることを示せ.
- (ii)  $F$  の JH フィルトレーションは一意的ではないが,  $\bigoplus_{i=1}^l G_i$  は同型を除いて一意的であることを示せ.

## 5.2 高次元代数多様体上の（半）安定層

$X$  が 2 次元以上の代数多様体の場合, ベクトル束だけを考えてもモジュライ空間の良いコンパクト化が得られないため, 連接層のモジュライ空間を考察する

必要がある。この場合、歴史的に2種類の安定性が考察されてきた。1つ目は代数曲線と同様に傾斜を用いるものであり、2つ目は Hilbert 多項式を用いるものである。

まず1つ目の安定性について述べる。 $(X, \mathcal{O}_X(1))$  を滑らかな  $d$  次元の偏極射影的代数多様体とし、 $\omega := \mathcal{O}_X(1)$  とおく。以下ではしばしば同じ記号で  $\omega$  の  $H^2(X, \mathbb{Z})$  のクラス  $c_1(\omega)$  を表す。

$E \in \mathrm{Coh}(X)$  に対して  $\mu_\omega(E)$  を

$$\mu_\omega(E) := \frac{c_1(E) \cdot \omega^{d-1}}{\mathrm{rank}(E)}$$

と定め  $E$  の  $\omega$  に関する傾斜 (slope) と呼ぶ。ただし、 $\mathrm{rank}(E) = 0$  ならば  $\mu_\omega(E) = \infty$  と定める。

**定義 5.7 (傾斜安定性)**  $X$  上の連接層  $E$  は任意の部分層  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  に対して不等式

$$\mu_\omega(F) < (\leq) \mu_\omega(E/F) \tag{5.7}$$

が成り立つとき、 $\mu_\omega$ - (半) 安定 ( $\mu_\omega$ -(semi)stable) であると呼ぶ。

**注意 5.8**  $F \in \mathrm{Coh}(X)$  が  $\mathrm{rank}(F) = 0$  ならば  $\mu_\omega$ -半安定であり、 $\mu_\omega(F) = \infty$  である。逆も成り立つ。

**注意 5.9**  $\dim X = 1$  ならば不等式 (5.7) は不等式 (5.2) と同値であり、 $\dim X \geq 2$  でも不等式  $\mu_\omega(F) \leq \mu_\omega(E/F)$  は  $\mu_\omega(F) \leq \mu_\omega(E)$  と同値である。しかし、 $\mu_\omega(F) < \mu_\omega(E/F)$  は  $\mu_\omega(F) < \mu_\omega(E)$  と同値ではない。例えば  $E = \mathcal{O}_X$ 、 $F = I_x$  とおくと  $E/F = \mathcal{O}_x$  であり、 $\mu_\omega(I_x) < \mu_\omega(\mathcal{O}_x) = \infty$  となるが、 $\mu_\omega(I_x) = \mu_\omega(\mathcal{O}_X)$  である。

次に2つ目の安定性について述べる。 $E \in \mathrm{Coh}(X)$  と  $E(m) = E \otimes \omega^m$  に対し、 $\chi(E(m)) \in \mathbb{Q}[m]$  を

$$\chi(E(m)) := \sum_{i=0}^d (-1)^i \dim H^i(X, E(m))$$

と定める。Hirzebruch–Riemann–Roch の定理より  $\chi(E(m)) \in \mathbb{Q}[m]$  であり、これは  $E$  の **Hilbert 多項式** (Hilbert polynomial) と呼ばれる。Hilbert 多項式の各係数は  $E$  の Chern 標数を用いて記述することができる。

問題 5.10  $\chi(E(m))$  を

$$\chi(E(m)) := a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Q}, a_k \neq 0) \quad (5.8)$$

とおくと、 $k$  は  $E$  の台の次元と等しいことを示せ。

Hilbert 多項式を (5.8) と記述したとき、 $\bar{\chi}(E(m))$  を

$$\bar{\chi}(E(m)) := \frac{\chi(E(m))}{a_k} \quad (5.9)$$

とおく。 $\bar{\chi}(E(m))$  は被約 Hilbert 多項式 (reduced Hilbert polynomial) と呼ばれる。

問題 5.11  $\text{rank}(E) > 0$  ならば

$$\bar{\chi}(E(m)) = m^d + d(\mu_\omega(E) - K_X \omega^{d-1}) m^{d-1} + O(m^{d-2})$$

となることを示せ。

定義 5.12 (Gieseker 安定性) 連接層  $E \in \text{Coh}(X)$  は次の条件を満たすときに  $\omega$ -Gieseker (半) 安定 ( $\omega$ -Gieseker (semi)stable) であるといわれる：

- $E$  は純粋 (pure) である。つまり、任意の部分層  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  に対し、 $F$  の台の次元は  $E$  の台の次元に等しい。
- 任意の部分層  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  と  $m \gg 0$  に対し不等式

$$\bar{\chi}(F(m)) < (\leq) \bar{\chi}(E(m))$$

が成立する。

注意 5.13  $\text{rank}(E) > 0$  ならば、問題 5.11 より次が成り立つ：

$$\mu_\omega\text{-安定} \Rightarrow \text{Gieseker 安定} \Rightarrow \text{Gieseker 半安定} \Rightarrow \mu_\omega\text{-半安定}.$$

また、 $\dim X = 1$  ならば傾斜安定性と Gieseker 安定性は同値である。

注意 5.14  $\mu_\omega$ -安定性、Gieseker 安定性のいずれにおいても Harder-Narasimhan フィルトレーションと Jordan-Hölder フィルトレーションが存在する。例えば  $E \in \text{Coh}(X)$  の Gieseker 安定性に関する HN フィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

は各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  が  $\omega$ -Gieseker 半安定で  $\bar{\chi}(F_i(m)) > \bar{\chi}(F_{i+1}(m))$  がすべて

の  $i$  と  $m \gg 0$  で成り立つ.

**問題 5.15** 射影空間上の接束  $T_{\mathbb{P}^n}$  は  $\omega = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$  について  $\mu_\omega$ -安定であることを示せ.

**問題 5.16** 任意の Gieseker 安定層  $E$  に対し,  $\text{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$  であることを示せ.

### 5.3 (半) 安定層のモジュライ空間

$X$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $\omega$  を  $X$  上の豊富因子とする. 与えられた  $v \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  に対して,  $\text{ch}(E) = v$  となる  $X$  上の安定層のモジュライ空間について述べる. この節では安定層とは Gieseker 安定層を意味するものとする.

(反変) 関手

$$\mathcal{M}_\omega(v): (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{Sets} \quad (5.10)$$

を,  $T \in (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C})$  に対して次の集合の同値類を対応させることで定義する:

$$\left\{ \mathcal{F} \in \text{Coh}(X \times T) : \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } T \text{ 上平坦, 任意の } t \in T \\ \text{に対し } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{X \times t} \text{ は } \omega\text{-安定層, } \text{ch}(\mathcal{F}_t) = v \end{array} \right\}.$$

ここで,  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}'$  は  $T$  上の直線束  $\mathcal{L}$  が存在して  $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}' \otimes p_T^*\mathcal{L}$  となるときに同値である, と定義する. ただし,  $p_T: X \times T \rightarrow T$  は射影である.

**定義 5.17** 有限型スキーム  $M_\omega(v)$  が存在して, 関手的同型

$$\text{Hom}(-, M_\omega(v)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_\omega(v)(-) \quad (5.11)$$

が存在するとき,  $M_\omega(v)$  を  $\text{ch}(E) = v$  である  $\omega$ -安定層のモジュライ空間 (moduli space of  $\omega$ -stable sheaves) と呼ぶ. またこのとき反変関手  $\mathcal{M}_\omega(v)(-)$  はスキーム  $M_\omega(v)$  で表現されるといい, さらに関手  $\mathcal{M}_\omega(v)(-)$  は表現可能 (representable) である<sup>2</sup>, という.

同型 (5.11) の下で  $\text{id} \in \text{Hom}(M_\omega(v), M_\omega(v))$  に対応する  $X \times M_\omega(v)$  上の連接層

<sup>2</sup> スキームのなす圏 ( $\mathfrak{Sch}$ ) (など) から集合のなす圏  $\mathfrak{Sets}$  (など) への一般の反変関手に対しても, 同様の意味で表現可能かどうかをしばしば考える. (関手 (5.15), (7.20) や D.3 節参照.)

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times M_\omega(v)) \quad (5.12)$$

は普遍層 (universal sheaf) と呼ばれる.

**注意 5.18** 補題 3.3 (米田の捕題) で述べたように,  $M \rightarrow \mathrm{Hom}(-, M)$  による次の充満忠実関手が存在する.

$$(\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Fun}(\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}, \mathfrak{Sets}).$$

$M_\omega(v)(-)$  が表現可能であるとは,  $M_\omega(v)(-)$  が上の充満忠実関手の本質的像に含まれるということに他ならない.

モジュライ空間  $M_\omega(v)$  が存在すると仮定しよう. 同型 (5.11) を  $\mathrm{Spec}\ \mathbb{C}$  に当てはめて, 次の 1 対 1 対応を得る.

$$M_\omega(v) \text{ の閉点} \xleftrightarrow{1 \text{ 対 } 1} \{F \in \mathrm{Coh}(X) : F \text{ は } \omega\text{-安定で } \mathrm{ch}(F) = v\} / \cong.$$

残念ながら定義 5.17 の意味でのモジュライ空間が必ずしも存在するわけではないが,  $v$  と  $\omega$  に関するある種の数値的条件が満たされればモジュライ空間の存在が保証される.  $\chi(v(m)), \bar{\chi}(v(m)) \in \mathbb{Q}[m]$  を

$$\chi(v(m)) := \int_X v \cdot e^{m\omega} \mathrm{td}_X, \quad \bar{\chi}(v(m)) := \frac{\chi(v(m))}{a_k}$$

で定める. ここで  $a_k$  は  $\chi(v(m))$  の最高次の係数である.  $\chi(v(m)), \bar{\chi}(v(m))$  はそれぞれ  $\mathrm{ch}(E) = v$  となる連接層  $E$  が存在する場合, その Hilbert 多項式, 被約 Hilbert 多項式に他ならない.

**定義 5.19**  $v \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  はすべての  $m \in \mathbb{Z}$  に対して  $\chi(v(m)) \in \mathbb{Z}$  であり, またこれらの公約数が 1 であるとき,  $\omega$ -原始的 ( $\omega$ -primitive) である, といわれる.

**問題 5.20**  $v$  が  $\omega$ -原始的なら,  $\mathrm{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -半安定層  $E$  は  $\omega$ -安定であることを示せ.

次で見るように少なくとも  $v$  が  $\omega$ -原始的ならば, モジュライ空間  $M_\omega(v)$  の存在が保証される (証明については [HL10, Theorem 4.3.4] および注意 5.24 を参照).

**定理 5.21**  $v$  が  $\omega$ -原始的であると仮定する. このとき,  $\mathrm{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -安定層のモジュライ空間  $M_\omega(v)$  が存在する. しかも  $M_\omega(v)$  は射影的スキームになる.

例えば  $X$  として滑らかな射影的代数曲線  $C$  をとり,  $\omega$  を次数 1 の  $C$  上の豊富因子とする. また,

$$v := (r, d) \in H^0(C, \mathbb{Z}) \oplus H^2(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

とする. このとき,  $v$  が  $\omega$ -原始的であることと  $(r, d)$  が互いに素であることは同値である. よって  $(r, d)$  が互いに素なら, 5.1 節の  $M^s(r, d)$  は  $M_\omega(v)$  の閉点と同一視でき, したがって  $M^s(r, d)$  に射影的スキームの構造が入ることになる.

**例 5.22** (i)  $C = \mathbb{P}^1$  なら, 問題 5.3 により  $M^s(r, d) \neq \emptyset$  であることと  $r = 1$  であることが同値であり, さらに  $M^s(1, d) = \text{Spec } \mathbb{C}$  となる.

(ii)  $C$  を橢円曲線とし, 閉点  $x_0 \in C$  を固定する. また, 互いに素な  $(r, d) \in \mathbb{Z}^{\oplus 2}$  をとる. このとき, [Ati57] により次の同型の存在が知られている.

$$\begin{aligned} M^s(r, d) &\xrightarrow{\cong} M(1, d) \quad E \mapsto \det E, \\ C &\xrightarrow{\cong} M(1, d) \quad x \mapsto \mathcal{O}_C((d+1)x_0 - x). \end{aligned}$$

定義 5.17 の条件を満たすモジュライ空間は  $v$  が定義 5.19 の意味で  $\omega$ -原始的でなければ存在するとは限らない. 一方, より弱い意味でのモジュライ空間の存在は保証されている. 後で必要となるため, 半安定層も含んだ枠組みで議論しよう. 反変関手

$$\overline{\mathcal{M}}_\omega(v): (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

を (5.10) で与えた関手  $\mathcal{M}_\omega(v)$  の定義において “ $\omega$ -安定層の族” を “ $\omega$ -半安定層の族” に置き換えた関手として定義する.

**定理 5.23** 射影的スキーム  $\overline{\mathcal{M}}_\omega(v)$  および自然変換

$$\tau: \overline{\mathcal{M}}_\omega(v) \rightarrow \text{Hom}(-, \overline{\mathcal{M}}_\omega(v))$$

が存在して, 次の普遍性を満たす:

任意のスキーム  $M$ , および与えられた自然変換

$$\theta: \overline{\mathcal{M}}_\omega(v)(-) \rightarrow \text{Hom}(-, M)$$

に対して, 射  $f: \overline{\mathcal{M}}_\omega(v) \rightarrow M$  であって, それが導く写像

$$f_*: \text{Hom}(-, \overline{\mathcal{M}}_\omega(v)) \rightarrow \text{Hom}(-, M)$$

が  $\theta = f_* \circ \tau$  を満たすようなものがただ 1 つ存在する.

上の定理の証明については, [HL10, Theorem 4.3.4] を参照されたい. 定理 5.23 における  $\overline{M}_\omega(v)$  の各閉点は, 次の形の連接層と 1 対 1 に対応することが知られている (このような連接層は polystable sheaf と呼ばれている).

$$E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k. \quad (5.13)$$

ここで  $E_i$  は  $\omega$ -安定であり,  $v_i = \text{ch}(E_i)$  とすると

$$\overline{\chi}(v_i(m)) = \overline{\chi}(v(m)) \text{ かつ } v_1 + v_2 + \cdots + v_k = v$$

を満たしている. さらに,  $\omega$ -安定層に対応する  $\overline{M}_\omega(v)$  の開部分スキーム

$$M_\omega(v)$$

が存在する. 上述の  $M_\omega(v)$  は  $\omega$ -安定層の粗モジュライ空間 (coarse moduli space) と呼ばれ,  $\overline{M}_\omega(v)$  は  $\omega$ -半安定層の良モジュライ空間 (good moduli space) と呼ばれる.

**注意 5.24**  $v$  が  $\omega$ -原始的ならば, 問題 5.20 からわかるように  $M_\omega(v) = \overline{M}_\omega(v)$  である. また  $v$  が  $\omega$ -原始的という仮定を用いると [HL10, Theorem 4.6.5] によって  $M_\omega(v)$  上平坦な連接層  $\mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times M_\omega(v))$  であって, 誘導する自然変換

$$\text{Hom}(-, M_\omega(v)) \rightarrow M_\omega(v)(-)$$

が定理 5.23 における自然変換  $\tau$  の逆写像を与えるものが存在する. つまり上の自然変換は同型であるため,  $M_\omega(v)$  は表現可能で  $M_\omega(v)$  は定義 5.17 の意味でのモジュライ空間となる.

しかし  $v$  が  $\omega$ -原始的でなければ, 粗モジュライ空間  $M_\omega(v)$  の閉点集合は  $\text{ch}(E) = v$  を満たす  $\omega$ -安定層たちとの間に 1 対 1 対応が存在するに過ぎない.

## 5.4 (半) 安定層のモジュライ空間の構成

本書ではモジュライ空間  $M_\omega(v)$  の構成は必要としないが, 10.1 節で解説する幾何学的不变式論の安定性と定義 5.12 の Gieseker 安定性の関係がモジュライ空間  $M_\omega(v)$  の構成の鍵となるため, ここで簡単に解説する. 詳細については [HL10, Theorem 4.3.4] を参照されたい.

まず,  $\omega$ -半安定で  $\text{ch}(E) = v$  となる連接層  $E$  の同型類の集合は有界であること

が示される。つまり、 $\mathbb{C}$  上有限型なスキーム  $T$  と  $T$  上平坦な連接層  $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times T)$  が存在して、次が成り立つ：任意の  $\mathrm{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -半安定層  $E$  に対して、ある  $t \in T$  が存在して  $E \cong \mathcal{E}|_{X \times t}$  となる。

この事実から、 $\mathcal{O}_X(1)$  を  $c_1(\mathcal{O}_X(1)) = \omega$  となる豊富直線束とすると、十分大きな  $m \gg 0$  に対して自然な射

$$H^0(E(m)) \otimes \mathcal{O}_X(-m) \rightarrow E \quad (5.14)$$

がすべての  $\mathrm{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -半安定層  $E$  に対して全射となり、さらに  $H^i(E(m)) = 0$  が  $i > 0$  で成立する。 $V$  を  $\dim V = \dim H^0(E(m))$  となるベクトル空間とし、

$$\mathcal{V} := V \otimes \mathcal{O}_X(-m)$$

と定め、さらに反変関手

$$\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v) : (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

を  $T \in (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C})$  に対して次の集合を対応させることで定義する。

$$\left\{ p_X^* \mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{F} : \begin{array}{l} \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X \times T) \text{ は } T \text{ 上平坦, 任意の } t \in T \\ \text{に対し } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{X \times t} \text{ は } \mathrm{ch}(\mathcal{F}_t) = v \text{ を満たす} \end{array} \right\} / \cong .$$

ここで  $p_X$  は  $X \times T$  から  $X$  への射影であり、同型は次の可換図式によって定まる。

$$\begin{array}{ccc} p_X^* \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \parallel & & \downarrow \cong \\ p_X^* \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{F}' . \end{array}$$

関手  $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$  は射影的スキーム  $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$  によって表現されることが知られており、**Quot スキーム** (Quot scheme) と呼ばれる。そこで

$$U \subset \mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$$

を全射  $s: \mathcal{V} \twoheadrightarrow F$  であって、 $F$  は  $\omega$ -半安定、さらに  $s$  が誘導する線形写像  $V = H^0(\mathcal{V}(m)) \rightarrow H^0(F(m))$  が同型になるものに対応する部分集合とし、また  $U' \subset U$  を  $F$  が  $\omega$ -安定であるものに対応する部分集合とする。このとき、 $U$ 、 $U'$  は  $\mathrm{Quot}(\mathcal{V}, v)$  の Zariski 開集合であることが証明される。

$E$  を  $\text{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -半安定層とする。このとき、 $V$  と  $H^0(E(m))$  の同型を与えると、全射 (5.14) が  $U$  の閉点を定めることができ。一方、このようにして定まる  $U$  の閉点は  $V$  と  $H^0(E(m))$  の同型の取り方に依存し、その自由度は  $G = \text{GL}(V)$  の分だけ存在する。そこで  $G$  の  $\text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  への作用を  $g \in G$  と  $s: \mathcal{V} \rightarrow F$  に対して  $sog: \mathcal{V} \rightarrow F$  で定める。すると  $U, U'$  は  $G$  の作用で閉じており、これらの  $G$ -作用に関する商空間をとることで求めるモジュライ空間  $\overline{M}_\omega(v)$ ,  $M_\omega(v)$  が構成される。

一般に代数多様体の代数群の作用による商空間を得るには、10.1 節で解説する幾何学的不变式論を用いる。そのためには、 $U'$  上に  $G$ -同変な直線束を構成する必要がある。 $X \times \text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  上の普遍商

$$p_X^* \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$$

を考え、 $l \gg 0$  に対して  $\text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  上の直線束  $L_l$  を

$$L_l = \det(p_{Q*}(\mathcal{F} \otimes p_X^* \mathcal{O}_X(l)))$$

で定める。ここで  $p_X, p_Q$  はそれぞれ  $X \times \text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  から  $X, \text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  への射影である。すると、 $L_l$  は自然に  $G$ -同変な直線束となる。 $\overline{U}$  を  $U$  の  $\text{Quot}(\mathcal{V}, v)$  における閉包とし、 $L_l$  を  $\overline{U}$  に制限する。すると、10.1 節の記号を用いて

$$U' = \overline{U}^s(L_l), \quad U = \overline{U}^{ss}(L_l)$$

が示される。つまり、Gieseker による（半）安定性と GIT の意味での（半）安定性が一致する。この事実により  $U, U'$  の GIT 商をとることができ、

$$M_\omega(v) = U'/G, \quad \overline{M}_\omega(v) = U//G$$

と構成されることがわかるのである。

## 5.5 安定層の局所変形理論

前節と同じく、 $X$  を射影的代数多様体、 $\omega$  を  $X$  上の豊富直線束とする。モジュライ空間  $M_\omega(v)$  の大域的構造を調べるのは一般には難しい問題である。しかし与えられた点  $[E] \in M_\omega(v)$  の局所的な様子を調べるのは、自明ではないが、よりやさしい問題であるといえよう。ここでは  $M_\omega(v)$  の局所構造を変形理論を用いて解説する。

$[E] \in M_\omega(v)$  を固定する。 $\mathcal{A}rt$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 Artin 局所環の圏として、反

変関手

$$\text{Def}_E : \mathcal{A}rt \rightarrow \mathfrak{Sets} \quad (5.15)$$

を次で定める。\$R\$ を有限次元 Artin 局所環, \$\mathfrak{m}\$ をその極大イデアルとして, \$\text{Def}\_E(R)\$ を集合

$$\left\{ (\mathcal{E}, \phi) : \mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times \text{Spec } R) \text{ は } R \text{ 上平坦, } \phi : R/\mathfrak{m} \otimes_R \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} E \right\} / \cong$$

とする。\$M\_\omega(v)\$ が存在するなら同型 (5.11) が存在するため, 関手的同型

$$\text{Hom}(\widehat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}, -) \xrightarrow{\cong} \text{Def}_E(-) \quad (5.16)$$

が得られる。ここで \$\widehat{\mathcal{O}}\_{M\_\omega(v), [E]}\$ は \$M\_\omega(v)\$ の構造層の点 \$[E]\$ における完備化である。特に \$\mathbb{C}[t]/t^2\$ に対して上の同型を当てはめて, 全単射

$$T_{[E]} M_\omega(v) \xrightarrow{\cong} \text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/t^2)$$

を得る。

**補題 5.25** 自然な同一視

$$\text{Def}_E(\mathbb{C}[t]/t^2) = \text{Ext}_X^1(E, E) \quad (5.17)$$

が存在する。特に \$T\_{[E]} M\_\omega(v)\$ は線形空間として \$\text{Ext}\_X^1(E, E)\$ と同型である。

**証明** \$\mathcal{E} \in \text{Def}\_E(\mathbb{C}[t]/t^2)\$ とする。完全系列表

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_X[t]/t^2 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

に \$\mathcal{E}\$ をテンソルして完全系列表

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{t} \mathcal{E} \rightarrow E \rightarrow 0$$

が得られ、これが \$\text{Ext}\_X^1(E, E)\$ の元を定める。

逆に \$\eta \in \text{Ext}\_X^1(E, E)\$ が与えられたとすると \$\eta\$ に対応して, \$\text{Coh}(X)\$ の完全系列表

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} \mathcal{E} \xrightarrow{v} E \rightarrow 0$$

が存在する。\$\mathcal{E}\$ に作用 \$t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}\$ を合成 \$\mathcal{E} \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} \mathcal{E}\$ で与える。\$t^2 = 0\$ になるため \$\mathcal{E} \in \text{Coh}(X \times \text{Spec } \mathbb{C}[t]/t^2)\$ となる。このようにして得られた \$\mathcal{E}\$ が式 (5.17) の

左辺の元を与えることは容易にチェックできる。  $\square$

$\psi: R' \twoheadrightarrow R$  を  $\mathcal{A}rt$  における全射とし、  $\mathfrak{m}' \subset R'$  を極大イデアルとする。  $\text{Ker}(\psi) \cdot \mathfrak{m}' = 0$  が成立するとき、  $\psi$  を小拡大 (small extension) と呼ぶ。このとき、  $\text{Ker}(\psi)$  は  $R'/\mathfrak{m}' (\cong \mathbb{C})$ -加群となる。

**問題 5.26**  $\mathcal{A}rt$  における任意の全射は小拡大の合成で得られることを示せ。

**命題 5.27**  $\psi: R' \twoheadrightarrow R$  を小拡大、  $I = \text{Ker}(\psi)$  とし、  $\mathcal{E} \in \text{Def}_E(R)$  とする。このとき、 障害類 (obstruction class) と呼ばれるクラス

$$o(\mathcal{E}) \in \text{Ext}_X^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

が存在して、  $o(\mathcal{E}) = 0$  となることと  $\mathcal{E}$  が  $\mathcal{E}' \in \text{Def}_E(R')$  に拡張されることは同値となる。さらにこの場合、  $\mathcal{E}$  の拡張となる  $\mathcal{E}'$  の集合には  $\text{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$  の自由かつ推移的な作用がある。

**証明** 簡単のため、  $E$  を局所自由層とする（一般的な場合は [HL10, 2.A.6] を参照されたい）。すると

$$\text{Ext}_X^i(E, E) \cong H^i(X, \mathcal{E}nd(E))$$

であり、右辺の元はČech コホモロジーで表すことができることに注意する。

$X$  の十分細かいアファイン開被覆  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq N}$  をとる。すると、  $\mathcal{E} \in \text{Def}_E(R)$  は同型

$$\eta_{ij}: E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R \xrightarrow{\cong} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R$$

で  $\eta_{ij} \otimes_R R/\mathfrak{m} = \text{id}$  かつ  $U_{ijk}$  上でコサイクル条件  $\eta_{ij} \circ \eta_{jk} \circ \eta_{ki} = \text{id}$  を満たすものとみなせる。各  $U_{ij}$  では  $\eta_{ij}$  を同型

$$\eta'_{ij}: E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R' \xrightarrow{\cong} E|_{U_{ij}} \otimes_{\mathbb{C}} R'$$

に拡張することができる。  $\eta_{ij}$  はコサイクル条件を満たすため、  $U_{ijk}$  上で

$$\eta'_{ij} \circ \eta'_{jk} \circ \eta'_{ki} = \text{id} + o_{ijk} \quad (o_{ijk} \in \text{End}(E|_{U_{ijk}}) \otimes I) \quad (5.18)$$

と書ける。そこで

$$o(\mathcal{E}) = \{o_{ijk}\}_{ijk} \in \text{Ext}_X^2(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

とおく。  $o(\mathcal{E})$  が矛盾なく定義されることは容易に確認できる。また、  $\mathcal{E}$  が  $\mathcal{E}'$  に拡

張するならコサイクル条件を満たす  $\eta'_{ij}$  を選べるため、明らかに  $o(\mathcal{E}) = 0$  となる。そこで  $o(\mathcal{E}) = 0$  とすると

$$\vartheta_{ijk} = \vartheta_{ij} + \vartheta_{jk} + \vartheta_{ki} \quad (\vartheta_{ij} \in \mathrm{Hom}(E|_{U_{ij}}, E|_{U_{ij}}) \otimes_{\mathbb{C}} I)$$

と書ける。よって  $\eta'_{ij}$  を  $\eta'_{ij} - \vartheta_{ij}$  と置き換えると  $\eta'_{ij}$  がコサイクル条件を満たし、 $\mathcal{E}$  が  $\mathcal{E}'$  に拡張することがわかる。

さらにそのような拡張の仕方は  $\vartheta_{ij}$  の取り方で決まるため、 $\mathrm{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$  の元を Čech コサイクル

$$\{\vartheta'_{ij}\}_{ij} \in \mathrm{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I, \quad \vartheta'_{ij} \in \mathrm{Hom}(E|_{U_{ij}}, E|_{U_{ij}}) \otimes_{\mathbb{C}} I$$

と書いて  $\eta'_{ij} \mapsto \eta'_{ij} + \vartheta'_{ij}$  という作用を考えると、 $\mathrm{Ext}_X^1(E, E) \otimes_{\mathbb{C}} I$  が上述の拡張の集合に自由かつ推移的に作用することがわかる。□

補題 5.25 と命題 5.27 は（大雑把にいうと） $M_{\omega}(v)$  が局所的に  $\mathrm{Ext}_X^1(E, E)$  の中の  $\mathrm{Ext}_X^2(E, E)$  個の方程式系の零点集合とみなせることを意味する。特に  $\mathrm{Ext}_X^2(E, E) = 0$  ならば  $M_{\omega}(v)$  は  $[E]$  で非特異である。よって、次を得る。

**系 5.28** 任意の  $[E] \in M_{\omega}(v)$  に対して  $\mathrm{Ext}_X^2(E, E) = 0$  ならば、 $M_{\omega}(v)$  は滑らかな射影的代数多様体である。

**例 5.29**  $C$  を射影的代数曲線とし、互いに素な  $(r, d)$  に対して定まるモジュライ空間  $M^s(r, d)$  を考える。このとき、 $C$  上の任意の連接層  $E$  に対して  $\mathrm{Ext}_X^2(E, E) = 0$  となるため、系 5.28 により  $M^s(r, d)$  は滑らかな射影的代数多様体となる。

一方、次の例で見るように系 5.28 の逆は成立しない。

**例 5.30**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし、 $v \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  を

$$v = (1, 0, 0, \dots, 0) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$$

とおく。このとき、 $M_{\omega}(v)$  の閉点に対応する安定層は  $X$  上の階数 1 の局所自由層  $L$  で  $c_1(L) = 0$  を満たすものになる。もし  $H^2(\mathcal{O}_X) \neq 0$  ならば  $\mathrm{Ext}_X^2(L, L) \neq 0$  であるが、一方でこの場合  $M_{\omega}(v)$  は滑らかな射影的代数多様体となる。

実際、層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 1$$

に付随する長完全系列

$$\cdots \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

を考え、 $\text{Pic}^0(X) := \text{Ker}(c_1)$  とおく。すると、 $M_\omega(v) = \text{Pic}^0(X)$  となる。上の完全系列から

$$\text{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$$

となり、これは複素トーラスの構造を持つことがわかる。

例 5.30 における  $\text{Pic}^0(X)$  が滑らかであることを用いて、 $\text{rank}(E) > 0$  である連接層  $E$  の障害理論をもう少し精密化できる。仮に  $E$  が局所自由層であるなら、トレース写像  $\text{End}(E) \rightarrow \mathcal{O}_X$  によって写像

$$\text{tr}: \text{Ext}_X^i(E, E) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_X)$$

を得る。同様の写像は振れのない層に対しても、 $E$  を局所自由層からなる有界複体と擬同型で置き換えることで定義できる。 $\text{Ext}_X^i(E, E)_0$  を上のトレース写像の核とする。

**命題 5.31** 命題 5.27 の状況で、 $\text{rank}(E) > 0$  とする。このとき、 $o(\mathcal{E}) \in \text{Ext}_X^2(E, E)_0 \otimes_{\mathbb{C}} I$  となる。よって任意の  $[E] \in M_\omega(v)$  に対して  $\text{Ext}_X^2(E, E)_0 = 0$  ならば  $M_\omega(v)$  は滑らかな射影的代数多様体である。

**証明** 簡単のため、 $E$  を局所自由層とする。一般の場合は [Art88] を参照されたい。命題 5.27 における障害類  $o(\mathcal{E})$  をトレース写像で送ると

$$\text{tr}(o(\mathcal{E})) = o(\det \mathcal{E}) \in H^2(\mathcal{O}_X) \otimes I$$

となることが (5.18) の行列式をとることで示される。例 5.30 により階数 1 の局所自由層  $\det \mathcal{E}$  の変形には障害がないため  $o(\det \mathcal{E}) = 0$  となる。よって命題が従う。□

$\dim X \geq 2$  の場合にはモジュライ空間  $M_\omega(v)$  は特異点を持ち得るが、命題 5.31 を用いれば次のような場合に  $M_\omega(v)$  は滑らかになることがわかる。

**例 5.32**  $S$  を  $H^1(\mathcal{O}_S) = 0$  を満たす滑らかな射影的代数曲面とし、

$$v = (1, 0, -n) \in H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus H^4(S, \mathbb{Z})$$

ととる。また、 $\mathrm{Hilb}^n(S)$  を 0 次元部分スキーム  $Z \subset S$  でその構造層  $\mathcal{O}_Z$  の長さが  $n$  となるものの集合とする。このとき、 $\mathrm{Hilb}^n(S)$  には自然なスキームの構造があり（点の Hilbert スキーム (Hilbert scheme of points) と呼ばれる（6.2 節参照））。さらに射

$$\mathrm{Hilb}^n(S) \rightarrow M_\omega(v) \quad Z \mapsto I_Z$$

が同型になる。実際、任意の  $[E] \in M_\omega(v)$  に対して完全系列

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{\vee\vee} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

を考える。すると  $E^{\vee\vee}$  は階数が 1 の反射層であるため直線束になり、 $v$  の条件から  $c_1(E^{\vee\vee}) = 0$  となる。仮定  $H^1(\mathcal{O}_S) = 0$  を用いると、 $E^{\vee\vee} = \mathcal{O}_S$  となる。さらに  $Q$  は 0 次元の層であるため、 $E$  は 0 次元部分スキーム  $Z \subset S$  のイデアル層  $I_Z$  と同型となり、上の射は全射となる。また単射性は明らかである。

Serre 双対性を用いると  $\mathrm{Ext}_X^2(I_Z, I_Z)_0 = 0$  となるため、 $\mathrm{Hilb}^n(S)$  は滑らかな  $2n$  次元の射影的代数多様体となる。ただし、一般に  $\dim X \geq 3$  なら  $\mathrm{Hilb}^n(X)$  には特異点が生じ得る。

## 5.6 普遍層による導来同値

$X$  を滑らかな射影的代数多様体(特に連結である)とし、 $M = M_\omega(v)$  を定理 5.21 で与えられる安定層のモジュライ空間とする。すると、 $X \times M$  上に普遍層  $\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times M)$  が存在する。各  $y \in M$  に対して、 $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}|_{X \times y}$  は  $y$  に対応する  $X$  上の接続層を与えることに注意する。この節の目的は、次の Bondal–Orlov および Bridgeland による定理を証明することである。

**定理 5.33 ([BO, Bri99])** 上の状況下で、次の 2 条件を仮定する。

- $M$  は  $\dim M = \dim X$  となる滑らかな射影的代数多様体である。
- 任意の異なる 2 点  $y_1, y_2 \in M$  に対して、 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0$  である。

このとき、Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{M \rightarrow X}^\mathcal{E} : D^b(M) \rightarrow D^b(X)$$

は充満忠実である。さらに  $\mathcal{E}_y \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}_y$  が任意の  $y \in M$  で成立するなら  $\Phi_{M \rightarrow X}^\mathcal{E}$  は三角圏としての圏同値を与える。

証明をいくつかのステップに分ける。記号を簡単にするために、 $\Phi = \Phi_{M \rightarrow X}^{\mathcal{E}}$  とおき、 $\Phi^R$ ,  $\Phi^L$  を問題 3.1 で与えられる  $\Phi$  の右随伴関手、左随伴関手とする。  
(3.2)で見たように自然変換

$$\eta: \Phi^L \circ \Phi \rightarrow \text{id}, \quad \epsilon: \text{id} \rightarrow \Phi^R \circ \Phi$$

が存在する。また、 $\mathcal{E}_y = \Phi(\mathcal{O}_y)$  であることにも注意する。以下のステップ 1, ステップ 2 の証明は定理 3.15 の証明とよく似ていることに注意されたい。

**ステップ 1** 任意の  $y \in M$  に対して自然な射

$$\eta(\mathcal{O}_y): \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y) \rightarrow \mathcal{O}_y$$

は同型である。

**証明** 任意の  $z \in M$  に対して

$$\text{Hom}_M^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_z) \cong \text{Hom}_X^i(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$$

となり、これは仮定より  $z \neq y$  あるいは  $z = y$ ,  $i \notin [0, \dim M]$  で 0 になる。よって補題 5.34 により  $\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y)$  は  $y$  に台を持つ 0 次元の連接層となる。射  $\eta(\mathcal{O}_y)$  は 0 ではないため、これは連接層の全射であり、完全系列

$$0 \rightarrow G \rightarrow \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y) \rightarrow \mathcal{O}_y \rightarrow 0$$

を得る。よって主張を得るために  $G = 0$ 、特に  $\text{Hom}(G, \mathcal{O}_y) = 0$  を見ればよく、そのためには上の完全系列に  $\text{Hom}(-, \mathcal{O}_y)$  を施すことによって、写像

$$\text{Ext}_M^1(\mathcal{O}_y, \mathcal{O}_y) \rightarrow \text{Ext}_M^1(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y), \mathcal{O}_y) \tag{5.19}$$

が単射であることを示せば十分である。実際、(5.19) の左辺は接空間  $T_y M$  と同一視でき、右辺は  $\text{Ext}_X^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_y)$  と同型である。よって (5.19) は  $T_y M \rightarrow \text{Ext}_X^1(\mathcal{E}_y, \mathcal{E}_y)$  と同一視できるが、これは補題 5.25 における同型写像と等しいことが容易に確認できる。よって (5.19) は同型となり、 $G = 0$  が従う。これにより、射  $\eta(\mathcal{O}_y)$  が同型となる。□

**ステップ 2** 関手  $\Phi$  は充満忠実である。

**証明** 任意の  $F \in D^b(X)$  に対して、自然な射

$$\epsilon(F): F \rightarrow \Phi^R \circ \Phi(F)$$

が同型となることを示せばよい。完全三角形  $G' \rightarrow F \rightarrow \Phi^R \circ \Phi(F)$  をとり、 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, -)$  を施すことで完全三角形

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, G') \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, F) \xrightarrow{\epsilon(F)^\circ} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, \Phi^R \circ \Phi(F)) \quad (5.20)$$

となる。 $\Phi^L, \Phi^R$  の随伴性により

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, \Phi^R \circ \Phi(F)) &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\Phi(\mathcal{O}_y), \Phi(F)) \\ &\cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_y), F) \end{aligned}$$

であり、よってステップ1より(5.20)における射  $\epsilon(F)^\circ$  は同型となる。したがって  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_y, G') = 0$  がすべての  $y \in M$  で成り立つ。例3.11(i)より、 $G' = 0$  となり、したがって射  $\epsilon(F)$  が同型となる。□

**ステップ3**  $\mathcal{E}_y \otimes \omega_X \cong \mathcal{E}_y$  がすべての  $y \in M$  について成り立つなら、 $\Phi$  は圏同値である。

### 証明 同型

$$\Phi(\omega_M \otimes \mathcal{O}_y[\dim M]) \cong \Phi(\mathcal{O}_y[\dim M]) \cong \mathcal{E}_y[\dim M] \cong \mathcal{E}_y \otimes \omega_X[\dim X]$$

により定理3.18を適用すれば、 $\Phi$  が同値であることがわかる。□

上の証明において、次の技術的な補題を用いた。

**補題5.34**  $X$  を滑らかな  $d$  次元の射影的代数多様体とし、 $E \in D^b(X)$  とする。 $\mathrm{Hom}^i(E, \mathcal{O}_x) = 0$  が任意の  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x \neq x_0$  で成立し、さらに  $i \notin [0, d]$ ,  $x = x_0$  でも成立するなら  $E$  は  $x_0$  に台を持つ 0 次元の連接層である。

**証明** 例3.11(i)の議論によって  $E|_{X \setminus \{x_0\}} = 0$  となり、したがってすべてのコホモロジー層  $\mathcal{H}^i(E)$  は  $x_0$  に台を持つ 0 次元層である。スペクトル系列(3.5)を  $x = x_0$  について用いる。すると  $\mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0$  ならば  $E_2^{0, q} \neq 0$  であり、また Serre 双対性定理により

$$\mathrm{Hom}^d(\mathcal{H}^{-q}(E), \mathcal{O}_{x_0}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{H}^{-q}(E))^\vee \neq 0$$

なので  $E_2^{d, q} \neq 0$  となる。そこで、 $q_1$  を  $\mathcal{H}^{-q}(E) \neq 0$  となる最小の  $q$ ,  $q_2$  を最大の  $q$  とする。スペクトル系列(3.5)は  $E_2^{0, q_1}$  項および  $E_2^{d, q_2}$  項で退化するため、 $q_1 \geq 0$ ,  $d \geq q_2 + d$  を得る。 $q_1 \leq q_2$  と合わせて  $q_1 = q_2 = 0$  を得る。よって  $E$  は  $x_0$  に台を持つ 0 次元の連接層である。□

定理 5.33 の応用として、定理 2.54 の証明を与えよう。 $A$  を Abel 多様体とする、例 5.30 の記号で  $\widehat{A} = \text{Pic}^0(A)$  となる。 $\mathcal{P} \in \text{Pic}(A \times \widehat{A})$  を普遍直線束とする。定理 5.33 と  $\omega_A$  が自明な直線束であることから、同型でない直線束  $L_1, L_2 \in \text{Pic}^0(A)$  に対して、 $\mathbf{R}\text{Hom}(L_1, L_2) = 0$  となることを示せばよい。これはすべての非自明な直線束  $L \in \text{Pic}^0(A) \setminus \{\mathcal{O}_X\}$  と  $i \in \mathbb{Z}$  に対して  $H^i(A, L) = 0$  が成り立つ条件と同値であるが、これは Abel 多様体に関するよく知られた性質である（例えば [Huy06, Lemma 9.9], [Pol03, Theorem 8.8]）。よって定理 2.54 が証明された。

定理 5.33 の証明を少し一般化すれば、次のより一般的な結果が得られるので、ここで述べておこう。

**定理 5.35 ([BO, Bri99])**  $X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体とし、Fourier–Mukai 関手

$$\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$$

を考える。このとき次が成り立つ。

(i)  $\Phi$  が充満忠実であることと、任意の点  $x_1, x_2 \in X$  に対し、

$$\text{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) = \begin{cases} \mathbb{C} & (x_1 = x_2 \text{ かつ } i = 0) \\ 0 & (x_1 \neq x_2 \text{ または } i \notin [0, \dim X]) \end{cases} \quad (5.21)$$

が成り立つことは同値である。

(ii)  $\Phi$  が充満忠実であるとする。このとき  $\Phi$  が同値であることと、任意の点  $x \in X$  に対し

$$\Phi(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y \cong \Phi(\mathcal{O}_x) \quad (5.22)$$

が成り立つことが同値である。

**証明** (i)  $\Phi$  が充満忠実であるならば、任意の  $i$  と任意の  $x_1, x_2 \in X$  に対して

$$\text{Hom}^i(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) \cong \text{Hom}^i(\Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi(\mathcal{O}_{x_2})) \quad (5.23)$$

が成り立つから、式 (5.21) が成り立つのは明らかである。

逆向きに関しては、Fourier–Mukai 関手  $\Phi$  の核が  $Y$  上平坦な層のときは、定理 5.33 の証明とまったく同様に示せる。 $\Phi$  の核が  $Y$  上平坦な層でないときは、(5.19) の単射性が直ちにはわからないが、同様に成り立つことがわかる（詳細は

[Bri99] を参照されたい). 他の部分の証明は  $\Phi$  の核が  $Y$  上平坦な層でないときも定理 5.33 の証明とまったく同様である.

(ii)  $\Phi$  が同値であるとき, 4.1 節で見たように  $\dim X = \dim Y$  が成り立つ. Serre 関手と  $\Phi$  が可換 (問題 3.7(ii)) であることから式 (5.22) が成り立つことがわかる.

逆向きに関しては,  $\dim X = \dim Y$  がわかっていれば, 定理 3.18 を適用すれば,  $\Phi$  が同値であることがわかるが, 今はそれを仮定していない. しかし, 定理 3.18 の証明中の同型と同様の変形により  $E \in D^b(X), x \in X, i \in \mathbb{Z}$  に対し,

$$\mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}_x, \Phi^L(E)) \cong \mathrm{Hom}^{i+\dim Y - \dim X}(\mathcal{O}_x, \Phi^R(E))$$

が成り立つ.  $\{\mathcal{O}_x \mid x \in X\}$  はスパニング類だったので, 特に  $\Phi^R(E) \cong 0$  ならば  $\Phi^L(E) \cong 0$  が成り立ち, よって命題 3.17 から結論を得る.  $\square$

定理 5.35(i) の証明中で, 写像 (5.19) の単射性を示すときに, [Bri99] では考えている代数多様体が標数が 0 の体上で定義されていることを使っている. 一方, 次で見るように, 正標数の体上だと定理 5.35(i) には反例ができる.

**問題 5.36**  $X$  を標数が素数  $p$  であるような代数閉体上定義された滑らかな射影的代数多様体とする.

- (i)  $F: X \rightarrow X^{(p)}$  を相対 Frobenius 射とし,  $\Phi := F_*$  とすると, これは Fourier–Mukai 関手であり, また式 (5.21) を満たすことを示せ.
- (ii)  $F_*$  は充満忠実でないことを示せ.

## 5.7 K3 曲面上の安定層のモジュライ空間

滑らかな射影的代数曲面  $S$  は, 単連結かつ  $K_S = 0$  であるときに **K3 曲面** (K3 surface) であると呼ばれる. 例えば,  $\mathbb{P}^3$  内の滑らかな 4 次曲面は K3 曲面の例を与える. K3 曲面は様々な美しい幾何的性質を持ち, Torelli の定理に代表されるように格子の理論とも密接な関係がある. また, K3 曲面は 2 次元版の既約複素シンプレクティック多様体 (次に述べる) である.

**定義 5.37** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  は, 単連結であり, 至る所非退化な正則 2 形式  $\sigma$  が存在して  $H^0(X, \Omega_X^2) = \mathbb{C} \cdot \sigma$  となるとき, 既約複素シンプレクティック多様体 (irreducible holomorphic symplectic manifold) と呼ぶ. また,  $\sigma$  を正則シンプレクティック形式 (holomorphic symplectic form) と呼ぶ.

**注意 5.38** 多様体上の（正則性を課さない）シンプレクティック形式とは、至る所非退化な閉 2 形式のことである。射影的代数多様体上の正則 2 形式は常に閉となるため、定義 5.37において  $\sigma$  が閉であるという条件は課していない。

ここでは K3 曲面上の安定層のモジュライ空間が既約複素シンプレクティック多様体になること、さらにそれに付随する Fourier–Mukai 変換について議論する。

K3 曲面  $S$  に対して、コホモロジー環

$$\tilde{H}(S, \mathbb{Z}) := H^{2*}(S, \mathbb{Z}) = H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus H^4(S, \mathbb{Z}) \quad (5.24)$$

を考える。以降、 $H^0(S, \mathbb{Z})$  と  $H^4(S, \mathbb{Z})$  をそれぞれ点のクラスと向き付けを  $1 \in \mathbb{Z}$  に対応させることにより、 $\mathbb{Z}$  と同一視する。 $\tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  の元を  $(r, l, s)$  と書き、 $\tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  上の Mukai 内積 (Mukai inner product) を

$$((r, l, s), (r', l', s')) := l \cdot l' - rs' - r's \quad (5.25)$$

と定義する。格子  $(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}), (-, -))$  は Mukai 格子 (Mukai lattice) と呼ばれ、その符号数  $(4, 20)$  となる。

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{2,0} &:= H^{2,0}(S), \quad \tilde{H}^{0,2} := H^{0,2}(S), \\ \tilde{H}^{1,1} &:= H^0(S, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^4(S, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

と定めれば Mukai 格子には、重み 2 の Hodge 構造が入る。<sup>3</sup>

対象  $E \in D^b(S)$  に対して  $v(E)$  を式 (4.3) で定義した  $E$  の Mukai ベクトルとする、式 (4.2) から

$$\chi(E, F) = -(v(E), v(F)) \quad (5.26)$$

が成立する。 $\omega$  を  $S$  上の豊富因子とし、 $\omega$ -原始的な元  $v \in H^{2*}(S, \mathbb{Z})$  をとる。 $M'_\omega(v)$  を  $v = v(E)$  であるような  $\omega$ -安定層  $E$  のモジュライ空間とする。定理 5.21 におけるモジュライ空間  $M_\omega(v)$  との関係は

$$M'_\omega(v) = M_\omega(v \sqrt{\text{td}_S}^{-1})$$

である。

**定理 5.39** モジュライ空間  $M'_\omega(v)$  は  $(v^2 + 2)$  次元の既約複素シンプレクティック

<sup>3</sup> Mukai 格子については元論文 [Muk87]、もしくは K3 曲面に関する秀逸な解説本 [Huy16] をご覧いただきたい。

ク多様体となる。

**証明** ここでは証明の方針のみ述べる。詳細については [HL10, Section 6], [Yos01b, Section 7, 8] を参照されたい。記号を簡単にするため,  $M = M'_\omega(v)$  とおく。安定層  $[E] \in M$  に対して, Serre 双対性定理により  $\mathrm{Ext}^2(E, E) \cong \mathbb{C}$  である。よって  $\mathrm{Ext}^2(E, E)_0 = 0$  となり, 定理 5.31 より  $M$  は滑らかである。そこでその次元は補題 5.25 から  $\mathrm{Ext}^1(E, E)$  の次元と一致し,  $\mathrm{Hom}(E, E) = \mathrm{Ext}^2(E, E) = \mathbb{C}$  と式 (5.26) を使って,

$$\begin{aligned}\dim M &= \dim \mathrm{Ext}^1(E, E) \\ &= -\chi(E, E) + 2 = v^2 + 2\end{aligned}$$

となる。また、次の双線形写像を得る：

$$T_{[E]}M \times T_{[E]}M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^1(E, E) \times \mathrm{Ext}^1(E, E) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Ext}^2(E, E) \cong \mathbb{C}.$$

局所的な計算により上の双線形写像は非退化な反対称形式を定める。よって、 $M$  上に正則シンプレクティック形式が存在することになる。そこで、 $M$  が単連結であることと  $H^0(M, \Omega_M^2) = \mathbb{C}$  であることを示せばよい。まず  $v = (1, 0, 1-n)$  の場合を考えると、例 5.32 により

$$M'_\omega(1, 0, 1-n) = \mathrm{Hilb}^n(S)$$

である。 $\mathrm{Hilb}^n(S)$  は K3 曲面  $S$  の  $n$  次対称積  $S^n(S)$  の特異点解消 (Hilbert–Chow 射と呼ばれる。6.2 節参照) として得られたものであり、この事実を用いると  $\mathrm{Hilb}^n(S)$  が既約複素シンプレクティック多様体であることがわかる。より一般の  $v$  の場合、 $v = (r, l, s)$  において  $l$  が  $H^2(S, \mathbb{Z})$  において原始的 (つまり  $l = ml_0$ ,  $l_0 \in H^2(S, \mathbb{Z})$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{>1}$  と書けない) である場合のみ考察する。まず  $S$  を変形させると対応するモジュライ空間  $M'_\omega(v)$  も滑らかに変形することに注意する。求める性質は変形不变であるため、 $S$  を変形させることで  $S$  が楕円ファイバー空間の構造を持つとしてよい。すると  $l$  が原始的であることを用いると、 $n = v^2/2 + 1$  として  $M'_\omega(v)$  は  $\mathrm{Hilb}^n(S)$  と双有理同値になることが示される ([HL10, Theorem 11.3.2] を参照)。さらにこれらの間の双有理射は余次元 1 で同型となるため、 $M'_\omega(v)$  が既約複素シンプレクティック多様体になることがわかる。□

**系 5.40**  $v^2 = 0$  ならば  $M'_\omega(v)$  は K3 曲面である。

前節の結果と合わせて、次を得る。

**定理 5.41**  $S$  を K3 曲面とし、 $v \in \tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  を  $\omega$ -原始的な元とする。 $v^2 = 0$  ならば  $M = M'_\omega(v)$ ,  $\mathcal{E} \in \text{Coh}(M \times S)$  を普遍層として、Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{M \rightarrow S}^{\mathcal{E}}: D^b(M) \rightarrow D^b(S)$$

は圏同値を与える。

**証明** 定理 5.33 により、任意の異なる  $y_1, y_2 \in M$  に対して  $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0$  を示せばよい。 $\mathcal{E}_y$  は安定層であり、 $\mathcal{E}_{y_1}$  と  $\mathcal{E}_{y_2}$  は同型ではないため、

$$\text{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = \text{Hom}(\mathcal{E}_{y_2}, \mathcal{E}_{y_1}) = 0$$

となる。Serre 双対性定理により  $\text{Ext}^2(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0$  を得る。式 (5.26) を使うと

$$\dim \text{Ext}^1(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = -\chi(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = v^2 = 0$$

を得る。よって  $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}_{y_1}, \mathcal{E}_{y_2}) = 0$  となる。  $\square$

このようにして、K3 曲面  $S$  と、 $S$  上の安定層のモジュライ空間として得られる K3 曲面  $M$  が導来同値となることがわかった。一般に  $M$  は  $S$  と同型ではなく、よって定理 5.41 は非自明な導来同値の例を与える。実はその逆も成立し、さらに Torelli の定理の導来版も成立する。K3 曲面の Torelli の定理は、以下のように述べられる（詳細は [BHPdV04] を参照）。

**定理 5.42 (K3 曲面の Torelli の定理)**  $S, M$  を K3 曲面とする。このとき、 $S \cong M$  であることと、Hodge 構造および内積を保つ同型  $H^2(M, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$  が存在することは同値である。さらに Hodge 構造、内積を保つ同型  $\psi: H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(S, \mathbb{Z})$  が豊富な因子類を豊富な因子類に移すならば、同型写像  $f: S \xrightarrow{\cong} M$  が一意的に存在して  $\psi = f^*$  となる。

導来版の Torelli の定理は、Mukai 格子  $\tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  上の Hodge 構造を用いて次のように述べることができる。

**定理 5.43 (K3 曲面の導来 Torelli の定理 [Orl97])**  $S, M$  を K3 曲面とする。このとき、次の条件は同値である。

- $D^b(M)$  と  $D^b(S)$  は三角圏として同値である。
- $v^2 = 0$  を満たす  $v \in \tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  と  $S$  上の豊富因子  $\omega$  が存在して  $M \cong M_\omega(v)$

となる.

- Hodge 構造および Mukai 内積を保つ同型  $\tilde{H}(M, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  が存在する.

## 5.8 相対的安定層のモジュライ空間

$X$  を滑らかな射影的代数多様体,  $S$  を射影的代数多様体とし, 射  $\pi: X \rightarrow S$  が存在するとする.  $X$  上の豊富因子  $\omega$  と数値類  $v \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  に対して, 相対的なモジュライ関手

$$\mathcal{M}_\omega^S(v): (\mathsf{Sch}/S) \rightarrow \mathsf{Sets} \quad (5.27)$$

を  $S$  上のスキーム  $T$  に対して次の集合の同値類を対応させることで定める:

$$\left\{ \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X \times_S T) : \begin{array}{l} \mathcal{F} \text{ は } T \text{ 上平坦, 任意の } t \in T \\ \text{に対し } \mathcal{F}_t := \mathcal{F}|_{X \times t} \text{ は } \omega\text{-安定, } \mathrm{ch}(\mathcal{F}_t) = v \end{array} \right\}.$$

定理 5.21 と同様に  $v$  が  $\omega$ -原始的なら  $S$  上射影的なスキーム

$$\hat{\pi}: M_\omega^S(v) \rightarrow S$$

が存在して関手 (5.27) が  $\mathrm{Hom}(-, M_\omega^S(v))$  と同型になる.

**問題 5.44** 閉点  $s \in S$  における  $M_\omega^S(v) \rightarrow S$  のスキーム論的ファイバーは  $X_s$  上の安定層のモジュライ空間  $M_{\omega_s}(v_s)$  と同型となることを示せ.

これまでと同様に普遍層

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times_S M_\omega^S(v))$$

が存在して, Fourier–Mukai 関手を構成することができる.

定理 5.41 の相対版について述べよう. まず, Calabi–Yau ファイバー空間を定義する.

**定義 5.45**  $\pi: X \rightarrow S$  が  $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$  を満たし, また  $\pi$  の一般ファイバーが自明な標準束を持ち, さらに  $\pi$  で潰れる任意の曲線  $C \subset X$  に対して  $K_X \cdot C = 0$  が成立するとき,  $\pi$  を **Calabi–Yau ファイバー空間** (Calabi–Yau fiber space) と呼ぶ.

**例 5.46** (i)  $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  を  $(3, 3)$ -型の滑らかな因子とする. すると 2 つの射影  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  は, 一般ファイバーが橢円曲線となるような Calabi–Yau ファイバー空

間となる。

(ii)  $X \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$  を  $(4, 2)$ -型の滑らかな因子とする。すると、第 2 成分への射影  $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  は Calabi–Yau ファイバー空間となる。 $\pi$  の一般ファイバーは K3 曲面である。

次の定理は Bridgeland–Maciocia によるものである。

**定理 5.47 ([BM02])**  $\pi: X \rightarrow S$  を一般ファイバーの次元が 2 以下の Calabi–Yau ファイバー空間とする。 $M$  を  $\dim M = \dim X$  となる  $M_\omega^S(v)$  の既約成分とし、さらに  $\hat{\pi}: M \rightarrow S$  のファイバーの既約成分の次元が定数であると仮定する。このとき、 $M$  は滑らかであり、 $\hat{\pi}: M \rightarrow S$  も Calabi–Yau ファイバー空間となり、さらに Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{M \rightarrow X}^\mathcal{E}: D^b(M) \rightarrow D^b(X)$$

は三角圏の同値を与える。

上の定理を  $S = \text{Spec } \mathbb{C}$ ,  $\dim X = 2$  に当てはめると定理 5.41 を復元することに注意する。

## 5.9 Pfaffian–Grassmannian 導來同値

この節では定理 5.33 を応用して得られる、双有理同値ではない 3 次元 Calabi–Yau 多様体の間の導來同値を与える。以下で紹介する導來同値の存在は物理的側面から Rodland [Rod00] によって予想され、Borisov–Căldăraru [BC09] によって証明が与えられた。後に例 9.27において、Kuznetsov によるホモロジカル射影双対論を用いたアプローチについても紹介する。また本節では、Calabi–Yau 多様体とは、滑らかな射影的代数多様体  $X$  であって  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  かつ  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  を満たすものとする。

$W$  を  $m$  次元の複素ベクトル空間とし、

$$\mathbb{G} := \mathbb{G}(W, 2)$$

を  $W$  の 2 次元商ベクトル空間たちからなる Grassmann 多様体とする。 $\mathbb{G}$  は  $2(m - 2)$  次元の滑らかな射影的代数多様体である。実際、Plücker 埋め込み

$$\mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{P} := \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 W \right) \quad (W \twoheadrightarrow T) \mapsto (\bigwedge^2 W \twoheadrightarrow \bigwedge^2 T)$$

によって  $\mathbb{G}$  は射影空間に埋め込める。一方、 $\mathbb{P}^*$  を  $\mathbb{P}$  の双対射影空間とする：

$$\mathbb{P}^* := \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 W^\vee \right).$$

そこで  $e_1, \dots, e_m$  を  $W^\vee$  の基底とすると、 $y \in \bigwedge^2 W$  は  $m \times m$  行列

$$A_y = (y(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m}$$

で記述できる。 $A_y$  は反対称行列になるので、 $\text{rank } A_y$  は偶数であり、 $y \neq 0$  であれば

$$2 \leq \text{rank } A_y \leq 2\lfloor m/2 \rfloor$$

である。（実数  $a$  に対し、 $\lfloor a \rfloor$  は  $a$  を超えない最大の整数を表す。）また十分一般的  $y$  に対しては、 $\text{rank } A_y = 2\lfloor m/2 \rfloor$  となる。そこで  $2 \leq 2r \leq 2\lfloor m/2 \rfloor$  に対し、一般化された **Pfaffian** 多様体 (generalized Pfaffian variety) を

$$\text{Pf}(2r, W) := \{y \in \mathbb{P}^* : \text{rank } A_y \leq 2r\}$$

と定める。定義から

$$\text{Pf}(2\lfloor m/2 \rfloor, W) = \mathbb{P}^*$$

であり、また

$$\text{Pf}(2, W) = \mathbb{G}(W^\vee, m - 2)$$

が成り立つので、これらは滑らかである。一方  $2 < 2r < 2\lfloor m/2 \rfloor$  に対しては  $\text{Pf}(2r, W)$  の特異点集合は  $\text{Pf}(2r - 2, W)$  と一致し、特に特異点を持つことがわかる。我々が最も注目するのは  $2r = 2\lfloor m/2 \rfloor - 2$  のときであり、このとき

$$\text{Pf}(W) := \text{Pf}(2\lfloor m/2 \rfloor - 2, W)$$

とおく。 $\text{Pf}(W)$  は特に **Pfaffian** 多様体 (Pfaffian variety) と呼ばれ、 $m$  が偶数のときは次数  $m/2$  の超曲面となり、 $m$  が奇数のときは余次元 3 の射影的代数多様体となる。実際、 $m$  が偶数のときは  $\text{Pf}(W)$  は  $m$  次反対行列  $A_y$  の Pfaffian 多項

式<sup>4</sup>で定義され、 $m$  が奇数のときは  $(m-1) \times (m-1)$  の対角小行列 ( $i = 1, \dots, m$  に対し  $i$  行  $i$  列を除いた  $m-1$  次正方行列) の Pfaffian 多項式たちの零点集合として得られる。

以下では  $m = 7$  のときを考えよう。 $\text{Pf}(W)$  の特異点集合  $\text{Pf}(2, W)$  は 10 次元であり、特に  $\text{Pf}(W)$  におけるその余次元は 7 となる。以降、 $\text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  を  $\text{Pf}(W)$  の滑らかな部分、つまり  $\text{Pf}(W) \setminus \text{Pf}(2, W)$  のこととする。 $y \in \text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  に対して、 $W^\vee$  の部分空間  $K_y$  を

$$K_y := \text{Ker}(y: W^\vee \rightarrow W)$$

とおく。 $\text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  の定義から、 $K_y$  は  $W^\vee$  の 3 次元部分空間である。部分集合  $\mathbf{S}_y \subset \mathbb{G} = \mathbb{G}(W, 2)$  を

$$\mathbf{S}_y := \{(W \twoheadrightarrow T) \in \mathbb{G} : T^\vee \cap K_y \neq 0\}$$

と定めると  $\mathbf{S}_y$  は  $\mathbb{G}$  の 7 次元部分閉集合であることがわかる。以降、 $\mathbf{S}_y$  に被約なスキームの構造を入れることにしよう。各  $y \in \text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  に対して定まるスキーム  $\mathbf{S}_y$  は  $\mathbb{G} \times \text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  における  $\text{Pf}^{\text{sm}}(W)$  上平坦な閉部分スキーム

$$\mathbf{S} \subset \mathbb{G} \times \text{Pf}^{\text{sm}}(W)$$

を  $\mathbb{G} \times \{y\}$  に制限することで得られる。

ここで  $\bigwedge^2 W$  の 14 次元の商ベクトル空間

$$\bigwedge^2 W \twoheadrightarrow L$$

を十分一般にとり

$$X := \overbrace{\mathbb{G}}^{10 \text{ 次元}} \cap \overbrace{\mathbb{P}(L)}^{13 \text{ 次元}} (\subset \overbrace{\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 W\right)}^{20 \text{ 次元}})$$

と定め、また

$$L^\perp := \text{Coker}(L^\vee \hookrightarrow \bigwedge^2 W^\vee)$$

に対し

<sup>4</sup>  $2n$  次反対称行列  $B$  に対し、その上三角成分を変数に持つ齊次  $n$  次多項式  $\text{Pf}(B)$  が存在し、 $\det B = (\text{Pf}(B))^2$  が成り立つ。 $\text{Pf}(B)$  を反対称行列  $B$  の Pfaffian 多項式と呼んだ。

$$Y := \overbrace{\mathrm{Pf}(W)}^{17\text{ 次元}} \cap \overbrace{\mathbb{P}(L^\perp)}^{6\text{ 次元}} (\subset \mathbb{P}^* = \mathbb{P}\left(\bigwedge^2 W^\vee\right))$$

と定める。

**問題 5.48**  $X$  は 3 次元 Calabi–Yau 多様体となることを示せ。 (ヒント :  $0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow W \otimes \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$  を普遍完全系列とする,  $T_G = \mathcal{H}om(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$  かつ  $\det(\mathcal{Q}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|_G$  であることを用いる。)

さらに,  $Y$  も 3 次元 Calabi–Yau 多様体となることがわかる ([Rod00] を参照)。  
ここで

$$\mathbf{C} := \mathbf{S} \cap (X \times Y)$$

とおくとこれは  $Y$  上平坦な  $X$  上の曲線の族となる。つまり, 任意の  $y \in Y$  に対して  $\mathbf{C}_y = \mathbf{C} \cap (X \times \{y\})$  は  $X$  内の 1 次元部分スキームである。そこで  $\omega$  を  $X$  における超平面クラスとし,  $v$  を  $I_{\mathbf{C}_y}$  の Chern 標数とすると, 次の射

$$Y \rightarrow M_\omega(v) \quad y \mapsto I_{\mathbf{C}_y}$$

を得る。上の射によって  $Y$  は  $M_\omega(v)$  の連結成分の 1 つをなすことが証明される。  
そして, 普遍層は  $\mathbf{C}$  の定義イデアル層

$$I_{\mathbf{C}} \in \mathrm{Coh}(X \times Y)$$

で与えられる。

**定理 5.49** ([BC09]) Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{Y \rightarrow X}^{I_{\mathbf{C}}} : D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$$

は三角圏の同値を与える。

**証明** 定理 5.33 と Serre 双対性定理を用いて, 任意の異なる  $y_1, y_2 \in Y$  に対して

$$\mathrm{Ext}^1(I_{\mathbf{C}_{y_1}}, I_{\mathbf{C}_{y_2}}) = 0$$

を示せばよい。これは具体的計算によって示すことができる ([BC09, Proposition 5.3] 参照)。  $\square$

**注意 5.50** もし  $X$  と  $Y$  が双有理同値なら、これらが極小モデルであることから  $X$  と  $Y$  は余次元 1 で同型になるはずであるが、 $\rho(X) = \rho(Y) = 1$  であるから  $X$  上の豊富因子の  $Y$  上への strict transform をとると豊富になる。よって  $X \cong Y$  が従う。一方、 $\mathrm{Pic}(X)$ ,  $\mathrm{Pic}(Y)$  を生成する豊富因子たちをそれぞれ  $H_X$ ,  $H_Y$  とする

$$H_X^3 = 42, \quad H_Y^3 = 14$$

となる。特に  $X$  と  $Y$  は同型ではなく、したがってこれらは双有理同値ではない。さらにこれらの Grothendieck 環が同型でないことも従う。

## 5.10 捺れ層と Fourier–Mukai 変換

定義 5.19 の意味でのモジュライ空間と 粗モジュライ空間との間の違いは、定理 5.23 で得られた  $\tau$  が 同型になるかどうかの違いである。これは、普遍層 (5.12) が 存在するか否かの違いであると言い換えることができる。一般に粗モジュライ空間を考えると普遍層は存在しないが、捺れ層の概念を導入することで普遍層の類似物を構成でき、これまでと同様の議論を展開できる。

捺れ層について述べるために、まずは Brauer 群の定義を与える。この節に書かれている事実の証明の詳細は [Mil80, Chapter IV], [Căl00] を参照されたい。

**定義 5.51** 代数多様体  $X$  のコホモロジー的 Brauer 群 (cohomological Brauer group)  $\mathrm{Br}'(X)$  は

$$\mathrm{Br}'(X) := H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathcal{O}_X^*)$$

で定義される。

**注意 5.52** 後述するように、 $\mathrm{Br}'(X)$  と  $X$  上エタール局所的に行列代数の層である Azumaya 代数の層とは密接な関係がある。これらを関係づけるため、 $\mathrm{Br}'(X)$  を定義する位相はエタール位相である必要がある。

$\alpha \in \mathrm{Br}'(X)$  をとる。すると、 $X$  のエタール開被覆  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  および Čech コサイクル

$$\alpha_{ijk} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{O}_X^*)$$

であって、そのコホモロジー類が  $\alpha$  となるものがとれる。

**定義 5.53** 代数多様体  $X$  上の  $\alpha$ -捻れ連接層 ( $\alpha$ -twisted coherent sheaf) とは、データ

$$\mathcal{F} = (\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}, \{\psi_{ij}\}_{i,j \in I})$$

であって、次の条件を満たすものである。

- (i)  $\mathcal{F}_i$  は  $U_i$  上の連接層であり、 $\psi_{ij}$  は同型写像  $\mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j}$  である。
- (ii)  $\psi_{ii} = \text{id}$ ,  $\psi_{ji} = \psi_{ij}^{-1}$ . および捻れコサイクル条件  $\psi_{ij} \circ \psi_{jk} \circ \psi_{ki} = \alpha_{ijk}$ . が  $U_i \cap U_j \cap U_k$  で成立する。

$\alpha$ -捻れ連接層  $\mathcal{E} = (\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}, \{\psi_{\mathcal{E},ij}\}_{i,j \in I})$ ,  $\mathcal{F} = (\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}, \{\psi_{\mathcal{F},ij}\}_{i,j \in I})$  の間の射は、層の射  $f_i: \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$  であって、任意の  $i, j \in I$  に対し、 $f_i \circ \psi_{\mathcal{E},ij} = \psi_{\mathcal{F},ij} \circ f_j$  を満たすものとする。

$X$  上の  $\alpha$ -捻れ連接層のなす Abel 圏を  $\text{Coh}(X, \alpha)$  で表し、その有界な導來圏を  $D^b(X, \alpha)$  と記述する。

**問題 5.54**  $\text{Coh}(X, \alpha)$  は圏同値を除いて、 $X$  のエタール被覆  $\{U_i\}_{i \in I}$  や Čech コサイクル  $\alpha_{ijk}$  の取り方に依存しないことを示せ。

**注意 5.55**  $\alpha = 1$  の場合、 $\text{Coh}(X, 1)$  はエタール位相での  $X$  上の連接層の圏に他ならない。エタール位相での連接層の圏とザリスキ位相での連接層の圏は圏同値であるため、 $\text{Coh}(X, 1)$  および  $D^b(X, 1)$  は  $\text{Coh}(X)$ ,  $D^b(X)$  と同値になる。

$\alpha$ -捻れ連接層  $\mathcal{F} = (\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}, \{\psi_{ij}\}_{i,j \in I})$  は各  $\mathcal{F}_i$  がベクトル束であるときに  $\alpha$ -捻れベクトル束 ( $\alpha$ -twisted vector bundle) であると呼ばれる。一般に  $\text{Coh}(X, \alpha)$  には ( $\alpha$ -捻れ) ベクトル束が存在することは限らないが、 $\alpha$  が、以下で定義する  $\text{Br}'(X)$  の部分群  $\text{Br}(X)$  に含まれる場合にはベクトル束が存在する。各整数  $n \geq 1$  に対して  $X$  上の層の完全系列

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow 1$$

を考える。すべての  $n$  についてコバウンダリー写像を考えることで、写像

$$\bigcup_{n \geq 1} H_{et}^1(X, \text{PGL}(n, \mathbb{C})) \rightarrow \text{Br}'(X) \tag{5.28}$$

を得る。

**定義 5.56** 写像 (5.28) の像  $\mathrm{Br}(X)$  ( $\subset \mathrm{Br}'(X)$ ) を  $X$  の **Brauer 群** (Brauer group) と呼ぶ.

**問題 5.57** (i) 任意の  $\mathrm{Br}(X)$  の元は捩れ元であることを示せ.

(ii)  $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$  であることと,  $X$  上に  $\alpha$ -捻れベクトル束が存在することが同値であることを示せ.

$\alpha \in \mathrm{Br}(X)$  とし,  $\alpha$ -捻れベクトル束  $\mathcal{F}$  をとる. すると,

$$\mathcal{A} := \mathrm{End}(\mathcal{F})$$

は (捻れコサイクル条件がキャンセルされるため)  $X$  上の (通常の) 連接層となる (注意 5.55 を参照). さらに,  $\mathcal{A}$  は  $X$  上の非可換代数の層であって, エタール局所的行列代数の層と同型になる. このような非可換代数の層は **Azumaya 代数の層** (sheaf of Azumaya algebras) と呼ばれる. すべての Azumaya 代数の層は Brauer 群の元からここで述べた方法で構成されることが知られている. また, 通常の Morita 同値の証明と同様にして次の圏同値が従う.

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, -) : \mathrm{Coh}(X, \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}(X, \mathcal{A}).$$

ここで  $\mathrm{Coh}(X, \mathcal{A})$  は  $X$  上の右連接  $\mathcal{A}$ -加群のなす圏である.

$X, Y$  を滑らかな射影的代数多様体,  $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$ ,  $\beta \in \mathrm{Br}(Y)$  とし, 対象

$$\mathcal{P} \in \mathrm{Coh}(X \times Y, \alpha^{-1} \boxtimes \beta)$$

が与えられると, 通常の Fourier–Mukai 関手と同様に関手

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}}(-) = \mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathcal{P} \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathbf{L}\pi_X^*(-)) : D^b(X, \alpha) \rightarrow D^b(Y, \beta)$$

が定まる.

$M := M_{\omega}(v)$  を 5.3 節で述べた  $\omega$ -安定層の粗モジュライ空間とする. 普遍層 (5.12) は必ず存在するわけではないが, Brauer 群の元  $\alpha \in \mathrm{Br}(M)$  と  $\pi_M^* \alpha^{-1}$ -捻れ連接層

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X \times M, \pi_M^* \alpha^{-1})$$

であって, 任意の  $y \in M$  に対して  $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}|_{X \times y}$  は  $y$  に対応する  $\omega$ -安定層となるものは存在する ( $\pi_M^* \alpha^{-1}|_{X \times y} = 1$  であるため,  $\mathcal{E}_y$  は通常の連接層であることに注意する). よって関手

$$\Phi_{M \rightarrow X}^{\mathcal{E}} : D^b(M, \alpha) \rightarrow D^b(X) \quad (5.29)$$

が定まる。上の関手を用いて、本章の様々な結果を一般化できる。例えば、定理 5.41 の一般化として次を得る（定理 5.41 と同様に、 $M'_{\omega}(v) = M_{\omega}(v\sqrt{\text{td}_S}^{-1})$ ,  $\overline{M}'_{\omega}(v) = \overline{M}_{\omega}(v\sqrt{\text{td}_S}^{-1})$  とおく）。

**定理 5.58 ([Căl02])**  $S$  を K3 曲面とし、 $v \in H^{2*}(S, \mathbb{Z})$  を ( $\omega$ -原始的とは限らない)  $v^2 = 0$  を満たす元とする。 $M := M'_{\omega}(v)$  が  $M = \overline{M}'_{\omega}(v)$  を満たすと仮定する。このとき  $M$  は K3 曲面となり、Brauer 群の元  $\alpha \in \text{Br}(M)$  が存在して Fourier–Mukai 型関手 (5.29) は圏同値を与える。

# 第6章 導来McKay対応

$G$  を  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の有限部分群とし、その  $\mathbb{C}^2$  への自然な作用による商空間  $\mathbb{C}^2/G$  を考えると、それは孤立特異点を持つ。これらは単純特異点、有理 2 重点、Klein 特異点、Du Val 特異点、ADE 型特異点、などと多くの名前を持つことから推察されるように、多くの数学者によって様々な視点から考察されてきた。2 次元アファイン代数多様体  $\mathbb{C}^2/G$  は正規であるから、極小特異点解消

$$f: X \rightarrow \mathbb{C}^2/G$$

が存在し、その例外集合の双対グラフは  $G$  の共役類に応じて、A, D, E 型の Dynkin 図形となる。一方 1970 年代後半に McKay によって  $G$  の表現論だけを使って、その Dynkin 図形が復元できることが示された。

$G$  を  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$  の有限部分群としたときは、 $\mathbb{C}^3/G$  の極小特異点解消（クレパント解消）の存在すら非常に難しい問題となる。Bridgeland–King–Reid はこの場合に、 $G\text{-Hilb } \mathbb{C}^3$  が  $\mathbb{C}^3/G$  のクレパント特異点解消を与えることと、その普遍族を核に持つ Fourier–Mukai 変換が導来圏レベルの McKay 対応、すなわち導来 McKay 対応、を与えることを示した。この章では Bridgeland–King–Reid による 3 次元導来 McKay 対応の証明を与えよう。

出てくる代数多様体は、断らない限り  $\mathbb{C}$  上で定義されているものとする。

## 6.1 クレパント解消 (CCR) とフロップ

極小モデル理論に自然に現れてくる  $\mathbb{Q}$ -分解的端末特異点を定義しよう。

**定義 6.1**  $Y$  を正規な代数多様体とする。

(i)  $Y$  上の Weil 因子  $D$  に対し、ある正の整数  $n$  が存在し、 $nD$  が Cartier 因子

となるとき  $D$  は  **$\mathbb{Q}$ -Cartier 因子** ( $\mathbb{Q}$ -Cartier divisor) である, という. 標準層  $\omega_Y$  が  $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子となるとき,  $Y$  は  **$\mathbb{Q}$ -Gorenstein** である, という. すべての Weil 因子が  $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子となるとき,  $Y$  は  $\mathbb{Q}$ -分解的 ( $\mathbb{Q}$ -factorial) である, という.

- (ii)  $Y$  が端末特異点 (terminal singularity) を持つとは, まず  $Y$  が  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein であり, ある特異点解消  $f: X \rightarrow Y$  に対し

$$K_X = f^* K_Y + \sum_i a_i E_i$$

と書いたとき, すべての  $i$  に対し  $a_i > 0$  となることである. ここで  $E_i$  は  $f$  の例外因子でかつ素因子ある.<sup>1</sup>

- (iii)  $Z$  を代数多様体とし,  $\pi: Y \rightarrow Z$  を固有射とする.  $Y$  上の  $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子  $D$  が  **$\pi$ -ネフ** ( $\pi$ -nef) であるとは,  $\pi$  で点に潰される  $Y$  上の曲線  $C$  に対し,  $D \cdot C \geq 0$  が成り立つことである.  $Z = \text{Spec } \mathbb{C}$  のとき  $\pi$ -ネフを単にネフ (nef)<sup>2</sup> と呼ぶ.  $Y$  が  $\mathbb{Q}$ -分解的な端末特異点を持つ射影的代数多様体であって,  $K_Y$  がネフであるとき,  $Y$  を **極小モデル** (minimal model) という.

**注意 6.2** (i) 定義 6.1(ii) で,  $f$  は任意の特異点解消としてもよいことが知られている.

- (ii)  $Y$  上の Cartier 因子と与えられた全射  $f: X \rightarrow Y$  に対し, 引き戻し  $f^* D$  が定義できる. Weil 因子  $D$  が  $\mathbb{Q}$ -Cartier のときもある正の整数  $n$  に対し,  $nD$  を Cartier 因子とすれば,

$$f^* D := \frac{1}{n} f^*(nD)$$

として引き戻しが  $\mathbb{Q}$ -因子として定義できる, 定義 6.1(ii) で  $f^* K_Y$  はこのようにして定義されるのである.

- (iii)  $Y$  を滑らかな代数多様体とすると,  $f = \text{id}_Y$  は  $Y$  の特異点解消を与える. このときもちろん定義 6.1(ii) の条件を満たすから,  $Y$  は端末特異点を持つ. 滑らかであるのに端末特異点を持つと呼ぶのは語感的に違和感があるかもしれないが, 便宜上このように定める.

<sup>1</sup> 標準因子は標準層に対応する因子の線形同値類として定義されるのであった. ここでは  $f$  の同型な開集合上では  $K_X$  と  $K_Y$  は (同型を通して) 因子として一致するように線形同値類の代表元を選び, それによって  $\mathbb{Q}$ -因子  $K_X - f^* K_Y$  が例外集合に台を持つようしている.

<sup>2</sup> numerically effective の略, numerically eventually effective の略など諸説あり.

$X_0$  を滑らかな射影的代数曲面としよう.  $X_0$  上にもし  $(-1)$ -曲線  $C$  が存在するときは, ある滑らかな射影的代数曲面  $X_1$  と双有理な射影的射  $f: X_0 \rightarrow X_1$  が存在し,  $C$  は  $f$  で潰され,  $f(C)$  は 1 点となる. さらに  $f$  はこの点でのブローアップとなることもわかる. この操作を繰り返すことにより, 点でのブローアップの合成

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n =: X$$

が存在し,  $X$  は  $(-1)$ -曲線をまったく含まないような滑らかで射影的な代数多様体となる. 小平次元  $\kappa(X_0) \geq 0$  のときは  $K_X$  はネフ (極小モデル) となる. 一方, 小平次元  $\kappa(X_0) = -\infty$  であるときは,  $X$  は代数曲線上の  $\mathbb{P}^1$ -束, もしくは  $\mathbb{P}^2$  のいずれか (森ファイバー空間) と同型となる.  $X_0$  よりも  $X$  のほうが構造が簡単なので,  $X_0$  を調べる代わりにそれと双有理同値な  $X$  をまず調べよう, というのが代数曲面の分類論の基本的な考え方である.

この考え方を高次元化したのが極小モデル理論の考え方である. 極小モデル理論 (もしくは極小モデルプログラム) とは,  $\mathbb{Q}$ -分解的な端末特異点を持つ射影的代数多様体  $X_0$  に対し, 小平次元  $\kappa(X_0) \geq 0$  のときは,  $X_0$  と双有理同値な極小モデル  $X$  を与え, 小平次元  $\kappa(X_0) = -\infty$  のときは,  $X_0$  と双有理同値な射影的代数多様体で森ファイバー空間と呼ばれる構造を持つものを与える理論である.

$\dim X_0 \geq 3$  のときは代数曲面の場合と異なり,  $X_0$  と  $X$  はブローアップの合成のような単純な双有理射で結べるとは限らず, また最初に与える代数多様体  $X_0$  が滑らかであったとしても, 極小モデルプログラムを適用して得られる極小モデル, もしくは森ファイバー空間は  $\mathbb{Q}$ -分解的端末特異点を持つことが知られている. そのような意味で,  $\mathbb{Q}$ -分解的端末特異点は極小モデル理論で自然に現れる特異点である.

**定義 6.3**  $X, X^+$  を高々  $\mathbb{Q}$ -分解的な端末特異点を持つ準射影的代数多様体,  $Y$  を  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規代数多様体とし,  $f: X \rightarrow Y, f^+: X^+ \rightarrow Y$  を双有理な射影的射とする.<sup>3</sup> 次の条件を満たすとき  $f, f^+$  をフロップ収縮といい,  $f^+$  を  $f$  のフロップ (flop) であるという. また, 双有理変換  $(f^+)^{-1} \circ f$  をフロップと呼んだり,  $X^+$  を  $X$  のフロップと呼ぶこともある.

---

<sup>3</sup> フロップを  $Y$  上局所的に捉え,  $Y$  を完備局所環のアファインスペクトラム等とすることもある.

- (i)  $f, f^+$  の例外集合の余次元が 2 以上である.<sup>4</sup>
- (ii)  $X$  上にある有効 Cartier 因子  $D$  が存在し,  $-D$  は  $f$ -豊富である. さらに  $D$  の  $X^+$  上狭義変換  $((f^+)^{-1} \circ f)_* D$  を  $D^+$  とおくと  $D^+$  は  $f^+$ -豊富である.

例 6.5 でフロップの例を与える前に次を挙げておく.

**問題 6.4** 準射影的代数多様体  $X$  上の局所自由層  $\mathcal{E}$  の決めるベクトル束  $V(\mathcal{E}) = \text{Spec } S(\mathcal{E})$  における 0-切断  $X$  の法束  $\mathcal{N}_{X/V(\mathcal{E})}$  は  $\mathcal{E}^\vee$  と同型であることを示せ.

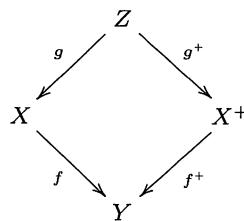
**例 6.5** ここでは最も簡単と思われるフロップの例を与えよう.  $\mathbb{P}^1$  上の局所自由層を  $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$  と定め, さらに  $X = V(\mathcal{E}^\vee)$  とおく. つまり  $X$  は  $\mathbb{P}^1$  上の局所自由層  $\mathcal{E}^\vee$  の決めるベクトル束である. [Har77, Exercise II.2.4] から, 射

$$f: X \rightarrow Y := \text{Spec } H^0(X, \mathcal{O}_X)$$

が存在し, 双有理で射影的となり, さらに

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw)$$

となることがわかる.  $f$  の例外集合  $C$  はベクトル束  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$  の 0-切断で,  $\mathbb{P}^1$  と同型となり, 問題 6.4 より法束  $\mathcal{N}_{C/X}$  は  $\mathcal{E}$  と同型となる. そこで  $C$  で  $X$  をブローアップし, それを  $g: Z \rightarrow X$  とする.  $g$  の例外集合  $E$  は  $\mathbb{P}_C(\mathcal{E}^\vee)$  であり,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  と同型である.  $g|_E$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 (\cong E)$  から  $\mathbb{P}^1 (\cong C)$  への一方向への射影である. また  $E$  を潰す,  $g$  とは異なる  $Z$  のブローダウン  $g^+: Z \rightarrow X^+$  が存在し,  $g^+|_E$  はもう一方向への射影に対応する.<sup>5</sup> さらに  $f^+: X^+ \rightarrow Y$  が存在し  $f^+$  の例外集合は  $C^+ = g^+(E) (\cong \mathbb{P}^1)$  である.



<sup>4</sup> このとき  $f, f^+$  には例外因子が存在しないので  $\omega_X = f^*\omega_Y, \omega_{X^+} = f^{+*}\omega_Y$  が成り立つ. つまり定義 6.7 で与える用語を使えば  $f, f^+$  はクレバントである.

<sup>5</sup> 例えば極小モデル理論における錐定理および収縮定理を使うと  $g^+$  の存在は証明できるが詳細は省略する.

このとき  $f, f^+$  の例外集合はそれぞれ  $C$  と  $C^+$  であるから、定義 6.3 の条件 (i) を満たすのは明らかである。 $-D$  を  $X$  上の豊富な因子とするとこれはもちろん  $f$ -豊富であり、また  $f_*\mathcal{O}_X(D) \neq 0$  より  $D$  は有効因子でもある。さらに  $D$  の  $X^+$  上の狭義変換  $D^+ := (f^{+-1} \circ f)_* D$  は  $C^+$  と有限個の点で交わるので、 $D^+ \cdot C^+ > 0$ 、つまり  $f^+$ -豊富であることもわかる。したがって  $f^+$  は  $f$  のフロップとなる。

ちなみに  $f$  はイデアル  $(x, z)$  での  $Y$  のプローアップ、 $f^+$  はイデアル  $(x, w)$  での  $Y$  のプローアップ、 $f \circ g = f^+ \circ g^+$  は原点 0 での  $Y$  のプローアップとしても記述され、さらに  $Z$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  上のベクトル束  $V(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1))$  と一致することがわかる、極めて具体的な記述が知られた例である。

極小モデル理論でフロップが自然に現れることを見ていこう。 $\kappa(X_0) \geq 0$  のときを考えよう。実は  $\dim X_0 \geq 3$  のときは  $X_0$  に対する極小モデルの選び方は、一通りでない。そこで  $X_0$  に対し得られる極小モデルが 2 種類あったとし、それらを  $X_1, X_2$  とする。このとき  $X_1, X_2$  は共に  $X_0$  と双有理同値であるから、 $X_1$  と  $X_2$  も互いに双有理同値となる。このとき  $X_1$  と  $X_2$  は余次元が 1 のところで同型、つまり  $X_i$  の空でない開集合  $U_i$  であって、 $\text{codim}_{X_i}(X_i \setminus U_i) \geq 2$  を満たすものが存在し、 $U_1$  と  $U_2$  は同型となることがわかる。 $\dim X_0 = 2$  であるときは、 $X_1$  と  $X_2$  が余次元が 1 のところで同型であるとき、 $X_1$  と  $X_2$  はそもそも同型となるが、 $\dim X_0 \geq 3$  のときは、 $X_1$  と  $X_2$  が同型であるとは限らない。ところが次の定理を  $Z = \text{Spec } \mathbb{C}$  として適用すれば、 $X_1$  と  $X_2$  はフロップで結ばれることがわかる。

**定理 6.6 ([Kaw08])**  $X_i (i = 1, 2)$  を  $\mathbb{Q}$ -分解的な端末特異点をもつ代数多様体、 $Z$  を代数多様体とし、 $f_i: X_i \rightarrow Z$  を射影的射とする。また  $K_{X_i}$  が  $f_i$ -ネフであり、<sup>6</sup> さらに  $Z$  上の双有理写像  $\phi: X_1 \dashrightarrow X_2$  が存在するとする。このとき  $\phi$  はフロップの合成で書ける。

次にクレバント（特異点）解消を定義しよう。

**定義 6.7**  $X$  を代数多様体、 $Y$  を Gorenstein 正規代数多様体とする。射影的射  $f: X \rightarrow Y$  が（もしくは  $X$  が） $Y$  のクレバント解消（crepant resolution, CCR）<sup>7</sup> であるとは次が成り立つときをいう。

<sup>6</sup> このとき  $X_i$  は  $Z$  上の極小モデルである、という。 $Z = \text{Spec } \mathbb{C}$  であるときが、上で述べた極小モデルである。

<sup>7</sup> クレバント解消は、後に出てくる non-commutative crepant resolution (NCCR) と区別するため “commutative crepant resolution, (CCR)” と呼ぶこともある。

- (i)  $X$  は滑らかであって,
- (ii)  $f$  は双有理であり, さらに
- (iii)  $K_X = f^*K_Y$  が成り立つ.

$f$  が (i) と (ii) を満たすとき  $f$  を  $X$  の特異点解消と呼んだ. (iii) がクレバント (crepant) と呼ばれる条件である. 一般には  $K_X$  と  $f^*K_Y$  には, ずれ (discrepancy) があり, それがないというのがクレバントである. 後で (定義 7.33) 非可換なクレバント解消の定義を与える.

様々な例の観察から次が予想される.

**予想 6.8** (i)  $f_i: X_i \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) を  $Y$  のクレバント解消とする. このとき  $X_1$  と  $X_2$  は導來同値となる.

(ii)  $X$  と  $X^+$  をフロップで結ばれる滑らかな準射影的代数多様体とする. このとき  $X$  と  $X^+$  は導來圏同値となる.

ちなみに 3 次元の場合, 滑らかな準射影的代数多様体  $X$  のフロップ  $X^+$  も滑らかになることが知られているが, 4 次元以上の場合には  $X$  が滑らかでも  $X^+$  は滑らかになるとは限らない. もし  $X$  が滑らかで  $X^+$  が滑らかでないときは定理 6.22(ii) で見るよう  $D^b(X)$  と  $D^b(X^+)$  は同値になりえない. またどちらも滑らかでない場合に  $D^b(X)$  と  $D^b(X^+)$  が同値になることは起こりうる (例えば定理 7.32 参照).

定義からフロップ収縮  $f: X \rightarrow Y$  は  $X$  が滑らかなときは  $Y$  のクレバント解消を与える. 逆に  $Y$  の 2 つのクレバント解消  $X_1, X_2$  に対し,  $Z = Y$  として, 定理 6.6 を適用すれば,  $\phi$  はフロップ  $\phi_i: \tilde{X}_i \dashrightarrow \tilde{X}_i^+$  の合成

$$\phi: X_1 = \tilde{X}_1 \xrightarrow{\phi_1} \tilde{X}_1^+ = \tilde{X}_2 \xrightarrow{\phi_2} \tilde{X}_2^+ = \tilde{X}_3 \xrightarrow{\phi_3} \cdots \xrightarrow{\phi_n} \tilde{X}_n^+ \cong X_2$$

と書ける. ここで途中に出てくる準射影的代数多様体  $\tilde{X}_i$  が滑らかであるとすると, 予想 6.8(ii) から (i) が導かれる. つまりこのような状況の下, 予想 6.8(i) は (ii) と同値である.

予想 6.8 に関しては 3 次元の場合に 7 章で考察する.

## 6.2 $G$ -Hilb( $M$ )

Hilbert スキームというのは与えられた代数多様体の射影的な部分スキームのモ

ジュライ空間である。ここでは特に点の Hilbert スキーム、つまり 0 次元部分スキームのモジュライ空間を考える。

$M$  を代数多様体、 $Z$  を  $M$  の 0 次元部分スキームとすると  $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$  は有限次元ベクトル空間となる。そこで  $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$  の次元が  $n$ （長さ (length) が  $n$ ）であるような  $M$  の 0 次元部分スキーム  $Z$  をパラメetrizeするスキームを

$$\mathrm{Hilb}^n(M)$$

と書き、 $M$  の  $n$  点の Hilbert スキームと呼ぶ（例 5.32 参照）。 $M$  の異なる  $n$  点からなる集合に被約な部分スキームの構造を入れたものは  $\mathrm{Hilb}^n(M)$  の 1 点とみなせる。このような部分スキームに対応する  $\mathrm{Hilb}^n(M)$  の点全体  $U$  は Zariski 開集合をなす。

一方  $M^n$  への  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の自然な作用での商を

$$\mathrm{Sym}^n(M) := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ 回}} / \mathfrak{S}_n$$

と書き、 $M$  の  $n$  次対称積 ( $n$ -th symmetric product) と呼ぶ。 $\mathrm{Sym}^n(M)$  は次数  $n$  の 0 次元サイクルをパラメetrizeしており、その元は形式的な和  $\sum n_i [x_i] (\sum n_i = n, x_i \in M \text{ の点})$  と書き表すことができる。

**例 6.9**  $M$  を非特異代数曲面とする。上で述べたように  $M$  の異なる 2 点  $p_1, p_2$  は  $\mathrm{Hilb}^2(M)$  の点を定め、このような点全体は  $\mathrm{Hilb}^2(M)$  の開集合  $U$  をなす。一方  $p \in M$  に対し、 $p$  での  $M$  の接ベクトル  $v \in T_p M$  をとり、イデアル層  $I$  を

$$I = \{f \in \mathcal{O}_M \mid f(p) = 0, df_p(v) = 0\}$$

と定めると、 $I$  は  $M$  の長さ 2 の 0 次元部分スキーム  $Z$  を定める。 $Z$  は “ $M$  の 2 点が  $v$  の方向に無限小でくっついているもの” とみなすことができる。

例えば  $M = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec} \mathbb{C}[x, y]$  であるとき、原点  $\mathbf{0} \in \mathbb{A}^2$  での接ベクトル  $v = \frac{\partial}{\partial x}$  に対し  $df_{\mathbf{0}}(v) = (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy)_{\mathbf{0}}(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})$  であるから

$$I = \{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid f(\mathbf{0}) = 0, df_{\mathbf{0}}(v) = 0\} = \langle x^2, y \rangle$$

となり、確かに  $\dim \mathbb{C}[x, y]/I = 2$  となる。

$\mathrm{Hilb}^2(M)$  は上で述べたイデアル  $I$  で定義される閉部分スキーム  $Z$  に対応する点を含み、実はこれらが  $\mathrm{Hilb}^2(M) \setminus U$  をなす。より詳しく以下で述べる Hilbert-Chow 射  $\pi: \mathrm{Hilb}^2(M) \rightarrow \mathrm{Sym}^2(M)$  は  $\mathrm{Sym}^2(M)$  の対角線集合でのプローアッ

プと一致することがわかる。

$M$  の 0 次元の部分スキーム  $Z$  に対応する  $\text{Hilb}^n(M)$  の点（これも  $Z$  で表す）を、 $\sum_{x \in M} l(Z_x)[x] \in \text{Sym}^n(M)$  に対応させる射

$$\pi: \text{Hilb}^n(M) \longrightarrow \text{Sym}^n(M) \quad Z \longmapsto \sum_{x \in M} l(Z_x)[x]$$

を **Hilbert–Chow 射** (Hilbert–Chow morphism) と呼ぶ。これは  $\text{Hilb}^n(M)$  の開集合  $U$  上で同型となるような射影的な射である。

次に  $G\text{-Hilb}(M)$  を定義しよう。有限群  $G$  が代数多様体  $M$  に作用しているとする。 $M$  の  $G$  不変な 0 次元部分スキーム  $Z$  に対し、 $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$  には  $G$  が作用するが、これが正則表現  $\mathbb{C}[G]$  と同型となるとき、 $Z$  を  **$G$ -クラスター** ( $G$ -cluster) という。 $G$ -クラスターの長さは定義より、 $G$  の位数に一致する。 $G$ -クラスターのモジュライ空間を  **$G$ -Hilbert スキーム** ( $G$ -Hilbert scheme) といい、

$$G\text{-Hilb}(M)$$

と書く。これは  $\text{Hilb}^{|G|}(M)$  の閉部分スキームとなる。 $G$ -クラスターは  $G$  不変なので、その台  $\text{Supp } Z$  は  $G$  軌道の和集合となるが、一方各軌道上の定数関数は  $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$  に自明表現を導く。ところが正則表現において、自明表現の重複度は 1 であるから、結局  $\text{Supp } Z$  は 1 つの軌道からなることがわかる。そこで  $Z \in G\text{-Hilb}(M)$ 、Hilbert–Chow 射  $\pi: \text{Hilb}^{|G|}(M) \rightarrow \text{Sym}^{|G|}(M)$  に対し、 $x \in Z$  をとれば

$$\pi(Z) = \sum_{g \in G} [gx] = \sum_{y \in Gx} |G/G_x|[y]$$

が成り立つ。ここで  $Gx$  は  $x$  の  $G$  軌道、 $G_x$  は  $x$  での安定化群である。よって  $\pi$  を  $G\text{-Hilb}(M)$  に制限した射を再び  $\pi$  で表すと

$$\pi: G\text{-Hilb}(M) \longrightarrow M/G$$

が得られる。

$M$  が非特異な代数曲面のときは  $\text{Hilb}^n(M)$  や  $G\text{-Hilb}(M)$  も非特異であり、さらに  $M = \mathbb{C}^2$ 、 $G$  が  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  の有限部分群のときは、 $\pi$  は極小特異点解消となることが知られている [IN96] が一般には  $G\text{-Hilb}(M)$  は非特異とも、既約とも限らない。

### 6.3 交叉定理

Bridgeland–King–Reid による導来 McKay 対応の証明のために技術的な補題をいくつか準備をしておこう。この節で出てくる環は断らない限り可換環とする。交叉定理は定理 6.26 において  $Y$  が滑らかであることを示すためのキーポイントである。

**定理 6.10 (交叉定理 [BM02])**  $(A, \mathfrak{m})$  を  $n$  次元局所 Noether C-代数とし、

$$0 \rightarrow M_s \rightarrow M_{s-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow 0$$

を有限生成自由  $A$ -加群のなす完全でない複体で、各コホモロジー  $\mathcal{H}^i(M_\bullet)$  は有限の長さの組成列を持つ  $A$ -加群であるとする。すると  $s \geq n$  が成り立つ。さらに  $s = n$  であり、かつ  $\mathcal{H}^0(M_\bullet) \cong A/\mathfrak{m}$  であるとき任意の  $i \neq 0$  に対し、 $\mathcal{H}^i(M_\bullet) = 0$  が成り立ち、 $A$  が正則となる。

加群の射影次元の類似であるホモジカル次元を定義しよう。

**定義 6.11**  $X$  を Noether スキームとし、さらに  $0 \neq E \in D^b(X)$  とする。 $Coh(X)$  は十分な局所自由層を持つ、すなわち任意の連接層は（有限階数の）局所自由層の商で書けているとする。 $E$  が、 $D^b(X)$  の対象として局所自由層のなす長さ  $s$  の複体と同型であるような最小の  $s$  の値を、 $E$  のホモジカル次元 (homological dimension) と呼び、 $\text{hom dim } E$  と表す。 $E$  が局所自由層のなす、有限の長さの複体と同型とはならないとき  $\text{hom dim } E = \infty$  と定める。

**問題 6.12** 定義 6.11 の状況を考える。 $E \in Coh(X)$  の局所自由解消

$$\dots \xrightarrow{\phi_1} E_1 \xrightarrow{\phi_0} E_0 \rightarrow E \rightarrow 0$$

をとる。 $l \geq \text{hom dim } E$  に対し  $\text{Ker } \phi_l$  は局所自由層となることを示せ。（ヒント：等式

$$\text{hom dim } E = \sup_{x \in X} \text{proj dim}_{\mathcal{O}_{X,x}} E_x$$

([Har77, Exercise III.6.5(c)] 参照) を用いよ。）

**注意 6.13** ホモジカル次元が有限な対象は狭義完全複体 (strict perfect complex) と呼ばれる。一方、局所的に狭義完全複体と擬同型となる複体は完全複体 (perfect complex) と呼ばれる。 $X$  が準射影的代数多様体のときは、完全複体は狭

義完全複体となる ([TT90, Proposition 2.3.1(d)]). 完全複体全体のなす  $D^b(X)$  の部分加法圏は部分三角圏をなす. これを  $\mathfrak{Perf}(X)$  と表す.

**系 6.14**  $X$  を  $\mathbb{C}$  上有限型のスキームとし,  $0 \neq E \in D^b(X)$  を考える. このとき

$$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} E \leq \hom \dim E$$

が成り立つ.

**証明**  $\hom \dim E = \infty$  のときは何も示すことがないので,  $E$  が局所自由層からなる長さ  $s (< \infty)$  の複体であるときを考える.  $\operatorname{Supp} E$  の既約成分  $\Gamma$  とその生成点  $\eta$  に対し,  $E$  の各項を  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,\eta}$  に制限した複体を  $E_0$  とすると, [Eis00, Corollary 2.18] より各コホモロジー  $\mathcal{H}^i(E_0)$  は有限の長さの組成列を持つ  $\mathcal{O}_{X,\eta}$  加群となる. よって定理 6.10 より  $s \geq \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$  がわかり, さらに  $\operatorname{codim} \operatorname{Supp} E \leq \operatorname{codim} \Gamma = \dim \mathcal{O}_{X,\eta}$  より主張を得る.  $\square$

**系 6.15**  $X$  を  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次元準射影的代数多様体とし, 点  $x \in X$ , 対象  $E \in D^b(X)$  であって  $\mathcal{H}^0(E) \cong \mathcal{O}_x$  を満たすものをとる. 点  $x' \in X$  が  $x$  と異なるか, もしくは整数  $i$  が  $i \notin [0, n]$  を満たしているとき,

$$\operatorname{Hom}_X^i(E, \mathcal{O}_{x'}) = 0$$

が成り立つとする. このとき  $X$  は点  $x$  で非特異で,  $E \cong \mathcal{O}_x$  が成り立つ.

**証明** まず仮定から  $\operatorname{Supp} E = x$  であることがわかり, さらに系 6.14 を使うと,  $n \leq \hom \dim E$  が得られる. 再び仮定と下の補題 6.16 から,  $\hom \dim E \leq n$  がわかるので,  $n = \hom \dim E$  を得る. よって  $E$  は  $X$  上の局所自由層からなる長さ  $n$  の複体  $M_\bullet$  であると思え, さらに各  $\mathcal{H}^i(M_\bullet)$  は長さ有限の組成列を持つ.  $M_\bullet$  を  $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$  に制限すると, 定理 6.10 から主張を得る.  $\square$

系 6.15, および定理 6.26 の証明で用いる補題 6.16 を証明しておく.

**補題 6.16** Noether スキーム  $X$  に対し,  $\operatorname{Coh}(X)$  は十分な局所自由層を持つとし,  $0 \neq E \in D^b(X)$  を考える. 整数  $s \geq 0$  に対し, 次は同値である.

(i) ある整数  $j$  が存在し, 任意の点  $x \in X$  と任意の  $i \notin [j, j+s]$  に対し,

$$\operatorname{Hom}_X^i(E, \mathcal{O}_x) = 0$$

を満たす.

(ii)  $\hom \dim E \leq s$  が成り立つ.

証明 まず埋め込み  $i_x : x \hookrightarrow X$  に対し,

$$i_{x*} \mathcal{H}^i(\mathbf{L}i_x^*(E^\vee)) \cong \mathcal{H}^i(E^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}_x) \cong \mathcal{H}^i(\mathbf{R}\Gamma(X, E^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}_x)) \cong \mathrm{Hom}_X^i(E, \mathcal{O}_x) \quad (6.1)$$

が成り立つことに注意する.<sup>8</sup>  $s = 0$  のとき (i) が成り立つとし、簡単のため  $j = 0$  として議論する。スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(\mathbf{L}i_x^* \mathcal{H}^q(E^\vee)) \Rightarrow E^{p+q} = \mathcal{H}^{p+q}(\mathbf{L}i_x^* E^\vee)$$

を考える。まず同型 (6.1) より

$$E^{p+q} = 0 \quad (p + q \neq 0), \quad E_2^{p,q} = 0 \quad (p > 0) \quad (6.2)$$

である。 $\mathcal{H}^q(E^\vee) \neq 0$  となるような最大の  $q$  を  $m$  とすると、 $x \in \mathrm{Supp} \mathcal{H}^m(E^\vee)$  に対し、 $E_\infty^{0,m} \cong E_2^{0,m} \neq 0$  が成り立つ。よって  $E^m \neq 0$  であるから、(6.2) より  $m = 0$  がわかる。同様に任意の  $x$  に対し、 $E^{-1} = 0$  より

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathbf{L}i_x^* \mathcal{H}^0(E^\vee)) = E_2^{-1,0} \cong E_\infty^{-1,0}$$

も 0 とならなければいけない。

$$i_{x*} \mathcal{H}^{-1}(\mathbf{L}i_x^* \mathcal{H}^0(E^\vee)) \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{H}^0(E^\vee) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}_x) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_x, x}(\mathcal{H}^0(E^\vee)_x, \mathcal{O}_x)$$

であるから [Eis00, Theorem 6.8] を使うと、 $\mathcal{H}^0(E^\vee)$  が  $X$  上平坦、つまり局所自明であることがわかる。さらにこのことから、 $E_2^{p,0} = 0$  が任意の  $p < 0$  で成り立つこともわかる。

次に任意の  $q < 0$  に対し、 $\mathcal{H}^q(E^\vee) = 0$  を示したい。そこである  $q < 0$  に対し、 $\mathcal{H}^q(E^\vee) \neq 0$  と仮定し、そのような  $q$  の中で最大のものを  $m$  とおく。 $x \in \mathrm{Supp} \mathcal{H}^m(E^\vee)$  に対し、上のスペクトル系列を考えると、 $q > m$  に対して、 $E_2^{p,q} \neq 0$  となるのは  $p = q = 0$  のときのみであることがわかっている。このことから  $E_\infty^{0,m} \cong E_2^{0,m} \neq 0$  となり、 $E^m \neq 0$  がわかって (6.2) に矛盾する。したがって任意の  $q < 0$  に対し、 $\mathcal{H}^q(E^\vee) = 0$  となり、結局  $E^\vee$  は局所自由層と同型であることがわかる。

任意の  $s$  に関しては  $s$  に関する帰納法により (i) から (ii) が従う。議論は難しくないがここでは省略する。詳細は [BM02, Proposition 5.4] を参照されたい。

<sup>8</sup>  $E^\vee$  の定義は (2.55) 参照。最初の同型には命題 2.49 を使った。

(ii) を仮定すると,  $E$  は局所自由層からなる長さ  $s$  以下の複体  $M_\bullet$  と  $D^b(X)$  の対象として同型である. このときある  $j$  が存在し, 任意の点  $x \in X$  と任意の  $i \notin [j, j+s]$  に対し,  $\mathcal{H}^i(E^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{O}_x) = 0$  が成り立つ. このとき (6.1) より (i) が従う.  $\square$

この節の最後に, ホモロジカル次元に関連して, 大域次元の定義とそれに関するいくつかの事実に触れておく.

**定義 6.17** 0-圈でない Abel 圈  $\mathcal{A}$  に対し, その大域次元 (global dimension) を

$$\text{gl.dim } \mathcal{A} := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \forall E, F \in \mathcal{A} \text{ に対し } \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E, F[n+1]) = 0\}$$

で定める. このような整数が存在しないときは  $\text{gl.dim } \mathcal{A} = \infty$  とおく.

可換 Noether 環  $R$  と, 任意の  $E, F \in \text{mod } R$  に対し

$$\text{Hom}_{D^b(\text{mod } R)}(E, F[n+1]) = \text{Ext}_R^{n+1}(E, F)$$

となるから

$$\text{gl.dim } R = \text{gl.dim mod } R$$

が成り立つ. 定理 A.12 で述べるように  $R$  が有限 Krull 次元を持つときは,  $\text{gl.dim } R < \infty$  であることと  $R$  が正則であることは同値であったから, 与えられた Abel 圈  $\mathcal{A}$  に対し,  $\text{gl.dim } \mathcal{A} < \infty$  であるとき  $\mathcal{A}$  が “滑らか” である, と思うのは自然である.

**問題 6.18**  $X$  を Noether スキームとし,  $\text{Coh}(X)$  は十分な局所自由層を持つとする. 補題 6.16 や A.2 節の内容を使って次の示せ.

(i)  $\dim X = n (< \infty)$  とし, さらにすべての  $x \in X$  に対し  $\mathcal{O}_{X,x}$  が正則であるとき  $\text{gl.dim } \text{Coh}(X) = n$  が成り立つ. また  $D^b(X)$  の任意の対象のホモロジカル次元は狭義完全対象となる.

(ii) (i) の仮定の下,  $\text{gl.dim } \text{QCoh}(X) = n$  が成り立つ. (ヒント: [Har66, Proposition II.7.17] より準連接層が単射的であるという性質は局所的性質である.)

(iii)  $x \in X$  に対し  $\mathcal{O}_{X,x}$  が正則でないとき,  $\text{hom dim } \mathcal{O}_x = \infty$  である. 特に,  $\text{Ext}_X^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \neq 0$  となる  $i$  が無限に存在する.

導来圏が同値であるような Abel 圈  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に対し,  $\text{gl.dim } \mathcal{A} < \infty$  であることと

$\mathrm{gl.dim} \mathcal{B} < \infty$  であることが同値とは限らない例を以下で挙げる.

**例 6.19**  $V$  を有限次元ベクトル空間とし,  $\mathcal{A}$  を  $V$  上の対称代数  $S(V)$  上の有限生成次数付き加群のなす Abel 圏,  $\mathcal{B}$  を双対ベクトル空間  $V^\vee$  上の外積代数  $\wedge(V^\vee)$  上の有限生成次数付き加群のなす Abel 圏とすると Bernstein–Gelfand–Gelfand 双対性により, 三角圏の同値  $D^b(\mathcal{A}) \cong D^b(\mathcal{B})$  が存在する [BGG78]. 一方,  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{A} = \dim V$  であるが,  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{B} = \infty$  であることが知られている.

一方, 次で考えるような場合は  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{A} < \infty$  であることと  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{B} < \infty$  であることは同値である.

**問題 6.20**  $\Phi: D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$  を三角圏の同値とする. 整数  $a \leq b$  が存在し, 任意の対象  $E \in \mathcal{A}$ , 任意の  $i \notin [a, b]$  に対し,  $\mathcal{H}^i(\Phi(E)) = 0$  であると仮定する. このとき次を示せ.

- (i) 任意の対象  $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{B}$  に対し,  $k > b$  のとき  $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E[k], \Phi^{-1}(F)) = 0$ ,  $a > k$  のとき  $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\Phi^{-1}(F), E[k]) = 0$  となる.
- (ii) 任意の対象  $F \in \mathcal{B}$ , 任意の  $j \notin [-b, -a]$  に対し,  $\mathcal{H}^j(\Phi^{-1}(F)) = 0$  となる.
- (iii)  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{A} < \infty$  であることと  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{B} < \infty$  であることが同値である.

**問題 6.21**  $\mathcal{A}$  を 0-圏でない Abel 圏とし,  $\mathrm{gl.dim} \mathcal{A} < \infty$  であるとする. このとき次を示せ.

- (i) 任意の対象  $\alpha, \beta \in D^b(\mathcal{A})$  に対し, ある  $M \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在し,  $M < |\alpha|$  ならば

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\alpha, \beta[n]) = 0$$

が成り立つ.

- (ii) さらに  $\mathcal{A}$  が  $\mathbb{C}$ -線形であるとし, また任意の対象  $E, F \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{Z}$  に対し  $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E, F[i]) < \infty$  となるとき,  $\mathcal{A}$  は有限型である.

また次で見るようく準射影的代数多様体  $X, Y$  に対し,  $D^b(X)$  と  $D^b(Y)$  が三角圏として同値であるときは  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}(X) < \infty$  であることと,  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}(Y) < \infty$  であることは同値である.

**定理 6.22**  $X, Y$  を準射影的代数多様体とする.

- (i)  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}(X) < \infty$  であること,  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{QCoh}(X) < \infty$  であること,  $X$

が滑らかであること、さらに  $D^b(X)$  の任意の対象が狭義完全対象となることはすべて同値となる。

- (ii)  $D^b(X)$  と  $D^b(Y)$  は三角圏として同値であるとする。このとき  $X$  が滑らかであることと  $Y$  が滑らかであることは同値である。

証明 (i) 問題 6.18 より従う。

(ii)  $X$  が滑らかであるとすると  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}(X) < \infty$  であるから、問題 6.21(i) が使える。そこで  $\Phi: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$  を三角圏の同値とすると、任意の点  $y \in Y$  に対し、 $\mathrm{Ext}_X^i(\mathcal{O}_y, \mathcal{O}_y) = \mathrm{Hom}_X(\Phi(\mathcal{O}_y), \Phi(\mathcal{O}_y)[i])$  が  $0$  とならないような  $i$  は高々有限個である。したがって問題 6.18(iii) より  $\mathcal{O}_{Y,y}$  は正則局所環となり、 $Y$  も滑らかであることがわかる。□

**系 6.23** 滑らかな射影的代数多様体  $X$  の導來圏  $D^b(X)$  は有限型である。

証明 定理 6.22(i) より、 $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}(X) < \infty$  である。そこで問題 6.21(ii) を用いれば、主張が従う。□

以下、 $G$ -同変連接層のなす圏  $\mathrm{Coh}_G(X)$  や商スタック  $[X/G]$  の定義や諸性質に関しては付録 C、付録 D を参照されたい。

**注意 6.24** 簡約な代数群  $G$  (定義 10.1) が準射影的代数多様体  $X$  に作用しているとき、Abel 圈  $\mathrm{Coh}_G(X)$  の対象  $E, F$  に対し

$$\mathrm{Hom}_{D_G^b(X)}(E, F[i]) = G\text{-}\mathrm{Ext}_X^i(E, F)$$

は  $\mathrm{Ext}_X^i(E, F)$  の  $G$ -不変部分と一致した。よって  $X$  が滑らかなときは  $\mathrm{gl.dim} \mathrm{Coh}_G(X) < \infty$  となる。仮に何らかの意味で商 (例えば幾何学的不変商)  $X/G$  が考えられたとしても、これはしばしば特異点を持つが、一方で商スタック  $[X/G]$  を考えれば定理 D.11 より  $\mathrm{Coh}([X/G]) \cong \mathrm{Coh}_G(X)$  であったから、商スタック  $[X/G]$  は“滑らか”となる。これが商スタック  $[X/G]$  を考える利点である。

## 6.4 導來 McKay 対応

$G$  を  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  の有限部分群とし、 $\mathbb{C}[x, y]$  に自然に作用させると  $Y := \mathbb{C}^2/G = \mathrm{Spec} \mathbb{C}[x, y]^G$  は原点で有理二重点 (rational double point)、もしくは ADE 特異点などと呼ばれる特異点を持つ。そこで  $f: X \rightarrow Y$  を  $Y$  の極小特異点解消とする、 $f$  は  $Y$  の CCR を与えることがわかる。このとき三角圏の同値

$$D^b(X) \cong D_G^b(\mathbb{C}^2) \quad (6.3)$$

が [KV00] によって発見された。\$G\$ の表現環 \$R(G)\$ と導來圏 \$D\_G^b(\mathbb{C}^2)\$ の Grothendieck 群 \$K\_G(\mathbb{C}^2)\$ は、\$G\$ の既約表現 \$\rho \in R(G)\$ を元 \$[\rho \otimes\_{\mathbb{C}} \mathcal{O}\_{\mathbb{C}^2}] \in K\_G(\mathbb{C}^2)\$ に対応させることで同型となる。そこで同値 (6.3) は古典的な McKay 対応の文脈でかねてから知られていた Grothendieck 群と表現環の同型

$$K(X) \cong R(G)$$

を導く。<sup>9</sup>このことから同値 (6.3) は導來圏レベルでの McKay 対応、すなわち導來 McKay 対応 (derived McKay correspondence) と呼ぶことができる。導來同値 (6.3) が高次元の場合にも存在する、と主張するのが次の予想である。

**予想 6.25 (導來 McKay 対応)** \$G\$ を \$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})\$ の有限部分群とし、

$$f: X \rightarrow Y := \mathbb{C}^n/G$$

を \$Y\$ のクレパント解消 (CCR) とする。このとき三角圏の同値

$$D^b(X) \cong D_G^b(\mathbb{C}^n)$$

が存在する。

例 7.40 で述べるように \$n \geq 4\$ の場合は常にクレパント解消が存在するわけではないのでここではクレパント解消を持つような \$Y\$ を考えるのである。

3 次元の場合に \$Y\$ のクレパント解消が存在すること、さらに導來 McKay 対応を示すのがこの節の目標である。

予想 6.25 の状況を次のように少し一般的なものにしておく。\$G\$ を有限群で、滑らかな \$n\$ 次元準射影的代数多様体 \$M\$ に忠実に作用しているとする。さらに \$\omega\_M\$ は \$G\$-同変層として局所的に自明、すなわち各点の開近傍 \$U\$ で \$G\$-不変なものが存在し、\$U\$ 上のどの点でも 0 とはならない \$G\$-不変な \$n\$ 形式が存在するとする。このとき、\$Y = M/G\$ は Gorenstein 特異点を持つ。\$X\$ を自由軌道を含む \$G\$-Hilb(\$M\$) の既約成分とし、Hilbert–Chow 射 \$\tau: G\text{-Hilb}(M) \rightarrow Y\$ を \$X\$ に制限すると、\$\tau: X \rightarrow M/G\$ は双有理射となる。\$\mathcal{Z}\$ を普遍閉部分スキーム \$\mathcal{Z} \subset X \times M\$ で \$p, q\$ をそれぞれ \$X, M\$ への射影とする。さらに商射 \$M \rightarrow Y\$ を \$\pi\$ と呼ぼう：

---

<sup>9</sup> 3 次元の Grothendieck 群と表現環の同型は [IN00] で考察されている。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & p \swarrow & & \searrow q & \\
 X & & & & M \\
 & \tau \searrow & & \nearrow \pi & \\
 & & Y = M/G & &
 \end{array}$$

$G$  が自明に  $X, Y$  に作用しているとみなすと、上の図式に現れるすべての射は  $G$ -同変である。関手  $\Phi$  を

$$\Phi := \mathbf{R}q_* \circ p^*(- \otimes \rho_0) : D^b(X) \rightarrow D_G^b(M)$$

で定義する。 $p$  は平坦な射なので、 $p^*$  は導來関手をとる必要がない。このことから上記の関手は有界な複体を有界な複体に移すことに注意されたい。（ $X$  が滑らかであるとわかっていていれば、 $p$  が平坦でなくとも、このことは成り立つ。）

**定理 6.26** ファイバー積  $X \times_Y X$  に関して

$$\dim X \times_Y X \leq n + 1 \quad (6.4)$$

と仮定する。このとき  $\tau$  は  $Y$  のクレパント特異点解消を与える。さらに  $\Phi$  は三角圏の同値を与える。

$n \leq 3$  のときは (6.4) は自動的に成り立つので次を得る。

**系 6.27**  $n \leq 3$  とすると、 $\tau$  は  $Y$  のクレパント解消を与える。さらに  $\Phi$  は三角圏の同値を与える。

実は [BKR01] では  $G\text{-Hilb}(M)$  は既約であることまで示している。以下では定理 6.26において、簡単のため  $M$  が射影的であると仮定し、 $X$  の非特異性、さらに  $\Phi$  の同値性の証明を与えたいたい。 $\tau$  がクレパントであることや、 $M$  が射影的でない場合の定理 6.26 の証明、および  $G\text{-Hilb}(M)$  の既約性の証明は元論文を参照されたい。

**証明**  $\pi_M, \pi_X$  をそれぞれ射影  $X \times M \rightarrow M, X \times M \rightarrow X$  とする。すると埋め込み  $Z \hookrightarrow X \times M$  に射影公式（命題 2.49）<sup>10</sup>を使って

<sup>10</sup>  $Z, X \times M$  は滑らかであるかどうかはわからないが、2.9 節の冒頭で述べたように射影公式は成り立つ。

$$\Phi \cong \mathbf{R}\pi_{M*}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\mathbf{L}} \pi_M^*(- \otimes \rho_0))$$

が成り立つ。

任意の  $x \in X$  に対し, 埋め込み  $i_x: x \times M \hookrightarrow X \times M$  を考えると,  $\mathcal{Z}$  は  $X$  上平坦であることから  $\mathbf{L}i_x^*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}} \cong i_x^*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$  となり, これは滑らかな代数多様体  $M$  上の連接層なので完全複体である。さらに  $M$  上の任意の点  $m$  に対し, 埋め込み  $i_m: m \hookrightarrow M$  を考えると,  $\mathbf{L}i_m^*\mathbf{L}i_x^*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$  も完全複体となる。したがって

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{X \times M}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{O}_{(x, m)}) \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{L}i_m^*\mathbf{L}i_x^*\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{O}_{(x, m)})$$

は  $D^b(\mathrm{Vect} \mathbb{C})$  の対象となるので補題 6.16 より  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$  の、さらには  $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^\vee$  のホモロジカル次元は有限となる。完全複体

$$\mathcal{P} := \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^\vee \otimes \pi_M^* \omega_M[n]$$

に対し, 関手  $\Phi^L$  を

$$\Phi^L := [\mathbf{R}\pi_{X*}(\mathcal{P} \xrightarrow{\mathbf{L}} \pi_M^*(-))]^G: D_G^b(M) \rightarrow D^b(X)$$

で定める。ここで  $\pi_X^!(-) := \pi_X^*(-) \otimes \pi_M^*(\omega_M)[n]$  とおくと

$$\pi_M^* \dashv \mathbf{R}\pi_{M*}, \quad \mathbf{R}\pi_{X*} \dashv \pi_X^!, \quad (-) \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}^\vee \dashv (-) \xrightarrow{\mathbf{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{Z}}, \quad [-]^G \dashv (-) \otimes \rho_0$$

などから  $\Phi^L$  は  $\Phi$  の左随伴関手であることがチェックできる。

例 3.11 により, もし  $X$  が滑らかであるなら  $\Omega = \{\mathcal{O}_x : x \in X\}$  は  $D^b(X)$  のスパニング類である。また補題 3.14 により,  $D_G^b(M)$  は直既約である。また  $M$  の射影性を仮定したので, そこから  $X$  の射影性もわかり, もし  $X$  が滑らかであることが示されれば,  $D^b(X), D_G^b(M)$  はともに Serre 関手をもつことがわかる。そこで  $\Omega$  に対し定理 3.15, 定理 3.18 を適用したい。 $\Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_x}$  であるから, 我々の示すべきは, まず  $X$  が非特異であることと, 次に任意の  $x_1, x_2 \in X$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対し, 自然な写像

$$\mathrm{Ext}_X^i(\mathcal{O}_{x_1}, \mathcal{O}_{x_2}) \rightarrow G\text{-}\mathrm{Ext}_M^i(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{x_1}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_{x_2}}) \tag{6.5}$$

が同型であること, さらに任意の  $x \in X$  に対し  $G$ -同変層として

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_x} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_x} \otimes \omega_M \tag{6.6}$$

となることである。

$\Phi^L \circ \Phi$  は Fourier–Mukai 関手になり (問題 3.1(ii) 参照), その積分核を  $\mathcal{Q} \in$

$D^b(X \times X)$  とおく。今、埋め込み  $i_x: x \times X \hookrightarrow X \times X$  に対し、

$$\mathbf{L}i_x^* \mathcal{Q} \cong \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \quad \mathbf{R}i_{x_1*} \mathcal{O}_{x_2} \cong \mathcal{O}_{x_1 \times x_2}$$

であるから、

$$\mathrm{Hom}_{X \times X}^i(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_{x_1 \times x_2}) \cong \mathrm{Hom}_X^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_{x_1}), \mathcal{O}_{x_2}) \cong G\text{-Ext}_M^i(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) \quad (6.7)$$

が成り立つ。

$Z_1, Z_2$  を  $M$  の  $G$ -クラスターとする。

$$\mathrm{Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_1}) \cong H^0(M, \mathcal{O}_{Z_1}) \cong \mathbb{C}[G]$$

であって、 $G$  の作用で不变となるような元  $\Sigma_{g \in G} \lambda_g g \in \mathbb{C}[G]$  は、 $\lambda_g \in \mathbb{C}$  が  $g$  の取り方によらないものである。つまり  $G\text{-Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_1}) \cong \mathbb{C}$  となる。また  $\mathcal{O}_{Z_i}$  は  $\mathcal{O}_M$ -加群として、上記のような  $\mathbb{C}[G]$  の元（で 0 でないもの）で生成される。以上から

$$G\text{-Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_1}, \mathcal{O}_{Z_2}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (Z_1 \cong Z_2) \\ 0 & (Z_1 \not\cong Z_2) \end{cases} \quad (6.8)$$

がわかる。 $x_1 \neq x_2 \in X$  に対し、Serre 双対性より

$$G\text{-Ext}_M^n(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) = G\text{-Hom}_M(\mathcal{O}_{Z_{x_2}}, \mathcal{O}_{Z_{x_1}})^\vee = 0$$

であるから、 $i \notin [1, n-1]$  に対し

$$G\text{-Ext}_M^i(\mathcal{O}_{Z_{x_1}}, \mathcal{O}_{Z_{x_2}}) = 0$$

が成り立つことがわかる。このことから補題 6.16 と (6.7) より

$$\mathrm{hom}\ dim \mathcal{Q}|_{X \times X \setminus \Delta_X} \leq n-2$$

が成り立つ。

次に  $x_1 \neq x_2 \in X$  であって  $\tau(x_1) \neq \tau(x_2)$  が成り立つようなものをとる。このとき  $Z_{x_1} \cap Z_{x_2} = \emptyset$  であるから、特に (6.7)において、 $\mathrm{Hom}_{X \times X}^i(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_{x_1 \times x_2}) = 0$  となり、

$$\mathrm{Supp} \mathcal{Q}|_{X \times X \setminus \Delta_X} \subset X \times_Y X$$

がわかる。一方仮定より、 $\mathrm{codim} X \times_Y X > n-2$  であるから、系 6.14 より

$$\mathcal{Q}|_{X \times X \setminus \Delta_X} \cong 0$$

となり、つまり  $\text{Supp } \mathcal{Q} = \Delta_X$  であるから、 $x \in X$  に対し

$$\text{Supp } \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) = \text{Supp } \Phi^Q(\mathcal{O}_x) = x \quad (6.9)$$

となることがわかる。以下  $\mathcal{H}^0(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x)) = \mathcal{O}_x$  を示したい。  
(6.7)と(6.8)から  
0でない射  $\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \rightarrow \mathcal{O}_x$  が定数倍を除けばただ1つ存在することがわかる。  
この射から得られる完全三角形

$$C \rightarrow \Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow C[1] \quad (6.10)$$

に対し、 $\text{Hom}_X(-, \mathcal{O}_x)$  を施し、長完全列

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \text{Hom}_X(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \rightarrow G\text{-Hom}_M(\Phi(\mathcal{O}_x), \Phi(\mathcal{O}_x)) \rightarrow \text{Hom}_X(C, \mathcal{O}_x) \\ &\rightarrow \text{Hom}_X^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \xrightarrow{\eta} G\text{-Hom}_M^1(\Phi(\mathcal{O}_x), \Phi(\mathcal{O}_x)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

を得る。写像  $\eta$  はクラスターの族  $\{\mathcal{O}_{Z_x}\}$  に関する Kodaira–Spencer 写像となる  
ことがわかり単射となる（定理 5.33 の証明中の写像 (5.19) の単射性参照）。よって任意の  $i \leq 0$  に対し

$$\text{Hom}_X^i(C, \mathcal{O}_x) = 0$$

となり、スペクトル系列 (3.4) で  $E = C$ ,  $F = \mathcal{O}_x$  とおくと任意の  $i \geq 0$  に対し、  
 $\mathcal{H}^i(C) = 0$  が示せ、(6.10) のコホモロジーの長完全列をとれば  $\mathcal{H}^0(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x)) \cong \mathcal{O}_x$  がわかる。

さて式 (6.9) より、もし  $x \neq x'$  のとき、任意の  $i$  に対し

$$\text{Hom}_X^i(\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_{x'}) = 0$$

である。また  $\Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_{Z_x} \in \text{Coh}_G(M)$  であるから、 $i \notin [0, n]$ ,  $x = x'$  のときもこの式は成り立つ。これらにより系 6.15 が適用でき、 $X$  は点  $x$  で非特異で、  
 $\Phi^L \circ \Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_x$  となり、よって (6.5) が同型であることがわかる。また  $\omega_M$  が  
 $G$ -同変層として局所自明であることから、(6.6) も成り立つ。

以上より  $X$  が非特異であること、さらに  $\Phi$  が同値であることがわかった。□



# 第7章 フロップによる導来同値

双有理同値な3次元Calabi-Yau多様体の導來圏は超弦理論の要請から、互いに同値となるであろうと予想されていた。一方2000年頃にBridgelandによってフロップで結べる滑らかな3次元代数多様体は互いに導來同値であることが示された。双有理同値な3次元Calabi-Yau多様体はフロップで結べることが知られていたので、これらは互いに導來同値であることが結論付けられた。Bridgelandによる証明は、フロップで得られる代数多様体を元の代数多様体上の偏屈連接層のモジュライ空間であると思い、その普遍族を核に持つFourier-Mukai変換でそれらの導來圏を結びつける、というものであった。5章で見たように、代数多様体とその上の層のモジュライ空間は、その普遍族を使って導來同値となることがしばしば観察されていたので、Bridgelandによる証明はある意味自然なものであった。<sup>1</sup>

Bridgelandによる証明の解説は[戸16]に譲り、ここではBridgelandより少し後に得られたVan den Berghによる証明の解説をしよう。Van den Berghの証明は与えられた3次元代数多様体と、それとフロップで結ばれる3次元代数多様体の導來圏を、ある種の非可換環上の加群の導來圏を通して結びつけるという、まったく新しいアイデアによるものであった。彼の証明のアイデアから、非可換クレパント解消という概念が生まれた。この章の最後に、非可換クレパント解消と、フロップによって引き起こされる自己同値についても解説する。

簡単のため基礎体を $\mathbb{C}$ とし、 $\mathbb{C}$ 上のスキーム、および代数多様体を考える。

## 7.1 t-構造と捩れ対

超弦理論によって、双有理な3次元Calabi-Yau多様体の導來圏は互いに同値

---

<sup>1</sup> ただし偏屈連接層は、実際は層でなく連接層の複体である。

であると予想されていたが、Calabi-Yau 多様体は極小モデルであるので、この予想の一般化、つまり予想 6.8(ii) を期待するのは、自然であろう。これはいくつかの特殊な場合に解かれていたが Bridgeland によって、3 次元の場合に予想 6.8(ii) は完全に解決された。ここでは Van den Bergh による証明を解説する。まず証明で重要となる概念を準備していこう。次で述べる t-構造は、Bridgeland の安定性条件を定義するときにも現れる。

**定義 7.1**  $\mathcal{D}$  を三角圏とする。 $\mathcal{D}$  の充満部分圏  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  と  $\mathcal{D}^{\geq 0}$  が次の条件を満たすときに、 $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$  は  $\mathcal{D}$  の t-構造 (t-structure) と呼ばれる。またこのとき  $\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$ ,  $\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$  と定める。

- $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}, \mathcal{D}^{\geq 1} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$  が成立する。
- $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$  が成り立つ。
- 任意の  $E \in \mathcal{D}$  に対し、次の完全三角形が存在する。

$$\tau_{\leq 0} E \rightarrow E \rightarrow \tau_{\geq 1} E \rightarrow \tau_{\leq 0} E[1]. \quad (7.1)$$

ここで  $\tau_{\leq 0} E \in \mathcal{D}^{\leq 0}, \tau_{\geq 1} E \in \mathcal{D}^{\geq 1}$  である。<sup>2</sup>

**問題 7.2** 上の定義において次を示せ。

- (i)  $\mathcal{D}^{\geq 1} = (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$  が成り立つ。
- (ii)  $E$  に対して  $\tau_{\leq 0} E, \tau_{\geq 1} E$  は同型を除いて一意に決まる。

問題 7.2 により、 $\mathcal{D}$  の t-構造  $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$  は実際は  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  だけを与えれば決まるので、 $\mathcal{D}^{\leq 0}$  は  $\mathcal{D}$  の t-構造である、と呼ぶこともある。

$\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}$  が t-構造を与えるとき、 $\mathcal{D}$  の部分圏

$$\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$$

は t-構造の核 (the heart of t-structure) と呼ばれる。t-構造の核は Abel 圏の構造を持つことが知られている ([GM03, Theorem IV.4.4] 参照)。

**例 7.3** Abel 圏  $\mathcal{A}$  の導來圏  $\mathcal{D} = D(\mathcal{A})$  に対しては、以下の例のような t-構造を構成でき、その核は元の Abel 圏  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  と圏同値になることを見ていこう。

$\mathcal{D}$  の部分圏  $\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0}$  を以下で定める：

<sup>2</sup> ここで定まる  $(\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 1})$  は例 7.3 で述べる特殊な t-構造（標準 t-構造）において、(2.32)で定めた  $(\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 1})$  の定義と一致する。

$$\mathcal{D}^{\leq 0} := \{E \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^i(E) = 0, i > 0\}$$

$$\mathcal{D}^{\geq 0} := \{E \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^i(E) = 0, i \leq -1\}$$

これは  $\mathcal{D}$  上の t-構造を定め、標準的 t-構造と呼ばれる。また、 $E \in \mathcal{A}$  に複体  $(\cdots \rightarrow 0 \rightarrow E \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$  (ただし、 $E$  は次数 0 に位置している) を対応させて定まる関手

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$$

は圏同値を与える。

以下で部分圏  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  が  $\mathcal{D}$  の t-構造を定めることを見てみよう。 $\mathcal{D} = D^b(\mathcal{A})$  のときは (3.4) で与えたスペクトル系列を使えば、 $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$  は直ちに出てくる。 $\mathcal{D} = D(\mathcal{A})$  のときの同じ包含関係  $\mathcal{D}^{\geq 1} \subset (\mathcal{D}^{\leq 0})^\perp$  の証明も難しくはないが、ここでは省略する。詳しくは [GM03, Proposition IV.4.3] を参照されたい。

次に完全三角形 (7.1) の存在を示したい。 $\mathcal{A}$  の対象の複体  $(\mathcal{F}^\bullet, d^\bullet)$  に対し (2.32) で定めた  $\tau_{\leq i}\mathcal{F}^\bullet, \tau_{\geq i}\mathcal{F}^\bullet$  を使うと、(2.33) により完全三角形 (7.1) が存在することがわかる。(つまるところ、(2.32) で定めた  $(\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 0})$  の定義と、標準 t-構造から定まる  $(\tau_{\leq 0}, \tau_{\geq 0})$  の定義は一致する。)

t-構造の核  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  が与えられると、各  $i \in \mathbb{Z}$  に対して次のコホモロジー的関手が定義できる：

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A} \quad E \mapsto \tau_{\geq i}\tau_{\leq i}(E)$$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{D} = D(\mathcal{A})$  が標準的な t-構造の核の場合、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(*)$  は単に  $i$  番目の複体のコホモロジーをとっているに過ぎない。

**注意 7.4**  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$  に対し、 $A_i \in \mathcal{D}$  とみなし、 $\mathcal{D}$  における完全三角形

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \text{Cone}(f) \rightarrow A_1[1]$$

を考えると、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i$  はコホモロジー的関手であるから、 $\mathcal{A}$  の長完全列

$$\cdots \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(A_1) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(A_2) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(\text{Cone}(f)) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^{i+1}(A_1) \rightarrow \cdots$$

が得られる。このとき t-構造の核の定義から、 $i \neq 0$  のときはもちろん  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(A_1) = \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(A_2) = 0$  となる。上で述べたように三角圏  $\mathcal{D}$  の t-構造の核  $\mathcal{A}$  には Abel 圏の構造が入る。 $\mathcal{A}$  の射  $f$  に対し、 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^{-1}(\text{Cone}(f)) = \text{Ker } f$  であり、

$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}^0(\text{Cone}(f)) = \text{Coker } f$  となる.

**注意 7.5**  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  を t-構造の核とし,  $E, F \in \mathcal{A}$  とする. このとき  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(E, F) = \text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(E, F)$  が成り立つ. 実際  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(E, F)$  の元は  $\mathcal{A}$  における完全系列

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow 0$$

に対応しているが, これは注意 7.4 により  $\mathcal{D}$  における完全三角形を与えており, よって  $\mathcal{D}$  における射  $E \rightarrow F[1]$  を得る. 一方,  $\mathcal{D}$  における射  $E \rightarrow F[1]$  が与えられると完全三角形  $F \rightarrow G \rightarrow E$  を得るが,  $\mathcal{A}$  に関するコホモロジー完全系列をとることでこれは  $\mathcal{A}$  における完全系列である. よって  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(E, F)$  の元が定まる.

$i \geq 2$  では一般に  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(E, F) \neq \text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(E, F)$  であり, このような場合は特に  $D^b(\mathcal{A})$  と  $\mathcal{D}$  は同値ではない.<sup>3</sup>

例えば,  $R = \mathbb{C}[x]/x^2$  を  $x$  の次数が  $(-1)$  でその微分が  $0$  となる微分次数付き代数とし,  $\mathcal{D}$  を  $R$  上の有限生成微分次数付き加群のなす導來圏とする. (微分次数付き代数やその上の加群のなす導來圏については [Kel94] を参照されたい.)

$$\mathcal{D}^{\leq 0} := \{E \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^i(E) = 0, i > 0\}$$

$$\mathcal{D}^{\geq 0} := \{E \in \mathcal{D} : \mathcal{H}^i(E) = 0, i \leq -1\}$$

と定めればこれは  $\mathcal{D}$  の t-構造を与える. この t-構造の核  $\mathcal{A}$  は有限次元  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間の圏と同値であり, よって特に  $S = \mathbb{C} \in \mathcal{A}$  に対して  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(S, S) = 0$  である. 一方,  $\mathcal{D}$  において完全三角形

$$S[1] \rightarrow \mathbb{C}[x]/x^2 \rightarrow S \xrightarrow{\xi} S[2]$$

が存在する. 上の完全三角形において  $\xi \neq 0$  であるため,  $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^2(S, S) \neq 0$  である.

t-構造の有界性を定義しよう.

**定義 7.6** 三角圏  $\mathcal{D}$  の t-構造  $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}$  が有界であるとは

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} (\mathcal{D}^{\leq i} \cap \mathcal{D}^{\geq j})$$

が成立することである.

Abel 圏  $\mathcal{A}$  の有界な導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  において, その標準的な t-構造は有界であ

<sup>3</sup> [GM03, Excercise IV.4.1] に  $D^b(\mathcal{A})$  と  $\mathcal{D}$  が同値となるための条件がある.

る。

次は後に必要になるため、ここで述べておく

**問題 7.7** (i)  $\mathcal{A}$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の部分加法圏とする。このとき  $\mathcal{A}$  が有界な t-構造の核であることと、次の 2 つの条件が成立することが同値になることを示せ。

- 任意の整数  $k_1 > k_2$  と任意の  $A, B \in \mathcal{A}$  に対して  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A[k_1], B[k_2]) = 0$  となる。
- 任意の  $0 \neq E \in \mathcal{D}$  に対して、整数列  $k_1 > k_2 > \dots > k_n$  と完全三角形の列

$$0 = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n = E \quad (7.2)$$

が存在して、すべての  $j$  について  $A_j \in \mathcal{A}[k_j]$  となる。

(ii) 三角圏  $\mathcal{D}$  が有界な t-構造を持ち、その核を  $\mathcal{A}$  とおく。このとき  $\mathcal{D}$  の Grothendieck 群  $K(\mathcal{D})$  と  $\mathcal{A}$  の Grothendieck 群  $K(\mathcal{A})$  の間に自然な同型が存在することを示せ。

**問題 7.8** 三角圏  $\mathcal{D}$  の有界な t-構造が 2 つ与えられているとし、 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  をそれぞれの核とする。もし  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$  が成り立つとき、この 2 つの t-構造は一致することを示せ。

まず用語を準備しておく。まず、三角圏  $\mathcal{D}$  の部分圏  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  が拡大で閉じているとは、任意の  $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$  および  $\mathcal{D}$  における完全三角形

$$E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow E_1[1]$$

に対して、 $E \in \mathcal{C}$  が成立することを指す。また  $\mathcal{D}$  の部分圏、もしくは対象の集合  $S$  に対して、その拡大閉包 (extension closure)

$$\langle S \rangle_{\text{ex}} (\subset \mathcal{D})$$

を拡大で閉じていて  $S$  に含まれる対象を含む最小の  $\mathcal{D}$  の部分加法圏と定義する。

**例 7.9** 三角圏  $\mathcal{D}$  の例外生成列  $(E_1, \dots, E_m)$  は次の条件を満たすときに Ext-例外生成列 (full Ext-exceptional collection) と呼ばれる。

$$\mathrm{Ext}^k(E_i, E_j) = 0, \quad k \leq 0, \quad i \neq j.$$

このとき  $\mathcal{D}$  の有界な t-構造であって、その核  $\mathcal{A}$  が

$$\mathcal{A} = \langle E_1, \dots, E_m \rangle_{\text{ex}}$$

で与えられるものが存在することが知られている（詳細は [CP10, Proposition 2.2] を参照）。

**問題 7.10** 定理 4.45 における  $\mathbb{P}^n$  上の強例外生成列をシフトさせた列

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}[n], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)[n-1], \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n-1)[1], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n))$$

は Ext-例外生成列であることを示せ。

有界な t-構造が与えられたとき、新たに有界な t-構造を構成する“傾斜”と呼ばれる操作を説明しよう。傾斜は、t-構造の核に捩れ対が与えられたとき行うことができる。

**定義 7.11** Abel 圏  $\mathcal{A}$  の充満部分圏の組  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は次の条件を満たすときに  $\mathcal{A}$  の捩れ対 (torsion pair) と呼ばれる。

- 任意の  $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$  に対して  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0$  である。
- 任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して、完全系列

$$0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$$

で、 $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$  となるものが存在する。

**問題 7.12**  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は Abel 圏  $\mathcal{A}$  の捩れ対とする。このとき

$$\mathcal{T} = {}^\perp \mathcal{F} := \{T \in \mathcal{A} : \text{任意の } F \in \mathcal{F} \text{ に対して } \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0\},$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{T}^\perp := \{F \in \mathcal{A} : \text{任意の } T \in \mathcal{T} \text{ に対して } \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, F) = 0\}$$

が成り立つことを示せ。

三角圏  $\mathcal{D}$  上の有界な t-構造  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  の核  $\mathcal{A}$  上の捩れ対  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  が与えられたとする。

$${}^\dagger \mathcal{D}^{\leq 0} := \{E \in \mathcal{D}^{\leq 0} : \mathcal{H}^0(E) \in \mathcal{T}\}$$

$${}^\dagger \mathcal{D}^{\geq 0} := \{E \in \mathcal{D}^{\geq -1} : \mathcal{H}^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$$

と定めれば、これも  $\mathcal{D}$  上の有界な t-構造を与えることが知られている [HRS96]. この t-構造の核  $\mathcal{A}^\dagger$  は次で与えられる：

$$\mathcal{A}^\dagger := \left\{ E \in \mathcal{D} : \begin{array}{l} \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^0(E) \in \mathcal{T}, \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^{-1}(E) \in \mathcal{F} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{A}}^i(E) = 0, i \neq 0, -1. \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}^\dagger$  は捩れ対  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  による  $\mathcal{A}$  の傾斜 (tilting) と呼ばれる.  $\mathcal{A}^\dagger$  は次のようにも記述できる.

$$\mathcal{A}^\dagger = \langle \mathcal{F}[1], \mathcal{T} \rangle_{\text{ex}}.$$

**例 7.13**  $X$  を代数多様体とし、 $\mathcal{D} = D^b(X)$  とする.  $\mathcal{T}$  を捩れ層全体からなる  $\text{Coh}(X)$  の部分圏とし、 $\mathcal{F}$  を捩れがない連接層<sup>4</sup>全体からなる  $\text{Coh}(X)$  の部分圏とする. このとき、 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は  $\text{Coh}(X)$  の捩れ対である. 対応する傾斜

$$\langle \mathcal{F}[1], \mathcal{T} \rangle_{\text{ex}} \subset D^b(X)$$

は  $D^b(X)$  の標準的ではない t-構造の核を与える.

**問題 7.14**  $\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $\mathcal{A}, \mathcal{A}^\dagger$  を  $\mathcal{D}$  上の有界な t-構造の核とする. これが条件  $\mathcal{A}^\dagger \subset \langle \mathcal{A}[1], \mathcal{A} \rangle_{\text{ex}}$  を満たしていると仮定する.

- (i)  $\mathcal{A} \subset \langle \mathcal{A}^\dagger, \mathcal{A}^\dagger[-1] \rangle_{\text{ex}}$  であることを示せ.
- (ii)  $\mathcal{T} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\dagger, \mathcal{F} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{A}^\dagger[-1])$  とおくと、 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は  $\mathcal{A}$  の捩れ対であり、 $\mathcal{A}^\dagger$  は  $\mathcal{A}$  の  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  による傾斜であることを示せ.

## 7.2 一般的なひねくれ者

$X$  を滑らかな 3 次元代数多様体とし、フロップ収縮  $f: X \rightarrow Y$  に対し、Bridgeland [Bri02] は  $X$  上の偏屈連接層のなす Abel 圏を導入した. これは  $D^b(X)$  の有界な t-構造の核である. ここでは次のような少し一般化した状況で偏屈連接層の圏を定義する.

$f: X \rightarrow Y$  を Krull 次元が有限な Noether スキームの間の射影的射とし、 $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  が成り立ち、さらに  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元とする. ここでは  $f$  が双有理であるとは仮定しない. まず、 $\text{Coh}(X)$  の部分圏  $\mathcal{C}$  を次で定める：

---

<sup>4</sup>  $F \in \text{Coh}(X)$  は部分捩れ層が存在しないときに、捩れがないと呼ばれる.

$$\mathcal{C} := \{F \in \mathrm{Coh}(X) : \mathbf{R}f_* F = 0\}. \quad (7.3)$$

さらに  $p \in \{-1, 0\}$  に対して、 $\mathrm{Coh}(X)$  の部分圏の組  $({}^p\mathcal{T}, {}^p\mathcal{F})$  を以下で定義する。

$${}^{-1}\mathcal{T} := \{E \in \mathrm{Coh}(X) : \mathbf{R}^1 f_* E = 0, \mathrm{Hom}_X(E, \mathcal{C}) = 0\}$$

$${}^{-1}\mathcal{F} := \{E \in \mathrm{Coh}(X) : f_* E = 0\}$$

$${}^0\mathcal{T} := \{E \in \mathrm{Coh}(X) : \mathbf{R}^1 f_* E = 0\}$$

$${}^0\mathcal{F} := \{E \in \mathrm{Coh}(X) : f_* E = 0, \mathrm{Hom}_X(\mathcal{C}, E) = 0\}$$

**補題 7.15** 組  $({}^p\mathcal{T}, {}^p\mathcal{F})$ ,  $p = -1, 0$  は  $\mathrm{Coh}(X)$  のそれぞれ捩れ対である。

**証明** 任意の  $T \in {}^p\mathcal{T}$ ,  $F \in {}^p\mathcal{F}$  に対して

$$\mathrm{Hom}_X(T, F) = 0 \quad (7.4)$$

であることと、任意の  $E \in \mathrm{Coh}(X)$  に対して、完全系列

$$0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0 \quad (7.5)$$

で、 $T \in {}^p\mathcal{T}$ ,  $F \in {}^p\mathcal{F}$  となるものが存在することを示したい。

$f$  のファイバーの次元に関する仮定から  ${}^p\mathcal{T}, {}^p\mathcal{F}$  がそれぞれ、商対象、部分対象をとる操作で閉じていることがわかり、さらに  ${}^p\mathcal{T} \cap {}^p\mathcal{F} = \{0\}$  であることから (7.4) が従う。

さらに  ${}^p\mathcal{T}$  は拡大をとるという操作でも閉じていることから、 $T_1, T_2 \in {}^p\mathcal{T}$  がともに  $E$  の部分対象であるとき、 $T_1 \oplus T_2 \in {}^p\mathcal{T}$  の商対象である  $T_1 + T_2$  も  ${}^p\mathcal{T}$  の対象となる。このことと  $E$  のNoether性から  $E$  の部分対象で  ${}^p\mathcal{T}$  の対象となるもののうち最大のものがとれる。これを  $T$  とし、 $F := E/T$  とおく。ここで任意の  $T' \in {}^p\mathcal{T}$  に対し、 $T$  の最大性から  $\mathrm{Hom}_X(T', T) = \mathrm{Hom}_X(T', E)$  がわかるので、 $\mathrm{Hom}_X(T', F) = 0$  が成り立つことに注意する。

さて (7.5) の存在を示すために、 $F \in {}^p\mathcal{F}$  を示したい。射影公式（命題 2.49）を使えば、

$$\mathbf{R}^1 f_* (\mathbf{L}f^*(f_* F)) = \mathcal{H}^1(f_* F) = 0$$

である。 $f$  のファイバーが高々 1 次元であることからスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathbf{R}^p f_* (\mathbf{L}^{-q} f^*(f_* F)) \Rightarrow \mathbf{R} f_* (\mathbf{L} f^*(f_* F))$$

は  $E_2$  退化することとを用いると

$$\mathbf{R}^1 f_* (f^* f_* F) = E_2^{1,0} = 0$$

がわかり、さらに  $f^* \dashv f_*$  より  $\mathrm{Hom}_X(f^* f_* F, \mathcal{C}) = 0$  であるから  $f^* f_* F \in {}^p T$  を得る。したがって随伴射  $f^* f_* F \rightarrow F$  は 0 射となるから、 $f_* F = 0$  となる。これで  $F \in {}^{-1} \mathcal{F}$  になることはいえた。

さらに  $T \in {}^0 T$  なる最大元に対し  $F = E/T$  と定めたときは、 $\mathcal{C} \subset {}^0 T$  より  $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{C}, F) = 0$  が成り立つので  $F \in {}^0 \mathcal{F}$  も成り立つ。以上より (7.5) の存在が示せた。□

**補題 7.16**  ${}^{-1} T = \{T \in \mathrm{Coh}(X) \mid f^* f_* T \rightarrow T$  が全射 } が成り立つ。

**証明**  $T \in \mathrm{Coh}(X)$  に対し、 $f^* f_* T \rightarrow T$  が全射であるとすると、 $F \in {}^{-1} \mathcal{F}$  に対し、单射  $\mathrm{Hom}(T, F) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(f^* f_* T, F) \cong \mathrm{Hom}(f_* T, f_* F)$  が存在するが右辺は  ${}^{-1} \mathcal{F}$  の定義から 0 となる。したがって問題 7.12 より  $T \in {}^{\perp}({}^{-1} \mathcal{F}) = {}^{-1} T$  となる。

逆に  $T \in {}^{-1} T$  とする。 $f^* f_* T \rightarrow T$  の像を  $T_0$  とおくと  $\mathbf{R}^1 f_* T = 0$  より、 $\mathbf{R}^1 f_*(T/T_0) = 0$  がわかる。 $T_0$  は  $Y$  上大域切断で生成されているので、上で示したことから、 $T_0 \in {}^{-1} T$ 、つまり  $\mathbf{R}^1 f_* T_0 = 0$  がわかる。よって  $f_* T \rightarrow f_*(T/T_0)$  は全射となり、特に  $f^* f_* T \rightarrow f^* f_*(T/T_0)$  も全射となる。一方もし  $T/T_0 \notin \mathcal{C}$  ならば  $f_*(T/T_0) \neq 0$  であるから  $f^* f_*(T/T_0) \rightarrow T/T_0$  は 0 射とはならない。よって合成射

$$\phi: f^* f_* T \rightarrow f^* f_*(T/T_0) \rightarrow T/T_0$$

も 0 でない。 $\phi$  は合成射  $f^* f_* T \rightarrow T \rightarrow T/T_0$  とも一致するが、こちらは 0 射になるので、これはおかしい。したがって  $T/T_0 \in \mathcal{C}$  となる。 $T \in {}^{-1} T$  であるから特に  $\mathrm{Hom}(T, \mathcal{C}) = 0$  が成り立ち、したがって  $T = T_0$  となり結論を得る。□

上で述べたように  $\mathcal{D} = D^b(X)$  と標準 t-構造  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  と  $p = -1, 0$  に対し

$${}^p \mathcal{D}^{\leq 0} := \{E \in \mathcal{D}^{\leq 0} : \mathcal{H}^0(E) \in {}^p T\}$$

$${}^p \mathcal{D}^{\geq 0} := \{E \in \mathcal{D}^{\geq -1} : \mathcal{H}^{-1}(E) \in {}^p \mathcal{F}\}$$

とおけば、これは  $X$  の有界な t-構造を定め、この核の元を偏屈連接層 (perverse

coherent sheaf) と呼び、核を  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  と書くことにする。つまり

$$\begin{aligned} {}^p\text{Per}(X/Y) &:= \left\{ E \in \mathcal{D} : \begin{array}{l} \mathcal{H}^0(E) \in {}^p\mathcal{T}, \mathcal{H}^{-1}(E) \in {}^p\mathcal{F}, \\ i \neq 0, -1 \text{ に対し } \mathcal{H}^i(E) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \langle {}^p\mathcal{F}[1], {}^p\mathcal{T} \rangle_{\text{ex}} \end{aligned}$$

である。 ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の対象であるかどうかは次の意味で  $Y$  上局所的な性質である。

**補題 7.17**  $E \in D^b(X)$  が  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の対象であることと、 $Y$  の平坦位相における開被覆  $\{U_i\}$  に対し、各  $E|_{f^{-1}(U_i)}$  が  ${}^p\text{Per}(f^{-1}(U_i)/U_i)$  の対象であることは同値である。

**証明**  $p = -1$  のときのみ説明する。層の間の射の全射性は局所的に確かめられること、さらに平坦底変換 [Har77, Proposition III.9.3] により  $(f^* f_* E)|_{f^{-1}(U_i)} = f^* f_*(E|_{f^{-1}(U_i)})$  であることに注意する。補題 7.16 から  ${}^{-1}\mathcal{T}$  は  $f^{-1}(U_i)$  への制限で保たれる。また逆に  ${}^{-1}\mathcal{T}$  の対象であるということは、各  $i$  に対し、 $f^{-1}(U_i)$  で局所的にチェックすればよい。一方、問題 7.12 で見たように  ${}^{-1}\mathcal{T}$  が定まれば  ${}^{-1}\mathcal{F}$  が定まるところから主張が従う。□

### 7.3 ひねくれた同僚<sup>5</sup>

7.2 節よりやや局所的な状況、つまり  $Y$  がアファイン Noether スキーム  $\text{Spec } R$  であるときに偏屈連接層を考察しよう。正確には  $f: X \rightarrow Y = \text{Spec } R$  を Krull 次元が有限な Noether スキームの間の射影的射とし、 $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  が成り立ち、さらに  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元のときを考える。まず  $\text{Coh}(X)$  の部分圏を

$$\mathfrak{V} := \{ \mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ は大域切断で生成される局所自由層, かつ } H^1(X, \mathcal{M}^\vee) = 0 \}$$

と定め、さらに

$$\mathfrak{V}^* := \{ \mathcal{M}^\vee : \mathcal{M} \in \mathfrak{V} \}$$

とする。このとき  $\mathfrak{V} \subset {}^{-1}\mathcal{T}$ ,  $\mathfrak{V}^* \subset {}^0\mathcal{T}$  であるから、特に

---

<sup>5</sup> 著者（たち）の同僚のことを指しているつもりは、ここではない。

$$\mathfrak{V} \subset {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y), \quad \mathfrak{V}^* \subset {}^0\mathrm{Per}(X/Y)$$

が成り立つことに注意されたい。まず次の用語を準備しておこう。

**定義 7.18**  $\mathcal{E} \in {}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  とする。

(i)  $\mathcal{E}$  が  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の生成元であるとは、 $F \in {}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  に対し

$$\mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathcal{E}, F) = 0$$

であるならば、 $F = 0$  が成り立つときをいう。<sup>6</sup>

(ii)  $\mathcal{E}$  が  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の射影的対象であるとは任意の  $F \in {}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  と  $i \neq 0$  に対し、 $\mathrm{Hom}_{D^b(X)}^i(\mathcal{E}, F) = 0$  が成り立つときをいう。

(iii)  $\mathcal{E}$  が  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の生成元であり、射影的対象でもあるとき、 $\mathcal{E}$  は  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の射影生成元 (projective generator) である、という。

注意 7.22 で説明される等式 (7.7) を使えば、上で与えた射影的対象の定義は Abel 圈  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  に対する通常の射影的対象の定義と一致する。

**補題 7.19** (i)  $\mathcal{M} \in \mathfrak{V}$  すると、 $\mathcal{M}$  は  ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  の射影的対象である。

(ii)  $\mathcal{N} \in \mathfrak{V}^*$  すると、 $\mathcal{N}$  は  ${}^0\mathrm{Per}(X/Y)$  の射影的対象である。

**証明** (i) の証明のみを与える。 $E \in {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  を任意にとる。まず  $\mathcal{M}, E \in {}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  であるから、 $i < 0$  に対し  $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{M}, E) = 0$  が成り立つ。

$Y$  はアファインなので、 $\mathcal{M}$  が大域切断で生成されていることとから  $f^* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  は全射である。補題 7.16 より、 $\mathcal{M} \in {}^{-1}\mathcal{T}$  が成り立つ。よってもし  $F \in {}^{-1}\mathcal{F}$  ならば、 $i > 0$  に対し  $f$  のファイバーの次元の仮定から  $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{M}, F[1]) = 0$  となる。よって以下では  $T \in {}^{-1}\mathcal{T}$ ,  $i > 0$  に対し  $\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{M}, T) = 0$  が成り立つことを示したい。ファイバーの次元の仮定から  $i > 1$  のときはこの等式が成り立つのは自明であるので  $i = 1$  のときを考える。補題 7.16 より、 $T$  は大域切断で生成されるので、 $T$  はある正の整数  $l$  に対し、 $\mathcal{O}_X^{\oplus l}$  の商となり、その核を  $\mathcal{K}$  とする。 $H^1(X, \mathcal{M}^\vee) = 0$  であるから  $\mathrm{Hom}_X^1(\mathcal{M}, T) = \mathrm{Hom}_X^2(\mathcal{M}, \mathcal{K}) = 0$  が成り立つ。以上より主張がいえた。□

射影生成元に対し、傾斜ベクトル束の一般論を適用したい。そこでこれらの用語の関係を説明するためにまず次を証明しておこう。

<sup>6</sup> 三角圏の生成元の定義 (定義 3.9) と比較されたい。

**補題 7.20** (i) ベクトル束  $\mathcal{E}$  が  $D^b(X)$  の生成元であるならば  $D^-(X)$  の生成元となる.

(ii)  $\mathcal{M} \in \mathfrak{V}$  とする. このとき次は同値である.

(1)  $\mathcal{M}$  が  $D^b(X)$  の生成元である.

(2)  $\mathcal{M}$  は Abel 圈  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の生成元である.

(iii)  $\mathcal{N} \in \mathfrak{V}^*$  とする. このとき次は同値である.

(1)  $\mathcal{N}$  が  $D^b(X)$  の生成元である.

(2)  $\mathcal{N}$  は Abel 圈  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の生成元である.

**証明** (i)  $\mathcal{F} \in D^-(X)$  に対し  $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$  が成り立つとし, 仮に  $\mathcal{F} \neq 0$  であるとする. 適当にシフトして  $\mathcal{H}^p(\mathcal{F}) \neq 0$  となる最大の整数  $p$  が 0 であると仮定してよい. (2.33) を使って長完全列

$$\cdots \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \tau_{<0}\mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) \\ \rightarrow \text{Hom}^1(\mathcal{E}, \tau_{<0}\mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}^1(\mathcal{E}, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) \rightarrow \cdots$$

を得る.  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元であり, また  $\mathcal{E}$  がベクトル束であることから,  $i \geq 1$  のとき  $\text{Hom}^i(\mathcal{E}, \tau_{<0}\mathcal{F}) = 0$  となり, 任意の  $i$  に対し  $\text{Hom}^i(\mathcal{E}, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) = 0$  が成り立つ. このとき  $\mathcal{E}$  は  $D^b(X)$  の生成元であったから  $\mathcal{H}^0(\mathcal{F}) = 0$  となり矛盾する. よって  $\mathcal{F} = 0$  となる.

(ii) 補題 7.19 より  $i \neq 0$  と  $E \in {}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  に対し  $\text{Hom}_{D^b(X)}^i(\mathcal{M}, E) = 0$  は常に成り立つ. したがって (1) ならば (2) が成り立つことは明らかである. 逆に  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  が  $D^b(X)$  の有界な t-構造の核であることから,  $\mathcal{F} \in D^b(X)$  に対し (3.4) と同様にスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \text{Hom}_X^p(\mathcal{M}, \mathcal{H}_{-1\text{Per}(X/Y)}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow E^{p+q} = \text{Hom}_{D^b(X)}^{p+q}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

が存在する. 再び補題 7.19 を用いれば,  $p \neq 0$  のとき  $E_2^{p,q} = 0$  より  $E^n = E_2^{0,n}$  となり, (2) から (1) も従う.

(iii) も (ii) と同様に示せる. □

**補題 7.21**  $\mathcal{E}$  を  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束とし, さらに  $\mathcal{E} \in \mathfrak{V}$  であると仮定する.  $A := \text{End}(\mathcal{E})$ , その反対環を  $A^\circ (\cong \text{End}(\mathcal{E}^\vee))$  とおくと,

$$\Phi(-) := \mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, -) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A)$$

$$\Phi^*(-) := \mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}^\vee, -) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A^\circ)$$

は同値である。このとき

$$\Phi(-^1\text{Per}(X/Y)) = \text{mod } A, \quad \Phi^*(-^0\text{Per}(X/Y)) = \text{mod } A^\circ \quad (7.6)$$

が成り立つ。

**証明** 命題 4.52 から  $\Phi, \Phi^*$  の同値性は従う。

また補題 7.19 と  $\Phi$  の定義から  $\Phi(-^1\text{Per}(X/Y)) \subset \text{mod } A$  が成り立つ。どちらも有界な  $t$ -構造の核であるから、問題 7.8 より  $\Phi(-^1\text{Per}(X/Y)) = \text{mod } A$  が成り立つ。 $\Phi^*(-^0\text{Per}(X/Y)) = \text{mod } A^\circ$  が成り立つことの証明は同様であるから省略する。□

**注意 7.22** Abel 圏  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  は有限生成加群のなす圏  $\text{mod } A$  もしくは  $\text{mod } A^\circ$  と同値なので十分射影的対象を持ち、 $\text{Ext}_{{}^p\text{Per}(X/Y)}^i(-, -)$  が定義される。また  $D^b(X)$  は  $D^b({}^p\text{Per}(X/Y))$  と同値になるので、例 2.37 より任意の  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in {}^p\text{Per}(X/Y)$  に対し、

$$\text{Ext}_{{}^p\text{Per}(X/Y)}^i(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = \text{Hom}_{D^b(X)}^i(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \quad (7.7)$$

が成り立つ。

さて次に  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元の特徴付けを行いたい。その準備としてまず次を示そう。

**補題 7.23** 補題 7.19 の逆が成り立つ。つまり

- (i)  $-^1\text{Per}(X/Y)$  の射影的対象は  $\mathfrak{V}$  の対象である。
- (ii)  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の射影的対象は  $\mathfrak{V}^*$  の対象である。

**証明** (i) 7.3 節の仮定の下で補題 4.54 が適用できる。その証明中で得られる傾斜ベクトル束  $\mathcal{E}$  は  $\mathfrak{V}$  の対象であるから、 $A = \text{End}(\mathcal{E})$  とおいて上記の圏同値  $\Phi$  が存在する。 $\mathcal{M}$  が  $-^1\text{Per}(X/Y)$  の射影的対象であるとき、 $\Phi(\mathcal{M})$  は  $\text{mod } A$  の射影的対象であるから  $A = \Phi(\mathcal{E})$  の直和の直和因子である。したがって  $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{E}$  の直和の直和因子である。 $\mathfrak{V}$  は（有限）直和をとる操作、および直和因子をとる操作で閉じているので  $\mathcal{M}$  も  $\mathfrak{V}$  の対象であることがわかる。

- (ii) も同様である。□

次が  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元の特徴付けである。

**命題 7.24** (i)  $-^1\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元は、 $\mathfrak{V}$  の対象  $\mathcal{M}$  であって、 $\det \mathcal{M}$  は

豊富であり、かつ  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{M}$  の(有限)直和の直和因子となっている。また  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元はそのようなものに限る。

(ii)  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元  $\mathcal{N}$  に対し、 $\mathcal{N}^\vee$  は  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元となっている。また  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元はそのようなものに限る。

**証明** (i)  $\mathcal{M}$  を  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元とすると、補題 7.23 で見たように、 $\mathcal{M} \in \mathfrak{V}$  であり、よって  $\mathcal{M}$  は傾斜ベクトル束となる。そこで  $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{M}, -)$  によって、 $D^b(X)$  と  $D^b(\text{mod End}(\mathcal{M}))$  の同値が得られ、さらに  $\mathcal{O}_X$  は  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影的対象であるから、この同値を使うと  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{M}$  の直和の直和因子となることがわかる。一方  $\mathcal{E}$  を補題 4.54 の証明中で構成した傾斜ベクトル束とすると、同様に  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{M}$  の直和の直和因子となる。つまりある  $l > 0$  と  $\mathcal{E}' \in \mathfrak{V}$  が存在し、 $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = \mathcal{M}^{\oplus l}$  が成り立つ。よって  $(\det \mathcal{M})^{\otimes l} = \det \mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}'$  となり、また  $\mathcal{E}$  の構成から  $\det \mathcal{E}$  は豊富であり、 $\mathcal{E}'$  は大域切断で生成されるので、結局  $\det \mathcal{M}$  も豊富となる。

逆に  $\mathcal{M} \in \mathfrak{V}$  で  $\det \mathcal{M}$  が豊富であり、かつ  $\mathcal{O}_X$  が  $\mathcal{M}$  の直和の直和因子となるとき  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元となることの証明、および(ii)の証明は省略する。詳しくは [VdB04b] を参照されたい。  $\square$

**注意 7.25**  $Y$  はアファインであると仮定しているのでベクトル束  $\mathcal{M}$  が大域切断で生成されることは  $f^* f_* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  が全射であることと同値であり、 $H^1(Y, \mathcal{M}^\vee) = 0$  は  $\mathbf{R}^1 f_* \mathcal{M}^\vee = 0$  と同値である。また  $\det \mathcal{M}$  が豊富であることと、 $f$ -豊富であることは同値である。以上よりももし  $\mathcal{M}$  が  $\mathcal{O}_X$  を直和因子に持っていることがわかっていてれば、補題 7.17 および命題 7.24 により、 $\mathcal{M}$  が  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元であることと、 $Y$  の平坦位相における開被覆  $\{U_i\}$  に対し、各  $\mathcal{M}|_{f^{-1}(U_i)}$  が  ${}^p\text{Per}(f^{-1}(U_i)/U_i)$  の射影生成元であることは同値であることがわかる。

また次のように  ${}^p\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元と  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束を結びつけることもできる。

**命題 7.26** (i) 次は同値である。

- (1)  $\mathcal{M} \in \mathfrak{V}$  であって、かつ  $\mathcal{M}$  は  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束である。
- (2)  $\mathcal{M}$  は  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元である。

(ii) 次は同値である。

- (1)  $\mathcal{N} \in \mathfrak{V}^*$  であって、かつ  $\mathcal{N}$  は  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束である。
- (2)  $\mathcal{N}$  は  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元である。

証明 欲題 7.19, 7.20, 7.23 を組み合わせれば証明できる。  $\square$

## 7.4 ひねくれた妻<sup>7</sup>

7.2 節で定義した偏屈連接層を 7.3 節では  $Y$  がアファインスキーム  $\text{Spec } R$  であるときに考察した。さらにこの節では  $R$  が完備局所環であると仮定し、この局所的な状況で偏屈連接層の圏（の直既約な射影的対象）を考察したい。このとき傾斜ベクトル束  $\mathcal{E}$  を以下のように構成していく。 $\{C_i\}_{i=1}^n$  を  $\text{Spec } R$  の閉点  $p$  上のファイバー  $f^{-1}(p)$  に含まれる既約かつ被約な曲線全体の集合とする：

$$f^{-1}(p)_{\text{red}} = \bigcup_{i=1}^n C_i$$

ただし  $f^{-1}(p)$  が 1 点からなるときは  $n = 0$  と定める。

**問題 7.27** (i)  $C$  を既約と限らない射影的代数曲線とし、 $H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$  が成り立つとする。このとき  $C$  の既約成分（の被約化）は  $\mathbb{P}^1$  と同型であることを示せ。

(ii) 上で与えた  $C_i$  が  $\mathbb{P}^1$  と同型であることを示せ。さらに  $C_i$  たちは樹木(tree)をなす、つまり  $i \neq j$  に対し、 $C_i$  と  $C_j$  が交わっているなら、通常 2 重点となり、さらに  $\bigcup_{i=1}^n C_i$  は輪(cycle)を含まないことを示せ。

$R$  が完備な局所環であることから、同型写像

$$\text{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^n \quad \mathcal{L} \mapsto (\deg \mathcal{L}|_{C_i})_{i=1}^n$$

が存在する。さらにこのことから  $X$  上のある有効 Cartier 因子  $D_i$  たちで、 $D_i \cdot C_j = \delta_{ij}$  が成り立つものが存在することがわかる。 $\mathcal{L}_i := \mathcal{O}_X(D_i)$  とおき、 $H^1(X, \mathcal{L}_i^{-1})$  は  $R$ -加群として  $r_i$  個の元からなる最小生成系を持つとする。(4.12) で考えたように、この生成系に対応する拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus r_i} \rightarrow \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{L}_i \rightarrow 0 \tag{7.8}$$

をとり、( $r_i = 0$  のときは、 $\mathcal{M}_i := \mathcal{L}_i$  とする)

<sup>7</sup> 著者の妻（たち）のことを指しているつもりは断じてない。

$$\mathcal{E} := \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{M}_i \quad (7.9)$$

とおく。このとき次が成り立つ。

**補題 7.28** (i)  $\mathcal{E}$  は  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束である。

(ii)  $\mathcal{E} \in \mathfrak{V}$  を満たす。

**証明** (i) まず  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  であったから、完全列

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}_i) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D_i}(D_i)) \rightarrow 0$$

が存在する。さらに  $D_i \rightarrow Y$  は有限射なので  $D_i$  はアファインとなるから、 $\mathcal{O}_{D_i}(D_i)$  は大域切断で生成される。したがって  $\mathcal{L}_i$  も大域切断で生成される。

補題 4.54 の証明と同様にして、

$$\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}_i, \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}_i) = \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}_i) = 0$$

がわかる。 (7.8)に間手  $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{M}_j, -)$  を施すと、同型

$$\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_i) \cong \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{L}_i)$$

が得られ、また完全列

$$\cdots \rightarrow 0 = \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{L}_i) \rightarrow \mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{L}_i|_{D_i}) = 0$$

より  $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{L}_i) = 0$  であるから、結局  $\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_i) = 0$  が任意の  $i, j$  に対して成り立ち、 $i \neq 0$  に対し  $\mathrm{Ext}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$  であることがわかる。

$D^-(X)$  において、 $\mathcal{M}_i$  の構成から明らかなように

$$\left\langle \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i \right\rangle^\perp = \langle \mathcal{E} \rangle^\perp$$

が成り立つ。一方  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i$  は大域切断で生成されているから、[VdB04b, Lemma 3.5.1] を使うと、

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n-1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i \rightarrow \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}_i \rightarrow 0$$

が存在するので、 $D^-(X)$  の部分三角圏として等号

$$\left\langle \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i \right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_X \oplus \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}_i \right\rangle$$

が成り立つ.  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}_i$  は豊富で大域切断で生成されているので, 補題 4.46 より  $\langle \mathcal{O}_X \oplus \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}_i \rangle^\perp = 0$ , 特に  $\langle \mathcal{E} \rangle^\perp = 0$  となり,  $\mathcal{E}$  は  $D^-(X)$  の生成元となる.

(ii) まず  $\mathcal{E}$  は傾斜対象であり  $\mathcal{O}_X$  はその直和因子であったから

$$H^1(X, \mathcal{E}^\vee) = \text{Ext}_X^1(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) = 0$$

が成り立つ. また各  $\mathcal{L}_i$  は大域切断で生成されていたので, (7.8)から  $\mathcal{M}_i$ , さらに  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{M}_i$  も大域切断で生成される. 以上より,  $\mathcal{E} \in \mathfrak{D}$  である.  $\square$

このとき補題 7.21 で見たように  $A := \text{End}(\mathcal{E})$ ,  $A^\circ (\cong \text{End}(\mathcal{E}^\vee))$  をその反対環とおくと

$$\Phi(-) := \mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, -) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A)$$

$$\Phi^*(-) := \mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}^\vee, -) : D^b(X) \rightarrow D^b(\text{mod } A^\circ)$$

は同値で式 (7.6) が成り立つ. 以下

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{O}_X, \quad \mathcal{N}_i := \mathcal{M}_i^\vee \quad (i = 0, \dots, n)$$

とおく.  $R$  が完備局所環のときは命題 7.24 を使って, 次のような, より詳細な射影生成元の特徴づけが得られる.

**命題 7.29** (i)  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の直既約な射影的対象は  $\mathcal{M}_i (i = 0, \dots, n)$  たちに限る. さらに  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元は  $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}_i^{\oplus a_i}, (a_i > 0)$  の形をしている.

(ii)  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の直既約な射影的対象は  $\mathcal{N}_i (i = 0, \dots, n)$  たちに限る. さらに  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元は  $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{N}_i^{\oplus a_i}, (a_i > 0)$  の形をしている.

**証明** (i) 最初の主張の証明は [VdB04b, Proposition 3.5.4] を参照されたい. 以下これを認める. すると  $\mathcal{E}$  が射影的対象であるときは  $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}_i^{\oplus a_i} (a_i \geq 0)$  の形をしていることがわかる. さらに  $\det \mathcal{E} = \bigotimes_{i=0}^n \mathcal{L}_i^{\otimes a_i}$  であり, これが豊富になることと, 任意の  $i > 0$  に対し  $a_i > 0$  となることは同値である. そこで  $\mathcal{E}$  が射影生成元であるならば, 補題 7.24(i) より  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{O}_X$  を直和因子に持つので  $a_0 > 0$  もわかる. 逆に  $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}_i^{\oplus a_i}, (a_i > 0)$  の形の元が  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元になることも補題 7.24(i) から従う.

(ii) は (i) の結果と補題 7.24(ii) を合わせれば得られる.  $\square$

## 7.5 Van den Bergh によるフロップの導來同値

さて予想 6.8(ii) を 3 次元の場合に示そう. 以下では  $X, X^+$  は滑らかであるとは仮定していないことに注意されたい. まずは  $Y$  が局所的な場合を考える.

**命題 7.30**  $R$  を完備で正規な 3 次元 Gorenstein 局所環で  $Y = \text{Spec } R$  とし,  $X$  を高々 Gorenstein 端末特異点を持つ 3 次元整スキームとする. さらに  $f: X \rightarrow Y, f^+: X^+ \rightarrow Y$  をフロップ収縮とし, 次のフロップの図式があるとする:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & X^+ \\ f \searrow & & \swarrow f^+ \\ & Y & \end{array}$$

このとき導來圏  $D^b(X)$  と  $D^b(X^+)$  の間に同値が存在し,  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  を  ${}^0\text{Per}(X^+/Y)$  に移す.

**証明** 上の  $f$  に対して  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元であり,  $\mathbf{R}f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  は成り立っている.  $Y$  も高々 Gorenstein 端末特異点を持つことがわかるが, これは cDV(compound Du Val) 特異点と呼ばれる, 重複度 2 の超曲面特異点を持つということが知られている. そこで

$$R = \mathbb{C}[[x, y, z, w]]/(x^2 + f(y, z, w))$$

( $f$  の重複度は 2 以上) とおける.  $\iota$  を  $(x, y, z, w) \mapsto (-x, y, z, w)$  で定義される  $R$  の対合 (involution, 位数 2 の自己同型) とすると,  $X^+ = X, f^+ = \iota \circ f$  となることがわかる [Kol89, Theorem 2.4].

$X, Y$  は余次元 1 で同型であることから, 反射的  $\mathcal{O}_X$ -加群のなす圏と, 反射的  $R$ -加群のなす圏は  $f_*$  によって同値となる. 商射  $q: Y \rightarrow Y/\langle \iota \rangle$  と  $Y$  上の Weil 因子  $D$  に対し,  $D + \iota(D) = q^*q_*D$  が成り立ち, また  $Y/\langle \iota \rangle \cong (\mathbb{C}^3, 0)$  より,  $q_*D$  は主因子であることから,  $Y$  の因子類群  $\text{Cl}(Y)$  の中で  $D + \iota(D) = 0$  が成り立つ.  $\text{Cl}(Y)$  を階数 1 の反射的  $R$ -加群の同型類のなす群  $\text{Cl}(R)$  と同一視すると, <sup>8</sup> $\iota$  は  $\text{Cl}(R)$  の元  $I$  を  $I^{-1}$  に移す.

<sup>8</sup> このとき,  $I, J \in \text{Cl}(R)$  に対し, その積  $I \cdot J$  は  $(I \otimes J)^{\vee\vee}$  で定義される.

$\mathcal{M}_i$  を拡大 (7.8) で定めた局所自由層とし,  $\mathcal{N}_i := \mathcal{M}_i^\vee$  とする. さらに

$$M_i := f_* \mathcal{M}_i, \quad N_i := f_* \mathcal{N}_i$$

とおくと,  $\iota(M_i) = N_i, \iota(N_i) = M_i$  が示せる [VdB04b, Proposition 4.3.1].  $X$  上の局所自由層  $\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i, \mathcal{E}$  を  $X^+$  上のそれとみなしたものを  $\mathcal{M}_i^+, \mathcal{N}_i^+, \mathcal{E}^+$  とおくと, 双有理写像  $\phi$  によって引き起こされる同型写像

$$\phi_*: \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}(X^+)$$

によって,

$$\phi_*(\mathcal{M}_i) \cong \mathcal{N}_i^+, \quad \phi_*(\mathcal{N}_i) \cong \mathcal{M}_i^+$$

となり, よって

$$\phi_*(\mathcal{E}) \cong (\mathcal{E}^+)^\vee$$

が成り立つ. したがって環の同型  $\mathrm{End}((\mathcal{E}^+)^\vee) \cong \mathrm{End}(\mathcal{E}) = A$  が存在するので

$$\Psi^{**} := - \otimes_A^L (\mathcal{E}^+)^\vee$$

とおくと,  $\Psi^{**}$  は  $D^b(A)$  と  $D^b(X^+)$  の圏同値を与える. さらに (7.6) で見たように

$$\Psi^{**}(\mathrm{mod} A) = {}^0\mathrm{Per}(X^+/Y)$$

が成り立つ. したがって  $\Psi^{**} \circ \Phi$  が欲しい同値を与える.

□

次に 7.2 節の状況, つまり  $X$  を Noether スキーム,  $f: X \rightarrow Y$  を射影的射とし,  $f$  のファイバーの次元は高々 1 次元であり,  $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  が成り立つものとする.  $Y$  はアファインとは限らないので補題 4.54 のような傾斜ベクトル束は存在するかどうかはわからないが, その代わり  ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  の局所射影生成元  $\mathcal{E}$  が存在する ([VdB04b, Proposition 3.3.2]). さらに命題 7.24 より  $\mathcal{E}^\vee$  は  ${}^0\mathrm{Per}(X/Y)$  の局所射影生成元となることもわかる. ここで  $\mathcal{E} \in {}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  が  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の局所射影生成元 (local projective generator) であるとは  $Y$  のあるアファイン被覆  $\{U_i\}$  に対し,  $\mathcal{E}|_{f^{-1}(U_i)}$  が  ${}^p\mathrm{Per}(f^{-1}(U_i)/U_i)$  の射影生成元となることである.

**補題 7.31**  $\mathcal{E}$  を  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  の局所射影生成元とし,  $\mathcal{A} := f_* \mathrm{End}_X(\mathcal{E})$  とおくと, 関手

$$\Phi := \mathbf{R}f_* \mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, -), \quad \Psi := f^{-1}(-) \xrightarrow{\mathbf{L}}_{f^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{E}$$

は  $D^b(X)$  と  $D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}))$  の間の同値を導き、さらにこの同値は  ${}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  と  $\mathrm{Coh}(\mathcal{A})$  の間の同値も引き起こそす。

証明  $\Psi$  は  $\Phi$  の左隨伴関手であるから、(3.2)で見たように自然変換

$$\epsilon: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \Phi \circ \Psi, \quad \eta: \Psi \circ \Phi \rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

が存在する。そこで例えば、 $\mathcal{F} \in D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}))$  に対し、ある  $C \in D^b(\mathrm{Coh}(\mathcal{A}))$  と、完全三角形

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\eta(\mathcal{F})} \Phi \circ \Psi(\mathcal{F}) \rightarrow C$$

が存在する。各  $f^{-1}(U_i)$  上では補題 7.21 より  $\Phi$  と  $\Psi$  は同値を与えるので、 $C|_{f^{-1}(U_i)} \cong 0$  が成り立つ。したがって  $C \cong 0$  となり、結局  $\eta$  は同型であるといえる。まったく同様に  $\epsilon$  の同型もいえ、結局  $\Phi$  と  $\Psi$  は同値で、互いに擬逆関手を与えることがわかる。

$A_i := \mathrm{End}(\mathcal{E}|_{f^{-1}(U_i)}) = \mathcal{A}|_{U_i}$  とおくと命題 7.19 より  $F \in {}^p\mathrm{Per}(X/Y)$  に対し、 $\Phi(F)|_{U_i} \in \mathrm{mod} A_i$  が成り立つ。したがって、 $\Phi(F) \in \mathrm{Coh}(\mathcal{A})$  であるから、 $\Phi({}^p\mathrm{Per}(X/Y)) \subset \mathrm{Coh}(\mathcal{A})$  が成り立つ。このとき問題 7.8 より  $\Phi({}^p\mathrm{Per}(X/Y)) = \mathrm{Coh}(\mathcal{A})$  が示せる。□

次が 7 章の主結果である。命題 7.30 の結果を大域化する。これは 3 次元の場合の予想 6.8 を肯定的に解決するものである。

**定理 7.32 (Bridgeland, Van den Bergh)**  $X$  を高々 Gorenstein 端末特異点を持つ 3 次元準射影的代数多様体とする。さらに  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f^+: X^+ \rightarrow Y$  をフロップ収縮とし、次のフロップの図式があるとする：

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & X^+ \\ f \searrow & & \swarrow f^+ \\ & Y & \end{array}$$

このとき導來圏  $D^b(X)$  と  $D^b(X^+)$  の間に同値が存在し、 ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  を  ${}^0\mathrm{Per}(X^+/Y)$  に移す。

証明  $X, Y$  は余次元 1 で同型であることから、反射的  $\mathcal{O}_X$ -加群のなす圏と、反射

的  $\mathcal{O}_{X+}$ -加群のなす圏は  $\phi_*$  によって同値となる。そこでまず、 ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の局所射影生成元  $\mathcal{E}$  に対し、それに対する反射的  $\mathcal{O}_{X+}$ -加群  $\phi_*(\mathcal{E})$  が  ${}^0\text{Per}(X^+/Y)$  の局所射影生成元となることを示したい。そこで  $Y$  をアファインとし、 $\mathcal{E}$  を  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  の射影生成元とするとき、 $\phi_*(\mathcal{E})$  が  ${}^0\text{Per}(X^+/Y)$  の射影生成元であることを示せばよい。命題 7.24 から  $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{O}_X$  を直和因子に持ち、よって  $\phi_*(\mathcal{E})$  も  $\mathcal{O}_{X+}$  を直和因子に持つことがわかる。そこで注意 7.25 により、 $Y$  を局所完備環のアファインスキームとしてよいので 7.4 節の一連の結果を使うことができる。特に  $\mathcal{E}$  は命題 7.29 より  $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}_i^{\oplus a_i}$ , ( $a_i > 0$ ) の形をしている。以下命題 7.30 の状況と同じなので、その証明の記号を使うと、 $\phi_*(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{N}_i^+)^{\oplus a_i}$  となることがわかる。再び命題 7.29 を使うと、 $\phi_*(\mathcal{E})$  が  ${}^0\text{Per}(X^+/Y)$  の射影生成元であるといえる。

再び  $Y$  がアファインとは限らない場合に話を戻そう。 $\phi_*(\mathcal{E})$  が  ${}^0\text{Per}(X^+/Y)$  の局所射影生成元となることは上で示した。 $\mathcal{A} := f_* \mathcal{E}nd_X(\mathcal{E})$  とおくと、 $\mathcal{A} \cong f_*^+ \mathcal{E}nd(\phi_*(\mathcal{E}))$  であって、さらに

$$\Phi := \mathbf{R}f_* \mathcal{H}om(\mathcal{E}, -), \quad \Psi^{+*} := (f^+)^{-1}(-) \xrightarrow{\mathbf{L}} \otimes_{(f^+)^{-1}\mathcal{A}}^{\mathbf{L}} \phi_*(\mathcal{E})$$

とおくと、 $\Phi$  は  $D^b(X)$  と  $D^b(\text{Coh}(\mathcal{A}))$  の、 $\Psi^{+*}$  は  $D^b(\text{Coh}(\mathcal{A}))$  と  $D^b(X^+)$  の圏同値を与える、補題 7.31 で見たように、

$$\Phi({}^{-1}\text{Per}(X/Y)) = \text{Coh } \mathcal{A} \quad \Psi^{+*}(\text{Coh } \mathcal{A}) = {}^0\text{Per}(X^+/Y)$$

が成り立つ。したがって  $\Psi^{+*} \circ \Phi$  が欲しい同値を与える。  $\square$

## 7.6 非可換クレバント解消 (NCCR)

**定義 7.33**  $R$  を正規な Gorenstein 可換整域であり、かつ有限生成  $\mathbb{C}$ -代数であるとする。また  $A$  を  $R$ -代数であって、 $R$ -加群として有限生成とする。 $A$  が  $R$  の非可換クレバント解消 (non-commutative crepant resolution, NCCR) であるとは次が成り立つときをいう：<sup>9</sup>

- (i)  $A$  の大域次元  $\text{gl.dim } A$  が有限であって、
- (ii) ある反射的な  $R$ -加群  $M$  が存在し、 $A = \text{End}_R(M)$  が成り立ち、さらに
- (iii)  $R$  の任意の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対し  $A_{\mathfrak{m}}$  は MCM  $R_{\mathfrak{m}}$ -加群である。

---

<sup>9</sup> ここで、“非可換”という用語は“必ずしも可換とは限らない”という意味で用いられている。

NCCR はもちろん、CCR（可換なクレパント解消）の非可換な類似として導入された概念である。7.7 節で、定義 7.33(i) が CCR の定義 6.7(i)（非特異性）、定義 7.33(ii) が定義 6.7(ii)（双有理性）、定義 7.33(iii) が定義 6.7(iii)（クレパント性）に対応することを見る。

**例 7.34**  $G$  を  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$  の有限部分群、 $S := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 、 $R := S^G$  とおく。このときねじれ群環 (skew group ring)  $S * G$  は  $R$  の NCCR となる。実際、まず [Yos90, p. 89], [LW12, Theorem 5.15] によると、ねじれ群環  $S * G$  と環  $\mathrm{End}_R(S)$  は同型であり、さらに  $S$  は CM  $R$ -加群 ([LW12, Exercise 5.30]) であるから特に反射的（反射的であることは局所的性質であるので [LW12, Corollary A.14] が使える。）となる。さらに  $S * G$ -加群  $a, b$  に対し、 $\mathrm{Ext}_S^i(a, b)^G \cong \mathrm{Ext}_{S * G}^i(a, b)$  ([Yos90, p. 85], [LW12, p. 64] 参照) から大域次元の有限性が従う。また定義から  $S * G$  は自由  $S$ -加群であるから  $\mathrm{End}_R(S)$  は CM  $R$ -加群となることもわかる。

[ARS97, p. 86], [Yos90, p. 85] により、Abel 圏の同値

$$\mathrm{Coh}_G(\mathbb{C}^n) \cong \mathrm{mod}(S * G)^\circ$$

が存在するので、三角圏の同値

$$D_G^b(\mathbb{C}^n) \cong D^b(\mathrm{mod}(S * G)^\circ)$$

が導かれる。このことから予想 6.25 は可換環  $R$  の CCR である  $X$  の導來圏  $D^b(X)$  と、 $R$  の NCCR である  $S * G$  の導來圏が同値になることを予想していることがわかる。このことは予想 7.37 ではるかに一般的な形で期待されている。

次は命題 7.39 の証明で使う。

**補題 7.35**  $R$  を正規な Gorenstein 可換整域であり、かつ有限生成  $\mathbb{C}$ -代数とし、 $f: X \rightarrow Y = \mathrm{Spec} R$  を  $R$  のクレパント解消 (CCR) とする。さらに  $\mathcal{E}$  が  $D^-(X)$  の傾斜ベクトル束であり、 $i \neq 0$  に対し

$$\mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}) = 0 \quad (7.10)$$

が成り立つとする。このとき  $\mathrm{End}_X(\mathcal{E})$  は  $R$  の NCCR となる。

**証明**  $d = \dim R = \dim X$  とする。 $d \leq 1$  以下のときは  $R$  自身が  $R$  の NCCR を与えるので  $d \geq 2$  と仮定してよい。このとき CM  $R$ -加群は反射的  $R$ -加群にもなることに注意されたい。まず

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{E}) (\cong \mathbf{R}^0\Gamma(X, \mathcal{E})), \quad \mathcal{A} = \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, \mathcal{E}), \\ A &= \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{A}) (\cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \end{aligned}$$

と定義する.  $f^*\omega_Y = \omega_X$  であるから  $f^!\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$  が成り立つ. すると Grothendieck 双対性 (定理 A.7) と仮定から  $i \neq 0$  のとき

$$\mathrm{Ext}_R^i(E, R) \cong \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, f^!\mathcal{O}_Y) \cong \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X) = 0$$

が成り立ち, 一方  $R$  が Gorenstein であることから  $R$  の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{m}}}^i(E_{\mathfrak{m}}, R_{\mathfrak{m}}), E(k)) &\cong \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(\mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{m}}}^i(E_{\mathfrak{m}}, \omega_{R_{\mathfrak{m}}}), E(k)) \\ &\cong H_{\mathfrak{m}}^{d-i}(E_{\mathfrak{m}}) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $E(k)$  は剰余体  $k := R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$  の単射的包絡であり, 最後の同型は局所双対性 (定理 A.4) を使った. 定理 A.10 から  $E$  は CM  $R$ -加群であることがわかる. また  $i \neq 0$  のとき

$$\mathrm{Ext}_R^i(A, R) \cong \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_X^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$$

が成り立つので, 上と同様にして  $A$  も CM  $R$ -加群であることがわかる.  $\mathrm{End}_R(E)$  と  $A$  は反射的  $R$ -加群であるから, 余次元 1 で同型な自然な写像  $A \rightarrow \mathrm{End}_R(E)$  は全体で同型になる.

さらに命題 4.52 により関手

$$\Phi = \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, -): D^b(X) \rightarrow D^b(\mathrm{mod} A)$$

は三角圏の同値を与える, また任意の対象  $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ , 任意の  $i \notin [0, d]$  に対し,  $\mathcal{H}^i(\Phi(\mathcal{F})) = 0$  であるから問題 6.20 を使うと  $\mathrm{gl.dim} A < \infty$  も成り立つ.  $\square$

実は [IW14, Corollary 4.15] によると, 次のより強い主張が知られている.

**定理 7.36 (Iyama–Wemyss)**  $R$  を正規な Gorenstein 可換整域であり, かつ有限生成  $\mathbb{C}$ -代数であるとし,  $f: X \rightarrow Y = \mathrm{Spec} R$  を双有理な射影的射とする. さらにある環  $A$  に対し,  $D^b(X)$  と  $D^b(\mathrm{mod} A)$  が三角圏として同値であるとする. このとき次は同値である.

- (i)  $f$  は  $Y$  の CCR を与える.
- (ii)  $A$  は  $R$  の NCCR を与える.

定理 7.36 を用いれば, 補題 7.35 の傾斜対象  $\mathcal{E}$  が式 (7.10) を満たさなくても

$\text{End}_X(\mathcal{E})$  は  $R$  の NCCR であることがわかる.

## 7.7 なぜ NCCR と呼ぶのか？

この節では、定義 7.33 で与えた環  $A$  をなぜ  $R$  のクレバント解消と呼ぶのか、という問い合わせてみよう。以下、 $R$  を正規な Gorenstein 整域であり、かつ有限生成  $\mathbb{C}$ -代数であるとし、 $A$  を  $R$ -加群として有限生成な  $R$ -代数とする。また

$$\text{主張 a} \longleftrightarrow \text{主張 b}$$

とあつたら、“主張 a と主張 b は対応する”程度の意味を持つとする。ただし中には厳密に同値関係を意味するときもある。

局所可換環に対しては、大域次元が有限であることと正則であることは同値であったので、その類似で

$$A \text{ が “非特異”} \longleftrightarrow \text{gl.dim } A < \infty$$

とみなしてよいだろう。さらに 2 つの代数多様体が双有理であるとはそれらの有理関数体が一致することであったから、 $K$  を  $R$  の商体とすると

$A$  と  $R$  が “双有理”

$$\begin{aligned} &\longleftrightarrow A \otimes_R K \quad “=” \quad K \\ &\longleftrightarrow \text{mod } A \otimes_R K \cong \text{mod } K \quad (\text{つまり } A \otimes_R K \text{ と } K \text{ は森田同値}) \\ &\xrightarrow{(a)} \text{自然数 } n \text{ が存在し } A \otimes_R K \cong M_n(K) \end{aligned}$$

(a) は森田同値の一般論から出てくる（例えば [Lam99, p. 492] を参照）。最後の式から  $A \subset M_n(K)$  がわかり  $A$  は  $M_n(K)$  の中で  $R$ -order となる。ちなみに反射的  $R$ -加群  $M$  が存在し  $A = \text{End}_R(M)$  と書けるとき最後の式は従う。

以下簡単のため  $R$  を局所完備環とする。 $\omega_R$  を  $R$  の標準加群とし、 $\omega_R^\bullet$  を正規化された双対化複体とすると、 $\omega_R^\bullet = \omega_R[n] = R[n]$  となり、 $A$  の正規化された双対複体は  $\omega_A^\bullet = \mathbf{R}\text{Hom}_R(A, \omega_R^\bullet)$  となる（例 A.3(ii) 参照）。<sup>10</sup> クレバントとなるためにはこれが加群  $\omega_R$  の“引き戻しのシフト”でなければいけないから、

---

<sup>10</sup>  $A$  は可換環であるとは限らないが、[YZ06] によれば双対複体が定義できる。

$\omega_A^\bullet$  は  $A$  加群のシフトで得られる

$$\longleftrightarrow i > 0 \text{ に対し } \mathrm{Ext}_R^i(A, \omega_R) = 0$$

$$\xleftarrow{(b)} i < n \text{ に対し } H_{\mathfrak{m}}^i(A) = 0 \quad (\mathfrak{m} \text{ は } R \text{ の極大イデアル})$$

$$\longleftrightarrow A \text{ は CM } R\text{-加群}$$

(b) は局所双対性 (定理 A.4) から出る. 上を仮定すると

$$\omega_A = \mathrm{Hom}_R(A, \omega_R) = \mathrm{Hom}_R(A, R) \otimes_R \omega_R$$

であるから

“クレバント”

$$\longleftrightarrow A = \mathrm{Hom}_R(A, R)$$

$$\xleftarrow{(c)} A \text{ は } M_n(K) \text{ の中で極大 } R\text{-order}$$

$$\xleftarrow{(d)} \text{ある反射的 } R\text{-加群 } M \text{ が存在し } A = \mathrm{End}_R(M)$$

(c) については [VdB04a, p. 754] を参照. (d) は [AG60, Proposition 4.2] の帰結である.

## 7.8 NCCR vs. CCR

$R$  を正規な Gorenstein 可換整域であり, かつ有限生成 C-代数であるとする. 次の予想は予想 6.8 と予想 6.25 を強めた形 (例 7.34 参照) になっている.

**予想 7.37 ([VdB04a])**  $Y = \mathrm{Spec} R$  の (可換であっても非可換であっても) 任意のクレバント解消の導来圏は同値である.

$R$  の任意の CCR は定理 6.6 より, フロップの合成で結べるが,  $R$  が 3 次元であるときは, 定理 7.32 を用いれば, それらの導来圏は同値であることがわかる. さらに Van den Bergh はこの結果と系 6.27 の証明を使い次を示した.

**定理 7.38 ([VdB04a])**  $R$  が 3 次元端末特異点を持つとき, 予想 7.37 が正しい.

**証明**  $A$  を  $R$  の NCCR とする.

**ステップ 1**  $A$  表現のモジュライ空間 ( $A$ -Hilbert スキーム)  $X' \rightarrow Y$  を構成す

る.  $X'$  は  $R$  上のスキーム  $Z$  を  $Z$  上の  $\lambda$ -安定な  $A$  表現の族に対応させる関手を表現する.<sup>11</sup>

**ステップ 2** 系 6.27 の証明と同様にして  $X'$  が  $Y$  の CCR を与え, さらに  $\mathcal{U}$  を上記の関手の普遍族としたとき, 関手

$$D^b(X') \rightarrow D^b(\mathrm{mod} A) \quad E \mapsto \mathbf{R}\Gamma(E \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}^{\mathbf{L}} \mathcal{U}).$$

は圏同値を与えることが示せる.

**ステップ 3**  $f: X \rightarrow Y = \mathrm{Spec} R$  を  $R$  の CCR とすると定理 7.32 より, 圏同値  $D^b(X') \cong D^b(X)$  が従う. 以上より圏同値

$$D^b(X) \cong D^b(\mathrm{mod} A)$$

が存在する.

以上の議論から  $R$  が 3 次元端末特異点を持つとき, 予想 7.37 が成り立つことがわかる.  $\square$

より一般に  $R$  が 3 次元であるときは予想 7.37 は正しいことが知られている ([IR08]). 次の命題は面白い.

**命題 7.39** ([VdB04a], [VdB04b])  $R$  が 3 次元端末特異点を持つとき,  $R$  の CCR の存在と  $R$  の NCCR の存在は同値である.

**証明**  $f: X \rightarrow Y = \mathrm{Spec} R$  を  $R$  のクレバント解消 (CCR) とする. ここで  $R$  が 3 次元端末特異点だから  $f$  のファイバーの次元が高々 1 次元であり,  $\mathbf{R}f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$  も成り立つ. そこで  $\mathcal{E}$  を補題 4.54 の証明中で構成した傾斜ベクトル束とする,  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{E}$  の直和因子であるから,  $\mathcal{E}$  は補題 7.35 の条件を満たす. したがって  $R$  の NCCR が存在する.

また定理 7.38 の証明中で述べたように  $R$  の NCCR が存在するときは  $R$  の CCR も存在することがわかる.  $\square$

**例 7.40** (i)  $\dim R \geq 4$  のときは NCCR が存在しても CCR が存在するとは限らないことが次の例でわかる.  $G = \langle \mathrm{diag}(-1, -1, -1, -1) \rangle$  を  $\mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$  の部分群とし,  $R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_4]^G$  とおく. このとき  $Y := \mathrm{Spec} R = \mathbb{C}^4/G$  は

<sup>11</sup> 正確にはモジュライ空間  $\mathcal{M}$  の連結成分のうち, 自然な写像  $\mathcal{M} \rightarrow Y$  による像が  $Y$  全体となるものを  $X'$  と呼んでいる. 用語などは元論文を参照のこと.

Gorenstein 端末特異点を持つ ([Kol13, Theorem 3.21] 参照).  $Y$  が CCR を持つと仮定して, それを  $f: X \rightarrow Y$  とすると,  $Y$  が端末的であり  $f^*\omega_Y = \omega_X$  であることから,  $f$  は例外因子を持たず, 余次元 1 で同型となる. そこで  $H$  を  $X$  上豊富な因子とし,  $H_Y$  を  $H$  の  $Y$  上狭義変換とする.  $Y$  は商特異点を持つので  $\mathbb{Q}$ -分解的となり,  $H_Y$  の  $f$  での引き戻しが定義され,  $f^*H_Y = H$  が成り立つ. ところがこのとき  $f$  で潰れる曲線  $C$  に対し,  $H \cdot C = 0$  となるので, これはおかしい. よって  $Y$  (もしくは  $R$ ) は CCR を持たないことがわかる. 一方, 例 7.34 で見たように  $R$  は NCCR を持つ.

(ii)  $R := \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_0^5 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4)$  とおくと, これは CCR  $X \rightarrow \text{Spec } R$  を持つが,  $X$  と導来同値な NCCR  $A$  は存在しないことが [IW14, Theorem 4.20] で示されている. より強く,  $R$  は NCCR を持たないことも次のようにわかる. もし反射  $R$ -加群  $M$  に対し,  $A := \text{End}_R(M)$  が  $R$  の NCCR を与えるとする. このとき  $M$  の  $R$  の原点での完備化  $\widehat{M}$  に対し,  $\text{End}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$  は  $\widehat{R}$  の NCCR を与える.<sup>12</sup> この事実は [Dao10, Theorem 1.2 (2)] に矛盾し, 結局  $R$  は NCCR を持たないことがわかる.

## 7.9 フロップ-フロップ関手

$f: X \rightarrow Y$  を 3 次元フロップ収縮,  $f^+: X^+ \rightarrow Y$  をそのフロップとする. 定理 7.32において, 3 次元フロップによって導来同値

$$\Phi_{X \rightarrow X^+}: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X^+), {}^{-1}\text{Per}(X/Y) \xrightarrow{\sim} {}^0\text{Per}(X^+/Y)$$

が存在することが示された. 一方, フロップをとるという操作は対称的なので,  $f$  を  $f^+$  のフロップとみなすことができる. よって, 上の導来同値において  $X$  と  $X^+$  を入れ替えて, 導来同値

$$\Phi_{X^+ \rightarrow X}: D^b(X^+) \xrightarrow{\sim} D^b(X), {}^{-1}\text{Per}(X^+/Y) \xrightarrow{\sim} {}^0\text{Per}(X/Y)$$

を得る.

**定義 7.41** 同値関手  $\Phi_{X \rightarrow X^+}, \Phi_{X^+ \rightarrow X}$  の合成によって得られる  $D^b(X)$  の自己同値

---

<sup>12</sup> NCCR という概念は正規な Gorenstein 局所整域などでも考えられる.

$$\Phi_{\text{FF}}: D^b(X) \xrightarrow{\Phi_{X \rightarrow X^+}} D^b(X^+) \xrightarrow{\Phi_{X^+ \rightarrow X}} D^b(X)$$

をフロップ-フロップ関手 (flop-flop functor) と呼ぶ<sup>13</sup>.

関手  $\Phi_{\text{FF}}$  は恒等関手ではなく、何かしらの非自明な自己同値となっている。実際、 $\mathcal{C}_X$  を式 (7.3) で定義した  $\text{Coh}(X)$  の部分圏とすると、

$$\Phi_{X \rightarrow X^+}(\mathcal{C}_X[1]) = \mathcal{C}_{X^+}, \quad \Phi_{X^+ \rightarrow X}(\mathcal{C}_{X^+}[1]) = \mathcal{C}_X \quad (7.11)$$

となるため、同値  $\Phi_{\text{FF}}$  は  $\mathcal{C}_X$  を  $\mathcal{C}_X[-2]$  に移す。そこで、自己同値  $\Phi_{\text{FF}}$  をフロップを経由せずに記述できないかという問い合わせ自然である。

以降では簡単のため、 $X$  を滑らかとし、 $R$  は完備局所環、 $Y = \text{Spec } R$ 、さらに  $f$  の例外集合  $C$  が  $\mathbb{P}^1$  と同型になる場合を扱う。この場合、フロップ収縮  $f$  の幾何学はよく研究されている。まず、 $C$  の  $X$  における法束は

$$\mathcal{N}_{C/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b), \quad (a, b) \in \{(-1, -1), (0, -2), (1, -3)\}$$

となる。法束の上の形による同型類によって、 $C$  を  $(a, b)$ -曲線と呼ぶ。さらに、 $p = f(C) \in Y$  として、 $f^{-1}(p)$  を  $f$  の  $p$  におけるスキーム論的ファイバーとする。 $f^{-1}(p)$  は  $X$  の部分集合として  $C$  と一致するが、閉部分スキームとしては  $C$  と異なり得る。そこで  $l$  を  $\mathcal{O}_{f^{-1}(p)}$  の  $C$  の生成点における長さとすると、

$$l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (7.12)$$

となる。さらに  $l = 1$  であることと  $C$  が  $(1, -3)$ -曲線ではないことは同値で、この場合の特異点  $p$  は

$$\mathcal{O}_{Y,p} \cong \mathbb{C}[[x, y, z, w]]/(x^2 + y^2 + z^2 + w^{2n}) \quad (n \geq 1) \quad (7.13)$$

の形をしている。さらに、 $n = 1$  であることと  $C$  が  $(-1, -1)$ -曲線となることは同値である。以上の事実については [Rei, KM92] を参照されたい。

**問題 7.42** 上の状況下で、

---

<sup>13</sup> 定義 7.41 のフロップ-フロップ関手は [DW16] で定義されているものとは逆関手の関係になっている。これは導來同値  $\Phi_{X \rightarrow X^+}$  の取り方の違いに起因するものであり、実際 [DW16] では  ${}^0\text{Per}(X/Y)$  を  ${}^{-1}\text{Per}(X^+/Y)$  に移す同値を採用してフロップ-フロップ関手を定義している。

$$\mathrm{Ext}_X^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = \begin{cases} 0 & (a, b) = (-1, -1) \\ \mathbb{C} & (a, b) = (0, -2) \\ \mathbb{C}^2 & (a, b) = (1, -3) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ. (ヒント: スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt_X^q(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_X^{p+q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)$$

$$\text{と } \mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \cong \wedge^i \mathcal{N}_{C/X} \text{ ([Huy06, Proposition 11.8] 参照) を使え.)}$$

さて同値  $\Phi_{\mathrm{FF}}$  を具体的に記述しよう. 最も簡単な場合は  $C$  が  $(-1, -1)$ -曲線の場合である. 問題 7.42 と Serre 双対性定理により, この場合に限り  $\mathcal{O}_C(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) は球面対象となり, 捻り関手  $T_{\mathcal{O}_C(k)}$  を考えることができる.

**命題 7.43**  $C$  が  $(-1, -1)$ -曲線の場合, フロップ-フロップ関手  $\Phi_{\mathrm{FF}}$  は捻り関手  $T_{\mathcal{O}_C(-1)}$  と同型である.

**証明** 同値の合成

$$\Theta = \Phi_{\mathrm{FF}} \circ T_{\mathcal{O}_C(-1)}^{-1} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(X)$$

が恒等関手であることを示せばよい.  ${}^{-1}\mathrm{Per}_0(X/Y)$  を  ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  の部分圏で  $C$  に台を持つ対象からなるものとする. このとき

$${}^{-1}\mathrm{Per}_0(X/Y) = \langle \mathcal{O}_C(-1)[1], \mathcal{O}_C \rangle_{\mathrm{ex}} \quad (7.14)$$

が成り立つ ([VdB04b, Proposition 3.5.7]). さらに

$$\mathcal{C}_X[1] = \langle \mathcal{O}_C(-1)[1] \rangle_{\mathrm{ex}} \subset {}^{-1}\mathrm{Per}_0(X/Y)$$

と式 (7.11) から

$$\Phi_{X \rightarrow X^+}(\mathcal{O}_C(-1)[1]) = \mathcal{O}_{C^+}(-1), \Phi_{X^+ \rightarrow X}(\mathcal{O}_{C^+}(-1)[1]) = \mathcal{O}_C(-1)$$

が従う. 一方, 完全三角形 (2.56) を使うと  $T_{\mathcal{O}_C(-1)}(\mathcal{O}_C(-1)) = \mathcal{O}_C(-1)[-2]$  が成り立つので  $\Theta(\mathcal{O}_C(-1)) = \mathcal{O}_C(-1)$  がわかり, 特に

$$\Theta(\mathcal{C}_X) = \mathcal{C}_X \quad (7.15)$$

が得られる. 関手  $\Phi_{\mathrm{FF}}$  と  $T_{\mathcal{O}_C(-1)}$  は構成から  $\mathbf{R}f_*$  と可換である. この事実と等式 (7.15) に加え  ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  の定義を合わせると,  $\Theta$  は  ${}^{-1}\mathrm{Per}(X/Y)$  の自己同

値を誘導する。さらに  $\Theta$  は  $\mathcal{O}_C(-1)[1]$  を保つので、(7.14) の記述と合わせて  $\Theta(\mathcal{O}_C) = \mathcal{O}_C$  もわかる。一方、閉点  $x \in C$  をとると  ${}^{-1}\text{Per}(X/Y)$  における完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_C(-1)[1] \rightarrow 0$$

が存在する。上述したように  $\Theta$  は  $\mathcal{O}_C$ ,  $\mathcal{O}_C(-1)[1]$  を保つので、 $\mathcal{O}_x$  をある閉点  $x' \in X$  の構造層  $\mathcal{O}_{x'}$  に移す。Fourier–Mukai 変換  $\Theta$  の核  $\mathcal{P} \in D^b(X \times X)$  はファイバー積  $X \times_Y X$  に台を持つ ([Che02] を参照) ことと、点  $z \in X \setminus C$  に対しては  $\Theta(\mathcal{O}_z) = \mathcal{O}_z$  が成り立つという事実から  $x' = x$  が従う。

以上より、同値  $\Theta$  は  $X$  の閉点の構造層を保つことがわかった。このような Fourier–Mukai 変換は  $X$  上の直線束のテンソル積で得られることが知られている ([BM01] を参照)。 $\Theta(\mathcal{O}_X)$  は  $X$  上の直線束となるが、これは  $X \setminus C$  で自明になるため  $\Theta(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X$  となる。以上より  $\Theta \cong \text{id}$  が示された。□

$C$  が  $(-1, -1)$ -曲線ではない場合には  $\mathcal{O}_C(-1)$  が球面対象ではないため、捻り関手  $T_{\mathcal{O}_C(-1)}$  を定義することはできない。そこでフロップ-フロップ同値  $\Phi_{\text{FF}}$  を記述するには何か別のアイデアが必要である。

$C$  が  $(0, -2)$ -曲線の場合には、 $C$  の変形を考察することで  $\Phi_{\text{FF}}$  を捻り関手の一般化と解釈することができる。 $E = \mathcal{O}_C(-1)$  とおいて、(5.15) で与えた変形関手

$$\text{Def}_E : \mathcal{A}\text{rt} \rightarrow \mathfrak{Sets}$$

を考える。 $E$  は  $X$  上の任意の豊富因子  $\omega$  に対して安定となる。そこで、 $v := \text{ch}(E)$  に対し、 $M_\omega(v)$  を定理 5.21 で考えた、 $\text{ch}(-) = v$  を満たす  $\omega$ -安定層のモジュライ空間<sup>14</sup>として、

$$R_E = \widehat{\mathcal{O}}_{M_\omega(v), [E]}$$

とおくと、(5.16) によって  $\text{Hom}(R_E, -)$  と  $\text{Def}_E(-)$  が関手の同型となる。

**問題 7.44**  $M_\omega(v)$  の閉点は  $[E]$  の 1 点のみであることを示せ。

$C$  が  $(0, -2)$ -曲線の場合、 $\text{Ext}_X^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = \mathbb{C}$  であり、これは  $M_\omega(v)$  の  $[E]$  における接空間を与える。よって  $R_E$  は

<sup>14</sup> 定理 5.21 では  $X$  が射影的である場合を扱ったが、本節の  $X$  は  $Y$  上射影的であるため、同様の議論によりモジュライ空間  $M_\omega(v)$  を考察することができる。

$$R_E = \mathbb{C}[[x]]/I$$

という形をしている。ここで  $I$  は  $\mathbb{C}[[x]]$  のイデアルである。一方、 $M_\omega(v)$  の閉点は  $[E]$  のみであるため、 $I \neq 0$  である。よって  $I = (x^n)$  という形をしていなければいけない。（実はこの  $n$  と式 (7.13) における  $n$  は等しい。）よって、

$$M_\omega(v) = \text{Spec } R_E = \text{Spec } \mathbb{C}[x]/(x^n) \quad (7.16)$$

がいえる。そこで  $\mathcal{U}$  を普遍層

$$\mathcal{U} \in \text{Coh}(X \times \text{Spec } R_E) \quad (7.17)$$

とし、 $\pi_*\mathcal{U}$  を考える。ここで  $\pi: X \times \text{Spec } R_E \rightarrow X$  は射影である。 $R_E$  は有限次元であるため、 $\pi$  は有限射となるから  $\pi_*\mathcal{U}$  は  $\text{Coh}(X)$  の対象である。

**命題 7.45**  $C \subset X$  が  $(0, -2)$ -曲線の場合、関手  $\Phi_{\text{FF}}$  は次の意味で捻り関手の一般化である<sup>15</sup>：

任意の  $F \in D^b(X)$  に対して完全三角形

$$\mathbf{R}\text{Hom}_X(\pi_*\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\mathbf{L}} \pi_*\mathcal{U} \rightarrow F \rightarrow \Phi_{\text{FF}}(F) \quad (7.18)$$

が存在する。

**証明**  $C$  が  $(0, -2)$ -曲線の場合、問題 7.42 より  $\text{Ext}_X^1(E, E) = \mathbb{C}$  であり、 $E$  は球面対象ではなく、球面捻り  $T_E$  を考察することができない。一方、

$$\text{Ext}_X^i(\pi_*\mathcal{U}, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, 3 \\ 0 & i \neq 0, 3 \end{cases} \quad (7.19)$$

が成立することが示される。つまり、 $E$  自身は球面対象ではないものの、 $\pi_*\mathcal{U}$  は  $E$  に対してあたかも球面対象であるように振る舞う。(7.19)を用いると、問題 3.19 と同様に  $D^b(X)$  の自己同値  $\tilde{T}_E$  であって、任意の  $F \in D^b(X)$  に対して完全三角形

$$\mathbf{R}\text{Hom}_X(\pi_*\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\mathbf{L}} \pi_*\mathcal{U} \rightarrow F \rightarrow \tilde{T}_E(F)$$

が成立するものが存在する。すると、命題 7.43 の証明と同様に  $\Phi_{\text{FF}} \circ \tilde{T}_E^{-1}$  が恒等関手であることが示される。詳細は [Tod07] を参照されたい。□

<sup>15</sup> 完全三角形 (7.18) を完全三角形 (2.56) と比較せよ。

## 7.10 非可換変形とフロップ<sup>°</sup>

前節と同じ状況下で議論を続ける。 $C \subset X$  が  $(1, -3)$ -曲線ではない場合にはフロップ-フロップ関手は捻り関手（の一般化）として理解できる。一方、 $C$  が  $(1, -3)$ -曲線の場合には命題 7.45 の証明で用いた等式 (7.19) が成立せず、完全三角形 (7.18) は存在しない。近年になって Donovan–Wemyss [DW16] により、通常の変形理論を拡張して非可換変形を考察することで命題 7.45 と同様の結論が成立することが示された。本節ではこの非可換変形とフロップとの関係について議論する。

まず、（フロップ収縮の場合に限定せず）非可換変形の一般論について述べる。 $\omega$  を  $X$  上の豊富因子、 $v \in H^*(X, \mathbb{Q})$  とし、 $M_\omega(v)$  を定義 5.17 で考察したモジュライ空間とする。 $\mathcal{A}rt^{nc}$  を（可換とは限らない）有限次元局所  $\mathbb{C}$ -代数のなす圏とする。閉点  $[E] \in M_\omega(v)$  に対して、（反変）関手

$$\text{Def}_E^{nc}: \mathcal{A}rt^{nc} \rightarrow \mathsf{Sets} \quad (7.20)$$

を次で定める：各  $(\Lambda, \mathfrak{n}) \in \mathcal{A}rt^{nc}$  ( $\mathfrak{n}$  は  $\Lambda$  の極大両側イデアル) に対して  $\text{Def}_E^{nc}(\Lambda)$  を組

$$(\mathcal{F}, \psi: \Lambda/\mathfrak{n} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} E)$$

の同型類の集合とする。ここで  $\mathcal{F}$  は連接かつ  $\Lambda$  上平坦な左  $\mathcal{O}_X \otimes \Lambda$ -加群である。明らかに、関手  $\text{Def}_E^{nc}$  を  $\mathcal{A}rt$  に制限すると通常の（可換な）変形関手  $\text{Def}_E$  となる。（5 章において  $\mathcal{A}rt$  は  $\mathbb{C}$  上の Artin 局所環の圏と定義していたため、特に  $\mathcal{A}rt^{nc}$  の部分圏となる。）関手  $\text{Def}_E^{nc}$  は非可換変形関手（non-commutative deformation functor）と呼ばれる。<sup>16</sup>

可換変形の場合とは異なり、一般に非可換変形関手  $\text{Def}_E^{nc}$  は表現可能ではない。一方、 $C \subset X$  をフロップ曲線として  $E = \mathcal{O}_C(-1)$  とすると、関手  $\text{Def}_E^{nc}$  が表現可能であることが [DW16] で示されている。つまり  $R_E^{nc} \in \mathcal{A}rt^{nc}$  と関手の同型

$$\text{Hom}(R_E^{nc}, -) \xrightarrow{\cong} \text{Def}_E^{nc}(-)$$

が存在する。さらに、 $R_E^{nc}$  は 7.4 節で考察した非可換代数を用いて記述できる。 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{M}_1$  を (7.9) で考察した傾斜ベクトル束、 $M_1 = f_* \mathcal{M}_1$  とし、非可

<sup>16</sup> 非可換クレバント解消という用語と同様に、ここでの“非可換”とは、必ずしも可換とは限らない、という意味である。

換交代数

$$A := \mathrm{End}_X(\mathcal{E}) = \mathrm{End}_R(R \oplus M_1)$$

を考えると、7.4節で述べたように導來同値

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, -) : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{mod} A)$$

が存在する。

$\mathrm{add}(R)$  を  $R$  の有限直和の直和因子からなる  $\mathrm{mod} R$  の部分加法圏とし、 $\mathrm{add}(R)$  の対象を経由する  $R \oplus M_1$  の自己準同型からなる  $A$  の両側イデアルを  $[R]$  と定義する。

**定理 7.46 ([DW16])** 上の状況下で  $R_E^{\mathrm{nc}} = A/[R]$  が成立する。さらに、 $R_E^{\mathrm{nc}}$  が非可換であることと  $C$  が  $(1, -3)$ -曲線であることは同値である。

**例 7.47**  $C$  が  $(1, -3)$ -曲線ではない、つまり  $C$  は  $(-1, -1)$ -曲線、もしくは  $(0, -2)$ -曲線とする。このとき、特異点  $p \in Y$  は式(7.13)のように与えられる。この場合、同じ  $n$  を用いて、

$$R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}} = R_{\mathcal{O}_C(-1)} = \mathbb{C}[t]/(t^n)$$

となる。右の等式は(7.16)ですでに見たとおりである。

**例 7.48**  $k \geq 1$  に対して、 $R_k$  を次のようにおく。

$$R_k = \mathbb{C}[[u, v, x, y]]/(u^2 + v^2y - x(x^2 + y^{2k+1})).$$

すると、 $Y = \mathrm{Spec} R_k$  にはクレバント特異点解消  $f: X \rightarrow Y$  が存在して例外集合  $C$  は  $\mathbb{P}^1$  と同型である。さらにこの場合、 $C$  は  $(1, -3)$ -曲線となっている。(実際、(7.12)における  $l$  は  $l = 2$  となる。) この場合、 $R_{\mathcal{O}_C(-1)}$  および  $R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}}$  は次のように計算される(詳細は [DW16, Example 3.14] を参照)。

$$R_{\mathcal{O}_C(-1)} = \mathbb{C}[x, y]/(xy, x^2 - y^{2k+1}),$$

$$R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}} = \mathbb{C}\langle x, y \rangle/(xy + yx, x^2 - y^{2k+1}).$$

特に  $R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}}$  は非可換交代数である。

**問題 7.49** 例 7.48において  $\{x^i y^j \mid 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2k\}$  は  $R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}}$  の基底となることを示し、 $R_{\mathcal{O}_C(-1)}^{\mathrm{nc}}$  が有限次元となることを確かめよ。

$E = \mathcal{O}_C(-1)$  として、関手

$$T_E^{\text{nc}}: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

を次の対象を核とする Fourier–Mukai 関手とする。

$$\text{Cone} \left( \mathbf{R}\text{Hom}_A(R_E^{\text{nc}}, A) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{A^{\text{op}} \otimes A} (\mathcal{E}^\vee \boxtimes \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_X} \right).$$

ここで定理 7.46 で述べた  $R_E^{\text{nc}} = A/[R]$  により  $R_E^{\text{nc}}$  は両側  $A$ -加群であり、これにより  $\mathbf{R}\text{Hom}_A(R_E^{\text{nc}}, A)$  を両側  $A$ -加群の複体とみなしている。また、 $\mathcal{U}^{\text{nc}}$  を非可換変形関手  $\text{Def}_E^{\text{nc}}$  に関する普遍層

$$\mathcal{U}^{\text{nc}} \in \text{Coh}(X \otimes R_E^{\text{nc}})$$

とする。ここで右辺は連接な左  $\mathcal{O}_X \otimes R_E^{\text{nc}}$ -加群のなす Abel 圈である。関手

$$\pi_*: \text{Coh}(X \otimes R_E^{\text{nc}}) \rightarrow \text{Coh}(X)$$

を  $R_E^{\text{nc}}$ -加群の構造を忘れる忘却関手とする。（前節において、 $\pi$  は射影  $\pi: X \times \text{Spec } R_E \rightarrow \text{Spec } R_E$  であったことに注意する。）次が [DW16] における主定理である。

**定理 7.50** ([DW16]) 関手  $T_E^{\text{nc}}$  は  $D^b(X)$  の自己同値であり、 $\Phi_{\text{FF}}$  と同型である。さらに任意の  $F \in D^b(X)$  に対して、完全三角形

$$\mathbf{R}\text{Hom}(\pi_* \mathcal{U}^{\text{nc}}, F) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{R_E^{\text{nc}}} \pi_* \mathcal{U}^{\text{nc}} \rightarrow F \rightarrow T_E^{\text{nc}}(F) \quad (7.21)$$

が存在する。

**証明** 非可換変形を考えることで、 $C$  が  $(1, -3)$ -曲線の場合でも (7.19) と同様の等式

$$\text{Ext}_X^i(\pi_* \mathcal{U}^{\text{nc}}, E) = \begin{cases} \mathbb{C}, & i = 0, 3 \\ 0, & i \neq 0, 3 \end{cases}$$

が示され、命題 7.45 の証明と同様に定理が証明される。詳細は [DW16] を参照されたい。□

完全三角形 (7.21) の存在により、関手  $T_E^{\text{nc}}$  は定理 2.56 の捻り関手の一般化と解釈できる。関手  $T_E^{\text{nc}}$  は非可換捻り関手 (non-commutative twist functor) と呼ばれる。

# 第8章 連接層の導來圏と 行列因子化

行列因子化は MCM (maximal Cohen–Macaulay) 加群の研究のために 1980 年頃 Eisenbud によって導入された。一方、Orlov は 2009 年の論文 [Orl09] で行列因子化の圏と超曲面の連接層のなす導來圏の間に関係があることを発見した。この事実は超弦理論による Calabi–Yau/Landau–Ginzburg(CY/LG) 対応によって示唆されたものであった。この章では行列因子化の定義を与えた後、行列因子化の圏と連接層の導來圏の一般化となる gauged LG 模型の因子化の圏を導入し、さらに Orlov による定理 8.39 について解説する。例えば定理 8.39 により、 $d + 2$  次の  $d$  次元 Calabi–Yau 超曲面の導來圏は行列因子化の圏と同値であることがわかる。章の最後に Calabi–Yau 超曲面の場合に、Orlov が与えた同値に関して具体的な計算を試みる。

この章では  $k$  を体とし、環は簡単のため可換環とする。Orlov の論文では非可換環の場合も扱っているが、以下で述べる可換環のときの議論と本質的に変わらない部分が多い。

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  を加法圏とし、 $\Phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  を加法関手とする。このとき  $\text{Ker } \Phi$  を

$$\text{Ker } \Phi := \{E \in \mathcal{C} : \Phi(E) = 0\}$$

と定め、 $\mathcal{C}$  の充満部分圏とみなす。

## 8.1 完全圏の導來圏

$\mathcal{B}$  をある Abel 圏  $\mathcal{A}$  の充満部分加法圏とし、拡大で閉じている、つまり  $\mathcal{A}$  の任意の短完全列

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0 \tag{8.1}$$

に対し、 $E, G \in \mathcal{B}$  であるならば  $F \in \mathcal{B}$  であるとする。このとき圏  $\mathcal{B}$  を完全圏 (exact category) という。例えば与えられた環  $R$  上の加群の圏  $\text{mod } R$  の射影的対象からなる充満部分圏  $\text{proj } R$  は完全圏をなす。

元々は完全圏は Abel 圏への埋め込みの存在を仮定せず、加法圏とその“短完全列”の集まりの対でいくつかの公理を満たすもの、として定義されていたが、以下では上で述べた定義を知っておけば十分である。

完全圏  $\mathcal{B}$  の複体

$$E^\bullet = (\cdots \rightarrow E^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} E^i \xrightarrow{d^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots)$$

が完全であるとは、各  $i$  に対し  $\text{Ker } d^i = \text{Im } d^{i-1} \in \mathcal{B}$  が成り立つときをいう。Abel 圏のときとまったく同様にして、完全圏  $\mathcal{B}$  に対しても、ホモトピー  $K(\mathcal{B})$  や、導來圏  $D(\mathcal{B})$  が定義できる。詳細は例えば [Kel96] を参照されたい。

後で出てくるので、Frobenius 圏の安定圏について少しだけ触れておこう。Frobenius 圏 (Frobenius category) とは完全圏であって、十分な射影的対象と単射的対象を持ち、また射影的対象と単射的対象が一致するような圏である。後で述べるように Gorenstein 環  $R$  上の極大 Cohen–Macaulay 加群のなす圏  $\text{CM}(R)$  は Frobenius 圏である。Frobenius 圏  $\mathcal{B}$  に対し、その安定圏 (stable category)  $\underline{\mathcal{B}}$  とは、対象は  $\mathcal{B}$  と同じものとし、射の集合を次のように定めたものである。 $E, F \in \mathcal{B}$  に対し、Abel 群  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, F)$  の部分群  $I(E, F)$  を  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, F)$  であって  $\mathcal{B}$  の射影的対象  $P$  を通過するもの

$$f: E \rightarrow P \rightarrow F$$

全体からなるものとする。このとき

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{B}}}(E, F) := \text{Hom}_{\mathcal{B}}(E, F)/I(E, F)$$

として定める。Frobenius 圏  $\mathcal{B}$  の安定圏  $\underline{\mathcal{B}}$  には三角圏の構造が入ることが知られている ([Hap88], [GM03, p. 277])。

## 8.2 Serre 商と Verdier 商

この節では圏の部分圏による商を考えたい。まずは Abel 圏の、その狭義充満部分加法圏による商を考える。

**定義 8.1 (Serre 部分圏)**  $\mathcal{A}$  を Abel 圏とし  $\mathcal{B}$  をその狭義充満部分加法圏とする。

$\mathcal{B}$  が **Serre 部分圏** (Serre subcategory) であるとは、完全列 (8.1)に対し、 $E, G \in \mathcal{B}$  であることと、 $F \in \mathcal{B}$  であることが同値であるときをいう。

Abel 圏の Serre 部分圏は部分 Abel 圏となる。また  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  を Abel 圏とし、 $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を完全関手とするとき  $\text{Ker } \Phi$  は  $\mathcal{A}$  の Serre 部分圏となる。

次の定理は [Gab62] による。

**定理 8.2 (Serre 商)**  $\mathcal{A}$  を Abel 圏とし  $\mathcal{B}$  をその Serre 部分圏とする。このとき Abel 圏  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  と完全関手（商関手）

$$Q: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{B} \quad (8.2)$$

であって、次の性質を持つものが存在する：

Abel 圏  $\mathcal{S}$  と完全関手  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$  であって  $\text{Ker } \Phi$  が  $\mathcal{B}$  を部分圏として含むとき、ある関手  $\Phi': \mathcal{A}/\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  がただ 1 つ存在し、

$$\Phi = \Phi' \circ Q$$

が成り立つ。

Abel 圏  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  の対象は  $\mathcal{A}$  の対象と同じで、射は次のようなものになる。 $E, F \in \mathcal{A}$  に対し、 $E$  の部分対象  $E'$  と  $F$  の部分対象  $F'$  で  $E/E', F' \in \mathcal{B}$  となるものたちを考えると、

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}(E, F) := \varinjlim_{E', F'} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E', F/F')$$

となる。 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  を  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{B}$  による **Serre 商** (Serre quotient) と呼ぶ。

次に三角圏の、その狭義充満部分三角圏による商を考えよう。 $\mathcal{D}$  を三角圏とし  $\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  の狭義充満部分三角圏とする。 $\mathcal{D}$  の射の集合を

$$S := \{f : \text{Cone}(f) \in \mathcal{C}\} \quad (8.3)$$

と定めると、 $S$  は  $\mathcal{D}$  の射の積閉系となることが示せる。（定義 2.16 の公理 1, 2 は八面体公理、公理 5 は補題 2.8 より従う。）そこで

$$\mathcal{D}/\mathcal{C} := S^{-1}\mathcal{D}$$

とおき、(2.28)で得られた三角関手

$$Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C} \quad (8.4)$$

を考える。三角関手  $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  に対し、 $\text{Ker } \Phi$  が  $\mathcal{C}$  を部分圏として含むことと、任意の  $s \in S$  に対し  $\Phi(s)$  が同型射となることは同値であることから 補題 2.17 により次を得る。

**補題 8.3** 三角圏  $\mathcal{D}/\mathcal{C}$  と三角関手  $Q$  は次の性質を持つ：

三角圏  $\mathcal{D}'$  と三角関手  $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  であって  $\text{Ker } \Phi$  が  $\mathcal{C}$  を部分圏として含むとき、関手  $\Phi': \mathcal{D}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$  がただ 1 つ存在し、

$$\Phi = \Phi' \circ Q$$

が成り立つ。

ここで  $\text{Ker } \Phi = \text{thick } \mathcal{C}$  となることがわかる。三角圏  $\mathcal{D}/\mathcal{C}$  を  $\mathcal{D}$  の  $\mathcal{C}$  による **Verdier 商** (Verdier quotient) と呼ぶ。

Abel 圏  $\mathcal{A}$  に対し、 $\mathcal{C}$  を非輪状複体のなすホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  の充満部分加法圏とすると、補題 2.19 からこれは部分三角圏となることがわかり、導來圏  $D(\mathcal{A})$  は  $K(\mathcal{A})$  の  $\mathcal{C}$  による Verdier 商として得られることがわかる。

**注意 8.4**  $\mathcal{B}$  を Abel 圏  $\mathcal{A}$  の Serre 部分圏とする。このとき  $* \in \{\pm, b\}$  に対し、Serre 商  $\mathcal{A}/\mathcal{B}$  の導來圏  $D^*(\mathcal{A}/\mathcal{B})$  と、導來圏  $D^*(\mathcal{A})$  の充満部分三角圏  $D_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{A})$  による Verdier 商  $D^*(\mathcal{A})/D_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{A})$  は同値であることが知られている ([Miy91, Theorem 3.2] 参照)。

例えば、 $X$  を準射影的代数多様体とし、 $U$  をその開部分多様体、 $Z = X \setminus U$  とすると、台が  $Z$  に含まれるような  $X$  上の連接層のなす Abel 圏  $\text{Coh}_Z(X)$  は  $\text{Coh}(X)$  の Serre 部分圏であり、また [Har77, Exercise II.5.15] を使えば  $\text{Coh}(U)$  は Serre 商  $\text{Coh}(X)/\text{Coh}_Z(X)$  と同値であることがわかる。例えば [KS94, Proposition 1.7.11] を使うと  $D_{\text{Coh}_Z(X)}^b(X) \cong D^b(\text{Coh}_Z(X))$  がわかるから、上で述べたことから

$$D^b(U) \cong D^b(X)/D^b(\text{Coh}_Z(X))$$

となる。

補題 3.5 を使って次が示せる。

**問題 8.5**  $\mathcal{C}_i$  は三角圏  $\mathcal{D}_i$  の充満部分三角圏とし、 $\Phi^L: \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1$  は  $\Phi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$  の左随伴関手であるとする。もし  $\Phi(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_2$  であって、 $\Phi^L(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{C}_1$  が成り立つとき、補題 8.3 より関手

$$\overline{\Phi}: \mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2, \quad \overline{\Phi^L}: \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$$

が導かれる。このとき次を示せ。

- (i)  $\overline{\Phi^L}$  は  $\overline{\Phi}$  の左随伴関手である。
- (ii)  $\Phi$  が充満忠実であるとき、 $\overline{\Phi}$  も充満忠実になる。

最後に後で使う補題を準備しておこう。

**補題 8.6**  $\mathcal{C}$  を三角圏  $\mathcal{D}$  の充満部分三角圏とし、商関手  $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$ 、埋め込み関手  $j: \mathcal{C}^\perp \hookrightarrow \mathcal{D}, i: {}^\perp \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$  を考える。

- (i)  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  の右許容部分三角圏であるならば関手  $Q \circ j: \mathcal{C}^\perp \hookrightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$  は同値である。
- (ii)  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{D}$  の左許容部分三角圏であるならば 関手  $Q \circ i: {}^\perp \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$  は同値である。

**証明** (ii) の証明は (i) の証明と同様なので (i) のみを示す。 $\mathcal{C}$  が右許容部分三角圏であるとしたとき、 $\mathcal{C}^\perp$  は左許容部分三角圏である。 $j$  の左随伴関手を  $j^L: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^\perp$  とする。命題 4.31 の証明を見ると、半直交分解 (8.5)

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^\perp, \mathcal{C} \rangle \quad (8.5)$$

は  $j, j^L$  を使って次のように記述される：任意の  $x \in \mathcal{D}$  に対し、ある  $y \in \mathcal{C}$  と完全三角形

$$y \rightarrow x \rightarrow j \circ j^L(x) \rightarrow y[1] \quad (8.6)$$

が存在する。これより明らかに  $\mathcal{C} = \text{Ker } j^L$  が成り立つので、補題 8.3 より  $\Phi': \mathcal{D}/\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\perp$  が存在し  $\Phi' \circ Q = j^L$  が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D} & & \\ & \swarrow Q & & \searrow j^L & \\ \mathcal{D}/\mathcal{C} & \xrightarrow[\Phi']{} & \mathcal{C}^\perp & & \end{array}$$

一方  $x' \in \mathcal{C}^\perp$  をとり、 $x = j(x') \in \mathcal{D}$  に対する完全三角形 (8.6)を考えることにより  $j^L \circ j \cong \text{id}_{\mathcal{C}^\perp}$  がわかる。そこで  $\Psi: \mathcal{C}^\perp \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{C}$  を  $\Psi := Q \circ j$  で定めれば、 $\Phi' \circ \Psi \cong \text{id}_{\mathcal{C}^\perp}$  となる。

(8.6)に  $Q$  を適用すれば、 $\Psi \circ j^L = Q \circ j \circ j^L \cong Q$  を得られ、結局  $Q \cong \Psi \circ \Phi' \circ Q$  がわかるので、 $\Psi \circ \Phi' \cong \text{id}_{\mathcal{D}/C}$  が成り立つ。したがって、 $\Psi$  が同値であることが示せた。□

### 8.3 次数付き加群の商圏

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  を次数付き Noether  $k$ -代数とする。このとき  $R$  は  $R_0$  上代数として有限生成で、かつ  $R_0$  が Noether 環である ([BH93, Proposition 1.5.4], [Mat89, Theorem 13.1])。 $M \in \text{Gr } R$  に対し

$$M_{\geq p} := \bigoplus_{i \geq p} M_i$$

とおくと  $M_{\geq p}$  は  $M$  の次数付き部分加群となる。複体  $M^\bullet = (M^q) \in D(\text{Gr } R)$  に対し、新たな複体  $M_{\geq p}^\bullet \in D(\text{Gr } R)$  を  $M_{\geq p}^\bullet := ((M^q)_{\geq p})$  として定める。

$$\text{gr } R_{\geq i}, \quad \text{Gr } R_{\geq i}$$

を  $M \cong M_{\geq i}$  を満たす次数付き加群  $M$  のなす  $\text{gr } R, \text{Gr } R$  の充満部分圏とすると、これらは完全圏となるのでその導來圏が定義される。関手  $\text{tr}_{\geq p}$  を

$$\text{tr}_{\geq p} : \text{gr } R \rightarrow \text{gr } R_{\geq p} \quad M \mapsto M_{\geq p}$$

で定め、これが引き起こす導來圏の間の関手  $D^b(\text{gr } R) \rightarrow D^b(\text{gr } R_{\geq p})$  も  $\text{tr}_{\geq p}$  で表すこととする。

整数  $n$  に対し、 $M(n) \in \text{Gr } R$  を、 $M(n)_i = M_{n+i}$  として定義する。 $\text{Gr } R$  の自己同値  $\tau$  を

$$\tau(M) := M(1)$$

で定め、これが引き起こす導來圏  $D(\text{Gr } R)$  の自己同値も同様に  $\tau$  で表す。 $M, N \in \text{gr } R$  に対し、

$$\text{Ext}_R^j(M, N) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\text{gr } R}^j(M, N(n)) \tag{8.7}$$

が成り立つ。

**注意 8.7**  $M \in \text{gr } R$  に対し、 $M$  の次数付き加群としての射影次元などを  ${}^*\text{proj dim } M$  などと表することにする。等式 (8.7)から  $\text{proj dim } M < \infty$  (もしく

は  $\text{inj dim } M < \infty$ ) であるときは,  ${}^*\text{proj dim } M < \infty$  (もしくは  ${}^*\text{inj dim } M < \infty$ ) であることがわかるが, 実は [FF74, Proposition 3.1, Corollary 4.12] によると逆も成り立つ. また  $\text{gl.dim } R < \infty$  であることと,  ${}^*\text{gl.dim } R < \infty$  であることが同値であることも [FF74, Theorem 3.5] より従う.

以下ではしばしば  $R$  が連結, つまり  $R_0 = k$  であることを仮定するが, このときはイデアル  $R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$  が  $R$  の唯一の極大齊次イデアルとなるから,  $R$  は(次数付き)局所環となる. もしさらに  ${}^*\text{gl.dim } R < \infty$  であるときは, 上で述べたことから  $\text{gl.dim } R < \infty$  となり, 特に  $R$  の極大イデアル  $R_+$  での局所化は正則になる. このとき [BH93, Exercise 2.2.25] や [Mat89, Exercise 19.1] より  $R$  は(重み付き)多項式環  $k[x_1, \dots, x_n]$  ( $\deg x_i > 0$ ) と同型となる. また  $R$  が連結のときは, 次数付き射影  $R$ -加群  $P$  は自由加群になることが知られている ([BH93, Proposition 1.5.15], [Eis00, Theorem R3.2]). ここで  $P \in \text{gr } R$  が自由加群であるとは同型  $P \cong \bigoplus_i R(n_i)$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ) が存在することである.

$\text{tors } R$  で  $k$  上有限次元  $R$ -加群のなす  $\text{gr } R$  の部分圏を表し,  $\text{Tors } R$  で捩れ加群のなす  $\text{Gr } R$  の部分圏を表す. ここで  $R$ -加群の元  $x$  が捩れ元とはある正の整数  $p$  に対し,  $R_{\geq p}x = 0$  が成り立つことであり, すべての元が捩れ元であるような加群が捩れ加群である.

**問題 8.8** (i)  $M \in \text{gr } R$  に対し,  $M \in \text{tors } R$  であることと, ある整数  $p$  に対し,  $M_{\geq p} = 0$  であることは同値であることを示せ.

(ii)  $\text{tors } R = \text{Tors } R \cap \text{gr } R$  となることを示せ.

$\text{tors } R, \text{Tors } R$  はそれぞれ  $\text{gr } R, \text{Gr } R$  の Serre 部分圏となり, 特に完全圏となる. そこでそれまでの Serre 商を考え.

$$\text{qgr } R := \text{gr } R / \text{tors } R, \quad \text{QGr } R := \text{Gr } R / \text{Tors } R$$

とおく.

$R$  が  $R_1$  で生成されているときは関手  $\Gamma_*: \text{Coh}(\text{Proj } R) \rightarrow \text{qgr } R$  を

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(\text{Proj } R, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\text{Proj } R}(n)) \tag{8.8}$$

と定めると, これは Abel 圏の同値を与えることが Serre によって示されている ([Har77, Exercise II.5.9] 参照). このように  $\text{qgr } R$  は古くから代数幾何で考えられている圏である.

次数付き環  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  が  $R_1$  で生成されているとは限らないときでも, Serre

の定理の一般化が成り立つことを述べておこう.  $R$  の元  $r = \sum_i r_i (r_i \in R_i)$  と  $t \in \mathbb{G}_m$  に対し,  $t \cdot r = \sum_i t^i r_i$  と定めることにより,  $R$  には  $R$  の次数により定まる  $\mathbb{G}_m$  の作用が入る. この作用によってアファインスキーム  $\text{Spec } R$  にも  $\mathbb{G}_m$  の作用が入る.  $0$  を  $R$  の極大イデアル  $R_+ = R_{>0}$  に対応する閉点とし, 商スタックを

$$\mathbb{P}\text{roj } R := [(\text{Spec } R \setminus 0) / \mathbb{G}_m]$$

で定めると, 自然な射

$$\mathbb{P}\text{roj } R \rightarrow \text{Proj } R$$

は  $R$  が  $R_1$  で生成されているとき同型となるので, 次の補題は Serre の定理の一般化となっている. 証明は [Orl09, Proposition 28] を参照されたい.

**補題 8.9**  $R$  を連結な次数付き Noether  $k$ -代数とする. このとき Abel 圏の同値

$$\text{QCoh}(\mathbb{P}\text{roj } R) \cong \text{QGr } R, \quad \text{Coh}(\mathbb{P}\text{roj } R) \cong \text{qgr } R$$

が存在する.

Gabriel ([Gab62]) や Rosenberg ([Ros98]) らによると, スキーム  $X$  は  $\text{QCoh}(X)$  や  $\text{Coh}(X)$  から復元される ([CG15] も参照). つまりスキーム  $X, Y$  に対し,  $X \cong Y$  であることと  $\text{Coh}(X) \cong \text{Coh}(Y)$ , もしくは  $\text{QCoh}(X) \cong \text{QCoh}(Y)$  であることは同値であるので,  $X = \mathbb{P}\text{roj } R$  のときは  $\text{qgr } R$  をスキームの実体とみなすことができる. このことから  $R$  が非可換であるときでも  $\text{qgr } R$  や  $\text{QGr } R$  を  $R$  に付随する非可換スキームと呼び, それを研究する分野が非可換代数幾何学である.

さて話を元に戻そう. Noether 環  $R$  に対し射影  $R$ -加群のなす完全圏を  $\text{proj } R$  とする. このとき環  $R$  の特異点の三角圏 (triangulated category of singularities) を

$$D_{\mathbf{Sg}}(R) := D^b(\text{mod } R) / D^b(\text{proj } R)$$

で定める.

また  $R$  が次数付き Noether  $k$ -代数  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  のとき, 有限生成次数付き射影  $R$ -加群のなす完全圏を  $\text{grproj } R$  とし, 次数付き環  $R$  の特異点の三角圏を

$$D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R) := D^b(\text{gr } R) / D^b(\text{grproj } R)$$

と定める。

**問題 8.10** Noether 環  $R$  に対し,  $\text{gl.dim } R < \infty$  であることと  $D_{\mathbf{Sg}}(R) = 0$  は同値であることを示せ。また次数付き Noether  $k$ -代数  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  に対し,  ${}^* \text{gl.dim } R < \infty$  であることと  $D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R) = 0$  は同値であることを示せ。(定理 A.12, 定理 6.22(i) 参照)。

**補題 8.11**  $T \in D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  と十分大きい  $n$  に対し, 加群  $M \in \text{gr } R$  が存在し,  $M[n] \in D^b(\text{gr } R)$  の  $D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  への像と  $T$  が同型となる。さらに  $R$  の単射次元が有限のときは任意の  $i > 0$  に対し  $\text{Ext}_{\text{gr } R}^i(M, R) = 0$  を満たすように  $M$  がとれる。

**証明**  $T$  が  $\text{gr } R$  の有界な複体  $T^\bullet$  で代表されているとする。 $T^\bullet$  の, 上に有界な射影分解  $P^\bullet = (P^\bullet, d^\bullet)$  がとれる。十分大きい  $n$  に対し,  $P^\bullet$  の stupid フィルトレーションのコホモロジー  $\mathcal{H}^{-n+1}(\sigma_{>-n} P^\bullet)$  を  $M$  とおく。すると  $D^b(\text{gr } R)$  の元として,

$$\sigma_{\leq -n} P^\bullet \cong \text{Im } d^{-n}[n] = \text{Ker } d^{-n+1}[n] = M[n]$$

が成り立つ。そこで (2.36) によって完全三角形

$$\sigma_{>-n} P^\bullet \rightarrow T^\bullet \rightarrow M[n] \rightarrow \sigma_{>-n} P^\bullet[1] \quad (8.9)$$

が得られる。ここで  $\sigma_{>-n} P^\bullet$  は射影加群からなる有界な複体であるから  $D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  において 0 対象であるので  $D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  において  $T$  は  $M[n]$  と同型となることがわかる。

$R$  の単射次元が有限のとき  $R$  の有界な単射分解  $I^\bullet$  がとれ、問題 2.35(iii) を用いると

$$\text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(T^\bullet, R[i]) = \text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(T^\bullet, I^\bullet[i]) = \text{Hom}_{K^b(\text{gr } R)}(T^\bullet, I^\bullet[i])$$

が成り立つ。したがって  $\text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(T^\bullet, R[i])$  は有限の  $i$  を除いて 0 となることがわかる。そこで  $n$  を十分大きく取り直し,  $i \geq n$  ならば  $\text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(T^\bullet, R[i]) = 0$  としてよい。一方  $i \geq n$  のとき  $\text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(\sigma_{>-n} P^\bullet, R[i]) = 0$  であるから、(8.9) より任意の  $i > n$  に対し

$$\text{Ext}_{\text{gr } R}^i(M[n], R) = \text{Hom}_{D^b(\text{gr } R)}(M[n], R[i]) = 0$$

を満たす。 □

Serre 商における自然な射影関手をそれぞれ

$$\Pi: \mathrm{Gr} R \rightarrow \mathrm{QGr} R, \quad \pi: \mathrm{gr} R \rightarrow \mathrm{qgr} R$$

とおく。関手  $\Pi$  は右随伴関手  $\Omega$  を持ち、 $N \in \mathrm{Gr} R$  に対し

$$\Omega \circ \Pi(N) \cong \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathrm{QGr} R}(\Pi(R), \Pi(N(n)))$$

を満たす。埋め込み  $\mathrm{Gr} R_{\geq i} \hookrightarrow \mathrm{Gr} R$  と  $\Pi$  の合成で得られる関手

$$\Pi_i: \mathrm{Gr} R_{\geq i} \rightarrow \mathrm{QGr} R$$

は右随伴関手  $\Omega_i$  を持ち、 $N \in \mathrm{Gr} R$  に対し

$$\Omega_i \circ \Pi_i(N) \cong \bigoplus_{n=i}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathrm{QGr} R}(\Pi(R), \Pi_i(N(n)))$$

が成り立つ。 $\mathrm{QGr} R$  は十分単射的対象を持つので、右導來関手

$$\mathbf{R}\Omega_i: D^+(\mathrm{QGr} R) \rightarrow D^+(\mathrm{Gr} R_{\geq i})$$

が存在し、

$$\mathbf{R}\Omega_i(M) \cong \bigoplus_{n=i}^{\infty} \mathbf{R} \mathrm{Hom}_{\mathrm{QGr} R}(\Pi(R), M(n))$$

を満たす。さらに [AZ94, Proposition 3.14] により、 $\Omega_i$  の  $\mathrm{qgr} R$  への制限は関手

$$\omega_i: \mathrm{qgr} R \rightarrow \mathrm{gr} R_{\geq i}$$

を与える。埋め込み  $\mathrm{gr} R_{\geq i} \hookrightarrow \mathrm{gr} R$  と  $\pi$  の合成で得られる関手

$$\pi_i: \mathrm{gr} R_{\geq i} \rightarrow \mathrm{qgr} R$$

の右隨伴関手を与える。[AZ94, Theorem 7.4] により、 $\omega_i$  は右導來関手

$$\mathbf{R}\omega_i: D^+(\mathrm{qgr} R) \rightarrow D^+(\mathrm{gr} R_{\geq i}) \tag{8.10}$$

を持つ。

連結な次数付き Noether  $k$ -代数  $R$  が Gorenstein 環である場合を考えよう。このときある整数  $n, a$  が存在し、同型

$$(\mathbb{D}(k) :=) \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) \cong k(a)[-n]$$

が成り立つ. ここで  $n = \mathrm{inj} \dim R$  であり, 整数  $a$  は  $R$  の **Gorenstein パラメーター** と呼ばれる.

**例 8.12**  $R$  を多項式環  $k[x_1, \dots, x_n]$  ( $a_i := \deg x_i > 0$ ) とするとき  $\mathrm{gl.dim} R = * \mathrm{gl.dim} R = n$  である.  $k \cong R/(x_1, \dots, x_n)$  の Koszul 分解

$$0 \rightarrow R(-\sum_i a_i) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n R(-\sum_{i \neq j} a_i) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n R(-a_j) \rightarrow R \rightarrow k \rightarrow 0$$

を使って  $\mathrm{Ext}_R^\bullet(k, R)$  を計算すると

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) \cong k(\sum_i a_i)[-n]$$

がわかり,  $R$  は Gorenstein パラメーターが  $\sum_i a_i$  である Gorenstein 環であることがわかる.

以下では次数付き環  $R$  は Gorenstein であるとする. このとき双対化関手

$$\mathbb{D} := \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(-, R): D^b(\mathrm{gr} R)^\circ \rightarrow D^b(\mathrm{gr} R), \quad D^b(\mathrm{gr} R) \rightarrow D^b(\mathrm{gr} R)^\circ$$

は三角圏の同値を与える. さらに [YZ97, Corollary 4.3] より, (8.10)で見た導来関手は

$$\mathbf{R}\omega_i: D^b(\mathrm{qgr} R) \rightarrow D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i})$$

を定める. [AZ94, Proposition 7.2] より  $\pi_i \circ \mathbf{R}\omega_i \cong \mathrm{id}_{D^b(\mathrm{qgr} R)}$  が成り立ち, 補題 3.5(ii) から関手  $\mathbf{R}\omega_i$  は充満忠実関手となる.  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の部分圏  $\mathcal{D}_i$  を関手

$$D^b(\mathrm{qgr} R) \xrightarrow{\mathbf{R}\omega_i} D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}) \hookrightarrow D^b(\mathrm{gr} R)$$

の像で定めると, 各  $\mathcal{D}_i$  は  $D^b(\mathrm{qgr} R)$  と同値になる. このとき  $\pi: D^b(\mathrm{gr} R) \rightarrow D^b(\mathrm{qgr} R)$  を  $\mathcal{D}_i$  に制限すると同値を与えることに注意する. さらに  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の充満部分三角圏を

$$\mathcal{S}_{< i} := \langle k(n): n > -i \rangle$$

で定義する. このとき複体  $M^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R)$  が  $\mathcal{S}_{< i}$  に入ることと,  $M_{\geq i}^\bullet \cong 0$  であることは同値である. まったく同様に

$$\mathcal{S}_{\geq i} := \langle k(n) : n \leq -i \rangle$$

を定める。加えて  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の充満部分三角圏を

$$\mathcal{P}_{< i} := \langle R(n) : n > -i \rangle, \quad \mathcal{P}_{\geq i} := \langle R(n) : n \leq -i \rangle$$

で定義する。

**問題 8.13**  $M_{\geq i}^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i})$  について、次を示せ。（ヒント：同型（2.42）を使え。）

- (i)  $M_{\geq i}^\bullet \in {}^\perp(\mathcal{S}_{< i})$ .
- (ii)  $M_{\geq i}^\bullet \in (\mathcal{P}_{< i})^\perp$ .

**注意 8.14** [Orl09] と異なり、 $R$  を可換環であると仮定しているので、 $R \cong R^\circ$  である。また

$$\mathbb{D}(\mathcal{P}_{\geq i}) = (\mathcal{P}_{< -i+1})^\circ, \quad \mathbb{D}(\mathcal{S}_{\geq i}) = (\mathcal{S}_{< -i-a+1})^\circ$$

などが成り立ち、さらに  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の部分三角圏  $\mathcal{T}$  に対し、 $D^b(\mathrm{gr} R)^\circ$  の部分三角圏として

$$(\mathcal{T}^\perp)^\circ = {}^\perp(\mathcal{T}^\circ), \quad ({}^\perp \mathcal{T})^\circ = (\mathcal{T}^\circ)^\perp$$

である。また  $\mathcal{T}$  が  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の右（左）許容部分圏であることと  $\mathcal{T}^\circ$  が  $D^b(\mathrm{gr} R)^\circ$  の左（右）許容部分圏であることは同値である。これらの事実は後で使われる。

**補題 8.15**  $R$  を次数付き Noether  $k$ -代数で連結とする。このとき  $\mathcal{S}_{< i}$  と  $\mathcal{P}_{< i}$  はそれぞれ  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の左許容部分三角圏と右許容部分三角圏となる。さらに次の半直交分解が存在する：

$$D^b(\mathrm{gr} R) = \langle \mathcal{S}_{< i}, D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}) \rangle, \quad D^b(\mathrm{tors} R) = \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle \quad (8.11)$$

$$D^b(\mathrm{gr} R) = \langle D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}), \mathcal{P}_{< i} \rangle, \quad D^b(\mathrm{grproj} R) = \langle \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{P}_{< i} \rangle \quad (8.12)$$

ここで  $\mathrm{grproj} R$  は有限生成次数付き射影  $R$ -加群のなす完全圏である。

**証明**  $M^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R)$  に対し、完全三角形

$$M_{\geq i}^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow M^\bullet / M_{\geq i}^\bullet \rightarrow M_{\geq i}^\bullet[1] \quad (8.13)$$

が存在する。 $M^\bullet / M_{\geq i}^\bullet$  の各項は  $\mathrm{tors} R$  の対象であるから、これは  $\mathcal{S}_{< i}$  の対象と

なる。さらに問題 8.13(i) より、半直交分解

$$D^b(\mathrm{gr} R) = \langle \mathcal{S}_{<i}, {}^\perp(\mathcal{S}_{<i}) \rangle$$

が得られる。一方  ${}^\perp(\mathcal{S}_{<i})$  の対象  $M^\bullet$  に対し、完全三角形(8.13)を考えれば、 $M^\bullet \cong M_{\geq i}^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i})$  がわかるので、結局  ${}^\perp(\mathcal{S}_{<i}) \cong D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i})$  となり、(8.11)の最初の半直交分解を得る。さらに  $M^\bullet \in D^b(\mathrm{tors} R)$  に対しては  $M_{\geq i}^\bullet \in \mathcal{S}_{\geq i}$  となるので、(8.11)の 2 番目の半直交分解を得る。

次に(8.12)を示していこう。 $i \leq 0$  に対しては、 $R \in \mathcal{P}_{\geq i}$ 、 $i > 0$  に対しては、 $R \in \mathcal{P}_{<i}$  となるので、 $R$  の連結性から  $P \in \mathrm{grproj} R$  は自由加群になることに注意すれば、 $P \cong \bigoplus_j R(n_j) \in \mathrm{grproj} R$  に対し、

$$P_{<i} := \bigoplus_{n_j > -i} R(n_j) \in \mathcal{P}_{<i}, \quad P_{\geq i} := \bigoplus_{n_j \leq -i} R(n_j) \in \mathcal{P}_{\geq i}$$

とおけば、分裂完全列

$$0 \rightarrow P_{<i} \rightarrow P \rightarrow P_{\geq i} \rightarrow 0 \tag{8.14}$$

が存在する。<sup>1</sup>

一方、 $M^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R)$  に対し、 $j \gg 0$  については  $P^j = 0$  となるような自由分解  $P^\bullet$  が存在し、 $M^\bullet$  は  $P^\bullet$  と擬同型となる。さらに  $j \ll 0$  に対しては  $P^j \in \mathcal{P}_{\geq i}$  が成り立つとしてよいことが次のようにわかる。例えば  $M \in \mathrm{gr} R$  であるとき、 $M$  の齊次な生成元を  $\{m_s\}_{s=1}^l$  とし、 $d_s := \deg m_s$ 、 $d := \min\{d_s\}$  とすると、 $1 \in k \cong R(-d_s)_{d_s}$  を  $m_s$  に移す写像の直和をとることで、全射準同型

$$\phi: \bigoplus_{s=1}^l R(-d_s) \rightarrow M$$

が存在し、 $R$  が連結であることから  $j \leq d$  に対しては  $(\mathrm{Ker} \phi)_j = 0$  が成り立つことがわかる。同様の操作を繰り返し、 $M$  と擬同型な自由分解  $P^\bullet$  で  $j > 0$  に対しては  $P^j = 0$  であって、さらに  $j \ll 0$  に対しては  $P^j \in \mathcal{P}_{\geq i}$  となるようなもののがとれる。複体  $M^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R)$  に対しての議論は読者に委ねる。

そこで  $M^\bullet \in D^b(\mathrm{gr} R)$  に対して選んだ上の  $P^\bullet \in D^-(\mathrm{grproj} R)$  に対し、(8.14)を使うと、複体  $P_{<i}^\bullet \in \mathcal{P}_{<i}$ 、 $P_{\geq i}^\bullet$  と複体の短完全列

<sup>1</sup> ここで定義した  $P_{\geq i}$  と、下で出てくる  $P_{\geq i}^\bullet$  は、それぞれ  $\mathrm{tr}_{\geq i}(P), \mathrm{tr}_{\geq i}(P^\bullet)$  とは異なり、ここだけで用いられる記号であることに注意。

$$0 \rightarrow P_{<i}^\bullet \rightarrow P^\bullet \rightarrow P_{\geq i}^\bullet \rightarrow 0 \quad (8.15)$$

が存在する.<sup>2</sup> ここで  $P_{<i}^\bullet$  と  $M^\bullet$  は有界複体であるから、 $P_{\geq i}^\bullet$  もある複体  $K^\bullet \in D^b(\text{gr } R_{\geq i})$  と擬同型となる。以上から完全三角形

$$P_{<i}^\bullet \rightarrow M^\bullet \rightarrow K^\bullet \rightarrow P_{<i}^\bullet[1]$$

が存在し、問題 8.13(ii) より半直交分解 (8.12) が得られた。□

一般に半直交分解 (8.11) は直交分解にはならない。例えば、 $\text{gr } k[x]$  の完全列

$$0 \rightarrow k(-1) \rightarrow k[x]/(x^2) \rightarrow k \rightarrow 0$$

が存在することから、 $\text{Ext}_{\text{gr } k[x]}^1(k, k(-1)) \neq 0$  である。

**補題 8.16**  $R$  を次数付き Noether  $k$ -代数で連結かつ Gorenstein であるとする。このとき  $S_{\geq i}$  と  $\mathcal{P}_{\geq i}$  はそれぞれ  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分三角圏と左許容部分三角圏となる。さらに次の 2 つの半直交分解が存在する：

$$D^b(\text{gr } R_{\geq i}) = \langle \mathcal{D}_i, S_{\geq i} \rangle = \langle \mathcal{P}_{\geq i}, T_i \rangle \quad (8.16)$$

ここで  $T_i$  は  $D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  と同値なある三角圏である。

**証明** 充満忠実な関手

$$\mathbf{R}\omega_i : D^b(\text{qgr } R) \rightarrow D^b(\text{gr } R_{\geq i})$$

が左随伴関手  $\pi_i$  を持つので、 $\mathcal{D}_i$  は  $D^b(\text{gr } R_{\geq i})$  の左許容部分圏となることがわかり、命題 4.31 より半直交分解

$$D^b(\text{gr } R_{\geq i}) = \langle \mathcal{D}_i, {}^\perp \mathcal{D}_i \rangle$$

が存在する。さらに  ${}^\perp \mathcal{D}_i = \text{Ker } \pi_i$  が成り立つから、 ${}^\perp \mathcal{D}_i = S_{\geq i}$  となり、(8.16) の 1 番目の半直交分解が得られた。また  $S_{\geq i}$  は  $D^b(\text{gr } R_{\geq i})$  の右許容部分圏となり、また補題 8.15において  $D^b(\text{gr } R_{\geq i})$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分圏であることを見たから  $S_{\geq i}$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分圏となることが従う。

双対関手  $\mathbb{D}$  によって、同値

$$(\mathcal{P}_{\geq i})^\circ \cong \mathcal{P}_{<-i+1}$$

---

<sup>2</sup> 各項ごとに  $\text{gr } R$  の分裂短完全列を与えるが、複体の完全列として分裂しているとは限らない。

が得られる。また補題 8.15 によると  $\mathcal{P}_{<-i+1}$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分圏であり、したがって  $\mathcal{P}_{\geq i}$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の左許容部分圏となる。そこで命題 4.31 よりある三角圏  $\mathcal{T}_i$  が存在し、半直交分解

$$D^b(\text{gr } R_{\geq i}) = \langle \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{T}_i \rangle$$

が存在する。

補題 8.6 より  $\mathcal{T}_i \cong D^b(\text{gr } R_{\geq i})/\mathcal{P}_{\geq i}$  であって、この事実と問題 8.5 より充満忠実関手

$$\mathcal{T}_i \hookrightarrow D^b(\text{gr } R)/D^b(\text{grproj } R) = D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$$

が存在する。半直交分解 (8.12) を用いると、この関手は本質的全射であることがわかるから、補題 3.8 より同値を与えることがわかる。□

補題 8.15, 8.16 より次が直ちに従う。

**系 8.17**  $R$  を次数付き Noether  $k$ -代数で連結かつ Gorenstein であるとする。このとき半直交分解

$$D^b(\text{gr } R) = \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{T}_i \rangle = \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle \quad (8.17)$$

$$= \langle \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{T}_i, \mathcal{P}_{< i} \rangle = \langle \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i}, \mathcal{P}_{< i} \rangle \quad (8.18)$$

が存在する。

**定理 8.18**  $R$  を次数付き Noether  $k$ -代数で連結かつ Gorenstein であるとし、さらに  $a$  を  $R$  の Gorenstein パラメーターとする。このとき次が成立する。

(i)  $a > 0$  のとき、充満忠実関手  $\Phi_i: D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R) \rightarrow D^b(\text{qgr } R)$  と半直交分解

$$D^b(\text{qgr } R) = \langle \pi(R(-i-a+1)), \dots, \pi(R(-i)), \Phi_i(D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)) \rangle$$

が存在する。ここで  $\pi: D^b(\text{gr } R) \rightarrow D^b(\text{qgr } R)$  は自然な射影である。

(ii)  $a < 0$  のとき、充満忠実関手  $\Psi_i: D^b(\text{qgr } R) \rightarrow D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  と半直交分解

$$D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R) = \langle q(k(-i)), \dots, q(k(-i+a+1)), \Psi_i(D^b(\text{qgr } R)) \rangle$$

が存在する。ここで  $q: D^b(\text{gr } R) \rightarrow D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  は自然な射影である。

(iii)  $a = 0$  のとき、同値  $D_{\mathbf{Sg}}^{\text{gr}}(R) \cong D^b(\text{qgr } R)$  が存在する。

**証明** まず  $D^b(\text{gr } R)$  における  $\mathcal{D}_i$  の右直交部分圏  $\mathcal{D}_i^\perp$  を見ていこう。補題 8.15

より  $D^b(\text{gr } R)^\circ$  の部分三角圏として

$$({}^\perp(\mathcal{S}_{<-i-a+1}))^\circ \cong D^b(\text{gr } R_{\geq -i-a+1})^\circ \cong ((\mathcal{P}_{<-i-a+1})^\perp)^\circ$$

が成り立つ. 注意 8.14 と合わせれば  $D^b(\text{gr } R)$  の部分三角圏として

$$(\mathcal{S}_{\geq i})^\perp = {}^\perp(\mathcal{P}_{\geq i+a})$$

がわかる. 一方で (8.17) より 半直交分解

$$(\mathcal{S}_{\geq i})^\perp = \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{D}_i \rangle$$

が存在すること, さらに (8.18) より  $\mathcal{P}_{\geq i+a}$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の左許容部分圏であることがわかるから, 半直交分解

$$D^b(\text{gr } R) = \langle \mathcal{P}_{\geq i+a}, \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{D}_i \rangle$$

が得られ, したがって

$$\mathcal{D}_i^\perp = \langle \mathcal{P}_{\geq i+a}, \mathcal{S}_{< i} \rangle \quad (8.19)$$

が成り立つ. また  $\mathcal{D}_i$  は  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分圏となることもわかる.

$a \geq 0$  のときを考えよう. このとき  $\mathcal{P}_{\geq i+a} \subset {}^\perp(\mathcal{S}_{< i})$  にもなるから, 半直交分解 (8.19) は直交分解になる. 半直交分解 (8.17) とから

$$\mathcal{D}_i^\perp = \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{P}_{\geq i+a} \rangle \subset \langle \mathcal{S}_{< i}, \mathcal{P}_{\geq i} \rangle = \mathcal{T}_i^\perp$$

を得て, このことと  $\mathcal{T}_i, \mathcal{D}_i$  が  $D^b(\text{gr } R)$  の右許容部分圏であることを合わせると  $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{D}_i$  が従う. さらに

$$\mathcal{P}_{\geq i} = \langle \mathcal{P}_{\geq i+a}, R(-i-a+1), \dots, R(-i) \rangle$$

が成り立つので, 半直交分解

$$\mathcal{D}_i = \langle R(-i-a+1), \dots, R(-i), \mathcal{T}_i \rangle$$

が存在する. 関手  $\pi$  を  $\mathcal{D}_i$  に制限すると同値を与えることから, 関手

$$\Phi_i: D_{\mathbf{S}\mathbf{g}}^{\text{gr}}(R) \xrightarrow{\cong} \mathcal{T}_i \hookrightarrow D^b(\text{gr } R) \xrightarrow{\pi} D^b(\text{qgr } R)$$

は充満忠実であることがわかる. ここで同値  $\mathcal{D}_i \cong D^b(\text{qgr } R)$  と上の半直交分解から

$$D^b(\mathrm{qgr} R) = \langle \pi(R(-i-a+1)), \dots, \pi(R(-i)), \Phi_i(D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)) \rangle$$

を得る.

次に  $a \leq 0$  のときを考える.  $\mathbb{D}(k) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) \cong k(a)[-n]$  であったから,  $i_1 > i_2$  に対し  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr} R}(k(i_1), R(i_2)) = 0$  となる. 特に半直交分解 (8.17)において,  $\mathcal{T}_i^\perp = \langle \mathcal{S}_{<i}, \mathcal{P}_{\geq i} \rangle$  は直交分解となる. よって

$$\mathcal{T}_i^\perp = \langle \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{S}_{<i} \rangle \subset \langle \mathcal{P}_{\geq i}, \mathcal{S}_{} \rangle = \mathcal{D}_{i-a}^\perp$$

となり, したがって  $\mathcal{D}_{i-a} \subset \mathcal{T}_i$  が成り立つ. さらに

$$\mathcal{S}_{} = \langle \mathcal{S}_{<i}, k(-i), \dots, k(-i+a+1) \rangle$$

が成り立つので,

$$\mathcal{T}_i = \langle k(-i), \dots, k(-i+a+1), \mathcal{D}_{i-a} \rangle$$

となる. 関手  $q$  を  $\mathcal{T}_i$  に制限すると同値を与えることから, 関手

$$\Psi_i: D^b(\mathrm{qgr} R) \cong \mathcal{D}_{i-a} \hookrightarrow D^b(\mathrm{gr} R) \xrightarrow{q} D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)$$

は充満忠実となる. 上の半直交分解から

$$D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) = \langle q(k(-i)), \dots, q(k(-i+a+1)), \Psi_i(D^b(\mathrm{qgr} R)) \rangle$$

を得る.

$a = 0$  のときは上の議論から  $D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) \cong D^b(\mathrm{qgr} R)$  を得る.  $\square$

**注意 8.19** 定理 8.18 の証明からわかるように  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の充満部分三角圏  $\mathcal{D}_i, \mathcal{T}_i$  は  $a > 0$  のとき  $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{D}_i$ ,  $a < 0$  のとき  $\mathcal{T}_i \supset \mathcal{D}_i$ ,  $a = 0$  のとき  $\mathcal{T}_i = \mathcal{D}_i$  となる.

定理 8.18 より次が得られる.

**系 8.20**  $R$  を次数付き Noether  $k$ -代数で連結かつ Gorenstein であるとし, さらに  $a$  を  $R$  の Gorenstein パラメーターとする.

(i)  $R = k[x_0, \dots, x_N], N \geq 0, \deg x_i = a_i > 0$  とすると,  $a = \sum_i a_i$  であり,  $D^b(\mathrm{qgr} R)$  は強例外生成列

$$(\pi(R), \pi(R(1)), \dots, \pi(R(a-1)))$$

を持つ.

(ii)  $R$  が  $k$  上有限次元であるとき, 必ず  $a \leq 0$  となる. このとき,  $D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  は例外生成列

$$(q(k), q(k(-1)), \dots, q(k(a+1)))$$

を持つ.

**証明** (i) 例 8.12 より,  $R$  の Gorenstein パラメーターは  $\sum_i a_i$  となる.  $\pi$  は  $\mathcal{D}_{-a+1}$  上充満忠実であったので,  $l = 0, \dots, a-1$  に対し,  $\pi(R(l))$  は  $\text{qgr } R$  の射影的対象であるから,  $(\pi(R), \pi(R(1)), \dots, \pi(R(a-1)))$  は強例外生成列となる.

(ii)  $R$  が  $k$  上有限次元であるときは  $\text{qgr } R = 0$  であるから  $D^b(\text{qgr } R) = 0$  となるので, 定理 8.18 より主張を得る.  $\square$

系 8.20(i) において 商スタック  $\text{Proj } R = [(\text{Spec } R \setminus 0)/\mathbb{G}_m]$  を

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$$

と書き, 重み付き射影空間 (weighted projective space) と呼ぶ. ここで  $\mathbb{G}_m$  は  $x_i$  に重み  $a_i$  で作用している.  $\text{Proj } R$  のことを重み付き射影空間と呼ぶことがあるが, こちらは特異点を持ち得るため, しばしば不便なことがある (注意 6.24 参照). 補題 8.9 より,  $D^b(\text{Proj } R) \cong D^b(\text{qgr } R)$  であるから, 結局  $D^b(\text{Proj } R)$  は強例外生成列

$$(\mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}(\sum_{i=0}^N a_i - 1)) \tag{8.20}$$

を持つことがわかる. すべての  $a_i = 1$  のときは, Beilinson の定理 4.45 である. 例 10.16 では幾何学的不変式論を用いて, この結果の別証明を与える.

## 8.4 Gorenstein 多様体の導來圏

$X$  を  $\mathbb{C}$  上で定義された  $N$  次元射影的代数多様体とし, 高々 Gorenstein 特異点を持つとする.  $\mathcal{L}$  を非常に豊富な直線束とし

$$R := \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^i)$$

とおく. このとき補題 4.13 より,  $R$  は有限生成な  $\mathbb{C}$  代数で,  $X \cong \text{Proj } R$  とな

る. ある  $a \in \mathbb{Z}$  に対し,  $\omega_X \cong \mathcal{L}^{-a}$  であるとし, またすべての  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $j \neq 0, N$  に対し,  $H^j(X, \mathcal{L}^m) = 0$  が成り立つとする. 例えば,  $X$  が射影空間内の完全交叉であるときはこれらの仮定を満たす.

以上の仮定の下で, 環  $R$  は Gorenstein で, Gorenstein パラメーターは  $a$  となることがわかる [Orl09, Lemma 23]. そこでこの  $R$  に対し定理 8.18 が適用でき, さらに Serre の定理, もしくは補題 8.9 により  $\mathrm{qgr} R \cong \mathrm{Coh}(X)$  であるから次を得る.

**定理 8.21** 上記の仮定の下, 次が成り立つ.

(i)  $a > 0$  のとき, 半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{L}^{-a+1}, \dots, \mathcal{O}_X, D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) \rangle$$

が存在する.

(ii)  $a < 0$  のとき, 半直交分解

$$D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) = \langle q(k), \dots, q(k(a+1)), D^b(X) \rangle$$

が存在する. ここで  $q: D^b(\mathrm{gr} R) \rightarrow D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)$  は自然な射影である.

(iii)  $a = 0$  のとき, 同値  $D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) \cong D^b(X)$  が存在する.

10.6 節では, 幾何学的不变式論を用いて定理 8.21 の別証明を与える.

**注意 8.22**  $R$  を  $(N+1)$  次元の次数付き Noether  $\mathbb{C}$ -代数で連結かつ Gorenstein であるとし, その Gorenstein パラメーターを  $a$  とする. さらに  $R$  は孤立特異点を持つとき, [KST09, Theorem 3.8] によると関手

$$[N] \circ \tau^{-a}$$

は  $D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)$  の Serre 関手となる.

定理 8.21 の状況で  $X$  が滑らかであることと,  $R = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^i)$  が孤立特異点を持つことは同値である. (iii) のケース, つまり  $a = 0$  のときは  $X$  は  $N$  次元 Calabi-Yau 多様体となるが, これが滑らかであるとき導来圏  $D^b(X)$  の Serre 関手は  $[N]$  となるから, これはもちろん上で与えた  $D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)$  の Serre 関手と一致している.

## 8.5 行列因子化の圏と極大 Cohen–Macaulay 加群の安定圏

この節では行列因子化を定義し、さらに行列因子化がある種の環上の極大 Cohen–Macaulay 加群の研究に自然に現れることを説明しよう。

$S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$  を次数付き有限生成  $k$ -代数とし、連結とする。さらに零因子でない次数  $d$  の齊次元  $W \in S_d$  に対し、

$$R := S/(W)$$

とする。

**定義 8.23** (i)  $W$  の次数付き行列因子化 (graded matrix factorization) とは図式

$$P^\bullet := (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0(d)) \quad (8.21)$$

のことである。ここで  $P^i$  は次数付き有限階数の自由  $S$  加群であり、 $p^i$  は次数付き  $S$  加群の(次数 0 の)写像で次を満たす：

$$p^1 \circ p^0 = W, \quad p^0(d) \circ p^1 = W. \quad (8.22)$$

(ii)  $W$  の次数付き行列因子化  $P^\bullet, Q^\bullet$  が与えられたとき、その間の射  $f^\bullet = (f^0, f^1)$  は  $\text{gr } S$  の射の組  $f^0, f^1$  であって、次の図式を可換にするものである：

$$\begin{array}{ccccc} P^0 & \xrightarrow{p^0} & P^1 & \xrightarrow{p^1} & P^0(d) \\ f^0 \downarrow & & f^1 \downarrow & & \downarrow f^0(d) \\ Q^0 & \xrightarrow{q^0} & Q^1 & \xrightarrow{q^1} & Q^0(d) \end{array}$$

(iii) 上のように定めた次数付き行列因子化の圏 (category of graded matrix factorizations) を  $\text{MF}^{\text{gr}}(W)$  と書く。 $\text{MF}^{\text{gr}}(W)$  は加法圏となる。

(8.22)では  $W$  を掛けるという  $\text{gr } S$  の射を単に  $W$  と書いており、また  $P^0$  と  $P^1$  は同じ階数の自由加群となることがわかるから、 $p^i$  は  $S$  の齊次元を成分に持つ正方行列として記述できる。したがって (8.22)の式の意味するところは単位行列の  $W$  倍が、正方行列  $p^0, p^1$  を因子として持つということであり、これが行列因子化的語源である。

もちろん、 $S$  が次数付きとは限らない局所環であるときなども行列因子化の圏

$$\mathrm{MF}(W)$$

は定義できるが、定義は  $\mathrm{MF}^{\mathrm{gr}}(W)$  と同様であるので各自考えられたい。また次数付き行列因子化を考えていることが明らかな場合は単に行列因子化と呼ぶことも多い。

$e \in \mathbb{Z}$  とし、行列因子化

$$(S(e) \xrightarrow{\mathrm{id}_S} S(e) \xrightarrow{W} S(e+d)) \text{ や } (S(e) \xrightarrow{W} S(e+d) \xrightarrow{\mathrm{id}_S} S(e+d))$$

を自明な行列因子化と呼ぶ。行列因子化  $P^\bullet$  が、自明な行列因子化を直和成分に含むような行列因子化とは決して同型にはならないとき、 $P^\bullet$  を被約な行列因子化 (reduced matrix factorization) と呼ぶ。

**例 8.24** (i)  $S = k[x](\deg x = 1)$ ,  $W = x^d$  とする。整数  $n(1 \leq n < d)$  に対し、

$$P^\bullet := (S \xrightarrow{x^n} S(n) \xrightarrow{x^{d-n}} S(d))$$

は  $W$  の行列因子化となる。

(ii)  $S, W$  を 8.5 節の冒頭で与えたものとし、 $x_1, \dots, x_n$  を  $S$  の齊次元からなる正則列、さらに  $S$  のイデアル

$$I := (x_1, \dots, x_n)$$

は  $W \in I$  を満たすとする。このとき次のような行列因子化を構成しよう。

まず  $e_i$  を次数が  $\deg x_i$  と等しい元とし、 $S$  自由加群を

$$V := Se_1 \oplus \cdots \oplus Se_n (\cong \bigoplus_{i=1}^n S(-\deg x_i))$$

とおく。 $S$ -正則列  $x_1, \dots, x_n$  の Koszul 複体

$$K_\bullet(x_1, \dots, x_n) : 0 \rightarrow \bigwedge^n V \xrightarrow{d_n} \bigwedge^{n-1} V \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} V \xrightarrow{d_1} S \xrightarrow{d_0} 0$$

を考えると、導來圏  $D^b(\mathrm{gr} S)$  の対象として  $K_\bullet(x_1, \dots, x_n) \cong S/I$  である。 $W \in \mathrm{Ann}(S/I)$  であるから

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{gr} S)}(K_\bullet(x_1, \dots, x_n), K_\bullet(x_1, \dots, x_n)(d))$$

の元として  $W = 0$  であるが、より強く  $W$  は 0 とホモトピックである。このことを以下で見てみよう。

まず  $W \in I$  であるから  $w_i \in S$  が存在し  $W = \sum_{i=1}^n w_i x_i$  と書け、そこで次数  $d$  の準同型を

$$h_0: S \rightarrow V \quad y \mapsto y \sum_{j=1}^n w_j e_j$$

とし、 $1 \leq i$  に対しては、

$$h_i: \bigwedge^i V \rightarrow \bigwedge^{i+1} V \quad v \mapsto (\sum_{j=1}^n w_j e_j) \wedge v$$

と定めると

$$W = h_{i-1} \circ d_i + d_{i+1} \circ h_i \quad (8.23)$$

が成り立つことがわかる。このとき

$$P^0 := \bigoplus_{i=0}^{2i+1} \bigwedge^i V(id), \quad P^1 := \bigoplus_{i=0}^{2i} \bigwedge^i V(id)$$

とし  $p^0: P^0 \rightarrow P^1, p^1: P^1 \rightarrow P^0(d)$  を

$$p^0 := \bigoplus_i (d_{2i+1} + h_{2i+1}), \quad p^1 := \bigoplus_i (d_{2i} + h_{2i})$$

と定めれば

$$d_{i-1} \circ d_i = 0, \quad h_{i+1} \circ h_i = 0$$

と式 (8.23) を用いると式 (8.22) が示される。つまり

$$P^\bullet = (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0(d))$$

は  $W$  の次数付き行列因子化を定めることがわかる。さらに [Dyc11, Corollary 2.7] よると、 $\text{Coker}(p^1) = S/I$  となることもわかる。この事実は後で使う。

(8.21) で与えられる次数付き行列因子化  $P^\bullet$  は次のように擬似周期性を持つ擬似複体とみなすことができる。つまり

$$P^\bullet = (\cdots \rightarrow P^i \xrightarrow{d^i} P^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} P^{i+2} \rightarrow \cdots)$$

であって、各  $P^i \in \text{gr } S$  は自由加群で  $d^{i+1} \circ d^i = W$  (擬似複体)、 $P^i = P^{i-2}(d)$ ,

$d^i = d^{i-2}(d)$  (擬似周期性) を満たす. 次数付き行列因子化  $P^\bullet, Q^\bullet$  の間の射はこれらを複体とみなしたときの複体の射であるが, さらにホモトピー同値なども複体間の射の場合と同様に定義する. 次数付き行列因子化のホモトピー圏 (homotopy category of graded matrix factorizations)

$$\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$$

も, Abel 圏の複体のホモトピー圏の定義 2.3 と同様に定める. つまり  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  の対象は次数付き行列因子化とし, 射は定義 8.23(ii) で定めた射のホモトピー類であるとする. 次数付き行列因子化のなす圏は完全圏となり, 次数付き行列因子化のホモトピー圏  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  には次のようにして三角圏の構造が入る.<sup>3</sup>

転換関手 [1] は (8.21) で与えられた  $P^\bullet$  に対し,

$$P^\bullet[1] := (P^1 \xrightarrow{-p^1} P^0(d) \xrightarrow{-p^0(d)} P^1(d))$$

と定義する. すると  $P^\bullet$  の擬似周期性から

$$[2] = \overbrace{\tau \circ \tau \circ \cdots \circ \tau}^{d \text{ 回}} \quad (8.24)$$

が成り立つ. ここで  $\tau$  は

$$\tau(P^\bullet) := (P^0(1) \xrightarrow{p^0(1)} P^1(1) \xrightarrow{p^1(1)} P^0(d+1))$$

によって定まる自己同値である. 射  $f^\bullet = (f^0, f^1) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)}(P^\bullet, Q^\bullet)$  に対し, その写像錐  $\mathrm{Cone}(f^\bullet)$  を

$$\mathrm{Cone}(f^\bullet) := (Q^0 \oplus P^1 \xrightarrow{r^0} Q^1 \oplus P^0(d) \xrightarrow{r^1} Q^0(d) \oplus P^1(d)) \quad (8.25)$$

と定めている. ただしここで

$$r_0 = \begin{pmatrix} q^0 & 0 \\ f^1 & -p^1 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} q^1 & 0 \\ f^0(d) & -p^0(d) \end{pmatrix}$$

とおき, 行ベクトルに右からこれらの行列を掛けているとみなしている.  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  における完全三角形は

<sup>3</sup> 補題 2.11 で Abel 圏  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  に三角圏の構造を入れたが,  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  への三角圏の構造の入れ方はそれとまったく同様である.

$$P^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Q^\bullet \xrightarrow{(\text{id}_{Q^\bullet}, 0)} \text{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{(0, -\text{id}_{P^\bullet[1]})} P^\bullet[1]$$

と同型なものとして定義する。

**注意 8.25**  $S$  を Noether 局所環,  $W$  を  $S$  の零因子でない元としたときも, 次数付きの場合と同様にして, 行列因子化のホモトピー圏

$$\text{HMF}(W)$$

に三角圏の構造が定まる. 三角圏  $\text{HMF}(W)$  においては, 転換関手の合成  $[2] = [1] \circ [1]$  は恒等関手となる. 例えば, このことから  $\text{HMF}(W)$  には自明でない t-構造が存在せず, Abel 圏の導來圏とは同値になることはないことがわかる. 一方, 定理 8.39 で見るように, 次数付き行列因子化のホモトピー圏  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$  は代数多様体の連接層の導來圏と同値になることがある.

さて, 以下ではさらに  $S$  の正則性を仮定する. つまり  $S = k[x_0, \dots, x_N]$  で  $N \geq 0, \deg x_i = a_i > 0$  とする. このとき環  $R = S/(W)$  上の極大 Cohen-Macaulay(MCM) 加群の研究に行列因子化が出てくることを説明しよう. まず  $R$  上の次数付き MCM 加群  $M$  に対し

$${}^*\text{depth}_S M = {}^*\text{depth}_R M = {}^*\dim R = {}^*\dim S - 1$$

であり, また  $S$  は正則であるから  ${}^*\text{proj dim}_S M < \infty$  となり Auslander-Buchsbaum の公式 (A.2) (の次数付き版) により,  ${}^*\text{proj dim}_S M = 1$  であることがわかる. そこで射影分解

$$0 \rightarrow P^1(-d) \xrightarrow{p^1(-d)} P^0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (8.26)$$

が存在する. ここで  $P^1, P^0$  は自由  $S$  加群になり, 後の都合上, 自由加群  $P^1, P^0$  の次数を  $d$  ずらした.

$W \in \text{Ann}_S M$  であることから射  $p^0: P^0 \rightarrow P^1$  が存在し,

$$p^1(-d) \circ p^0(-d) = W \text{ すなわち } p^1 \circ p^0 = W$$

が成り立つようになる. ここで  $W$  を掛けるという写像を単に  $W$  と書いている. 最後の式の両辺を  $p^1(-d)$  に合成させて,

$$p^1 \circ p^0 \circ p^1(-d) = W \circ p^1(-d) = p^1 \circ W$$

となるが  $p^1$  が単射であることから

$$p^0 \circ p^1(-d) = W \text{ すなわち } p^0(d) \circ p^1 = W$$

が成り立つ。このようにして  $R$  上の次数付き MCM 加群  $M$  から出発し、 $W$  の次数付き行列因子化

$$P^\bullet = (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0(d)) \quad (8.27)$$

が得られた。

逆に  $W$  の次数付き行列因子化 (8.27) が与えられているとする。 $W$  は零因子でなかったから、 $p^1$  は単射である。そこで

$$M := \text{Coker}_{\text{CM}}(P^\bullet) := \text{Coker } p^1(-d)$$

とおくと短完全列 (8.26) が得られるので  ${}^*\text{proj dim}_S M \leq 1$  となるが、 $P^0$  と  $P^1$  の自由加群としての階数が等しいことに注意すると、 $M \cong 0$  か、もしくは  ${}^*\text{proj dim}_S M = 1$  がわかる。Auslander–Buchsbaum の公式を用いて、 $M$  は  $R$  上の次数付き MCM 加群となる。

以上により、 $S$  の元  $W$  の行列因子化と  $R = S/(W)$  上の MCM 加群の対応が得られたが、例えば、与えられた MCM 加群の射影分解 (8.26) の取り方が一意的でないので、得られる  $W$  の行列因子化も 1 つには定まらない。また行列因子化  $P^\bullet$  と自明な行列因子化  $Q^\bullet = (S \xrightarrow{W} S(d) \xrightarrow{\text{id}_S} S(d))$  に対して、

$$\text{Coker}_{\text{CM}}(P^\bullet) \cong \text{Coker}_{\text{CM}}(P^\bullet \oplus Q^\bullet)$$

となるので、行列因子化（の同型類）から MCM 加群（の同型類）への対応は単射とはならない。そこで [Eis80, Corollary 6.3] においては、対応の付け方は上で述べたものとし、次のような特別な行列因子化と特別な MCM 加群を考えることで、それらの同型類の間に 1 対 1 対応が得られることが示された。証明の詳細は原論文を参照されたい。

**定理 8.26**  $S = k[x_0, \dots, x_N]$  で  $N \geq 0, \deg x_i > 0$  とし、さらに  $W$  を正の次数の齊次元とする。このとき上で与えた対応で、次の集合の間に全単射が存在する。

- (i)  $W$  の被約な行列因子化の同型類の集合。
- (ii) 自由加群を直和因子に含まない  $R = S/(W)$  上の MCM 加群の同型類の集合。

この対応を圏論的に精密化しよう。まず

$$\mathrm{CM}^{\mathrm{gr}}(R)$$

で  $R$  上の次数付き MCM 加群のなす  $\mathrm{gr} R$  の充満部分加法圏とする. Gorenstein 環  $R$  に対し,  $\mathrm{CM}^{\mathrm{gr}}(R)$  は Frobenius 圏であることが知られており, その安定圏を

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R)$$

で表し, 次数付き極大 Cohen–Macaulay 加群の安定圏 (stable category of graded MCM modules) と呼ぼう.

**問題 8.27** (i) 自明な行列因子化は,  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  において行列因子化  $(0 \rightarrow 0 \rightarrow 0)$  と同型であることを示せ.

(ii) 射影  $R$ -加群は  $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R)$  において, 0 加群と同型になることを示せ.

問題 8.27 に注意すると, 次の図式を可換とするような  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  から  $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R)$  への三角関手が存在し, これも  $\mathrm{Coker}_{\mathrm{CM}}$  と表す:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MF}^{\mathrm{gr}}(W) & \xrightarrow{\mathrm{Coker}_{\mathrm{CM}}} & \mathrm{CM}^{\mathrm{gr}}(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W) & \xrightarrow{\mathrm{Coker}_{\mathrm{CM}}} & \underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R) \end{array}$$

さらに定理 8.26 から次が得られる.

**定理 8.28** 三角関手

$$\mathrm{Coker}_{\mathrm{CM}}: \mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W) \rightarrow \underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R)$$

は同値である.

$S$  が Noether 正則局所環,  $R = S/(W)$  としたときもまったく同様に, 極大 Cohen–Macaulay 加群のなす Frobenius 圏  $\mathrm{CM}(R)$  の安定圏  $\underline{\mathrm{CM}}(R)$  を定めると, 定理 8.28 と同様に三角同値

$$\mathrm{HMF}(W) \cong \underline{\mathrm{CM}}(R)$$

が存在する. この同値の証明は [Yos90, Ch. 7] や [Bec, Theorem 2.2.10] にある.

MCM 加群はよく研究されているが, 安定圏  $\underline{\mathrm{CM}}^{\mathrm{gr}}(R)$  や  $\underline{\mathrm{CM}}(R)$  の扱いは比較

的難しい。そこでしばしば上の同値を使って比較的扱いの容易な  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  や  $\mathrm{HMF}(W)$  を代わりに調べることも多い。例えば局所環

$$R = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]/(W)$$

に対し、 $W$  が単純特異点と呼ばれるタイプの特異点を持つときは、 $\mathrm{CM}(R)$  の直既約加群の同型類は有限個であることが知られているが、これは行列因子化の圏における Knörrer 周期性を使って、次元が低い場合に帰着することで示された。

## 8.6 gauged LG 模型の因子化の圏

この節では、行列因子化の圏や、代数多様体の連接層の導來圏の一般化である gauged LG 模型の因子化の圏の定義を与える。本章において、この節以外では gauged LG 模型の因子化は登場しないが、後で述べる定理 10.22 は gauged LG 模型の因子化を用いて主張が与えられる。

$G$  を線形代数群とし、滑らかな準射影的代数多様体  $X$  に作用しているとする。 $\mathcal{L}$  を  $G$ -同変な可逆層とし、 $w \in H^0(X, \mathcal{L})^G$ 、つまり  $w$  は  $G$ -不変な  $\mathcal{L}$  の大域切断とする。gauged Landau–Ginzburg (LG) 模型 (gauged Landau–Ginzburg model) とは 4 つ組  $(X, G, \mathcal{L}, w)$  のことを指す。<sup>4</sup> しばしば、 $\mathcal{L}$  を省略し、 $([X/G], w)$  などとも書く。 $\mathcal{E} \in \mathrm{QCoh}([X/G])$  に対し、 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^n$  をしばしば  $\mathcal{E}(n)$  で表し、 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{QCoh}(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  に対し、 $f \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{L}^n} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{QCoh}(X)}(\mathcal{E}(n), \mathcal{F}(n))$  を  $f(n)$  と表す。

**定義 8.29** gauged LG 模型  $(X, G, \mathcal{L}, w)$  の (準連接) 因子化 ((quasi-coherent) factorizations of a gauged LG model) とは図式

$$\mathcal{E}^\bullet := (\mathcal{E}^0 \xrightarrow{\phi^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\phi^1} \mathcal{E}^0(1)) \quad (8.28)$$

のことである。ここで  $\mathcal{E}^i \in \mathrm{QCoh}([X/G])$  であり、 $\phi^i$  は  $\mathrm{QCoh}([X/G])$  の射で次を満たす：

$$\phi^1 \circ \phi^0 = \otimes w, \quad \phi^0(1) \circ \phi^1 = \otimes w,$$

より正確には

<sup>4</sup>  $X$  が単に Noether アファインスキームのときなども gauged LG 模型を考えることもあるが、後で定義する gauged LG 模型の連接因子化の圏の間の導來関手などを考えるときは、 $X$  を滑らかな準射影的代数多様体であるとした方が都合がよい。

$$\phi^1 \circ \phi^0(e^0) = e^0 \otimes w, \quad \phi^0(1) \circ \phi^1(e^1) = e^1 \otimes w \quad (e^i \text{ は } \mathcal{E}^i \text{ の切断})$$

2つの gauged LG 模型の因子化の間の射も次数付き行列因子化の間の射（定義 8.23）と同様に定義する。以上のように定めた gauged LG 模型の因子化の圏を  $\mathrm{QCoh}([X/G], \mathcal{L}, w)$ , もしくは単に

$$\mathrm{QCoh}([X/G], w)$$

などと書く。これが Abel 圈となるのは明らかであろう。

(8.28)で各  $\mathcal{E}^i$  が单射的対象、または連接層となるとき、それぞれの gauged LG 模型の因子化のなす  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の部分圏を

$$\mathrm{Inj}([X/G], w), \quad \mathrm{Coh}([X/G], w)$$

と書く。さらに  $X$  が Noether アファインスキーム、各  $\mathcal{E}^i$  が  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の射影的対象、もしくは  $\mathrm{Coh}([X/G], w)$  の射影的対象となるとき、それぞれの gauged LG 模型の因子化のなす  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の部分圏を

$$\mathrm{Proj}([X/G], w), \quad \mathrm{proj}([X/G], w)$$

と書く。

**注意 8.30** (i) 定義から直ちにわかるように、Noether 局所環  $R$  のアファインスキームを  $X = \mathrm{Spec} R$  とし、 $G$  を自明な群、 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ ,  $w \in R$  とすると

$$\mathrm{proj}([X/G], w) = \mathrm{MF}(w)$$

が成り立つ。

(ii)  $R$  を連結な次数付き有限生成  $k$ -代数であるとする。このとき  $\mathbb{G}_m$  による  $\mathrm{Spec} R$  への作用が定まり（C.1 参照）、Abel 圈の同値

$$\mathrm{gr} R \cong \mathrm{Coh}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spec} R)$$

が存在する。 $\chi_1 := \mathrm{id}_{\mathbb{G}_m} \in \widehat{\mathbb{G}_m}$  とおくと  $R$  の次数  $d$  の齊次な元  $w$  に対し

$$\mathrm{proj}([\mathrm{Spec} R/\mathbb{G}_m], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R}(d\chi_1), w) = \mathrm{MF}^{\mathrm{gr}}(w)$$

が成り立つ。

(iii) ここで述べた gauged LG 模型の因子化の圏  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  を自然に一般化した、因子化の圏（the category of factorizations）の定義が [BDF<sup>+</sup>16] に

ある。こちらの方が余計な情報がない分すっきりしている。より統一的な扱いに興味がある読者はぜひ一読されたい。

次数付き行列因子化に対しても考えたように、(8.28)で与えられた  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の対象  $\mathcal{E}^\bullet$  は次のように擬似周期性を持つ擬似複体とみなすことができる。つまり

$$\mathcal{E}^\bullet = (\cdots \rightarrow \mathcal{E}^i \xrightarrow{\phi^i} \mathcal{E}^{i+1} \xrightarrow{\phi^{i+1}} \mathcal{E}^{i+2} \rightarrow \cdots) \quad (8.29)$$

と書け、各  $\mathcal{E}^i$  は  $\mathrm{QCoh}([X/G])$  の対象で  $\phi^{i+1} \circ \phi^i = w$  (擬似複体),  $\mathcal{E}^i = \mathcal{E}^{i-2}(1)$ ,  $\phi^i = \phi^{i-2}(1)$  (擬似周期性) を満たす。 $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の間の射はこれらを複体とみなしたときの複体の間の射であるが、さらにホモトピー同値なども複体間の射の場合と同様に定義する。こうして gauged LG 模型の準連接因子化のホモトピー圏

$$\mathrm{KQCoh}([X/G], w)$$

が定義でき、<sup>5</sup> 同様に  $\mathrm{Inj}([X/G], w)$ ,  $\mathrm{proj}([X/G], w)$ ,  $\mathrm{Coh}([X/G], w)$  からもそれぞれのホモトピー圏

$$\mathrm{KInj}([X/G], w), \mathrm{Kproj}([X/G], w), \mathrm{KCoh}([X/G], w)$$

が定義できる。8.5 節で見たように次数付き行列因子化のホモトピー圏  $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$  には三角圏の構造が入ったが、 $\mathrm{KQCoh}([X/G], w)$  などにもまったく同様にして三角圏の構造が入る。つまり、転換関手 [1] は (8.28) で与えられた  $\mathcal{E}^\bullet$  に対し、

$$\mathcal{E}^\bullet[1] := (\mathcal{E}^1 \xrightarrow{-\phi^1} \mathcal{E}^0(1) \xrightarrow{-\phi^0(1)} \mathcal{E}^1(1))$$

と定義し、さらに射  $f^\bullet = (f^0, f^1) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{KQCoh}([X/G], w)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  に対し、その写像錐  $\mathrm{Cone}(f^\bullet)$  を

$$\mathrm{Cone}(f^\bullet) := (\mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{E}^1 \xrightarrow{r^0} \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{E}^0(1) \xrightarrow{r^1} \mathcal{F}^0(1) \oplus \mathcal{E}^1(1))$$

と定める。ただしここで

$$r_0 = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{F}^\bullet}^0 & 0 \\ f^1 & -\phi_{\mathcal{E}^\bullet}^1 \end{pmatrix}, r_1 = \begin{pmatrix} \phi_{\mathcal{F}^\bullet}^1 & 0 \\ f^0(1) & -\phi_{\mathcal{E}^\bullet}^0(1) \end{pmatrix}$$

<sup>5</sup> Abel 圈  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  のホモトピー圏  $K(\mathrm{QCoh}([X/G], w))$  とは異なるので注意が必要である。

とおき、行ベクトルに右からこれらの行列を掛けているとみなしている。  
 $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  における完全三角形は

$$\mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{F}^\bullet}, 0)} \mathrm{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{(0, -\mathrm{id}_{\mathcal{E}^\bullet[1]})} \mathcal{E}^\bullet[1]$$

と同型なものとして定める。

以下ではこの圏の局所化を考え、(準) 連接層の導來圏の一般化を得たいのだが、  
 $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  の対象は擬似複体ではあるが、 $w = 0$  でない限り複体とはならないのでコホモロジーが定義できず、したがって擬同型という概念がない。そこで  
擬同型の代わりに  $\mathrm{QCoh}([X/G], w)$  に対して定義されるのが次の全複体である。

まず gauged LG 模型の因子化

$$(\mathcal{E}^j)^\bullet = ((\mathcal{E}^j)^0 \xrightarrow{\phi_{(\mathcal{E}^j)}^0} (\mathcal{E}^j)^1 \xrightarrow{\phi_{(\mathcal{E}^j)}^1} (\mathcal{E}^j)^0(1)) \in \mathrm{QCoh}([X/G], w)$$

に対し、その複体

$$E := (\cdots \rightarrow (\mathcal{E}^j)^\bullet \xrightarrow{d_E^j} (\mathcal{E}^{j+1})^\bullet \xrightarrow{d_E^{j+1}} (\mathcal{E}^{j+2})^\bullet \rightarrow \cdots) \in C(\mathrm{QCoh}([X/G], w)) \quad (8.30)$$

を考える。各因子化  $(\mathcal{E}^j)^\bullet$  は (8.29) で見たように擬似複体とみなせたから、(8.30)  
は 2 重擬似複体ともいえよう。そこで通常の 2 重複体のときと同様に、(8.30) の  
全複体 (total complex)  $\mathrm{Tot}(E) \in \mathrm{QCoh}([X/G], w)$  を次のように定義しよう：

$$\mathrm{Tot}(E) := (\cdots \rightarrow T^k \xrightarrow{\psi^k} T^{k+1} \xrightarrow{\psi^{k+1}} T^{k+2} \rightarrow \cdots)$$

とおく。ただし

$$T^k := \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}, i+j=k} (\mathcal{E}^j)^i$$

とし、さらに

$$\psi^k|_{(\mathcal{E}^j)^i} := (d_E^j)^i + (-1)^j \phi_{(\mathcal{E}^j)^\bullet}^i$$

として定めた。このとき  $\psi^{k+1} \circ \psi^k = \otimes w$ ,  $T^k = T^{k-2}(1)$ ,  $\psi^k = \psi^{k-2}(1)$  が成り立つので、確かに  $\mathrm{Tot}(E) \in \mathrm{QCoh}([X/G], w)$  となることがわかる。これにより  
り関手

$$\mathrm{Tot}: C(\mathrm{QCoh}([X/G], w)) \rightarrow \mathrm{QCoh}([X/G], w)$$

や

$$\text{Tot}: C^b(\text{Coh}([X/G], w)) \rightarrow \text{Coh}([X/G], w)$$

が定まる。さらにこれは 2 つの射がホモトピックであることを保つので、例えば、

$$\text{Tot}: K^b(\text{Coh}([X/G], w)) \rightarrow \text{KQcoh}([X/G], w) \quad (8.31)$$

も導く。

**問題 8.31** 射  $f^\bullet = (f^0, f^1) \in \text{Hom}_{\text{KQcoh}([X/G], w)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  に対し、  
 $\text{QCoh}([X/G], w)$  の複体を

$$E := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathcal{F}^\bullet \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$$

と定める。ただし  $\mathcal{F}^\bullet$  を 0 次の項とする。このとき  $\text{Tot}(E) \cong \text{Cone}(f^\bullet)$  であることを確かめよ。

$\text{KQcoh}([X/G], w)$  の充満部分三角圏

$$\text{Acycl}([X/G], w)$$

を  $\text{QCoh}([X/G], w)$  のすべての有界な非輪状複体  $E$  の全複体  $\text{Tot}(E)$  の thick 閉包として定め、 $\text{KQcoh}([X/G], w)$  の充満部分三角圏

$$\text{acycl}([X/G], w)$$

を  $\text{Coh}([X/G], w)$  のすべての有界な非輪状複体  $E$  の全複体  $\text{Tot}(E)$  の thick 閉包として定める。 $\text{Acycl}([X/G], w)$  の対象を 非輪状 (acyclic) と呼ぶことにする。

さらに **gauged LG 模型**  $([X/G], w)$  の準連接因子化の導来圏 (derived category of quasi-coherent factorizations of a gauged LG model) を Verdier 商

$$\text{DQCoh}([X/G], w) := \text{KQcoh}([X/G], w) / \text{Acycl}([X/G], w)$$

と定義し、**gauged LG 模型**  $([X/G], w)$  の連接因子化の導来圏 (derived category of coherent factorizations of a gauged LG model) を Verdier 商

$$\text{DCoh}([X/G], w) := \text{KQcoh}([X/G], w) / \text{acycl}([X/G], w)$$

と定義する。<sup>6</sup>(8.31)で定めた関手  $\text{Tot}$  は  $\text{Coh}([X/G], w)$  の非輪状複体を  $\text{acycl}([X/G], w)$  の対象に移すので Verdier 商の普遍性から関手

<sup>6</sup> Abel 圈  $\text{Coh}([X/G], w)$  の導来圏  $D(\text{Coh}([X/G], w))$  とは異なるので注意が必要である。

$$\text{Tot}: D^b(\text{Coh}([X/G], w)) \rightarrow \text{DCoh}([X/G], w) \quad (8.32)$$

を導く.

**注意 8.32** (i) Abel 圈  $\mathcal{A}$  に対し, その有界導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  は有界な非輪状複体のなす  $K^b(\mathcal{A})$  の部分三角圏で  $K^b(\mathcal{A})$  の Verdier 商をとって構成できた. 一方,  $\mathcal{A}$  の任意の有界な非輪状複体は, 各項が  $\mathcal{A}$  の複体であるような非輪状複体の全複体として得られる.  $\mathcal{A}$  の導來圏  $D^b(\mathcal{A})$  を, 複体の非輪状複体の全複体からなる  $K^b(\mathcal{A})$  の部分三角圏で  $K^b(\mathcal{A})$  の Verdier 商とみなすと, 上記の  $\text{DQCoh}([X/G], w)$ ,  $\text{DCoh}([X/G], w)$  の構成はその類似とみなすことができよう.

(ii) 有界な複体

$$(\cdots \rightarrow \mathcal{F}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots) \in C^b(\text{Coh}(X))$$

に対し, 周期 2 の複体

$$(\cdots \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F}^{2i} \xrightarrow{\bigoplus_i d^{2i}} \bigoplus_i \mathcal{F}^{2i+1} \xrightarrow{\bigoplus_i d^{2i+1}} \bigoplus_i \mathcal{F}^{2i} \rightarrow \cdots)$$

を考える.  $G$  を自明な群,  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ ,  $w = 0$  とおけば, これは  $\text{Coh}([X/G], 0) = \text{Coh}(X, 0)$  の対象と思える. この対応はホモトピックな射をホモトピックな射に移すので関手

$$K^b(\text{Coh}(X)) \rightarrow \text{KCoh}(X, 0)$$

を導き, さらに有界な非輪状複体を  $\text{Acycl}(X, 0)$  の対象に移すので, 関手

$$D^b(X) \rightarrow \text{DCoh}(X, 0)$$

を導く. [BDF<sup>+</sup>16, Example 2.15] も参照のこと. この関手の構成の仕方と系 8.34 の同値の構成の仕方は同様である.

(iii) 注意 8.30 で見たように, Noether 局所環  $R$  のアファインスキームを  $X = \text{Spec } R$  とし,  $G$  を自明な群,  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ ,  $w \in R$  とすると

$$\text{proj}([X/G], w) = \text{MF}(w)$$

が成り立った. さらに

$$\mathrm{Kproj}([X/G], w) = \mathrm{HMF}(w)$$

が成り立つことも定義から自明であろう。さらに合成関手

$$\mathrm{Kproj}([X/G], w) \hookrightarrow \mathrm{KCoh}([X/G], w) \rightarrow \mathrm{DCoh}([X/G], w) \quad (8.33)$$

は同値であることもわかる ([BFK19, Proposition 2.3.8], [BDF<sup>+</sup>16, Corollary 2.25] 参照)。一般の gauged LG 模型の（準）連接因子化の圏ではその導来圏を考えるが<sup>6</sup>、行列因子化の圏ではホモトピー圏までしか考える必要がないのはこれが理由である。

(8.33)で考えた関手のように、合成関手

$$\mathrm{KInj}([X/G], w) \hookrightarrow \mathrm{KQCoh}([X/G], w) \rightarrow \mathrm{DQCoh}([X/G], w) \quad (8.34)$$

も同値であることがわかる ([BFK19, Proposition 2.3.7], [BDF<sup>+</sup>16, Corollary 2.25] 参照)。与えられた

$$\mathcal{E}^\bullet := (\mathcal{E}^0 \xrightarrow{\phi^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\phi^1} \mathcal{E}^0(1)) \in \mathrm{DQCoh}([X/G], w)$$

を同値 (8.34) を用いて  $\mathrm{KInj}([X/G], w)$  の対象に取り換える、はじめから  $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1$  を单射的であるとしてよい。 $Z$  を  $X$  の  $G$ -不变閉部分多様体とし、 $U := X \setminus Z$  と定める。各  $\mathcal{E}^i(j)$  の、台が  $Z$  に含まれる切断全体のなす部分層  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^i(j))$  ([Har77, Exercise II.1.20]) をとり、各  $\phi^i$  を制限することで

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^\bullet) := (\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^0) \xrightarrow{\phi^0} \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^1) \xrightarrow{\phi^1} \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^0(1))) \in \mathrm{QCoh}([X/G], w)$$

が得られる。自然な射

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{E}^\bullet) \rightarrow \mathcal{E}^\bullet$$

が<sup>6</sup>  $\mathrm{DQCoh}(X, w)$  において同型になるような対象  $\mathcal{E}^\bullet$  全体のなす  $\mathrm{DQCoh}(X, w)$  の thick 部分圏を

$$\mathrm{DQCoh}_Z(X, w)$$

とおき、 $\mathrm{Coh}(X, w)$  に対しても同様の構成をして  $\mathrm{DCoh}_Z(X, w)$  を定める。このとき開埋め込み  $j: U \hookrightarrow X$  によって引き起こされる射

$$j^*: \mathrm{DCoh}(X, w) \rightarrow \mathrm{DCoh}(U, w|_U)$$

に対し, [BFK19, Proposition 2.3.9] により  $\mathrm{DCoh}_Z(X, w) \cong \mathrm{Ker } j^*$  となるので

$$\mathrm{DCoh}(X, w) / \mathrm{DCoh}_Z(X, w) \cong \mathrm{DCoh}(U, w|_U) \quad (8.35)$$

が成り立つ (注意 8.4 と比較せよ).

以下では代数多様体の連接層の導來圏を gauged LG 模型の連接因子化的圏として実現しよう. これによって後で述べる定理 10.22 の応用が大幅に広がるのである.

最初の設定のように  $X$  を滑らかな準射影的代数多様体とし, 線形代数群  $G$  の作用を持つとする.  $\mathcal{E}$  を  $G$ -同変な有限階数の局所自由層,  $s$  を  $G$ -不变な  $\mathcal{E}$  の正則切断とし,  $Y$  を  $s$  で決まる  $X$  の閉部分多様体とする. ここで切断  $s$  が正則であるとは,  $(s = 0) \subset X$  の余次元が  $\mathcal{E}$  の階数と等しいものと定義される. さらに

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{E})^G \subset \Gamma(X, S(\mathcal{E}))^G \cong \Gamma(V(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{E})})^G$$

により,  $s$  に対応する  $\Gamma(V(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{V(\mathcal{E})})^G$  の元を  $w$  とする. また  $\mathbb{G}_m$  が  $V(\mathcal{E})$  にそのファイバー方向にスカラー倍で作用するとする. 次の図式を考えよう:

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{E}|_Y) & \xhookrightarrow{i} & V(\mathcal{E}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

対象  $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}([Y/G])$  に対し,  $w|_{V(\mathcal{E}|_Y)} = 0$  であることから次の対象が定まる.

$$(0 \rightarrow i_* \pi^* \mathcal{F} \rightarrow 0) \in \mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], \mathcal{O}_{V(\mathcal{E})}(\chi_1), w). \quad (8.36)$$

ここで,  $G \times \mathbb{G}_m$  の指標  $\chi_1$  を

$$\chi_1: G \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \quad (g, t) \mapsto t$$

と定めた. 上の対応 (8.36) によって, 複体のなす圏  $C(\mathrm{Coh}([Y/G]))$  から複体のなす圏  $C(\mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w))$  への関手が定義でき, さらに全複体をとる関手を合成させることにより, 関手

$$\begin{aligned} C^b(\mathrm{Coh}([Y/G])) &\rightarrow C^b(\mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w) \end{aligned}$$

が定義できる. この関手はさらに

$$\begin{aligned} K^b(\mathrm{Coh}([Y/G])) &\rightarrow K^b(\mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w)) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Tot}} \mathrm{K}\mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w) \end{aligned}$$

を導き ((8.31) 参照), また  $K^b(\mathrm{Coh}([Y/G]))$  の非輪状な対象を  $\mathrm{K}\mathrm{Coh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w)$  の非輪状な対象に移すから関手

$$\Phi: D^b([Y/G]) \rightarrow \mathrm{DCoh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w)$$

を導く ((8.32) 参照). 次の主張は [BFK19, Theorem 2.3.11] で与えられているが, 実質的には  $G$  の作用を考えない場合を扱った Isik([Isi13]) と Shipman ([Shi12]) の結果の帰結である.

**定理 8.33** 関手  $\Phi: D^b([Y/G]) \rightarrow \mathrm{DCoh}([V(\mathcal{E})/(G \times \mathbb{G}_m)], w)$  は三角圏の同値を与える.

定理 8.33において  $\mathcal{E} = 0$  とすることで次の系 8.34 を得る. これにより gauged LG 模型の因子化の圏は連接層の導来圏の一般化であることがわかる.

**系 8.34**  $X$  を滑らかな準射影的代数多様体とし, 線形代数群  $G$  の作用を持つとする.  $\mathbb{G}_m$  を  $X$  に自明に作用させると, 三角圏の同値

$$D^b([X/G]) \cong \mathrm{DCoh}([X/(G \times \mathbb{G}_m)], 0)$$

が存在する.

指標を  $\chi_i := i\chi_1$ , つまり  $\chi_i(t) := t^i$  と定める.  $D^b([X/G])$  の対象

$$E^\bullet = (\cdots \rightarrow E^i \xrightarrow{d_E^i} E^{i+1} \rightarrow \cdots)$$

を  $\mathrm{DCoh}([X/(G \times \mathbb{G}_m)], 0)$  の対象

$$\left( \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{2i}(\chi_{-i}) \xrightarrow{\oplus d_E^{2i}(\chi_{-i})} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{2i+1}(\chi_{-i}) \xrightarrow{\oplus d_E^{2i+1}(\chi_{-i})} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{2i}(\chi_{-i+1}) \right)$$

に対応させるのが, 系 8.34 で与えられている同値関手である. この与え方を見れば系 8.34 は定理 8.33 を使わずとも, 定義からほぼ明らかな主張であろう.

## 8.7 行列因子化の圏と特異点の三角圏

$S = k[x_0, \dots, x_N]$ ,  $\deg x_i > 0$  とする. 行列因子化  $P^\bullet := (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} \cdots)$

$P^0(d)$  に対し,  $WP^0 \subset \text{Im } p^1$  であることから  $\text{Coker } p^1$  は  $R = S/(W)$  上の加群であることがわかる. そこで関手

$$\text{Coker}: \text{MF}^{\text{gr}}(W) \rightarrow \text{gr } R \quad P^\bullet \mapsto \text{Coker}(p^1(-d): P^1(-d) \rightarrow P^0)$$

が定まり, さらに次の図式を可換とするような  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$  から  $D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  への三角関手が存在する [Orl09, Proposition 34]. これも Coker と表す:

$$\begin{array}{ccc} \text{MF}^{\text{gr}}(W) & \xrightarrow{\text{Coker}} & \text{gr } R \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{HMF}^{\text{gr}}(W) & \xrightarrow{\text{Coker}} & D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R) \end{array}$$

ここで縦の関手は自然に定まる関手である.

**定理 8.35**  $\text{Coker}: \text{HMF}^{\text{gr}}(W) \rightarrow D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  は三角圏の同値を与える.

**証明** 三角関手 Coker が充満忠実かつ本質的全射であることを示せば補題 3.8 により Coker は同値となる. Coker が充満忠実であるとの証明は原論文 [Orl09, Theorem 38] に譲り以下では本質的全射であることを示したい.

任意の  $T \in D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  に対し, 補題 8.11 にあるような  $M \in \text{gr } R$  をとると  $R$  が Gorenstein であることから  $M$  の  $R$  双対  $\mathbb{D}(M) = \mathbf{R}\text{Hom}_R(M, R)$  は  $R$ -加群となる. そこで  $\mathbb{D}(M)$  の射影分解をとり, 再びその  $R$  双対をとることにより, 射影加群  $Q^i$  と完全列

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \quad (8.37)$$

が存在する.

短完全列

$$0 \rightarrow S(-d) \xrightarrow{W} S \rightarrow R \rightarrow 0 \quad (8.38)$$

は次数付き  $S$  加群  $R$  の射影分解を与えるので, 任意の  $L \in \text{gr } S$ ,  $i > 1$  に対し  $\text{Ext}_{\text{gr } S}^i(R, L) = 0$  となり, したがって任意の次数付き射影  $R$ -加群  $P$  に対しても,  $\text{Ext}_{\text{gr } S}^i(P, L) = 0$  が成り立つ. そこで (8.37) から得られる短完全列

$$0 \rightarrow M \rightarrow Q^0 \rightarrow \text{Ker } d^1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker } d^n \rightarrow Q^n \rightarrow \text{Ker } d^{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \geq 1)$$

を使うと,  $i > 1$  に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^{i+1}(\mathrm{Ker} d^1, L) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^i(M, L) \\ \mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^{i+1}(\mathrm{Ker} d^{n+1}, L) &\cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^i(\mathrm{Ker} d^n, L) \quad (n \geq 1)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。これらと  $S$  が正則であることを使えば

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^i(M, L) = 0 \quad (i > 1) \quad (8.39)$$

となる。

$M$  を次数付き  $S$  加群と思い、次数付き自由  $S$  加群  $P^0$  からの全射  $f: P^0 \rightarrow M$  をとり、その核を  $p^{-1}: P^{-1} := \mathrm{Ker} f \hookrightarrow P^0$  とする。 $(8.39)$  より

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{gr} S}^i(P^{-1}, L) = 0 \quad (i > 0)$$

であるから、 $P^{-1}$  は次数付き射影  $S$  加群となる。さらに  $S$  は連結で有限生成な  $k$ -代数であるから  $P^{-1}$  は自由  $S$  加群である。また  $WM = 0$  であるから  $WP^0 \subset \mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} p^{-1}$  となるので、任意の  $x \in P^0$  に対し  $y \in P^{-1}$  がただ 1 つ存在し、 $p^{-1}(y) = Wx$  が成り立つ。そこで準同型を

$$p^0: P^0 \rightarrow P^{-1}(d) \quad x \mapsto y$$

と定めると、 $p^0 \circ p^{-1} = W$  かつ  $p^{-1}(d) \circ p^0 = W$  が成り立つ。 $P^1 := P^{-1}(d)$ 、 $p^1 := p^{-1}(d)$  とおくと、 $P^\bullet := (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0(d))$  は  $W$  の次数付き行列因子化を定め、さらにその定め方から  $\mathrm{Coker}(P^\bullet) \cong M$  となるので  $\mathrm{Coker}$  は本質的全射である。□

**注意 8.36** (i) 定理 8.35 も定理 8.28 と同様に次数のない場合でも成り立つ。つまり  $S$  を Noether 正則局所環、 $R = S/(W)$  としたとき、三角同値

$$\mathrm{HMF}(W) \cong D_{\mathbf{Sg}}(R)$$

が存在する。

(ii)  $R$  を Gorenstein 環としたとき、自然な関手

$$\mathrm{CM}(R) \hookrightarrow \mathrm{mod} R \hookrightarrow D^b(R)$$

から関手

$$\iota_R: \underline{\mathrm{CM}}(R) \rightarrow D_{\mathbf{Sg}}(R)$$

が引き起こされるが、これは三角圏の同値を与えることが Buchweitz によっ

て示されていた ([Buc, Theorem 4.4.1]). 同様に次数付き環の場合も三角同値

$$\iota_R : \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(R) \xrightarrow{\cong} D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$$

が存在する.

一方, 定理 8.28 における三角同値

$$\text{Coker}_{\text{CM}} : \text{HMF}^{\text{gr}}(W) \xrightarrow{\cong} \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(R)$$

と定理 8.35 における三角同値

$$\text{Coker} : \text{HMF}^{\text{gr}}(W) \xrightarrow{\cong} D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$$

はともに, 行列因子化  $P^\bullet := (P^0 \xrightarrow{p^0} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0(d))$  に対し,

$$\text{Coker}_{\text{CM}}(P^\bullet) = \text{Coker}(P^\bullet) := \text{Coker } p^{-1}$$

と定めることで得られ,

$$\iota_R \circ \text{Coker}_{\text{CM}} = \text{Coker}$$

がわかる.

**問題 8.37** 定理 8.28 と定理 8.35 より, 三角圏の同値

$$\text{HMF}^{\text{gr}}(W) \cong \underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(R) \cong D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$$

が成り立った.  $R$  が正則であるときは  $D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R) \cong 0$  となるので,  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$ ,  $\underline{\text{CM}}^{\text{gr}}(R)$  はともに 0 となるが, このことをそれぞれの三角圏の定義から直接示せ.

**注意 8.38**  $W$  が多項式環  $S := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$  の次数  $d$  の齊次式で  $W = 0$  は原点で孤立特異点を持つとする.  $R := S/(W)$  とすれば定理 8.35 より三角同値  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W) \cong D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  が存在するが, 注意 8.22 を合わせれば,  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$  は Serre 関手

$$\mathcal{S}_{\text{HMF}^{\text{gr}}(W)} = [N - 1] \circ \tau^{d - N - 1}$$

を持ち, さらに (8.24) より

$$\overbrace{\mathcal{S}_{\text{HMF}^{\text{gr}}(W)} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{\text{HMF}^{\text{gr}}(W)}}^{d \text{ 回}} = [(N+1)(d-2)]$$

を満たす。特に  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$  は  $\frac{(N+1)(d-2)}{d}$  次元の分数的 **Calabi-Yau 圈** (fractional Calabi-Yau category) である。

定理 8.21 と定理 8.35 を使って次数付き行列因子化の圏を使った次の形の主張を述べておこう。次の状況では  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(d-N-1)$  となるので、8.4 節で述べたように  $R := \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(i))$  は Gorenstein 環であり、Gorenstein パラメーター  $a$  は  $N+1-d$  となることに注意する。

**定理 8.39**  $X$  を次数  $d$  の齊次多項式  $W$  で決まる  $\mathbb{P}^N$  内の  $(N-1)$  次元超曲面とすると、次が成り立つ。<sup>7</sup>

(i)  $d < N+1$  のとき、半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{O}_X(d-N), \dots, \mathcal{O}_X, \text{HMF}^{\text{gr}}(W) \rangle$$

が存在する。

(ii)  $d > N+1$  のとき、半直交分解

$$\text{HMF}^{\text{gr}}(W) = \langle \text{Coker}^{-1} \circ q(k), \dots, \text{Coker}^{-1} \circ q(k(N-d+2)), D^b(X) \rangle$$

が存在する。ここで  $q: D^b(\text{gr } R) \rightarrow D_{\text{sg}}^{\text{gr}}(R)$  は自然な射影である。<sup>8</sup>

(iii)  $d = N+1$  のとき、同値  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W) \cong D^b(X)$  が存在する。

## 8.8 行列因子化の圏と Calabi-Yau 超曲面の導来圏

$d$  を正の整数として、

$$S := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N], \quad W \in S_d, \quad R := S/(W)$$

とする。ここではすべての  $i$  に対し、 $\deg x_i = 1$  とし、さらに  $X = \text{Proj } R$  と定める。このとき  $R$  の Gorenstein パラメーター  $a$  に対し

<sup>7</sup>  $X$  は (i) では  $-K_X$  が豊富になるので Fano 多様体、(ii) では標準因子  $K_X$  は豊富になる多様体 (C canonically polarized variety)、(iii) では  $K_X$  が自明になるので Calabi-Yau 多様体となる。

<sup>8</sup> [Orl09, Theorems 24 (ii), 40 (ii)] では例外列の順番が間違っている。

$$a = N + 1 - d$$

が成り立ち、この値の正負に従って、定理 8.39 により、 $D^b(X)$  と  $\text{HMF}^{\text{gr}}(W)$  の間に充満忠実な関手が存在した。特に  $d = N + 1$  のときにこれらの間に同値な関手が存在したが、この節ではこれを具体的に見ていくたい。

そこでまず  $d = N + 1$  と仮定せず、 $d$  が任意の正の整数の場合に状況をまとめておく。

$$\widetilde{(-)}: D^b(\text{gr } R) \rightarrow D^b(X)$$

を [Har77, p. 116] で定義された Abel 圈の間の関手を導來圏のレベルに持ち上げた関手とし、

$$\gamma_i: D^b(\text{gr } R_{\geq i}) = \langle \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle \rightarrow \mathcal{D}_i$$

を (8.16) で見た半直交分解によって得られる射影関手とする。 $\gamma_i$  はより具体的には次のように得られる。まず  $\langle \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle$  の  $R$  双対関手  $\mathbb{D}$  をとることで  $D^b(\text{gr } R_{\geq i})$  から  $\langle (\mathcal{S}_{<-i-a+1})^\circ, \mathcal{D}_i^\circ \rangle$  への関手が得られる（注意 8.14 参照）。さらに関手  $\text{tr}_{\geq i-1}$  を施すことで、 $\mathcal{D}_i^\circ$  の対象を抜き出し、最後に再度  $R$  双対をとつて得られるのが  $\gamma_i$  である：

$$\gamma_i: D^b(\text{gr } R_{\geq i}) \xrightarrow{\mathbb{D}} D^b(\text{gr } R)^\circ \xrightarrow{\text{tr}_{\geq i-1}} D^b(\text{gr } R)^\circ \xrightarrow{\mathbb{D}} D^b(\text{gr } R)$$

$\pi: D^b(\text{gr } R) \rightarrow D^b(\text{qgr } R)$  は商関手であったが、これは  $\pi_i \circ \text{tr}_{\geq i}$  と一致する。補題 8.16 の証明中で見たように  $\text{Ker } \pi_i = \mathcal{S}_{\geq i}$  となることから、 $\mathbf{R}\omega_i \circ \pi_i$  は  $D^b(\text{gr } R_{\geq i}) = \langle \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle$  から  $\mathcal{D}_i$  への射影関手  $\gamma_i$  と一致することがわかる。以上から次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} D^b(\text{gr } R) & \xrightarrow{\text{tr}_{\geq i}} & D^b(\text{gr } R_{\geq i}) & \xlongequal{\quad} & \langle \mathcal{D}_i, \mathcal{S}_{\geq i} \rangle \\ \widetilde{(-)} \downarrow & & \pi_i \downarrow & & \downarrow \gamma_i \\ D^b(X) & \xrightarrow{\Gamma_*} & D^b(\text{qgr } R) & \xrightarrow{\mathbf{R}\omega_i} & \mathcal{D}_i \end{array} \tag{8.40}$$

が得られる。 $\Gamma_*$  は (8.8) で考えた Abel 圈の同値によって引き起こされる同値であり、 $\mathbf{R}\omega_i$  も同値関手である。

一方、同値  $\mathcal{T}_i \cong D_{\text{Sg}}^{\text{gr}}(R)$  の得られ方から次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \langle \mathcal{P}_{\geq i}, T_i \rangle & \xlongequal{\quad} & D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}) & \hookrightarrow & D^b(\mathrm{gr} R) & \xleftarrow{\mathrm{Coker}} & \mathrm{MF}^{\mathrm{gr}}(R) \\
 \delta_i \downarrow & & \downarrow & & q \downarrow & & \downarrow \\
 T_i & \longrightarrow & D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}) / \mathcal{P}_{\geq i} & \longrightarrow & D_{\mathrm{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) & \xrightarrow{\mathrm{Coker}^{-1}} & \mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)
 \end{array} \tag{8.41}$$

ここで  $\delta_i$  は (8.16) で見た半直交分解  $D^b(\mathrm{gr} R_{\geq i}) = \langle \mathcal{P}_{\geq i}, T_i \rangle$  によって得られる射影関手で、下段の関手はすべて同値である。

注意 8.19 で述べたように  $D^b(\mathrm{gr} R)$  の充満部分三角圏  $\mathcal{D}_i, T_i$  には  $a = N+1-d$  の符号によって包含関係が存在する。特に  $d = N+1$  のとき  $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$  となり、 $X$  は Calabi-Yau 超曲面であり、この場合  $\mathcal{D}_i$  と  $T_i$  は一致する。そこで図式 (8.40) と (8.41) によって得られる同値を

$$\Psi_i: D^b(X) \rightarrow \mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(W)$$

と表す。<sup>9</sup>

以下では [Gal14] に従い、 $\Psi_1(\mathcal{O}_X)$  がどのような行列因子化を与えるか計算してみよう。 $\tilde{R} = \mathcal{O}_X$  であるから、

$$\Psi_1(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Coker}^{-1} \circ q \circ \gamma_1 \circ \tau_{\geq 1}(R) = \mathrm{Coker}^{-1} \circ q \circ \gamma_1(R_{\geq 1})$$

となる。そこでまず次を見る。

**補題 8.40**  $\gamma_1(R_{\geq 1}) = R_{\geq 1}$  が成り立つ。

**証明**  $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} \cong \mathrm{id}_{D^b(\mathrm{gr} R)}$  であるから、もし  $\mathbb{D}(R_{\geq 1}) \in D^b(\mathrm{gr} R_{\geq 0})^\circ$  が示せれば  $\gamma_1(R) = R_{\geq 1}$  が従う。

短完全列

$$0 \rightarrow R_{\geq 1} \rightarrow R \rightarrow k \rightarrow 0 \tag{8.42}$$

を用いると、完全列

$$R \cong \mathrm{Hom}_R(R, R) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(R_{\geq 1}, R) \rightarrow \mathrm{Ext}_R^1(k, R)$$

の存在と、 $i \geq 1$  に対し  $\mathrm{Ext}_R^i(R_{\geq 1}, R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}(k, R)$  が成り立つことがわ

<sup>9</sup> 定理 8.18(ii) で得た  $\Psi_i: D^b(\mathrm{qgr} R) \rightarrow D_{\mathrm{Sg}}^{\mathrm{gr}}$  の前に  $\Gamma_*$ 、後に  $\mathrm{Coker}^{-1}$  を合成したのがここで定義した  $\Psi_i$  である。

かる。これらと  $R$  が Gorenstein 次数付き  $k$ -代数で Gorenstein パラメーターは 0 であることから、 $\mathbb{D}(R_{\geq 1}) \in D^b(\mathrm{gr} R_{\geq 0})^\circ$  が成り立つ。  $\square$

$\mathrm{gr} R$  の完全列 (8.42) と  $q(R) = 0$  であることから  $D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R)$  の対象として  $R_{\geq 1} \cong k[-1]$  であることがわかる。したがって

$$\Psi_1(\mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Coker}^{-1}(k[-1])$$

である。

一方、 $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_N) = S_{\geq 1}$  を  $S$  の齊次極大イデアルとすると、例 8.24(ii) により次のような行列因子化

$$\begin{aligned} P^\bullet &= \left( \bigoplus_{i \geq 0} \bigwedge^{2i+1} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes S(di) \xrightarrow{p_0} \bigoplus_{i \geq 0} \bigwedge^{2i} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes S(di) \right. \\ &\quad \left. \xrightarrow{p_1} \bigoplus_{i \geq 0} \bigwedge^{2i+1} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes S((d+1)i) \right) \end{aligned}$$

が存在し、[Dyc11, Corollary 2.7] より、 $\mathrm{Coker}(P^\bullet) = k$  となる。つまり

$$\Psi_1(\mathcal{O}_X) \cong P^\bullet[-1]$$

となることがわかる。

$X$  を楕円曲線とする。1 次元版の Calabi–Yau 多様体である楕円曲線はいつでも  $\mathbb{P}^2$  内の 3 次曲線として実現されることが知られているが、このとき [Gal14] では  $E$  の有理点  $x$  に対し  $\Psi_1(\mathcal{O}_x)$  がどういった行列因子化になるかも計算されている。

# 第9章 ホモロジー的射影双対理論

本章では Kuznetsov によるホモロジー的射影双対理論 [Kuz07] を解説する。これは古典的な射影双対理論の圈論的拡張であるといえる。2つの代数多様体がホモロジー的射影双対の関係にあるとき、これらの連接層の導來圏は特殊な関係を持つことがわかる。これを応用すると、様々な代数多様体の連接層の導來圏の間に圈同値や充満忠実関手を構成することができる。これは安定層のモジュライ空間を用いたアプローチとは趣を異にするものである。1.2節で述べたように、本書で使われる射影空間  $\mathbb{P}(V)$  や Grassmann 多様体の  $G(r, V)$  の記号は [Kuz07] の用法とは異なることに注意されたい。

## 9.1 Lefschetz 分解

$X$  を滑らかな射影的代数多様体、 $\mathcal{O}_X(1)$  を（豊富とは限らない） $X$  上の直線束、 $V$  を  $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$  の部分空間とする。さらに  $V$  が  $\mathcal{O}_X(1)$  を生成すると仮定する。このとき、 $V$  は射

$$f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

を誘導し、 $\mathcal{O}_X(1) = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$  となる。

**定義 9.1**  $D^b(X)$  の Lefschetz 分解 (Lefschetz decomposition) とは、半直交分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \rangle \tag{9.1}$$

であって、 $0 \subset \mathcal{A}_{m-1} \subset \dots \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$  を満たすものである。ここで、 $\mathcal{A}(i) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(i)$  とおいた。

系 4.33 より定義 9.1 に現れた  $D^b(X)$  の部分三角圏  $\mathcal{A}_i$  は許容部分三角圏であることに注意する.

**例 9.2**  $V$  を  $m$  次元のベクトル空間とし,  $X = \mathbb{P}(V)$ ,  $f = \text{id}_X: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  とする. Beilinson の定理 4.45 より

$$D^b(X) = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1), \dots, \mathcal{O}_X(m-1) \rangle \quad (9.2)$$

となる. よって  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_{m-1} = \langle \mathcal{O}_X \rangle$  とおくと, これは  $D^b(X)$  の Lefschetz 分解を与える.

**例 9.3**  $S$  を滑らかな射影的代数多様体,  $E$  を大域切断で生成される  $S$  上の階数  $m$  の局所自由層とする. このとき,  $X$  を  $S$  上の射影束  $X = \mathbb{P}_S(E)$ ,  $V = H^0(S, E)$  とすると,

$$V \otimes \mathcal{O}_S \twoheadrightarrow E$$

によって射  $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  を得る. ( $S = \text{Spec } \mathbb{C}$ ,  $E = \mathbb{C}^m$  としたのが, 例 9.2 である.) 定理 4.29 より半直交分解

$$D^b(X) = \langle D^b(S), D^b(S) \otimes \mathcal{O}_X(1), \dots, D^b(S) \otimes \mathcal{O}_X(m-1) \rangle$$

が存在する.  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_{m-1} = D^b(S)$  とおくと, これは  $D^b(X)$  の Lefschetz 分解を与える.

**例 9.4** 例 9.2において  $X = \mathbb{P}(V)$  を Veronese 埋め込みで  $\mathbb{P}(S^2(V))$  に埋め込み,  $f: X \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2(V))$  とおく. すると  $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2(V))}(1) = \mathcal{O}_X(2)$  となる.  $m = \dim V$  の偶奇に応じて

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 = \dots = \mathcal{A}_{\frac{m}{2}-1} = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle & (m \text{ が偶数のとき}) \\ \mathcal{A}_0 = \dots = \mathcal{A}_{\frac{m+1}{2}-2} = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle, \mathcal{A}_{\frac{m+1}{2}-1} = \langle \mathcal{O}_X \rangle & (m \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定めると, それぞれの場合で  $D^b(X)$  の  $\mathcal{O}_X(2)$  に関する Lefschetz 分解が得られる.

## 9.2 普遍超平面

前節と同様に,  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $D^b(X)$  には Lefschetz 分解 (9.1) が存在すると仮定する.

$$i: \mathcal{X} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}(V^\vee)$$

を普遍超平面とする. 集合論的には  $\mathcal{X}$  は次のように与えられる.  $\mathbb{P}(V^\vee)$  は  $\mathbb{P}(V)$  内の超平面全体の集合とみなせる. そのため  $\mathbb{P}(V^\vee)$  の点を超平面  $H \subset \mathbb{P}(V)$  と思うと,  $\mathcal{X}$  は

$$\mathcal{X} = \{(x, H) \in X \times \mathbb{P}(V^\vee) : x \in f^{-1}(H)\}$$

と記述される. スキーム論的には,  $X \times \mathbb{P}(V^\vee)$  上の直線束  $\mathcal{O}_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)$  の大域切断  $s$  を

$$s = \text{id}_V \in V \otimes V^\vee \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}(V^\vee), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1))$$

とすると,  $\mathcal{X}$  は  $\mathcal{X} = \text{div}(s)$  として定義される. また,  $\pi, h$  を  $i$  と射影の合成

$$\pi: \mathcal{X} \xrightarrow{i} X \times \mathbb{P}(V^\vee) \twoheadrightarrow X, \quad h: \mathcal{X} \xrightarrow{i} X \times \mathbb{P}(V^\vee) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V^\vee) \quad (9.3)$$

とする.

$D^b(\mathcal{X})$  における半直交分解について考えよう. まず,  $X \times \mathbb{P}(V^\vee)$  の導來圏を考える.

### 補題 9.5 半直交分解

$$\begin{aligned} D^b(X \times \mathbb{P}(V^\vee)) = & \langle \mathcal{A}_0 \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \mathcal{A}_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \\ & \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)) \rangle \end{aligned}$$

が存在する.

証明 この補題は半直交分解の基底変換による振る舞いを示した [Kuz11, Theorem 5.6] の特別な場合である. 任意の  $F_1, F_2 \in D^b(X)$ ,  $G_1, G_2 \in D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$  に対して, Künneth 公式より

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}\text{Hom}_{X \times \mathbb{P}(V^\vee)}(F_1 \boxtimes G_1, F_2 \boxtimes G_2) \\ & \cong \mathbf{R}\text{Hom}_X(F_1, F_2) \otimes \mathbf{R}\text{Hom}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(G_1, G_2) \end{aligned}$$

となるため, 右辺の半直交性が従う. 定理 4.29 より  $D^b(X \times \mathbb{P}(V^\vee))$  の任意の対象は  $F \boxtimes G$ , ( $F \in D^b(X)$ ,  $G \in D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$ ) の形の対象で生成されるため, 求める半直交分解を得る.  $\square$

次に  $\mathcal{X}$  の導來圏と, 補題 9.5 における半直交分解の関係について述べる. まず次

の補題を示す.

**補題 9.6** 任意の  $F_1, F_2 \in D^b(X)$ ,  $G_1, G_2 \in D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$  に対して, 完全三角形

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(F_1, F_2(-1)) \otimes \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(G_1, G_2(-1)) \\ \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(F_1, F_2) \otimes \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(G_1, G_2) \\ \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(i^*(F_1 \boxtimes G_1), i^*(F_2 \boxtimes G_2)) \end{aligned}$$

が存在する.

**証明**  $\mathcal{X}$  の構成から, 連接層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}(V^\vee)} \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$$

が存在する. 上の完全系列に  $(F_1^\vee \otimes F_2) \boxtimes (G_1^\vee \otimes G_2)$  をテンソルし, その後  $\mathbf{R}\Gamma(-)$  を施すと求める完全三角形を得る.  $\square$

**命題 9.7** 各  $1 \leq k \leq m-1$  に対して, 関手

$$\mathcal{A}_k(k) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)) \hookrightarrow D^b(X \times \mathbb{P}(V^\vee)) \xrightarrow{i^*} D^b(\mathcal{X}) \quad (9.4)$$

は充満忠実である. さらに,  $D^b(\mathcal{X})$  における列

$$\mathcal{A}_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$$

は半直交的である.

**証明**  $1 \leq k \leq l \leq m-1$  とし,  $F_1 \in \mathcal{A}_l(l)$ ,  $F_2 \in \mathcal{A}_k(k)$ ,  $G_1, G_2 \in D^b(\mathbb{P}(V^\vee))$  をとり, 補題 9.6 における完全三角形を考える. すると,

$$F_2(-1) \in \mathcal{A}_k(k-1) \subset \mathcal{A}_{k-1}(k-1)$$

となるため,  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(F_1, F_2(-1)) = 0$  となる. よって  $k = l$  の場合, 関手 (9.4) が充満忠実となることが従う. また  $k < l$  の場合, Lefschetz 分解の定義から  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_X(F_1, F_2) = 0$  となるため,

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(i^*(F_1 \boxtimes G_1), i^*(F_2 \boxtimes G_2)) = 0$$

となる. よって求める半直交性を得る.  $\square$

### 9.3 ホモロジー的射影双対

前節の設定を引き継いで議論する。つまり、滑らかな射影的代数多様体  $X$  に対し、 $D^b(X)$  が Lefschetz 分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \rangle \quad (9.5)$$

を持つとする。さらに普遍超平面  $\mathcal{X} (\subset X \times \mathbb{P}(V^\vee))$  に対し、 $D^b(\mathcal{X})$  の部分三角圏を

$$\mathcal{C} := \langle \mathcal{A}_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)) \rangle^\perp$$

と定めると、命題 9.7 により  $D^b(\mathcal{X})$  は半直交分解

$$D^b(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{C}, \mathcal{A}_1(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(V^\vee)) \rangle$$

を持つ。以上を用いて、 $f: X \rightarrow \mathbb{P}(V)$  のホモロジー的射影双対の概念を定義する。

**定義 9.8 ([Kuz07])** 代数多様体  $Y$  と射影的射  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$ , (9.3) で与えた射  $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$  のファイバー積  $Y \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} \mathcal{X}$  に対し、対象  $\mathcal{E} \in D^b(Y \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} \mathcal{X})$  が存在して Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{Y \rightarrow \mathcal{X}}^{\mathcal{E}}: D^b(Y) \rightarrow D^b(\mathcal{X})$$

が同値  $D^b(Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}$  を誘導するとき、組  $(Y, g)$  を Lefschetz 分解 (9.5) に関する  $(X, f)$  のホモロジー的射影双対 (homological projective dual) (以降、HPD と略すこともある) であると呼ぶ。

**注意 9.9** 一般に滑らかな射影的代数多様体  $X \subset \mathbb{P}(V)$  の古典的な意味での射影双対とは、次の  $\mathbb{P}(V^\vee)$  における部分代数多様体を意味する。

$$X^\vee = \{H \in \mathbb{P}(V^\vee) : X \cap H \text{ は滑らかでない.}\}$$

後に述べる定理 9.11 を用いると、 $(Y, g)$  が  $(X \subset \mathbb{P}(V))$  に関して定義 9.8 の条件を満たすならば、 $X^\vee$  は  $g$  の臨界値集合と一致することがわかる ([Kuz07, Section 1] を参照)。これが  $(Y, g)$  をホモロジー的射影双対と呼ぶ所以である。

$(X, f)$  と  $(Y, g)$  がホモロジー的射影双対の関係にあるとき、 $D^b(X)$  と  $D^b(Y)$  の間に密接な関係がある。その事実の証明が、論文 [Kuz07] における主定理である。

このことを述べるために、いくつか定義を与える。商線形空間  $V^\vee \twoheadrightarrow L$  に対し、 $L^\perp := \text{Coker}(L^\vee \hookrightarrow V)$  とおき、

$$X_L := X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp), \quad Y_L := Y \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} \mathbb{P}(L) \quad (9.6)$$

と定める。

### 定義 9.10

商空間  $V^\vee \twoheadrightarrow L$  は

$$\dim X_L = \dim X - (\dim V - \dim L^\perp) (= \dim X - \dim L^\vee)$$

$$\dim Y_L = \dim Y - (\dim V^\vee - \dim L) (= \dim Y - \dim L^\perp)$$

を満たすとき、許容可能 (admissible) であると呼ぶ。

以下では  $N := \dim V$  とおき、 $D^b(X)$  の Lefschetz 分解 (9.5) の長さ  $m$  について

$$N > m \quad (9.7)$$

を仮定する。さらに

$$\mathbf{a}_k := \begin{cases} \mathcal{A}_k \text{ における } \mathcal{A}_{k+1} \text{ の右直交部分圏 } \mathcal{A}_{k+1}^\perp & (0 \leq k \leq m-2) \\ \mathcal{A}_{m-1} & (k = m-1) \\ 0 & (m \leq k) \end{cases}$$

と定めると、半直交分解

$$\mathcal{A}_k = \langle \mathbf{a}_k, \mathcal{A}_{k+1} \rangle, \quad \mathcal{A}_k = \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$$

が存在する。

以上の準備の下、ホモロジー的射影双対論の基本定理を以下に述べる。

**定理 9.11 ([Kuz07])**  $(Y, g)$  が Lefschetz 分解 (9.5) に関して  $(X, f)$  のホモロジー的射影双対であるとする。このとき、次が成り立つ：

- (i)  $Y$  は滑らかであり、半直交分解

$$D^b(Y) = \langle \mathcal{B}_{n-1}(1-n), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle \quad (9.8)$$

であって、 $0 \subset \mathcal{B}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0$  を満たすものが存在する。ここで

$$n = N - \max\{i : \mathcal{A}_{i-1} = \mathcal{A}_0\} \quad (9.9)$$

である。さらに  $\mathcal{B}_k$  は 半直交分解

$$\mathcal{B}_k = \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{N-k-2} \rangle \quad (9.10)$$

を持つ。ここで  $\mathbf{b}_i$  は  $\mathbf{a}_i$  と三角圏として同値となる。

- (ii)  $V^\vee \rightarrow L$  を  $r$  次元の許容可能な商ベクトル空間とする。このとき、三角圏  $\mathcal{C}_L$  と半直交分解

$$D^b(X_L) = \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}_r(1), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-r) \rangle$$

$$D^b(Y_L) = \langle \mathcal{B}_{n-1}(N-r-n), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1), \mathcal{C}_L \rangle$$

が存在する。

半直交分解 (9.8) は Lefschetz 分解 (9.5) の 双対 Lefschetz 分解 (dual Lefschetz decomposition) と呼ばれる。Lefschetz 分解 (9.5) と双対 Lefschetz 分解 (9.8) の間には密接な関係がある。まず、(9.10) により  $\mathcal{A}_0$  および  $\mathcal{B}_0$  はいずれも  $\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle$  の形の半直交分解を持つ。ここで、 $N > m$  と  $m \leq k$  で  $\mathbf{a}_k = 0$  とおいていたことから、 $\mathbf{a}_m = \dots = \mathbf{a}_{N-2} = 0$  に注意する。実際、 $\mathcal{A}_0$  と  $\mathcal{B}_0$  は同値であることが [Kuz07] における証明からわかる。さらに、 $\mathcal{B}_k$  および  $\mathcal{A}_{N-k-1}$  は次の半直交分解を持つ。

$$\mathcal{B}_k = \langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{N-k-2} \rangle, \quad \mathcal{A}_{N-k-1} = \langle \mathbf{a}_{N-k-1}, \mathbf{a}_{N-k}, \dots, \mathbf{a}_{m-1} \rangle.$$

$\mathbf{a}_i$  と  $\mathbf{b}_i$  は同値であることから、少なくとも Grothendieck 群のレベルでは

$$K(\mathcal{A}_0) = K(\mathcal{B}_0) = K(\mathcal{A}_{N-k-1}) \oplus K(\mathcal{B}_k)$$

がいえる。

例えば  $N = \dim V = 8$ , Lefschetz 分解 (9.5) の長さ  $m = 4$ , 双対 Lefschetz 分解 (9.8) の長さ  $n = N - \max\{i : \mathcal{A}_{i-1} = \mathcal{A}_0\} = 6$  の場合、Lefschetz 分解と双対 Lefschetz 分解の間の関係を可視化すると次の図のようになる。

$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$				
○	○	○	○	△	△	△	△
○	○	○	△	△	△	△	△
○	○	△	△	△	△	△	△
○	○	△	△	△	△	△	△
		$\mathcal{B}_5$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_0$

長さ  $m$  の Lefschetz 分解 (9.5) が

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \cdots = \mathcal{A}_{m-1} (= \mathcal{A})$$

を満たすとき、これを長方形型 (rectangular) と呼ぶ。9.8 節では Lefschetz 分解が長方形型の場合に定理 9.11 の証明を述べる。また定理 9.11 の系として次を得る。

**系 9.12** 定理 9.11 (ii) の状況下で、Lefschetz 分解 (9.5) が長方形型であるとする。このとき、次が成立する。

(i)  $m > r$  の場合、次の半直交分解が存在する。

$$D^b(X_L) = \langle D^b(Y_L), \mathcal{A}(1), \dots, \mathcal{A}(m-r) \rangle$$

(ii)  $m < r$  の場合、次の形の半直交分解が存在する。

$$D^b(Y_L) = \langle \mathcal{A}(m-r), \dots, \mathcal{A}(-1), D^b(X_L) \rangle$$

(iii)  $m = r$  の場合、圏同値  $D^b(X_L) \cong D^b(Y_L)$  が存在する。

**証明** Lefschetz 分解 (9.5) が長方形型なら、(9.10) より双対 Lefschetz 分解 (9.8) も長方形型となる。またこのとき、(9.9) より  $n = N - m$  となる。よって  $m \geq r$  ならば  $D^b(Y_L) = \mathcal{C}_L$ 、 $m \leq r$  ならば  $D^b(X_L) = \mathcal{C}_L$  となり、系が従う。□

ホモロジー的射影双対の最も簡単な例は、次で見るようにベクトル束とその双対ベクトル束である。

**例 9.13 (ベクトル束の HPD)**  $(X, f)$  を例 9.3 のようにとる。このとき、例 9.3 で構成した  $D^b(X)$  の Lefschetz 分解は長方形型である。 $S$  上の局所自由層  $E^\perp$  を

$$E^\perp := \text{Coker}(E^\vee \hookrightarrow V^\vee \otimes \mathcal{O}_S)$$

と定義する。 $Y = \mathbb{P}_S(E^\perp)$  とすると、自然な射  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$  が誘導される。こ

のとき,  $(Y, g)$  は  $(X, f)$  のホモロジー的射影双対であることが [Kuz07] で示されている. 実際,  $N = \dim V$  として

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 = \cdots = \mathcal{B}_{N-m-1} = q^* D^b(S)$$

とおくと,  $Y$  の双対 Lefschetz 分解が得られる. ここで  $q: Y \rightarrow S$  は射影である.

定理 9.11 により, 2 つの代数多様体がホモロジー的射影双対の関係にあると, その 2 つの連接層の導來圏の間に非常に強い関係がある. そのため, 一般にホモロジー的射影双対の例を与えるのは容易ではない. 一方, 与えられた  $(X, f)$  のホモロジー的射影双対となる  $(Y, g)$  を通常の代数多様体の枠組みを超えて求める, より多くの面白い例が見つかる. 例えば, 定義 9.8 の状況下で代数多様体  $Y$ , 射影的射  $g: Y \rightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$ ,  $Y$  上の非可換  $\mathcal{O}_Y$ -代数の層  $\mathcal{A}_Y$  が与えられたとする. このとき, 対象  $\mathcal{E} \in D^b(Y \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} \mathcal{X}, p_Y^* \mathcal{A}_Y^{op})$  が存在して Fourier–Mukai 関手

$$\Phi_{(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow \mathcal{X}}^{\mathcal{E}}: D^b(Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow D^b(\mathcal{X})$$

が同値  $D^b(Y, \mathcal{A}_Y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}$  を誘導するとき  $((Y, \mathcal{A}_Y), g)$  は  $(X, f)$  の HPD であると定義することができる. ここで,  $D^b(Y, \mathcal{A}_Y)$  は連接右  $\mathcal{A}_Y$ -加群の有界な複体の導來圏である. 以降では上記のように,  $(Y, g)$  が  $(X, f)$  のホモロジー的射影双対といったときには  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  のような代数多様体よりも一般的な対象も考慮に入れて議論する.

## 9.4 2 次超曲面の HPD

例 9.4 の状況でのホモロジー的射影双対について議論しよう. まず, 2 次超曲面ファイプレーションに関する Kuznetsov の結果を紹介する.  $S$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $E$  を  $S$  上の階数  $n+2$  の局所自由層とする. さらに可逆層  $\mathcal{L}$  の埋め込み

$$q: \mathcal{L} \hookrightarrow S^2(E) \tag{9.11}$$

に対し, その双対を考えることで  $q$  を ( $\mathcal{L}^{-1}$  に値を持つ) 対称 2 次形式

$$E^\vee \otimes E^\vee \rightarrow \mathcal{L}^{-1}$$

とみなす. これが退化するのは, 引き起こされた射

$$E^\vee \rightarrow E \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

(これも  $q$  で表す) に対し, その最高次外積  $\det q = \bigwedge^{\text{rank } E} q$  が 0 となる  $S$  の点である.  $p: \mathbb{P}_S(E) \rightarrow S$  を射影とすると, 埋め込み  $q$  は大域切断

$$s \in H^0(\mathbb{P}_S(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)}(2) \otimes p^*\mathcal{L}^{-1}) = H^0(S, S^2(E) \otimes \mathcal{L}^{-1}) \quad (9.12)$$

を決め, さらに  $X$  を

$$X := (s = 0) \subset \mathbb{P}_S(E)$$

と定める. 射影  $p$  の制限

$$h = p|_X: X \rightarrow S$$

の各ファイバーは  $\mathbb{P}^{n+1}$  内の 2 次超曲面である.  $X$  は  $S$  上の 2 次超曲面ファイバーレーション (quadratic fibration) と呼ばれる.

$S$  上の Clifford 代数の層を定めるために, 通常の Clifford 代数の復習をしよう.  $V$  を  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間,  $(q: V \times V \rightarrow \mathbb{C}) \in S^2(V^\vee)$  を  $V$  上の対称 2 次形式とすると, Clifford 代数  $\text{Cl}(V)$  は

$$\text{Cl}(V) := T^\bullet(V)/(v \otimes v' + v' \otimes v - 2q(v, v'))$$

と定義される. ここで  $T^\bullet(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$  はテンソル代数である.

**問題 9.14**  $V$  の基底を  $e_1, \dots, e_n$  とすると,  $\text{Cl}(V)$  は次の形の元からなる基底を持つことを示せ.

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, 0 \leq k \leq n)$$

ただし  $k = 0$  の場合, 上の元は  $1 \in \text{Cl}(V)$  として定める.

問題 9.14 より, Clifford 代数  $\text{Cl}(V)$  は  $\mathbb{C}$  上ベクトル空間として外積代数  $\bigwedge^\bullet(V)$  と同一視できるが, その積構造は外積代数とは異なる. また, 代数  $\text{Cl}(V)$  は  $T^\bullet(V)$  から誘導される  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の次数付けを持っている. したがって, その偶数部分  $\text{Cl}_0(V)$  は  $\text{Cl}(V)$  の部分代数である.

以上の構成をベクトル束  $V(E) \rightarrow S$  および  $S$  上の 2 次形式の族 (9.11) に適用することで,  $S$  上の Clifford 代数層の偶数部分

$$\text{Cl}_0 = \mathcal{O}_S \oplus (\bigwedge^2 E^\vee \otimes \mathcal{L}) \oplus (\bigwedge^4 E^\vee \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}) \oplus \cdots$$

が定まる。これは  $S$  上の非可換代数の層であり、 $\mathcal{O}_S$ -加群として連接層である。組  $(S, \mathcal{Cl}_0)$  を **Clifford 空間** (Clifford space) と呼び、その上の連接右加群の導來圏を  $D^b(S, \mathcal{Cl}_0)$  と記述する。

**定理 9.15** ([Kuz08a]) 各  $i \in \mathbb{Z}$  に対して充満忠実関手

$$\Phi_i : D^b(S) \rightarrow D^b(X) \quad F \mapsto \mathbf{L}h^*F \otimes \mathcal{O}_{X/S}(i)$$

および次の半直交分解が存在する。

$$D^b(X) = \langle D^b(S, \mathcal{Cl}_0), \Phi_1(D^b(S)), \dots, \Phi_n(D^b(S)) \rangle.$$

例 9.4 の状況に戻る。この場合、普遍超平面

$$\mathcal{X}(\subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(S^2(V^\vee)))$$

は  $\mathbb{P}(S^2(V^\vee))$  上の 2 次超曲面ファイプレーションである。よって定理 9.15 を適用し次を得る。

**定理 9.16** ([Kuz08a]) 射影空間  $X = \mathbb{P}(V)$  の Veronese 埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2(V))$  に関するホモロジー的射影双対は、Clifford 空間

$$Y = (\mathbb{P}(S^2(V^\vee)), \mathcal{Cl}_0)$$

である。ここで Clifford 代数層  $\mathcal{Cl}_0$  は  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2(V^\vee))}$ -加群として

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_0 &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2(V^\vee))} \oplus \left( \bigwedge^2 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2(V^\vee))}(-1) \right) \\ &\oplus \left( \bigwedge^4 V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2(V^\vee))}(-2) \right) \oplus \cdots \end{aligned}$$

で与えられる。

上の定理を定理 9.11 に当てはめてみよう。例えば  $N = \dim V = 6$  とし、 $S^2(V^\vee) \rightarrow L$  を（十分一般の） $r = 3$  次元商ベクトル空間とする。このとき、 $X = \mathbb{P}(V)$  の  $\mathcal{O}_X(2)$  に関する Lefschetz 分解は、 $\mathcal{A} := \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle$  とおけば

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{A}(2), \mathcal{A}(4) \rangle$$

となる。 $X_L$  は 3 つの 2 次超曲面  $Q_i$  の交わり

$$X_L = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbb{P}^5$$

であり、よって K3 曲面となる。

一方、 $Y_L$  は

$$Y_L = (\mathbb{P}(L), \mathcal{R}), \quad \mathcal{R} = Cl_0|_{\mathbb{P}(L)}$$

となる。ここで  $\mathcal{R}$  は  $\mathbb{P}(L) (= \mathbb{P}^2)$  上のある非可換代数の層である。また、普遍超平面が定める 2 次曲面束  $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}(S^2(V^\vee))$  は 6 次超曲面  $D \subset \mathbb{P}(S^2(V^\vee))$  の外で滑らかな射となる。すると、 $\mathbb{P}(L)$  内の 6 次曲線  $D \cap \mathbb{P}(L)$  で分岐する 2 次被覆  $S \rightarrow \mathbb{P}(L)$ 、および  $S$  上のある Azumaya 代数  $\mathcal{R}_S$  が存在して、圏同値

$$\mathrm{Coh}(\mathbb{P}(L), \mathcal{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}(S, \mathcal{R}_S)$$

が存在することも示される ( $S$  は K3 曲面となることに注意する)。よって定理 9.11 および 5.10 節の議論より、ある  $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$  と圏同値

$$D^b(S, \alpha) \xrightarrow{\sim} D^b(X_L) \tag{9.13}$$

が存在する。これは K3 曲面  $X_L$  と (非可換) K3 曲面  $(S, \alpha)$  の間の非自明な導來同値である。

**注意 9.17** 上述の (9.13) のような導來同値の存在は、モジュライ理論を用いて Mukai [Muk88] によりすでに得られていたものである。一方、(9.13) の圏同値を与える関手が Mukai によるモジュライ理論から定まる普遍層による関手と自然同型となるかどうかについては、上の議論からは定かではない。

## 9.5 圈論的特異点解消

一般に代数多様体に特異点が存在すると、その導來圏は良い振る舞いをしない。例えば定理 9.11 (i) により、特異点を持つ代数多様体は滑らかな代数多様体のホモロジー的射影双対にはりえない。一方、特異点を持つ代数多様体の導來圏の 圈論的特異点解消という概念を導入することで、この問題点を解決できる。まず定義を述べる。

**定義 9.18** (滑らかとは限らない) 準射影的代数多様体  $Y$  の 圈論的特異点解消 (categorical resolution of singularities) とは、滑らかな三角圏  $\mathcal{D}$ 、および三角圏の関手

$$\pi_*: \mathcal{D} \rightarrow D^b(Y), \quad \pi^*: \mathfrak{Perf}(Y) \rightarrow \mathcal{D}$$

であって次を満たすものである.

(i)  $\pi^*$  は  $\pi_*$  の左随伴関手である. より正確には  $E \in \mathfrak{Perf}(Y), F \in \mathcal{D}$  に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\pi^*(E), F) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(Y)}(E, \pi_*(F)) \text{ が成り立つ.}^1$$

(ii) 式 (3.2) で定めた自然変換  $\eta: \mathrm{id}_{\mathfrak{Perf}(Y)} \rightarrow \pi_* \circ \pi^*$  が同型となる.

三角圏が滑らかであることの定義はここでは与えないが, 応用上は  $\mathcal{D}$  は滑らかな射影的代数多様体  $\tilde{Y}$  の導来圏  $D^b(\tilde{Y})$  の許容可能部分圏になるようなものを考えなければ十分である (正確な定義については [KL15, Definition 1.2, 1.3] を参照).

**例 9.19** (i)  $Y$  を正規な射影的代数多様体とし, 高々 有理的特異点 (rational singularity) しか持たないとする. つまり  $Y$  の任意の特異点解消  $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$  に対し,  $\mathbf{R}\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} = \mathcal{O}_Y$  が成り立つとする. このとき

$$\mathbf{R}\pi_*: D^b(\tilde{Y}) \rightarrow D^b(Y), \quad \mathbf{L}\pi^* = \pi^*: \mathfrak{Perf}(Y) \rightarrow D^b(\tilde{Y})$$

は射影公式より  $Y$  の圏論的特異点解消を与えることがわかる.

(ii) (i) の状況で,  $\mathcal{D}$  を

$$\pi^*(\mathfrak{Perf}(Y)) \subset \mathcal{D} \subset D^b(\tilde{Y})$$

を満たす  $D^b(\tilde{Y})$  の許容可能部分圏とする.  $i^L: D^b(\tilde{Y}) \rightarrow \mathcal{D}$  を埋め込み  $i: \mathcal{D} \hookrightarrow D^b(\tilde{Y})$  の左随伴関手とすると,

$$\mathbf{R}\pi_* \circ i: \mathcal{D} \rightarrow D^b(Y), \quad i^L \circ \pi^*: \mathfrak{Perf}(Y) \rightarrow \mathcal{D}$$

は  $Y$  の圏論的特異点解消を与える.

**問題 9.20** 準射影的代数多様体  $Y$  は  $p \in Y$  のみで特異点を持ち

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,p} \cong \mathbb{C}[[x,y,z,w]]/(x^2 + y^2 + z^2 + w^3)$$

が成立すると仮定する.  $\tilde{Y} \rightarrow Y$  を点  $p$  でのブローアップ,  $E \subset \tilde{Y}$  を例外因子とする. このとき  $\mathcal{D}_Y = {}^\perp \langle \mathcal{O}_E(E) \rangle$  とおくと,

$$D^b(\tilde{Y}) = \langle \mathcal{O}_E(E), \mathcal{D}_Y \rangle$$

---

<sup>1</sup>  $\pi_*$  が  $\mathcal{D}$  から  $\mathfrak{Perf}(Y)$  への関手ではないので 3.1 節で与えた意味での随伴関手にはならない.

と半直交分解でき、 $\mathcal{D}_Y$  は  $Y$  の圏論的特異点解消を与えることを示せ。（[Kaw09, Section 4] を参照。）

**例 9.21**  $\mathcal{M}$  を  $\mathbb{C}$  上の滑らかな Deligne–Mumford スタックとし、 $M$  をその粗モジュライとする。 $\pi: \mathcal{M} \rightarrow M$  を自然な射とすると、

$$\mathbf{R}\pi_*: D^b(\mathcal{M}) \rightarrow D^b(M), \pi^*: \mathfrak{Perf}(M) \rightarrow D^b(\mathcal{M})$$

は  $M$  の圏論的特異点解消を与える。

## 9.6 Grassmann 多様体の HPD

$W$  を  $m$  次元ベクトル空間とし、 $X = \mathbb{G}(W, 2)$  を Plücker 埋め込みによって  $\mathbb{P}(\wedge^2 W)$  に埋め込む。HPD の一般論の記号だと  $V = \wedge^2 W$  である。 $\mathcal{U}_X \subset W^\vee \otimes \mathcal{O}_X$  を階数 2 の普遍部分束とする。Plücker 埋め込みに関する  $D^b(X)$  の Lefschetz 分解

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(m-1) \rangle$$

を次のようにとることができます（[Kap84] を参照）。まず  $m$  が奇数の場合、 $m = 2k + 1$  とおいて

$$\mathcal{A}_0 = \dots = \mathcal{A}_{m-1} = \langle S^{k-1}(\mathcal{U}_X), \dots, S^2(\mathcal{U}_X), \mathcal{U}_X, \mathcal{O}_X \rangle$$

であり、 $m$  が偶数の場合、 $m = 2k$  とおいて

$$\mathcal{A}_0 = \dots = \mathcal{A}_{k-1} = \langle S^{k-1}(\mathcal{U}_X), \dots, S^2(\mathcal{U}_X), \mathcal{U}_X, \mathcal{O}_X \rangle,$$

$$\mathcal{A}_k = \dots = \mathcal{A}_{2k-1} = \langle S^{k-2}(\mathcal{U}_X), \dots, S^2(\mathcal{U}_X), \mathcal{U}_X, \mathcal{O}_X \rangle$$

である。この場合、 $X$  の HPD は 5.9 節で定義した Pfaffian 多様体  $\text{Pf}(W)$  を用いて与えられると予想されている。

5.9 節で見たように一般に  $\text{Pf}(W)$  には特異点が存在しうるが、圏論的特異点解消をとることで次が成立すると期待されている。（9.3 節の最後で述べたように、より一般的な三角圏に対しても HPD が定義されることに注意する。）

**予想 9.22**  $\text{Pf}(W)$  の圏論的特異点解消が存在して、 $X = \mathbb{G}(W, 2)$  のホモロジー的射影双対を与える。<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> [Kuza, Conjecture 6] では、一般化された Pfaffian 多様体  $\text{Pf}(2r, W)$  に関する予想を与

[Kuz08b, Kuza] では  $m \leq 7$  で予想 9.22 が成り立つことが示されている。以下では  $\text{Pf}(W) := \text{Pf}(2[m/2] - 2, W)$  と定めていたことに注意されたい。

$m = 4, 5$  ならば、 $\text{Pf}(W) = \text{Pf}(2, W)$  となり、これは Plücker 埋め込みを通じて  $\mathbb{G}(W^\vee, 2)$  と同一視できた：

$$\mathbb{G}(W^\vee, 2) = \text{Pf}(W) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 W^\vee)$$

したがってこの場合、 $\text{Pf}(W)$  は滑らかであるから圈論的特異点解消をとらずに予想 9.22 が成立する。つまり  $\mathbb{G}(W, 2)$  と  $\mathbb{G}(W^\vee, 2)$  が互いに HPD である。

$m = 6, 7$  の場合は  $Y := \text{Pf}(W) = \text{Pf}(4, W)$  には特異点が存在し、その特異点集合を  $Z$  とおくとこれは  $\mathbb{G}(W^\vee, 2) = \text{Pf}(2, W)$  と一致した：

$$Z := \mathbb{G}(W^\vee, 2) = \text{Pf}(2, W) \hookrightarrow \text{Pf}(W) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 W^\vee)$$

$Y$  の圈論的特異点解消を与えるため、まず  $Y$  の特異点解消を構成しよう。 $\sigma \in Y$  に対して、線形写像

$$\sigma: W^\vee \rightarrow W$$

の核は

$$\dim \text{Ker}(\sigma) = \begin{cases} m-4 & (\sigma \in Y \setminus Z \text{ のとき}) \\ m-2 & (\sigma \in Z \text{ のとき}) \end{cases} \quad (9.14)$$

を満たすことに注意する。そこで

$$\mathbb{G} := \mathbb{G}(W, m-4) (\cong \mathbb{G}(W^\vee, 4))$$

とし、

$$\begin{aligned} \tilde{Y} := \{(K, \sigma) \in \mathbb{G}(W^\vee, 4) \times Y : K \text{ は } W^\vee \text{ の } (m-4) \text{ 次元部分ベクトル空間}, \\ \sigma \in Y \text{ で, } K \subset \text{Ker}(\sigma) \text{ を満たす}\} \end{aligned}$$

と定めると

$$\xi: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{G} \quad (K, \sigma) \mapsto (W \twoheadrightarrow K^\vee)$$

は  $\mathbb{G}$  上の射影空間束であり、具体的には  $\mathcal{K} \subset W^\vee \otimes \mathcal{O}_\mathbb{G}$  を  $\mathbb{G}$  上の階数  $(m-4)$  の普遍束とし、 $\mathcal{K}^\perp := \text{Coker}(\mathcal{K} \hookrightarrow W^\vee \otimes \mathcal{O}_\mathbb{G})$  とすると

えている。[RS19] も参照のこと。

$$\tilde{Y} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{G}}(\bigwedge^2 \mathcal{K}^\perp)$$

となり、特に  $\tilde{Y}$  は滑らかになる。このとき可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{Z} & \xhookrightarrow{i_{\tilde{Y}}} & \tilde{Y} & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{G} \\ g_Z \downarrow & & \downarrow g_Y & & \\ Z & \xhookrightarrow[i_Y]{} & Y = \mathrm{Pf}(W) & & \end{array}$$

が存在する。ここで  $g_Y(K, \sigma) = \sigma$  であり、これは (9.14) より  $Y \setminus Z$  上で同型である。特に  $g_Y$  は双有理射である。

以上より、 $g_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$  が  $Y$  の特異点解消を与えることになる。 $\tilde{Z}$  は  $g_Y$  の例外因子であり、これは旗多様体  $\mathrm{Fl}(m-4, m-2, W)$  と同一視できる。 $\mathbb{G}$  上のベクトル束  $\mathcal{K}$  を  $\tilde{Y}$  や  $\tilde{Z}$  まで引き戻したものと同じ記号  $\mathcal{K}$  と書くことにする。

**定理 9.23 ([Kuz08b, Kuza])**  $m = 6, 7$  とする。このとき、

$$\mathcal{D}_Y = \{E \in D^b(\tilde{Y}) : \mathrm{Li}_{\tilde{Y}}^* E \in \langle \mathcal{O}_{\tilde{Z}}, \mathcal{K}^\vee \rangle\}$$

は  $D^b(\tilde{Y})$  の許容可能部分圏であり、 $Y$  の圏論的特異点解消を与える。さらに、 $Y$  上の非可換代数の層  $\mathcal{R}$  を

$$\mathcal{R} = g_{Y*} \mathcal{E}nd(\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \oplus \mathcal{K})$$

とすると、 $\mathcal{D}_Y$  は  $D^b(Y, \mathcal{R})$  と三角圏として同値である。 $\mathcal{D}_Y = D^b(Y, \mathcal{R})$  は  $\mathbb{G}(W, 2)$  のホモロジー的射影双対を与える。したがって予想 9.22 が  $m = 6, 7$  で成り立つ。

定理 9.23 に定理 9.11 を当てはめて得られるいくつかの結論について述べる。まず定理 9.11 により、 $\mathcal{D}_Y$  には双対 Lefschetz 分解が存在するはずである。そこで、 $\tilde{Y}$  上の次のベクトル束を考える。

$$F_0 := (\bigwedge^2 (\mathcal{K}^\perp)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H_G)) / \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H_G - H_Y), \quad F_1 := \xi^* \mathcal{K}^\perp, \quad F_2 := \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$$

ここで  $H_G, H_Y$  はそれぞれ  $\mathbb{G}, Y$  の超平面切断であり、 $\tilde{Y}$  に引き戻したものも同じ記号で書いた。単射  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H_G - H_Y) \hookrightarrow \bigwedge^2 (\mathcal{K}^\perp)^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H_G)$  は  $g_Y$  を誘導する射

$$\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(-H_Y) \hookrightarrow \bigwedge^2 (\mathcal{K}^\perp)^\vee$$

に  $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}(H_G)$  をテンソルしたものである。まず  $m = 6$  の場合の双対 Lefschetz 分解は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_Y &= \langle \mathcal{B}_{11}(-11), \mathcal{B}_{10}(-10), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle, \\ \mathcal{B}_0 &= \dots = \mathcal{B}_8 = \langle F_0^\vee, F_1^\vee, F_2^\vee \rangle, \quad \mathcal{B}_9 = \mathcal{B}_{10} = \mathcal{B}_{11} = \langle F_2^\vee \rangle\end{aligned}$$

となる。また  $m = 7$  の場合の双対 Lefschetz 分解は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_Y &= \langle \mathcal{B}_{13}(-13), \mathcal{B}_{12}(-12), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle, \\ \mathcal{B}_0 &= \mathcal{B}_1 = \dots = \mathcal{B}_{13} = \langle F_0^\vee, F_1^\vee, F_2^\vee \rangle\end{aligned}$$

となる。 $m = 6$  の場合、定理 9.11 を当てはめて次を得る。

**系 9.24** 定理 9.23 の状況下で、 $m = 6$  とし、 $\wedge^2 W^\vee \rightarrow L$  を  $r$  次元の十分一般の線形商空間とする。このとき、半直交分解

$$\begin{aligned}D^b(X_L) &= \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}_r(1), \dots, \mathcal{A}_5(6-r) \rangle, \\ D^b(Y_L, \mathcal{R}|_{Y_L}) &= \langle \mathcal{B}_{11}(3-r), \dots, \mathcal{B}_{15-r}(-1), \mathcal{C}_L \rangle\end{aligned}$$

が存在する。

**例 9.25** 系 9.24において  $r = 6$  とする。このとき、 $X_L$  は K3 曲面になる。また特異点集合  $Z \subset Y$  は 8 次元であり  $Y_L \subset Y$  は余次元 9 であるため、 $Y_L \cap Z = \emptyset$  となる。よって  $Y_L \subset \mathbb{P}^5$  は滑らかな 3 次超曲面となり、 $\tilde{Y}_L \cong Y_L$  となる。したがってこの場合、 $\text{Coh}(Y_L, \mathcal{R}|_{Y_L})$  は  $\text{Coh}(Y_L)$  と同値になるため、系 9.24 から半直交分解

$$D^b(Y_L) = \langle \mathcal{O}_{Y_L}(-3), \mathcal{O}_{Y_L}(-2), \mathcal{O}_{Y_L}(-1), D^b(X_L) \rangle$$

が得られる。

$m = 7$  の場合、次を得る。

**系 9.26** 定理 9.23 の状況下で、 $m = 7$  とし、 $\wedge^2 W^\vee \rightarrow L$  を  $r$  次元の十分一般の線形商空間とする。このとき、半直交分解

$$\begin{aligned}D^b(X_L) &= \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}_r(1), \dots, \mathcal{A}_6(7-r) \rangle, \\ D^b(Y_L, \mathcal{R}|_{Y_L}) &= \langle \mathcal{B}_{13}(7-r), \dots, \mathcal{B}_{21-r}(-1), \mathcal{C}_L \rangle\end{aligned}$$

が存在する。

**例 9.27** 系 9.26において  $r = 7$  とする。このとき,  $X_L$  および  $Y_L$  は滑らかな 3 次元 Calabi–Yau 多様体になる。系 9.26 より, 圈同値

$$D^b(X_L) \cong D^b(Y_L)$$

が得られる。これにより 5.9 節で与えた圈同値を HPD を用いて再構成することができた。

## 9.7 4 次元 3 次超曲面の導来圏

例 9.25において, Pfaffian 多様体の超平面切断で得られる 4 次元 3 次超曲面の導来圏が K3 曲面の導来圏と関連することを見た。ここでは、一般の 4 次元 3 次超曲面に対する一般化について議論する。

$$Y := \{f = 0\} \subset \mathbb{P}^5$$

を滑らかな 4 次元 3 次超曲面とする。ここで  $f$  は 6 変数の 3 次齊次式である。 $Y$  の導来圏について、次の命題が成立する。

**命題 9.28** 半直交分解

$$D^b(Y) = \langle \mathcal{O}_Y(-3), \mathcal{O}_Y(-2), \mathcal{O}_Y(-1), \mathcal{C}_Y \rangle$$

が存在する。さらに  $\mathcal{C}_Y$  は 2 次元の Calabi–Yau 圈<sup>3</sup>となる。

**証明** 定理 8.39 より、上記の半直交分解と圏同値

$$\mathcal{C}_Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(f)$$

が得られる。注意 8.38 より、 $\mathrm{HMF}^{\mathrm{gr}}(f)$  の Serre 関手  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}_Y}$  は [2] である。□

上の命題より、 $\mathcal{C}_Y$  は K3 曲面の導来圏と関連していると考えられる。そこで、いつ  $\mathcal{C}_Y$  が K3 曲面の導来圏と同値になるかという自然な問い合わせが生じる。Kuznetsov は、この問い合わせと  $Y$  の有理性の問題が関連していると考えている。

**予想 9.29 ([Kuz10])** 滑らかな 4 次元 3 次超曲面  $Y$  が有理的（つまり  $\mathbb{P}^4$  と双有理同値）であることと、 $\mathcal{C}_Y$  がある射影的な K3 曲面  $S$  の導来圏と同値になることは同値である。

---

<sup>3</sup> 2 次元の Calabi–Yau 圈を特に K3 圈と呼ぶこともある。

例 9.25 で考察した  $Y_L$  は有理的であることが知られている。しかし、一般にいつ 4 次元 3 次超曲面  $Y$  が有理的になるかというの古典的な未解決問題である。非常に一般的の  $Y$  に対しては非有理的であると考えられているが、それすら現時点でも未解決である。（そもそも、非有理的な  $Y$  の例が 1 つも知られていない。）4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の Hodge 構造は類似しており、この点に着目して Hassett は  $Y$  の有理性とそれと関連する Hodge 構造を持つ射影的 K3 曲面の存在が同値であると予想した [Has00]。Kuznetsov の予想 9.29 は Hassett の予想の圈論化と解釈できる。Kuznetsov 予想と Hassett 予想との関連については、[AT14] で議論されている。

さて  $\mathcal{C}_Y$  が射影的な K3 曲面の導来圏と同値にならない例に触れよう。 $Y$  が平面  $P$  を含む場合を考える：

$$P (= \mathbb{P}^2) \subset Y \subset \mathbb{P}^5$$

この場合、以下で見るように Brauer 群を考慮することで  $\mathcal{C}_Y$  と K3 曲面を関連付けることができる。まず

$$\varphi_{\mathbb{P}^5} : \widetilde{\mathbb{P}^5} \rightarrow \mathbb{P}^5$$

を  $P$  に沿った  $\mathbb{P}^5$  のブローアップとすると、 $\mathbb{P}^2$  上の階数 4 の局所自由層

$$E := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

に対し、 $\widetilde{\mathbb{P}^5} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(E) (= \mathbb{P}(E))$  が成り立つ（[EH16, Proposition 9.11] 参照）。射影束の射影を

$$p : \widetilde{\mathbb{P}^5} \cong \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^2$$

で表す。以下では  $\varphi_{\mathbb{P}^5}, p$  を  $Y$  に関連する代数多様体に制限しよう。

$\varphi_{\mathbb{P}^5}$  による  $Y$  の狭義引き戻しを  $\tilde{Y}$  とすると、 $\varphi_{\mathbb{P}^5}$  の  $\tilde{Y}$  への制限

$$\varphi := (\varphi_{\mathbb{P}^5})|_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \rightarrow Y$$

は  $P$  に沿った  $Y$  のブローアップとなる。 $H_5, H_2$  をそれぞれ  $\mathbb{P}^5, \mathbb{P}^2$  の超平面、 $E$  を  $\varphi_{\mathbb{P}^5}$  の例外因子とすると

$$3\varphi_{\mathbb{P}^5}^* H_5 = \varphi_{\mathbb{P}^5}^* Y = \tilde{Y} + E \quad p^* H_2 = \varphi_{\mathbb{P}^5}^* H_5 - E$$

が成り立つから、 $\widetilde{\mathbb{P}^5} \cong \mathbb{P}(E)$  の中で  $\tilde{Y}$  はある大域切断

$$\begin{aligned} s &\in H^0(\mathbb{P}(E), \varphi_{\mathbb{P}^5}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(2) \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \\ &= H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = H^0(\mathbb{P}^2, S^2(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \end{aligned}$$

の零点で定義されることがわかり、 $p$  の  $\tilde{Y}$  への制限

$$h := p|_{\tilde{Y}}: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

は  $\mathbb{P}(E)$  内の 2 次超曲面ファイプレーションとなる。また  $h$  が退化する  $\mathbb{P}^2$  の点（つまり  $h^{-1}(x)$  が特異 2 次超曲面となる点  $x$ ）は  $s$  が決める射

$$E^\vee \rightarrow E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

の最高次外積が 0 となる点であるから、退化する点全体  $C(\subset \mathbb{P}^2)$  は

$$(\det E)^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6)$$

の大域切断の零点集合となり、6 次曲線であることがわかる。 $C$  で分岐する 2 重被覆

$$g: S \rightarrow \mathbb{P}^2$$

を考える。 $P$  を含むという条件の下で  $Y$  を一般にとると、 $C$  は滑らかになり  $S$  は滑らかな射影的 K3 曲面となる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^5 & \xleftarrow{\varphi_{\mathbb{P}^5}} & \widetilde{\mathbb{P}^5} & = \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{p} \mathbb{P}^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ Y & \xleftarrow{\varphi} & \widetilde{Y} & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^2 \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ P & & & & S \end{array}$$

$h$  は 2 次超曲面ファイプレーションなので、9.4 節で述べたように Clifford 代数の層  $\mathcal{Cl}_0$  が  $\mathbb{P}^2$  に定まる。このとき Kuznetsov により次が知られている。

### 定理 9.30 ([Kuz10])

- (i)  $\alpha^2 = 1$  を満たす  $\alpha \in \text{Br}(S)$  が存在して、圏同値  $\text{Coh}(\mathbb{P}^2, \mathcal{Cl}_0) \cong \text{Coh}(S, \alpha)$  が成り立つ。
- (ii) 三角圏の同値  $D^b(S, \alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_Y$  が存在する。
- (iii) (i)において  $\alpha = 1$  ととれるなら、 $Y$  は有理的である。

(iv)  $Y$  を  $P$  を含むという条件で一般にとって  $\rho(S) = 1$  であるようにすると、任意の射影的 K3 曲面  $S'$  に対して  $D^b(S, \alpha)$  は  $D^b(S')$  と同値とはならない。

上の定理と予想 9.29 より、平面を含む一般の  $Y$  に対しては  $Y$  は非有理的であると期待される。

## 9.8 長方形型 Lefschetz 分解に関する HPD の証明

Kuznetsov による定理 9.11 の証明は長くて複雑であるが、長方形型の Lefschetz 分解に限定すれば、定理 9.11 (i) と  $D^b(X_L)$  の半直交分解に関して Thomas [Tho] により簡明な証明が与えられている。この節では Thomas によるこれらの証明を与える。

9.3 節での設定の下、 $V^\vee \rightarrow L$  を  $r$  次元の許容可能商ベクトル空間とする。9.2 節で定義した普遍超平面  $\mathcal{X}(\subset X \times \mathbb{P}(V^\vee))$  に対し、 $\mathcal{X}_L$  を

$$\mathcal{X}_L := \mathcal{X} \times_{\mathbb{P}(V^\vee)} \mathbb{P}(L) (\subset X \times \mathbb{P}(L))$$

と定義する。式 (9.6) で与えた  $X_L = X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^\perp)$  は線形系  $L^\vee \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$  の基底部分に他ならないため、射影  $\mathcal{X}_L \rightarrow \mathbb{P}(L)$  のすべてのファイバーに含まれる。よって可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X_L \times \mathbb{P}(L) & \xhookrightarrow{j} & \mathcal{X}_L & \xhookrightarrow{\iota} & X \times \mathbb{P}(L) \\ p \downarrow & & \pi \downarrow & & \downarrow \\ X_L & \xhookrightarrow{i} & X & = & X \end{array} \tag{9.15}$$

を得る。ここで、 $x \in X$  に対して  $x \notin X_L$  ならば  $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-2}$  になり、 $x \in X_L$  ならば  $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}^{r-1}$  になる。特に  $r = 2$  ならば  $\pi$  は  $X_L$  に沿ったプローアップに他ならない。よって次の命題はプローアップ公式（定理 4.26）や射影束公式（定理 4.29）の類似物と捉えることができる。

### 命題 9.31 関手

$$j_* p^*: D^b(X_L) \rightarrow D^b(\mathcal{X}_L), \quad \mathbf{L}\pi^*: D^b(X) \rightarrow D^b(\mathcal{X}_L) \tag{9.16}$$

は充満忠実である。さらに関手  $j_* p^*$  によって  $D^b(X_L)$  を  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の部分圏とみなすと、半直交分解

$$D^b(\mathcal{X}_L) = \langle D^b(X_L), D^b(X)(0, 1), \dots, D^b(X)(0, r-1) \rangle \quad (9.17)$$

が存在する。ここで

$$\mathcal{O}(\alpha, \beta) := (\mathcal{O}_X(\alpha) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(\beta))|_{\mathcal{X}_L}$$

とし、 $D^b(X)(\alpha, \beta)$  は  $\mathbf{L}\pi^* D^b(X) \otimes \mathcal{O}(\alpha, \beta)$  を意味する。

**証明** まず、 $j_* p^*$  が充満忠実であることを示す。 $p^*$  は充満忠実なので、 $E \in D^b(X_L)$  に対して随伴性  $\mathbf{L}j^* \dashv j_*$  から定まる自然な射

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(p^* E, p^* E) \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{L}j^* j_* p^* E, p^* E) \quad (9.18)$$

が同型であることを示せばよい。 $\mathcal{N}_j$  を埋め込み  $j: X_L \times \mathbb{P}(L) \hookrightarrow \mathcal{X}_L$  による法束とすると、関手  $\mathbf{L}j^* j_*(-)$  の核対象の Koszul 分解をとることによって  $\mathbf{L}j^* j_*(-) \rightarrow (-)$  の写像錐は

$$\bigwedge^k \mathcal{N}_j^\vee[k] \otimes (-) \quad (1 \leq k \leq r-1)$$

の形の対象たちの拡大で得られ、特に (9.18) の写像錐は

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\bigwedge^k \mathcal{N}_j^\vee \otimes p^* E, p^* E)[-k] \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, E \otimes \mathbf{R}p_*(\bigwedge^k \mathcal{N}_j))[-k] \quad (9.19)$$

たちの拡大で得られることがわかる。一方、簡単な計算により

$$\mathcal{N}_j = \mathcal{O}_{X_L}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(L)}(1)$$

となり、特に  $1 \leq k \leq r-1$  に対し  $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}(L), \Omega_{\mathbb{P}(L)}(k)) = 0$  を使うと  $\mathbf{R}p_*(\bigwedge^k \mathcal{N}_j) = 0$  が成り立つことがわかる。したがって式 (9.19) は 0 対象、特に (9.18) は同型であり  $j_* p^*$  が充満忠実であることが示された。

次に、 $1 \leq k \leq r-1$  に対して  $D^b(X)(0, k)$  が  $j_* p^* D^b(X_L)$  と左直交することを示す。 $E \in D^b(X_L)$  および  $F \in D^b(X)$  に対して、

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}\mathrm{Hom}((\mathbf{L}\pi^* F) \otimes \mathcal{O}(0, k), j_* p^* E) \\ & \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{L}j^*((\mathbf{L}\pi^* F) \otimes \mathcal{O}(0, k)), p^* E) \\ & = \mathbf{R}\mathrm{Hom}(p^* \mathbf{L}i^* F \otimes \mathcal{O}(0, k)|_{X_L \times \mathbb{P}(L)}, p^* E) \\ & \cong \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{L}i^* F, E \otimes \mathbf{R}p_*(\mathcal{O}(0, -k)|_{X_L \times \mathbb{P}(L)})) \end{aligned}$$

となるが、 $\mathbf{R}p_*(\mathcal{O}(0, -k)|_{X_L \times \mathbb{P}(L)}) = 0$  であるため上の式は 0 となる。よって

$D^b(X)(0, k)$  は  $j_* p^* D^b(X_L)$  と左直交する.

同様に,  $\mathbf{L}\pi^*$  が充満忠実であること, そして  $1 \leq k' < k \leq r - 1$  ならば  $D^b(X)(0, k)$  が  $D^b(X)(0, k')$  に左直交することも証明できる. 特にこれらの証明は命題 9.7 の証明と同様であるため, 詳細は省略する. また, 関手 (9.16) が右および左随伴関手を持つことも容易にわかり, 特に (9.16) の像は許容可能部分圏である.

最後に (9.17) の右辺を  $\mathcal{C}$ , すなわち

$$\mathcal{C} := \langle D^b(X_L), D^b(X)(0, 1), \dots, D^b(X)(0, r - 1) \rangle$$

とおいたとき,  $\mathcal{C}$  が  $D^b(\mathcal{X}_L)$  を古典的に生成することを示す(問題 4.21 参照).  $E \in {}^\perp \mathcal{C}$  としたとき, すべての  $x \in X$  に対して  $E_x := \mathbf{L}i_x^* E$  が  $0$  となることを示せばよい. ここで  $i_x: \pi^{-1}(x) \hookrightarrow \mathcal{X}_L$  である. 実際, このとき  $E = 0$  となり  $\mathcal{C}$  は  $D^b(\mathcal{X}_L)$  を古典的に生成することになる. まず,  $x \notin X_L$  とする. このとき同型  $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-2}$  を用いて  $\pi^{-1}(x)$  を  $\mathbb{P}^{r-2}$  と同一視する.  $E \in {}^\perp \mathcal{C}$  であるから,  $1 \leq k \leq r - 1$  に対して

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\pi^{-1}(x)}(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-2}}(k)) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_L}(E, \mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_x \otimes \mathcal{O}(0, k)) = 0$$

となるが,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-2}}(k)$  たちは  $D^b(\pi^{-1}(x)) = D^b(\mathbb{P}^{r-2})$  を生成するので  $E_x = 0$  となる. 次に  $x \in X_L$  をとる. このとき,  $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(L)$  である. 図式 (9.15) の可換性より

$$\mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_x = \mathbf{L}\iota^* \mathcal{O}_{x \times \mathbb{P}(L)} = \mathbf{L}\iota^* \iota_* j_* \mathcal{O}_{x \times \mathbb{P}(L)} \quad (9.20)$$

となる. 一方  $\mathcal{X}_L$  は  $X \times \mathbb{P}(L)$  上の  $(1, 1)$ -型の因子なので, 完全三角形

$$j_* \mathcal{O}_{x \times \mathbb{P}(L)}(-1, -1)[1] \rightarrow \mathbf{L}\pi^* \mathcal{O}_x \rightarrow j_* \mathcal{O}_{x \times \mathbb{P}(L)}$$

が得られる.  $\mathcal{O}(0, k)$  をテンソルして  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, -)$  を施すことで完全三角形

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(k-1)[1]) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(k))$$

が  $1 \leq k \leq r - 1$  で成り立つ. また,  $E \in {}^\perp \mathcal{C}$  であることを用いると

$$0 = \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, j_* p^* \mathcal{O}_x) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_{x \times \mathbb{P}(L)}) = \mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)})$$

といえる. 以上より  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(E_x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(k)) = 0$  が  $0 \leq k \leq r - 1$  で成り立つが, Beilinson の定理(定理 4.45) より  $E_x = 0$  が従う.  $\square$

次に、長方形型の Lefschetz 分解を

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{A}(1), \dots, \mathcal{A}(m-1) \rangle \quad (9.21)$$

とする。 $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$  を

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta) := \mathbf{L}\pi^* \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(\alpha, \beta) \subset D^b(\mathcal{X}_L)$$

とおくと、 $\mathbf{L}\pi^*(\mathcal{A}(\alpha)) = \mathcal{A}(\alpha, 0)$  となることに注意する。さて、いくつか補題を用意しよう。

**補題 9.32**  $\mathcal{A}(\alpha, \beta) \otimes \omega_{\mathcal{X}_L}^{-1} = \mathcal{A}(\alpha + m - 1, \beta + r - 1)$  が成立する。

**証明** Lefschetz 分解 (9.21) に  $\mathcal{O}_X(\alpha)$  をテンソルし、さらに補題 4.62 より

$$\begin{aligned} D^b(X) &= \langle \mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}(\alpha+1), \dots, \mathcal{A}(\alpha+m-1) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}(\alpha+1), \dots, \mathcal{A}(\alpha+m-1), \mathcal{A}(\alpha) \otimes \omega_X^{-1} \rangle \end{aligned}$$

が成り立ち、特に  $\mathcal{A}(\alpha+m) = \mathcal{A}(\alpha) \otimes \omega_X^{-1}$  を得る。一方

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{X}_L} &= (\omega_X \boxtimes \omega_{\mathbb{P}(L)})|_{\mathcal{X}_L} \otimes \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}(L)}(\mathcal{X}_L) \\ &= (\omega_X(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(-r+1))|_{\mathcal{X}_L} \\ &= \pi^* \omega_X \otimes \mathcal{O}(1, -r+1) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha, \beta) \otimes \omega_{\mathcal{X}_L}^{-1} &= \mathbf{L}\pi^*(\mathcal{A}(\alpha) \otimes \omega_X^{-1}) \otimes \mathcal{O}(-1, \beta+r-1) \\ &= \mathcal{A}(\alpha+m-1, \beta+r-1) \end{aligned}$$

が成り立ち、主張を得る。□

**補題 9.33** 任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  に対し、 $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_L}(\mathcal{A}(\alpha, \beta), \mathcal{A})$  は次のいずれかの場合に 0 になる。

- $0 < \alpha < m-1$  の場合。
- $0 < \beta < r-1$  の場合。
- $(\alpha, \beta) = (0, r-1)$  または  $(m-1, 0)$  の場合。

特に  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の充満部分三角圏の半直交分解

$$\langle \mathcal{A}(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L)), \dots, \mathcal{A}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L)) \rangle \quad (9.22)$$

が存在する。

**証明** 証明は命題 9.7 とまったく同様である.  $\square$

$\mathcal{C}_L$  を  $D^b(\mathcal{X}_L)$  における充満部分圏 (9.22) の右直交成分とすると,  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の半直交分解

$$D^b(\mathcal{X}_L) = \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L)), \dots, \mathcal{A}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L)) \rangle \quad (9.23)$$

を得る.

**注意 9.34** Beilinson の定理 (定理 4.45) と補題 9.33 を組み合わせると, 2つの半直交分解 (9.17), (9.23) を次のように書き表すことができる.

$$\begin{aligned} D^b(\mathcal{X}_L) &= \langle D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, r-1), T \rangle \\ &= \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}(1, 0), \dots, \mathcal{A}(m-1, 0), T \rangle. \end{aligned}$$

ここで  $T$  は  $\mathcal{A}(\alpha, \beta) (1 \leq \alpha \leq m-1, 1 \leq \beta \leq r-1)$  が古典的に生成する  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の充満部分三角圏である. この事実は以降の証明を読み進める上で理解の助けになる.

半直交分解 (9.23) による  $\mathcal{C}_L$  への射影を

$$\pi_L: D^b(\mathcal{X}_L) \rightarrow \mathcal{C}_L$$

とする. 次の命題が成り立つ.

**命題 9.35**  $m \leq r$  の場合,  $\pi_L$  を  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の以下の部分三角圏たちに制限すると充満忠実になる.

$$D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, r-m).$$

また命題 9.31 より上述の部分三角圏たちは  $D^b(\mathcal{X}_L)$  において半直交的であるが, これらの  $\pi_L$  の像も  $\mathcal{C}_L$  において半直交的である.

**証明** 半直交分解 (9.23) は  $\otimes \mathcal{O}(0, 1)$  で保たれるので,  $\pi_L$  は  $\otimes \mathcal{O}(0, 1)$  と可換である. よって,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_L}(a, b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_L}(\pi_L(a), \pi_L(b)) \quad (9.24)$$

を次の場合に示せばよい.

- (i)  $a \in \mathcal{A}(0, k)$  ( $1 \leq k \leq r - m$ ),  $b \in \mathcal{A}(0, 1)$ ,
- (ii)  $a \in \mathcal{A}(0, k)$  ( $1 \leq k \leq r - m$ ),  $b \in D^b(X_L)$ ,
- (iii)  $a, b \in D^b(X_L)$ .

$\pi_L$  は埋め込み  $C_L \hookrightarrow D^b(\mathcal{X}_L)$  の左随伴関手なので、(9.24) の右辺は  $\text{Hom}_{\mathcal{X}_L}(a, \pi_L(b))$  と等しい。また随伴性より得られる同型  $\text{Hom}_{C_L}(\pi_L(b), \pi_L(b)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{X}_L}(b, \pi_L(b))$  によって  $\text{id}_{\pi_L(b)}$  と対応する射を  $\epsilon(b)$  とおくと、(i), (ii), (iii) の場合に

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}_L}(a, \text{Cone}(\epsilon(b))) = 0 \quad (9.25)$$

を示せば主張が得られることになる。

まず (i), (ii) の場合に (9.25) を示す。各  $1 \leq i \leq m - 1$  に対して関手  $\pi_i$  を次の左変異とする（補題 4.58 を参照）。

$$\pi_i = L_{\mathcal{A}(i) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L))} \circ [1] : D^b(\mathcal{X}_L) \rightarrow D^b(\mathcal{X}_L).$$

すると、 $\pi_L = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{m-1}$  である。 $b \in D^b(\mathcal{X}_L)$  に対して  $\pi_{m-1}$  を施すと、次の形の完全三角形を得る。

$$b' \rightarrow b \rightarrow \pi_{m-1}(b) \rightarrow b'[1].$$

ここで  $b' \in \mathcal{A}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L))$  である。Beilinson の定理（定理 4.45）より

$$b' \in \langle \mathcal{A}(m-1, 0), \mathcal{A}(m-1, 1), \dots, \mathcal{A}(m-1, r-1) \rangle$$

となる。一方で補題 9.33 および命題 9.31 より、 $b \in \mathcal{A}(0, 1)$  あるいは  $b \in D^b(X_L)$  ならば

$$\text{Hom}(\mathcal{A}(m-1, i), b) = 0, \quad 1 \leq i \leq r-1$$

が成立する。上の  $b$  を  $\pi_{m-1}(b)$  に置き換えると射が消滅することから  $b' \in \mathcal{A}(m-1, 0)$  となり、 $\pi_{m-1}(b)$  は  $b$  および  $\mathcal{A}(m-1, 0)$  の対象の拡大で得られることがわかる。

同様に  $\pi_{m-2} \circ \pi_{m-1}(b)$  を考えると、次の完全三角形を得る。

$$b'' \rightarrow \pi_{m-1}(b) \rightarrow \pi_{m-2} \circ \pi_{m-1}(b).$$

ここで  $b'' \in \mathcal{A}(m-2) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L))$  である。再び Beilinson の定理（をシフトしたもの）を用いて

$$b'' \in \langle \mathcal{A}(m-2, -1), \mathcal{A}(m-2, 0), \dots, \mathcal{A}(m-2, r-2) \rangle$$

を得る. 補題 9.33 および命題 9.31 より  $1 \leq i \leq r-2$  で

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}(m-2, i), b) = 0, \quad \mathrm{Hom}(\mathcal{A}(m-2, i), \mathcal{A}(m-1, 0)) = 0$$

が成立し, よって  $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}(m-2, i), \pi_{m-1}(b)) = 0$  となる. これより,

$$b'' \in \langle \mathcal{A}(m-2, -1), \mathcal{A}(m-2, 0) \rangle$$

がいえる. よって  $\pi_{m-2} \circ \pi_{m-1}(b)$  は  $b$  および

$$\mathcal{A}(m-1, 0), \mathcal{A}(m-2, 0), \mathcal{A}(m-2, -1)$$

の対象たちの拡大で得られることがわかる. 以上の議論を繰り返して,  $\mathrm{Cone}(\epsilon(b))$  は次の対象たちの拡大で得られることがわかる.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{A}(m-1, 0) & & & & \\ & & \mathcal{A}(m-2, 0) & \mathcal{A}(m-2, -1) & & & \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & \mathcal{A}(1, 0) & \mathcal{A}(1, -1) & \cdots & \mathcal{A}(1, 2-m). & \end{array} \tag{9.26}$$

補題 9.33 より  $1 \leq k \leq r-m$  ならば  $\mathcal{A}(0, k)$  から (9.26) への 0 ではない射は存在しない. よって (i), (ii) の場合に (9.25) が示された. (iii) の場合に (9.25) を示すには,  $D^b(X_L)$  から (9.26) への 0 ではない射が存在しないことを示せばよい. Serre 双対性定理より, (9.26) に  $\omega_{X_L}^{-1}$  をテンソルしたものから  $D^b(X_L)$  に 0 ではない射が存在しないことを示せばよい. これは補題 9.32, 9.33 および命題 9.31 から従う.  $\square$

以上の準備の下で, 次が示される.

**定理 9.36**  $D^b(\mathcal{X}_L)$  から (9.17) による  $D^b(X_L)$  への射影 ( $m \geq r$  の場合), あるいは (9.23) による  $\mathcal{C}_L$  への射影 ( $m \leq r$  の場合) を施すことにより, 次が成立する.

- $m > r$  の場合, 次の半直交分解が存在する :

$$D^b(X_L) = \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}(1, 0), \dots, \mathcal{A}(m-r, 0) \rangle$$

- $m < r$  の場合, 次の半直交分解が存在する :

$$\mathcal{C}_L = \langle D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, r-m) \rangle$$

- $m = r$  の場合、圏同値  $\mathcal{C}_L \cong D^b(X_L)$  が成り立つ。

**証明** まず、 $m \leq r$  とする。命題 9.35 により、 $\pi_L$  によって

$$\langle D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, r-m) \rangle \subset \mathcal{C}_L$$

となり、左辺は半直交的である。よって左辺が右辺を生成することを示せばよい。これは (9.23) により

$$D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, r-m), \quad (9.27)$$

$$\mathcal{A}(1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L)), \dots, \mathcal{A}(m-1) \boxtimes D^b(\mathbb{P}(L))$$

が  $D^b(\mathcal{X}_L)$  を生成することと同値である。一方、(9.17) より

$$D^b(X_L), \mathcal{A}(\alpha, \beta) \quad (0 \leq \alpha \leq m-1, 0 \leq \beta \leq r-1)$$

は  $D^b(\mathcal{X}_L)$  を生成する。したがって、

$$\mathcal{A}(0, r-m+1), \dots, \mathcal{A}(0, r-1)$$

が (9.27) で生成される  $D^b(\mathcal{X}_L)$  の部分圏に入ることを示せばよい。 $r-m+1 \leq k \leq r-1$  として、 $k$  に関する  $k=r-m+1$  から始まる帰納法で  $\mathcal{A}(0, k)$  が (9.27) で生成されることを示す。関手

$$\pi'_k: D^b(\mathcal{X}_L) \rightarrow D^b(\mathcal{X}_L)$$

を半直交分解 (9.17) に関する左変異の合成とする。

$$\pi'_k = (L_{D^b(X_L)}[1]) \circ (L_{D^b(X)(0,1)}[1]) \circ \cdots \circ (L_{D^b(X)(0,k-1)}[1])$$

すると補題 9.33 と補題 4.61 により、 $a \in \mathcal{A}(0, k)$  に対して完全三角形

$$R \rightarrow a \rightarrow \pi'_k(a)$$

であって、 $R$  は (9.28) が生成する部分三角圏の対象になるようなものが存在する。

$$D^b(X_L), \mathcal{A}(0, 1), \dots, \mathcal{A}(0, k-1). \quad (9.28)$$

帰納法の仮定より、(9.28) は (9.27) で生成されるため、 $\pi'_k(a)$  が (9.27) で生成されることを示せばよい。補題 4.62 および補題 9.32 より、

$$\pi'_k(a) \in \langle D^b(X)(0, k+1-r), \dots, D^b(X)(0, -1), D^b(X) \rangle$$

がいえる。さらに、 $\mathcal{A}(0, k)$  から

$$\mathcal{A}(0, k+1-r), \dots, \mathcal{A}(0, -1), \mathcal{A}(0, 0) \quad (9.29)$$

への 0 ではない射は補題 9.33 より存在せず、同様に (9.28) から (9.29) への 0 ではない射も存在しない。以上より、 $\pi'_k(a)$  は

$$\mathcal{A}(\alpha, \beta) \quad (1 \leq \alpha \leq m-1, k+1-r \leq \beta \leq 0)$$

で生成されることになる。これは (9.27) に含まれるため、 $m \leq r$  の場合の定理が証明された。

$m > r$  の場合、命題 9.35 と同様の議論で射影  $D^b(\mathcal{X}_L) \rightarrow D^b(X_L)$  を

$$\langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}(1, 0), \dots, \mathcal{A}(m-r, 0) \rangle$$

に制限すると充満忠実になることがわかる。また、その像が  $D^b(X_L)$  を生成することも  $m \leq r$  の場合と同様の議論で証明される。詳細については [Tho, Section 4] を参照。□

上の定理において  $L = V^\vee$  とおくと、 $X_L = \emptyset$  であるため定理 9.11 (i) を得る。また、 $m \geq r$  の場合に定理 9.36 を適用すると、定理 9.11 (ii) の  $D^b(X_L)$  の半直交分解が従う。



# 第 10 章 連接層の導來圏と 幾何学的不变式論

幾何学的不变式論を使って代数多様体の連接層の導來圏の間に非自明な関係を見出すという研究は Kawamata[Kaw05, Kaw02b], Herbst–Hori–Page[HHP], Segal[Seg11] ら多くの研究者によってなされていた。この方面での決定的な仕事が Ballard–Favero–Katzarkov[BFK19] と Halpern-Leistner[HL15] による結果であり、この章では [BFK19] を参考にこのトピックを解説する。

[BFK19] の主結果である定理 10.22 は gauged LG 模型の因子化の圏を用いて述べられているが、その証明には多くの準備を要するので、アファイン空間にトーラス  $\mathbb{G}_m = \mathbb{C}^*$  が作用しており、また (gauged LG 模型の因子化の圏でなく) 連接層の導來圏の場合に限定して証明を与える。

また彼らの結果の応用として、トーリック DM スタックの導來圏上の例外生成列の存在の証明と、第 8 章で述べた Orlov の定理の別証明を見ていく。

幾何学的不变式論の一般論に触れる 10.1 節では、(断らない限り) 一般の代数閉体  $k$  上の代数多様体を考えるが、10.2 節以降では、簡単のためすべての代数多様体は (断らない限り)  $\mathbb{C}$  上で定義されているものとする。また代数群  $G$  が代数多様体  $X$  に作用しているとき、定理 D.11 により  $\mathrm{QCoh}_G(X) \cong \mathrm{QCoh}([X/G])$  が成り立つが、この章では原論文 [BFK19] の用法に則り、商スタックを使った記号を多用する。

また  $\Phi: \mathcal{T}_1 \hookrightarrow \mathcal{T}_2$  を三角圏の間の充満忠実な三角関手としたとき、その本質的像を記号の簡略化のため、しばしば  $\Phi$  で表す。つまりこのとき  $\Phi$  は  $\mathcal{T}_2$  の部分三角圏を表す。

## 10.1 幾何学的不变式論

この節では幾何学的不变式論の基本用語や結果に触れておく。詳しくは

[MFK94, New78, Dol03, Muk03]などを参照にされたい。また、代数群の代数多様体への作用について付録 C に簡単なまとめがある。

以降必ずしも必要というわけでない事柄も含まれていることを注意しておく。この節に出てくる代数多様体は代数閉体  $k$  上で定義されているとする。

**定義 10.1**  $G$  を線形代数群とする。 $G$  が簡約 (reductive) であるとは、 $G$  の根基<sup>1</sup> がトーラスとなることである。 $G$  が幾何的簡約 (geometrically reductive) であるとは、 $G$  の有限次元表現  $V$  と不变ベクトル  $0 \neq v \in V^G$  に対し、 $G$ -不变で定数でない齐次多項式  $f: V \rightarrow k$  が存在し  $f(v) \neq 0$  となることである。 $G$  が線形簡約 (linearly reductive)<sup>2</sup> であるとは、幾何的簡約の定義において、さらに  $f$  が 1 次式としてされることである。

定義より明らかのように線形簡約群は幾何的簡約群となる。さらに Nagata と Miyata によって、幾何的簡約群は簡約群であることが示された。また Mumford によって、その逆も予想されていたが、このことは Haboush によって証明された。つまり簡約群であることと幾何的簡約群であることは同値である。

有限群はその位数を  $k$  の標数が割り切らない限り線形簡約であり、 $\mathrm{GL}(n, k)$ ,  $\mathrm{SL}(n, k)$ ,  $\mathrm{PGL}(n, k)$  やその直積はすべて簡約（つまり、幾何的簡約）である。 $k$  の標数が正で、 $n \geq 2$  のときは  $\mathrm{GL}(n, k)$ ,  $\mathrm{SL}(n, k)$ ,  $\mathrm{PGL}(n, k)$  は線形簡約とはならないことが知られている。つまり標数が正のときは、幾何的簡約であるからといって線形簡約とは限らない。一方、標数が 0 のときは Weyl によって、簡約群は線形簡約群であることが示され、上で述べたことと合わせると定理 10.2 がわかる。定理 10.2 に関する文献などは [MFK94, Appendix to Chapter 1] を参照されたい。

**定理 10.2**  $k$  の標数を 0 とする。このとき  $k$  上の線形代数群  $G$  が簡約であること、幾何的簡約であること、線形簡約であることは同値である。

**定義 10.3** 代数群  $G$  が代数多様体  $X$  に作用している状況を考える。

- (i) 代数多様体  $Y$  と射  $\phi: X \rightarrow Y$  が存在し次を満たすとき、 $(Y, \phi)$  を  $G$  による  $X$  の圏論的商 (categorical quotient) であるという。
  - (1)  $\phi$  は  $G$ -不变、すなわち  $\phi$  は  $X$  の任意の  $G$ -軌道を 1 点に移す。

<sup>1</sup>  $G$  はただ 1 つの極大（ゆえに最大）連結可解正規部分代数群を持つ。これを  $G$  の根基といふ。

<sup>2</sup> ここで与えた定義といくつかの同値な条件が [Muk03, Proposition 4.37, Lemma 4.74] にある。

- (2) 代数多様体  $Z$  と射  $\psi: X \rightarrow Z$  が任意の  $G$ -軌道を 1 点に移すとき,  $\varphi: Y \rightarrow Z$  がただ 1 つ存在し,  $\psi = \varphi \circ \phi$  を満たす.
- (ii) 代数多様体  $Y$  とアファイン射  $\phi: X \rightarrow Y$  が存在し次を満たすとき,  $(Y, \phi)$  を  $G$  による  $X$  の良い商 (good quotient) であるという. このとき  $Y$  を  $X//G$  と書く.
- (1)  $\phi$  は  $G$ -不变である.
  - (2)  $\phi$  は全射である.
  - (3)  $Y$  の任意の開集合  $U$  に対し,  $\phi^*: \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))$  が同型  $\mathcal{O}_Y(U) \cong \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U))^G$  を引き起こす.
  - (4)  $V$  が  $X$  の  $G$ -不变な閉集合としたとき,  $\phi(V)$  も閉集合となる.
  - (5)  $V_1, V_2$  を  $X$  の互いに交わらない  $G$ -不变な閉集合としたとき,  $\phi(V_1)$  と  $\phi(V_2)$  も交わらない.
- (iii)  $(Y, \phi)$  を  $G$  による  $X$  の良い商であり, かつ任意の  $y \in Y$  に対し,  $\phi^{-1}(y)$  が 1 つの  $G$ -軌道からなるとき,  $(Y, \phi)$  を  $G$  による  $X$  の幾何学的商 (geometric quotient) であるという. このとき  $Y$  を  $X/G$  と書く.

定義から明らかなように, 幾何学的商は良い商である. また良い商は圏論的商であることが知られている. 幾何的簡約群  $G$  がアファイン代数多様体  $X = \text{Spec } R$  に作用しているときは, Nagata の結果 [Nag64] から  $R^G$  も  $k$  上有限生成となり, また自然な射  $\phi: X \rightarrow Y := \text{Spec } R^G$  に対し,  $(Y, \phi)$  は良い商となることがわかる.  $X$  がアファインでないときは,  $X$  の  $G$ -不变なアファイン被覆ごとに良い商をとり, それらを貼り合わせて  $X$  の良い商を構成したい. 一般に,  $X$  全体ではこのようなアファイン被覆を見つけてくることは難しく, さらに全体で商をとっても準射影的代数多様体 (特に分離的スキーム) になり得ない. その代わり,  $X$  の“半安定点”からなる開集合に対し, 良い商を構成する. そこで以下では, Mumford による幾何学的不变式論の最も重要な概念である“安定点, 半安定点”的定義を与えよう. 5 章で定義を与えた(半) 安定性は, 5.4 節で説明したように, (半) 安定点を層の内在的な性質として同値に言い換えたものであり, また 11 章で紹介する, 三角圏の対象に対する Bridgeland の安定性は, 連接層に対する (Mumford, Takemoto, Gieseker, Maruyama, Simpson らによる) 安定性から, 長い年月を経て生まれてきた概念ともいえる.

以下では  $\text{Pic}^G(X)$  を  $G$ -同変な直線束の同型類全体のなす群とする.  $\mathcal{L} \in \text{Pic}^G(X)$ ,  $f \in H^0(X, \mathcal{L})^G$  に対し,

$$X_f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

とおくと、これは  $X$  の  $G$ -不变な開集合である。 $x \in X$  に対し、その  $G$ -軌道を

$$O(x) := Gx = \{gx \in X : g \in G\}$$

と表し、点  $x$  での安定化群を

$$G_x := \{g \in G : gx = x\}$$

と定める。さらに  $X$  の部分集合  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}), X^s(\mathcal{L})$  を次のように定める：

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) := \{x \in X : \exists j > 0, \exists f \in H^0(X, \mathcal{L}^j)^G \text{ s.t. } x \in X_f, X_f \text{ はアファイン}\}$$

$$X^s(\mathcal{L}) := \{x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) : O(x) \text{ は } X_f \text{ で閉, かつ } \dim G_x = 0\}$$

$$X^{\text{us}}(\mathcal{L}) := X \setminus X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$$

$X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  の点を ( $G$  の  $X$  上の  $\mathcal{L}$ -線形作用における) 半安定点 (semi-stable point),  $X^s(\mathcal{L})$  の点を 安定点 (semi-stable point), さらに  $X^{\text{us}}(\mathcal{L})$  の点を 不安定点 (unstable point) と呼ぶ。定義から明らかのように正の整数  $i$  に対し、

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^{\text{ss}}(\mathcal{L}^i), \quad X^s(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L}^i), \quad X^{\text{us}}(\mathcal{L}) = X^{\text{us}}(\mathcal{L}^i)$$

が成り立つので、 $\mathcal{L} \in (\text{Pic}^G X)_{\mathbb{Q}}$  に対して、 $i > 0$  であって  $\mathcal{L}^i \in \text{Pic}^G X$  となるものをとり

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) := X^{\text{ss}}(\mathcal{L}^i)$$

と well-defined に定義できる。

$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}), X^s(\mathcal{L})$  は  $X$  の（空かもしれない）開集合をなし、さらに  $G$ -不变になる。また、例えば  $X$  が射影的で  $\mathcal{L}$  が豊富な直線束、さらに  $f \in H^0(X, \mathcal{L}^j)^G (j > 0)$  であるとき、ある  $N > 0$  に対し非常に豊富な直線束  $\mathcal{L}^{Nj}$  は  $X$  のある射影空間への埋め込みを定める。 $X_f = X_{f^N}$  は、 $f^N$  が定める超平面切断の  $X$  における補集合であり、アファインになる。また  $X$  がアファイン代数多様体のときも  $X_f = D(f)$  はアファインになる。したがってこのような場合は

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = \{x \in X : \exists j > 0, \exists f \in H^0(X, \mathcal{L}^j)^G \text{ s.t. } x \in X_f\}$$

が成り立つ。

**定理 10.4 ([New78], Theorem 3.21)** 簡約群  $G$  が代数多様体  $X$  に作用して

いるとし、 $\mathcal{L} \in \text{Pic}^G(X)$  とする。このとき次が成り立つ。

- (i)  $G$  による  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  の良い商  $(Y, \phi)$  が存在し、 $Y$  は準射影的代数多様体となる。
- (ii)  $Y$  の開集合  $Y^s$  が存在し、 $\phi^{-1}(Y^s) = X^s(\mathcal{L})$  であり、また  $(Y^s, \phi)$  は  $X^s(\mathcal{L})$  の幾何学的商となる。
- (iii)  $x_1, x_2 \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  に対し、

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \iff \overline{O(x_1)} \cap \overline{O(x_2)} \cap X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$$

が成り立つ。

- (iv)  $x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  に対し、 $x$  が安定点であることと、 $\dim O(x) = \dim G$  かつ、 $O(x)$  は  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  において閉集合となることは同値である。

定理 10.4(i) で得られた良い商  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})/\!/G$  を

$$X/\!/_\mathcal{L} G$$

と書いたり、(ii) で得られた幾何学的商を  $X^s(\mathcal{L})/G$  を

$$X/\!/_\mathcal{L} G$$

と書いたりすることもある。

定理 10.4 において、 $\mathcal{L}$  が豊富な直線束であるときは、

$$Y = \text{Proj} \bigoplus_{j \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^j)^G$$

であり、特にアファイン代数多様体  $\text{Spec } H^0(X, \mathcal{O}_X)^G$  上の射影的スキームとなる。

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \text{Pic}^G X$  が  $G$ -代数的同値 (algebraically equivalence) であるとは、連結な（既約とは限らぬ）代数多様体  $T, X \times T$  への  $G$  の作用

$$G \times X \times T \rightarrow X \times T \quad (g, x, t) \mapsto (gx, t),$$

$X \times T$  上の  $G$ -同変直線束  $\mathcal{L}, T$  の閉点  $t_1, t_2$  があって、さらに  $G$ -同変な直線束の同型

$$\mathcal{L}|_{X \times t_1} \cong \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}|_{X \times t_2} \cong \mathcal{L}_2$$

が存在するときをいう。 $\text{Pic}^G(X)$  を  $G$ -代数的同値で割ってできる群を  $G$ -Neron-

Severi 群と呼び,  $\mathrm{NS}^G(X)$  と書く.  $G$ -同変で豊富な直線束  $\mathcal{L}$  に対し,  $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$  は  $\mathcal{L}$  の代数的同値類に依らないことが知られている ([Tha96, Proposition 2.2]). そこで

$$C^G(X) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{NS}^G(X) : X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L}) \neq \emptyset, \mathcal{L} \text{ は豊富}\} \quad (10.1)$$

とおく.<sup>3</sup>

定理 10.22 では商スタックの導來圏の間の非自明な関係を述べているが, 実際は次の命題より商スタックはしばしばスキームで表現されている. 証明は [BFK19, Proposition 2.1.7], [Vis89, Example 7.17] などを参照されたい.

**命題 10.5**  $k$  の標数を 0 とする. もし  $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$  の任意の点の  $G$  の作用による安定化群が有限ならば, 商スタック  $[X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})/G]$  は Deligne–Mumford スタックになる. さらに  $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})$  の任意の点の安定化群が自明ならば, 商スタック  $[X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})/G]$  はスキーム  $X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{L})/G$  とスタックとして同型になる.

代数群の間の非自明な射

$$\lambda: \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec} k[x, x^{-1}] \rightarrow G$$

を  $G$  の 1-パラメーター部分群 (1-parameter subgroup, 1-PS) と呼ぶ.  $G$  の 1-PS  $\lambda, \lambda'$  に対し

$$(\lambda + \lambda')(t) := \lambda(t)\lambda'(t) \quad (t \in \mathbb{G}_m)$$

とし,  $0: \mathbb{G}_m \rightarrow G$  を自明な群準同型とすると

$$\Lambda(G) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G) = \{\lambda: 1\text{-PS}\} \cup \{0\}$$

は Abel 群となる. また  $G$  の指標群  $\widehat{G}$  に対し, 対

$$\langle *, * \rangle: \widehat{G} \times \Lambda(G) \rightarrow \widehat{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{Z} \quad (\chi, \lambda) \mapsto \chi \circ \lambda$$

が存在し, 例えば  $G$  がトーラスであるときはこれは完全対になる.  $G$  の  $X$  への作用を  $G$  の 1-PS  $\lambda$  によって  $\mathbb{G}_m$  に引き戻した作用を考え,  $X^\lambda$  でその固定点集合を表す.  $G$ -同変な局所自由層  $\mathcal{E}$  に対応するベクトル束  $V(\mathcal{E})$  には  $G$  の作用が入り, その射影  $V(\mathcal{E}) \rightarrow X$  は  $G$ -同変である (付録 C.3 参照) から固定点  $x_0 \in X^\lambda$

---

<sup>3</sup> [DH98] などでは, ここで定義した  $C^G(X)$  が  $\mathrm{NS}^G(X)_\mathbb{R}$  で張る開錐のことを  $C^G(X)$  と表記している.

におけるファイバー  $V(\mathcal{E})_{x_0}$  に  $\mathbb{G}_m$  が作用する。このときの  $\mathbb{G}_m$  作用の重み全体のなす集合を

$$\mu(\mathcal{E}, \lambda, x_0)$$

とおく。 $x_0, x'_0$  が  $X^\lambda$  の同じ連結成分に入っているときは  $\mu(\mathcal{E}, \lambda, x_0) = \mu(\mathcal{E}, \lambda, x'_0)$  がわかる。また  $\mathcal{E}$  が可逆層のときは、整数の集合  $\mu(\mathcal{E}, \lambda, x_0)$  は唯一の元からなるので、しばしば  $\mu(\mathcal{E}, \lambda, x_0)$  を整数の（集合ではなく）値とみなす。

次に  $G$  の 1-PS  $\lambda$  による作用の固定点とは限らない点  $x \in X$  を考える。射

$$\mathbb{G}_m \rightarrow X \quad t \mapsto \lambda(t) \cdot x$$

が射  $\mathbb{A}^1 \rightarrow X$  に拡張されるならば、 $X$  が分離的であることからその拡張の仕方は一意である。このとき  $0 \in \mathbb{A}^1$  の像を

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$$

と表すと、これは  $\mathbb{G}_m$  の作用の固定点となる。そこで  $G$ -同変な可逆層  $\mathcal{L}$  に対し、

$$\mu(\mathcal{L}, \lambda, x) := \mu(\mathcal{L}, \lambda, \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x)$$

と定める。また固定点集合  $X^\lambda$  のある連結成分  $Z_\lambda^0$  に対し、

$$Z_\lambda := \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in Z_\lambda^0\}$$

と定める。

上で定義した集合  $\mu(\mathcal{E}, \lambda, x_0)$ 、もしくは値  $\mu(\mathcal{L}, \lambda, x)$  は定義 10.10 で述べる次数  $I$  の窓を一般の状況で定義するのに使われる。一方で定理 10.6 で述べる Hilbert–Mumford の数値的判定法が  $\mu(\mathcal{L}, \lambda, x)$  を考えたもとの動機である。<sup>4</sup> 一般に、与えられた代数多様体  $X$  の点が安定、もしくは半安定であるかを定義から直接判定するのはやさしくない。Hilbert–Mumford の数値的判定法は（半）安定性の判定にしばしば有用である。

もともと [MFK94, Theorem 2.1] では射影的代数多様体  $X$  に対し（つまり定理 10.6において  $R = k$  であるときに）Hilbert–Mumford の数値的判定法が成り立つことを主張していたが、このときは任意の点  $x \in X$  に対し  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$  は常に存在する。一方 [GHH15] で示された定理 10.6 は  $X$  がアファイン代数多様体上

<sup>4</sup> ここで与えた  $\mu(\mathcal{L}, \lambda, x)$  の定義は [MFK94, New78, GHH15] で与えられている定義とは符号が逆であり、[Dol03, BFK19] のものと同じである。

射影的である場合に [MFK94, Theorem 2.1] を拡張したものである。主張を簡明に述べるために [GHH15] の用法に従い、 $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x$  が存在しないときは

$$\mu(\mathcal{L}, \lambda, x) := -\infty$$

と定めよう。

**定理 10.6 (Hilbert–Mumford の数値的判定法)**  $f: X \rightarrow Y = \text{Spec } R$  を代数多様体  $X$  からアファイン代数多様体  $\text{Spec } R$  への射影的射とし、線形簡約群  $G$  が  $X$  と  $Y$  に  $f$  が同変になるように作用している。さらに  $\mathcal{L}$  を  $X$  上の  $G$ -同変な豊富直線束とする。 $x \in X$  が安定点（半安定点）であることと、任意の 1-PS  $\lambda$  に対し

$$\mu(\mathcal{L}, \lambda, x) < 0 \quad (\mu(\mathcal{L}, \lambda, x) \leq 0)$$

が成り立つことは同値である。

ちなみに定理 10.6において、 $X = Y = \mathbb{A}^n$ ,  $f = \text{id}_X$  とすれば、[Kin94, Proposition 2.5] にある Hilbert–Mumford の数値的判定法が復元される。

**注意 10.7**  $x \in X$ ,  $G$ -同変直線束  $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$  に対し、

$$\mu(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}', \lambda, x) = \mu(\mathcal{L}, \lambda, x) + \mu(\mathcal{L}', \lambda, x)$$

が成り立つ。これにより  $\mathcal{L} \in (\text{Pic}^G X)_{\mathbb{R}}$  に対しても、実数  $\mu(\mathcal{L}, \lambda, x)$  が自然に定義できる。さらに  $X$  がアファイン代数多様体上射影的であるときは、点  $x$  が  $G$  の  $X$  上の  $\mathcal{L}$ -線形作用における（半）安定点であることを、定理 10.6 を使って定義することができる。また、点  $x \in X$  を 1 つ固定し定まる関数

$$\mu(-, \lambda, x): (\text{NS}^G(X))_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

は連続になることもわかる。

例えば定理 10.6 の状況で、 $X := \mathbb{A}^n$  とおくと  $\text{Pic}(X) = \text{NS}(X) = \{\mathcal{O}_X\}$  であり、さらに

$$\text{Pic}^G(X) = \text{NS}^G(X) = \{\mathcal{O}_X(\chi) : \chi \in \widehat{G}\} \cong \widehat{G}$$

となる。 $\chi \in \widehat{G}$  に対し、簡単のため

$$X^{\text{ss}}(\chi) := X^{\text{ss}}(\mathcal{O}_X(\chi)), \quad X^s(\chi) := X^s(\mathcal{O}_X(\chi))$$

とおくことにしよう。 $(p, q) \in X \times \mathbb{A}^1 \cong V(\mathcal{O}_X(\chi))$  と  $g \in G$  に対し

$$g \cdot (p, q) = (g \cdot p, -\chi(g)q)$$

である (付録 C.3 参照) から、特に 1-PS  $\lambda$  による  $X$  の固定点  $p \in X^\lambda$  に対し

$$\mu(\mathcal{O}_X(\chi), \lambda, p) = -\chi \circ \lambda = -\langle \chi, \lambda \rangle \quad (10.2)$$

が成り立つことに注意し、Hilbert–Mumford の数値的判定法を用いると

$$X^{\text{us}}(\chi) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(G): \langle \chi, \lambda \rangle < 0} \bigcup_{Z_\lambda^0 \in \pi_0(X^\lambda)} Z_\lambda \quad (10.3)$$

となることがわかる。ここで  $\pi_0(X^\lambda)$  は  $X^\lambda$  の連結成分からなる集合である。

## 10.2 導來圏と GIT (アファイン空間の場合)

以降、10 章内ではすべての代数多様体は  $\mathbb{C}$  上で定義されているとする。10.3 節では簡約群  $G$  が滑らかな準射影的代数多様体に作用している場合を考察する。その前に、この節では  $\mathbb{G}_m$  が  $n$  次元アファイン空間

$$X = \mathbb{A}^n = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

に、 $x_i$  の重みが  $v_i \in \mathbb{Z}$  となるように作用している状況を考えよう。このとき  $t \in \mathbb{G}_m$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$  に対し

$$t \cdot p = (t^{v_1} p_1, \dots, t^{v_n} p_n)$$

となる ((C.2) 参照)。以下  $\mathbb{G}_m$  の 1-PS  $\lambda_1$  および、指標  $\chi_1$  を

$$\lambda_1 = \chi_1 = \text{id}_{\mathbb{G}_m}$$

と固定し、さらに多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  のイデアルを

$$I_+ := \langle x_i : v_i > 0 \rangle, \quad I_- := \langle x_i : v_i < 0 \rangle$$

と定めると、固定点集合  $X^{\lambda_1} = X^{-\lambda_1}$  はイデアル  $I_+ + I_-$  の零点集合  $V(I_+, I_-)$  であり連結となる：

$$X^{\lambda_1} = X^{-\lambda_1} = V(I_+, I_-)$$

これを  $Z_{\lambda_1}^0 = Z_{-\lambda_1}^0$  とおいたとき、

$$Z_{\lambda_1} = V(I_-), \quad Z_{-\lambda_1} = V(I_+)$$

となる。また  $j \in \mathbb{Z}$  に対し、

$$\mathcal{O}_X(j) := \mathcal{O}_X(j\chi_1) \in \mathrm{Coh}_{\mathbb{G}_m}(X) \quad (10.4)$$

と定める。 $\mathbb{G}_m$  は  $H^0(X, \mathcal{O}_X(j))$  に右から

$$(f \cdot t)(x_1, \dots, x_n) := t^{-j} f(t^{v_1} x_1, \dots, t^{v_n} x_n) \quad (f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(j)), t \in \mathbb{G}_m)$$

と作用する（付録 C.3 参照）。そこで

$$\begin{aligned} & H^0(X, \mathcal{O}_X(j))^{\mathbb{G}_m} \\ &= \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : t^j f(x_1, \dots, x_n) = f(t^{v_1} x_1, \dots, t^{v_n} x_n) \quad (\forall t \in \mathbb{G}_m)\} \\ &= \langle f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : f \text{ は重み } j \text{ の単項式 } \rangle \\ &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_j \end{aligned} \quad (10.5)$$

となり、また  $0 \neq f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(j))^{\mathbb{G}_m}$  に対し、 $X_f = D(f) (\subset X = \mathbb{A}^n)$  は常にアファインとなる。したがって、（半）安定点の定義から

$$X_- := X \setminus V(I_+) = X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{O}_X(1)) = X^s(\mathcal{O}_X(1)) \quad (10.6)$$

$$X_+ := X \setminus V(I_-) = X^{\mathrm{ss}}(\mathcal{O}_X(-1)) = X^s(\mathcal{O}_X(-1)) \quad (10.7)$$

が成り立つ。

**問題 10.8**  $\Lambda(\mathbb{G}_m) = \{d\lambda_1 : d \in \mathbb{Z}\}$  であることと式 (10.3) から式 (10.6), (10.7) を示せ。

閉埋め込み

$$i: V(I_+) \hookrightarrow X$$

に対し、 $\mathcal{O}_{V(I_+)}(j) := i^* \mathcal{O}_X(j)$  と定めると

$$i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(j) = (i_* \mathcal{O}_{V(I_+)} \otimes \mathcal{O}_X(j))$$

である。閉埋め込み  $V(I_-) \hookrightarrow X$  も  $i$  で表し、 $\mathcal{O}_{V(I_-)}(j)$  を同様に定める。以下では

$$\mathrm{Ext}_X^k(E, F)^{\mathbb{G}_m} \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Coh}_{\mathbb{G}_m}(X)}^k(E, F) \cong \mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(E, F)$$

となることがしばしば使われる. ここで最初の同型は付録 C, 次の同型は定理 D.11 を参照されたい.

次は後で用いられる.

**補題 10.9** 整数  $k > 0, m \geq 0$ , もしくは  $k = 0, m > 0$  に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_X^k(\mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} &= \mathrm{Ext}_X^k(i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} = 0 \\ \mathrm{Ext}_X^k(\mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_-)}(-m))^{\mathbb{G}_m} &= \mathrm{Ext}_X^k(i_*\mathcal{O}_{V(I_-)}, i_*\mathcal{O}_{V(I_-)}(-m))^{\mathbb{G}_m} = 0\end{aligned}$$

である.

**証明** まず  $m > 0$  のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} &\cong \mathrm{Hom}_X(i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} \\ &\cong H^0(V(I_+), \mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}[x_i \mid v_i \leq 0]_m = 0\end{aligned}\tag{10.8}$$

が成り立つ.  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間  $V_+$  を

$$V_+ := I_+/I_+^2 \cong \bigoplus_{v_i > 0} \mathbb{C}x_i$$

と定め,  $i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}$  の  $\mathbb{G}_m$ -同変な Koszul 分解

$$\begin{aligned}0 \rightarrow \bigwedge^{|I_+|} V_+ \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \bigwedge^{|I_+|-1} V_+ \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \cdots \rightarrow V_+ \otimes \mathcal{O}_X \\ \xrightarrow{f_+} \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_{V(I_+)} \rightarrow 0\end{aligned}\tag{10.9}$$

を考える. ここで  $|I_+|$  を集合  $\{i: v_i > 0\}$  の濃度とした. 例えれば

$$V_+ \otimes \mathcal{O}_X \cong \bigoplus_{v_i > 0} \mathcal{O}_X(-v_i), \quad \bigwedge^{|I_+|} V_+ \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X\left(-\sum_{v_i > 0} v_i\right)\tag{10.10}$$

となる. (10.9)を使うと  $\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))$  は複体

$$\begin{aligned}\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} \rightarrow \mathrm{Hom}_X(V_+ \otimes \mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m))^{\mathbb{G}_m} \\ \rightarrow \cdots \rightarrow \mathrm{Hom}_X\left(\bigwedge^{|I_+|} V_+ \otimes \mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m)\right)^{\mathbb{G}_m} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots\end{aligned}$$

の  $k$  番目のコホモロジーとして計算できる. ところが  $m \geq 0$  のときは最初の項以外は (10.8)により 0 であるから、結局  $k \neq 0$  のとき

$$\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m)) = 0$$

であることがわかる。さらに  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathrm{Coh}(X)$  の射影的対象なので、 $k \neq 0$  のとき、

$$\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_X, i_*\mathcal{O}_{V(I_+)}(m)) = 0$$

もわかる。

$V(I_-)$  に関する同様に  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間  $V_-$  を

$$V_- := I_- / I_-^2 \cong \bigoplus_{v_i < 0} \mathbb{C}x_i$$

と定め、 $i_*\mathcal{O}_{V(I_-)}$  の  $\mathbb{G}_m$ -同変な Koszul 分解

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigwedge^{|I_-|} V_- \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \bigwedge^{|I_-|-1} V_- \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \cdots \rightarrow V_- \otimes \mathcal{O}_X \\ \xrightarrow{f_-} \mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_{V(I_-)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

に対して、まったく同様の議論をすれば主張が得られる。□

**定義 10.10**  $I \subset \mathbb{R}$  とする。次数  $I$  の窓 ( $I$ -grade-restricted window) とは  $\{\mathcal{O}_X(j) : -j \in I\}$  の  $D^b([X/\mathbb{G}_m])$  における thick 閉包のこととする。これを  $W_I$  と記す。<sup>5</sup>

Quillen–Suslin の定理 ([Lam78] 参照) よりアファイン空間上のすべての局所自由層は自明になり、また  $X = \mathbb{A}^n$  が滑らかであることから

$$D^b([X/\mathbb{G}_m]) = \mathfrak{Perf}_{\mathbb{G}_m} X = \langle \mathcal{O}_X(m) : m \in \mathbb{Z} \rangle \quad (10.12)$$

が成り立つ。そこで  $W_I$  は局所自由層からなる複体  $\mathcal{F}^\bullet \in D^b([X/\mathbb{G}_m])$  であって、点  $x \in X^{\lambda_1}$  に対し、 $\mu(\mathcal{F}^i, \lambda_1, x) \subset I$  が成り立つようなものからなる  $D^b([X/\mathbb{G}_m])$  の充満部分三角圏である、ということができる。 $X$  がアファイン空間とは限らない一般の状況では、この考え方を使って  $W_I$  を定義する（定義 10.20）。

$X_-, X_+$  から  $X$  への開埋め込みによって自然に導かれる埋め込みを

$$\begin{aligned} j_- : [X_-/\mathbb{G}_m] &= [(X \setminus V(I_+))/\mathbb{G}_m] \hookrightarrow [X/\mathbb{G}_m] \\ j_+ : [X_+/\mathbb{G}_m] &= [(X \setminus V(I_-))/\mathbb{G}_m] \hookrightarrow [X/\mathbb{G}_m] \end{aligned}$$

と定義し、さらに

<sup>5</sup> 例えれば命題 10.12 で  $I$  として区間  $[0, \sum_{v_i > 0} v_i)$  をとっている。もちろんその代わりに  $I$  として  $[0, \sum_{v_i > 0} v_i) \cap \mathbb{Z}$  をとってもよい。

$$\mathcal{O}_{X_+}(k) := j_+^* \mathcal{O}_X(k), \quad \mathcal{O}_{X_-}(k) := j_-^* \mathcal{O}_X(k)$$

と定める。また

$$p: V(I_+) \rightarrow X^{\lambda_1} = V(I_+, I_-)$$

を座標の射影とすると、これは  $\mathbb{G}_m$ -不变なので

$$p^*: D^b(X^{\lambda_1}) \rightarrow D^b([V(I_+)/\mathbb{G}_m])$$

を導く。また  $\mathbb{G}_m$ -同変な閉埋め込み  $i: V(I_+) \hookrightarrow X$  に対し、

$$\Theta_- := i_* \circ p^*: D^b(X^{\lambda_1}) \rightarrow D^b([X/\mathbb{G}_m])$$

とし、同様に  $\Theta_+: D^b(X^{\lambda_1}) \rightarrow D^b([X/\mathbb{G}_m])$  を定める。

**補題 10.11** (i) 任意の  $j > -\sum_{v_i > 0} v_i$ 、任意の整数  $k$  に対し局所コホモロジー  $H_{V(I_+)}^k(X, \mathcal{O}_X(j))^{\mathbb{G}_m}$  は 0 になる。

(ii) 任意の  $j > -\sum_{v_i < 0} v_i$ 、任意の整数  $k$  に対し局所コホモロジー  $H_{V(I_-)}^k(X, \mathcal{O}_X(j))^{\mathbb{G}_m}$  は 0 になる。

**証明** (i)  $S := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  とおく。記号の簡略化のため、 $x_i$  の順番を並び替える、 $1 \leq i \leq m := |I_+|$  のとき  $v_i = \deg x_i > 0$  と仮定する。集合  $\{i : v_i > 0\}$  の  $k$  個 ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) の元  $i_1 < \dots < i_k$  に対し、

$$S_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}} := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}], \quad C(S)^k := \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} S_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}$$

と定め、 $x_1, \dots, x_m$  に関するČech複体  $(C(S)^\bullet, d^\bullet)$  を考えると局所コホモロジー  $H_{V(I_+)}^k(X, \mathcal{O}_X)$  はČechコホモロジー  $H^k(C(S)^\bullet)$  で計算できる [BS13, Theorem 5.1.19]。 $x_1, x_2, \dots, x_m$  は  $S$  の正則列であるから  $k \neq m$  に対し、 $H_{V(I_+)}^k(X, \mathcal{O}_X) = 0$  となる [BS13, Theorem 6.2.7]。一方  $m$  次の局所コホモロジー

$$H_{V(I_+)}^m(X, \mathcal{O}_X) \cong S_{x_1 \cdots x_m} / \sum_{i=1}^m d^{m-1}(S_{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_m})$$

は商加群  $S_{x_1 \cdots x_m}/S$  の  $S$ -部分加群であって  $x_1^{u_1} \cdots x_m^{u_m}$  (各  $u_i$  は負の整数) たちで生成されるものと同型で、その元の次数は  $-\sum_{v_i > 0} v_i$  以下となる。そこで任意の  $k$  に対し、 $j > -\sum_{v_i > 0} v_i$  であれば  $H_{V(I_+)}^k(X, \mathcal{O}_X(j))^{\mathbb{G}_m}$  は 0 となることが

わかる。

(ii) も同様である。  $\square$

次が成り立つ。

**命題 10.12** (i)  $j_-, j_+$  によって導かれる関手

$$j_-^*: W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]} \rightarrow D^b([X_-/\mathbb{G}_m]), \quad j_+^*: W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]} \rightarrow D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$$

は同値となる。

(ii) 上で定めた関手  $\Theta_-$  の本質的像は  $W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}$  に、  $\Theta_+$  の本質的像は  $W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]}$  に含まれ、 さらに関手

$$\Theta_-: D^b(X^{\lambda_1}) \rightarrow W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}, \quad \Theta_+: D^b(X^{\lambda_1}) \rightarrow W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]}$$

は充満忠実になる。

**証明** (i) まず  $j_-^*$  が充満忠実であることを証明する。整数  $l, m \in [0, \sum_{v_i > 0} v_i]$  に対し、  $m - l > -\sum_{v_i > 0} v_i$  となり、このとき補題 10.11 から任意の  $k$  に対し局所コホモロジー  $H_{V(I_+)}^k(X, \mathcal{O}_X(m-l))^{\mathbb{G}_m}$  が  $0$  になる。このことより  $j_-^*$  の定める射

$$\begin{aligned} H^k(X, \mathcal{O}_X(m-l))^{\mathbb{G}_m} &\cong \text{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_X(l), \mathcal{O}_X(m)) \\ \rightarrow H^k(X_-, \mathcal{O}_{X_-}(m-l))^{\mathbb{G}_m} &\cong \text{Ext}_{[X_-/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_{X_-}(l), \mathcal{O}_{X_-}(m)) \end{aligned}$$

が同型になり、問題 3.16 を使うと、 $j_-^*$  の充満忠実性が従う。

埋め込み  $j_-$  の引き戻しで得られる関手

$$D^b([X/\mathbb{G}_m]) \rightarrow D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$$

は、注意 8.4 (の  $\mathbb{G}_m$ -同変版) によると Verdier 商への商関手

$$D_{\mathbb{G}_m}^b(X) \rightarrow D_{\mathbb{G}_m}^b(X)/D_{\mathbb{G}_m}^b(\text{Coh}_{V(I_+)}(X))$$

と一致し、特に本質的全射となる。そこでこの関手による  $W_I$  の本質的像を  $\overline{W_I}$  と書くことにすると、(10.12)より  $\overline{W_Z} = D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$  が成り立つ。そこで

$$\overline{W_Z} = \overline{W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}} \tag{10.13}$$

がいえれば  $j_-^*$  が本質的全射であることが示せ、補題 3.8 より主張が得られる。

以下では Koszul 分解 (10.9)において、最後の項  $i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}$  は Verdier 商

$D_{\mathbb{G}_m}^b(X)/D_{\mathbb{G}_m}^b(\mathrm{Coh}_{V(I_+)}(X))$ において 0 対象であることに注意する.

Koszul 分解 (10.9) を使えば,  $j_-^*(\mathcal{O}_X) \in \overline{W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}}$  となり, さらに任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対し  $j_-^*(\mathcal{O}_X(m)) \in \overline{W_{[-m, -m + \sum_{v_i > 0} v_i]}}$  が成り立つ. 特に

$$\overline{W_{(-m-1, -m + \sum_{v_i > 0} v_i)}} = \overline{W_{(-m, -m + \sum_{v_i > 0} v_i)}}$$

がわかり, これを繰り返して

$$\overline{W_{(-\infty, \sum_{v_i > 0} v_i)}} = \overline{W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}} \quad (10.14)$$

が得られる.

再び Koszul 分解 (10.9) より,  $j_-^*(\mathcal{O}_X(-\sum_{v_i > 0} v_i)) \in \overline{W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}}$  であり, さらに任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対し  $j_-^*(\mathcal{O}_X(m)) \in \overline{W_{[-m - \sum_{v_i > 0} v_i, -m]}}$  が成り立つ. これを使えば

$$\overline{W_{[-m - \sum_{v_i > 0} v_i, -m+1]}} = \overline{W_{[-m - \sum_{v_i > 0} v_i, -m]}}$$

となり, これを繰り返して

$$\overline{W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}} = \overline{W_{[0, \infty)}}$$

が得られる これと (10.14)を合わせれば (10.13)が示される.

$j_+^*$  に関しても同様であるので, 証明を省略する.

(ii)  $\Theta_+$  に関しても同様なので,  $\Theta_-$  に関してのみ証明をつける. Koszul 分解 (10.9) より  $i_* \mathcal{O}_{V(I_+)} \in W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}$  がわかる. また  $X^{\lambda_1}$  はアファイン空間であるから, Quillen–Suslin の定理よりすべての局所自由層は自明になり, したがって  $\langle \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}} \rangle = D^b(X^{\lambda_1})$  となる. さらに  $\Theta_-(\mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}) = i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}$  が成り立つから,  $\Theta_-$  の本質的像は  $\langle i_* \mathcal{O}_{V(I_+)} \rangle$  となり, これは  $W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]}$  に入ることがわかる.

次に  $p^*$  が充満忠実であることと, さらに  $i_*$  が  $p^*$  の本質的像の上で充満忠実であることを示していこう. まず

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{[V(I_+)/\mathbb{G}_m]}(p^* \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}, p^* \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}) &\cong \mathrm{Hom}_{[V(I_+)/\mathbb{G}_m]}(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{V(I_+)}(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)})^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}[x_i \mid v_i \leq 0]^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}[x_i \mid v_i = 0] \end{aligned}$$

であり, 一方

$$\mathrm{Hom}_{X^{\lambda_1}}(\mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}, \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}) \cong \mathbb{C}[x_i \mid v_i = 0]$$

となり, これらは  $p^*$  によって同型となる. また  $\mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}, \mathcal{O}_{V(I_+)}$  はそれぞれ  $\mathrm{Coh}(X^{\lambda_1}), \mathrm{Coh}(V(I_+))$  の射影的対象であるから,  $k \neq 0$  のときは

$$\mathrm{Ext}_{[V(I_+)/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)}) \cong 0 \cong \mathrm{Ext}_{X^{\lambda_1}}^k(\mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}, \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}})$$

となり,  $\langle \mathcal{O}_{X^{\lambda_1}} \rangle = D^b(X^{\lambda_1})$  であることと問題 3.16 を使えば  $p^*$  は充満忠実であることがわかる.

次に  $i_*$  が  $p^*$  の本質的像の上で充満忠実であることを示す. まず  $\mathcal{O}_{V(I_+)}$  は  $\mathrm{Coh}(V(I_+))$  の射影的対象であることと補題 10.9 を用いると,  $k \neq 0$  のとき

$$\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}, i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}) = 0 = \mathrm{Ext}_{[V(I_+)/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)})$$

が成り立つ. また  $i_*$  は同型射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{[X/\mathbb{G}_m]}(i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}, i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}) &\cong \mathrm{Hom}_X(i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}, i_* \mathcal{O}_{V(I_+)})^{\mathbb{G}_m} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{V(I_+)}(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)})^{\mathbb{G}_m} \cong \mathrm{Hom}_{[V(I_+)/\mathbb{G}_m]}(\mathcal{O}_{V(I_+)}, \mathcal{O}_{V(I_+)}) \end{aligned}$$

を導くので,  $p^*$  の本質的像は  $\langle \mathcal{O}_{V(I_+)} \rangle$  であることから, 再び問題 3.16 を使って,  $i_*$  は  $p^*$  の本質的像の上で充満忠実となる. 以上から  $\Theta_-$  は充満忠実となることがわかった.  $\square$

以下では

$$\mu := - \sum_{v_i > 0} v_i - \sum_{v_i < 0} v_i \quad (10.15)$$

とおく.

**補題 10.13** (i)  $\mu > 0$  のとき,  $W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i]} \subset W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i]}$  であるから, 命題 10.12 にある  $\Theta_-$  を充満忠実関手

$$\Theta_- : D^b(X^{\lambda_1}) \hookrightarrow W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i]}$$

とみなし, さらに関手  $\Theta_-(j)$  を

$$\Theta_-(j) := \otimes \mathcal{O}_X(j) \circ \Theta_-$$

とおく. このとき半直交分解

$$\begin{aligned} &W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i]} \\ &= \left\langle \Theta_-, \Theta_-(-1), \dots, \Theta_-(-\mu + 1), W_{[\mu, -\sum_{v_i < 0} v_i]} \right\rangle \quad (10.16) \end{aligned}$$

が存在する.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> 10 章冒頭で述べたように, 充満忠実関手  $\Theta_-(j)$  に対し, その本質的像を再び  $\Theta_-(j)$  と表し

(ii)  $\mu < 0$  のとき,  $W_{[\sum_{v_i < 0} v_i, 0]} \subset W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, 0]}$  であるから, 命題 10.12 にある  $\Theta_+$  を充満忠実関手

$$\Theta_+: D^b(X^{\lambda_1}) \hookrightarrow W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, 0]}$$

とみなし, さらに関手  $\Theta_+(j)$  を

$$\Theta_+(j) := \otimes \mathcal{O}_X(j) \circ \Theta_+$$

とおく. このとき半直交分解

$$\begin{aligned} & W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, 0]} \\ &= \left\langle \Theta_+, \Theta_+(1), \dots, \Theta_+(-\mu - 1), W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, \mu]} \right\rangle \end{aligned} \quad (10.17)$$

が存在する.

**証明** (i)  $W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i]}$  の充満部分三角圏を

$$\mathcal{T} = \langle \Theta_-, \Theta_-(-1), \dots, \Theta_-(-\mu + 1) \rangle \quad (10.18)$$

とおく. また  $-\mu < m \leq 0$  なる整数  $m$  を 1 つ固定し, 完全列

$$0 \rightarrow I_+(m) \rightarrow \mathcal{O}_X(m) \rightarrow i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(m) \rightarrow 0$$

を考える. 部分圏  $\mathcal{T}$  の定義より,

$$i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(m) = \Theta_-(\mathcal{O}_{X^{\lambda_1}}) \otimes \mathcal{O}_X(m) \in \mathcal{T}$$

である. さらに  $-m + \sum_{v_i > 0} v_i < -\sum_{v_i < 0} v_i$  であり, また Koszul 複体 (10.9)において射  $f_+$  の像が  $I_+$  あることに注意すると

$$I_+(m) \in W_{(-m, -m + \sum_{v_i > 0} v_i)} \subset W_{(-m, -\sum_{v_i < 0} v_i)}$$

が成り立つことがわかる. 以上より  $\mathcal{O}_X(m) \in \langle \mathcal{T}, W_{(-m, -\sum_{v_i < 0} v_i)} \rangle$  となるから

$$W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i]} = \langle \mathcal{T}, W_{[1, -\sum_{v_i < 0} v_i]} \rangle = \dots = \langle \mathcal{T}, W_{[\mu, -\sum_{v_i < 0} v_i]} \rangle$$

が成り立つ.

また補題 10.9 からすべての  $k$  と  $l < l'$  に対し,

$$\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(l), i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(l')) = 0$$

である. 命題 10.12(ii) の証明中で示したように  $\Theta_-$  の本質的像は  $\langle i_* \mathcal{O}_{V(I_+)} \rangle$  であったから, (10.18) は半直交分解となる.

さらに補題 10.9 より, すべての  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mu \leq l < - \sum_{v_i < 0} v_i, \quad -\mu < m \leq 0$$

なる整数  $l, m$  に対し,

$$\mathrm{Ext}_{[X/\mathbb{G}_m]}^k(\mathcal{O}_X(-l), i_* \mathcal{O}_{V(I_+)}(m)) = 0$$

が成り立ち, よって  $W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, -\mu]} \subset {}^\perp T$  がわかる. したがって半直交分解 (10.16) の存在が示せた.

(ii) も同様である.  $\square$

**定理 10.14** (i)  $\mu > 0$  とすると, 充満忠実関手

$$\Phi: D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \hookrightarrow D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$$

と

$$\Upsilon_+: D^b(X_-^{\lambda_1}) \hookrightarrow D^b([X_+/\mathbb{G}_m]),$$

さらに半直交分解

$$D^b([X_+/\mathbb{G}_m]) = \langle \Upsilon_+, \Upsilon_+(-1), \dots, \Upsilon_+(-\mu + 1), D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \rangle$$

が存在する. ここで  $\Upsilon_+(j) := \otimes \mathcal{O}_{X_+}(j) \circ \Upsilon_+$  のこととする.

(ii)  $\mu = 0$  とすると, 同値

$$D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \xrightarrow{\sim} D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$$

が存在する.

(iii)  $\mu < 0$  とすると, 充満忠実関手

$$\Phi: D^b([X_+/\mathbb{G}_m]) \hookrightarrow D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$$

と

$$\Upsilon_-: D^b(X_-^{\lambda_1}) \hookrightarrow D^b([X_-/\mathbb{G}_m]),$$

さらに半直交分解

$$D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) = \langle \Upsilon_-, \Upsilon_-(1), \dots, \Upsilon_-(-\mu+1), D^b([X_+/\mathbb{G}_m]) \rangle$$

が存在する. ここで  $\Upsilon_-(j) := \otimes \mathcal{O}_{X_-}(j) \circ \Upsilon_-$  のこととする.

**証明** 以下では,  $D^b([X/\mathbb{G}_m])$  の自己同値  $\otimes \mathcal{O}_X(-j)$  を施すことで得られる同値

$$W_{(n,m]} \cong W_{(n+j,m+j]}$$

を断らずに用いる. まず  $\mu = 0$  のときは

$$W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i)} = W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i)} \cong W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]}$$

が成り立つので命題 10.12(i) より, 同値  $D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \cong D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$  が存在する.

次に  $\mu > 0$  とすると, 埋め込み関手

$$\iota: W_{[0, \sum_{v_i > 0} v_i)} \cong W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, 0]} \hookrightarrow W_{(-\sum_{v_i > 0} v_i, \mu]} \cong W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0)}$$

が存在する. このとき  $\Phi$  を合成

$$\Phi: D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \xrightarrow{(j_+^*)^{-1}} W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]} \xleftarrow{\iota} W_{(0, \sum_{v_i > 0} v_i)} \xrightarrow{j_+^*} D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$$

とすれば,  $D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$  は  $D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$  の充満部分三角圏であることがわかる. さらに

$$\Upsilon_+: D^b(X^{\lambda_+}) \xrightarrow{\Theta} W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i)} \cong W_{(\sum_{v_i < 0} v_i, 0]} \xrightarrow{j_+^*} D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$$

と定めることにより,  $D^b(X^{\lambda_+})$  は  $D^b([X_+/\mathbb{G}_m])$  の充満部分三角圏とみなせる.

**補題 10.13** 得た半直交分解

$$W_{[0, -\sum_{v_i < 0} v_i)} = \langle \Theta_-, \Theta_-(-1), \dots, \Theta_-(-\mu+1), W_{[\mu, -\sum_{v_i < 0} v_i)} \rangle$$

のはじめの  $\mu$  個の成分を同値  $j_+^*$  で移し, 最後の成分  $W_{[\mu, -\sum_{v_i < 0} v_i]}$  を同値  $j_-^*$  により  $D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$  に置き換えることで半直交分解

$$D^b([X_+/\mathbb{G}_m]) = \langle \Upsilon_+, \dots, \Upsilon_+(-\mu+1), D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) \rangle$$

が得られる.

$\mu < 0$  のときはも同様であるから証明は省く.  $\square$

**例 10.15 (Atiyah flop)**  $\mathbb{G}_m$  が  $X = \mathbb{A}^4 = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$  に作用し,

$(x_1, x_2, x_3, x_4)$  の重みが  $(1, 1, -1, -1)$  であるとする。このとき  $X_+ = X \setminus V(I_-)$ ,  $X_- = X \setminus V(I_+)$  とおくと、それぞれに  $\mathbb{G}_m$  が自由に作用することから図式

$$\begin{array}{ccc} X_+/\mathbb{G}_m & & [X_-/\mathbb{G}_m] \\ & \searrow f^+ & \swarrow f^- \\ & [X/\mathbb{G}_m] & \end{array}$$

が存在する。 $[X_+/\mathbb{G}_m], [X_-/\mathbb{G}_m]$  はともに  $\mathbb{P}^1$  上のベクトル束  $V(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$  と同型で、 $f^+, f^-$  はそれぞれの 0-切断を収縮する射であり、また  $f^+, f^-$  は互いにフロップを与える。 $\mu = 0$  であるから、定理 10.14 により同値

$$D^b([X_+/\mathbb{G}_m]) \xrightarrow{\cong} D^b([X_-/\mathbb{G}_m])$$

が存在する。これは例 6.5 で考えたフロップである。

**例 10.16**  $\mathbb{G}_m$  が  $X = \mathbb{A}^n = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  に作用し、各  $x_i$  の重み  $v_i$  がすべて正になるように作用しているとする。このとき

$$X_- = X \setminus V(I_+) = X \setminus \{0\}, \quad X_+ = X \setminus V(I_-) = \emptyset$$

となり  $X^{\lambda_1} = \{0\} \cong \text{Spec } \mathbb{C}$  である。 $\mu = -\sum_i v_i < 0$  であるから、定理 10.14 により半直交分解

$$D^b([X_-/\mathbb{G}_m]) = \left\langle D^b(X^{\lambda_1}), D^b(X^{\lambda_1})(1), \dots, D^b(X^{\lambda_1})(\sum_i v_i + 1) \right\rangle$$

が存在する。ここで  $[X_+/\mathbb{G}_m]$  は無論、重み付き射影空間  $\mathbb{P}(v_1, \dots, v_n)$  であり、今の場合  $D^b(X^{\lambda_1})(j) \cong D^b(\text{Spec } \mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{X_-}(j)$  であるから、上の半直交分解は (8.20) で与えた例外生成列と一致する。

### 10.3 導來圏と GIT (一般の場合)

この節では 10.2 節の内容を一般化し、簡約群  $G$  が滑らかな準射影的代数多様体  $X$  に作用している場合について、結果だけを述べることにする。

$G$  の 1-PS  $\lambda$  とその固定点集合  $X^\lambda$  のある連結成分  $Z_\lambda^0$  に対し、

$$Z_\lambda = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \in Z_\lambda^0\}$$

と定めた. ここで  $Z_\lambda^0$  と  $Z_\lambda$  は  $G$  の作用で閉じているとは限らないので, その  $G$  軌道

$$S_\lambda^0 := G \cdot Z_\lambda^0, \quad S_\lambda := G \cdot Z_\lambda \quad (10.19)$$

を考えると,  $Z_\lambda$  は滑らかな多様体  $Z_\lambda^0$  上  $\mathbb{A}$ -ファイブレーション (ファイバーがアファイン空間であるようなファイブルーション) を持つことがわかり, 特に滑らかであり, さらに  $S_\lambda$  も滑らかとなる [Mil17, Theorem 13.47].

さらに 1-PS  $\lambda$  に対し,  $G$  の部分群  $P(\lambda), U(\lambda)$  を

$$\begin{aligned} P(\lambda) &:= \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ が存在する}\} \\ U(\lambda) &:= \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = e\} \end{aligned}$$

と定め,  $C(\lambda)$  を  $\lambda$  の  $G$  における中心化群とする.  $p \in P(\lambda)$  に対し,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)p\lambda(t)^{-1} \in C(\lambda)$$

となり, また  $C(\lambda)$  は  $Z_\lambda^0$  に作用することから  $P(\lambda)$  が自然に  $Z_\lambda$  に作用することがわかる.

**定義 10.17**  $G$  の 1-PS  $\lambda$  と, その固定部分  $X^\lambda$  の連結成分  $Z_\lambda^0$  を 1 つ固定し, それに対し  $S_\lambda$  を上のように定める. 基本 HKKN ストラティフィケーション (elementary HKKN stratification)<sup>7</sup> とは非交和

$$\mathfrak{K}: X = (X \setminus S_\lambda) \coprod S_\lambda$$

であって,  $S_\lambda$  は  $X$  の閉集合で, 射

$$[(G \times Z_\lambda)/P(\lambda)] \rightarrow S_\lambda \quad (g, z) \mapsto g \cdot z$$

が同型となることである. ここで  $p \in P(\lambda)$  は  $G \times Z_\lambda$  に

$$p \cdot (g, z) = (gp^{-1}, p \cdot z)$$

と作用する.

基本 HKKN ストラティフィケーション  $\mathfrak{K}$  と  $x \in Z_\lambda^0$  に対し,

$$t(\mathfrak{K}) := \mu(\omega_{S_\lambda/X}^{-1}, \lambda, x)$$

---

<sup>7</sup> HKKN とは Hesselink–Kempf–Kirwan–Ness の頭文字である.

と定める。ここで  $\omega_{S_\lambda/X} \otimes \omega_X^{-1} = \bigwedge^{\text{codim } S_\lambda} \mathcal{N}_{S_\lambda/X}$  である。 $X, S_\lambda$  とも滑らかであるから、法束  $\mathcal{N}_{S_\lambda/X}$  はベクトル束になり、 $\omega_{S_\lambda/X}$  は直線束である。

**定義 10.18** 基本壁越え (elementary wall-crossing)  $(\mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-)$  とは基本 HKKN ストラティフィケーションの組

$$\mathfrak{K}^+ : X = (X \setminus S_\lambda) \coprod S_\lambda, \quad \mathfrak{K}^- : X = (X \setminus S_{-\lambda}) \coprod S_{-\lambda}$$

のことである。

以下基本壁越えに対し

$$\mu := -t(\mathfrak{K}^+) + t(\mathfrak{K}^-)$$

と定める。

次は基本壁越えの例を与える。

**例 10.19** 10.2 節の状況を考える。 $Z_{\lambda_1} = V(I_-), Z_{-\lambda_1} = V(I_+)$  であったから  $S_{\lambda_1} = Z_{\lambda_1}, S_{-\lambda_1} = Z_{-\lambda_1}$  が成り立つ。(10.6)および(10.7)で与えたように

$$X_+ := X \setminus S_{\lambda_1}, \quad X_- := X \setminus S_{-\lambda_1}$$

とし、

$$\mathfrak{K}^+ : X = X_+ \coprod S_{\lambda_1}, \quad \mathfrak{K}^- : X = X_- \coprod S_{-\lambda_1}$$

とおくと、 $(\mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-)$  は基本壁越えを与えることがわかる。(10.10)で見たように

$$\omega_{S_{\lambda_1}/X}^{-1} = \bigwedge^{|I_-|} (I_- / I_-^2) = \mathcal{O}_{S_{\lambda_1}} \left( - \sum_{v_i < 0} v_i \right)$$

であった。さらに(10.4)で与えた定義を思い出すと、(10.2)を用いて

$$t(\mathfrak{K}^+) = \mu(\omega_{S_{\lambda_1}/X}^{-1}, \lambda_1, x) = - \left\langle \left( - \sum_{v_i < 0} v_i \right) \lambda_1, \lambda_1 \right\rangle = \sum_{v_i < 0} v_i$$

であり、同様に

$$t(\mathfrak{K}^-) = \mu(\omega_{S_{-\lambda_1}/X}^{-1}, -\lambda_1, x) = - \left\langle \left( - \sum_{v_i > 0} v_i \right) \lambda_1, -\lambda_1 \right\rangle = - \sum_{v_i > 0} v_i$$

となる。したがって

$$\mu = - \sum_{v_i > 0} v_i - \sum_{v_i < 0} v_i$$

が成り立ち、確かに (10.15) で与えた  $\mu$  の定義と一致する。

さて、また一般の設定に戻る。

$$N_{S_\lambda^0/X} := V(N_{S_\lambda^0/X}^\vee)$$

とおき、 $N_{S_\lambda^0/X}|_{Z_\lambda^0}$  を 0-切斷に沿って完備化したもの

$$\widehat{N}^0 := \widehat{N_{S_\lambda^0/X}|_{Z_\lambda^0}}$$

とおこう。さらに  $Z_\lambda^0$  の開集合  $U$  に対し、対応する  $\widehat{N}^0$  の開集合を  $\widehat{N}_U^0$  と記すことにする。

$(X, G, \mathcal{L}, w)$  を gauged LG 模型とし、その因子化  $\mathcal{E} \in \text{Coh}([X/G], w)$  を考える。 $S_\lambda^0$  の  $\lambda$ -不変なアファイン開被覆  $\{V_i\}$  をとり、各  $V_i$  上では  $X$  の  $S_\lambda^0$  に沿った完備化と  $N_{S_\lambda^0/X}$  の 0-切斷に沿った完備化が同型となるようにできる。このとき  $\mathcal{E}$  を  $X$  の  $S_\lambda^0$  に沿った完備化に制限することで、 $V_i$  上では  $N_{S_\lambda^0/X}$  の 0-切斷に沿った完備化での因子化を与えることとなり、さらにそれを  $Z_\lambda^0$  の開集合  $U_i := Z_\lambda^0 \cap V_i$  に制限できる。これを

$$\mathcal{E}|_{\widehat{N}_{U_i}^0} \in \text{Coh}([\widehat{N}_{U_i}^0/\lambda], w|_{\widehat{N}_{U_i}^0})$$

と書く。ここで  $G$  の作用を  $\lambda$  により  $\mathbb{G}_m$  の作用へ引き戻し、 $\mathcal{E}|_{\widehat{N}_{U_i}^0}$  を  $\mathbb{G}_m$  の作用における因子化と考えていることに注意する。

**定義 10.20**  $(X, G, \mathcal{L}, w)$  を gauged LG 模型とし、 $I \subset \mathbb{R}$  とする。 $0 \neq \lambda \in \Lambda(G)$  と  $X^\lambda$  の連結成分  $Z_\lambda^0$  を 1 つ固定し、上のように  $\widehat{N}^0$  を定める。

- (i) 因子化  $\mathcal{E} \in \text{Coh}([X/G], w)$  が  $\widehat{N}^0$  に沿って  $I$  に重みを持つ、とは  $Z_\lambda^0$  が開被覆  $\{U_i\}$  を持ち、各項  $\mathcal{F}^i$  が局所自由層となるような因子化  $\mathcal{F}^\bullet \in \text{Coh}([\widehat{N}_{U_i}^0/\lambda], w|_{\widehat{N}_{U_i}^0})$  であって、 $x \in Z_\lambda^0$  に対し

$$\mu(\mathcal{F}^i, \lambda, x) \subset I$$

となるものと  $\mathcal{E}|_{\widehat{N}_{U_i}^0}$  が  $\text{DCoh}([\widehat{N}_{U_i}^0/\lambda], w|_{\widehat{N}_{U_i}^0})$  で同型になるときをいう。

- (ii) 次数  $I$  の窓 ( $I$ -grade-restricted window) とは  $\text{DCoh}([X/G], w)$  の充満忠実な部分三角圏 ( $W_{\lambda, I}$ 、もしくは単に  $W_I$  と表す) であって、 $\widehat{N}^0$  に沿って  $I$

に重みを持つ対象からなるものをいう。集合  $I$  がただ 1 つの整数  $j$  からなるとき、次数  $\{j\}$  の窓  $W_{\{j\}}$  を  $\mathrm{DCoh}([X/G], w)_j$  で表す。

$G$  の 1-PS  $\lambda$  の中心化群を  $C(\lambda)$  とし、

$$G_\lambda := C(\lambda)/\lambda, \quad w_\lambda := w|_{Z_\lambda^0}$$

とおく。後に使う補題を述べておこう。

### 補題 10.21 上の設定の下

$$\mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_0 \cong \mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/G_\lambda], w_\lambda)$$

が成り立つ。さらに  $\chi \in \widehat{C(\lambda)}$  が存在し、

$$\chi \circ \lambda(t) = t^i \quad (t \in \mathbb{G}_m)$$

を満たすとき、任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対し、

$$\mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_j \cong \mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_{i+j}$$

が成り立つ。

証明  $[Z_\lambda^0/G_\lambda]$  上の準連接層は  $Z_\lambda^0$  上の  $C(\lambda)$ -同変な準連接層で、 $\lambda$  が自明に作用する、つまり  $\lambda$  による重みが 0 のものであるから、最初の同値を得る。

また  $\mathcal{O}_{Z_\lambda^0}(\chi)$  をテンソルすることで、2番目の同値を得る。  $\square$

次が [BFK19] の主定理である。

**定理 10.22** 簡約群  $G$  が滑らかな準射影的代数多様体  $X$  に作用している状況で、 $G$ -同変直線束  $\mathcal{L}$  の  $G$ -不变大域切断  $w \in H^0(X, \mathcal{L})^G$  と  $G$  の 1-PS  $\lambda$  を考える。 $x \in Z_\lambda^0$  に対し、 $\mu(\mathcal{L}, \lambda, x) = 0$  とする。さらに、基本壁越え

$$\mathfrak{K}^+ : X = X_+ \coprod S_\lambda, \quad \mathfrak{K}^- : X = X_- \coprod S_{-\lambda}$$

が存在し、また  $S_\lambda^0$  が  $G$ -不变なアファイン被覆を持つとする。以下では  $d \in \mathbb{Z}$  を固定する。

(i)  $\mu > 0$  とすると、充满忠実関手

$$\Phi_d^+ : \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}) \hookrightarrow \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+}),$$

さらに  $-t(\mathfrak{K}^-) + d \leq j \leq -t(\mathfrak{K}^+) + d - 1$  を満たす整数  $j$  に対し、充满忠実

閑手

$$\Upsilon_j^+ : \mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_j \hookrightarrow \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+})$$

と半直交分解

$$\begin{aligned} & \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+}) \\ &= \left\langle \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^-)+d}^+, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^-)+d+1}^+, \dots, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^+)+d-1}^+, \Phi_d^+ \right\rangle \end{aligned}$$

が存在する。

(ii)  $\mu = 0$  とすると, 同値閑手

$$\Phi_d^+ : \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}) \rightarrow \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+})$$

が存在する。

(iii)  $\mu < 0$  とすると, 充満忠実閑手

$$\Phi_d^- : \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+}) \hookrightarrow \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}),$$

さらに  $-t(\mathfrak{K}^+) + d \leq j \leq -t(\mathfrak{K}^-) + d - 1$  を満たす整数  $j$  に対し, 充満忠実閑手

$$\Upsilon_j^- : \mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_j \hookrightarrow \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-})$$

と半直交分解

$$\begin{aligned} & \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}) \\ &= \left\langle \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^+)+d}^-, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^+)+d+1}^-, \dots, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^-)+d-1}^-, \Phi_d^- \right\rangle \end{aligned}$$

が存在する。

定理 10.22 の仮定の下,  $\mathrm{DCoh}([X/G], w)$  の次数  $I = [d + t(\mathfrak{K}^\pm) + 1, d]$  の恣  $W_{\pm\lambda, I}$  は埋め込み  $j_\pm : X^\pm \hookrightarrow X$  の引き戻し閑手を通じて,  $\mathrm{DCoh}([X_\pm/G], w|_{X^\pm})$  と同値となることがわかる。そこで例えば  $\mu = -t(\mathfrak{K}^+) + t(\mathfrak{K}^-) \geq 0$  のときは,  $\Phi^+$  を閑手の合成

$$\begin{aligned} \mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}) &\xrightarrow{(j_-^*)^{-1}} W_{-\lambda, [t(\mathfrak{K}^-)+1, 0]} = W_{\lambda, [0, -t(\mathfrak{K}^-)-1]} \\ &\hookrightarrow W_{\lambda, [0, -t(\mathfrak{K}^+)-1]} \xrightarrow{j_+^*} \mathrm{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+}) \end{aligned}$$

と定めて充満忠実閑手が得られる。

後にトーリック DM スタック（10.5 節）や特異点の三角圏（10.6 節）に関してそれぞれの状況に応じて基本的越えの存在を示し、定理 10.22 を適用する。[BFK19]において基本的越えの存在するため的一般的な条件として“DHT 条件”が導入されているが本書では触れないことにする。これに関する [BFK19, Definition 4.1.4, Theorem 4.1.5] を参照されたい。

## 10.4 トーリック Deligne–Mumford スタック

Kawamata によって射影的なトーリック Deligne–Mumford スタック上の連接層の導來圏には例外生成列が存在することが示されている [Kaw06].<sup>8</sup> その証明はトーリック多様体上の極小モデル理論を使って森ファイバー空間上の主張に帰着させるものであった。10.5 節では定理 10.22 を使って、この結果の別証明を与える。この節ではそのための用語の準備をする。

トーラス  $\mathbb{G}_m^n = (\mathbb{C}^*)^n$  がアファイン空間

$$X := \mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$$

へ、それぞれの成分へのスカラー倍で作用しているとする。また可換な代数群  $G$  から  $\mathbb{G}_m^n$  への群準同型  $\phi: G \rightarrow \mathbb{G}_m^n$  が与えられており、その核  $\text{Ker } \phi$  は有限とする。 $\mathbb{G}_m^n$  の  $X$  への作用は  $\phi$  によって  $G$  の  $X$  への作用を引き起こす。

**注意 10.23** 代数群がトーラス  $\mathbb{G}_m^n$  の閉部分代数群であるとき、対角化可能 (diagonalizable) である、という。トーラスと有限 Abel 群の直積は対角化可能であるが、実はその逆も成り立つ。また対角化可能な代数群の拡大で得られる可換な代数群は対角化可能となることが知られている。上で考えた可換な代数群  $G$  は対角化可能な代数群  $\text{Ker } \phi$  と  $\text{Im } \phi$  の拡大である<sup>9</sup>から  $G$  も対角化可能となり、特にトーラスと有限 Abel 群の直積と同型なる。対角化可能な代数群の諸性質に関しては [Hum75, Bor91, Mil17]などを参考にされたい。

10.1 節の最後で述べたように

$$\text{Pic}^G(X) = \text{NS}^G(X) = \{\mathcal{O}_X(\chi) : \chi \in \widehat{G}\} \cong \widehat{G}$$

であり、 $\chi \in \widehat{G}_{\mathbb{R}}$  に対し、記号を

---

<sup>8</sup> [Kaw06] では連接層からなる例外生成列の存在を主張しているが、実際は連接層からなることは示されていない。

<sup>9</sup> 一般に代数群の間の射の像は閉部分群になる。

$$X^{\text{ss}}(\chi) := X^{\text{ss}}(\mathcal{O}_X(\chi)), \quad X^{\text{s}}(\chi) := X^{\text{s}}(\mathcal{O}_X(\chi))$$

と定める（注意 10.7）． $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  に対し  $X_f = D(f)$  は常にアファイン代数多様体であることから  $\chi \in \widehat{G}$  であるときは

$$\begin{aligned} X^{\text{ss}}(\chi) &= \{p \in X : \exists j > 0, \exists f(x) \in H^0(X, \mathcal{O}_X(j\chi))^G \text{ s.t. } p \in X_f\} \\ &= \{p \in X : \exists j > 0, \exists f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \\ &\quad \text{s.t. } f(p) \neq 0, \text{ 任意の } g \in G \text{ に対し } f(g \cdot x) = \chi(g)^j f(x)\} \end{aligned}$$

であり，よって

$$X^{\text{us}}(\chi) = \bigcap_{j>0} \bigcap_{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{j\chi}^G} V(f) \quad (10.20)$$

となる．ただし

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{j\chi}^G \\ := \{f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : \forall g \in G \text{ に対し } f(g \cdot x) = \chi(g)^j f(x)\} \end{aligned}$$

とおいた．

**例 10.24**  $\mathbb{G}_m^3$  の部分群

$$G = \{(t, t^{-1}, s) \in \mathbb{G}_m^3 : s = \pm 1, t \in \mathbb{G}_m\}$$

が  $X = \mathbb{A}_{x,y,z}^3$  に次のように作用している： $(p_1, p_2, p_3) \in X$  に対し，

$$(t, t^{-1}, s) \cdot (p_1, p_2, p_3) := (tp_1, t^{-1}p_2, sp_3)$$

さらに  $\chi \in \widehat{G}$  を  $\chi(t, t^{-1}, s) = st$  で定義すると，

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x, y, z]_{j\chi}^G \\ = \{f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z] : (t, t^{-1}, s) \in G \text{ に対し} \\ \quad s^j t^j f(x, y, z) = f(tx, t^{-1}y, sz)\} \\ = \begin{cases} x^j z \mathbb{C}[xy, z^2] & (j \text{ は奇数}) \\ x^j \mathbb{C}[xy, z^2] & (j \text{ は偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．そこで式 (10.20) より

$$X^{\text{ss}}(\chi) = V(x) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$$

となり、さらに安定点の定義から  $X^{\text{ss}}(\chi) = X^{\text{s}}(\chi)$  もわかる。

Hilbert–Mumford の数値判定法（定理 10.6）を用いて  $X^{\text{us}}(\chi)$  を記述してみよう。安定性、半安定性は作用する群  $G$  を  $G/\text{Ker } \phi$  で置き換えるても変わらないので群準同型  $\phi: G \rightarrow \mathbb{G}_m^n$  が單射であるとしておく。まず  $G$  の 1-PS  $\lambda$  を  $\phi$  によって  $\mathbb{G}_m^n$  の 1-PS とみなすと、 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n (\cong \text{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m^n))$  と思え、このとき  $p = (p_1, \dots, p_n) \in X = \mathbb{A}^n$  に対し、 $\lambda$  は

$$\lambda(t) \cdot p = (t^{\lambda_1} p_1, \dots, t^{\lambda_n} p_n)$$

と作用している。この状況は  $\mathbb{G}_m$  がアファイン空間  $\mathbb{A}^n$  に作用する場合を考えていた 10.2 節の状況と同じであることを思い出されたい。多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  のイデアルを

$$I(\lambda)_+ := \langle x_i : \lambda_i > 0 \rangle, \quad I(\lambda)_- := \langle x_i : \lambda_i < 0 \rangle$$

とおくと、 $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot p$  が存在する必要十分条件は  $p \in V(I(\lambda)_-)$  である。（ただし例えば任意の  $i$  に対し、 $\lambda_i \geq 0$  であるときは  $I(\lambda)_- = 0$  とおく。）また 1-PS  $\lambda$  による  $X$  の固定点集合  $X^\lambda$  はアファイン空間  $V(I(\lambda)_-, I(\lambda)_+)$  となり連結であるから、その唯一の連結成分を  $Z_\lambda^0$  とおくと

$$S_\lambda = Z_\lambda = V(I(\lambda)_-) \tag{10.21}$$

となる。そこで式 (10.3) を用いて

$$X^{\text{us}}(\chi) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(G) : \langle \chi, \lambda \rangle < 0} V(I(\lambda)_-) \tag{10.22}$$

となり、これはアファイン空間の和集合であることがわかる。

**例 10.25** 例 10.24において、 $\lambda \in \Lambda(G)$  を  $\lambda(t) = (t, t^{-1}, 1) (t \in \mathbb{G}_m)$  とおくと  $(d\lambda)(t) = (t^d, t^{-d}, 1)$  であるから  $\langle \chi, d\lambda \rangle = d$  となり、また  $\Lambda(G) = \{d\lambda : d \in \mathbb{Z}\}$  が成り立つ。式 (10.22) から

$$X^{\text{us}}(\chi) = \bigcup_{d < 0} V(I(d\lambda)_-)$$

であるが、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, -1, 0)$  であるから  $d < 0$  のとき  $I(d\lambda)_- = \langle x_1 \rangle$  となる。そこで

$$X^{\text{ss}}(\chi) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$$

となり、例 10.24 と同じ結果が得られた。

ここで (10.1) で定義した  $C^G(X)$  に関して、

$$\begin{aligned} C^G(X) &= \{\chi \in \widehat{G} : X^{\text{ss}}(\chi) \neq \emptyset\} \\ &= \{\chi \in \widehat{G} : \exists j > 0, H^0(X, \mathcal{O}_X(j\chi))^G \neq 0\} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\chi \in C^G(X)_{\mathbb{R}}$  に対し、

$$C(\chi) := \{\chi' \in C^G(X)_{\mathbb{R}} : X^{\text{ss}}(\chi) \subset X^{\text{ss}}(\chi')\}$$

と定める。

**注意 10.26** 以下では [CLS11] を頻繁に引用するので、そのそれぞれ 14.3, 14.4 節で定義が与えられている  $\widehat{G}_{\mathbb{R}}$  内の 2 つの錐  $C_{\beta}$  と  $\Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  と、我々が定義した  $C(\chi)(\subset \widehat{G}_{\mathbb{R}})$ ,  $C^G(X)(\subset \widehat{G})$  との関係について述べておく。

まず [CLS11, Proposition 14.3.5] より

$$C_{\beta} \cap \widehat{G} = C^G(X)$$

となる。また  $\chi$  を  $\Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  の相対内部からとったとき

$$C(\chi) = \Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$$

が成り立つ。実際 [CLS11] の記号において、[CLS11, Proposition 14.4.14] より  $B(\Sigma, I_{\emptyset}) = B(\chi)$  が成り立ち、さらに任意の  $\chi' \in \Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  に対し  $B(\Sigma, I_{\emptyset}) \subset B(\chi')$ 、つまり  $B(\chi) \subset B(\chi')$  が成り立つ。 $X = \mathbb{A}^n$  の閉集合  $X \setminus X^{\text{ss}}(\chi)$  の定義イデアルが  $B(\chi)$  であるから、これは  $X^{\text{ss}}(\chi) \subset X^{\text{ss}}(\chi')$  と同値である。つまり  $\chi' \in C(\chi)$  となる。逆をたどれば  $\chi' \in C(\chi)$  であるとき  $\chi' \in \Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  も成り立つ。

また 2 つの錐  $\Gamma_{\Sigma', I'_{\emptyset}}$ ,  $\Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  に対し  $\chi', \chi$  をそれぞれの相対内部からとると、上で述べたことから  $C(\chi') = \Gamma_{\Sigma', I'_{\emptyset}}$ ,  $C(\chi) = \Gamma_{\Sigma, I_{\emptyset}}$  が成り立つ。そこで [CLS11, Corollary 14.4.15] を用いれば錐  $C(\chi')$  が錐  $C(\chi)$  の面であることと、 $X^{\text{ss}}(\chi) \subset X^{\text{ss}}(\chi')$  であることは同値であることがわかる。

各  $C(\chi)$  は閉凸有理多面錐 (closed convex rational polyhedral cone) であり、またこれらの錐たちは扇をなし、

$$\bigcup_{x \in C^G(X)} C(x) = C^G(X)_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ ([CLS11, Theorem 14.4.7], [Hal]). つまり, この扇は  $C^G(X)_{\mathbb{R}}$  を台を持つ.

$$X^{ss}(\chi_1) = X^{ss}(\chi_2) \quad (\chi_i \in \widehat{G}_{\mathbb{R}})$$

が成り立つとき,  $\chi_1$  と  $\chi_2$  は **GIT-同値** (GIT-equivalence) であると呼ぶことにすると, 各  $C(x)$  の相対内部は 1 つの GIT-同値類からなり, また GIT-同値類はある錐  $C(x)$  の相対内部からなる (注意 10.26 参照). そこで錐  $C = C(x)$  の相対内部にある指標に関する半安定点の集合を  $X^{ss}(x)$  の代わりに

$$X^{ss}(C)$$

と書くこともある. 錐  $C(x)$  たちからなる扇を **GKZ-扇** (GKZ-fan)<sup>10</sup> と呼び

$$\Sigma_{\text{GKZ}} \text{(もしくは } \Sigma_{\text{GKZ}}^G(X))$$

と書くことにしよう. 最大次元の錐を部屋 (chamber) と呼び, 余次元 1 の錐を壁 (wall) と呼ぶこともある. 部屋の内部にある指標  $\chi$  を一般の指標 (generic character) と呼ぶ.  $\chi \in C^G(X)$  が一般の指標であることと  $X^{ss}(\chi) = X^s(\chi)$  が成り立つことは同値である ([CLS11, Theorem 14.3.14, Proposition 14.4.9]).  $\Sigma_{\text{GKZ}}$  の錐  $C$  が  $C^G(X)_{\mathbb{R}}$  の  $\widehat{G}_{\mathbb{R}}$  における境界と交わるとき,  $C$  は境界の部屋 (boundary chamber) と呼ばれ, また  $C^G(X)_{\mathbb{R}}$  の補集合の閉包は, 錐ではないので部屋でもないが便宜上, 空の部屋 (empty chamber) と呼ばれる.

$C_-, C_+$  を  $\Sigma_{\text{GKZ}}$  の隣接する部屋, もしくはそれぞれ空の部屋と境界の部屋とする. 錐  $W_0 := C_- \cap C_+$  を境に  $X$  のある点の半安定性が変化する. Hilbert-Mumford の数値的判定法 (定理 10.6) と式 (10.2) から錐  $W_0$  は, ある 1-PS  $\lambda_0$  が定める  $\widehat{G}_{\mathbb{R}}$  内の平面

$$(\lambda_0)^{\perp} := \{\chi \in \widehat{G}_{\mathbb{R}} : \langle \chi, \lambda_0 \rangle = 0\}$$

に含まれることがわかる.

**例 10.27**  $\mathbb{G}_m^3$  の部分群

---

<sup>10</sup> もしくは **GIT-扇** (GIT-fan) や第 2 種扇 (secondary fan) ともいう. GKZ は Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky の頭文字である.

$$G = \{(t, s, st) \in \mathbb{G}_m^3 : s, t \in \mathbb{G}_m\}$$

が  $X = \mathbb{A}_{x,y,z}^3$  に次のように作用している :  $(p_1, p_2, p_3) \in X$  に対し,

$$(t, s, st) \cdot (p_1, p_2, p_3) := (tp_1, sp_2, stp_3)$$

さらに  $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$  を

$$\chi_1(t, s, st) = t, \quad \chi_2(t, s, st) = s$$

で定義すると,  $\widehat{G}_{\mathbb{R}} \cong \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$  であることがわかり, 指標  $\chi = n\chi_1 + m\chi_2 \in \widehat{G}$  に対し,  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として

$$\mathbb{C}[x, y, z]_{j\chi}^G = \langle x^{nj-a}y^{mj-a}z^a : nj \geq a, mj \geq a, a \geq 0 \rangle$$

が成り立つ. そこで式 (10.20) より

$$X^{\text{us}}(\chi) = \begin{cases} \emptyset & (n = m = 0) \\ X & (n < 0 \text{ もしくは } m < 0) \\ V(y) & (n = 0, m > 0) \\ V(yz) & (m > n > 0) \\ V(z) & (n = m > 0) \\ V(xz) & (n > m > 0) \\ V(x) & (m = 0, n > 0) \end{cases}$$

となり,

$$C^G(X)_{\mathbb{R}} = \{n\chi_1 + m\chi_2 \in \widehat{G}_{\mathbb{R}} : m, n \geq 0\}$$

がわかる. GKZ 扇の部屋は  $C(2\chi_1 + \chi_2), C(\chi_1 + 2\chi_2)$  の 2 つであり, 壁は  $C(\chi_1), C(\chi_1 + \chi_2), C(\chi_2)$  の 3 つである.

**定義 10.28** 一般の指標  $\chi \in \widehat{G}$  に対し, 商スタック  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  をトーリック Deligne–Mumford(DM) スタック (toric Deligne–Mumford stack) と呼ぶ. さらに  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}$  であるとき  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は射影的であるという.

**注意 10.29** (i) 指標  $\chi \in \widehat{G}$  が一般であるとき  $X^{\text{ss}}(\chi) = X^s(\chi)$  であるから,  $G$  の  $X^{\text{ss}}(\chi)$  への作用の安定化群は有限であり, 命題 10.5 から  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は

確かに DM スタックとなる。<sup>11</sup>

- (ii) トーリック DM スタックの定義では、簡約群  $G$  からトーラス  $\mathbb{G}_m^n$  への、単射とは限らない射  $\phi: G \rightarrow \mathbb{G}_m^n$  であって、 $\text{Ker } \phi$  が有限になるものを与え、 $\phi$  によって定まる  $G$  の  $X = \mathbb{A}^n$  への作用を考えており、このとき商スタック  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は一般的な点が自明でない安定化群を持ち得る。それに対し、 $\phi$  が単射であるとき、商スタック  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  をトーリック Deligne–Mumford(DM) 軌道体 (toric Deligne–Mumford orbifold) と呼ぶこともある。[OU13, Corollary 3.2] によると、 $X = \mathbb{A}^n$  から得られる射影的なトーリック DM 軌道体が例外生成列を持つことがわかれれば、商スタック  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  が例外生成列を持つこともわかる。そこで 10.5 節の主定理である定理 10.33 では、トーリック DM 軌道体のみを考えればよいが、その証明において次元に関する帰納法を使うときにトーリック DM スタックが自然に現れる。
- (iii) 非特異な射影的トーリック多様体は射影的トーリック DM 軌道体になることを見よう。射影的な扇  $\Sigma$  に対応する射影的トーリック多様体を  $X_\Sigma$  とし、 $\Sigma'$  を  $\Sigma$  の単体的錐 (simplicial cone) 全体からなる部分扇、 $\Sigma(1)$  を  $\Sigma$  の 1 次元錐からなる集合とする。因子類群  $\text{Cl}(X_\Sigma)$  は  $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$  の商であるから

$$G := \text{Hom}(\text{Cl}(X_\Sigma), \mathbb{G}_m)$$

は  $\mathbb{G}_m^{\Sigma(1)}$  の部分群と思え、自然に  $G$  を  $\mathbb{A}^{\Sigma(1)}$  に作用させる。また  $Z(\Sigma)$  を [CLS11, §5.1] にあるように定める。このとき  $\text{Cl}(X_\Sigma)$  は自然に  $\widehat{G}$  と同一視でき [CLS11, Lemma 5.1.1]、そこで豊富因子に対応する  $\chi \in \widehat{G}$  に対し、[CLS11, Proposition 14.1.9] により

$$X^{\text{ss}}(\chi) = X \setminus Z(\Sigma), \quad X^s(\chi) = X \setminus Z(\Sigma')$$

が成り立つ。特に  $\Sigma$  が単体的、つまり  $\Sigma = \Sigma'$  であるときは、[CLS11, Theorem 5.1.11] から

$$X(\Sigma) \cong X / {}_\chi G (:= X / {}_{\sigma_\chi(\chi)} G)$$

が成り立つ。さらに  $X(\Sigma)$  を滑らかであるとすると、 $G$  は  $X \setminus Z(\Sigma)$  に自由に作用することもわかる。特に命題 10.5 を使えば、 $X(\Sigma)$  はトーリック DM

---

<sup>11</sup> [BFK19] にあるトーリック DM スタックの定義では指標  $\chi \in \widehat{G}$  が一般であることを仮定していないが、このときは  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は DM スタックになるとは限らないであろう。

軌道体となることがわかる。

## 10.5 トーリック Deligne–Mumford スタックと例外生成列

この節では 10.4 節で予告した通り、射影的トーリック DM スタックの連接層の導來圏が例外生成列を持つことを GIT を用いて証明する。

その準備である補題 10.30、定理 10.32 においては 10.4 節のように簡約 Abel 群  $G$  からトーラス  $\mathbb{G}_m^n$  への有限核  $\text{Ker } \phi$  をもつ群準同型  $\phi: G \rightarrow \mathbb{G}_m^n$  によって、 $G$  がアファイン空間  $X = \mathbb{A}^n$  に作用しているとする。この作用の GKZ 扇  $\Sigma_{\text{GKZ}}$  において次の状況を考える。

$C_-, C_+$  を  $\Sigma_{\text{GKZ}}$  の隣接する部屋、もしくはそれぞれ空の部屋と境界の部屋とし、錐  $W_0 := C_- \cap C_+$  は余次元が 1、つまり壁であると仮定する。壁  $W_0$  に対しある 1-PS  $\lambda_0$  が存在し、 $W_0$  は平面  $(\lambda_0)^\perp$  に含まれ、

$$C_+ \subset (\lambda_0)_{\leq 0} := \{\chi \in \widehat{G}_{\mathbb{R}}: \langle \chi, \lambda_0 \rangle \leq 0\}$$

となる。 $\chi_0, \chi_+, \chi_-$  をそれぞれ  $W_0, C_+, C_-$  の内部にある指標とする。このとき

$$X^{\text{ss}}(\chi_0)^{\lambda_0} = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap X^{\lambda_0}$$

が成り立ち、かつ  $X^{\lambda_0} = V(I(\lambda_0)_-, I(\lambda_0)_+)$  はアファイン空間であるからその開集合  $X^{\text{ss}}(\chi_0)^{\lambda_0}$  は既約で、特にその連結成分はただ 1 つである。この連結成分  $Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0 (= X^{\text{ss}}(\chi_0)^{\lambda_0})$  に対し、

$$Z(\chi_0)_{\lambda_0} := \{x \in X^{\text{ss}}(\chi_0): \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_0(t) \cdot x \in Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0\}$$

とし、さらに

$$S(\chi_0)_{\lambda_0} := G \cdot Z(\chi_0)_{\lambda_0}$$

と定める。 $X^{\lambda_0}$  の連結成分に対して定めた、式 (10.21) にある  $S_{\lambda_0}$  を用いると

$$S(\chi_0)_{\lambda_0} = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap S_{\lambda_0} \tag{10.23}$$

となる。さらに  $S(\chi_0)_{-\lambda_0}$  も  $S(\chi_0)_{\lambda_0}$  と同じように（今度は  $-\lambda_0$  を用いて）定めると (10.23) と同様の式が成り立つ。

**補題 10.30** 上の状況の下、基本壁越え

$$X^{\text{ss}}(\chi_0) = X^{\text{ss}}(\chi_+) \coprod S(\chi_0)_{\lambda_0} \quad (10.24)$$

$$X^{\text{ss}}(\chi_0) = X^{\text{ss}}(\chi_-) \coprod S(\chi_0)_{-\lambda_0} \quad (10.25)$$

が存在する。

証明 まず式(10.24), つまり

$$X^{\text{ss}}(\chi_0) \setminus X^{\text{ss}}(\chi_+) = S(\chi_0)_{\lambda_0}$$

を示す。この式の両辺は、式(10.21), (10.22), (10.23)を用いれば、次の式の両辺に変形できる：

$$X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda(G): \langle \chi_+, \lambda \rangle < 0} S_\lambda = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap S_{\lambda_0} \quad (10.26)$$

まず  $\langle \chi_+, \lambda_0 \rangle < 0$  であるから (10.26) の右辺が左辺に含まれる。

逆に  $x \in X^{\text{ss}}(\chi_0) \setminus X^{\text{ss}}(\chi_+) = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap \bigcup_{\langle \chi_+, \lambda \rangle < 0} S_\lambda$  に対し、ある  $\lambda \in \Lambda(G)$  が存在し

$$(-\langle \chi_+, \lambda \rangle =) \mu(\mathcal{O}_X(\chi_+), \lambda, x) > 0$$

が成り立つ。関数  $\mu(-, \lambda, x): \widehat{G}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  の連続性から

$$\mu(\mathcal{O}_X(\chi_0), \lambda, x) \geq 0$$

となるが、 $x \in X^{\text{ss}}(\chi_0)$  なので Hilbert–Mumford の数値判定法から

$$(-\langle \chi_0, \lambda \rangle =) \mu(\mathcal{O}_X(\chi_0), \lambda, x) = 0$$

が成り立つ。したがって  $\chi_0 \in (\lambda)^{\perp} \cap (\lambda_0)^{\perp}$  となるが、 $\chi_0$  を壁  $W_0$  の内部で取り替えると同様の議論が成り立つので、 $\lambda$  は  $\lambda_0$  の正の整数倍となり、特に  $S_\lambda = S_{\lambda_0}$ 、さらには (10.26) の左辺が右辺に含まれることもわかる。

式(10.21), (10.23)より、 $S(\chi_0)_{\lambda_0} = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap V(I(\lambda_0)_-)$  であるから、これは  $X^{\text{ss}}(\chi_0)$  の閉集合となり、また  $G$  が Abel 群であるから  $P(\lambda_0) = G$  であり、さらに

$$[(G \times Z(\chi_0)_{\lambda_0}) / P(\lambda_0)] \rightarrow S(\chi_0)_{\lambda_0} \quad (g, z) \mapsto g \cdot z$$

は同型射となるから (10.24) は基本壁越えを与える。

式(10.25)に関する主張も ( $C_-$  が空の部屋であるときも含め) 同様に示せるの

で証明は省略する。  $\square$

**問題 10.31** 例 10.27において、式 (10.24), (10.25) が成り立つことを直接確かめよ。

以下で述べる定理 10.32において、この節の冒頭の状況で定理 10.22 を書き換えるために記号の整理をしておく。 $G$  は Abel 群であるため、1-PS  $\lambda_0$  の中心化群  $C(\lambda_0)$  は  $G$  自身となり

$$G_{\lambda_0}(:= C(\lambda_0)/\lambda_0) = G/\lambda_0$$

が成り立つ。<sup>12</sup> また注意 10.23 で述べたように、 $G$  はあるトーラス  $\mathbb{G}_m^l$  と有限群の直積であるから  $\lambda_0 \in \Lambda(G) \cong \mathbb{Z}^l$  は原始的である（つまり  $\lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{Z}^l$  と表したとき、すべての  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq l$ ) の最大公約数が 1 である）としてよいので、ある  $\chi \in \widehat{G}$  が存在し、 $\chi \circ \lambda_0 = \text{id}_{\mathbb{G}_m}$  が成り立つ。そこで補題 10.21 から任意の  $j \in \mathbb{Z}$  に対し

$$D^b([Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0/G])_j \cong D^b([Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0/G_{\lambda_0}])$$

が成り立つ。さらに

$$Y := X^{\lambda_0}$$

とおくと、補題 10.30 の前で述べたように

$$Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0 = X^{\text{ss}}(\chi_0)^{\lambda_0} = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap Y$$

であった。また  $G$  の指標  $\chi_0$  は  $W_0(\subset (\lambda_0)^\perp)$  の元であるから  $\widehat{G_{\lambda_0}}$  の元ともみなすことができ、 $G_{\lambda_0}$  の  $Y$  上の  $\mathcal{O}_Y(\chi_0)$ -作用の半安定点の集合  $Y^{\text{ss}}(\chi_0)$  は  $X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap Y$  に一致することもわかる：

$$Y^{\text{ss}}(\chi_0) = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap Y \tag{10.27}$$

したがって

$$Z(\chi_0)_{\lambda_0}^0 = Y^{\text{ss}}(\chi_0)$$

が成り立つ。

定理 10.32において  $\mu(\omega_X^{-1}, \lambda_0, x) < 0, = 0$  の場合もそれぞれ対応する主張が

<sup>12</sup> ここでは無論 1-PS  $\lambda_0: \mathbb{G}_m \rightarrow G$  をその像  $\text{Im } \lambda_0$  と同一視し  $G$  の部分群とみなしている。

あるが、容易に想像できるであろうから省略する。

**定理 10.32**  $d \in \mathbb{Z}$  とする。 $x \in Y^{\text{ss}}(\chi_0)$  に対し  $\mu := \mu(\omega_X^{-1}, \lambda_0, x) > 0$  とする  
と、充満忠実閑手

$$\Phi^+ : D^b([X^{\text{ss}}(\chi_-)/G]) \hookrightarrow D^b([X^{\text{ss}}(\chi_+)/G])$$

と

$$\Upsilon^+ : D^b([Y^{\text{ss}}(\chi_0)/G_{\lambda_0}]) \hookrightarrow D^b([X^{\text{ss}}(\chi_+)/G])$$

が存在し、それらを用いて半直交分解

$$D^b([X^{\text{ss}}(\chi_+)/G]) = \langle D^b([Y^{\text{ss}}(\chi_0)/G_{\lambda_0}]), \dots, D^b([Y^{\text{ss}}(\chi_0)/G_{\lambda_0}])(-\mu - 1), D^b([X^{\text{ss}}(\chi_-)/G]) \rangle$$

が存在する。ただし  $D^b([Y^{\text{ss}}(\chi_0)/G_{\lambda_0}])(j)$  は  $\text{Im } \Upsilon^+$  に  $\mathcal{O}(j\chi_0)$  をテンソルしたものである。

**証明** 準アファイン代数多様体  $X^{\text{ss}}(\chi_0)$  への代数群  $G$  の作用に関して定理 10.22 を適用したい。まず gauged LG 模型の連接の因子化の導來圏に関する定理 10.22 を連接層の導來圏の結果に書き換えるために、系 8.34 を使い

$$D^b([X^{\text{ss}}(\chi_+)/G]) \cong \text{DCoh}([X^{\text{ss}}(\chi_+)/G \times \mathbb{G}_m], 0)$$

などが成り立つことを用いる。さらに定理 10.32 にある  $\mathcal{L}$  として  $\mathcal{O}(\chi_0)$ ,  $\lambda$  として  $\lambda_0$  をとる。

補題 10.30 より基本壁越え

$$\mathfrak{K}^+ : X^{\text{ss}}(\chi_0) = X^{\text{ss}}(\chi_+) \coprod S(\chi_0)_{\lambda_0}$$

$$\mathfrak{K}^- : X^{\text{ss}}(\chi_0) = X^{\text{ss}}(\chi_-) \coprod S(\chi_0)_{-\lambda_0}$$

が存在し、[BFK19, Lemma 3.5.4] により、 $\mu(\omega_X^{-1}, \lambda_0, x) = -t(\mathfrak{K}^+) + t(\mathfrak{K}^-)$  が成り立つ。また  $S(\chi_0)_{\lambda_0} = X^{\text{ss}}(\chi_0) \cap V(I(\lambda_0)_-)$  自身が  $G$ -不变なアファイン多様体であるので定理 10.22 の仮定を満たしている。以上より定理 10.22 が適用でき、欲しい結果を得る。□

定理 10.33 の証明では、以下のことに注意されたい。 $G$  の 1-PS  $\lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  に対し

$$Y(:= X^{\lambda_0}) = V(I(\lambda_0)_-, I(\lambda_0)_+) = \mathbb{A}^{n'}, \quad n > n' := |\{x_i : \lambda_i = 0\}|$$

が成り立つ。また  $\lambda_0$  を  $\mathbb{G}_m^n$  の部分群と思って得られる自然な埋め込み

$$\psi: \lambda_0 = \{(t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n}) \in \mathbb{G}_m^n : t \in \mathbb{G}_m\} \hookrightarrow \mathbb{G}_m^{n-n'}$$

によって定まる射

$$\phi_{\lambda_0}: G_{\lambda_0} = G/\lambda_0 \hookrightarrow \mathbb{G}_m^n/\lambda_0 \twoheadrightarrow \mathbb{G}_m^n/\mathbb{G}_m^{n-n'} \cong \mathbb{G}_m^{n'}$$

を介して、 $G_{\lambda_0}$  は  $Y = \mathbb{A}^{n'}$  の各成分へスカラー倍によって作用する。 $\text{Ker } \phi_{\lambda_0}$  は有限群  $\text{Coker } \psi$  の部分群であるから有限群である。

さらに (10.27) より  $\widehat{G_{\lambda_0}}_{\mathbb{R}} (= (\lambda_0)^{\perp} \subset \widehat{G}_{\mathbb{R}})$  内の扇  $\Sigma_{\text{GKZ}}^{G_{\lambda_0}}(Y)$  は、 $\widehat{G}_{\mathbb{R}}$  内の扇  $\Sigma_{\text{GKZ}}^G(X)$  を部分空間  $(\lambda_0)^{\perp}$  に制限して得られることがわかる：

$$\Sigma_{\text{GKZ}}^{G_{\lambda_0}}(Y) := \{C \cap (\lambda_0)^{\perp} : C \text{ は } \Sigma_{\text{GKZ}}^G(X) \text{ の錐 }\}$$

そこで壁  $W_0(\subset (\lambda_0)^{\perp})$  の相対内部の指標  $\chi_0$  を  $\widehat{G_{\lambda_0}}$  の元と考えれば  $\chi_0$  は一般の指標であり、得られる  $[Y^{\text{ss}}(\chi_0)/G_{\lambda_0}]$  はトーリック DM スタックになる。

**定理 10.33**  $\chi \in \widehat{G}$  を一般の指標とする。このとき射影的なトーリック DM スタック  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は例外生成列を持つ。

**証明**  $X = \mathbb{A}^n$  の次元  $n$  に関する帰納法で示す。 $X$  が 0 次元のときは  $G$  は有限群であり、 $D^b([X^{\text{ss}}(\chi)/G])$  は  $G$  の有限次元表現のなす Abel 圈の導來圏となる。Abel 群  $G$  の既約表現はすべて 1 次元であり、また既約表現の同型類の個数は群の位数に等しいから有限個である。有限群の  $\mathbb{C}$  上の表現は既約表現の直和になり、Schur の補題から既約表現は例外対象となるから、 $G$  の 1 次元表現全体は  $D^b([X^{\text{ss}}(\chi)/G])$  の例外生成列をなす。

次に  $n \leq N - 1$  であるときは主張が正しいと仮定して、 $n = N$  である場合に主張が正しいことを示そう。以下では  $\chi$  を内部に含む部屋を  $C$  とする。まず線分  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \widehat{G}_{\mathbb{R}} \cong (\text{Pic}^G X)_{\mathbb{R}}$  であって以下の条件を満たすものが存在する：

- $\gamma(0) = \omega_X^{-1}$  であり、 $\gamma(1)$  は空の部屋  $C_{\emptyset}$  の内部にある。
- $\gamma([0, 1]) \cap C^{\circ} \neq \emptyset$  ( $C^{\circ}$  は部屋  $C$  の内部)
- $a, b \in [0, 1]$  を  $\gamma([a, b]) = \gamma([0, 1]) \cap C$  となるようにとると、ある  $\delta > 0$  に対し、 $\gamma((a - \delta, 1])$  は余次元 2 の壁には交わらない。

ここで  $[X^{\text{ss}}(\chi)/G]$  は射影的であるから [CLS11, Proposition 14.3.10] より、

$\Sigma_{\text{GKZ}}$  の台は強凸となるので空の部屋  $C_\emptyset$  が存在することに注意する.  $t$  が  $(a, 1]$  を動くとき,  $\gamma(t)$  は部屋  $C_0 := C$  から  $C_1, \dots, C_{s-1}$  を通過し最後に  $C_s := C_\emptyset$  の内部まで到達する. このとき  $C_{i-1}$  と  $C_i$  を隔てる壁を  $W_i$  とすると, ある  $\lambda_i \in \Lambda(G) \setminus \{0\}$  に対し  $W_i \subset (\lambda_i)^\perp$  かつ  $C_{i-1} \subset (\lambda_i)_{\leq 0}$  が成り立つ. ここで

$$Y_i := X^{\lambda_i}$$

とおき,  $G$  の指標  $\chi_i$  を  $W_i$  の相対内部からとる. さらに  $\gamma(0) = \omega_X^{-1}$  を満たすように  $\gamma$  をとったので  $x \in Y_i^{\text{ss}}(\chi_i)$  に対し,  $\mu_i := \mu(\omega_X^{-1}, \lambda_i, x) > 0$  となる. そこで定理 10.32 を適用すると半直交分解

$$\begin{aligned} & D^b([X^{\text{ss}}(C_{i-1})/G]) \\ &= \langle D^b([Y_i^{\text{ss}}(\chi_i)/G_{\lambda_i}]), \dots, D^b([Y_i^{\text{ss}}(\chi_i)/G_{\lambda_i}])(-\mu_i - 1), D^b([X^{\text{ss}}(C_i)/G]) \rangle \end{aligned}$$

が存在する. 各  $i$  に対して繰り返しこの半直交分解を使えば,

$$D^b([X^{\text{ss}}(\chi)/G]) = D^b([X^{\text{ss}}(C_0)/G])$$

の半直交分解

$$\begin{aligned} & \langle D^b([Y_1^{\text{ss}}(\chi_1)/G_{\lambda_1}]), \dots, D^b(Y_1^{\text{ss}}(\chi_1)/G_{\lambda_1})(-\mu_1 - 1), \\ & \dots, D^b([Y_s^{\text{ss}}(\chi)/G_{\lambda_s}]), \dots, D^b([Y_s^{\text{ss}}(\chi_s)/G_{\lambda_s}])(-\mu_s - 1) \rangle \end{aligned}$$

が得られる. 一方, 帰納法の仮定から各  $D^b([Y_i^{\text{ss}}(\chi_i)/G_{\lambda_i}])$  は例外生成列を持つから  $D^b([X^{\text{ss}}(\chi)/G])$  も例外生成列を持つことがわかる.  $\square$

## 10.6 特異点の三角圏と GIT

この節では特異点の三角圏と連接層の導來圏を関係付けた定理 8.21 を定理 10.22 から導こう. まず  $n \geq c$  に対し,

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \quad CC[\mathbf{u}] := \mathbb{C}[u_1, \dots, u_c], \quad CC[\mathbf{x}, \mathbf{u}] := \mathbb{C}[\mathbf{x}][u_1, \dots, u_c]$$

とおき, さらに  $\mathbb{G}_m$  の環  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$  への作用を考え, この作用による次数を  $\deg x_i = 1$ ,  $\deg u_i = -d_i < 0$  と定める.  $i = 1, \dots, c$  に対し,  $f_i = f_i(\mathbf{x})$  を  $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$  の次数  $d_i$  の齊次な元であって, さらに  $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_c(\mathbf{x})$  は完全交叉であるとし,

$$R := \mathbb{C}[\mathbf{x}] / (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_c(\mathbf{x}))$$

とおく. 上の  $\mathbb{G}_m$  の作用に加えて,  $\mathbb{G}_m$  の  $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$  への新たな作用を考え, この

作用に関しては、 $\deg x_i = 0$ ,  $\deg u_i = 1$  であるとしよう。

また

$$w := u_1 f_1(\mathbf{x}) + \cdots + u_c f_c(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$$

とし

$$\begin{aligned} X &:= \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \mathbb{A}^{n+c}, & V(\mathbf{u}) &:= \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{A}^n, \\ V(\mathbf{x}) &:= \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{u}] = \mathbb{A}^c \end{aligned}$$

と定める。上で述べたことから  $\mathbb{G}_m^2$  の  $X$  への作用は次のように定まっている：

$(t, s) \in \mathbb{G}_m^2$ ,  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_c) \in X$  に対し、

$$(t, s) \cdot (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_c) := (tp_1, \dots, tp_n, t^{-d_1}sq_1, \dots, t^{-d_c}sq_c)$$

$\mathbb{G}_m^2$  の指標  $\chi_1, \chi_2$  を

$$\chi_1: \mathbb{G}_m^2 \rightarrow \mathbb{G}_m \quad (t, s) \mapsto t, \quad \chi_2: \mathbb{G}_m^2 \rightarrow \mathbb{G}_m \quad (t, s) \mapsto s$$

と定める。このとき次が成り立つ。

### 補題 10.34 三角圏の同値

$$\Phi: D^b(\text{gr } R) \rightarrow \text{DCoh}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$$

が存在し、 $\Phi$  の制限によって同値

$$D^b(\text{tors } R) \cong \text{DCoh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2], w), \quad \mathfrak{Perf} R \cong \text{DCoh}_{V(\mathbf{u})}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$$

が導かれる。

証明 Isik と Shipman による定理 8.33において、 $V(\mathbf{u})$  上の局所自由層を  $\mathcal{E} := \bigoplus_{i=1}^c \mathcal{O}_{V(\mathbf{u})}(d_i \chi_1)$  とし、その正則切断

$$s = (f_1, \dots, f_c) \in \Gamma(\mathbb{A}^n, \bigoplus_{i=1}^c \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(d_i \chi_1))^{\mathbb{G}_m} \cong \Gamma(V(\mathbf{u}), \mathcal{E})^{\mathbb{G}_m}$$

をとる（式 (10.5) 参照）と、 $V(\mathcal{E}) \cong X$  となり、 $s$  の定める  $V(\mathbf{u})$  の部分多様体は  $\text{Spec } R$  となる。

$$\begin{array}{ccc} V(\mathcal{E}|_{\text{Spec } R}) & \xhookrightarrow{i} & V(\mathcal{E}) \cong X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & V(\mathbf{u}) = \mathbb{A}^n \end{array}$$

すると定理8.33から、ある  $w \in \Gamma^0(X, \mathcal{O}_X)^{\mathbb{G}_m^2}$  が存在し、 $D^b([\text{Spec } R/\mathbb{G}_m]) \cong \text{DCoh}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$  が得られるが、 $\text{Coh}([\text{Spec } R/\mathbb{G}_m]) \cong \text{gr } R$  であるから、三角圏の同値  $\Phi$  を得る。さらに閉点  $p \in \text{Spec } R$  に対し、

$$\Phi(\mathcal{O}_p(l)) = (0 \rightarrow i_* \pi^* \mathcal{O}_p(l) \rightarrow 0) \cong (0 \rightarrow \mathcal{O}_{V(\mathbf{x})}(l\chi_1) \rightarrow 0)$$

であり、また

$$\Phi(R(l)) = (0 \rightarrow i_* \pi^* R(l) \rightarrow 0) \cong (0 \rightarrow \mathcal{O}_{V(\mathbf{u})}(l\chi_1) \rightarrow 0)$$

である。

[BDF<sup>+</sup>16, Corollary 2.29] より、 $\text{DCoh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$  は

$$\{(0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0) : \mathcal{F} \in \text{Coh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2])\}$$

で古典的に生成される。<sup>13</sup> また  $\text{Coh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2])$  の対象は  $\text{Coh}([V(\mathbf{x})/\mathbb{G}_m^2])$  の対象にフィルトレーションがとれる。さらに任意の  $\text{Coh}([V(\mathbf{x})/\mathbb{G}_m^2])$  の対象は、その  $\mathbb{G}_m^2$ -同変局所自由解消（実際は  $V(\mathbf{x}) \cong \mathbb{A}^c$  上の有限階数の  $\mathbb{G}_m^2$ -同変局所自由層は有限直和  $\bigoplus_i \mathcal{O}_{V(\mathbf{x})}(l_i\chi_1)$  の形である）をとることで各項が  $\bigoplus_i \mathcal{O}_{V(\mathbf{x})}(l_i\chi_1)$  の形の有界複体と擬同型であることがわかるから、結局  $\text{DCoh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$  は対象  $(0 \rightarrow \mathcal{O}_{V(\mathbf{x})}(l\chi_1) \rightarrow 0)$  で古典的に生成されるので  $D^b(\text{tors } R) \cong \text{DCoh}_{V(\mathbf{x})}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$  が得られる。同値  $\mathfrak{Perf } R \cong \text{DCoh}_{V(\mathbf{u})}([X/\mathbb{G}_m^2], w)$  に関しても同様に証明できる。□

$\mathbb{G}_m^2$  の 1-PS

$$\lambda: \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m^2 \quad t \mapsto (t, 1)$$

に対し、 $\mathbf{0}$  を  $X = \mathbb{A}^{n+c}$  の原点とする

$$Z_\lambda^0 = Z_{-\lambda}^0 = \{\mathbf{0}\}, \quad S_\lambda = Z_\lambda = V(\mathbf{u}), \quad S_{-\lambda} = Z_{-\lambda} = V(\mathbf{x})$$

が成り立ち、そこで  $X_+ = X \setminus V(\mathbf{u})$ ,  $X_- = X \setminus V(\mathbf{x})$  とおくと基本壁越え

<sup>13</sup> [BDF<sup>+</sup>16, Corollary 2.29] にあるように実際は直和因子をとる操作も必要もない。

$$\mathfrak{K}^+ : X = X_+ \coprod S_\lambda, \quad \mathfrak{K}^- : X = X_- \coprod S_{-\lambda}$$

が存在する.  $Y := \text{Proj } R$  と定めると次を得る.

**補題 10.35** 三角圏の同値

$$D^b(Y) \cong \text{DCoh}([X_-/\mathbb{G}_m^2], w|_{X_-}), \quad D_{\mathbf{S}\mathbf{g}}^{\text{gr}}(R) \cong \text{DCoh}([X_+/\mathbb{G}_m^2], w|_{X_+})$$

が存在する.

**証明** 式 (8.35) で見たように

$$\text{DCoh}([X/\mathbb{G}_m^2], w) / \text{DCoh}_{V(\varpi)}([X/\mathbb{G}_m^2], w) \cong \text{DCoh}([X_-/\mathbb{G}_m^2], w|_{X_-})$$

$$\text{DCoh}([X/\mathbb{G}_m^2], w) / \text{DCoh}_{V(u)}([X/\mathbb{G}_m^2], w) \cong \text{DCoh}([X_+/\mathbb{G}_m^2], w|_{X_+})$$

が成り立つ. 一方 Serre の定理 (8.3 節, 注意 8.4 参照) から  $D^b(\text{gr } R) / D^b(\text{tors } R) \cong D^b(Y)$  であり, また定義から  $D_{\mathbf{S}\mathbf{g}}^{\text{gr}}(R) = D^b(\text{gr } R) / \mathfrak{P}\mathfrak{erf } R$  が成り立つので補題 10.34 から主張を得る.  $\square$

$$\begin{aligned} \omega_{S_\lambda/X}^{-1} &= \bigwedge^{\text{codim } S_\lambda} (I_{S_\lambda}/I_{S_\lambda}^2) = \mathcal{O}_{S_{-\lambda}}((\sum d_i)\chi_1 - \chi_2) \\ \omega_{S_{-\lambda}/X}^{-1} &= \bigwedge^{\text{codim } S_{-\lambda}} (I_{S_{-\lambda}}/I_{S_{-\lambda}}^2) = \mathcal{O}_{S_\lambda}(-n\chi_1) \end{aligned}$$

となることから

$$t(\mathfrak{K}^+) = \mu(\omega_{S_\lambda/X}^{-1}, \lambda, x) = - \left\langle (\sum d_i)\chi_1 - \chi_2, \lambda \right\rangle = - \sum d_i$$

$$t(\mathfrak{K}^-) = \mu(\omega_{S_{-\lambda}/X}^{-1}, -\lambda, x) = - \left\langle -n\chi_1, -\lambda \right\rangle = -n$$

が成り立つ. したがって  $\mu = -t(\mathfrak{K}^+) + t(\mathfrak{K}^-) = \sum d_i - n$  であり,  $R$  の Gorenstein パラメーター  $a = n - \sum d_i$  と逆符号になっていることに注意する.

以上の準備から定理 8.21 の証明を与えよう.

**証明** まず  $a \geq 0$  とすると定理 10.22 から充満忠実関手

$$\Phi_0^- : \text{DCoh}([X_+/G], w|_{X_+}) \hookrightarrow \text{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-})$$

と, さらに  $-t(\mathfrak{K}^+) \leq j \leq -t(\mathfrak{K}^-) - 1$  を満たす整数  $j$  に対し, 充満忠実関手

$$\Upsilon_j^- : \text{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda)_j \hookrightarrow \text{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-})$$

と半直交分解

$$\mathrm{DCoh}([X_-/G], w|_{X_-}) = \langle \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^+)}^-, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^+)+1}^-, \dots, \Upsilon_{-t(\mathfrak{K}^-)-1}^-, \Phi_0^- \rangle$$

が存在する。ここで系 8.34 を用いて

$$\mathrm{DCoh}([Z_\lambda^0/C(\lambda)], w_\lambda) \cong \mathrm{DCoh}([\{\mathbf{0}\}/\mathbb{G}_m], 0) \cong D^b(\mathrm{Spec} \mathbb{C})$$

であり、また  $\Upsilon_j^-$  によって、点  $\mathbf{0} \in X$  の構造層  $\mathcal{O}_0$  は  $(0 \rightarrow \mathcal{O}_{V(\mathbf{u})}(j\chi_1) \rightarrow 0)$  に移り、さらに補題 10.35 で与えられた同値によりこれは  $\mathcal{O}_Y(j)$  に移る。補題 10.35 を使えば、半直交分解

$$D^b(Y) = \langle \mathcal{O}_Y(-a+1), \mathcal{O}_Y(-a+2), \dots, \mathcal{O}_Y, D_{\mathbf{Sg}}^{\mathrm{gr}}(R) \rangle$$

が得られる。

$a < 0$  の場合もまったく同様である。  $\square$

# 第11章 Bridgeland安定性条件

5章で連接層のモジュライ空間を考察したように、連接層の導來圏の対象のモジュライ空間を考察するのは自然な考え方である。5章でモジュライ空間を構成するには安定性条件が必要だったように、導來圏や三角圏に対して安定性条件の概念を拡張する必要がある。そのような安定性条件の概念は Bridgeland [Bri07] によって導入された。驚くべきことに、Bridgeland が導入した安定性条件全体の集合には複素多様体の構造が入る。この安定性条件の空間はミラー対称性の観点から重要な概念であるが、双有理幾何学や次章で解説する Donaldson–Thomas 不変量との関係においても非常に重要である。

この章で考える三角圏や Abel 圏は、本質的に小さい圏であると仮定しておく。その結果、例えば、その Grothendieck 群を考えることができる。

射影的代数多様体  $X$  と  $B + iC \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{C}}$  に対し、

$$\begin{aligned} e^{B+iC} &:= \exp(B+iC) \\ &= 1 + (B+iC) + \frac{1}{2}(B+iC)^2 + \frac{1}{3!}(B+iC)^3 + \cdots \in H^{2*}(X, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

と定める。

## 11.1 Abel 圏の安定性条件

まず、滑らかな射影的代数曲線  $C$  上の安定層の定義 5.2 を圏論的に解釈しなおそう。 $C$  の Grothendieck 群  $K(C)$  から  $\mathbb{C}$  への群準同型  $Z$  を

$$Z: K(C) \rightarrow \mathbb{C} \quad E \mapsto -\deg(E) + i \operatorname{rank}(E) \tag{11.1}$$

で定める。このとき、任意の  $0 \neq E \in \mathrm{Coh}(C)$  に対して

$$Z(E) \in \mathbb{H} := \{re^{i\pi\phi} : r > 0, 0 < \phi \leq 1\}$$

が成り立つ。ここで  $\mathbb{H}$  は複素平面における通常の上半平面と  $\mathbb{R}_{<0}$  の和集合であることに注意されたい。すると、 $E \in \text{Coh}(C)$  が（半）安定であることと、任意の部分層  $0 \neq F \subsetneq E$  に対して  $\arg Z(F) < (\leq) \arg Z(E)$  となることが同値になる。ただし、 $\arg Z(*)$  は  $(0, \pi]$  に値を持つとしている。以上を一般化して、次の定義を得る：

**定義 11.1** Abel 圈  $\mathcal{A}$  上の安定性条件 (stability condition) とは群準同型

$$Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

であって、次の 2 条件を満たすものである。

- 任意の  $0 \neq E \in \mathcal{A}$  に対して、 $Z(E) \in \mathbb{H}$  が成り立つ。
- 任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して HN フィルトレーションが存在する。つまり、 $\mathcal{A}$  におけるフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

で、各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  が  $Z$  について半安定であり、 $\arg Z(F_i) > \arg Z(F_{i+1})$  が成立する。

ここで  $0 \neq E \in \mathcal{A}$  が  $Z$ -（半）安定 ( $Z$ -(semi)stable) であるとは、任意の部分対象  $0 \neq F \subsetneq E$  に対して  $\arg Z(F) < (\leq) \arg Z(E)$  が成立するものとして定義する。

明らかに、群準同型 (11.1) は  $\text{Coh}(C)$  上の安定性条件を定める。また問題 5.6 と同様に、HN フィルトレーションは存在するならば同型を除いて一意的に定まる。

与えられた群準同型に対して HN フィルトレーションの存在を示すには、次の補題を用いると便利である。

**補題 11.2**  $\mathcal{A}$  を Abel 圈とし、群準同型  $Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  が任意の  $0 \neq E \in \mathcal{A}$  に対して  $Z(E) \in \mathbb{H}$  を満たすとする。このとき、次の条件が成立すると  $Z$ -安定性に関する HN フィルトレーションが存在し、したがって  $Z$  は安定性条件を定める。

- $\mathcal{A}$  における全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_i \twoheadrightarrow E_{i+1} \twoheadrightarrow \cdots$$

で  $\arg Z(E_i) > \arg Z(E_{i+1})$  となるものは存在しない.

- $\mathcal{A}$  における無限降下列

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_i \supset E_{i+1} \supset \cdots$$

で  $\arg Z(E_{i+1}) > \arg Z(E_i)$  となるものは存在しない.

証明 定理 5.5 の証明をそのまま当てはめることができる.  $\square$

**例 11.3**  $A$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元代数とし,  $\mathcal{A} := \text{mod } A$  とする. このとき, 有限個の単純対象  $S_1, \dots, S_k \in \mathcal{A}$  が存在して  $K(\mathcal{A})$  は  $[S_i]$  たちで生成される自由 Abel 群になる (定理 B.5). 各  $1 \leq j \leq k$  に対して  $z_j \in \mathbb{H}$  を選び,  $Z: K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  を  $Z([S_j]) = z_j$  となるように定める. すると,  $Z$  は  $\mathcal{A}$  上の安定性条件を定める.  $E \in \mathcal{A}$  は有限次元ベクトル空間であることに注意すれば, HN フィルトレーションの存在は補題 11.2 から直ちに従う.

## 11.2 三角圏の安定性条件

前節の Abel 圏の安定性条件を拡張することで, 三角圏の安定性条件は次のように与えられる.

**定義 11.4**  $\mathcal{D}$  を三角圏とする.  $\mathcal{D}$  上の安定性条件 (stability condition) とは,  $\mathcal{D}$  の有界な t-構造の核  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  と  $\mathcal{A}$  上の安定性条件

$$Z: K(\mathcal{D}) = K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

の組  $(Z, \mathcal{A})$  のことである. ここで, 問題 7.7(ii) を用いて,  $K(\mathcal{D})$  と  $K(\mathcal{A})$  を同一視した.

三角圏の安定性条件  $(Z, \mathcal{A})$  が与えられると, 各実数  $\phi \in \mathbb{R}$  に対して  $\mathcal{D}$  における位相 (phase) が  $\phi$  の半安定対象たちを定めることができる (位相という用語については注意 11.7 を参照). これを見るために, 次の定義を与える.

**定義 11.5** 三角圏  $\mathcal{D}$  におけるスライス (slice) とは, 部分圏の族  $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ ,  $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$  であって, 次の条件を満たすものである.

- 任意の  $\phi \in \mathbb{R}$  に対して,  $\mathcal{P}(\phi + 1) = \mathcal{P}(\phi)[1]$  が成り立つ.

- $\phi_1 > \phi_2$  で  $E_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$  ならば,  $\text{Hom}(E_1, E_2) = 0$  である.
- 任意の対象  $E \in \mathcal{D}$  に対して, 非負整数  $n$ , 実数列  $\phi_1 > \phi_2 > \dots > \phi_n$ , および完全三角形の列

$$0 = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n = E \quad (11.2)$$

が存在して, 各  $i$  に対して  $F_i \in \mathcal{P}(\phi_i)$  となる.

スライスにおける完全三角形の列 (11.2) は HN フィルトレーションの三角圏における類似物である. 問題 5.6 と同様に, 完全三角形の列 (11.2) も同型を除いて一意的に定まることが示される. そこで  $E \in \mathcal{D}$  とスライス  $\mathcal{P}$  に対し,

$$\phi_{\mathcal{P}}^+(E) := \phi_1, \quad \phi_{\mathcal{P}}^-(E) := \phi_n$$

と定義することができる. また区間  $I \subset \mathbb{R}$  に対して,

$$\mathcal{P}(I)(\subset \mathcal{D})$$

を  $\{\mathcal{P}(\phi) : \phi \in I\}$  たちの  $\mathcal{D}$  における拡大閉包とする. また区間  $J = [\phi, \infty)$  などに対し,  $\mathcal{P}(J)$  の代わりに  $\mathcal{P}(\geq \phi)$  と書くこともある.

次の補題が成立する.

**補題 11.6** 三角圏  $\mathcal{D}$  上に安定性条件を与えることと,  $\mathcal{D}$  上のスライス  $\mathcal{P}$  と群準同型  $Z: K(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  の組  $(Z, \mathcal{P})$  で, 任意の  $\phi \in \mathbb{R}$  と  $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対して  $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$  を満たすものを与えることは同値である.

**証明** まず,  $\mathcal{D}$  上の安定性条件  $(Z, \mathcal{A})$  から出発してスライス  $\mathcal{P}$  を構成する. 各  $0 < \phi \leq 1$  に対して,

$$\mathcal{P}(\phi) := \{E \in \mathcal{A} : E \text{ は } Z\text{-半安定で } Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}\} \cup \{0\}$$

と定める. 任意の  $\phi \in \mathbb{R}$  に対し,  $\phi \in (k, k+1]$  となる整数  $k$  をとって

$$\mathcal{P}(\phi) := \mathcal{P}(\phi - k)[k]$$

と定める. このように定めた部分圏  $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$  たちがスライスを定めることは簡単な演習問題である. さらに構成から  $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対して  $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$

を満たしている。

逆に、補題の性質を満たす組  $(Z, \mathcal{P})$  が与えられたとする。このとき、部分圏  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  を  $\mathcal{A} =: \mathcal{P}((0, 1])$  とすれば、組  $(Z, \mathcal{A})$  は安定性条件を定めることが容易にわかる。□

補題 11.6 の条件を満たす組  $\sigma = (Z, \mathcal{P})$  も安定性条件と呼ぶことにする。群準同型  $Z$  は中心電荷 (central charge)、 $\mathcal{P}(\phi)$  の対象は位相  $\phi$  の半安定対象 (semistable objects with phase  $\phi$ ) と呼ばれている。また問題 11.8 により  $\mathcal{P}(\phi)$  は Abel 圈であるため、特に  $\mathcal{P}(\phi)$  における単純対象の概念が定まる。(つまり、 $E \in \mathcal{P}(\phi)$  が単純対象であるとは非自明な部分対象  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  が存在しないものとして定義される。) $\mathcal{P}(\phi)$  の単純対象は位相  $\phi$  の安定対象 (stable objects with phase  $\phi$ ) と呼ばれている。 $0 < \phi \leq 1$  なら、これらは Abel 圈  $\mathcal{P}((0, 1])$  上の  $Z$ - (半) 安定対象と一致している。

**注意 11.7** 上述の安定性条件の定義は Bridgeland [Bri07] によるものである。これは物理における Douglas の  $\Pi$ -安定性の概念 [Dou01, Dou02] を数学的に定式化したものである。「中心電荷」や「位相  $\phi$ 」といった用語は物理に由来するものである。

**問題 11.8** 安定性条件  $\sigma = (Z, \mathcal{P})$  および  $\phi \in \mathbb{R}$  に対し、部分圏  $\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{D}$  は自然に Abel 圈の構造を持つことを示せ。

### 11.3 安定性条件の空間

$\mathcal{D}$  を三角圏とし、 $\text{Slice}(\mathcal{D})$  を  $\mathcal{D}$  上のスライスの集合とする。<sup>1</sup>  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \text{Slice}(\mathcal{D})$  に対して、 $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in [0, \infty]$  を

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \sup_{0 \neq E \in \mathcal{D}} \{|\phi_{\mathcal{P}}^-(E) - \phi_{\mathcal{Q}}^-(E)|, |\phi_{\mathcal{P}}^+(E) - \phi_{\mathcal{Q}}^+(E)|\}$$

と定義する。 $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  は ( $\infty$ を取りうるという点を除いて) 距離空間の公理を明らかに満たし、特に  $\text{Slice}(\mathcal{D})$  は位相空間となる。

**問題 11.9**  $E \in \mathcal{D}$  に対して定まる  $\text{Slice}(\mathcal{D})$  上の 2 つの写像

$$\phi_*^+(E), \phi_*^-(E): \text{Slice}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$$

---

<sup>1</sup>  $\mathcal{D}$  は本質的に小さい圏なので、これは集合となる。

は連続写像であることを示せ。特に、 $E \in \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{P}(\phi)$  となる  $\mathcal{P} \in \text{Slice}(\mathcal{D})$  は  $\text{Slice}(\mathcal{D})$  の閉集合である。

ここで有限生成自由 Abel 群  $\Gamma$  と  $\Gamma_{\mathbb{R}} := \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  上のノルム  $\|*\|$ 、そして群準同型

$$\text{cl}: K(\mathcal{D}) \rightarrow \Gamma$$

を固定する。以降、群準同型  $Z: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  は  $\text{cl}$  と合成して群準同型  $K(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  と解釈することにする。また  $E \in \mathcal{D}$  に対し、

$$Z(E) := Z(\text{cl}[E])$$

と書く。

**注意 11.10** このような  $\Gamma$  と  $\text{cl}$  を用意する理由は  $K(\mathcal{D})$  が一般には有限生成ではないためである。例えば例 11.3 の状況では  $K(\mathcal{D})$  が有限生成自由 Abel 群なので  $\Gamma = K(\mathcal{D})$ ,  $\text{cl} = \text{id}$  とおけばよい。しかし  $\mathcal{D}$  が代数多様体上の連接層の導來圏の場合には多くの状況で  $K(\mathcal{D})$  が無限生成となる。そのため、この場合は  $\Gamma$  を  $\text{ch}: K(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  の像とおき、 $\text{cl} = \text{ch}$  とおいて議論することが多い。

**定義 11.11** 部分集合

$$\text{Stab}_{\Gamma}(\mathcal{D}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C}) \times \text{Slice}(\mathcal{D})$$

を安定性条件の組  $(Z, \mathcal{P})$  で、次の条件（台条件 (support property) と呼ばれる）を満たすものとする。

$$\sup \left\{ \frac{\|\text{cl}(E)\|}{|Z(E)|} : 0 \neq E \in \bigcup_{\phi \in \mathbb{R}} \mathcal{P}(\phi) \right\} < \infty.$$

**注意 11.12**  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  は有限次元ベクトル空間であるため、その上のノルムは同値類を除いて一意的に定まる。よって台条件は  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  のノルムの取り方に依存しない。

**注意 11.13** 台条件は Bridgeland の原論文 [Bri07] にはなかった条件である。この条件を課さないと、後に述べる定理 11.17 は  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$  のある線形部分空間上でしか成立しなくなる。台条件は後に Kontsevich-Soibelman [KS] によって与えられたものである。

**問題 11.14** 群準同型 (11.1) から定まる安定性条件は台条件を満たすことを示せ。

**問題 11.15** 台条件を用いて、次を示せ。 $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  および  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対し、(一意的とは限らない)  $\mathcal{P}(\phi)$  におけるフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

が存在して、各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  は  $\mathcal{P}(\phi)$  における単純対象（よって  $\sigma$ -安定対象）となる。さらに、 $\bigoplus_{i=1}^k F_i$  は一意的である。このフィルトレーションは **Jordan–Hölder フィルトレーション** (Jordan–Hölder filtration) と呼ばれる。

次の捕題は台条件を示すときに有用である。

**補題 11.16 ([BMS16, Lemma A.4])** 安定性条件  $(Z, \mathcal{P})$  が台条件を満たすことと、 $\Gamma$  上の 2 次形式  $Q$  であって次の条件を満たすものが存在することが同値である。

- (i) 任意の  $\phi \in \mathbb{R}$  と  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対し、 $Q(\text{cl}(E)) \geq 0$ 。
- (ii)  $Q|_{\text{Ker}(Z)}$  は負定値。

**証明** まず安定性条件  $(Z, \mathcal{P})$  が台条件を満たすとする。するとある定数  $C > 0$  が存在して任意の  $0 \neq E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対して  $\|\text{cl}(E)\| \leq C|Z(E)|$  となる。そこで  $\Gamma$  上の 2 次形式  $Q$  を

$$Q(v) = C|Z(v)|^2 - \|v\|^2$$

と定めると、 $Q$  は条件 (i), (ii) を満たしている。

逆に、条件 (i), (ii) を満たす  $\Gamma$  上の 2 次形式  $Q$  が存在したと仮定する。すると  $\Gamma$  上の非負 2 次形式  $-|Z(v)|^2$  は  $-Q(v) \leq 0$  となる領域において正定値となる。よって  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  における単位球のコンパクト性より 2 次形式

$$C^2|Z(v)|^2 - Q(v)$$

は正定値となる。 $\Gamma_{\mathbb{R}}$  に上の 2 次形式から定まるノルムを入れ、注意 11.12 にも気を付けると  $(Z, \mathcal{P})$  が台条件を満たすことがわかる。□

部分集合  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  に  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$  と  $\text{Slice}(\mathcal{D})$  から誘導される位相を入れ、これによって  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  を位相空間とみなす。次が Bridgeland によって示された三角圏の安定性条件の理論の基本定理である。

**定理 11.17 ([Bri07, Theorem 1.2])** 忘却写像

$$\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C}) \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z \quad (11.3)$$

は局所同相写像である。特に  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  には  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$  の標準的な複素構造に関して (11.3) が正則写像になるような複素構造が一意的にに入る。

**証明** まず、写像 (11.3) が局所的に単射であることを示す。 $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の 2 点  $\sigma = (Z, \mathcal{P})$  と  $\tau = (Z, \mathcal{Q})$  が  $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < 1$  を満たすなら  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$  となることを示せばよい。背理法により、 $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$  であると仮定する。このとき、ある  $\phi \in \mathbb{R}$  と  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  が存在して  $E \notin \mathcal{Q}(\phi)$  となる。このとき  $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$  であること注意する。

仮に  $E \in \mathcal{Q}(\geq \phi)$  となるとする。すると、 $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < 1$  より  $E \in \mathcal{Q}([\phi, \phi + 1])$  となり、 $E \notin \mathcal{Q}(\phi)$  であったことと合わせると  $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} e^{i\pi\phi}$  に矛盾する。よって  $E \notin \mathcal{Q}(\geq \phi)$  である。同様の議論で、 $E \notin \mathcal{Q}(\leq \phi)$  もいえる。したがって、完全三角形

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1]$$

で  $0 \neq A \in \mathcal{Q}((\phi, \phi+1))$ ,  $0 \neq B \in \mathcal{Q}((\phi-1, \phi])$  となるものがとれる。 $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < 1$  より  $A \in \mathcal{P}((\phi-1, \phi+2))$  となるが、さらにもし  $A \in \mathcal{P}((\phi-1, \phi])$  であるならば  $\sigma$  と  $\tau$  が同じ中心電荷を持つことに矛盾する。よって  $\psi > \phi$  と  $C \in \mathcal{P}(\psi)$  および 0 ではない射  $C \rightarrow A$  が存在することになる。すると合成射  $C \rightarrow A \rightarrow E$  は  $\mathcal{P}(\psi)$  の対象から  $\mathcal{P}(\phi)$  の対象への射であるから 0 射となるため、 $C \rightarrow A$  は  $C \rightarrow B[-1] \rightarrow A$  と分解する。しかし、 $B[-1] \in \mathcal{P}(< \phi)$  であるため  $C$  から  $B[-1]$  への 0 ではない射は存在しない。よってこれは矛盾であり、 $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$  が結論付けられる。

次に、写像 (11.3) が局所的に全射であることの証明の概略を与える。 $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  をとる。 $\sigma$  の台条件から、定数  $C > 0$  が存在して任意の  $W \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$  および  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対して

$$\frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} \leq C \cdot \left| \frac{Z(E)}{\|\text{cl}(E)\|} - \frac{W(E)}{\|\text{cl}(E)\|} \right|$$

が成り立つ。 $\text{cl}(E)/\|\text{cl}(E)\|$  はコンパクト集合  $\{x \in \Gamma_{\mathbb{R}} : \|x\| = 1\}$  に属することから次が従う：任意の  $0 < \varepsilon < 1/8$  に対して  $Z$  の  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$  における開近傍  $U$  が存在して、任意の  $W \in U$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  に対して

$$\frac{|Z(E) - W(E)|}{|Z(E)|} < \sin \pi \varepsilon$$

が成立する。このことから、 $0 < b - a < 1 - 2\varepsilon$  となる  $a, b$  と  $E \in \mathcal{P}((a, b))$  に対して、 $\arg W(E) \in (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$  がただ 1 つ定まる。そこで  $E \in \mathcal{P}((a, b))$  が任意の完全三角形

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1] \quad (A, B \in \mathcal{P}((a, b)))$$

に対して  $\arg W(A) \leq \arg W(E)$  が成り立つとき、 $E$  を  $W$ -半安定と呼ぶことにする。各  $\psi \in \mathbb{R}$  に対して、 $a + \varepsilon < \psi < b - \varepsilon$ かつ  $0 < b - a < 1 - 2\varepsilon$  となる  $a, b$  を選び、部分圏  $\mathcal{Q}(\psi) \subset \mathcal{D}$  を

$$\mathcal{Q}(\psi) := \{E \in \mathcal{P}((a, b)) : E \text{ は } W\text{-半安定で } \arg W(E) = \pi\psi\}$$

と定める。このとき、次が証明される。

- $\mathcal{Q}(\psi)$  は  $a, b$  の取り方に依存しない ([Bri07, Lemma 7.5]).
- $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$  が  $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \varepsilon$  を満たす  $\mathcal{D}$  のスライスを与える、 $\tau = (W, \mathcal{Q}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  となる ([Bri07, Lemma 7.6, 7.7]).

これらにより、写像 (11.3) が局所的に全射であることがわかる。さらに  $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \varepsilon$  であることから写像 (11.3) が開写像となることが従い、よって (11.3) は局所同相写像となる。□

**定義 11.18**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし、 $\text{ch}: K(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  に対し、 $(\Gamma, \text{cl}) = (\text{Im}(\text{ch}), \text{ch})$  とする。このとき

$$\text{Stab}(X) := \text{Stab}_\Gamma(D^b(X))$$

とおき、 $\text{Stab}(X)$  を  $X$  上の安定性条件の空間 (space of stability conditions) と呼ぶ。 $\sigma \in \text{Stab}(X)$  をしばしば、 $X$  上の安定性条件と呼ぶ。

具体例での  $\text{Stab}(X)$  の記述を述べる前に、安定性条件の空間  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への 2 種類の自然な群作用について解説する。まず、 $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  を行列式が正となる行列からなる  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  の部分群とする。これは  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  の連結成分の 1 つであり、その基本群は  $\mathbb{Z}$  と同型である。 $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  の普遍被覆

$$\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$$

を考える。

**問題 11.19**  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  は  $A \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  と単調増加関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  の組

$(A, f)$  で、次の条件を満たすものの集合であることを示せ。

- すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x+1) = f(x) + 1$ .
- 同一視  $S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\})/\mathbb{R}_{>0}$  によって  $f$  と  $A$  が  $S^1$  に誘導する写像は等しい。

$\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  と  $(A, f) \in \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  に対して、新たな安定性条件を

$$\sigma \cdot (A, f) := (A^{-1} \circ Z, \{\mathcal{P}(f(\phi))\}_{\phi \in \mathbb{R}})$$

で定める。ここで  $\mathbb{C}$  を  $\mathbb{R}^2$  と同一視することで  $A^{-1}$  を  $\mathbb{C}$  に作用させている。これは、 $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  の  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への右作用を定め、この作用で半安定対象たちは不変である。また、 $\mathbb{C}^*$  は  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  に複素数の通常の掛け算で作用するので、これは  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  の部分群とみなせる。よって  $\mathbb{C}^*$  の普遍被覆  $\mathbb{C}$  は  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  の部分群となる。具体的には、問題 11.19 による同一視の下で埋め込み  $\mathbb{C} \hookrightarrow \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  は

$$\lambda \mapsto (e^{\pi i \lambda}, f: x \mapsto x + \text{Re}(\lambda))$$

で与えられる。特に  $\mathbb{C}$  の  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への右作用は

$$\sigma \cdot \lambda = (e^{-\pi i \lambda} Z, \{\mathcal{P}(\phi + \text{Re}(\lambda))\}_{\phi \in \mathbb{R}}) \quad (11.4)$$

となる。

次に  $\mathcal{D}$  の自己同値群 (group of autoequivalences)  $\text{Auteq}(\mathcal{D})$  の作用について解説しよう。ここで自己同値群は

$$\text{Auteq}(\mathcal{D}) := \{\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} : \Phi \text{ は三角圏としての同値を与える三角関手}\} / \cong$$

と定義され、関手の合成によって自然な群構造を持つ。右辺の  $\cong$  は自然同型な関手を同一視するという同値関係を意味している。 $\text{Auteq}(\mathcal{D})$  の  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への作用を与えるために、次の追加の仮定をおく：群準同型

$$\alpha: \text{Auteq}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

が存在して、各  $\Phi \in \text{Auteq}(\mathcal{D})$  に対して図式

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{D}) & \xrightarrow{\Phi} & K(\mathcal{D}) \\ \text{cl} \downarrow & & \downarrow \text{cl} \\ \Gamma & \xrightarrow{\alpha(\Phi)} & \Gamma \end{array}$$

が可換になる。

**問題 11.20**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とし,  $\mathcal{D} = D^b(X)$  とする。さらに  $(\Gamma, \text{cl}) = (\text{Im}(\text{ch}), \text{ch})$  とすると、上の条件を満たす群準同型  $\alpha$  が存在することを示せ。（ヒント：Grothendieck–Riemann–Roch の定理を用いる）。

上の仮定の下で、 $\Phi \in \text{Auteq}(\mathcal{D})$  と  $\sigma = (Z, \mathcal{P})$  に対して新たな安定性条件を

$$\Phi \cdot \sigma := (Z \circ \alpha(\Phi)^{-1}, \{\Phi(\mathcal{P}(\phi))\}_{\phi \in \mathbb{R}})$$

と定めると、これは  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への  $\text{Auteq}(\mathcal{D})$  の左作用を定める。この作用は  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  の右作用と可換である。

このように定めた  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  と  $\text{Auteq}(\mathcal{D})$  による  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  への作用は、 $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  を調べる際にしばしば有用である。

## 11.4 楕円曲線上の安定性条件の空間

$C$  を椭円曲線とし、この上の安定性条件の空間  $\text{Stab}(C)$  を考える。ここで  $(\Gamma, \text{cl}) = (\text{Im}(\text{ch}), \text{ch})$  は

$$\text{cl}: K(C) \rightarrow \Gamma = \mathbb{Z}^{\oplus 2} \quad [E] \mapsto (\text{rank}(E), \deg(E))$$

となる。11.1 節で述べたように、 $D^b(C)$  上には標準的な安定性条件

$$\sigma_0 = (Z_0, \text{Coh}(C)) \in \text{Stab}(C)$$

が存在する。ここで、 $Z_0: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  は  $(r, d) \mapsto -d + ir$  で与えられる群準同型であり、 $\text{cl}$  と合成することで群準同型 (11.1) と一致している。次の定理により、空間  $\text{Stab}(C)$  が完全に決定されることになる。

**定理 11.21** ([Bri07, Theorem 9.1])  $C$  を椭円曲線とする。すると  $\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  の右作用により定まる写像

$$\widetilde{\mathrm{GL}}^+(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Stab}(C), (f, A) \mapsto \sigma_0 \cdot (f, A) \quad (11.5)$$

は位相同型写像である。

証明はいくつかのステップに分ける。

**ステップ 1** 任意の直既約な対象  $0 \neq E \in \mathrm{Coh}(C)$  は、任意の  $\sigma \in \mathrm{Stab}(C)$  に対して  $\sigma$ -半安定である。

証明 もし  $E$  が  $\sigma$ -半安定でなければ、 $E$  の HN フィルトレーションを考えると、 $D^b(C)$  の 0 でない対象  $A, B$  で  $\mathrm{Hom}_C(A, B) = 0$  となるものと完全三角形

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1]$$

が存在する。Serre 双対性定理より

$$\mathrm{Hom}(B, A[1]) \cong \mathrm{Hom}(A, B)^\vee = 0$$

となるため、 $E \cong A \oplus B$  となり、 $E$  が直既約であることに矛盾する。□

**ステップ 2** 任意の  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \mathrm{Stab}(C)$  に対し、 $Z: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  は同型  $Z_{\mathbb{R}}: \Gamma_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$  を誘導する。

証明 背理法により、 $Z_{\mathbb{R}}$  が同型ではないと仮定する。このとき、 $Z_{\mathbb{R}}$  の像を含む直線  $l \subset \mathbb{R}^2$  が存在する。よって  $\sigma$  に付随する t-構造の核  $\mathcal{A} = \mathcal{P}((0, 1])$  は、ある  $\phi \in (0, 1]$  が存在して  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\phi)$  となる。このことと問題 11.15 により、 $\mathcal{A}$  は単純対象たちの拡大閉包として得られることがわかる。そこで、 $A, B \in \mathcal{A}$  を同型でない単純対象とする。このとき、 $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A) = 0$  であり、Serre 双対性定理より  $\mathrm{Ext}^1(A, B) = 0$  も得る。よって  $\chi(A, B) = 0$  となる。 $\mathrm{cl}(A), \mathrm{cl}(B)$  を

$$\mathrm{cl}(A) := (r_A, d_A), \mathrm{cl}(B) := (r_B, d_B)$$

とおくと、 $\chi(A, B) = 0$  と Hirzebruch–Riemann–Roch の定理 (4.2) より

$$r_A d_B - r_B d_A = 0$$

となる。これは  $\mathrm{cl}(A)$  と  $\mathrm{cl}(B)$  が  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  において比例することを意味する。 $\mathcal{A}$  は単純対象たちで生成されているので、このことから任意の  $A, B \in D^b(C)$  に対して  $\mathrm{cl}(A)$  と  $\mathrm{cl}(B)$  が比例することになる。一方、 $\mathrm{cl}: K(C) \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus 2}$  は全射なので、

これは矛盾である.  $\square$

**ステップ3** 任意の  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}(C)$  に対し、同型  $Z_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  は向きを保つ.

**証明**  $A, B \in \text{Pic}(C)$  を  $\deg(A) < \deg(B)$  となるようにとる. ステップ1より、 $A, B$  は  $\sigma$ -半安定であり、よってある  $\phi, \psi \in \mathbb{R}$  が存在して  $A \in \mathcal{P}(\phi)$ ,  $B \in \mathcal{P}(\psi)$  となる. ここで  $\deg$  の仮定から

$$0 \neq \text{Hom}(A, B) \cong \text{Hom}(B, A[1])^{\vee}$$

となるため、 $\phi \leq \psi \leq \phi + 1$  を得る. これは  $Z_{\mathbb{R}}$  が向きを保つことを意味する.  $\square$

**ステップ4** 写像 (11.5) は全単射である.

**証明** まず写像 (11.5) が单射であることを示す.  $\sigma_0 \cdot (f, A) = \sigma_0$  を仮定したときには  $(f, A) = (\text{id}, \text{id})$  であることを示せばよい.  $A^{-1} \circ Z_0 = A^{-1}$  であるが、 $Z_0: \Gamma_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^2$  は同型であったので  $A = \text{id}$  となる. このとき  $f$  はある整数  $m \in \mathbb{Z}$  に対して  $f(x) = x + 2m$  となる関数になるが、 $\text{Coh}(C)[2m] = \text{Coh}(C)$  より  $m = 0$  が従う. よって  $(f, A) = (\text{id}, \text{id})$  である.

したがって写像 (11.5) が全射であることを示せばよい. つまり、任意の  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(C)$  に対してある  $(f, A) \in \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  が存在して  $\sigma = \sigma_0 \cdot (f, A)$  となることを示す. Step 3より、 $Z = Z_0$  としてよく、さらに Step 1 よりある  $x \in C$  が存在して  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{P}(1)$  となると仮定してよい. このとき、 $\mathcal{A} = \text{Coh}(C)$  となることを示せば、 $\sigma = \sigma_0$  となり証明が完了する.  $V \in \text{Coh}(C)$  を直既約なベクトル束とする. このとき、

$$0 \neq \text{Hom}(V, \mathcal{O}_x) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_x, V)^{\vee}$$

であり、したがってある  $\phi \in [0, 1]$  に対して  $V \in \mathcal{P}(\phi)$  となる.  $\text{Im } Z(V) > 0$  であるため、 $\phi \in (0, 1)$  となり、よって  $V \in \mathcal{A}$  がいえる. またステップ1より、 $y \neq x$  となる  $y \in C$  に対して  $\mathcal{O}_y \in \mathcal{P}(\psi)$  となる  $\psi \in \mathbb{Z}$  が存在する.  $\text{Hom}(V, \mathcal{O}_y) \neq 0$  となるため、 $\psi - 1 \leq \phi \leq \psi$  であり、このことから  $\psi = 1$  が従う. よって  $\mathcal{O}_y \in \mathcal{A}$  となり、 $\text{Coh}(C) \subset \mathcal{A}$  が従う.  $\text{Coh}(C)$  と  $\mathcal{A}$  は両方とも有界な  $t$ -構造の核なので、問題 7.8 によって  $\text{Coh}(C) = \mathcal{A}$  となる. よって定理が証明された.  $\square$

## 11.5 ミラー対称性との関係

$X$  を滑らかな射影的代数多様体とする。 $X$  上の安定性条件の空間  $\text{Stab}(X)$  には  $\text{Auteq } D^b(X)$  が左から作用し、 $\mathbb{C} \subset \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  が右から作用した。 $\mathbb{C}$  は可換なので、上の作用は左作用ともみなせる。 $G$  を  $\text{Auteq } D^b(X)$  の部分群とし、これらの作用による商スタック

$$[\text{Stab}(X)/(G \times \mathbb{C})] \quad (11.6)$$

を考える。この商スタックはミラー対称性の文脈で特に重要となる。 $X$  が Calabi-Yau 多様体の場合、 $X$  のミラー多様体  $X^\vee$  の複素構造のモジュライ空間はある群  $G$  に対して<sup>2</sup> 定まる商スタック (11.6) に埋め込められると期待され、さらにその埋め込みは、 $X^\vee$  の周期写像が満たす Picard-Fuchs 方程式の解を用いて具体的に記述できると考えられている。

本書ではホモジカル・ミラー対称性については深入りしないため、Kontsevich による原論文 [Kon95] を参照されたい。また、上述の商スタックとミラー対称性の関係についての詳しい説明は [Bri09a] を参照されたい。

**問題 11.22**  $C$  を橢円曲線とする。このとき、自己同値群は

$$\text{Auteq } D^b(C) = \langle T_{\mathcal{O}_C}, \otimes \mathcal{L}, g^*, [1] : \mathcal{L} \in \text{Pic}(C), g \in \text{Aut}(C) \rangle$$

と記述できる [HVdB07, Theorem 5.3]。ここで  $T_{\mathcal{O}_C}$  は球面対象  $\mathcal{O}_C$  に付随する球面捻りである。 $\text{Auteq } D^b(C)$  の部分群を

$$G := \langle T_{\mathcal{O}_C}, \otimes \mathcal{L} : \mathcal{L} \in \text{Pic}(C) \rangle$$

と定める。このとき、定理 11.21 を用いて同型

$$[\text{Stab}(C)/(G \times \mathbb{C})] \cong [\mathcal{H}/\text{SL}(2, \mathbb{Z})] \quad (11.7)$$

が存在することを示せ。ここで、 $\mathcal{H}$  は  $\mathbb{C}$  の上半平面の空間であり、 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (\tau \in \mathcal{H})$$

によって  $\mathcal{H}$  に作用している。(ヒント:  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{C}^* = \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{C}$  であり、

<sup>2</sup> ホモジカル・ミラー対称性を通じてミラー側のモノドロミーに対応する自己同値が生成する  $\text{Auteq } D^b(X)$  の部分群が  $G$  である。

さらに同型

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{C}^*, \quad x+iy \mapsto \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

が存在する。上の同型と定理 11.21 の同型の下で、 $G$  の  $\mathrm{Stab}(C)$  への作用が  $\mathcal{H}$  への作用を誘導して、同型

$$[\mathrm{Stab}(C)/(G \times \mathbb{C})] = [\mathcal{H}/G]$$

を与えることをチェックせよ。さらに  $T_{\mathcal{O}_c}$ ,  $\otimes \mathcal{L}$  の  $\Gamma$  への作用が

$$T_{\mathcal{O}_c*}(r, d) = (r-d, d), \quad (\otimes \mathcal{L})_*(r, d) = (r, d+r)$$

であることをチェックし、 $[\mathcal{H}/G] = [\mathcal{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})]$  となることを確認せよ。)

上の問題における (11.7) の右辺は、よく知られているように橙円曲線の複素構造のモジュライ空間である。これは橙円曲線  $C$  のミラーがまた橙円曲線であるという事実に合致している。

ミラー対称性において最も重要なのが、3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合である。中でも、 $\mathbb{P}^4$  内の滑らかな 5 次超曲面  $X$  はミラー対称性の歴史においても非常に重要な Calabi-Yau 多様体であり、その安定性条件の空間  $\mathrm{Stab}(X)$  の研究はその導入の当初から重要視されてきた対象である。次節でも述べるように一般に 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対しては安定性条件が存在することすら証明されていないが、最近になってようやく  $\mathbb{P}^4$  内の滑らかな 5 次超曲面の場合にその存在が証明された [Li19b]。この場合の  $\mathrm{Stab}(X)$  の詳細な記述はまだ得られていないが、ミラー対称性によりこの空間の形を予測することはできる。

群  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  の  $\mathbb{P}^4$  への次のような作用を考える。

$$\xi \cdot [y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5] := [\xi_1 y_1 : \xi_2 y_2 : \xi_3 y_3 : \xi_1^{-1} \xi_2^{-1} \xi_3^{-1} y_4 : y_5].$$

ただし、 $\xi = (\xi_j)_{1 \leq j \leq 3} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  である。さらに  $Y_\psi$  を  $\psi \in \mathbb{C}$  でパラメータ付けされる  $\mathbb{P}^4$  内の超曲面の  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  による商

$$Y_\psi := \left\{ \sum_{j=1}^5 y_j^5 - 5\psi \prod_{j=1}^5 y_j = 0 \right\} / (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$$

とする。ここで  $Y_\psi$  を定義する方程式は上述の  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  の作用で不変であることに注意されたい。 $Y_\psi$  には特異点が存在するが、 $\psi^5 \neq 1$  ならば 3 次元 Calabi-

Yau 多様体  $\widehat{Y}_\psi$  とクレバント特異点解消  $\widehat{Y}_\psi \rightarrow Y_\psi$  が存在する。この 3 次元 Calabi-Yau 多様体の 1 次元族  $\widehat{Y}_\psi$  が  $X$  のミラーを与える ([CdlOGP91, §2] を参照)。そして  $\widehat{Y}_\psi$  の複素構造の変形は 1 次元であり、 $\psi$  が変形のパラメータを与える。さらに  $\alpha := e^{2\pi i/5}$  とし、 $1 \leq j \leq 4$  に対して  $y_j \mapsto y_j$  および  $y_5 \mapsto \alpha y_5$  を施すことで、同型

$$\widehat{Y}_\psi \cong \widehat{Y}_{\alpha\psi} \quad (11.8)$$

が得られる。同型な多様体を与えるパラメータの同一視がこれ以上存在しないことが確認できるため、3 次元 Calabi-Yau 多様体  $\widehat{Y}_\psi$  の複素構造のモジュライ空間は商スタック

$$\mathcal{M}_K := \left[ \frac{\{\psi \in \mathbb{C} : \psi^5 \neq 1\}}{\mu_5} \right]$$

と同一視される。ここで、 $\mu_5$  の生成元は  $\mathbb{C}$  に  $\alpha$  の掛け算で作用している。 $\mathcal{M}_K$  (のコンパクト化) には次の特殊な 3 点が存在する：

- 極大体積極限 (large volume limit) と呼ばれる  $\psi = \infty$  の点。
- コニフォールド点 (conifold point) と呼ばれる  $\psi^5 = 1$  の点。
- Gepner 点 (Gepner point) と呼ばれる  $\psi = 0$  の点。

$\psi^5 \neq \infty, 1$ , つまり  $\psi$  が極大体積極限でもコニフォールド点でもなければ、 $\widehat{Y}_\psi$  は滑らかである。 $\psi = 0$ , つまり  $\psi$  が Gepner 点の場合、 $\widehat{Y}_0$  は Fermat 型 5 次超曲面であり、同型 (11.8) から誘導される  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  の作用が  $\widehat{Y}_0$  に存在する。

極大体積極限、コニフォールド点の周りでのミラー族のモノドロミーはホモロジカル・ミラー対称性を通じて  $D^b(X)$  の自己同値を定める。これらはそれぞれ、 $\otimes \mathcal{O}_X(1), T_{\mathcal{O}_X}$  であると考えられている。よって  $\text{Auteq } D^b(X)$  の部分群を

$$G := \langle \otimes \mathcal{O}_X(1), T_{\mathcal{O}_X} \rangle$$

と定めると、前述したことから次の予想を得る：

**予想 11.23**  $X$  を  $\mathbb{P}^4$  内の滑らかな 5 次超曲面とすると、埋め込み

$$\mathcal{M}_K \hookrightarrow [\text{Stab}(X)/(G \times \mathbb{C})]$$

が存在する。

## 11.6 極大体積極限の近傍

以下  $X$  を滑らかで射影的な代数多様体とし、 $(\Gamma, \text{cl}) = (\text{Im}(\text{ch}), \text{ch})$  とする。曲線のときと異なり  $\dim X \geq 2$  の場合、標準的な  $t$ -構造の核を用いて安定性条件を構成することはできない。より正確には次が成り立つ。

**補題 11.24**  $\dim X \geq 2$  とする。このとき、 $\sigma = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(X)$  で  $\mathcal{A} = \text{Coh}(X)$  となるものは存在しない。

証明 群準同型  $Z: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  で条件

$$Z(\text{Coh}(X) \setminus \{0\}) \subset \mathbb{H} \quad (11.9)$$

を満たすものが存在しないことを示せば十分である。 $X$  は滑らかな射影的代数曲面を部分代数多様体として含むので、はじめから  $\dim X = 2$  としてよい。すると

$$u_j + iv_j \in H^{4-2j}(X, \mathbb{C}) \quad (j = 0, 1, 2)$$

を用いて

$$Z(E) = \sum_{j=0}^2 (u_j + iv_j) \text{ch}_j(E)$$

と書ける： $C \subset X$  を滑らかな射影的代数曲線として、 $D \subset C$  を  $C$  の因子とする。

条件 (11.9) より

$$\text{Im}(Z(\mathcal{O}_C(D))) = v_2(\deg D + \text{ch}_2(\mathcal{O}_C)) + v_1 \cdot [C] \geq 0$$

が成り立つ。これがすべての  $D$  に対して成立するので、 $v_2 = 0$  となる。同様に、すべての  $m \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\text{Im}(Z(\mathcal{O}_X(mC))) = mv_1 \cdot [C] + v_0 \geq 0$$

となるため、 $v_1 \cdot [C] = 0$  となる。よって、 $\text{Im}(Z(\mathcal{O}_C(D))) = 0$  となり、条件 (11.9) より

$$\text{Re}(Z(\mathcal{O}_C(D))) = u_2(\deg D + \text{ch}_2(\mathcal{O}_C)) + u_1 \cdot [C] < 0$$

が成立する。上と同様の議論を繰り返して  $u_2 = 0$  がわかる。したがって  $Z(\mathcal{O}_x) = u_2 + iv_2 = 0$  が成り立つが、これは条件 (11.9) に矛盾する。□

ミラー対称性のアイデアを用いると  $\dim X \geq 2$  の場合でも 以下のように、安定性条件を与えると期待される中心電荷を与えることができる。まず

$$A(X)_{\mathbb{C}} := \{B + i\omega \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{C}} : B, \omega \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}, \omega \text{ は豊富}\} \quad (11.10)$$

とおき、さらに  $B \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$  および  $E \in D^b(X)$  に対して、 **$B$ -捻り Chern 標数** ( $B$ -twisted Chern character) を

$$\mathrm{ch}^B(E) := e^{-B} \mathrm{ch}(E) \in H^{2*}(X, \mathbb{R})$$

と定義する。また  $\mathrm{ch}^B(E)$  の  $H^{2j}(X, \mathbb{R})$  の部分を  $\mathrm{ch}_j^B(E)$  と記述する。

**問題 11.25**  $\mathrm{ch}$  と  $\mathrm{ch}^B$  は

$$\mathrm{ch}_0^B = \mathrm{ch}_0, \mathrm{ch}_1^B = \mathrm{ch}_1 - B \mathrm{ch}_0, \mathrm{ch}_2^B = \mathrm{ch}_2 - B \mathrm{ch}_1 + \frac{B^2}{2} \mathrm{ch}_0$$

と関係していることを示せ。

$B + i\omega \in A(X)_{\mathbb{C}}$  に対し、群準同型  $Z_{B, \omega} : K(X) \rightarrow \mathbb{C}$  を

$$Z_{B, \omega}(E) := - \int_X e^{-i\omega} \mathrm{ch}^B(E)$$

と定める。これは  $\mathrm{ch} : K(X) \rightarrow \Gamma$  を経由しているので、群準同型  $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  を定めているとも思える。次の予想が成り立つと信じられている。

**予想 11.26**  $X$  を滑らかな射影的代数多様体とする。このとき有界な  $t$ -構造の核  $\mathcal{A}_{B, \omega} \subset D^b(X)$  が存在して、

$$\sigma_{B, \omega} = (Z_{B, \omega}, \mathcal{A}_{B, \omega}) \in \mathrm{Stab}(X)$$

が成り立つ。

次で見るように  $\dim X = 1$  の場合、予想 11.26 が成り立つ。

**問題 11.27**  $\dim X = 1$  の場合

$$Z_{B, \omega}(E) = -\deg(E) + (B + i\omega) \mathrm{rank}(E)$$

であり、 $(Z_{B, \omega}, \mathrm{Coh}(X)) \in \mathrm{Stab}(X)$  となることを示せ。

**問題 11.28**  $\dim X = 2, 3$  の場合、 $Z_{B, \omega}(E)$  は次のように書けることを示せ。

- $\dim X = 2$  の場合

$$Z_{B,\omega}(E) = -\mathrm{ch}_2^B(E) + \frac{\omega^2}{2} \mathrm{ch}_0^B(E) + i\omega \mathrm{ch}_1^B(E).$$

•  $\dim X = 3$  の場合

$$Z_{B,\omega}(E) = -\mathrm{ch}_3^B(E) + \frac{\omega^2}{2} \mathrm{ch}_1^B(E) + i \left( \omega \mathrm{ch}_2^B(E) - \frac{\omega^3}{6} \mathrm{ch}_0^B(E) \right).$$

さらにこれらの場合,  $Z_{B,\omega}(\mathrm{Coh}(X) \setminus \{0\})$  は  $\mathbb{H}$  に含まれないことを確認せよ.

## 11.7 連接層のなす Abel 圏の傾斜

$d := \dim X \geq 2$  の場合, 予想 11.26 における  $\mathcal{A}_{B,\omega}$  を  $\mathrm{Coh}(X)$  の傾斜として構成することを考えよう. まず, 定義 5.7 で考察した  $\mathrm{Coh}(X)$  上の  $\mu_\omega$ -安定性条件を考える. すると, これは直接 Bridgeland 安定性条件を定めるわけではないが, その構成のヒントになる. 構成のための準備を行おう.

$E \in \mathrm{Coh}(X)$  と  $B + i\omega \in \mathcal{A}(X)_\mathbb{C}$  に対し,

$$\Delta_{B,\omega}(E) := \omega^{d-2} (\mathrm{ch}_1^B(E)^2 - 2 \mathrm{ch}_0^B(E) \mathrm{ch}_2^B(E)) \in \mathbb{R}$$

と定める. また  $B = 0$  のときは, これを  $\Delta_\omega(E)$  と書く. 問題 11.25 を使えば, 任意の  $B$  に対し

$$\Delta_{B,\omega} = \Delta_\omega$$

が成り立つことがわかる.

次に述べる **Bogomolov–Gieseker 不等式** (Bogomolov–Gieseker inequality) (以下 BG 不等式と省略) は重要である.

**定理 11.29** ([Bog78, Gie79])  $X$  を滑らかな射影的代数曲面とし,  $E$  を捩れのない  $X$  上の  $\mu_\omega$ -半安定層とする. このとき, 不等式

$$\Delta_\omega(E) \geq 0$$

が成り立つ.

**問題 11.30**  $X$  を  $d$  次元の滑らかな射影的代数多様体とし,  $d \geq 2$  とする. また,  $B + i\omega \in \mathcal{A}(X)_\mathbb{C}$  をとる.  $E$  を捩れのない  $X$  上の  $\mu_\omega$ -半安定層とする.

- (i)  $H \subset X$  を  $[H] \in H^2(X, \mathbb{R})$  が  $\omega$  と比例する超曲面とする.  $H$  の次数が十分大きければ,  $E|_H$  も  $\mu_{\omega|_H}$ -半安定であることが知られている. (Mehta-

Ramanathan の定理 [MR82] と呼ばれる.) この事実と定理 11.29 における BG 不等式を用いて、不等式

$$\Delta_{B,\omega}(E) \geq 0$$

が成立することを示せ.

- (ii) (i) の不等式と射影曲面の Hodge 指数定理 ([Har77, Theorem V.1.9] を参考) を用いて、不等式

$$\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) := (\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E))^2 - 2\omega^d \operatorname{ch}_0^B(E) \cdot (\omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(E)) \geq 0 \quad (11.11)$$

が成立することを示せ.

命題 11.34 では  $\dim X = 2$  のとき、(11.13) で定義する  $D^b(X)$  の t-構造の核  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  および  $Z_{B,\omega}$ -半安定対象  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して、 $\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$  が示される。問題 11.30 はその証明で使われる。

$\mu_\omega$  を少し修正して、 $E \in \operatorname{Coh}(X)$  に対して  $\mu_{B,\omega}(E)$  を

$$\mu_{B,\omega}(E) := \frac{\operatorname{ch}_1^B(E) \cdot \omega^{d-1}}{\operatorname{rank}(E)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

とおく。ただし、 $\operatorname{rank}(E) = 0$  の場合は  $\mu_{B,\omega}(E) := \infty$  と定める。問題 11.25 より

$$\mu_{B,\omega} = \mu_\omega - B\omega^{d-1}$$

となることがわかり、これにより  $\mu_\omega$ -（半）安定性と  $\mu_{B,\omega}$ -（半）安定性が同値となることがわかる。 $\operatorname{Coh}(X)$  における部分圏の組  $(\mathcal{T}_{B,\omega}, \mathcal{F}_{B,\omega})$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{B,\omega} &:= \langle E \in \operatorname{Coh}(X) : E \text{ は } \mu_\omega\text{-半安定で } \mu_{B,\omega}(E) > 0 \rangle_{\text{ex}} \\ \mathcal{F}_{B,\omega} &:= \langle E \in \operatorname{Coh}(X) : E \text{ は } \mu_\omega\text{-半安定で } \mu_{B,\omega}(E) \leq 0 \rangle_{\text{ex}} \end{aligned} \quad (11.12)$$

とおく。捩れ層はすべて  $\mathcal{T}_{B,\omega}$  に入り、 $\mathcal{F}_{B,\omega}$  の 0 でない元はすべて捩れはないことに注意する。 $\mu_\omega$ -半安定性に関する HN フィルトレーションの存在により、組  $(\mathcal{T}_{B,\omega}, \mathcal{F}_{B,\omega})$  は  $\operatorname{Coh}(X)$  の捩れ対となり、 $(\mathcal{T}_{B,\omega}, \mathcal{F}_{B,\omega})$  で  $\operatorname{Coh}(X)$  の傾斜をとることで、有界 t-構造の核

$$\mathcal{B}_{B,\omega} := \langle \mathcal{F}_{B,\omega}[1], \mathcal{T}_{B,\omega} \rangle_{\text{ex}} \subset D^b(X) \quad (11.13)$$

を得る。BG 不等式を用いて、次の補題が成立する。

**補題 11.31**  $0 \neq E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して、次のいずれかが成立する。

- (i)  $\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E) > 0$ .
- (ii)  $\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E) = 0$  であり, 次が成り立つ.

$$(-\omega^d \operatorname{ch}_0^B(E), \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(E)) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \setminus \{0, 0\}.$$

(iii) 等式

$$\omega^d \operatorname{ch}_0^B(E) = \omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E) = \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(E) = 0$$

が成立し,  $E \in \operatorname{Coh}_{\leq d-3}(X)$  となる. ここで  $\operatorname{Coh}_{\leq i}(X)$  は台の次元が  $i$  以下の連接層のなす圏である.

**証明** t-構造の核  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の構成より, 任意の  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して  $\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E) \geq 0$  がいえる.  $\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(E) = 0$  と仮定しよう. すると,  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の定義から  $T := \mathcal{H}^0(E) \in \operatorname{Coh}_{\leq d-2}(X)$  であり, さらに  $F := \mathcal{H}^{-1}(E)$  は (0でなければ)  $\mu_{B,\omega}(F) = 0$  を満たす  $\mu_\omega$ -半安定層になる. 次が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned} -\omega^d \operatorname{ch}_0^B(T) &= 0, \quad \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(T) = \omega^{d-2} \cdot [T] \geq 0 \\ -\omega^d \operatorname{ch}_0^B(F[1]) &= \omega^d \cdot \operatorname{rank}(F), \quad \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(F[1]) = -\omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(F) \end{aligned}$$

ここで  $[T]$  は  $T$  が定める基本  $(d-2)$  次元サイクルである.  $F$  は  $\omega^{d-1} \operatorname{ch}_1^B(F) = 0$  を満たすので, 問題 11.30(ii) により  $\omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(F) \leq 0$  となる. 以上より,

$$\begin{aligned} -\omega^d \operatorname{ch}_0^B(E) &= -\omega^d \cdot (\operatorname{ch}_0^B(T) + \operatorname{ch}_0^B(F[1])) \geq 0 \\ \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(E) &= \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(T) + \omega^{d-2} \operatorname{ch}_2^B(F[1]) \geq 0 \end{aligned}$$

を得る. これらが両方 0になると仮定する. すると上の議論より  $\operatorname{rank}(F) = 0$  よび  $\omega^{d-2} \cdot [T] = 0$  となる. したがって  $F = 0$  と  $T \in \operatorname{Coh}_{\leq d-3}(X)$  がわかる. よって  $E \in \operatorname{Coh}_{\leq d-3}(X)$  が従う.  $\square$

さらに次の事実も容易にわかる.

**問題 11.32** 任意の点  $x \in X$  に対し,  $\mathcal{O}_x$  は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の単純対象であることを示せ.

## 11.8 代数曲面上の安定性条件

この節では, 滑らかな射影的代数曲面  $X$  に対し, 予想 11.26 が成立することを示すのが目標である. より詳しく

$$\sigma_{B,\omega} := (Z_{B,\omega}, \mathcal{B}_{B,\omega}) \in \text{Stab}(X)$$

を示したい。以下では証明を簡単にするため、 $B$  と  $\omega$  が  $H^2(X, \mathbb{Q})$  の元であるとする。実数係数の場合の証明は [Tod14, Proposition 2.8] を参照されたい。まず、次を示そう。

**補題 11.33**  $Z_{B,\omega}$  は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  上の安定性条件を定める。

**証明** 問題 11.28 と補題 11.31 より、任意の  $0 \neq E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して、 $Z_{B,\omega}(E) \in \mathbb{H}$  が成り立つ。そこで補題 11.2 を用いて、HN フィルトレーションの存在を示せば証明が終わる。まず  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における全射の無限列

$$E_1 \twoheadrightarrow E_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_j \twoheadrightarrow E_{j+1} \twoheadrightarrow \cdots \quad (11.14)$$

が与えられているとしよう。補題 11.31 より任意の  $0 \neq B \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対し、 $\omega \text{ch}_1^B(E) \geq 0$  であるから、 $\omega \text{ch}_1^B(E_j) \geq \omega \text{ch}_1^B(E_{j+1}) \geq 0$  が成り立つ。また  $B, \omega \in H^2(X, \mathbb{Q})$  であったから  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  を  $kB, k\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$  となるように選べ、 $k^2 \omega \text{ch}_1^B(E_j) \in \mathbb{Z}$  ができる。よって  $j \gg 0$  で  $\omega \text{ch}_1^B(E_j) = \omega \text{ch}_1^B(E_{j+1})$  となり、最初から  $\omega \text{ch}_1^B(E_j)$  が  $j$  に依存しないと仮定してよい。 $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の完全系列

$$0 \rightarrow F_j \rightarrow E := E_1 \rightarrow E_j \rightarrow 0 \quad (11.15)$$

を考えると、 $\omega \text{ch}_1^B(F_j) = 0$  となり、特に補題 11.31 の証明より  $\mathcal{H}^0(F_j)$  は 0 次元層となる。また、連接層の全射の列

$$\mathcal{H}^0(E) \twoheadrightarrow \mathcal{H}^0(E_2) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{H}^0(E_j) \twoheadrightarrow \cdots$$

と单射の列

$$\mathcal{H}^{-1}(F_j) \subset \mathcal{H}^{-1}(F_{j+1}) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{-1}(E)$$

が存在する。Coh( $X$ ) の Noether 性より、 $\mathcal{H}^0(E) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^0(E_j)$  であって、さらに  $\mathcal{H}^{-1}(F_j) \subset \mathcal{H}^{-1}(E)$  は  $j$  に依存しないと仮定してよい。そこで  $V := \mathcal{H}^{-1}(E)/\mathcal{H}^{-1}(F_j)$  とおくと、(11.15) に付随するコホモロジー完全系列をとることで完全系列

$$0 \rightarrow V \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(E_j) \rightarrow \mathcal{H}^0(F_j) \rightarrow 0$$

を得る。 $\mathcal{H}^0(F_j)$  は 0 次元層だったので、自然な射  $\mathcal{H}^{-1}(E_j) \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(E_{j+1})$  は 0 次元を除いて同型で、また  $\mathcal{H}^{-1}(E_j)$  に捩れはないので特に单射になる。そこで埋

め込みの列

$$V \subset \mathcal{H}^{-1}(E_1) \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{-1}(E_j) \subset \mathcal{H}^{-1}(E_{j+1}) \subset \cdots \subset V^{\vee\vee}$$

を得る. 再び  $\text{Coh}(X)$  の Noether 性より, 上の埋め込み列は  $j \gg 0$  で一定になる. よって無限列 (11.14) は  $j \gg 0$  で一定になる.

最後に,  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における無限降下列

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_j \supset E_{j+1} \supset \cdots$$

で  $\arg Z_{B,\omega}(E_{j+1}) > \arg Z_{B,\omega}(E_j)$  となるものは存在しないことを示せば証明が終わる. 上と同様に,  $\omega \text{ch}_1^B(E_j)$  は  $j$  に依存しないと仮定してよい. すると  $\omega \text{ch}_1^B(E_j/E_{j+1}) = 0$  となり, よって補題 11.31 より  $Z_{B,\omega}(E_j/E_{j+1}) \in \mathbb{R}_{<0}$  となる. したがって  $\arg Z_{B,\omega}(E_j) > \arg Z_{B,\omega}(E_{j+1})$  となり, 矛盾が得られた.  $\square$

この節での目的であった,  $\sigma_{B,\omega} \in \text{Stab}(X)$  を示すには, さらに  $\sigma_{B,\omega}$  が台条件を満たすこと示さなければいけない. 実は,  $Z_{B,\omega}$ -半安定対象に対しても BG 型不等式が成立し, 台条件はそこから従う. 次を証明しよう.

**命題 11.34**  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  を  $Z_{B,\omega}$ -半安定対象とする. このとき, 問題 11.30 で与えた  $\overline{\Delta}_{B,\omega} (= (\omega \text{ch}_1^B(E))^2 - 2\omega^2 \text{ch}_0^B(E) \cdot \text{ch}_2^B(E))$  に対し, 不等式

$$\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$$

が成立する.

**証明** まず  $\omega^2 \text{ch}_0^B(E) \cdot \text{ch}_2^B(E) \leq 0$  ならば明らかに  $\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$  が成立するため,  $\omega^2 \text{ch}_0^B(E) \cdot \text{ch}_2^B(E) > 0$  であると仮定してよい. このとき,  $\omega^2 \text{ch}_0^B(E) > 0$  かつ  $\text{ch}_2^B(E) > 0$ , あるいは  $\omega^2 \text{ch}_0^B(E) < 0$  かつ  $\text{ch}_2^B(E) < 0$  の二通りの可能性がある. ここでは, 前者の場合に不等式  $\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$  を示す. 後者の場合も証明は同様である.

補題 11.31 から  $\omega \text{ch}_1^B(E) \geq 0$  であることに注意する. また各  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対し, 標準フィルトレーションを使った完全三角形 (2.33) により Abel 圈  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(E)[1] \rightarrow E \rightarrow \mathcal{H}^0(E) \rightarrow 0 \tag{11.16}$$

が存在することにも注意する.

もし  $\omega \operatorname{ch}_1^B(E) = 0$  ならば、補題 11.31 の証明より  $\mathcal{H}^{-1}(E)$  は  $\mu_{B,\omega}(-) = 0$  となる  $\mu_{B,\omega}$ -半安定層であり、 $\mathcal{H}^0(E)$  は 0 次元層である。したがって不等式  $\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$  は完全系列 (11.16) と定理 11.29 より従う（問題 11.30 参照）。よって以降の議論では  $\omega \operatorname{ch}_1^B(E) > 0$  であるとしてよい。

仮定  $\omega^2 \operatorname{ch}_0^B(E) > 0$ かつ  $\operatorname{ch}_2^B(E) > 0$  と補題 11.31 から不等式

$$0 < \omega^2 \operatorname{ch}_0^B(E) \leq \omega^2 \operatorname{ch}_0^B(\mathcal{H}^0(E)), \quad 0 \leq \omega \operatorname{ch}_1^B(\mathcal{H}^0(E)) \leq \omega \operatorname{ch}_1^B(E)$$

が成立する。さらにこれから  $\mu_{B,\omega}(\mathcal{H}^0(E)) \leq \mu_{B,\omega}(E)$  が従う。一方、 $\mu_\omega$  に関する  $\mathcal{H}^0(E)$  の HN 因子のうち傾斜が最小のもの  $F$  をとれば、 $F$  は  $\mu_{B,\omega}$ -半安定で、連接層の全射  $f: \mathcal{H}^0(E) \rightarrow F$  が存在し、さらに

$$0 < \mu_{B,\omega}(F) \leq \mu_{B,\omega}(\mathcal{H}^0(E)) \leq \mu_{B,\omega}(E) \quad (11.17)$$

が成り立つ。 $F, \operatorname{Ker} f \in \operatorname{Coh}(X)$  はともに  $T_{B,\omega}$  の元であるから、 $f$  は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  においても全射となり、合成

$$E \rightarrow \mathcal{H}^0(E) \rightarrow F$$

は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における全射となる。よって、 $Z_{B,\omega}$ -半安定性より  $\arg Z_{B,\omega}(E) \leq \arg Z_{B,\omega}(F)$  が従う。問題 11.28 を用い  $\omega \operatorname{ch}_1^B(E), \omega \operatorname{ch}_1^B(F) > 0$  に注意すると、これは不等式

$$\frac{-\operatorname{ch}_2^B(E) + \omega^2 \operatorname{ch}_0^B(E)/2}{\omega \operatorname{ch}_1^B(E)} \geq \frac{-\operatorname{ch}_2^B(F) + \omega^2 \operatorname{ch}_0^B(F)/2}{\omega \operatorname{ch}_1^B(F)}$$

を意味する。この式から

$$\frac{-\operatorname{ch}_2^B(E)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(E)} + \frac{\omega^2}{2\mu_{B,\omega}(E)} \geq \frac{-\operatorname{ch}_2^B(F)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(F)} + \frac{\omega^2}{2\mu_{B,\omega}(F)}$$

が得られ、不等式 (11.17) および仮定  $\operatorname{ch}_2^B(E) > 0$  を組み合わせると、不等式

$$0 < \frac{\operatorname{ch}_2^B(E)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(E)} \leq \frac{\operatorname{ch}_2^B(F)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(F)}$$

を得る。この式と再び不等式 (11.17) を使って

$$\frac{\omega^2 \operatorname{ch}_0^B(E)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(E)} \cdot \frac{\operatorname{ch}_2^B(E)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(E)} \leq \frac{\omega^2 \operatorname{ch}_0^B(F)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(F)} \cdot \frac{\operatorname{ch}_2^B(F)}{\omega \operatorname{ch}_1^B(F)} \leq \frac{1}{2}$$

が得られる。ここで、最後の不等式は問題 11.30(ii) を  $F$  に適用することで得られる。不等式  $\overline{\Delta}_{B,\omega}(E) \geq 0$  はこの不等式から従う。□

**問題 11.35** 補題 11.16 および命題 11.34 を用いて、 $\rho(X) = 1$  の場合に  $(Z_{B,\omega},$

$\mathcal{B}_{B,\omega}$ ) が台条件を満たすことを示せ.

$\rho(X) \geq 2$  の場合、命題 11.34 は台条件を示すのに十分ではない。しかし、命題 11.34 を改良した、次で述べる定理 11.36 と捕題 11.16 を用いると、すべての代数曲面  $X$  に対して  $\sigma_{B,\omega} = (Z_{B,\omega}, \mathcal{B}_{B,\omega})$  が台条件を満足することが示され、特に  $\sigma_{B,\omega} \in \text{Stab}(X)$  がいえる。

**定理 11.36** 定数  $C > 0$  が存在して、任意の  $Z_{B,\omega}$ -半安定対象  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して

$$\omega^2 \cdot \Delta_\omega(E) + C \cdot (\omega \cdot \text{ch}_1^B(E))^2 \geq 0$$

が成立する。

本書では定理 11.36 は証明しないので、興味ある読者は [Tod13, Theorem 3.23] を参照されたい。

問題 11.32 から任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_x$  は位相が 1 の  $\sigma_{B,\omega}$ -安定対象であることがわかる。この節の最後に、 $\sigma_{B,\omega}$  がこの性質により特徴付けられることについて触れておこう。

**命題 11.37**  $\sigma = (Z, \mathcal{A})$  を滑らかな代数曲面  $X$  上の安定性条件とし、任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_x$  は位相が 1 の  $\sigma$ -安定対象であると仮定する。このとき、ある  $B + iw \in A(X)_C$  が存在して  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{B,\omega}$  および  $\text{Im } Z = \text{Im } Z_{B,\omega}$  が成立する。特に  $Z = Z_{B,\omega}$  ならば  $\sigma = \sigma_{B,\omega}$  が成立する。

**証明** 仮定より、任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{A}$  であり、これは  $Z$ -安定対象となることに注意する。よって  $Z$ -安定対象  $E \in \mathcal{A}$  が任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_x$  と同型ではないと仮定すると、 $\text{Hom}(\mathcal{O}_x, E) = 0$  が成立する。この事実と Serre 双対性定理を用いると、

$$\text{Hom}(E, \mathcal{O}_x[i]) = 0 \quad (i \neq 0, 1, x \in X) \tag{11.18}$$

が成立する。よって補題 6.16 より  $E$  は局所自由層  $E^{-1}, E^0$  を用いて

$$E \cong (E^{-1} \rightarrow E^0) \in D^b(X) \tag{11.19}$$

と書ける。特に、任意の  $E \in \mathcal{A}, i \neq -1, 0$  に対して  $\mathcal{H}^i(E) = 0$  が成立する。そこで  $\text{Coh}(X)$  の部分圏の組  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  を

$$\mathcal{T} = \mathcal{A} \cap \mathrm{Coh}(X), \quad \mathcal{F} = \mathcal{A}[-1] \cap \mathrm{Coh}(X)$$

とおくと、問題 7.14 より  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は  $\mathrm{Coh}(X)$  の捩れ対となり  $\mathcal{A} = \langle \mathcal{F}[1], \mathcal{T} \rangle_{\mathrm{ex}}$  となる。

ここで次に注意する。任意の  $F \in \mathcal{F}$  は (11.19) により局所自由層の全射  $E^{-1} \twoheadrightarrow E^0$  の核として得られる。特に  $F$  は捩れのない連接層である。また捩れ層  $E \in \mathrm{Coh}(X)$  をとると  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  が捩れ対であることから連接層の完全系列

$$0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0 \quad (T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F})$$

を得るが、 $F$  は 0 でなければ捩れがなかったので  $F = 0$  となる。したがって  $E \cong T \in \mathcal{A}$  となる。また  $E \in \mathcal{A}$  を位相 1 の  $\sigma$ -安定対象で  $x \in X$  に対する  $\mathcal{O}_x$  と同型ではないものとすると、 $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_x) = 0$  となる。このことと (11.18) を合わせると、捕題 6.16 より  $E[-1]$  が局所自由層であることが従う。以上より 1 次元の捩れ層  $E \in \mathrm{Coh}(X)$  は位相 1 の半安定対象とはなりえないため、 $\mathrm{Im} Z(E) > 0$  が従う。

仮定より  $\mathcal{O}_x$  は位相 1 の安定対象だったため、 $\mathrm{ch}(E) = (r, l, s)$  となる  $E \in D^b(X)$  に対して  $\mathrm{Im} Z(E)$  は

$$\mathrm{Im} Z(E) = \omega \cdot l + a \cdot s \quad (\omega \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}, s \in \mathbb{R})$$

と書ける。上で述べたことより任意の 1 次元層  $E \in \mathrm{Coh}(X)$  に対して  $\mathrm{Im} Z(E) > 0$  であったため、任意の曲線  $C \subset X$  に対して  $\omega \cdot C > 0$  となる。写像 (11.3) が局所同相写像であることから  $\omega$  を少し変形してもこの性質は変わらない。よって  $\omega$  はネフ錐の内点にあるため、 $\omega$  は豊富である。 $B \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$  を  $a = -B \cdot \omega$  となるようにとると、 $\mathrm{Im} Z = \mathrm{Im} Z_{B, \omega}$  がいえる。

上で選んだ  $(B, \omega)$  に対し  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{B, \omega}$  が成立することを示す。 $\mathcal{A}$  は捩れ対  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  による傾斜であったため、この捩れ対が  $(\mathcal{T}_{B, \omega}, \mathcal{F}_{B, \omega})$  と一致することを示せばよく、またこのことを示すためには捩れ対の定義より、 $\mathcal{T}_{B, \omega} \subset \mathcal{T}, \mathcal{F}_{B, \omega} \subset \mathcal{F}$  を示せば十分である。まず、 $E \in \mathcal{T}_{B, \omega}$  を捩れのない  $\mu_{B, \omega}$ -半安定層とする。 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  は  $\mathrm{Coh}(X)$  の捩れ対なので、連接層の完全系列

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0 \quad (E_1 \in \mathcal{T}, E_2 \in \mathcal{F}) \tag{11.20}$$

が存在する。 $E_2 \neq 0$  であると仮定する。 $E_2[1] \in \mathcal{F}[1] \subset \mathcal{A}$  であり、 $(Z, \mathcal{A})$  は  $X$  上の安定性条件であることに注意すると

$$\mathrm{Im} Z(E_2[1]) = \mathrm{Im} Z_{B,\omega}(E_2[1]) \geq 0$$

が従う. 定義より  $\omega \mathrm{ch}_1^B(E_2) = \mathrm{Im} Z_{B,\omega}(E_2)$  であるから  $\mu_{B,\omega}(E_2) \leq 0$  となるが, これは  $E$  が  $\mu_{B,\omega}(E) > 0$  となる半安定層であることに矛盾する. よって  $E_2 = 0$  であり,  $T \in \mathcal{T}$  が従う.

同様の議論により,  $T \in \mathcal{T}_{B,\omega}$  が捩れ層の場合  $T \in \mathcal{T}$  であること,  $F \in \mathcal{F}_{B,\omega}$  が  $\mu_{B,\omega}(F) < 0$  となる半安定層の場合に  $F \in \mathcal{F}$  であることが示される. よって,  $E \in \mathcal{F}_{B,\omega}$  を  $\mu_{B,\omega}(E) = 0$  となる  $\mu_{B,\omega}$ -安定層とすると,  $E \in \mathcal{F}$  が成り立つことを示せば命題が従う. 上と同様に完全系列 (11.20) をとると, 同様の議論によつて  $E_1 = 0$  あるいは  $E_2 = 0$  が従う. そこで  $E_2 = 0$ , すなわち  $E \in \mathcal{T}$  であると仮定する.  $E \in \mathcal{F}_{B,\omega}$  より  $E$  は捩れのない層であるため, 任意の  $x \in X$  に対して  $\mathrm{Coh}(X)$  における全射  $E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_x$  が存在する. その核を  $E'$  とすると,  $E' \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$  であり

$$Z(E') = Z(E) - Z(\mathcal{O}_x) > Z(E)$$

となる. また  $E' \in \mathcal{F}_{B,\omega}$  でもあるため, この操作を繰り返すことが可能である. よって上の操作を繰り返して,  $Z(E'') \in \mathbb{R}_{>0}$  となる  $E'' \in \mathcal{A}$  が存在することになる. これは  $(Z, \mathcal{A})$  が安定性条件であることに矛盾する.  $\square$

## 11.9 代数曲面の極大体積極限

再び  $X$  を滑らかな射影的代数曲面とする. 前節の結果より, 写像

$$\mathcal{A}(X)_\mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Stab}(X) \quad B + i\omega \mapsto \sigma_{B,\omega} \tag{11.21}$$

が定まる.

**問題 11.38** 写像 (11.21) は単射連続写像であることを示せ.

写像 (11.21) の像を

$$V(X) \subset \mathrm{Stab}(X) \tag{11.22}$$

とおく.  $V(X)$  は極大体積極限の近傍 (neighborhood of the large volume limit) と呼ばれる. 極大体積極限の「極限」の意味は,  $\sigma_{B,m\omega}$  で  $m \rightarrow \infty$  と極限をとることを意味する. 次の命題は  $m \rightarrow \infty$  のとき,  $Z_{B,m\omega}$ -半安定対象が通常の半安定層で近似されることを意味している. ここで,  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の定義から  $\mathcal{B}_{B,\omega} = \mathcal{B}_{B,m\omega}$

が任意の  $m > 0$  で成り立つことに注意する.

**命題 11.39** 対象  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  が  $m \gg 0$  なる  $m$  に対し  $Z_{B,m\omega}$ -半安定であるとする. このとき, 次のいずれかが成立する.

- (i)  $E$  は  $\mu_\omega$ -半安定層である.
- (ii)  $\mathcal{H}^{-1}(E)$  は  $\mu_\omega$ -半安定層であり,  $\mathcal{H}^0(E)$  は 0 次元層である.

**証明** まず,  $F \in D^b(X)$  に対して問題 11.28 で見たように

$$Z_{B,m\omega}(F) = -\operatorname{ch}_2^B(F) + \frac{m^2\omega^2}{2} \operatorname{ch}_0^B(F) + im\omega \operatorname{ch}_1^B(F)$$

であった. 特に  $F \in \operatorname{Coh}(X)$  であるときは

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \arg Z_{B,m\omega}(F) = \begin{cases} \pi & (\dim \operatorname{Supp}(F) = 0 \text{ のとき}) \\ \pi/2 & (\dim \operatorname{Supp}(F) = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\dim \operatorname{Supp}(F) = 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (11.23)$$

が成立する.  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対し,  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(E)[1] \rightarrow E \rightarrow \mathcal{H}^0(E) \rightarrow 0$$

が存在する.  $E$  が  $m \gg 0$  で  $Z_{B,m\omega}$ -半安定ならば,

$$\arg Z_{B,m\omega}(\mathcal{H}^{-1}(E)[1]) \leq \arg Z_{B,m\omega}(\mathcal{H}^0(E))$$

が成立する. よってこのとき (11.23) より  $\mathcal{H}^{-1}(E) = 0$  であるか, もしくは  $\mathcal{H}^{-1}(E) \neq 0$  かつ  $\mathcal{H}^0(E)$  が 0 次元層であることが従う.

まず  $\mathcal{H}^{-1}(E) = 0$ , つまり  $E \in \operatorname{Coh}(X)$  と仮定しよう. もし  $E$  が  $\mu_\omega$ -半安定でなければ層の完全系列

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$$

で  $\mu_\omega(E_1) > \mu_\omega(E_2)$  となるものが存在する. さらに,  $E_1, E_2 \in \mathcal{T}_{B,\omega}$  となるよう  $E_1, E_2$  を選ぶことができる. よってこの完全系列は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における完全系列でもある. 一方,  $\mu_\omega(E_1) > \mu_\omega(E_2)$  より,  $m \gg 0$  なる  $m$  に対し,

$$\arg Z_{B,m\omega}(E_1) > \arg Z_{B,m\omega}(E_2)$$

となることがわかる. これは  $E$  が  $m \gg 0$  で  $Z_{B,m\omega}$ -半安定であることに矛盾する. よって  $E$  は  $\mu_\omega$ -半安定である.

同様に  $\mathcal{H}^{-1}(E) \neq 0$  の場合も  $\mathcal{H}^{-1}(E)$  が  $\mu_\omega$ -半安定であることが従う。  $\square$

上の命題は次のように少し精密化できる。証明の詳細は [LQ] を参照されたい。

**定理 11.40**  $\omega$  を豊富因子,  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  とし,  $\text{g.c.d.}(\text{rank}(E), c_1(E) \cdot \omega) = 1$ ,  $\omega \text{ch}_1^B(E) > 0$  を満たすとする。このとき,  $E$  が  $m \gg 0$  で  $Z_{B,m\omega}$ -半安定であることと, 次は同値である。

- (i)  $\text{rank}(E) > 0$  の場合,  $E$  は  $\mu_\omega$ -安定層。
- (ii)  $\text{rank}(E) < 0$  の場合,  $\mathbb{D}(E)[1]$  は  $\mu_\omega$ -安定層。

このように, 極大体積極限においては Bridgeland 安定対象は通常の安定層とはほぼ同一視できる。一方,  $\omega \rightarrow +0$  においては  $Z_{B,\omega}$ -安定性と通常の安定層との間に大きな隔たりがある。前者は一般にはある種の連接層の 2 項複体であるが, それ以上の情報が得られるような良い記述の仕方が知られているわけではない。

**問題 11.41** 定理 11.40 の (i), (ii) いずれにも当てはまらない  $Z_{B,\omega}$ -半安定対象の例を構成せよ。

## 11.10 壁と部屋の構造

10.4 節では代数群  $G$  がアファイン空間  $\mathbb{A}^n$  に作用している状況で, アファイン空間の各点の安定性を定めている空間  $C^G(\mathbb{A}^n)_\mathbb{R}$  に壁と部屋の構造を考えた。これと同様に三角圏  $\mathcal{D}$  の各対象に安定性を定めている安定性条件の空間にも壁と部屋の構造が存在する。与えられた数値類を持つ半安定対象たちの同型類の集合は 部屋の中で一定であるが, 壁を越えると変化する。ここではこういった, 壁越え現象について議論する。

$\mathcal{D}$  を三角圏として, 安定性条件の空間  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  を考える。各  $E \in \mathcal{D}$  に対して 関数

$$m_*(E) : \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \sigma \mapsto m_\sigma(E) := \sum_i |Z(F_i)|$$

が定まる。ここで  $F_i \in \mathcal{D}$  は  $E$  のすべての  $\sigma$ -HN 成分である。関数  $m_*(E)$  は連続関数である ([Bri07, §8] を参照)。

**定義 11.42**  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\mathcal{S}$  に対し,

$$\sup\{m_\sigma(E) : E \in \mathcal{S}\} < \infty$$

が成立するとき,  $\mathcal{S}$  は  $\sigma \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  に対して有界な質量 (bounded mass) を持つという.

**問題 11.43**  $\text{Stab}_\Gamma^*(\mathcal{D})$  を  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の連結成分とし,  $\sigma, \tau \in \text{Stab}_\Gamma^*(\mathcal{D})$  をとする. このとき,  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\mathcal{S}$  が  $\sigma$  について有界な質量を持つことと  $\tau$  について有界な質量を持つことが同値であることを示せ.

**問題 11.44**  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\mathcal{S}$  が  $\sigma$  について有界な質量を持つならば, 数値類の集合

$$\{\text{cl}(E) \in \Gamma : E \in \mathcal{S}\}$$

は有限集合であることを示せ. (ヒント:  $\sigma$  の台条件を用いよ.)

**問題 11.45**  $\mathfrak{B}$  を  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の連結なコンパクト部分集合とし,  $v \in \Gamma$  とする.  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\mathcal{S}$  を次を満たす対象  $E \in \mathcal{D}$  の同型類の集合とする:  $E$  は  $\text{cl}(E) = v$  を満たし, ある  $\sigma \in \mathfrak{B}$  に対して半安定となる. このとき,  $\mathcal{S}$  は任意の  $\sigma \in \mathfrak{B}$  に対して有界な質量を持つことを示せ. (ヒント: 問題 11.43 により, 1 つの  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \mathfrak{B}$  に対して  $\mathcal{S}$  が有界な質量を持つことを示せばよい. 必要なら  $\mathfrak{B}$  を小さく取り直して,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}((\phi - \varepsilon, \phi + \varepsilon))$  がある  $\phi \in \mathbb{R}$  と  $0 < \varepsilon < 1/4$  に対して成立するとしてよい. このことと, 台条件を用いて  $E \in \mathcal{S}$  の Harder-Narasimhan 成分の数が上に有界であることを示すことにより,  $\mathcal{S}$  が  $\sigma$  について有界な質量を持つことが示せる.)

以下,  $v \in \Gamma$  が原始的 (primitive) であるとは,  $v = mv'$  となる  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $v' \in \Gamma$  が存在しないものとして定義する. 次の命題により,  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  に壁と部屋の構造が入ることがわかる.

**命題 11.46**  $\mathfrak{B}$  を  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の連結なコンパクト部分集合とし,  $\mathcal{D}$  の対象の集合  $\mathcal{S}$  が任意の  $\sigma \in \mathfrak{B}$  に対して有界な質量を持つと仮定する. このとき,  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の有限個の実余次元 1 の部分多様体  $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$  が存在して,  $\mathfrak{B} \setminus \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i$  の任意の連結成分  $\mathcal{C}$  は次を満たす:

もし  $E \in \mathcal{S}$  がある  $\sigma \in \mathcal{C}$  について  $\sigma$ -半安定ならば,  $E$  はすべての  $\sigma \in \mathcal{C}$  について半安定である. さらに  $\text{cl}(E)$  が原始的である  $\sigma \in \mathcal{C}$  について  $\sigma$ -安定ならば,  $E$  はすべての  $\sigma \in \mathcal{C}$  について安定である.

**証明** 部分多様体  $\mathcal{W}_i$  の構成を与えよう. 集合  $\mathcal{D}$  の部分集合を

$$\mathcal{T} := \{A \in \mathcal{D} : \text{ある } \sigma \in \mathfrak{B} \text{ と } E \in \mathcal{S} \text{ に対して } m_\sigma(A) \leq m_\sigma(E)\} / \cong$$

と定める。 $\mathfrak{B}$  が連結でコンパクトであることから、 $\mathcal{T}$  も任意の  $\sigma \in \mathfrak{B}$  について有界な質量を持つことがわかる。ここで、対象  $A \in \mathcal{D}$  がある対象  $E \in \mathcal{S}$  および、ある  $\sigma \in \mathfrak{B}$  に対する HN 成分であるとすると、 $A \in \mathcal{T}$  となることに注意する。

問題 11.44 より  $\Gamma$  の部分集合

$$\{v_j : j \in J\} = \{\text{cl}(A) : A \in \mathcal{T}\}$$

は有限集合である。さらに、 $I$  を  $v_i, v_j$  が  $\Gamma \otimes \mathbb{R}$  において一次独立となる  $(i, j) \in J^2$  の組の集合とする。各  $(i, j) \in I$  に対し、

$$\mathcal{W}_{(i,j)} := \{\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D}) : Z(v_i)/Z(v_j) \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

と定める。

以下、 $\mathcal{W}_{(i,j)}$  が求める条件を満たすことを示す。 $\mathfrak{B} \setminus \bigcup_{(i,j) \in I} \mathcal{W}_{i,j}$  の連結成分  $\mathcal{C}$  をとる。 $E \in \mathcal{S}$  が  $\sigma \in \mathcal{C}$  について  $\sigma$ -半安定であると仮定する。このとき任意の  $\tau \in \mathcal{C}$  について  $E$  は  $\tau$ -半安定であることを示せばよい。

$$\mathcal{C}' := \{\tau \in \mathcal{C} : E \text{ は } \tau\text{-半安定}\}$$

と定めると  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  の位相の定め方より、これは  $\mathcal{C}$  の閉集合である。

次に  $\mathcal{C}'$  が  $\mathcal{C}$  の閉集合であることを見るため、任意の  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \mathcal{C}'$  に対して、 $\sigma$  の開近傍が  $\mathcal{C}'$  に含まれることを示したい。 $0 < \eta < 1/8$  を満たす  $\eta$  をとる。 $\tau = (W, \mathcal{Q}) \in \mathcal{C}$  が  $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \eta$  を満たすなら  $\tau \in \mathcal{C}'$  であることを示せば十分である。 $E \in \mathcal{S}$  は  $\sigma$ -半安定だったので、ある  $\phi \in \mathbb{R}$  が存在して  $E \in \mathcal{P}(\phi)$  となる。 $d(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) < \eta$  より包含関係

$$\mathcal{P}(\phi) \subset \mathcal{Q}((\phi - \eta, \phi + \eta)) \subset \mathcal{P}((\phi - 2\eta, \phi + 2\eta)) \subset \mathcal{P}((\phi - 1/2, \phi + 1/2])$$

が成り立つ。ここで  $\mathcal{A} := \mathcal{P}((\phi - 1/2, \phi + 1/2])$  は  $\mathcal{D}$  の t-構造の核であり、よって Abel 圈であることに注意する。ここで  $E$  が  $\tau$ -半安定ではないと仮定する。すると完全三角形

$$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A[1] \quad (A, B \in \mathcal{Q}((\phi - \eta, \phi + \eta)))$$

が存在して  $\arg W(A) > \arg W(B)$  となる。これは  $\text{Im}(W(A)/W(B)) > 0$  とも同値である。一方、上の完全三角形は、 $\mathcal{A}$  における完全系列でもある。 $\mathcal{C}$  は連結であることと  $\mathcal{W}_{(i,j)}$  の定め方から  $\text{Im}(Z(A)/Z(B)) > 0$  がいえる。しかしこれは

$E$  が  $\sigma$ -半安定であることに矛盾している。よって  $\tau \in \mathcal{C}'$  である。

以上より  $\mathcal{C}'$  は連結集合  $\mathcal{C}$  の開かつ閉集合であるから  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$  が従う。

最後に  $E \in \mathcal{S}$  に対して  $\text{cl}(E)$  が原始的であるとし、またある  $\sigma \in \mathfrak{B}$  に対して  $E$  が  $\sigma$ -半安定であるが  $\sigma$ -安定ではないと仮定する。 $\text{cl}(E)$  は原始的であるため、 $E$  の  $\sigma$ -安定性に関する JH 因子  $A_1, A_2$  であって  $\text{cl}(A_1)$  と  $\text{cl}(A_2)$  が一次独立となるものが存在する。また  $A_i \in \mathcal{T}$  であるため、ある  $j_1, j_2 \in J$  が存在して  $\text{cl}(A_i) = v_{j_i}$  となる。 $A_1$  と  $A_2$  の位相は等しいため、 $\sigma$  は  $\mathcal{W}_{j_1, j_2}$  に含まれることがわかる。よって命題の最後の主張が従う。□

命題 11.46 における部分多様体  $\{\mathcal{W}_i : i \in I\}$  は壁 (wall) と呼ばれ、連結成分  $\mathcal{C}$  は部屋 (chamber) と呼ばれる。 $v \in \Gamma$  を固定し、 $\sigma = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  に対して

$$M_\sigma(v) := \{E \in \mathcal{A} : E \text{ は } Z\text{-半安定で } \text{cl}(E) = v\} / \cong$$

と定義する。このとき、問題 11.45 および命題 11.46 により  $\text{Stab}_\Gamma(\mathcal{D})$  上に局所有限個の壁が存在して、 $M_\sigma(v)$  は部屋内では一定であるが、壁を越えるとジャンプし得ることがわかる。このようにして得られる壁を、 $v$  についての壁と呼ぶことにする。

ここで、 $X$  が滑らかな射影的代数曲面の場合に戻る。この場合、極大体積極限の近傍 (11.22) における壁と部屋の構造は比較的よく研究されている。簡単のため、 $\rho(X) = 1$  の場合に限定して知られている結果を述べる。このとき  $\text{NS}(X)$  はある豊富因子  $H$  に付随する直線束  $\mathcal{O}_X(H)$  で生成されている。そこで、 $x, y \in \mathbb{R}$ 、 $y > 0$  に対し、 $B := xH, \omega := yH$  とおけば

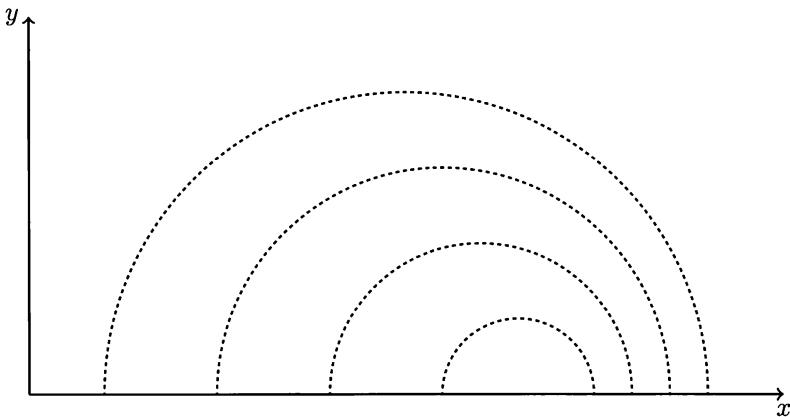
$$B + i\omega = (x + iy)H$$

と記述できる。特に  $A(X)_\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V(X)$  は  $(x, y)$  平面における上半平面と同一視できる。また、 $r, l, 2m \in \mathbb{Z}$  を用いて

$$v := (r, lH, m) \in \Gamma = \text{Im}(\text{ch})$$

と定める。

**定理 11.47 ([Mac14a])** 上の状況で、 $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$  を  $\text{Stab}(X)$  における  $v$  についての壁とする。このとき  $V(X) \cap \mathcal{W}_i$  は、ある  $c \in \mathbb{Q}$  で定義される次の半円  $\mathcal{W}_c$  である。

図 11.1  $V(X)$  における壁の図

$$(x - c)^2 + y^2 = \left(c - \frac{l}{r}\right)^2 - \frac{\Delta_H(v)}{r^2 H^2} \quad (y > 0) \quad (11.24)$$

さらに、 $\mathcal{W}_c \neq \mathcal{W}_{c'}$  ならば一方は他方の内部に含まれる。また  $\mathcal{W}_c$  の半径は  $v$  を固定すると上に有界であり、特に  $v$  についてのすべての壁は 1 つの半円  $\mathcal{W}_c$  の内部に含まれる。

**証明** 命題 11.46 の証明に従って壁を具体的に計算すればよい。詳細は [Mac14a, Theorem 3.1, 3.11] を参照されたい。□

定理 11.47 における壁を  $(x, y)$  平面上に図示すると図 11.1 の破線のようになる。

$V(X)$  における壁の記述を応用して、 $\mathbb{P}^2$  上の Bridgeland 安定対象と、ある種の旗表現との関係を与えることができる。さて、定理 4.45 により、各  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $D^b(\mathbb{P}^2)$  には強例外生成列

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k+1))$$

が存在した。さらに例 7.9 および問題 7.10 によって  $D^b(\mathbb{P}^2)$  の部分圏

$$\mathcal{A}(k) := \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)[2], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)[1], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k+1) \rangle_{\text{ex}}$$

は  $D^b(\mathbb{P}^2)$  の有界な t-構造の核であり、さらに図 11.2 における関係式付き旗  $Q$  の有限次元表現のなす圏  $\text{rep}(Q, \rho)$  と同値になる。関係式は

$$A \sqsupseteq_{\sqsupseteq_{\sqsupseteq}}^{x_1} B \sqsupseteq_{\sqsupseteq_{\sqsupseteq}}^{y_1} C$$

図 11.2 簾  $Q$ 

$$x_i y_j = x_j y_i \quad (1 \leq i, j \leq 3)$$

で与えられる。また、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)[2], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)[1], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k+1)$  がそれぞれ頂点  $C, B, A$  に対応する単純対象と同一視される。

$\text{Stab}(\mathbb{P}^2)$  の部分集合

$$\text{Stab}(\mathcal{A}(k))$$

を、Abel 圈  $\mathcal{A}(k)$  上の安定性条件全体の集合とする。このとき、 $\text{Stab}(\mathcal{A}(k))$  の点は  $\mathcal{A}(k)$  の 3 つの単純対象  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k-1)[2], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)[1], \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k+1)$  の中心電荷による像を上半平面  $\mathbb{H}$  に指定すれば決まるため、同型

$$\text{Stab}(\mathcal{A}(k)) \cong \mathbb{H}^{\times 3}$$

が成り立つ。 $V(\mathbb{P}^2)$  に対応する安定性条件は  $\text{Coh}(\mathbb{P}^2)$  の傾斜を用いて構成されたものであり、一方  $\text{Stab}(\mathcal{A}(k))$  に対応する安定性条件は簾表現から構成されたものである。よって両者の構成方法は異なるものの、実はこれらは (11.4) で与えた  $\mathbb{C}$  の  $\text{Stab}(\mathbb{P}^2)$  への右作用を施すことで重なりがある。図 11.1 と同様に、 $V(\mathbb{P}^2)$  を  $(x, y)$  平面における上半平面と同一視すると、次が成り立つ。証明の詳細は [ABCH13, Proposition 7.5] を参照されたい。

**命題 11.48**  $V(\mathbb{P}^2)$  において、 $V(\mathbb{P}^2) \cap (\text{Stab}(\mathcal{A}(k)) \cdot \mathbb{C})$  は

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, (x - k)^2 + y^2 < 1\}$$

で与えられる。

$V(\mathbb{P}^2)$  の部分集合

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, (x - k)^2 + y^2 < 1\}$$

は簾領域 (quiver region) と呼ばれる。これは図 11.3 のようになる。この簾領域の図と定理 11.47 を組み合わせると、次を得る。

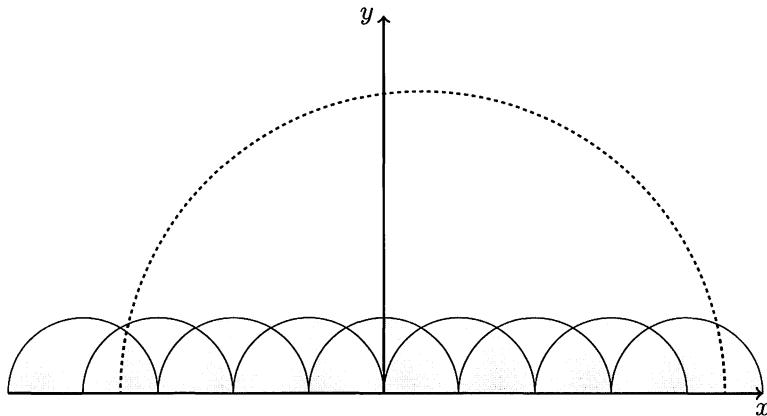


図 11.3 簾領域（網かけの部分）

**定理 11.49** 任意の  $\sigma \in V(\mathbb{P}^2)$  および  $v \in H^{2*}(\mathbb{P}^2, \mathbb{Q})$  に対して、ある  $v' \in \mathbb{Z}^3$  と Abel 圈  $\text{rep}(Q, \rho)$  上の安定性条件  $\tau$  が存在して、 $M_\sigma(v)$  は次元ベクトルが  $v'$  である  $\tau$ -半安定な  $\text{rep}(Q, \rho)$  の対象の同型類の集合と同一視できる。

**証明**  $\sigma \in V(\mathbb{P}^2)$  および  $v \in H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{Q})$  に対して、(11.24) の形の半円で  $\sigma$  を通るものがただ 1 つ存在する。定理 11.47 より、 $M_\sigma(v)$  はこの半円に沿って不変である。この半円を図 11.3において破線で表すと、これは簾領域と交わることがわかる。よって定理が従う。□

## 11.11 K3 曲面上の安定性条件の空間

この節では、K3 曲面上の安定性条件の空間に関する Bridgeland の結果 [Bri08] を紹介する。 $S$  を K3 曲面とすると、5.7 節で定義した Mukai 格子  $(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}), (-, -))$  の部分格子  $N(S)$  を

$$\begin{aligned} N(S) &:= \tilde{H}^{1,1} \cap H^{2*}(S, \mathbb{Z}) \\ &= H^0(S, \mathbb{Z}) \oplus \text{NS}(S) \oplus H^4(S, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

で定義すると  $N(S) = \Gamma(:= \text{Im}(\text{ch}))$  となる。 $(N(S), (-, -))$  は符号数  $(2, \rho(S))$

の格子である。

**注意 11.50** この節では、11.3 節で考えた群準同型  $\text{cl}$  として Mukai ベクトル (4.3) をとる写像

$$v(-) = \text{ch}(-)\sqrt{\text{td}_S}: K(S) \rightarrow N(S)$$

を選んで議論する。Mukai ベクトルの代わりに Chern 標数を用いても空間  $\text{Stab}(S)$  自体は変わらないが、 $\text{Hom}(N(S), \mathbb{C})$  への忘却写像には、それが生じることに注意する。

格子  $N(S)$  に入る Mukai 内積 (5.25) により、 $\text{Hom}(N(S), \mathbb{C})$  は  $N(S)_\mathbb{C}$  と同一視される。これにより、定理 11.17 における  $\text{Stab}(S)$  上の忘却写像は

$$\pi: \text{Stab}(S) \rightarrow N(S)_\mathbb{C} \quad (11.25)$$

と書ける。 $\text{Aut}(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}))$  を Mukai 格子  $\tilde{H}(S, \mathbb{Z})$  の Hodge 構造および Mukai 内積を保つ自己同型群とすると、群準同型

$$\varpi: \text{Auteq}(D^b(S)) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}))$$

が存在する。このとき

$$\text{Auteq}_0(D^b(S)) := \text{Ker } \varpi$$

とおく。また、

$$\text{Stab}^*(S)$$

を極大体積極限の近傍を含む  $\text{Stab}(S)$  の連結成分とし、

$$\text{Auteq}^*(D^b(S))$$

を連結成分  $\text{Stab}^*(S)$  を保つ  $\text{Auteq}(D^b(S))$  の部分群とする。また、

$$\text{Auteq}_0^*(D^b(S)) := \text{Auteq}_0(D^b(S)) \cap \text{Auteq}^*(D^b(S))$$

と定める。さらに、 $N(S)_\mathbb{C}$  の部分集合

$$\mathcal{P}(S)$$

を  $\Omega \in N(S)_\mathbb{C}$  であって  $\text{Re}(\Omega)$  と  $\text{Im}(\Omega)$  が  $N(S)_\mathbb{R}$  の正定値平面を張るものたちからなる集合とすると、これは 2 つの連結成分  $\mathcal{P}^+(S)$  と  $\mathcal{P}^-(S)$  を持つ：

$$\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}^+(S) \coprod \mathcal{P}^-(S)$$

ここで豊富因子  $\omega$  に対して  $e^{i\omega} \in \mathcal{P}(S)$  であるが、連結成分  $\mathcal{P}^+(S)$  はすべての豊富因子  $\omega$  に対して  $e^{i\omega} \in \mathcal{P}^+(S)$  となるように定める。

$N(S)$  の部分集合を

$$\Delta := \{\delta \in N(S) : (\delta, \delta) = -2\}$$

と定め、さらに各  $\delta \in \Delta$  に対し、複素超平面  $\delta^\perp$  を

$$\delta^\perp := \{v \in N(S)_\mathbb{C} : (v, \delta) = 0\}$$

とおく。また

$$\mathcal{P}_0^+(S) := \mathcal{P}^+(S) \setminus \bigcup_{\delta \in \Delta} \delta^\perp$$

と定める。

**定理 11.51 ([Bri08, Theorem 1.1])** 忘却写像 (11.25) は写像

$$\pi: \text{Stab}^*(S) \rightarrow \mathcal{P}_0^+(S)$$

を誘導する。さらにこの写像は Galois 被覆であり、その被覆変換群は  $\text{Auteq}_0^*(D^b(S))$  で与えられる。

上の定理から特に、全射

$$\pi_1(\mathcal{P}_0^+(S)) \twoheadrightarrow \text{Auteq}_0^*(D^b(S))$$

が誘導され、これが同型になることと  $\text{Stab}^*(S)$  が単連結になることは同値である。さらに強く、安定性条件の空間のトポロジーを調べることで K3 曲面の導来圏の自己同値群に関するより強い結果がもたらされると期待するのが、以下に述べる Bridgeland による予想 11.52 である。

$\mathcal{P}(S)$  の連結成分  $\mathcal{P}^+(S)$ ,  $\mathcal{P}^-(S)$  を保つ自己同型からなる  $\text{Aut}(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}))$  の部分群を

$$\text{Aut}^+(\tilde{H}(S, \mathbb{Z}))$$

とするとこれは指数 2 の部分群となる。

**予想 11.52 ([Bri08, Conjecture 1.2])**  $\text{Auteq}(D^b(S))$  の  $\text{Stab}(S)$  への作用は  $\text{Stab}^*(S)$  を保つ。さらに  $\text{Stab}^*(S)$  は単連結である。よって完全系列

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{P}_0^+(S)) \rightarrow \text{Auteq}(D^b(S)) \rightarrow \text{Auteq}^+(\tilde{H}(S, \mathbb{Z})) \rightarrow 1$$

が存在する。

**注意 11.53** (i)  $\text{Auteq}^+(\tilde{H}(S, \mathbb{Z})) \subset \text{Im } \varpi$  は定理 5.43 (を少し強めた形, [Huy06, Corollary 10.13] 参照) を用いればわかる。逆の包含関係も [HMS09] で証明されている。つまり予想 11.52 の完全列の最後の全射性は既知の事実である。

(ii) 予想 11.52 は  $\rho(S) = 1$  の場合に [BB17] で証明されている。

(iii) K3 曲面は 2 次元 Calabi–Yau 多様体である。一方 2 次元 ADE 特異点の極小特異点解消は 2 次元局所 Calabi–Yau 多様体と呼ばれており、この場合も定理 11.51 の類似が [Bri09b] において示されている。さらに A 型特異点の極小特異点解消の安定性条件の空間は [IUU10] において、連結かつ単連結であることが示されている。

以降、この節では定理 11.51 の証明について述べる。まず、 $\text{Stab}(S)$  の部分集合

$$U(S) \subset \text{Stab}(S)$$

を、すべての点  $x \in S$  の構造層  $\mathcal{O}_x$  が、位相が等しい  $\sigma$ -安定対象となるような安定条件  $\sigma$  の集合として定める。命題 11.46 の最後の主張より、 $U(S)$  は  $\text{Stab}(S)$  の開部分集合である。問題 11.32 より、 $V(S) \subset U(S)$  がわかり、したがって

$$V(S) \cdot \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R}) \subset U(S)$$

がいえるが、以下で見るようにこの両辺は一致しない。

$B + i\omega \in A(S)_c$  に対して中心電荷を

$$Z_{B, \omega}^\dagger(E) := - \int e^{-i\omega} \text{ch}^B(E) \sqrt{\text{td}}_S$$

とおくと、この中心電荷は  $Z_{B, \omega}$  と  $\sqrt{\text{td}}_S$  の分だけ異なり、

$$Z_{B, \omega}^\dagger(E) = -\text{ch}_2^B(E) + \left( \frac{\omega^2}{2} - 1 \right) \text{ch}_0^B(E) + i\omega \text{ch}_1^B(E)$$

と記述できる。11.8 節で触れたように  $\sigma_{B, \omega} = (Z_{B, \omega}, \mathcal{B}_{B, \omega})$  は安定性条件を定めるが

$$\sigma_{B, \omega}^\dagger := (Z_{B, \omega}^\dagger, \mathcal{B}_{B, \omega})$$

は必ずしも安定性条件を定めるわけではない。一方で次の補題が成立する。

**補題 11.54** 任意の  $S$  上の球面層（つまり、球面対象となる連接層） $E$  に対して

$$Z_{B,\omega}^\dagger(E) \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \quad (11.26)$$

が成り立つならば、 $\sigma_{B,\omega}^\dagger \in \text{Stab}(S)$  となる。

**証明**  $v^B(E) := e^{-B}v(E)$  とおき、

$$v^B(E) = (v_0^B(E), v_1^B(E), v_2^B(E))$$

と記述する。補題 11.31 と同様に、 $E \in \text{Coh}(X)$  を  $\mu_{B,\omega}(E) = 0$  を満たす安定層とすると、 $Z_{B,\omega}^\dagger(E[1]) \in \mathbb{R}_{<0}$  が成り立つことを示せばよい。 $E$  の安定性と Serre 双対性定理より

$$\text{Hom}(E, E) = \text{Ext}^2(E, E)^\vee = \mathbb{C}$$

であるため、Hirzebruch–Riemann–Roch の定理より

$$(v^B(E), v^B(E)) = v_1^B(E)^2 - 2v_0^B(E)v_2^B(E) \geq -2$$

がいえる。もし  $(v^B(E), v^B(E)) \geq 0$  ならば補題 11.31 と同様に  $Z_{B,\omega}^\dagger(E[1]) \in \mathbb{R}_{<0}$  が従う。よって  $(v^B(E), v^B(E)) = -2$  としてよいが、このとき  $E$  は球面対象になるため主張は条件 (11.26) より従う。□

$\omega^2 > 2$  ならば補題 11.31 より条件 (11.26) は成り立つ。さらにこのとき  $\alpha := (\omega^2 - 2)/\omega^2 > 0$  とおくと関係式

$$Z_{\omega,B}^\dagger(-) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}^{-1} \circ Z_{\sqrt{\alpha}\omega,B}(-)$$

が成り立つので

$$\sigma_{B,\omega}^\dagger \in V(S) \cdot \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$$

となることがわかる。

一方、 $\omega^2 \leq 2$  ならば条件 (11.26) は必ずしも成り立つとは限らない。さらに条件 (11.26) を満たすとしても安定性条件  $\sigma_{B,\omega}^\dagger$  は  $U(S)$  の元ではあるが  $V(S) \cdot \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})$  の元とはならない。そこで

$$V^\dagger(S) := \{\sigma_{B,\omega}^\dagger : Z_{B,\omega}^\dagger \text{ は条件 (11.26) を満たす }\}$$

とおく。次の命題によって、 $U(S)$  が完全に決定されることになる。

**命題 11.55**  $\text{Stab}(S)$  の中に等式

$$V^\dagger(S) \times \widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R}) = U(S) \quad (11.27)$$

が成り立つ。特に  $U(S) \subset \text{Stab}^*(S)$  および  $\pi(U(S)) \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  が成り立つ。

**証明** まず任意の  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in U(S)$  に対して  $\pi(\sigma) \in \mathcal{P}(S)$  を示す。つまり、 $\text{Re}(Z)$  および  $\text{Im}(Z)$  が  $N(S)_\mathbb{R}$  の正定値平面を張ることを示す。 $N(S)_\mathbb{R}$  の符号数は  $(2, \rho(S))$  であるため、 $Z(v) = 0$  となる  $0 \neq v \in N(S)$  に対して  $(v, v) < 0$  を示せばよい。そこで  $(v, v) \geq 0$  とする。 $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  は標準的な  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  への作用により  $N(S)_\mathbb{C}$  に作用するが、 $\mathcal{P}(S)$  は上記の  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$  の作用で不变である。よって必要ならば  $\widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R})$  の作用を施することで、任意の  $x \in S$  に対して  $\mathcal{O}_x$  が位相 1 の  $\sigma$ -安定対象であるとしてよい。すると命題 11.37 によりある  $B + i\omega \in \text{NS}(S)_\mathbb{C}$  が存在して

$$\mathcal{P}((0, 1]) = \mathcal{B}_{B,\omega}, \quad \text{Im } Z = \text{Im } Z_{B,\omega}$$

が成り立つ。 $r(v)$  を  $v$  の  $H^0(S, \mathbb{C})$ -成分とする。 $r(v) = 0$  ならば  $v$  または  $-v$  は捩れ層の Mukai ベクトルとなる。また  $r(v) \neq 0$  ならば  $v$  または  $-v$  は  $\omega$ -安定層の Mukai ベクトルとなることが知られている ([Yos01a, Theorem 8.1], [Bri08, Theorem 5.3] を参照)。いずれの場合でも  $v$  または  $-v$  は  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の 0 ではない対象の Mukai ベクトルとなるため  $Z(v) \neq 0$  となる。これは  $Z(v) = 0$  の仮定に矛盾する。よって  $\pi(\sigma) \in \mathcal{P}(S)$  がえた。

$\mathcal{P}(S)$  の部分集合  $\mathcal{Q}(S)$  を

$$\mathcal{Q}(S) := \{\Omega \in \mathcal{P}(S) : (\Omega, \Omega) = 0, (\Omega, \overline{\Omega}) > 0, r(\Omega) = 1\}$$

とおくと

$$\mathcal{P}(S) = \mathcal{Q}(S) \times \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \quad (11.28)$$

が成り立つ。 $\mathcal{Q}(S)$  は領域

$$\mathcal{Q}'(S) = \{B + i\omega \in \text{NS}(S)_\mathbb{C} : \omega^2 > 0\}$$

と指数写像  $\Omega = e^{B+i\omega}$  で同型になっている。よって  $\sigma \in U(S)$  に対して  $\pi(\sigma) \in$

$\mathcal{P}(S)$  であることから、 $g \in \widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$  が一意的に存在して  $\sigma \cdot g$  は任意の  $x \in S$  に対して  $\mathcal{O}_x$  が位相 1 の安定対象となり、さらにその中心電荷はある  $B + i\omega \in \mathcal{Q}'(S)$  が存在して  $Z_{B,\omega}^\dagger$  と書ける。命題 11.37 により  $\omega$  は豊富となり、したがって  $\sigma \cdot g \in V^\dagger(S)$  がいえる。よって (11.27) が示された。特に  $U(S) \subset \mathrm{Stab}^*(S)$  がいえる。

$\pi(U(S)) \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  を示そう。 $\mathcal{K}(S)$  を

$$\mathcal{K}(S) := \{\Omega = e^{B+i\omega} \in \mathcal{Q}(S) : B + i\omega \in A(S)_c\}$$

とおくと、 $\pi(\sigma_{B,\omega}^\dagger) = e^{B+i\omega}$  であるため、特に  $\pi(V^\dagger(S)) \subset \mathcal{K}(S)$  となってい。次に、 $\Delta^+ \subset \Delta$  を

$$\Delta^+ := \{\delta \in \Delta : r(\delta) > 0\}$$

とおく。任意の  $\delta \in \Delta^+$  に対して  $\delta$  を Mukai ベクトルに持つ球面ベクトル束の存在が知られており（例えば [Bri08, Theorem 5.3] を用いることで容易に示せる）、これと条件 (11.26) より  $\pi(V^\dagger(S))$  は

$$\mathcal{L}(S) := \{\Omega \in \mathcal{K}(S) : \text{任意の } \delta \in \Delta^+ \text{ に対して } (\Omega, \delta) \notin \mathbb{R}_{\leq 0}\}.$$

と一致する。 $\mathcal{L}(S)$  は  $\mathcal{P}_0^+(S)$  の部分集合であり、特に (11.27) と合わせて  $\pi(U(S)) \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  が示された。□

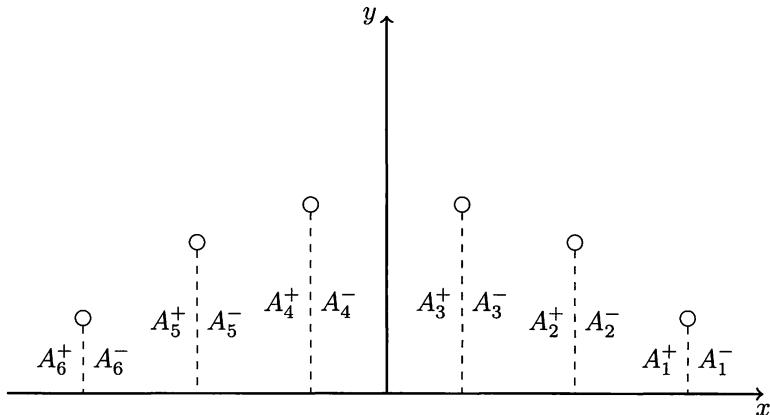
**例 11.56** 例えれば  $\rho(S) = 1$  の場合、 $\mathcal{L}(S)$  は  $\mathrm{NS}(S)_c = \mathbb{R}^2$  の上半平面の部分集合とみなせ、これは図 11.4 のようになる。ここで  $\mathrm{Pic}(S)$  の豊富生成元を  $\mathcal{O}_S(H)$  として、 $B + i\omega = (x + iy)H$  とおいた。

次の課題は、 $U(S)$  の境界  $\partial U(S)$  を調べることである。 $U(S)$  の定義および問題 11.9 より、 $\sigma \in \partial U(S)$  に対してすべての点の構造層  $\mathcal{O}_x$  が半安定になるが、そのうちのいずれかが安定ではなくなることに注意する。次の命題が示される。

**命題 11.57**  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \partial U(S)$  を  $U(S)$  の境界の一般の点とする。このとき、次のいずれかが成立する。

(A<sup>+</sup>): 階数が  $r$  の球面ベクトル束  $A$  が存在して、 $\{\mathcal{O}_x : x \in S\}$  の  $\sigma$ -安定成分は  $A$  と  $T_A(\mathcal{O}_x)$  に限る。ここで  $T_A$  は  $A$  に付随する球面捻りである。各  $\mathcal{O}_x$  の Jordan–Hölder フィルトレーションは

$$0 \rightarrow A^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow T_A(\mathcal{O}_x) \rightarrow 0$$

図 11.4  $\mathcal{L}(S)$  の図

で与えられる。

( $A^-$ ): 階数が  $r$  の球面ベクトル束  $A$  が存在して,  $\{\mathcal{O}_x : x \in S\}$  の  $\sigma$ -安定成分は  $A[2]$  と  $T_A^{-1}(\mathcal{O}_x)$  に限る。各  $\mathcal{O}_x$  の Jordan–Hölder フィルトレーションは

$$0 \rightarrow T_A^{-1}(\mathcal{O}_x) \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow A^{\oplus r}[2] \rightarrow 0$$

で与えられる。

( $C_k$ ): 非特異有理曲線  $C \subset S$  および整数  $k$  が存在して,  $\mathcal{O}_x$  は  $x \notin C$  ならば  $\sigma$ -安定であり,  $x \in C$  ならば  $\mathcal{O}_x$  の Jordan–Hölder フィルトレーションは

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(k+1) \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_C(k)[1] \rightarrow 0$$

となる。

ここで上の短完全系はすべて,  $\mathcal{O}_x$  の位相を  $\phi$ としたとき  $\mathcal{P}(\phi)$  における短完全系である。さらに,  $\sigma$  が  $A^-$  を満たすことと  $T_A^2(\sigma)$  が  $A^+$  を満たすことは同値である。同様に,  $\sigma$  が  $C_k$  を満たすことと  $T_{\mathcal{O}_C(k)}(\sigma)$  が  $C_{k-1}$  を満たすことは同値である。

**証明** ここでは簡単のため,  $\rho(S) = 1$  の場合に限定して命題を証明する。この場合,  $S$  には非特異有理曲線が存在しないため, ( $A^+$ ) または ( $A^-$ ) が成立することを示す。一般の場合については [Bri08, Theorem 12.1] を参照されたい。

$\sigma \in \partial U(S)$  であるため、各  $x \in S$  に対する  $\mathcal{O}_x$  は位相が等しい  $\sigma$ -半安定対象である。 $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$  の作用を施して、これらの位相が 1 であるとしてよい。 $W(S) \subset U(S)$  を各  $\mathcal{O}_x$  の位相が 1 となる部分集合とする。すると、 $\sigma \in \partial W(S)$  である。 $\sigma \notin U(S)$  であるため、ある  $x \in X$  が存在して  $\mathcal{O}_x$  は  $\sigma$ -安定ではない。よって捕題 11.60 により、ある  $\sigma$ -安定な球面対象  $A \in \mathcal{P}(1)$  が存在して  $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_x) \neq 0$  または  $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, A) \neq 0$  が成り立つ。以降、前者の場合に  $(A^+)$  が成立することを示す。後者の場合も同様に  $(A^-)$  が成立することが示されるため、後者の場合は省略する。

部分格子  $L \subset N(S)$  を  $v(\mathcal{O}_x)$  と  $v(A)$  が張る階数 2 の部分格子とする。 $\sigma$  は  $\partial U(S)$  の一般の点なので、 $\sigma$  の近傍での  $U(S)$  の境界は  $Z(A)/Z(\mathcal{O}_x) \in \mathbb{R}_{>0}$  で与えられる。このことと  $L$  が原始的である（問題 11.58 参照）ことから、 $E \in D^b(S)$  が  $Z(E) \in \mathbb{R}$  を満たすならば  $v(E) \in L$  であると仮定してよい。

まず、 $A$  が連接層であることを示す。 $\tau = (W, Q) \in W(S)$  を  $d(\mathcal{P}, Q) < \varepsilon \ll 1$  となるようにとる。 $A$  は  $\sigma$ -安定なので、 $\tau$ -安定でもあり、よってある  $\phi \in \mathbb{R}$  に対して  $A \in \mathcal{Q}(\phi)$  となる。 $A \in \mathcal{P}(1)$  より、 $\phi \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  である。また、 $W(S)$  の定義から  $\mathcal{O}_x \in \mathcal{Q}(1)$  である。 $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_x) \neq 0$  であることから  $\phi \leq 1$  が従うが、 $\phi = 1$  ならば  $\mathcal{O}_x$  が  $\tau$ -安定であることに反するため  $\phi < 1$  である。よって  $\phi \in (1 - \varepsilon, 1)$  となる。命題 11.37 より  $\mathcal{Q}((0, 1])$  は  $\mathrm{Coh}(S)$  の傾斜で得られるため、 $i \neq 0, -1$  で  $\mathcal{H}^i(A) = 0$  である。よって完全三角形  $\mathcal{H}^{-1}(A)[1] \rightarrow A \rightarrow \mathcal{H}^0(A)$  を得る。 $C = \mathcal{H}^{-1}(A)[1]$ ,  $D = \mathcal{H}^0(A)$  とおき、 $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$  と仮定して矛盾を導く。命題 11.37 より  $D \in \mathcal{Q}((-1, 1])$  であり、これより  $D \in \mathcal{P}([-1, 1])$  がいえる。同様に  $C \in \mathcal{Q}((0, 2])$  であり、よって  $C \in \mathcal{P}([0, 2])$  である。捕題 11.61 を用いて  $C \in \mathcal{P}(0)$ ,  $D \in \mathcal{P}(1)$  が従う。よって  $v(C) \in L$ ,  $v(D) \in L$  となることから、整数  $\lambda_C, \mu_C, \lambda_D, \mu_D$  が存在して

$$v(C) = \lambda_C v(A) + \mu_C v(\mathcal{O}_x), \quad v(D) = \lambda_D v(A) + \mu_D v(\mathcal{O}_x) \quad (11.29)$$

と書ける。 $v(A) = v(C) + v(D)$  より  $\lambda_C + \lambda_D = 1$ ,  $\mu_C + \mu_D = 0$  である。また  $C \in \mathcal{P}(0) \subset \mathcal{Q}((-1, 1))$  と  $C \in \mathcal{Q}((0, 2])$  より  $C \in \mathcal{Q}((0, 1))$  であり、同様に  $D \in \mathcal{Q}((1 - \varepsilon, 1])$  である。よって  $\mathrm{Im} W(C) > 0$ ,  $\mathrm{Im} W(D) \geq 0$  であり、等式 (11.29) より  $\lambda_C > 0$ ,  $\lambda_D \geq 0$  が従う。もし  $\lambda_D = 0$  ならば  $v(D) = \mu_D v(\mathcal{O}_x)$  より  $v(D)^2 = 0$  となるが、一方捕題 11.62 より  $\mathrm{Ext}^1(D, D) = 0$  でもあるため  $v(D)^2 < 0$  である。これは矛盾するため  $\lambda_D > 0$  となるが、これは  $\lambda_C + \lambda_D = 1$  であることに反する。以上より  $C = 0$  または  $D = 0$  である。 $D = 0$  ならば  $A = \mathcal{H}^{-1}(A)[1]$  であり  $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_x) \neq 0$  に反する。よって  $D \neq 0$  であり、 $C = 0$  で

ある. 以上より  $A$  が連接層であることが示された.

次に  $A$  が局所自由層であることを示す. 連接層の完全系列

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

で  $A'$  が捩れ層,  $A''$  が捩れのない層であるものがとれる. 捕題 11.59 より  $\text{Ext}^1(A', A') = 0$  となる. そこで  $v(A') = (0, l, s)$  とおくと Riemann-Roch の定理より  $v(A')^2 = l^2 = -2 \hom(A', A') < 0$  となるが, これは  $\rho(S) = 1$  に反する. よって  $A' = 0$ , つまり  $A$  は捩れのない層である. また完全系列

$$0 \rightarrow A \rightarrow A^{\vee\vee} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

をとると,  $A^{\vee\vee}$  は局所自由層であり  $Q$  は台の次元が 0 の連接層である. 完全三角形  $Q[-1] \rightarrow A \rightarrow A^{\vee\vee}$  は  $D^b(S)$  のある有界 t-構造の核における完全系列となる. (例えば  $\text{Coh}(S)$  を 0 次元層を捩れ部分とする捩れ対で傾斜した t-構造の核を考えるとよい.) すると捕題 11.59 より  $\text{Ext}^1(Q, Q) = 0$  となるが,  $Q \neq 0$  ならば上と同様の議論で矛盾が生じる. よって  $Q = 0$ , すなわち  $A$  は局所自由層である.

各  $x \in S$  に対して,  $\mathcal{P}(1)$  における完全系列

$$0 \rightarrow A' \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow B \rightarrow 0$$

で  $A'$  の JH 成分がすべて  $A$  と同型, そして  $\text{Hom}(A, B) = 0$  となるものがとれる.  $\text{Ext}^1(A, A) = 0$  であるためある整数  $r$  に対して  $A' \cong A^{\oplus r}$  となる.  $\text{Hom}(A, -)$  を上の完全系列に当てはめて,  $r = \text{rank}(A)$  が従う. さらに射  $A^{\oplus r} \rightarrow \mathcal{O}_x$  は評価写像  $\mathbf{R}\text{Hom}(A, \mathcal{O}_x) \otimes A \rightarrow \mathcal{O}_x$  と一致しているため,  $B = T_A(\mathcal{O}_x)$  となる.

$B$  が  $\sigma$ -安定となることを示そう. 背理法により,  $B$  が  $\sigma$ -安定ではないと仮定する. すると捕題 11.60 により  $\sigma$ -安定な球面対象  $C \in \mathcal{P}(1)$  および 0 ではない射  $C \rightarrow B$  もしくは  $B \rightarrow C$  が存在する.  $\sigma$  が境界の一般の点であることから,  $v(C) \in L$  である.  $v(A)^2 = -2$ ,  $v(B)^2 = 0$ ,  $v(\mathcal{O}_x)^2 = 0$  を用いた簡単な計算により,  $v(C) = \pm v(A)$  が唯一の可能性であることがわかり, さらに  $A, C \in \mathcal{P}(1)$  であることから  $v(C) = v(A)$  となる. Riemann-Roch の定理より  $\chi(A, C) = 2$  となるため, Serre 双対性定理により  $\text{Hom}(A, C) \neq 0$  もしくは  $\text{Hom}(C, A) \neq 0$  となる.  $A$  および  $C$  は位相の等しい安定対象だったので,  $A \cong C$  が従う. しかし,

$$\text{Hom}(A, B) = \text{Hom}(T_A^{-1}(A), \mathcal{O}_x) = \text{Hom}(A[1], \mathcal{O}_x) = 0$$

であり、同様に  $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$  である。これは矛盾であるため、 $B$  は  $\sigma$ -安定対象である。

以上より  $\sigma$  が  $(A^+)$  を満たすことが証明された。安定性条件  $\sigma$  が  $(A^+)$  を満たすことと  $A$  および  $T_A(\mathcal{O}_x)$  がすべての  $x \in S$  に対して位相が等しい安定対象となることは同値になることに注意されたい。同様に、 $\sigma$  が  $(A^-)$  を満たすことと  $A[2]$  および  $T_A^{-1}(\mathcal{O}_x)$  がすべての  $x \in S$  に対して位相が等しい安定対象となることは同値である。これらの条件を満たす安定性条件は自己同値  $T_A^2$  によって移りあっていているため、命題の最後の主張が従う。□

**問題 11.58**  $S$  を K3 曲面とし、 $A \in D^b(S)$  を球面対象とする。このとき  $v(A)$  と  $v(\mathcal{O}_x)$  が張る  $N(S)$  における部分格子  $L$  は原始的、つまり  $N(S) \cap L_{\mathbb{R}} = L$  が成立することを示せ。

次は [Muk87, Proposition 2.7] で本質的に示されているので、しばしば Mukai の補題と呼ばれる。<sup>3</sup>

**補題 11.59**  $\mathcal{A} \subset D^b(S)$  を有界な t-構造の核とし、

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \tag{11.30}$$

を  $\mathcal{A}$  における完全系列で  $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$  となるものとする。このとき、不等式

$$\mathrm{ext}^1(A, A) + \mathrm{ext}^1(C, C) \leq \mathrm{ext}^1(B, B)$$

が成り立つ。

**証明** Serre 双対性定理より、 $E, F \in D^b(S)$  に対して  $\mathrm{ext}^i(E, F) = \mathrm{ext}^{2-i}(F, E)$  が成り立つ。Riemann–Roch の定理と合わせると、示したい不等式は、不等式

$$\mathrm{hom}(A, A) + \mathrm{hom}(C, C) + \mathrm{hom}(C, A) \leq \mathrm{ext}^1(C, A) + \mathrm{hom}(B, B)$$

と同値である。この不等式は完全系列

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}(C, A) \rightarrow \mathrm{Hom}(B, B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(A, A) \oplus \mathrm{Hom}(C, C) \rightarrow \mathrm{Ext}^1(C, A)$$

から従う。上の完全系列は、次のように従う。まず  $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$  であることから、 $B$  の任意の自己射は完全系列  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  の自己射を誘導する。

<sup>3</sup> ただし [Muk87, Proposition 2.7] の完全列 (2.7.1) の最初の単射性は誤りである。

これは  $A, C$  の自己射で拡大  $C \rightarrow A[1]$  と可換になるものであることから、上の完全系列が従う。  $\square$

**補題 11.60**  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}(S)$  に対して、 $0 \neq E \in \mathcal{P}(1)$  をとする。もし  $\text{Ext}^1(E, E) = \mathbb{C}^2$  で  $E$  が  $\sigma$ -安定でないなら、 $\sigma$ -安定な球面対象  $A \in \mathcal{P}(1)$  が存在して  $\text{Hom}(A, E) \neq 0$  または  $\text{Hom}(E, A) \neq 0$  が成り立つ。

**証明**  $E$  は  $\sigma$ -安定でないため、 $\mathcal{P}(1)$  における完全系列  $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow 0$  で  $A, B \neq 0$  ではないものが存在する。補題 11.59 より

$$\text{ext}^1(A, A) + \text{ext}^1(B, B) \leq \text{ext}^1(E, E) = 2$$

であり  $\text{ext}^1(A, A)$  および  $\text{ext}^1(B, B)$  は偶数であるため、 $\text{ext}^1(A, A) = 0$  または  $\text{ext}^1(B, B) = 0$  が従う。前者の場合、 $A$  の JH フィルトレーションをとることで  $\mathcal{P}(1)$  における安定な球面対象  $A'$  および単射  $A' \hookrightarrow A$  を得る。特に  $\text{Hom}(A', E) \neq 0$  である。後者の場合、同様に  $\mathcal{P}(1)$  における安定な球面対象  $B'$  および全射  $B \rightarrow B'$  を得る。この場合、 $\text{Hom}(E, B') \neq 0$  である。  $\square$

**補題 11.61**  $\sigma = (Z, \mathcal{P}) \in \text{Stab}(S)$  とし、 $A \in \mathcal{P}(1)$  を  $\sigma$ -安定な対象とする。完全三角形  $C \rightarrow A \xrightarrow{f} D$  が  $f \neq 0$  であり、 $C \in \mathcal{P}(\geq 0)$ ,  $D \in \mathcal{P}(\leq 1)$  を満たしているとする。このとき  $C \in \mathcal{P}(0)$ ,  $D \in \mathcal{P}(1)$  である。

**証明** 完全三角形  $A \rightarrow D \rightarrow C[1]$  において  $A \in \mathcal{P}(1)$ ,  $C[1] \in \mathcal{P}(\geq 1)$  であることから  $D \in \mathcal{P}(\geq 1)$  である。仮定  $D \in \mathcal{P}(\leq 1)$  と合わせて  $D \in \mathcal{P}(1)$  がいえる。さらに  $f: A \rightarrow D$  は  $0$  ではなく  $A$  は  $\sigma$ -安定であったため  $f$  は  $\mathcal{P}(1)$  における単射である。よって  $C[1] \in \mathcal{P}(1)$  となり、 $C \in \mathcal{P}(0)$  が従う。  $\square$

**補題 11.62**  $E \in D^b(S)$  が  $\text{Ext}^1(E, E) = 0$  を満たすならば、任意の  $i$  について  $\text{Ext}^1(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^i(E)) = 0$  が成り立つ。

**証明** スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_i \text{Ext}^p(\mathcal{H}^i(E), \mathcal{H}^{i+q}(E)) \Rightarrow \text{Ext}^{p+q}(E, E)$$

が存在する。 $\dim S = 2$  であるから  $p \notin \{0, 1, 2\}$  ならば  $E_2^{p,q} = 0$  となるから  $E_2^{1,0} \cong E_3^{1,0} \cong \dots \cong E_\infty^{1,0}$  が成り立つ。仮定  $E^1 = 0$  を用いれば補題が従う。  $\square$

命題 11.57 を用いて、次を示そう。

**命題 11.63** 次の等式が従う。

$$\text{Stab}^*(S) = \bigcup_{\Phi \in \text{Auteq}^*(D^b(S))} \Phi_* \overline{U(S)}.$$

証明 任意の  $\tau \in \text{Stab}^*(S)$  に対して連続写像

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Stab}^*(S)$$

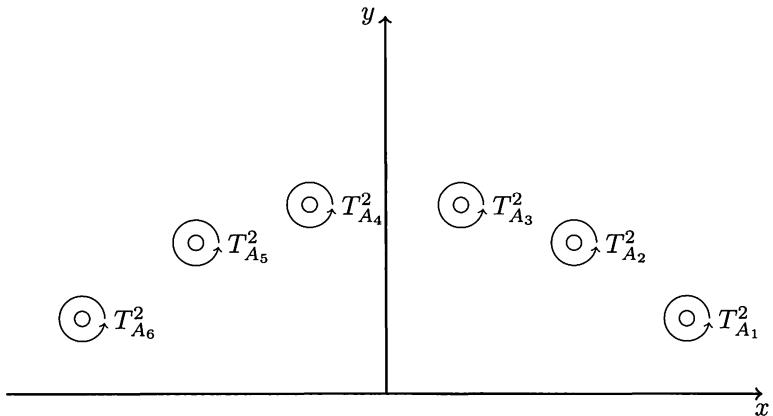
を選んで  $\gamma(0) \in U(S)$  かつ  $\gamma(1) = \tau$  とできる。このような連続写像を十分一般にとる。 $\gamma(0, t) \subset U(S)$  となる最大の  $t$  を  $t_1$  とすると、命題 11.57 より  $\gamma(t_1, t_1 + \varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  をある自己同値  $\Phi \in \text{Auteq}^*(D^b(S))$  で移すと  $U(S)$  に戻る。(この自己同値  $\Phi$  は命題 11.57 における  $T_A^{\pm 2}$  あるいは  $T_{\mathcal{O}_c(k)}^{\pm 1}$  で与えられる。これらは向きを保つため、 $\gamma(t_1, t_1 + \varepsilon)$  が  $U(S)$  に入ることに注意する。) そこで  $\Phi_* \gamma(t_1, t) \subset U(S)$  となる最大の  $t$  を  $t_2$  として同様の議論を繰り返していく。命題 11.46 によって  $\gamma([0, 1])$  には  $v([\mathcal{O}_x])$  に関する壁が有限個しか存在しないため、上記の議論は有限回で止まる。すると、最終的にある  $\Phi \in \text{Auteq}^* D^b(S)$  が存在して  $\tau \in \Phi_* \overline{U(S)}$  となることが従う。□

定理 11.51 は上の命題と  $\pi(\overline{U(S)})$  の記述を用いると証明することができる。以下、 $\rho(S) = 1$  の場合に定理 11.51 を証明する。この場合、 $S$  には滑らかな有理曲線が存在しないため、命題 11.57 において  $U(S)$  には  $(A^\pm)$  型の境界しか存在しない。よって命題 11.63 の証明に現れる自己同値  $\Phi$  は  $T_A^{\pm 2}$  の形のものに限定され、これらは  $N(S)$  に自明に作用するため  $\text{Auteq}_0^*(D^b(S))$  の元である。よって命題 11.63 より

$$\text{Stab}^*(S) = \bigcup_{\Phi \in \text{Auteq}_0^*(D^b(S))} \Phi_* \overline{U(S)} \quad (11.31)$$

となる。さらに  $\Phi_1, \Phi_2 \in \text{Auteq}_0^*(D^b(S))$  に対して、命題 11.37 により  $\Phi_{1*} U(S)$  と  $\Phi_{2*} U(S)$  は完全に一致するか交わらないかのいずれかである。

一方この場合、 $V^\dagger(S)$  の境界部分は図 11.4 の点線部分の右からの極限  $(A^+)$  と左からの極限  $(A^-)$  で与えられる。実際、右からの極限  $(A^+)$  と左からの極限  $(A^-)$  に対応する  $\partial V^\dagger(S)$  の安定性条件を具体的に構成することができる。 $(A^+)$  の場合、 $B + i\omega$  を図 11.4 の点線上の点（ただし白丸に対応する点は除く）とする。 $\mathcal{B}_{B, \omega}$  の部分圏で  $A[1]^{\oplus p}$ ,  $p \geq 1$  からなるものを捩れ部分とする捩れ対で傾斜したものを  $\mathcal{B}_{B, \omega}^\dagger$  とすると、 $(Z_{B, \omega}^\dagger, \mathcal{B}_{B, \omega}^\dagger)$  が  $(A^+)$  に対応する安定性条件を与える。 $(A^-)$  も同様である。特に  $\pi(\overline{V^\dagger(S)})$  は  $(x, y)$  上半平面において図 11.4 の点

図 11.5  $\mathcal{L}'(S)$  の図

線を埋めたものとなる（ただし白丸の点は除く。図 11.5 を参照。）そこで

$$\mathcal{L}'(S) := \pi(\overline{V^\dagger(S)})$$

とおくと、 $\mathcal{L}'(S)$  の点はすべての  $\delta \in \Delta^+$  に対して  $Z_{B,\omega}^\dagger(\delta) \neq 0$  となる  $B + i\omega \in A(S)_C$  に対応する。よって、(11.27) と (11.28) を合わせて

$$\mathcal{P}_0^+(S) = \mathcal{L}'(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) = \pi(\overline{U(S)}) \quad (11.32)$$

がいえる。上の等式と (11.31) より、 $\pi: \mathrm{Stab}^*(S) \rightarrow N(S)_C$  の像が  $\mathcal{P}_0^+(S)$  であることが証明された。

$\pi$  が Galois 被覆であってその被覆変換群が  $\mathrm{Auteq}_0^*(D^b(S))$  であることを証明しよう。(11.27), (11.32) より

$$\pi|_{U(S)}: U(S) \rightarrow \mathcal{L}(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \quad (11.33)$$

は被覆空間であり、その被覆変換群は  $\mathbb{Z}$  で与えられる。ここで  $1 \in \mathbb{Z}$  に対応する被覆変換はシフト  $[2] \in \mathrm{Auteq}_0^*(D^b(S))$  から誘導される。このことと (11.31) より、 $x \in \mathcal{L}(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  に対して十分小さい開近傍  $x \in U \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  をとると  $\pi^{-1}(U)$  は可算無限個の連結成分に分解し、各成分は  $\pi$  によって  $U$  と同型になり、それぞれの成分は  $\mathrm{Auteq}_0^*(D^b(S))$  の作用で互いに移り合うことがわかる。よって開集合  $\mathcal{L}(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  上で  $\pi$  は被覆写像であることが示された。

さらに  $x \in \mathcal{P}_0^+(S) \setminus \mathcal{L}(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$  に対して、十分小さな開近傍  $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{P}_0^+(S)$  をとる。すると  $\mathcal{U} \cap (\mathcal{L}(S) \cdot \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}))$  は連結成分  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  からなる。このとき、 $\Phi = T_A^{\pm 2}$  の形の自己同値が存在して  $\tilde{U}$  を次の集合の 1 つの連結成分

$$\left( \pi|_{\overline{U(S)}}^{-1}(\mathcal{U}_1) \cup \Phi(\pi|_{\overline{U(S)}}^{-1}(\mathcal{U}_2)) \right)^{\circ}$$

(ただし  $\circ$  は内部を表す) とすると、

$$\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \mathcal{U} \quad (11.34)$$

が同型となる。よって (11.31), (11.32), (11.33), (11.34) より  $\pi$  が被覆写像であることが示された。

$\pi$  が被覆写像であることがわかったので、後は  $\sigma, \tau \in \mathrm{Stab}^*(S)$  が  $\pi(\sigma) = \pi(\tau)$  を満たすならば  $\Phi \in \mathrm{Auteq}_0^*(D^b(S))$  が一意的に存在して  $\Phi(\tau) = \sigma$  となることを示せばよい。 $\Phi$  が存在することは上述の議論から従うため、一意性のみ示せばよい。以下を示せば十分である： $\sigma = (Z_{B,\omega}^\dagger, \mathcal{B}_{B,\omega})$  に対し  $\Phi(\sigma) = \sigma$  ならば  $\Phi = \mathrm{id}$  である。この場合各  $x \in S$  に対して  $\Phi(\mathcal{O}_x)$  は位相 1 の  $\sigma$ -安定対象となり、また  $v(\Phi(\mathcal{O}_x)) = v(\mathcal{O}_x)$  となるため、 $\Phi(\mathcal{O}_x)$  もある  $y \in S$  が存在して  $\Phi(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_y$  となる。すると  $\Phi$  は自己同型  $f \in \mathrm{Aut}(S)$  と  $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$  を用いて  $\Phi(E) = f^*(E \otimes \mathcal{L})$  と書ける。 $\Phi \in \mathrm{Auteq}_0^*(D^b(S))$  だったので、 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S$  および (K3 曲面の Torelli の定理 (定理 5.42) を用いて)  $f = \mathrm{id}$  がいえる。よって  $\Phi = \mathrm{id}$  である。

## 11.12 3 次元代数多様体上の安定性条件

これまで、予想 11.26 が 2 次元以下の代数多様体に対して成立することを見た。さらに代数曲面の場合、予想 11.26 を示すには BG 不等式から導かれる不等式 (11.11) を用いたことに注意しよう (補題 11.31 の証明を参照)。本節では滑らかな 3 次元射影的代数多様体に対する予想 11.26 について議論する。この場合の予想 11.26 はいまだ未解決であるが、t-構造の核  $\mathcal{A}_{B,\omega}$  の候補は存在する。この t-構造は論文 [BMT14] において、接層の圏の 2 重傾斜として構成された。まずは  $\mathcal{A}_{B,\omega}$  の構成について述べよう。

$X$  を滑らかな 3 次元射影的代数多様体とする。 $B + i\omega \in A(X)_{\mathbb{C}}$  に対して、11.7 節で構成した t-構造の核  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  を考察する。代数曲面の場合と異なり、組  $(Z_{B,\omega}, \mathcal{B}_{B,\omega})$  が Bridgeland 安定性条件を定めないことが容易にわかる。

補題 11.65 で 3 次元の結果に触れる前に次で 2 次元の場合を考えられたい。

**問題 11.64**  $S$  を滑らかな射影的代数曲面として,  $h$  を  $S$  上の豊富因子とする. このとき,  $0 \neq F \in \text{Coh}(S)$  に対して次のいずれかが成り立つことを示せ.

- (i)  $\text{rank}(F) > 0$ .
- (ii)  $\text{rank}(F) = 0$ ,  $h \text{ch}_1(F) > 0$ .
- (iii)  $\text{rank}(F) = h \text{ch}_1(F) = 0$ ,  $\text{ch}_2(F) > 0$ .

3 次元の場合は次が成り立つ.

**補題 11.65**  $0 \neq E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対し, 次のいずれかが成り立つ.

- (i)  $\omega^2 \text{ch}_1^B(E) > 0$ .
- (ii)  $\omega^2 \text{ch}_1^B(E) = 0$ ,  $\text{Im } Z_{B,\omega}(E) > 0$ .
- (iii)  $\omega^2 \text{ch}_1^B(E) = \text{Im } Z_{B,\omega}(E) = 0$  であり,  $-\text{Re } Z_{B,\omega}(E) > 0$ .

証明 問題 11.28 と補題 11.31 より明らかである.  $\square$

補題 11.65 と問題 11.64 により, 3 次元代数多様体上の対象  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  から定まるベクトル

$$(\omega^2 \text{ch}_1^B(E), \text{Im } Z_{B,\omega}(E), -\text{Re } Z_{B,\omega}(E)) \quad (11.35)$$

と代数曲面上の連接層  $F$  から定まるベクトル

$$(\text{rank}(F), h \text{ch}_1(F), \text{ch}_2(F)) \quad (11.36)$$

の類似性が見てとれる. 一方, 代数曲面  $S$  上の連接層  $F$  に対する傾斜関数  $\mu_h$  は

$$\mu_h(F) = \frac{h \text{ch}_1(F)}{\text{rank}(F)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

と定義されたことを思い出そう. すると, 三つ組 (11.35), (11.36) の類似性より,  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して定まる傾斜関数

$$\nu_{B,\omega}(E) := \frac{\text{Im } Z_{B,\omega}(E)}{\omega^2 \text{ch}_1^B(E)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

を考えることは自然である. そこで定義 5.7 の類似として次の定義に行き着く.

**定義 11.66** 対象  $E \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  は任意の  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  における部分対象  $0 \subsetneq F \subsetneq E$  に対して不等式

$$\nu_{B,\omega}(F) < (\leq) \nu_{B,\omega}(E/F)$$

が成り立つとき,  $\nu_{B,\omega}$ -(半)安定 ( $\nu_{B,\omega}$ -(semi)stable) であると呼ぶ.

通常の傾斜安定性条件の場合と同様に,  $\nu_{B,\omega}$ -安定性についても HN フィルトレーションの存在を示すことができる. そこで, (11.12) で考えた  $\mathrm{Coh}(X)$  の捩れ対  $(T_{B,\omega}, \mathcal{F}_{B,\omega})$  と同様に  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の部分圏の組  $(T'_{B,\omega}, \mathcal{F}'_{B,\omega})$  を

$$T'_{B,\omega} := \langle E \in \mathcal{B}_{B,\omega} : E \text{ は } \nu_{B,\omega}\text{-半安定で } \nu_{B,\omega}(E) > 0 \rangle_{\mathrm{ex}} \quad (11.37)$$

$$\mathcal{F}'_{B,\omega} := \langle E \in \mathcal{B}_{B,\omega} : E \text{ は } \nu_{B,\omega}\text{-半安定で } \nu_{B,\omega}(E) \leq 0 \rangle_{\mathrm{ex}}$$

とおくと  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  の捩れ対となる. (11.13) において  $\mathrm{Coh}(X)$  の捩れ対  $(T_{B,\omega}, \mathcal{F}_{B,\omega})$  を傾斜することで  $D^b(X)$  の有界 t-構造の核  $\mathcal{B}_{B,\omega}$  を得たのと同様に,  $D^b(X)$  の有界 t-構造の核

$$\mathcal{A}_{B,\omega} := \langle \mathcal{F}'_{B,\omega}[1], T'_{B,\omega} \rangle_{\mathrm{ex}} \subset D^b(X)$$

を得る. 次が [BMT14] において提唱された予想である.

**予想 11.67 ([BMT14])**  $X$  を滑らかな 3 次元射影的代数多様体とすると,

$$(Z_{B,\omega}, \mathcal{A}_{B,\omega}) \in \mathrm{Stab}(X)$$

が成立する.

### 11.13 Bogomolov–Gieseker 型不等式予想

前節と同様,  $X$  を滑らかな 3 次元射影的代数多様体とする. 予想 11.67 は  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象たちの Chern 数の間の不等式に関する予想を導くことを解説する. 問題 11.28 により

$$Z_{B,\omega}(E) = -\mathrm{ch}_3^B(E) + \frac{\omega^2}{2} \mathrm{ch}_1^B(E) + i \left( \omega \mathrm{ch}_2^B(E) - \frac{\omega^3}{6} \mathrm{ch}_0^B(E) \right)$$

であったことを思い出そう. まず, 次に注意する.

**補題 11.68** 任意の  $0 \neq E \in \mathcal{A}_{B,\omega}$  に対して  $Z_{B,\omega}(E) \in \mathbb{H}$  が成立することと, 任意の  $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  となる  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して次の不等式が成立することは同値である.

$$\mathrm{ch}_3^B(F) < \frac{1}{2} \omega^2 \mathrm{ch}_1^B(F). \quad (11.38)$$

**証明**  $\mathcal{A}_{B,\omega}$  の構成より, 任意の  $E \in \mathcal{A}_{B,\omega}$  に対して  $\mathrm{Im} Z_{B,\omega}(E) \geq 0$  となる.

さらに  $\text{Im } Z_{B,\omega}(E) = 0$  ならば、補題 11.31 の証明と同様の議論で

$$E \in \langle F[1], Q : F \in \mathcal{B}_{B,\omega} \text{ は } \nu_{B,\omega}\text{-半安定で } \nu_{B,\omega}(F) = 0, \dim Q = 0 \rangle_{\text{ex}}$$

となる。よって、このような  $E$  に対して  $Z_{B,\omega}(E) \in \mathbb{R}_{<0}$  が成立することと、 $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  を満たすすべての  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して不等式 (11.38) が成立することが同値になる。□

論文 [BMT14] では、不等式 (11.38) より強い次の不等式を予想している。

**予想 11.69 ([BMT14])** 任意の  $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  となる  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して次の不等式が成立する：

$$\text{ch}_3^B(F) \leq \frac{1}{18}\omega^2 \text{ch}_1^B(F). \quad (11.39)$$

**注意 11.70** (i)  $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  となる半安定対象  $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  は  $\omega^2 \text{ch}_1^B(F) > 0$  を満たすため、不等式 (11.39) は不等式 (11.38) より強い。

(ii) 不等式 (11.39) は、不等式 (11.11) において等号が成立するような対象に対して等号が成立するように係数が調整されている。

(iii) 予想 11.69 には反例が見つかっている ([Sch17])。この反例は  $\mathbb{P}^3$  の一点ブローアップ  $X$  上で得られ、よって  $\rho(X) = 2$  である。一方、 $\rho(X) = 1$  の状況では予想 11.69 がそのままの形で成り立つと期待されている。

予想 11.69 は等号  $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  を満たす  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F$  に対してのみ定式化されているが、実際等号が成り立つとは限らない場合の、次で述べる予想 11.71 と同値になることが示される。 $\overline{\Delta}_{B,\omega}$  は (11.11) で与えられるとして、 $\overline{\nabla}_{B,\omega}$  を

$$\overline{\nabla}_{B,\omega} := 12(\omega \text{ch}_2^B)^2 - 18\omega^2 \text{ch}_1^B \cdot \text{ch}_3^B$$

とおく。

**予想 11.71** 任意の  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  に対して、次の不等式が成立する。

$$\overline{\Delta}_{B,\omega}(F) + \overline{\nabla}_{B,\omega}(F) \geq 0. \quad (11.40)$$

**命題 11.72 ([BMS16, PT])** 予想 11.69 と予想 11.71 は同値である。

**証明** 予想 11.71 が正しいと仮定し、 $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  となる  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象  $F \in$

$\mathcal{B}_{B,\omega}$  をとる。 $\nu_{B,\omega}(F) = 0$  は等式  $\omega \operatorname{ch}_2^B(F) = \omega^3 \operatorname{ch}_0^B(F)/6$  と同値であり、これを不等式 (11.40) に代入すると不等式 (11.39) を得る。逆に予想 11.69 が正しいと仮定する。簡単のため、 $X$  の Picard 数が 1 であると仮定し、 $A(X)_\mathbb{C}$  を  $\mathbb{C}$  における上半平面と同一視する。 $v \in \Gamma$  をとり、 $F \in \mathcal{B}_{B,\omega}$  を  $\operatorname{ch}(F) = v$  を満たす  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象とする。すると、定理 11.47 と同様に  $A(X)_\mathbb{C}$  の中に互いに交わらない半円の壁の集合が存在して  $\operatorname{ch}(F) = v$  を満たす  $\nu_{B,\omega}$ -半安定対象の集合は部屋の内部では一定となる。この半円は (11.24) の形をしており、与えられた点  $(B, \omega) \in \mathbb{C}$  に対してこの点を通る (11.24) の形の半円  $\mathcal{W}_{B,\omega}$  がただ 1 つ存在する。一方、 $A(X)_\mathbb{C}$  内の曲線を

$$C_v := \{B + i\omega \in A(X)_\mathbb{C} : \operatorname{ch}_2^B(F) = \omega^3 \operatorname{ch}_0^B(F)/6\}$$

とおく。半円  $\mathcal{W}_{B,\omega}$  と曲線  $C_v$  には交点が存在し、これを  $(B', \omega')$  とする。 $F$  は  $\nu_{B',\omega'}$ -半安定であり、 $\nu_{B',\omega'}(F) = 0$  を満たす。 $(B', \omega')$  に対して予想 11.69 を当てはめて計算すると、不等式 (11.40) を得る。□

現時点では予想 11.69 が証明されている例はあまり多くはない。知られているのは以下の場合である。

- $X = \mathbb{P}^3$  の場合 [Mac14b].
- $X \subset \mathbb{P}^4$  が滑らかな 2 次超曲面の場合 [Sch14].
- $X$  が Picard 数 1 の主偏極 3 次元 Abel 多様体の場合 [MP15], [MP16].
- $X$  が 3 次元 Abel 多様体を有限群の自由な作用で商をとって得られる Calabi–Yau 多様体の場合 (A 型の Calabi–Yau 多様体と呼ばれる) [BMS16].
- $X$  が Picard 数 1 の 3 次元 Fano 多様体の場合 [Li19a].
- $X$  が  $\mathbb{P}^4$  内の滑らかな 5 次超曲面の場合 [Li19b] (ただし  $(B, \omega)$  には制限が付く).



# 第12章 Donaldson–Thomas 不変量

Donaldson–Thomas(DT) 不変量とは 1998 年に Thomas が Donaldson の指導の下で導入した 3 次元 Calabi–Yau 多様体の量子不変量である。大雑把にいうとこれは 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の安定層を数え上げる不変量である。特に階数が 1 の DT 不変量は 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の曲線を数え上げており、この場合は Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande により Gromov–Witten 不変量と呼ばれる別の不変量と等しい情報を持つことが予想された (MNOP 予想)。MNOP 予想は現時点では多くの場合に解決されているが、この予想の研究において DT 不変量の生成関数に関する様々な性質が連接層の導来圏の理論を応用することで証明されていった。この章では DT 不変量に関するこれらの性質を紹介し、連接層の導来圏がどのように使われるかを紹介する。

## 12.1 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間

以下、 $X$  を滑らかな 3 次元 Calabi–Yau 多様体とする。つまり、標準因子  $K_X$  が自明であり、 $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$  が成り立つものとする。例えば  $\mathbb{P}^4$  内の滑らかな 5 次超曲面は 3 次元 Calabi–Yau 多様体の例を与える。また、写像  $\text{ch}$  の像を

$$\Gamma := \text{Im} (\text{ch}: K(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Q})) \tag{12.1}$$

とおき、さらに  $X$  上の豊富因子  $\omega$  を固定する。 $X$  は 3 次元 Calabi–Yau 多様体なので、 $v \in \Gamma$  は

$$v = (r, D, -\beta, -n) \in H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6(X, \mathbb{Q})$$

と書ける。さらに同型  $H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ,  $H^6(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  による同一視の下、

$$r \in \mathbb{Z}, D \in H^2(X, \mathbb{Z}), 2\beta \in H^4(X, \mathbb{Z}), 6n \in \mathbb{Z} \quad (12.2)$$

とみなせることに注意する。

以上の設定の下,  $X$  上の安定層の(粗) モジュライ空間

$$M_\omega(v)$$

が定義され, 構成されることを5.4節で述べた。モジュライ空間  $M_\omega(v)$  の各点は,  $X$  上の  $\omega$ -安定層  $E$  であって,  $\text{ch}(E) = v$  となるものの同型類と1対1に対応している。モジュライ空間  $M_\omega(v)$  は準射影的スキームとなるが, 一般に射影的とは限らない。一方, 定理5.23によるとモジュライ空間  $M_\omega(v)$  の自然なコンパクト化

$$\overline{M}_\omega(v)$$

を構成することができる。 $\overline{M}_\omega(v)$  は射影的スキームであり,  $M_\omega(v)$  の各閉点は(5.13)のように書ける半安定層と一一に対応している。特に,  $\text{ch}(E) = v$  を満たすすべての  $\omega$ -半安定層  $E$  が  $\omega$ -安定となることと

$$\overline{M}_\omega(v) = M_\omega(v)$$

が成り立つことは同値である。特にこのとき  $M_\omega(v)$  は射影的になる。

**問題 12.1** 数値類(12.2)において  $r \geq 1$  であり,  $r$  と  $D\omega^2$  が互いに素であると仮定すると,  $M_\omega(v) = \overline{M}_\omega(v)$  が成立することを示せ。

## 12.2 完全障害理論

$E \in \text{Coh}(X)$  を  $\omega$ -安定層とし, それに対応する閉点を  $[E] \in M_\omega(v)$  と書くことにする。5.5節で述べたように,  $E$  の無限小変形の空間は  $\text{Ext}^1(E, E)$  と同一視され, 障害空間は  $\text{Ext}^2(E, E)$  と同一視される。大雑把にいうと, このことは  $M_\omega(v)$  が局所的にベクトル空間  $\text{Ext}^1(E, E)$  において  $\dim \text{Ext}^2(E, E)$  個の方程式の零点集合とみなせることを意味している。よって点  $[E]$  の近くにおける  $M_\omega(v)$  の仮想次元(virtual dimension)を

$$\text{vir.dim}_{[E]} M_\omega(v) := \dim \text{Ext}^1(E, E) - \dim \text{Ext}^2(E, E)$$

と定める。ここで  $X$  が3次元 Calabi–Yau 多様体であることと Serre 双対性によ

り

$$\mathrm{Ext}^2(E, E) = \mathrm{Ext}^1(E, E \otimes \omega_X)^\vee = \mathrm{Ext}^1(E, E)^\vee$$

がわかる。よって

$$\mathrm{vir.dim}_{[E]} M_\omega(v) = 0$$

となる。つまり、 $M_\omega(v)$  は本来 0 次元の空間であって欲しいものである。しかし、モジュライ空間  $M_\omega(v)$  は（仮に滑らかであったとしても）一般に 0 次元とは限らない。このような場合、「本来の 0 次元モジュライ空間」を  $M_\omega(v)$  上の 0 次元サイクルとして構成することは自然である。

**例 12.2**  $v = (0, 0, 0, 1)$  とすると、同型

$$X \xrightarrow{\cong} M_\omega(v) \quad x \mapsto [\mathcal{O}_x]$$

が存在する。特に  $M_\omega(v)$  は 3 次元となる。この場合、各点  $x \in X$  に対応する障害空間は

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)^\vee = T_X^\vee|_x = \Omega_X|_x$$

となる。よって  $M_\omega(v)$  は階数が 3 のベクトル束

$$V(T_X) \rightarrow X$$

の 0 切断の零点集合であるとみなすべきである。そこでベクトル束  $V(T_X) \rightarrow X$  の切断  $s$  であって、 $(s = 0) \subset X$  が 0 次元となるものが存在すると仮定しよう。すると、0 次元サイクル  $(s = 0)$  がなすサイクルは

$$e(\Omega_X) \in A_0(X) \tag{12.3}$$

となるはずである。そこで、(12.3) をこの場合の‘0 次元仮想サイクル’と定義すると、本来得るべき「正しいモジュライ空間」の基本類が得られたことになる。サイクル (12.3) の次数は  $-e(X)$  であり、後述するようにこれが  $v = (0, 0, 0, 1)$  の場合の DT 不変量を与える。

一般に変形理論から出発して仮想サイクルを構成するには、完全障害理論と呼ばれる概念を用いるとよいことが知られている ([BF97] 参照)。

**定義 12.3**  $\mathbb{C}$  上有限型スキーム  $M$  上の完全障害理論 (perfect obstruction the-

ory) とは、データ

$$(\mathcal{E}^\bullet, \phi), \quad \phi: \mathcal{E}^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M \quad (12.4)$$

であって、次の条件を満たすものである。

- $\mathcal{E}^\bullet$  は  $M$  上の完全複体であり、 $\mathcal{H}^i(\mathcal{E}^\bullet) = 0$  が  $i \neq 0, -1$  で成立する。
- $\phi$  は  $D^b(M)$  における射で、 $\mathcal{H}^0(\phi)$  は同型、 $\mathcal{H}^{-1}(\phi)$  が全射、となるものである。

ここで  $\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M$  は  $(-1)$  次で truncate された  $M$  上の余接複体 (cotangent complex) である ([Ill71] 参照)。

本書で扱う  $M$  は滑らかなスキーム  $N$  と閉埋め込み  $M \subset N$  が存在する場合に限っており、この場合は  $M$  を定義するイデアル層を  $I \subset \mathcal{O}_N$  として

$$\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M = (I/I^2 \rightarrow \Omega_N|_M) \quad (12.5)$$

と書ける。ここで  $\Omega_N|_M$  は次数 0 に位置している。特に (12.5) の右辺は閉埋め込み  $M \subset N$  の取り方に依存しない。

何らかのモジュライ空間  $M$  に対して、完全障害理論 (12.4) が「モジュライ理論的に」与えられたとしよう。すると  $\mathcal{H}^0(\mathcal{E}^{\bullet \vee})$  が  $M$  の接空間を与える、 $\mathcal{H}^1(\mathcal{E}^{\bullet \vee})$  がモジュライ理論における障害空間を表すことがわかる。

例えば  $M$  が安定層のモジュライ空間として与えられる場合、 $\mathcal{H}^0(\mathcal{E}^{\bullet \vee})$  の  $[E]$  におけるファイバーが  $\text{Ext}^1(E, E)$ 、 $\mathcal{H}^1(\mathcal{E}^{\bullet \vee})$  の  $[E]$  におけるファイバーが  $\text{Ext}^2(E, E)$  で与えられる完全障害理論  $(\mathcal{E}^\bullet, \phi)$  が存在することが期待される。

**例 12.4** 定義 12.3において  $I/I^2$  が局所自由層になる場合、 $\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M$  は完全複体であり、 $i \neq 0, -1$  において  $\mathcal{H}^i(\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M) = 0$  が成立する。よって  $(\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M, \text{id}_{\tau_{\geq -1} \mathbb{L}_M})$  は完全障害理論を与える。

**例 12.5**  $\mathcal{E}$  を滑らかな  $\mathbb{C}$  上有限型スキーム  $N$  上の局所自由層とする。ベクトル束  $V(\mathcal{E}) \rightarrow N$  の切断  $s$  に対し、 $M = (s = 0)$  とする。 $M$  の  $N$  におけるイデアル層を  $I$  とし、 $s$  を  $H^0(N, \mathcal{E}^\vee)$  の元とみなすと全射

$$s: \mathcal{E} \twoheadrightarrow I \subset \mathcal{O}_N$$

が得られる。上の射を  $M$  に制限することで、可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}|_M & \longrightarrow & \Omega_N|_M \\ s \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ I/I^2 & \longrightarrow & \Omega_N|_M \end{array}$$

を得る.  $\mathcal{E}^\bullet = (\mathcal{E}|_M \rightarrow \Omega_N|_M)$  とおき, (12.5)に注意すると, 縦の射は完全障害理論  $\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M$  を与えることがわかる.

$M = M_\omega(v)$  を 3 次元 Calabi-Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間とする. このモジュライ空間上の完全障害理論について議論する. すでに見たように,  $[E] \in M_\omega(v)$  における接空間  $\text{Ext}^1(E, E)$  および障害空間  $\text{Ext}^2(E, E)$  は互いに双対であった. 完全障害理論における自己双対性は, 次に述べる対称的完全障害理論の概念で定式化される.

**定義 12.6**  $\mathbb{C}$  上有限型スキーム  $M$  上の完全障害理論  $\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M$  は,  $D^b(M)$  における同型

$$\theta: \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{\cong} (\mathcal{E}^\bullet)^\vee[1]$$

であって,  $\theta^\vee[1] = \theta$  を満たすものが存在するとき, 対称的完全障害理論 (symmetric perfect obstruction theory) であると呼ぶ.

**例 12.7**  $N$  を滑らかな  $\mathbb{C}$  上有限型スキームとし,  $f \in \Gamma(N, \mathcal{O}_N)$  とする. すると  $df$  はベクトル束  $V(T_N) \rightarrow N$  の切断を与える.  $M = \{df = 0\} \subset N$  とすると, 例 12.5 の構成により完全障害理論

$$(T_N \xrightarrow{s} \Omega_N)|_M \rightarrow \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M \tag{12.6}$$

が得られる. 射  $s$  は局所的に  $f$  のヘシアンで与えられ, よって完全障害理論 (12.6) は対称的である.

(5.10) における関手  $M_\omega(v)$  がスキーム  $M_\omega(v)$  によって表現可能であると仮定する. (例えば注意 5.24 によって  $v$  が  $\omega$ -原始的ならばこの仮定は満たされる.) すると  $X \times M_\omega(v)$  上に普遍層

$$\mathcal{U} \in \text{Coh}(X \times M_\omega(v))$$

が存在する. また, 自然な射

$$\mathcal{O}_{X \times M_\omega(v)} \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times M_\omega(v)}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$$

の写像錐を  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times M_\omega(v)}(\mathcal{U}, \mathcal{U})_0$  とする。Thomas により次が示された。

**定理 12.8** ([Tho00])  $M = M_\omega(v)$  上に対称的完全障害理論

$$\mathcal{E}^\bullet := \mathbf{R}\pi_{M*}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times M}(\mathcal{U}, \mathcal{U})_0[2] \rightarrow \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M$$

が存在する。ここで  $\pi_M: X \times M \rightarrow M$  は射影である。

### 12.3 仮想サイクル

$M$  を  $\mathbb{C}$  上有限型スキームとして、 $\phi: \mathcal{E}^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M$  を  $M$  上の完全障害理論とする。このとき、仮想次元  $\text{rank}(\mathcal{E}^\bullet)$  で与えられる仮想サイクル (virtual cycle)

$$[M]^{\text{vir}} \in A_{\text{rank}(\mathcal{E}^\bullet)}(M)$$

を構成することができる。本書では  $[M]^{\text{vir}}$  の構成の詳細は必要としないため、その概略のみ説明することにする。詳細については、例えば [BF97] を参照されたい。

以下簡単のため、 $M$  が射影的であると仮定する。この場合、 $\mathcal{E}^\bullet$  は大域的に局所自由層の 2 項複体  $(\mathcal{E}^{-1} \rightarrow \mathcal{E}^0)$  で与えられ、さらに  $\phi$  が複体の間の射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^\bullet & & \mathcal{E}^{-1} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \\ \phi \downarrow & & \phi^{-1} \downarrow \\ \tau_{\geq -1}\mathbb{L}_M & & I/I^2 \longrightarrow \Omega_N|_M \end{array}$$

で実現されることが示される。ここで  $M \subset N$  は滑らかなスキーム  $N$  への閉埋め込みであり、 $I \subset \mathcal{O}_N$  は  $M$  を定義するイデアル層である。 $\phi$  の写像錐  $\text{Cone}(\phi)$  は次の複体で与えられる。

$$\text{Cone}(\phi): \mathcal{E}^{-1} \xrightarrow{d^{-2}} \mathcal{E}^0 \oplus I/I^2 \xrightarrow{d^{-1}} \Omega_N|_M$$

完全障害理論の条件から、 $\mathcal{H}^0(\text{Cone}(\phi)) = 0$  となり  $d^{-1}$  は全射であることがわかる。そこで、次の  $M$  上の錐の列を構成する。(錐の定義やその間の射については [BF97, Section 1] を参照。)

$$0 \rightarrow T_N|_M \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}_0 \times_M C(I/I^2) \rightarrow \mathcal{E}_1.$$

ここで  $\mathcal{E}_{-i} = (\mathcal{E}^i)^\vee$  であり、 $C(I/I^2)$  は次で与えられる。

$$C(I/I^2) := \mathbf{Spec}_{\mathcal{O}_M} S(I/I^2).$$

$I/I^2$  が局所自由層であるときは、 $C(I/I^2)$  はベクトル束  $V(I/I^2)$  と一致することに注意する。さらに自然な全射

$$S(I/I^2) \twoheadrightarrow \bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1}$$

によって  $C(I/I^2)$  の部分錐  $C_{M/N}$ （法錐と呼ばれる）が

$$C_{M/N} := \mathbf{Spec}_{\mathcal{O}_M} \left( \bigoplus_{d \geq 0} I^d/I^{d+1} \right) \subset C(I/I^2)$$

で定義される。法錐は次のように得ることもできる。 $N \times \mathbb{A}^1$  を  $M \times \{0\}$  に沿ってブローアップしたものを

$$\widetilde{N \times \mathbb{A}^1} \rightarrow N \times \mathbb{A}^1$$

とする。すると  $C_{M/N}$  は上のブローアップの例外集合の開集合となる。このことから、 $C_{M/N}$  の各既約成分の次元は  $\dim N$  となることがわかる。

また、写像  $\iota$  によって  $\mathcal{E}_0 \times_M C(I/I^2)$  は  $T_N|_M$  の  $M$  上の作用を持つことがわかる。具体的にはこの作用は、 $a \in T_N|_M$ ,  $b \in \mathcal{E}_0 \times_M C(I/I^2)$  を  $M$  の共通の点におけるファイバーの元として、 $a \cdot b = \iota(a) + b$  で与えられる。すると、この作用は部分錐

$$\mathcal{E}_0 \times_M C_{M/N} \subset \mathcal{E}_0 \times_M C(I/I^2)$$

を保つことが示される（[BF97, Lemma 3.2] 参照）。よって、商錐

$$C^{\text{vir}} := (\mathcal{E}_0 \times_M C_{M/N}) / T_N|_M \subset \mathcal{E}_1$$

を得る。法錐  $C_{M/N}$  の次元が  $\dim N$  であることから、 $C^{\text{vir}}$  の次元は  $\text{rank}(\mathcal{E}^0)$  であることに注意されたい。そこで  $s: M \rightarrow \mathcal{E}_1$  を 0 切断として、仮想サイクル  $[M]^{\text{vir}}$  は

$$[M]^{\text{vir}} := s^! C^{\text{vir}} \in A_{\text{rank}(\mathcal{E}^0)}(M)$$

と構成される。ここで  $s^!$  は Gysin 引き戻しである ([Ful98, Section 6.2] 参照)。

**問題 12.9**  $M$  が滑らかであるとし、完全障害理論が次のように与えられているとする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{-1} & \xrightarrow{0} & \mathcal{E}^0 \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_M. \end{array}$$

このとき、 $[M]^{\text{vir}}$  は  $\mathcal{E}_1 = (\mathcal{E}^{-1})^\vee$  の Euler 類  $e(\mathcal{E}_1)$  と一致することを示せ。

$(\mathcal{E}^\bullet \rightarrow \tau_{\geq -}\mathbb{L}_M)$  が対称的完全障害理論の場合、その対称性より  $\text{rank}(\mathcal{E}^\bullet) = 0$  である。よって 0 次元仮想サイクル

$$[M]^{\text{vir}} \in A_0(M)$$

を得る。さらに  $M$  が射影的ならば、上の仮想サイクルを積分して整数値

$$\int_{[M]^{\text{vir}}} 1 := \deg[M]^{\text{vir}} \in \mathbb{Z}$$

を得る。以上の準備の下、次の定義を得る。

**定義 12.10**  $X$  を 3 次元 Calabi–Yau 多様体とし、 $X$  上のモジュライ関手  $\mathcal{M}_\omega(v)$  がスキーム  $M_\omega(v)$  によって表現可能であるとする。さらに  $M_\omega(v) = \overline{M}_\omega(v)$  が成り立つとき **Donaldson–Thomas 不変量** (Donaldson–Thomas invariant) (以下、DT 不変量と省略) を

$$\text{DT}_\omega(v) := \int_{[M_\omega(v)]^{\text{vir}}} 1 \in \mathbb{Z}$$

で定義する。ここで  $[M_\omega(v)]^{\text{vir}}$  は定理 12.8 による  $M_\omega(v)$  上の対称的完全障害理論から構成される 0 次元仮想サイクルである。

$M_\omega(v) = \overline{M}_\omega(v)$  が成り立つときは、 $M_\omega(v)$  は射影的となるため定義 12.10 内の積分が定義できることになる。したがって、例えば注意 5.24 で述べたように  $v$  が  $\omega$ -原始的ならば  $\text{DT}_\omega(v)$  が定義される。

**問題 12.11** 定義 12.10において、さらに  $M_\omega(v)$  が滑らかであれば、 $\text{DT}_\omega(v) = (-1)^{\dim M_\omega(v)} e(M_\omega(v))$  が成り立つことを示せ。

以下の事実は、完全障害理論と仮想サイクルに関する一般論から示すことができ

る ([BF97, Proposition 7.2] 参照).

**定理 12.12** DT 不变量は  $X$  の変形で不变である. つまり滑らかな代数曲線  $C$  上の 3 次元 Calabi–Yau 多様体の 1 パラメータ変形  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow C$ , 相対的に豊富な  $\mathcal{X}$  上の因子  $\omega$ , そして  $v \in \Gamma(C, \mathbf{R}\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}})$  をとる. 各  $t \in C$  に対して  $(\mathcal{X}_t, v_t, \omega_t)$  が定義 12.10 の仮定を満たすなら,  $\mathcal{X}_t$  上の DT 不变量  $\mathrm{DT}_{\omega_t}(v_t)$  は  $t \in C$  に依存しない. ここで  $\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ ,  $v_t = v|_{\mathcal{X}_t}$ ,  $\omega_t = \omega|_{\mathcal{X}_t}$  とおいた.

## 12.4 Behrend 関数

一般に DT 不变量をその定義に従って計算することは容易ではない. 一方で, 問題 12.11 で見たようにモジュライ空間  $M_\omega(v)$  が滑らかになる場合には DT 不变量はモジュライ空間の位相的な Euler 数と符号を除いて一致する. モジュライ空間が特異点を持つ際には得られる DT 不变量は符号を除いても Euler 数とは一般には異なるが, それでもモジュライ空間の特異点に応じて重みを付けた Euler 数として記述することが可能である. これは Behrend [Beh09] によって, 超局所解析を応用することで発見された.

歴史的な順序は逆になるが, まずは 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間  $M_\omega(v)$  の局所構造について述べる. 例 12.7 で見たように, モジュライ空間が滑らかなスキーム上の関数の critical locus として記述できる場合, そこに自然な対称的完全障害理論が入る. 一方, 対称的完全障害理論が入るという事実は, モジュライ空間の特異点に大きな制約を与える. (例えば局所完全交差特異点しか持たなければ, 実際に滑らかになることが示される.) 一般に対称的完全障害理論の存在からモジュライ空間がある種の関数の critical locus として書けるということは従わないが, 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間であるという事実を用いるとそのような強い性質が従う. 正確な主張を述べると, 次のようになる.

**定理 12.13 ([JS12, Theorem 5.4])** 任意の  $p = [E] \in M_\omega(v)$  に対して, 解析的近傍  $p \in U \subset M_\omega(v)$ , 開複素多様体  $(0 \in) V \subset \mathrm{Ext}^1(E, E)$ , 正則関数  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ , および同型

$$U \cong \{df = 0\} \subset V$$

で  $p$  を 0 に移すものが存在する.

**注意 12.14** 現在では定理 12.13 より強い結果が知られている。例えば解析的近傍  $U$  は Zariski 開集合に置き換えることができ、開複素多様体  $V \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(E, E)$  はエタール射  $V \rightarrow \mathrm{Ext}^1(E, E)$  に置き換えることができる。定理 12.13 の証明はゲージ理論を用いるものであるが、後者の代数版は導来代数幾何学を用いるものである。詳細は [BBBJ15] を参照されたい。

**例 12.15**  $v = (1, 0, 0, -n) \in \Gamma$  とすると、例 5.32 と同様に同型

$$\mathrm{Hilb}^n(X) \xrightarrow{\cong} M_\omega(v), \quad Z \mapsto I_Z$$

が得られる。 $\mathrm{Hilb}^n(X)$  に対して定理 12.13 が成立することを確かめよう。0 次元部分スキーム  $Z \subset X$  に対し、解析的近傍  $Z \subset U \subset X$  が存在して  $U$  が  $\mathbb{C}^3$  の解析的開集合と同型になると仮定する。この場合、 $[Z] \in \mathrm{Hilb}^n(X)$  に対して定理 12.13 の成立を見るには、 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  に対して定理 12.13 と同様の主張が成立することを示せばよい。

$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  の点を与えることと、組  $(V, v)$  の同型類であって次の条件を満たすものを与えることは同値である： $V$  は  $\mathbb{C}[x, y, z]$ -加群、 $v \in V$  であり、 $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ かつ  $v$  が  $\mathbb{C}[x, y, z]$ -加群として  $V$  を生成する。そこで  $n$  次元ベクトル空間  $V_0$  を 1 つ固定し、

$$U := \{(x, y, z, v) \in \mathrm{End}(V_0)^{\oplus 3} \oplus V_0 : \mathbb{C}\langle x, y, z \rangle v = V_0\}$$

と定めると、 $U$  は  $\mathrm{End}(V_0)^{\oplus 3} \oplus V_0$  の開集合である。ここで  $\mathbb{C}\langle x, y, z \rangle v = V_0$  の意味は、自由代数  $\mathbb{C}\langle X, Y, Z \rangle$  から  $V_0$  への射

$$\mathbb{C}\langle X, Y, Z \rangle \rightarrow \mathrm{End}(V_0) \rightarrow V_0$$

が全射になることを意味する。ここで最初の射は  $X \mapsto x, Y \mapsto y, Z \mapsto z$  であり、2 番目の射は  $A \in \mathrm{End}(V_0)$  を  $A(v) \in V_0$  に移している。

さらに  $g \in \mathrm{GL}(V_0)$ ,  $(x, y, z, v) \in U$  に対し

$$g \cdot (x, y, z, v) := (gxg^{-1}, gyg^{-1}, gzg^{-1}, gv)$$

定めれば、 $\mathrm{GL}(V_0)$  が  $U$  に自由に作用することがわかり、よって  $U / \mathrm{GL}(V_0)$  は滑らかとなる。以上より  $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  は埋め込み

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3) \subset U / \mathrm{GL}(V_0)$$

を持つことになる。この埋め込みの下で、 $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  は方程式  $xy = yx, z = zy$ ,

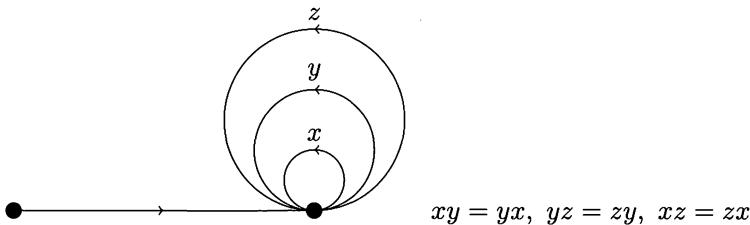
$zz = zx$  で定義される。そこで  $U$  上の関数  $f$  を

$$f(x, y, z, v) = \text{tr}(xyz - zyx)$$

と定めると、これは  $\text{GL}(V_0)$ -不変であるため  $U/\text{GL}(V_0)$  上の関数を定める。上記の関数  $f$  を用いて、

$$\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3) = \{df = 0\} \subset U/\text{GL}(V_0)$$

が容易にわかる。また、以上の議論は  $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  が以下に示す関係式付き簇のある安定表現のモジュライ空間で与えられることも示している。



各  $p = [E] \in M_\omega(v)$  に対し、 $p \in U \subset M_\omega(v)$ 、 $f: V \rightarrow \mathbb{C}$  を定理 12.13 のようになる。これらのデータを用いて  $\chi_B(p)$  を

$$\chi_B(p) := (-1)^{\dim V} (1 - e(M_p(f))) \quad (12.7)$$

とおく。ここで  $M_p(f)$  は  $f$  の  $p$  における Milnor ファイバーであり、次のように定義される。 $\|*\|$  を  $V$  における適当なノルムとすると、 $0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$  に対して定まる位相空間

$$\{z \in V : \|z - p\| \leq \delta, f(z) = f(p) + \varepsilon\} \quad (12.8)$$

の位相型は  $\varepsilon, \delta$  の取り方に依存しないことが示される。Milnor ファイバー  $M_p(f)$  は位相空間 (12.8) として定義される。整数値関数

$$\chi_B: M_\omega(v) \rightarrow \mathbb{Z}$$

は ( $M_\omega(v)$  上の)Behrend 関数 (Behrend function) と呼ばれ、 $M_\omega(v)$  上の Zariski 位相に関する構成可能関数<sup>1</sup>となる。

<sup>1</sup>  $Y$  上の関数  $f: Y \rightarrow \mathbb{Z}$  が構成可能関数 (constructible function) である、とは任意の  $m \in \mathbb{Z}$  に対して  $f^{-1}(m)$  が構成可能集合 ([Har77, Exercises II.3.18]) となることを意味する。

**注意 12.16** 関数  $\chi_B$  が矛盾なく定義されるためには、定理 12.13 における  $(V, f)$  の取り方に依存しないことが示されないといけない。 $(V', f')$  を別の取り方とすると、さらに別の  $(V'', f'')$  が存在して  $V'' = V \times W = V' \times W'$ ,  $f'' = f + Q = f' + Q'$  と書けることが示される ([Joy15, Proposition 2.22] 参照)。ここで  $0 \in W \subset \mathbb{C}^m$ ,  $0 \in W' \subset \mathbb{C}^{m'}$  は解析的開集合であり、 $Q, Q'$  はそれぞれ  $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^{m'}$  の非退化 2 次形式である。消滅サイクルの Thom–Sebastian 定理より 2 次形式  $Q, Q'$  を加えても Behrend 関数が変わらないことがわかり、よって  $\chi_B$  が矛盾なく定義されることが示される。

次が Behrend により発見された定理である。

**定理 12.17 ([Beh09])** 定義 12.10 の仮定の下で、等式

$$\mathrm{DT}_\omega(v) = \int_{M_\omega(v)} \chi_B \, de := \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \cdot e(\chi_B^{-1}(m))$$

が成立する。

**注意 12.18** Behrend 関数  $\chi_B$  は DT 不变量の研究以前から消滅サイクルの Euler 数として知られていたものである。定理 12.13 の記号で、 $V_0 := f^{-1}(0)$  とし、 $V^0 := V \setminus V_0$  とおく。 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  を普遍被覆とすると、次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & \xhookrightarrow{i} & V & \xleftarrow{j_1} & V^0 & \xleftarrow{j_2} & \tilde{V}^0 \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow f|_{V^0} & & \downarrow \\ \{0\} & \xhookrightarrow{\quad} & \mathbb{C} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C}^* & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

ここで、図式はすべてファイバー積である。 $j := j_1 \circ j_2: \tilde{V}^0 \rightarrow V$  とおいて、

$$\psi_f := i^{-1} \mathbf{R} j_* j^* \mathbb{Q}_V[\dim V]$$

と定める。これは  $V_0$  上の構成可能層<sup>2</sup>の導來圏の対象である。関手の組隨伴性  $j^* \dashv \mathbf{R} j_*$  より、 $\mathbb{Q}_{V_0}[\dim V]$  から  $\psi_f$  に自然な射が定まり、その写像錐として消滅サイクル層  $\phi_f$  が定義される：

$$\mathbb{Q}_{V_0}[\dim V] \rightarrow \psi_f \rightarrow \phi_f \rightarrow \mathbb{Q}_{V_0}[\dim V + 1]$$

<sup>2</sup> 構成可能層やその導來圏についての基礎理論については [Dim04] を参照されたい。

すると  $\phi_f[-1]$  は  $\{df = 0\} \subset V$  上の偏屈層<sup>3</sup>を与える。このとき、Behrend 関数  $\chi_B$  は  $\chi_B(p) = -e(\phi_f|_p)$  とも記述できる。

**例 12.19**  $M = M_\omega(v)$  が滑らかとなる場合、その上の Behrend 関数は定義より定数関数  $\chi_B = (-1)^{\dim M}$  で与えられる。よってこの場合、 $\mathrm{DT}_\omega(v) = (-1)^{\dim M} e(M)$  となり、問題 12.11 における結論と一致する。

**問題 12.20**  $M = \mathrm{Spec} \mathbb{C}[t]/(t^n)$  上の Behrend 関数は  $\chi_B = n$  となることを確かめよ。

## 12.5 曲線を数え上げる DT 不変量

この節から、3 次元 Calabi-Yau 多様体上の曲線（あるいは点）を数え上げる DT 不変量の性質について議論する。3 次元 Calabi-Yau 多様体  $X$ ,  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  に対し、 $I_n(X, \beta)$  を

$$I_n(X, \beta) := \{C \subset X : \dim C \leq 1, [C] = \beta, \chi(\mathcal{O}_C) = n\}$$

とおく。ここで  $C$  は  $X$  の閉部分スキームであり、 $[C]$  は  $C$  が定める基本ホモロジー類である。 $\beta = 0$  の場合、 $I_n(X, 0) = \mathrm{Hilb}^n(X)$  に他ならない。 $\beta \neq 0$  の場合も、点の Hilbert スキームと同様に、 $I_n(X, \beta)$  に自然なスキームの構造が入ることが示される ([Kol96] 参照)。

**問題 12.21** Poincaré 双対性定理により  $\beta \in H^4(X, \mathbb{Q})$ ,  $n \in H^6(X, \mathbb{Q})$  とみなし、 $v = (1, 0, -\beta, -n) \in H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  とおく。例 5.32 と同様に、自然な射

$$I_n(X, \beta) \rightarrow M_\omega(v), C \mapsto I_C$$

が同型になることを示せ。特にこの場合、 $M_\omega(v)$  は  $\omega$  に依存しない。

上の記号の下、 $I_{n,\beta}$  を

$$I_{n,\beta} := \mathrm{DT}_\omega(v)$$

とおく。さらにこれらの生成関数 (generating function)<sup>4</sup>を

<sup>3</sup> ここで述べる偏屈層は構成可能層の導來圏の対象であり、第 7.2 節で述べた偏屈連接層とは異なる。この場合の偏屈層の基礎理論は [BBD82] で与えられている。

<sup>4</sup> 一般に、ある種の不变量の系列を係数とするべき級数は generating function と呼ばれる。このような関数は、不变量のすべての情報を持った関数、という意味で母関数と訳されることもある。

$$I_\beta(X) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_{n,\beta} q^n, \quad I(X) := \sum_{\beta \geq 0} I_\beta(X) t^\beta \quad (12.9)$$

とおく。ここで  $\beta > 0$  とは、 $\beta$  が有効な 1-サイクルの定めるホモロジー類であることを意味し、 $\beta \geq 0$  とは  $\beta > 0$  または  $\beta = 0$  を意味する。

**問題 12.22** 固定した  $\beta$  に対し、 $I_n(X, \beta)$  は  $n \ll 0$  で  $\emptyset$  になることを示せ。特に、 $I_\beta(X)$  は Laurent 級数になる。（ヒント： $I_n(X, \beta) \neq \emptyset$  ならば、対応する部分スキーム  $Z \subset X$  と  $p \in X \setminus Z$  に対し部分スキーム  $Z \cup \{p\}$  ができる。このことと  $I_n(X, \beta)$  が有限型であることを使えばよい。）

**例 12.23**  $X = \mathbb{C}^3$  とする。これは射影的ではないが、定理 12.17 によりこの場合の  $n$  点を数え上げる DT 不変量を

$$I_{n,0}(\mathbb{C}^3) := \int_{\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)} \chi_B \ de$$

と定義することができる。この不変量の生成関数を考えよう。

トーラス  $T = (\mathbb{C}^*)^3$  は  $\mathbb{C}^3$  に自然に作用し、この作用は  $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  への作用を誘導する。 $p \in \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  が  $T$  で固定される場合、Behrend 関数の値  $\chi_B(p) = (-1)^n$  となることがわかる（[BF08, Lemma 4.1] 参照）。トーラス作用に関する局所化の議論（[BF08, Proposition 4.2] を参照）により、

$$I_{n,0}(\mathbb{C}^3) = (-1)^n e(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T) \quad (12.10)$$

となる。そこで固定点集合  $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$  を考えよう。 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$  の点は、イデアル  $I \subset \mathbb{C}[x, y, z]$  であって  $\dim \mathbb{C}[x, y, z]/I = n$  となるものと対応している。さらに、 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)^T$  の点はこのようなイデアルのうち  $x, y, z$  の単項式で生成されるものと 1 対 1 に対応している。よって、部分集合  $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$  で  $|A| = n$  となるものが存在し、

$$\mathbb{C}[x, y, z]/I = \bigoplus_{(i, j, k) \in A} \mathbb{C}x^i y^j z^k$$

と記述できる。 $I$  はイデアルであるため、 $(i, j, k) \in A$  に対し

$$i \geq 1 \implies (i - 1, j, k) \in A$$

であり,  $j, k$  に関しても同様の性質が成り立つ.

$S_n$  をこれらの性質を持つ部分集合  $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$  で,  $|A| = n$  となるものの集合とする. 組み合わせ論における古典的な結果により,  $S_n$  は有限集合であり, 等式

$$1 + \sum_{n \geq 1} |S_n| q^n = M(q) \quad (12.11)$$

が成り立つことが知られている. ここで  $M(q)$  は MacMahon 関数 (MacMahon function) と呼ばれる

$$\begin{aligned} M(q) &:= \prod_{k \geq 1} (1 - q^k)^{-k} \\ &= 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 24q^5 + \dots \end{aligned}$$

と定義される級数である.

等式 (12.10) と (12.11) より

$$\sum_{n \geq 0} I_{n,0}(\mathbb{C}^3) q^n = M(-q) \quad (12.12)$$

が従う.

一般の 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対しては, 次が成立することが知られている.

**定理 12.24 ([BF08, Theorem 4.12])** 3 次元 Calabi-Yau 多様体  $X$  に対して, 等式

$$I_{\beta=0}(X) = M(-q)^{e(X)} \quad (12.13)$$

が成立する.

**例 12.25** 例 6.5 の例を考える. つまり  $Y \subset \mathbb{C}^4$  を

$$Y := \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 : xy + zw = 0\}$$

とおき, イデアル  $(x, z) \subset \mathcal{O}_Y$  でブローアップすることで, 3 次元フロップ収縮  $f: X \rightarrow Y$  が得られる. このフロップ収縮の例外集合  $C$  は  $\mathbb{P}^1$  と同型であり, その法束は  $\mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2}$  となる.  $X$  は非コンパクト 3 次元 Calabi-Yau 多様体であり, ここに含まれる唯一の被約曲線は  $C$  である. この場合も, 例 12.23 と同様に

トーラス局所化 ( $\mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2}$  に作用するトーラス作用の固定点を用いた計算) を用いて DT 不変量の計算を組み合わせ論の問題に帰着できる。生成関数 (12.9) における  $\beta$  は  $\beta = m[C]$ ,  $m \geq 0$  と書けることに注意すると,

$$\begin{aligned} I(X) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} I_{n,m}[C](X) q^n t^m \\ &= M(-q)^2 \cdot \prod_{k \geq 1} (1 - (-q)^k t)^k \end{aligned} \quad (12.14)$$

が成り立つ ([BB07, Theorem 2.14] 参照).

## 12.6 君のママは僕のママ (GW/DT 対応)

前節で導入した、曲線を数える DT 不変量の生成関数は Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande [MNOP06] により導入された。彼らの目的は、整数値不変量である DT 不変量と、有理数値不変量である Gromov–Witten 不変量と呼ばれる 3 次元 Calabi–Yau 多様体上の曲線の数え上げ不変量を比較することにあった。この比較等式は GW/DT 対応予想と呼ばれる。現在 GW/DT 対応予想に導来圈を用いたアプローチは知られていないが、この予想の研究の過程で DT 不変量の生成関数の性質と導来圈が密接に関連することが明らかになっていった。ここで、GW/DT 対応について簡単に解説しておく。

$X$  を 3 次元 Calabi–Yau 多様体、 $C$  は連結な射影的代数曲線であり、特異点は高々結節点しかないとする。射

$$f: C \rightarrow X$$

は、 $\{g \in \text{Aut}(C) : f \circ g = f\}$  が有限群となる場合に安定写像 (stable map) と呼ぶ。各  $g \geq 0$  と  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  に対して、空間

$$\overline{M}_g(X, \beta)$$

を  $C$  の種数が  $g$ ,  $f_*[C] = \beta$  となる安定写像  $(C, f)$  のモジュライ空間とする。これは有限型の Deligne–Mumford スタックとなることが知られている ([BM96, Theorem 3.14] 参照)。さらに、仮想次元が 0 となる自然な完全障害理論も存在し、仮想サイクルを積分することで **Gromov–Witten 不変量** (Gromov–Witten invariant) (以下、GW 不変量と省略)

$$\text{GW}_{g,\beta} := \int_{[\overline{M}_g(X,\beta)]^{\text{vir}}} 1 \in \mathbb{Q}$$

が定義される。ここで上の不変量が整数値ではなく有理数値になるのは、 $\overline{M}_g(X,\beta)$  が一般にはスキームではなく Deligne–Mumford スタックになることに由来している。GW 不変量の生成関数を

$$\text{GW}(X) := \sum_{g \geq 0, \beta > 0} \text{GW}_{g,\beta} \lambda^{2g-2} t^\beta$$

で定義する。GW/DT 対応は次のように定式化される。

**予想 12.26 ([MNOP06])** 変数変換  $q = -e^{i\lambda}$  の下、次の等式が成立する。

$$\frac{I(X)}{M(-q)^{e(X)}} = \exp \text{GW}(X). \quad (12.15)$$

ここで、等式 (12.15) の左辺の分母は等式 (12.13) により  $I_0(X)$  と等しいことに注意する。つまり、左辺は点を数える DT 不変量の寄与を打ち消して曲線のみを数え上げていると解釈できる。一方、右辺の  $\exp$  の意味は非連結な曲線の寄与も含めることを意味する。もともと GW 不変量を定義する際は連結な曲線のみを考えていたが、(12.15) の左辺に寄与する曲線は非連結なものも含むため、この  $\exp$  をとるという操作は自然である。

一方、生成関数の商  $I(X)/M(-q)^{e(X)}$  は曲線の寄与のみを取り出していると述べたものの、実際に各係数は何を数えているのかという疑問が残る。また変数変換  $q = -e^{i\lambda}$  についても、そもそもこのような変数変換が意味をなすかどうかは生成関数の定義からは自明ではなく、この点も疑問である。等式 (12.15) の左辺は  $q = 0$  の近傍での展開である一方、右辺は  $\lambda = 0$  の近傍、つまり  $q = -1$  の近傍での展開である。よって変数変換  $q = -e^{i\lambda}$  が意味をなすためには等式 (12.15) が  $q$  について（単なる級数ではなく）実際の関数であり、 $q = -1$  の近傍で展開可能であることが必要である。次節以降で述べるように、連接層の導來圏を活用することで上記 2 点の疑問 ( $I(X)/M(-q)^{e(X)}$  の係数の意味についての疑問と、変数変換  $q = -e^{i\lambda}$  が意味をなすかという疑問) に答えることができる。

予想 12.26 は Pandharipande–Pixton [PP17] により射影空間の直積内の完全交差として与えられる 3 次元 Calabi–Yau 多様体に対して証明されている。

## 12.7 安定対不変量

前節で述べた疑問に答えるべく Pandharipande–Thomas [PT09] により導入された概念が安定対である。まず、その定義を述べる。 $X$  を 3 次元 Calabi–Yau 多様体とする。

**定義 12.27**  $X$  上の純 1 次元層  $F$  と射  $s: \mathcal{O}_X \rightarrow F$  の組  $(F, s)$  は、

$$\dim \text{Supp}(\text{Coker } s) \leq 0$$

である場合に安定対 (stable pair) と呼ばれる。ここで、 $\dim 0 = -\infty$  と定める。

次の例で見るように、大雑把にいって安定対とは  $X$  上の曲線とその上の点の組とみなせる。

**例 12.28**  $C \subset X$  を滑らかな射影的代数曲線、 $D \subset C$  を  $C$  上の有効因子とする。このとき、 $F = \mathcal{O}_C(D)$  とし、 $s$  を合成  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_C \subset \mathcal{O}_C(D)$  とする。 $(F, s)$  は安定対を定める。

$X$  上の 1 次元層  $F$  に対し、その基本サイクル (fundamental cycle)  $l(F)$  を

$$l(F) := \sum_{\eta \in X, \dim \overline{\{\eta\}}=1} \text{length}_\eta(F) \cdot \overline{\{\eta\}}$$

で定義する。各  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  と  $n \in \mathbb{Z}$  に対し、

$$P_n(X, \beta) := \{X \text{ 上の安定対 } (F, s) : [l(F)] = \beta, \chi(F) = n\}$$

と定める。 $P_n(X, \beta)$  も  $I_n(X, \beta)$  と同様に射影的スキームの構造を持つ ([PT09, § 2.3] 参照)。一方、安定対  $(F, s)$  が与えられると導来圏の対象

$$I^\bullet := (\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F) \in D^b(X) \tag{12.16}$$

が定まる。ここで  $I^\bullet$  は次数 0 と 1 のみに位置する連接層の 2 項複体である。Pandharipande–Thomas [PT09, Theorem 2.7] により、安定対のモジュライ空間  $P_n(X, \beta)$  は 2 項複体  $I^\bullet$  のモジュライ空間ともみなせる。つまり、2 項複体  $I^\bullet$  を導来圏の対象として小変形して得られる対象は、再び安定対から定まる 2 項複体となる。

上記の事実に着目して、 $P_n(X, \beta)$  に対称的完全障害理論が入ることが示される。まず、 $P := P_n(X, \beta)$  とおいて

$$\mathbb{F} \in \mathrm{Coh}(X \times P), s: \mathcal{O}_{X \times P} \rightarrow \mathbb{F}$$

を普遍安定対とする。この普遍安定対から定まる 2 項複体を

$$\mathbb{I}^\bullet := (\mathcal{O}_{X \times P} \xrightarrow{s} \mathbb{F}) \in D^b(X \times P)$$

とおく。定理 12.8 と同様に、完全三角形

$$\mathcal{O}_{X \times P} \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times P}(\mathbb{I}, \mathbb{I}) \rightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times P}(\mathbb{I}, \mathbb{I})_0 \rightarrow \mathcal{O}_{X \times P}[1]$$

を考えて、次の定理が示される。

**定理 12.29 ([HT10, Theorem 4.1])**  $P = P_n(X, \beta)$  上に対称的完全障害理論

$$\mathbf{R}\pi_P_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_{X \times P}(\mathbb{I}, \mathbb{I})_0[2] \rightarrow \mathbb{L}_P$$

が存在する。ここで  $\pi_P: X \times P \rightarrow P$  は射影である。

$P_n(X, \beta)$  は射影的であるため、DT 不変量と同様に次の不変量が定義される。

**定義 12.30 Pandharipande–Thomas 不変量** (Pandharipande–Thomas invariant) (以下、PT 不変量と省略)  $P_{n, \beta}$  を

$$P_{n, \beta} := \int_{[P_n(X, \beta)]^{\mathrm{vir}}} 1 \in \mathbb{Z}$$

と定義する。

PT 不変量は、定理 12.17 と同様に  $P_n(X, \beta)$  上の Behrend 関数  $\chi_B$  を用いて

$$P_{n, \beta} = \int_{[P_n(X, \beta)]} \chi_B \, de$$

とも記述できる。PT 不変量の生成関数を

$$P_\beta(X) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{n, \beta} q^n, \quad P(X) := 1 + \sum_{\beta > 0} P_\beta(X) t^\beta$$

とおく。

**問題 12.31** 生成関数  $P_\beta(X)$  は Laurent 級数であることを示せ。

## 12.8 君のママもか！ (DT/PT 対応)

次の定理が 12.6 の DT 不変量の生成関数についての疑問に答える定理であり、

本章の主定理である.

**定理 12.32** ([Tod10a, Tod10b, Bri11, ST11, Tod20])

(i) (DT/PT 対応) : 次の生成関数の等式が成立する.

$$I_\beta(X) = M(-q)^{e(X)} \cdot P_\beta(X).$$

(ii) (有理性定理) : 生成関数  $P_\beta(X)$  は  $q$  についての有理関数を  $q = 0$  で Laurent 展開したものであり, さらにこの有理関数は  $q \mapsto 1/q$  で不变である.

**注意 12.33** 定理 12.32 (i) は等式 (12.15) の左辺の係数が安定対を数え上げる PT 不变量で与えられることを意味している. また, 定理 12.32 (ii) の有理性は等式 (12.15) の左辺が実際に  $q$  についての関数であり, よって  $q = -1$  の近傍で展開することが可能であることを意味している. さらに  $q \mapsto 1/q$  に関する不变性は, 等式 (12.15) の右辺が  $\lambda \mapsto -\lambda$  で不变であることと整合する結果である.

**例 12.34** 例 12.25 と同じ状況を考える. このとき,  $X$  上の安定対  $(F, s)$  で  $[l(F)] = [C]$ ,  $\chi(F) = n$  を与えることと,  $C = \mathbb{P}^1$  上の次数  $n - 1$  の有効因子を与えることは同値になる. よって,

$$P_n(X, [C]) = \text{Sym}^{n-1}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^{n-1}$$

となる. この空間は滑らかであるため, Behrend 関数は定数値  $(-1)^{n-1}$  を持つ. したがって,

$$P_{n,[C]} = (-1)^{n-1} e(\mathbb{P}^{n-1}) = (-1)^{n-1} n$$

を得る. よって, 生成関数を考えると

$$P_{[C]}(X) = q - 2q^2 + 3q^3 - \cdots = \frac{q}{(1+q)^2} \quad (12.17)$$

となる. 等式 (12.14) と比較すると,  $I_{[C]}(X) = M(-q)^2 \cdot P_{[C]}(X)$  が従うことがわかる. また, (12.17) の右辺は  $q$  についての有理関数で,  $q \mapsto 1/q$  で不变になっていることもわかる.

以降の章の目的は, 定理 12.32(i) を証明することである. DT/PT 対応の証明のアイデアは以下の通りである.

前節で述べた通り, PT 不变量は導来圏の対象を数え上げる不变量であった. よって, Bridgeland 安定性条件

$$\sigma_I, \sigma_P \in \text{Stab}(X)$$

が存在して不变量  $I_{n,\beta}$  が  $\sigma_I$ -安定対象を数え上げる不变量,  $P_{n,\beta}$  が  $\sigma_P$ -安定対象を数え上げる不变量に対応すると考えられる。この考え方を一般化して、各  $v \in \Gamma$  と  $\sigma \in \text{Stab}(X)$  に対して  $\text{ch}(E) = v$  となる  $\sigma$ -安定対象  $E$  を数え上げる不变量  $\text{DT}_\sigma(v)$  を定義できるかという問題が浮上する。さらに、 $\text{DT}_\sigma(v)$  が  $\sigma$ を変えたときにどのように振る舞うかという問題も生じる。安定性条件の空間  $\text{Stab}(X)$  には、11.10 節で触れた壁と部屋の構造が存在して、 $\text{DT}_\sigma(v)$  は部屋内では一定値をとるが壁を越えるとジャンプする。この DT 型不变量の壁越え現象を理解できたら、DT/PT 対応の証明に適用できそうである。

しかし、前章で述べたように 3 次元 Calabi-Yau 多様体上で Bridgeland 安定性条件を構築するのは技術的に困難である。本書ではまず安定性条件の存在を認めた上で、上述の  $\text{DT}_\sigma(v)$  の構成および壁越え現象について述べる。最終的に定理 12.32 の証明には不变量  $\text{DT}_\sigma(v)$  を用いずに直接的に Hall 代数を用いた方法を行う。しかし、基礎となるアイデアは上述の DT 型不变量の壁越え現象である。

さらに上述のアイデアを適用するには安定対象だけではなく半安定対象も考察する必要がある。半安定対象を数え上げるには、これらのなすモジュライ空間をスタックとして扱う必要がある。これは、安定対象とは異なり半安定対象には非自明な自己同型が存在する可能性に由来する。また、それらモジュライスタックの「重み付き Euler 数」を構成する必要がある。そのためには、後述するモチーフ的 Hall 代数などの技術を要する。

## 12.9 Artin スタックの Grothendieck 群

以降の節では、定理 12.32 の証明に必要な概念や結果を説明していく。まず、Artin スタックの Grothendieck 群について述べる。スタックに関する次の準備をする。以下、Artin スタックは  $\mathbb{C}$  上の Artin スタックを意味するものとする。

**定義 12.35** (i) Artin スタック  $\mathcal{X}$  は、任意の幾何的点  $x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})$  に対して  $\text{Aut}(x)$  がアファイン代数群となる場合、アファイン安定化群 (affine stabilizer group) を持つという。

(ii) Artin スタックの間の射  $\rho: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  は、表現可能でありさらに誘導される幾何的点たちのなす亜群の間の関手  $\mathcal{X}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{X}_2(\mathbb{C})$  が同値である場合、幾何的全単射 (geometric bijection) であると呼ぶ。

- (iii) スキームの間の射  $\pi: Z \rightarrow W$  は,  $W$  の開被覆  $W = \bigcup_i U_i$  およびあるスキーム  $F$  が存在して,  $\pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  が  $U_i$  上のスキームとして直積  $F \times U_i$  と同型になるとき, **Zariski 局所的に自明** (Zariski locally trivial) であると呼ぶ. このとき Artin スタックの間の射  $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  に対しても Zariski 局所的に自明であることが定義される (D.4 節参照).

次の例で, 上の定義について説明する.

**例 12.36** (i)  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  が代数多様体  $X$  に作用する場合, 商スタック  $[X/G]$  はアファイン安定化群を持つ.

(ii)  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  を閉部分スタック,  $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$  とすると, 自然な射  $\mathcal{Y} \coprod \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  は幾何的全単射である.

(iii)  $X$  をスキームとして,  $V$  を  $X$  上の代数的ベクトル束とすると,  $V \rightarrow X$  は Zariski 局所的に自明である.

(iv) 代数群  $G$  に対して  $BG := [\mathrm{Spec} \mathbb{C}/G]$  とおく. (D.1) で与える射  $\mathrm{Spec} \mathbb{C} \rightarrow BG$  が Zariski 局所的に自明な射となるとき,  $G$  は特殊代数群 (special algebraic group) であると呼ばれる.  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  は特殊代数群である ([Ann58, §1.4, 1.5] を参照). 一方,  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  ( $k \geq 2$ ) は特殊代数群ではない. 実際,  $k$  乗写像  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  は Zariski 局所的に自明ではない.

$\mathcal{S}$  を局所有限型の Artin スタックとする. 以下,  $\mathcal{S}$  上の Artin スタックの Grothendieck 群を定義する. 様々な定義の仕方が存在するが, ここでは Bridgeland [Bri12a] の流儀に従う.

**定義 12.37**  $\mathcal{S}$  上の Artin スタックの Grothendieck 群 (Grothendieck group of Artin stacks)  $K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{S})$  を  $\mathbb{Q}$  上の線形空間として次のように定義する.

$$K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{S}) := \bigoplus \mathbb{Q}[\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}] / \sim .$$

ここで  $\mathcal{X}$  はアファイン安定化群を持つ有限型の Artin スタック,  $\rho$  はスタックとしての射であり,  $\sim$  は次の関係式で与えられる.

(i)  $\rho_i: \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{S}, i = 1, 2$  に対し

$$[\rho_1 \coprod \rho_2: \mathcal{X}_1 \coprod \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}] \sim [\rho_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}] + [\rho_2: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}].$$

(ii) 任意の  $\rho': \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}$  および幾何的全単射  $\rho: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  に対し,

$$[\rho': \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}] \sim [\rho' \circ \rho: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}].$$

(iii) 任意の  $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ , およびファイバーが等しい Zariski 局所的に自明なファイプレーション  $\rho_i: \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{Y}$  に対し,

$$[\rho \circ \rho_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{S}] \sim [\rho \circ \rho_2: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{S}]. \quad (12.18)$$

準射影的代数多様体  $Y$  と射  $[\rho: Y \rightarrow \mathcal{S}]$  によって生成される  $K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{S})$  の部分空間を

$$K(\mathfrak{Var}/\mathcal{S})$$

と表す. 以降,  $\mathcal{S} = \text{Spec } \mathbb{C}$  の場合は  $\mathcal{S}$  を省略して  $K(\mathfrak{Var})$ ,  $K(\mathfrak{Sta})$  などと記述し, さらに  $[\rho: Y \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}]$  を  $[Y]$  と記述する.  $[\mathcal{X}], [\mathcal{Y}] \in K(\mathfrak{Sta})$  に対し

$$[\mathcal{X}] \times [\mathcal{Y}] := [\mathcal{X} \times \mathcal{Y}]$$

と積を定めれば,  $K(\mathfrak{Sta})$  は  $[\text{Spec } \mathbb{C}]$  を単位元とする可換環となる. さらに,  $[\mathcal{X}] \in K(\mathfrak{Sta})$ ,  $[\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}] \in K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{S})$  に対し,

$$[\mathcal{X}] \cdot [\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}] := [\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}]$$

と定めれば  $K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{S})$  は  $K(\mathfrak{Sta})$ -加群となる. ただし  $\text{pr}$  は射影とした. アフィン直線  $\mathbb{A}^1$  のクラスは

$$\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1] \in K(\mathfrak{Var})$$

と表すことにする.

**注意 12.38**  $G$  を特殊代数群とすると, 関係式 (12.18) により  $K(\mathfrak{Sta})$  において  $[\text{Spec } \mathbb{C}] = [BG] \times [G]$  が成立する. 特に  $[BG], [G] \in K(\mathfrak{Sta})$  は可逆である.  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{G}_a$  は特殊代数群なので ([BR05] 参照),  $\mathbb{L}$  は  $K(\mathfrak{Sta})$  において可逆である.

**注意 12.39** 例えばモチーフ積分の文脈でも代数多様体の Grothendieck 群  $K'(\mathfrak{Var})$  が同様に定義されるが, これは上で定義した  $K(\mathfrak{Var})$  と微妙に異なる.  $K'(\mathfrak{Var})$  は

$$K'(\mathfrak{Var}) = \bigoplus \mathbb{Z}[Y]/\sim$$

と定義される。ここで  $Y$  は準射影的代数多様体、関係式～は閉部分代数多様体  $Z \subset Y$  に対して  $[Y] \sim [Z] + [Y \setminus Z]$  と定義される。構成から自然な全射

$$K'(\mathfrak{Var}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \twoheadrightarrow K(\mathfrak{Var})$$

が存在するが、これは同型ではない。実際、アファイン直線  $\mathbb{A}^1$  のクラスは  $K'(\mathfrak{Var})$  において零因子になることが知られている ([Bor18])。一方、注意 12.38 により  $\mathbb{L}$  は  $K(\mathfrak{Sta})$  において可逆であるため、零因子ではない。

**問題 12.40**  $K(\mathfrak{Var})$  において、等式

$$[GL(n, \mathbb{C})] = \mathbb{L}^{\frac{1}{2}n(n-1)}(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}^2-1) \cdots (\mathbb{L}^n-1)$$

を示せ。

次で述べるように、 $K(\mathfrak{Sta})$  は  $K(\mathfrak{Var})$  および  $[GL(n, \mathbb{C})]^{-1}$  により生成されることがわかる。

**命題 12.41** 次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{Sta}) &= K(\mathfrak{Var}) [[GL(n, \mathbb{C})]^{-1} : n \geq 1]] \\ &= K(\mathfrak{Var}) \left[ \frac{1}{\mathbb{L}}, \frac{1}{\mathbb{L}-1}, \frac{1}{\mathbb{L}^n + \cdots + \mathbb{L} + 1} : n \geq 1 \right]. \end{aligned}$$

**証明** Kresch [Kre99, Proposition 3.5.9] により、アファイン安定化群を持つ有限型の Artin スタック  $\mathcal{X}$  に対してストラティフィケーション  $\mathcal{X} = \coprod \mathcal{X}_i$  が存在して、次を満たす：各  $\mathcal{X}_i$  に対して準射影的代数多様体  $Y_i$  と  $n_i \geq 1$  が存在して  $\mathcal{X}_i$  は商スタック  $[Y_i / GL(n_i, \mathbb{C})]$  と同型になる。定義 12.37 における関係式を用いると  $K(\mathfrak{Sta})$  において

$$[\mathcal{X}] = \sum [Y_i] \times [GL(n_i, \mathbb{C})]^{-1}$$

が成り立つことがわかる。問題 12.40 と合わせると命題が従う。  $\square$

## 12.10 モチーフ的 Hall 代数

$X$  を滑らかな射影的代数多様体とする。以下では  $(\mathsf{Sch}/\mathbb{C})$  を  $\mathbb{C}$  上有限型ス

キームのなす圏とする.<sup>5</sup>  $X$  上の連接層の導來圏の対象のモジュライ理論を考える. 2-関手

$$\mathfrak{M}: (\mathsf{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathsf{Groupoids} \quad (12.19)$$

を,  $S \in (\mathsf{Sch}/\mathbb{C})$  に対して完全複体  $\mathcal{P} \in D^b(X \times S)$  であって, 任意の点  $s \in S$  で条件

$$\mathrm{Ext}^{<0}(\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_s) = 0 \quad (12.20)$$

を満たすものがなす亜群を対応させることによって定義する. ここで  $i_s: X \times \{s\} \hookrightarrow X \times S$  を埋め込みとして,  $\mathcal{P}_s = \mathbf{L}i_s^*\mathcal{P}$  とおいた. このとき次が知られている.

**定理 12.42 ([Lie06])** 2-関手  $\mathfrak{M}$  は局所有限型の Artin スタックである.

スタック  $\mathfrak{M}$  の各閉点は, 条件  $\mathrm{Ext}^{<0}(E, E) = 0$  を満たす導來圏の対象  $E \in D^b(X)$  と対応している. この条件は, 特に  $E$  が  $D^b(X)$  の t-構造の核の対象であるならば自動的に成り立つ. そこで t-構造の核  $\mathcal{A} \subset D^b(X)$  を固定して部分スタック

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}$$

を条件 (12.20) を

$$\mathcal{P}_s \in \mathcal{A}$$

という条件に強めることで定義する. 一般に部分スタック  $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$  が Artin スタックとなるかどうかは知られていない. しかし, 多くの場合で部分スタック  $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$  は開部分スタックとなり, 特にそのような場合には  $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$  も局所有限型の Artin スタックとなる. そこで, この節では次の仮定をおく.

**仮定 12.43** 部分スタック  $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$  は  $\mathfrak{M}$  の開部分スタックである.

**問題 12.44**  $\mathcal{A} = \mathrm{Coh}(X)$  に対して仮定 12.43 が満たされることを示せ. (ヒント: スキーム  $S$  と  $\mathcal{E} \in D^b(X \times S)$  に対して,  $\{s \in S : \mathbf{L}i_s^*\mathcal{E} \in \mathrm{Coh}(X)\}$  が  $S$  の開集合であることを示せばよい. ここで  $i_s: X \times \{s\} \hookrightarrow X \times S$  は埋め込みである. スペクトル系列)

<sup>5</sup> 1.2 節では  $(\mathsf{Sch}/\mathbb{C})$  は単に  $\mathbb{C}$  上スキームのなす圏としていた.

$$E_2^{p,q} = \mathcal{H}^p(\mathbf{L} i_s^* \mathcal{H}^q(\mathcal{E})) \Rightarrow E^{p+q} = \mathcal{H}^{p+q}(\mathbf{L} i_s^* \mathcal{E})$$

を用いることにより、捕題 6.16 と同様に議論すればよい。)

仮定 12.43 の下、 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間を

$$H(\mathcal{A}) := K(\mathfrak{Sta}/\mathcal{O}bj(\mathcal{A}))$$

で定義する。

前節で述べたように、 $H(\mathcal{A})$  は  $K(\mathfrak{Sta})$ -加群となった。さらにこの節では  $H(\mathcal{A})$  上に、Abel 圈  $\mathcal{A}$  の構造から定まる  $K(\mathfrak{Sta})$ -代数の構造を入れる。スタック  $\mathcal{Ex}(\mathcal{A})$  を 2-関手

$$\mathcal{Ex}(\mathcal{A}): (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{Groupoids}$$

であって、各  $S \in (\mathfrak{Sch}/\mathbb{C})$  に対して次の亜群を対応させることで定義する：亜群  $\mathcal{Ex}(\mathcal{A})(S)$  の対象は  $D^b(X \times S)$  における完全三角形

$$\mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1[1] \quad (12.21)$$

であって、 $\mathcal{P}_i \in \mathcal{O}bj(\mathcal{A})(S)$  であり、任意の  $s \in S$  に対して  $\mathcal{A}$  における完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_{1,s} \rightarrow \mathcal{P}_{3,s} \rightarrow \mathcal{P}_{2,s} \rightarrow 0$$

を誘導するものである。亜群  $\mathcal{Ex}(\mathcal{A})(S)$  における同型射は可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_1 & \longrightarrow & \mathcal{P}_3 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathcal{P}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{P}'_3 & \longrightarrow & \mathcal{P}'_2 \end{array}$$

で与えられる。

さらにスタッックとしての射

$$p_i: \mathcal{Ex}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

を完全三角形 (12.21) に対して  $\mathcal{P}_i$  を対応させることで定義する。そこで、 $H(\mathcal{A})$  における 2 つの元

$$u_i := [\rho_i: \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \quad (i = 1, 2)$$

に対して,  $u_1 * u_2$  を定義するために, 図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_{12} & \xrightarrow{\rho_{12}} & \mathcal{E}x(\mathcal{A}) & \xrightarrow{p_3} & \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \\ \downarrow & \square & \downarrow (p_1, p_2) & & \\ \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{\rho_1 \times \rho_2} & \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \times \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) & & \end{array} \quad (12.22)$$

を考え, そこに現れる  $\rho_{12}$ ,  $\mathcal{X}_{12}$  を用いて

$$u_1 * u_2 := [p_3 \circ \rho_{12}: \mathcal{X}_{12} \rightarrow \mathcal{E}x(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \quad (12.23)$$

と定義する.

**例 12.45**  $E \in \mathcal{A}$  に対し, 「デルタ関数」 $\delta_E \in H(\mathcal{A})$  を

$$\delta_E = [\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \quad \text{pt} \mapsto E$$

と定める.  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  に対し,

$$\delta_{E_1} * \delta_{E_2} = \left[ \rho: \left[ \frac{\text{Ext}^1(E_2, E_1)}{\text{Hom}(E_2, E_1)} \right] \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \right] \quad (12.24)$$

となる. ここで  $\text{Hom}(E_2, E_1)$  はベクトル空間としての加法によって群とみなし,  $\text{Ext}^1(E_2, E_1)$  に自明に作用している. また  $\xi \in \text{Ext}^1(E_2, E_1)$  に対応する拡大を  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_\xi \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  とすると,  $\rho$  は  $\rho(u) = E_\xi$  で与えられる.

**注意 12.46** ここで「デルタ関数」と鍵括弧でくくったのは,  $H(\mathcal{A})$  の元は見かけ上は関数の形をしていないためである.  $[\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \in H(\mathcal{A})$  は, 各点  $[F] \in \mathcal{O}bj(\mathcal{A})$  に対してファイバー  $\rho^{-1}([F])$  を対応させることでスタックに値を持つ関数とみなせる. すると  $\delta_E$  は,  $[E] \in \mathcal{O}bj(\mathcal{A})$  以外の点で  $\emptyset$  になり  $[E]$  において 1 点となるスタック値関数とみなせるため, 通常のデルタ関数の類似と思える.

**命題 12.47** (12.23) で定義される  $*$  は  $H(\mathcal{A})$  上の結合的  $K(\mathfrak{Sta})$ -代数の構造を定める.  $\mathcal{A}$  の 0 対象から定まるデルタ関数  $\delta_0$  が単位元となる.

**証明** 証明の概略のみ述べる. 詳細は [Joy07a, Theorem 4.3, Theorem 5.2], [Bri12a, Theorem 4.3] を参照されたい. 式 (12.24) と  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(E_2, E_1) = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(E_2, E_1)$  が有限次元であることから (注意 7.5 参照), 図式 (12.22) における  $\mathcal{X}_{12}$  が有限型のスタックであり, さらにアファイン安定加群を持つことがわかる. したがって  $u_1 * u_2 \in H(\mathcal{A})$  が矛盾なく定義されていることがわかる.  $*$  が結

合的であることを説明するため、 $\mathrm{Fl}_n(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{A}$  における埋め込み列

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \quad (12.25)$$

のなすスタックとする。定義から  $\mathrm{Fl}_2(\mathcal{A}) = \mathcal{E}x(\mathcal{A})$  である。射

$$q_i : \mathrm{Fl}_n(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

を次で定める： $1 \leq i \leq n$  の場合は列 (12.25) に対して  $E_i/E_{i-1}$  を対応させる  
ことで定める。また、 $q_{n+1}$  は列 (12.25) に対して  $E_n$  を対応させることで定める。  
 $H(\mathcal{A})$  の元

$$u_i = [\rho_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \in H(\mathcal{A}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

に対し、 $u_1 * u_2 * \cdots * u_n$  を定めるため、図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}_{12\dots n} & \xrightarrow{\rho_{12\dots n}} & \mathrm{Fl}_n(\mathcal{A}) & \xrightarrow{q_{n+1}} & \mathcal{O}bj(\mathcal{A}) \\ \downarrow & \square & \downarrow (q_1, \dots, q_n) & & \\ \prod_{i=1}^n \mathcal{X}_i & \xrightarrow[\prod_{i=1}^n \rho_i]{} & \mathcal{O}bj(\mathcal{A})^{\times n} & & \end{array}$$

を考え、そこに現れる  $\rho_{12\dots n}, \mathcal{X}_{12\dots n}$  を用いて

$$u_1 * u_2 * \cdots * u_n := [q_{n+1} \circ \rho_{12\dots n} : \mathcal{X}_{12\dots n} \rightarrow \mathrm{Fl}_n(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

と定める。すると

$$u_1 * (u_2 * u_3) = u_1 * u_2 * u_3 = (u_1 * u_2) * u_3$$

がわかる。この等式をデルタ関数  $u_i = \delta_{F_i}$  の場合にのみ示そう。定義より  $u_1 * u_2 * u_3$  は埋め込み列

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 \quad (12.26)$$

であって

$$E_1 \cong F_1, E_2/E_1 \cong F_2, E_3/E_2 \cong F_3$$

となるもののなすスタックで与えられる。一方、 $(u_1 * u_2) * u_3$  は次の図式のスタ  
ックで与えられる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & (12.27) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & F_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A_2 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & F_3 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0. & & & &
 \end{array}$$

ここで水平方向の完全系列は  $u_1 * u_2$  に対応している。図式 (12.27) において  $E_1 = F_1$ ,  $E_2 = A_1$ ,  $E_3 = A_2$  とおくことで図式 (12.27) と埋め込み列 (12.26) が 1 対 1 に対応し、よって  $u_1 * u_2 * u_3 = (u_1 * u_2) * u_3$  がわかる。等式  $u_1 * (u_2 * u_3) = u_1 * u_2 * u_3$  も同様である。

以上の議論より、\* は結合的である。\* の定義から  $\delta_0$  は明らかに単位元であり、写像

$$K(\mathfrak{S}\mathfrak{ta}) \rightarrow H(\mathcal{A}) \quad [\mathcal{X}] \mapsto [\mathcal{X}] \cdot \delta_0$$

は代数としての射である。よって \* は  $H(\mathcal{A})$  に  $K(\mathfrak{S}\mathfrak{ta})$ -代数の構造を定める。□

結合的代数  $(H(\mathcal{A}), *)$  はモチーフ的 Hall 代数 (motivic Hall algebra) と呼ばれる。以下で述べるようにモチーフ的 Hall 代数には Chern 標数写像の像  $\Gamma = \text{Im } \text{ch}$  による次数付けが定まる。まず  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$  は  $\text{ch}(E) = v$  となる  $E \in \mathcal{A}$  からなる  $\mathcal{O}bj(\mathcal{A})$  の部分スタックとし、スタック  $\mathcal{O}bj(\mathcal{A})$  を

$$\mathcal{O}bj(\mathcal{A}) = \coprod_{v \in \Gamma} \mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$$

と分解する。次に  $H_v(\mathcal{A}) \subset H(\mathcal{A})$  を

$$[\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{O}bj_v(\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

と経由する元によって生成される部分空間とすると、直和分解

$$H(\mathcal{A}) = \bigoplus_{v \in \Gamma} H_v(\mathcal{A})$$

が存在する。このとき  $u_i \in H_{v_i}(\mathcal{A}) (i = 1, 2)$  に対して、 $u_1 * u_2 \in H_{v_1+v_2}(\mathcal{A})$  が成り立つので、 $H(\mathcal{A})$  に  $\Gamma$  による次数付けが定まった。

## 12.11 道代数のモチーフ的 Hall 代数

モチーフ的 Hall 代数は、代数多様体上の連接層の導來圏の  $t$ -構造の核以外に対しても構成できる。例えば  $A$  を関係式付き簇から構成される道代数とすると、前節のモチーフ的 Hall 代数の構成において  $\mathcal{A} = \text{mod } A$ ,  $\Gamma$  を  $A$  の次元ベクトルたちがなす自由 Abel 群と置き換えることで同様の代数  $H(\mathcal{A})$  が構成できる。次元ベクトルは群準同型

$$\dim: K(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma$$

を定める。この場合、様々な意味で  $H(\mathcal{A})$  は連接層の導來圏から構成したモチーフ的 Hall 代数よりも簡単になる。まず、以下に述べる問題 12.48 により  $H(\mathcal{A})$  の自然な完備化

$$\widehat{H}(\mathcal{A}) := \prod_{v \in \Gamma} H_v(\mathcal{A})$$

に積構造が誘導される。

**問題 12.48**  $\mathcal{A}$  における対象の次元ベクトルの各成分が非負であることを用いて、 $H(\mathcal{A})$  上の  $*$ -積が  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  上に自然に拡張されることを確認せよ。

さらにこの場合、任意の  $v \in \Gamma$  に対して  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$  が有限型の Artin スタックとなる。<sup>6</sup>そこで部分圏  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  に対して同様に定まる  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$  の部分スタック

$$\mathcal{O}bj_v(\mathcal{C})$$

が有限型の Artin スタックになると仮定すると、 $\widehat{H}(\mathcal{A})$  の元として

$$1_{\mathcal{C}} := \prod_{v \in \Gamma} [\mathcal{O}bj_v(\mathcal{C}) \subset \mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})]$$

や  $1_{\mathcal{A}}$  が定まる。ここで  $1_{\mathcal{A}}$  は  $H(\mathcal{A})$  における単位元  $\delta_0$  とは異なることに注意する。

次の命題はモチーフ的 Hall 代数を扱う際に重要となる。

---

<sup>6</sup> 5.1 節で述べたようにこのようなことは 1 次元以上の代数多様体上の連接層に対しては成立しない。

**命題 12.49**  $\mathcal{A} = \text{mod } A$  に対して、捩れ対  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  が与えられ、 $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{T})$  および  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{F})$  が有限型の Artin スタックになると仮定する。このとき、 $\widehat{H}(\mathcal{A})$  において等式

$$1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{T}} * 1_{\mathcal{F}}$$

が成立する。

**証明** 等式の右辺の積の定義より、スタックの間の射

$$\coprod_{v_1 + v_2 = v} (\mathcal{O}bj_{v_1}(\mathcal{T}) \times \mathcal{O}bj_{v_2}(\mathcal{F})) \times_{\mathcal{O}bj_{v_1}(\mathcal{A}) \times \mathcal{O}bj_{v_2}(\mathcal{A})} \mathcal{E}x(\mathcal{A}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$$

が幾何的全単射であることを示せばよい。上の射の左辺の幾何的点は、 $\mathcal{A} = \text{mod } A$  における完全系列

$$0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0 \quad (T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}, \dim E = v) \quad (12.28)$$

から成り立っており、射  $\rho$  は完全系列 (12.28) に  $E$  を対応させることで与えられる。捩れ対の定義より、任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して完全系列 (12.28) が同型を除いてただ 1 つに定まる。また、 $\text{Hom}(T, F) = 0$  であることから任意の  $E$  の自己同型は  $T$  および  $F$  の自己同型を一意的に誘導する。よって、自己同型群の忘却写像

$$\text{Aut}(0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0) \rightarrow \text{Aut}(E)$$

は同型写像である。よって  $\rho$  は幾何的全単射である。  $\square$

命題 12.49 は次で与える捩れ対の一般化に対しても成立する（問題 12.51）。

**定義 12.50** Abel 圈  $\mathcal{A}$  の部分圏の集合  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k)$  が次の条件を満たすと仮定する。

- (i)  $i < j$  に対して  $\text{Hom}(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) = 0$  が成り立つ。<sup>7</sup>
- (ii) 任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して、フィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

が存在し  $F_i := E_i / E_{i-1} \in \mathcal{C}_i$  となる。

この場合、 $\mathcal{A} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k \rangle_{\text{ex}}$  と表記する。

<sup>7</sup> 半直交分解（定義 4.18）では、 $i > j$  のときに  $\text{Hom}(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) = 0$  が成り立ったので、順序の付け方が逆である。つまり半直交分解とこの定義では慣例が異なる。

上の定義において  $k = 2$  の場合,  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$  は  $\mathcal{A}$  の捩れ対に他ならない.

**問題 12.51**  $\mathcal{A} = \text{mod } A$  に対して, 部分圏  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k)$  を定義 12.50 の条件を満たすようにとる.  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$  に対してスタック  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{C})$  が有限型の Artin スタックであると仮定する. このとき, 等式

$$1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{C}_1} * 1_{\mathcal{C}_2} * \cdots * 1_{\mathcal{C}_k}$$

を示せ.

最後に Bridgeland 安定性条件から定まる, Hall 代数における等式について触れて, この節を締めくくることにする.

$\mathcal{A} = \text{mod } A$ , 群準同型  $Z: K(A) \rightarrow \mathbb{C}$  に対し,  $\sigma = (Z, \mathcal{A})$  が  $D^b(\text{mod } A)$  における Bridgeland 安定性条件を定めるとする. 各  $v \in \Gamma$  に対し,

$$\mathfrak{M}_\sigma(v)$$

を  $\dim(E) = v$  を満たす  $Z$ -半安定対象  $E \in \mathcal{A}$  からなる  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$  の部分スタックとする.  $\mathfrak{M}_\sigma(v)$  は有限型の Artin スタックであることが知られている ([JS12, §7.1] 参照). 各  $v \in \Gamma$  に対し

$$\delta_\sigma(v) := [\mathfrak{M}_\sigma(v) \subset \mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})] \in H_v(\mathcal{A})$$

とおく. また 11.1 節で定めた上半平面  $\mathbb{H}$  に含まれ, さらに原点を端点とする半直線  $l$  に対し

$$\delta_\sigma(l) := 1 + \sum_{Z(v) \in l} \delta_\sigma(v) \in \widehat{H}(\mathcal{A})$$

とおく. 次の命題は, HN フィルトレーションを用いることで命題 12.49 と同様に証明できる.

**命題 12.52** 上の状況下で,  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  における等式

$$1_{\mathcal{A}} = \prod_l \delta_\sigma(l)$$

が成立する. ここで右辺の積は半直線  $l$  について時計回りに無限積をとることを意味している.

**証明** 示すべき等式は次の等式

$$\begin{aligned} & [\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_k = v \\ \arg Z(v_1) > \dots > \arg Z(v_k)}} \delta_\sigma(v_1) * \dots * \delta_\sigma(v_k) \end{aligned} \quad (12.29)$$

と同値である。HN フィルトレーションの定義から、任意の  $E \in \mathcal{A}$  について一意的にフィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_k$$

が存在して、各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  は  $Z$ -半安定であり  $\arg Z(F_1) > \dots > \arg Z(F_k)$  が成り立つ。さらに  $\arg Z(F) > \arg Z(F')$  となる  $Z$ -半安定対象  $F, F'$  に対し  $\text{Hom}(F, F') = 0$  となる。よって命題 12.49 の証明と同様に (12.29) の右辺を定義するスタックと  $\mathcal{O}bj_v(\mathcal{A})$  との間に幾何的全単射が存在することがわかる。□

## 12.12 Poisson 代数

12.10 節の設定に戻って、 $X$  を滑らかな射影的代数多様体、 $\mathcal{A} \subset D^b(X)$  を仮定 12.43 を満たす t-構造の核とする。今後の目標は、 $H(\mathcal{A})$  においても命題 12.52 で述べた等式の類似を示し、そこから DT 型不变量の間の関係式を導くことである。

すでに述べたように、DT 不变量とは 3 次元 Calabi-Yau 多様体上の安定層のモジュライ空間の重み付き Euler 数であった。一方、定理 12.32 を証明するには（安定ではない）半安定層も考慮する必要があるが、一般に半安定層のモジュライ理論はスキームでは表現されず Artin スタックとなるので、その Euler 数を安直に定義することはできない。例えば、商スタック  $[Y/G]$  に対して

$$e([Y/G]) = e(Y)/e(G)$$

などと定義したいが、一般に  $e(G) = 0$  となるため（例えば  $e(\text{GL}(n, \mathbb{C})) = 0$  となる）右辺は意味を成さない。特に、 $H(\mathcal{A})$  の一般の元に対してその Euler 数は定義されない。

一方で、滑らかな射影的代数多様体  $Y$  に対してその Poincaré 多項式は

$$P_q(Y) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, \mathbb{Q}) q^{\frac{i}{2}}$$

と定義される。より一般に準射影的代数多様体  $Y$  に対して、 $H_c^*(Y, \mathbb{Q})$  には混合 Hodge 構造が入ることを思い起こそう。この混合 Hodge 構造の重みフィルトレーションを用いて、 $P_q(Y)$  は

$$P_q(Y) := \sum_{i,j} (-1)^i \dim \mathrm{gr}_W^j(H_c^i(Y, \mathbb{Q})) q^{\frac{i}{2}}$$

と定義される。 $Y$  の Euler 数  $e(Y)$  は

$$e(Y) = P_q(Y)|_{q^{1/2}=1}$$

と得られる。また Euler 数と異なり、 $P_q(Y)$  は  $Y$  が空集合でない限り多項式として 0 にはならない。このことに着目して、次の補題を得る。

### 補題 12.53 $\mathbb{Q}$ -線形写像

$$P_q: K(\mathfrak{Sta}) \rightarrow \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}})$$

が一意的に存在して、特殊代数群  $G$  が作用する準射影的代数多様体  $Y$  に対して、等式

$$P_q([Y/G]) = \frac{P_q(Y)}{P_q(G)} \quad (12.30)$$

が成立する。

**証明** 命題 12.41 の証明より、等式 (12.30) は写像  $P_q$  を一意的に定める。写像  $P_q$  が矛盾なく定義されるためには、定義 12.37 における関係式の下で  $P_q$  の値が一致することを確認する必要があるが、これは容易である（詳細は [Joy07c, Theorem 4.10] を参照）。□

Euler 数を与える関数が定義できるよう、次のような  $K(\mathfrak{Sta})$  の部分代数を考えたい。命題 12.41 の右辺において、 $e(\mathbb{L}) = e(\mathbb{A}^1) = 1$  であるため、Euler 数が定義できない生成元は  $(\mathbb{L} - 1)^{-1}$  のみである。そこで  $K(\mathfrak{Sta})$  の部分代数を

$$\Lambda := K(\mathfrak{Var}) \left[ \frac{1}{\mathbb{L}}, \frac{1}{\mathbb{L}^n + \dots + \mathbb{L} + 1} : n \geq 1 \right]$$

と定義する。すると、写像

$$e(-): \Lambda \rightarrow \mathbb{Q} \quad u \mapsto P_q(u)|_{q^{1/2}=1} \quad (12.31)$$

が矛盾なく定義される。ここで  $P_q(\mathbb{L}) = q$  であることに注意されたい。

次に、 $H(\mathcal{A})$  の  $\Lambda$ -部分代数で Euler 数を与える関数が定義できるものを考えたい。 $H(\mathcal{A})$  の  $\mathbb{Q}$ -部分空間

$$H^{\mathrm{reg}}(\mathcal{A})$$

を, 準射影的代数多様体  $Y$ , および射  $[\rho: Y \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$  によって生成される  $\Lambda$ -部分加群とする.  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の定義より, 忘却写像

$$H(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathfrak{Sta}) \quad [\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \mapsto [\mathcal{X}]$$

は  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  を  $\Lambda$  に移す. よって, 写像 (12.31) と合成して写像

$$e(-): H^{\text{reg}}(\mathcal{A}) \rightarrow \Lambda \xrightarrow{e} \mathbb{Q} \quad (12.32)$$

を得る.

**補題 12.54**  $H(\mathcal{A})$  の  $\Lambda$ -部分加群  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  は  $*$ -積に関して  $H(\mathcal{A})$  の  $\Lambda$ -部分代数である.

**証明**  $E_i \in \mathcal{A}$  に対して, デルタ関数  $\delta_{E_i}(\mathcal{A})$  は明らかに  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元である. ここでは簡単のため,  $\delta_{E_1} * \delta_{E_2} \in H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  であることのみを示す. 一般の場合も本質的にこの場合と同様である ([Bri12b, Theorem 5.1] 参照). 等式 (12.24) および関係式 (12.18) により

$$\delta_{E_1} * \delta_{E_2} = \mathbb{L}^{-\text{hom}(E_2, E_1)} [\text{Ext}^1(E_2, E_1) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \quad (12.33)$$

となる. 右辺は明らかに  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元である.  $\square$

新たな  $\Lambda$ -代数  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  を  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  をイデアル  $(\mathbb{L} - 1)H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  で割った商として

$$H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) := H^{\text{reg}}(\mathcal{A}) / (\mathbb{L} - 1)H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$$

と定める.

**注意 12.55** 代数  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  における sc は semi-classical limit の略である. 定理 12.82 で述べる様に,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  は量子トーラス (注意 12.81 参照) の semi-classical limit  $q^{1/2} \rightarrow -1$  で与えられる Poisson トーラスと関係している. このことから,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  は  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の semi-classical limit をとったものと解釈している.

$e(\mathbb{L}) = 1$  であるため, 写像 (12.32) は写像

$$e(-): H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Q} \quad (12.34)$$

を引き起こす. また, 次の補題が成り立つ.

**補題 12.56**  $(H^{\text{sc}}(\mathcal{A}), *)$  は可換代数である.

証明 補題 12.54 と同様に、デルタ関数  $\delta_{E_1}, \delta_{E_2}$  について  $H^{sc}(\mathcal{A})$  で

$$\delta_{E_1} * \delta_{E_2} = \delta_{E_2} * \delta_{E_1}$$

が成立することを示す。ベクトル空間  $\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)$  は

$$\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) = \{0\} \coprod (\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) \setminus \{0\})$$

であり、 $0 \in \mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)$  は直和  $E_1 \oplus E_2$  に対応している。よって等式 (12.33) より  $\delta_{E_1} * \delta_{E_2}$  は

$$\mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} \delta_{E_1 \oplus E_2} + \mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} [\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) \setminus \{0\} \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

となる。一方  $\mathbb{C}^*$  は  $\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) \setminus \{0\}$  にスカラー倍で自由に作用し、この作用によって拡大  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2 \rightarrow 0$  から定まる対象  $E_3$  の同型類は不变である。よって射  $\rho$  は

$$\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1) \setminus \{0\} \xrightarrow{\rho'} \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})$$

と分解する。 $\rho'$  は Zariski 局所的に自明であり、ファイバーは  $\mathbb{C}^*$  である。よって関係式 (12.18) と  $[\mathbb{C}^*] = \mathbb{L} - 1$  より、 $\delta_{E_1} * \delta_{E_2}$  は

$$\mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} \delta_{E_1 \oplus E_2} + \mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} (\mathbb{L} - 1) [\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

となる。上の第2項は  $H^{sc}(\mathcal{A})$  の定義より 0 である。以上より

$$\delta_{E_1} * \delta_{E_2} - \delta_{E_2} * \delta_{E_1} = (\mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} - \mathbb{L}^{-\hom(E_1, E_2)}) \delta_{E_1 \oplus E_2}$$

が従う。 $a := \hom(E_2, E_1), b := \hom(E_1, E_2)$  とおく。 $a \geq b$  ならば上式の右辺は

$$\begin{aligned} & (\mathbb{L} - 1) \cdot \frac{\mathbb{L}^{-a} - \mathbb{L}^{-b}}{\mathbb{L} - 1} \cdot \delta_{E_1 \oplus E_2} \\ &= -(\mathbb{L} - 1) \cdot \mathbb{L}^{-a} (1 + \mathbb{L} + \cdots + \mathbb{L}^{a+b-1}) \cdot \delta_{E_1 \oplus E_2} \end{aligned}$$

となる。再び  $H^{sc}(\mathcal{A})$  の定義より、上式の右辺は 0 となる。 $a \leq b$  の場合も同様である。よって補題が従う。□

上の補題により、任意の  $\rho_1, \rho_2 \in H^{\mathrm{reg}}(\mathcal{A})$  に対して

$$\rho_1 * \rho_2 - \rho_2 * \rho_1 \in (\mathbb{L} - 1) H^{\mathrm{reg}}(\mathcal{A})$$

となる。よって  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$  を  $\rho_1, \rho_2$  の  $H^{sc}(\mathcal{A})$  におけるクラスとすると、

$$\{\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2\} := \overline{\left( \frac{\rho_1 * \rho_2 - \rho_2 * \rho_1}{\mathbb{L} - 1} \right)} \in H^{sc}(\mathcal{A})$$

が矛盾なく定まることが確認できる。

上で定めた代数構造により、 $H^{sc}(\mathcal{A})$  は次で述べる Poisson 代数となる。

**定義 12.57**  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $V$  および 2 つの双線形写像

$$*, \{-, -\}: V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$$

の 3 つ組  $(V, *, \{-, -\})$  は次の条件を満たすときに **Poisson 代数** (Poisson algebra) であると呼ばれる。

- (i)  $*$  が  $V$  の結合的積を定める。
- (ii)  $\{-, -\}$  が  $V$  に Lie 代数の構造を定める。 $\{-, -\}$  は **Poisson 括弧** (Poisson bracket) と呼ばれる。
- (iii) Poisson 括弧  $\{-, -\}$  は結合代数積  $*$  に対して微分作用素として作用する。  
つまり、任意の  $x, y, z \in V$  に対し  $\{x, y * z\} = \{x, y\} * z + y * \{x, z\}$  が成り立つ。

さらに  $(V, *)$  が可換な結合代数のとき、 $(V, *, \{-, -\})$  を可換な **Poisson 代数** (commutative Poisson algebra) と呼ぶ。

**定理 12.58** 3 つ組  $(H^{sc}(\mathcal{A}), *, \{-, -\})$  は可換な Poisson 代数である。

**証明**  $(H^{sc}(\mathcal{A}), *, \{-, -\})$  が Poisson 代数であることは、 $\{-, -\}$  の定義から容易に確認できる。可換性は補題 12.56 による。□

**例 12.59**  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  から定まるデルタ関数  $\delta_{E_i}$  に対して Poisson 括弧  $\{\rho_{E_1}, \rho_{E_2}\}$  を考える。等式 (12.33) および  $\{-, -\}$  の定義から、等式

$$\begin{aligned} \{\delta_{E_1}, \delta_{E_2}\} &= \frac{\mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} - \mathbb{L}^{-\hom(E_1, E_2)}}{\mathbb{L} - 1} \delta_{E_1 \oplus E_2} \\ &\quad + \mathbb{L}^{-\hom(E_2, E_1)} [\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \\ &\quad - \mathbb{L}^{-\hom(E_1, E_2)} [\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_1, E_2)) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \end{aligned} \tag{12.35}$$

が従う。

**問題 12.60**  $H_v^{\text{reg}}(\mathcal{A})$ ,  $H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  を

$$H_v^{\text{reg}}(\mathcal{A}) := H_v(\mathcal{A}) \cap H^{\text{reg}}(\mathcal{A}), \quad H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A}) := H_v^{\text{reg}}(\mathcal{A}) / (\mathbb{L} - 1)H_v^{\text{reg}}(\mathcal{A})$$

と定義すると,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  は直和分解

$$H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{v \in \Gamma} H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A})$$

を持つことを示せ. さらに  $u_i \in H_{v_i}^{\text{sc}}(\mathcal{A}) (i = 1, 2)$  に対し  $u_1 * u_2$ ,  $\{u_1, u_2\}$  は  $H_{v_1+v_2}^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  の元であることを確認せよ.

## 12.13 イプシロン関数

前節でモチーフ的 Hall 代数  $H(\mathcal{A})$  の  $\Lambda$ -部分代数  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  を定め, そのイデアル  $(\mathbb{L} - 1)H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  による商代数  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  は Poisson 代数となることを見た. さらに  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  の元に対して Euler 数が定義できることを述べた. しかし, 一般に半安定層や半安定対象が定義するモジュライスタックの「デルタ関数」は  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元を定めない. しかし, その代わりに「イプシロン関数」なる概念を導入すると, これは  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元を与える. これは Joyce による非常に深い結果である.

$X$  を滑らかな射影的代数多様体とし, 安定性条件

$$\sigma = (Z, \mathcal{A}) \in \text{Stab}(X)$$

をとる. 各  $v \in \Gamma$  に対して  $\mathcal{O}bj(\mathcal{A})$  の部分スタック

$$\mathfrak{M}_\sigma(v) \subset \mathcal{O}bj(\mathcal{A})$$

を  $\text{ch}(E) = v$  となる  $Z$ -半安定対象のなすモジュライスタックとする. 次の仮定をおく.

**仮定 12.61** 任意の  $v \in \Gamma$  に対して  $\mathfrak{M}_\sigma(v)$  は有限型の Artin スタックである.

滑らかな射影的代数多様体  $X$  上の Bridgeland 安定性条件については, その存在が知られているすべての場合について仮定 12.61 が満たされることが知られている ([Tod08a, PT] 参照).

**定義 12.62** 仮定 12.61 の下,  $\delta_\sigma(v) \in H_v(\mathcal{A})$  を

$$\delta_\sigma(v) := [\mathfrak{M}_\sigma(v) \subset \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

と定義する。

次で見るように一般に  $\delta_\sigma(v)$  は  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元を定めない。

**例 12.63**  $X = \text{Spec } \mathbb{C}$  とし,  $v = n \in K(X) = \mathbb{Z}$  とする。このとき  $\text{Coh}(X) = \text{Vect } \mathbb{C}$  であり, 安定性条件  $\sigma = (Z, \text{Coh}(X))$  を与えることと,  $Z(\mathbb{C}) \in \mathbb{H}$  を決めるることは同値である。さらにこの場合, 0 ではない任意の  $\text{Coh}(X)$  の対象は  $Z$ -半安定になる。よって  $\mathfrak{M}_\sigma(v)$  の幾何的点は  $\mathbb{C}^n$  のみからなり, その自己同型群は  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  となる。したがって

$$\delta_\sigma(n) = [[\text{Spec } \mathbb{C} / \text{GL}(n, \mathbb{C})] \rightarrow \mathcal{O}bj(\text{Vect } \mathbb{C})]$$

となる。 $e(\text{GL}(n, \mathbb{C})) = 0$  であるため, これは  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元ではない。

「デルタ関数」は  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元を定めないが, 次の「イプシロン関数」を導入すると  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元を与える(定理 12.68)ことがわかる。

**定義 12.64**  $\epsilon_\sigma(v) \in H_v(\mathcal{A})$  を

$$\epsilon_\sigma(v) := \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_k = v \\ \arg Z(v_i) = \arg Z(v)}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \delta_\sigma(v_1) * \dots * \delta_\sigma(v_k) \quad (12.36)$$

で定義する。

**問題 12.65**  $\sigma$  の台条件を用いて (12.36) の右辺が有限和であることを示せ。

**問題 12.66** 任意の  $[E] \in \mathfrak{M}_\sigma(v)$  が  $Z$ -安定ならば  $\epsilon_\sigma(v) = \delta_\sigma(v)$  であることを確認せよ。

**注意 12.67** 上半平面  $\mathbb{H}$  内の原点を端点とする各半直線  $l$  に対して,

$$\delta_\sigma(l) := 1 + \sum_{Z(v) \in l} \delta_\sigma(v), \quad \epsilon_\sigma(l) := \sum_{Z(v) \in l} \epsilon_\sigma(v)$$

と  $(H(\mathcal{A})$  の適当な完備化の中で) 定義すると, 等式 (12.36) が成り立つことと, すべての  $l$  について等式

$$\epsilon_\sigma(l) = \log \delta_\sigma(l) \quad (12.37)$$

が成り立つことは同値である。ここで  $\delta_\sigma(l) = 1 + \delta'_\sigma(l)$  と書いたとき,  $\log \delta_\sigma(l)$  は  $\log(1 + x)$  の Taylor 展開

$$\log(1+x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

の類似で

$$\log \delta_\sigma(l) := \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \overbrace{\delta'_\sigma(l) * \cdots * \delta'_\sigma(l)}^k$$

と定義する。また  $\exp(y)$  の Taylor 展開

$$\exp(y) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} y^k$$

の類似で

$$\exp(\epsilon_\sigma(l)) := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \overbrace{\epsilon_\sigma(l) * \cdots * \epsilon_\sigma(l)}^k$$

と定めると、等式 (12.37) は

$$\delta_\sigma(l) = \exp(\epsilon_\sigma(l))$$

とも同値である。

次が Joyce により得られた非常に深い結果である。

**定理 12.68 ([Joy07b, Theorem 8.7])**  $H(\mathcal{A})$  の元を

$$\bar{\epsilon}_\sigma(v) := (\mathbb{L} - 1) \cdot \epsilon_\sigma(v)$$

と定めると、 $\bar{\epsilon}_\sigma(v)$  は  $H(\mathcal{A})$  の部分代数  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元となる。

本書では上の定理の証明には立ち入らない。現時点での証明は非常に複雑であり、より簡明な証明が求められる。

**例 12.69** 例 12.63 の状況で、 $\bar{\epsilon}_\sigma(2)$  を計算してみる。 $\epsilon_\sigma(2)$  は定義より

$$\begin{aligned}
\delta_\sigma(2) - \frac{1}{2}\delta_\sigma(1) * \delta_\sigma(1) &= \left[ \frac{\text{Spec } \mathbb{C}}{\text{GL}(2, \mathbb{C})} \right] \delta_{\mathbb{C}^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Spec } \mathbb{C}}{\mathbb{C}^*} \right] \delta_{\mathbb{C}} * \left[ \frac{\text{Spec } \mathbb{C}}{\mathbb{C}^*} \right] \delta_{\mathbb{C}} \\
&= \left( \left[ \frac{\text{Spec } \mathbb{C}}{\text{GL}(2, \mathbb{C})} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Spec } \mathbb{C}}{\mathbb{C} \rtimes (\mathbb{C}^*)^2} \right] \right) \delta_{\mathbb{C}^2} \\
&= \left( \frac{1}{\mathbb{L}(\mathbb{L}-1)(\mathbb{L}^2-1)} - \frac{1}{2\mathbb{L}(\mathbb{L}-1)^2} \right) \delta_{\mathbb{C}^2} \\
&= -\frac{1}{2\mathbb{L}(\mathbb{L}+1)(\mathbb{L}-1)} \delta_{\mathbb{C}^2}
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\bar{\epsilon}_\sigma(2) = -\frac{1}{2\mathbb{L}(\mathbb{L}+1)} \delta_{\mathbb{C}^2}$$

となり、この状況で定理 12.68 が確かめられた。

$\mathcal{A} = \text{Coh}(X)$  で  $\dim X \geq 2$  の場合、Bridgeland 安定性条件  $(Z, \text{Coh}(X))$  が存在しないことは補題 11.24 すでに述べた。この場合、Bridgeland 安定性条件の代わりにより古典的な Gieseker 安定性条件を用いて同様の議論を展開することができる。記号を簡単にするため、

$$H(X) := H(\text{Coh}(X)), \quad H_v(X) := H_v(\text{Coh}(X)) \quad (v \in \Gamma)$$

とおく。 $\mathcal{Coh}(X) := \mathcal{O}bj(\text{Coh}(X))$  とし、 $\omega$  を  $X$  上の豊富因子とする。各  $v \in \Gamma$  に対して、 $\text{ch}(E) = v$  となる  $\omega$ -Gieseker 半安定層  $E$  たちからなる部分スタック

$$\mathfrak{M}_\omega(v) \subset \mathcal{Coh}(X)$$

は常に  $\mathcal{Coh}(X)$  の開部分スタックで、有限型の Artin スタックとなることが知られている。定義 12.62、定義 12.64 と同様に  $\delta_\omega(v), \epsilon_\omega(v)$  を

$$\delta_\omega(v) := [\mathfrak{M}_\omega(v) \subset \mathcal{Coh}(X)] \in H_v(X)$$

$$\epsilon_\omega(v) := \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{v_1 + \dots + v_k = v \\ \chi(v_i, m) = \chi(v, m)}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \delta_\omega(v_1) * \dots * \delta_\omega(v_k) \in H_v(X)$$

と定義できる。ここで、 $\chi(v, m)$  は  $\text{ch}(E) = v$  となる  $E$  の被約 Hilbert 多項式（式 (5.9) 参照）である。定理 12.68 と同様に、次が成り立つ。

**定理 12.70 ([Joy07b, Theorem 8.7])**  $H(X)$  の元を

$$\bar{\epsilon}_\omega(v) := (\mathbb{L} - 1) \cdot \epsilon_\omega(v)$$

と定めると、 $\bar{\epsilon}_\sigma(v)$  は  $H^{\text{reg}}(X)$  の元となる。

**定義 12.71**  $\bar{\epsilon}_\sigma(v), \bar{\epsilon}_\omega(v)$  の射影  $H^{\text{reg}}(\mathcal{A}) \twoheadrightarrow H^{\text{sc}}(\mathcal{A}), H^{\text{reg}}(X) \twoheadrightarrow H^{\text{sc}}(X)$  による像をそれぞれ

$$\hat{\epsilon}_\sigma(v) \in H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A}), \hat{\epsilon}_\omega(v) \in H_v^{\text{sc}}(X)$$

と定める。

イプシロン関数  $\bar{\epsilon}_\sigma(v), \bar{\epsilon}_\omega(v)$  たちに Euler 数写像 (12.34) を施して、有理数からなる不变量

$$e(\hat{\epsilon}_\sigma(v)) \in \mathbb{Q}, e(\hat{\epsilon}_\omega(v)) \in \mathbb{Q} \quad (12.38)$$

を得る。次の問題により、これらはそれぞれモジュライスタック  $\mathfrak{M}_\sigma(v), \mathfrak{M}_\omega(v)$  の何らかの意味での「Euler 数」と考えられる。

**問題 12.72** 定義 12.10 の仮定の下で、 $\mathfrak{M}_\omega(v) = [M_\omega(v)/\mathbb{C}^*]$  となることを示せ。ここで  $\mathbb{C}^*$  は  $M_\omega(v)$  に自明に作用している。さらにこの場合、 $\delta_\omega(v) = \epsilon_\omega(v)$  であり、 $e(\epsilon_\omega(v)) = e(M_\omega(v))$  であることを確認せよ。

## 12.14 一般化 DT 不変量

この節から、再び  $X$  を 3 次元 Calabi–Yau 多様体に限定して話を進める。部分スタック

$$\mathfrak{M}_\omega^s(v) \subset \mathfrak{M}_\omega(v)$$

を  $\omega$ -安定層からなる部分スタックとする。定義 12.10 および定理 12.17において、 $\mathfrak{M}_\omega^s(v) = \mathfrak{M}_\omega(v)$  であり  $M_\omega(v)$  に  $X \times M_\omega(v)$  上の普遍層が存在するならば Donaldson–Thomas 不変量が定義され、さらにそれはモジュライ空間  $M_\omega(v)$  の Behrend 関数で重み付けされた Euler 数であることを述べた。

一方、前節で  $\mathfrak{M}_\omega^s(v) \subsetneq \mathfrak{M}_\omega(v)$  となる場合でも  $\mathfrak{M}_\omega(v)$  の「Euler 数」が (12.38) で与えたように定義されることを述べた。本節ではさらに Behrend 関数を (12.38) の構成に組み込んで、DT 不変量の一般化を構成する。

$\mathfrak{M}$  を (12.19) で定義した Artin スタックとする。まず、Behrend 関数を  $\mathfrak{M}$  上に拡張することを考える。次の定理 12.73 は定理 12.13 の一般化である。

**定理 12.73 ([JS12, Theorem 5.5], [Tod20, Theorem 1.1])**  $p = [E] \in \mathfrak{M}$  に対して,  $G \subset \text{Aut}(E)$  を極大簡約部分群とする. このとき,  $G$ -不変な解析的近傍  $0 \in V \subset \text{Ext}^1(E, E)$ ,  $G$ -不変な正則関数  $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ , そして相対次元が  $\dim \text{Aut}(E)$

–  $\dim G$  である複素解析スタックの間の滑らかな射

$$\Phi: ([\{df = 0\}/G], 0) \rightarrow (\mathfrak{M}, [E])$$

が存在する.

$\mathfrak{M}(\mathbb{C})$  を  $\mathfrak{M}$  の幾何的点のなす亜群の同型類の集合とする. 整数値関数

$$\chi_B: \mathfrak{M}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (12.39)$$

を  $[E] \in \mathfrak{M}(\mathbb{C})$  に対し,

$$\chi_B([E]) := (-1)^{\text{ext}^1(E, E) - \text{hom}(E, E)} (1 - e(M_0(f)))$$

と定義する. ここで  $M_0(f)$  は関数  $f$  の  $0 \in V$  における Milnor ファイバー ((12.8) 参照) であった. 関数  $\chi_B$  は定理 12.73 における  $(V, f)$  の取り方に依存せず, よって  $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$  上に定義された局所構成可能関数を与えることがわかる ([JS12, Proposition 4.4] JS 参照). ここで  $\chi_B$  が局所構成可能であるとは,  $\mathbb{C}$  上有限型のスキーム  $T$  と射  $f: T \rightarrow \mathfrak{M}$  に対して  $f^*\chi_B$  が  $T$  上の構成可能関数になるものとして定義される.  $\chi_B$  は ( $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$  上の)Behrend 関数 (Behrend function) と呼ばれる. これはもちろん §12.4 で定義した  $M_\omega(v)$  上の Behrend 関数の一般化である.

$\mathcal{A} \subset D^b(X)$  を t-構造の核とし,  $H(\mathcal{A})$  をモチーフ的 Hall 代数とする. Behrend 関数  $\chi_B$  を用いて,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  の間の  $\Lambda$ -準同型

$$\chi_B: H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \rightarrow H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \quad (12.40)$$

を, 準射影的代数多様体  $Y$ ,  $Y_k := \{y \in Y : \chi_B \circ \rho(y) = k\}$  に対し,

$$[\rho: Y \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot [\rho|_{Y_k}: Y_k \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})] \quad (12.41)$$

と定める.

**問題 12.74** 写像 (12.41) が  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  の元の代表元の取り方に依存せず, よって矛盾なく定義されることを示せ.

写像 (12.41) を用いて、一般化 DT 不变量を次で定義する。

**定義 12.75** 3 次元 Calabi–Yau 多様体  $X$  上の有理数値不变量  $\mathrm{DT}_\sigma(v)$ ,  $\mathrm{DT}_\omega(v)$  を

$$\mathrm{DT}_\sigma(v) := -e(\chi_B(\hat{\epsilon}_\sigma(v))), \quad \mathrm{DT}_\omega(v) := -e(\chi_B(\hat{\epsilon}_\omega(v)))$$

と定める。ここで  $\hat{\epsilon}_\sigma(v)$ ,  $\hat{\epsilon}_\omega(v)$  は定義 12.71 で与えられている。 $\mathrm{DT}_\sigma(v)$ ,  $\mathrm{DT}_\omega(v)$  は一般化 DT 不变量 (generalized DT invariant) と呼ばれる。

**注意 12.76** 定義 12.10 では  $\mathcal{M}_\omega(v)$  が  $M_\omega(v)$  によって表現可能で  $M_\omega(v) = \overline{M}_\omega(v)$  が成立するという仮定の下で  $\mathrm{DT}_\omega(v)$  が定義されたが、定義 12.75 は条件を何も仮定せずに定義されることに注意されたい。

**問題 12.77** 定義 12.10 の仮定の下で、定理 12.17 を用いて定義 12.10 と定義 12.75 でそれぞれ定めた  $\mathrm{DT}_\omega(v)$  が一致することを示せ。

定理 12.12 と同様に、不变量  $\mathrm{DT}_\omega(v)$  も変形不变であることが知られている。

**定理 12.78 ([JS12, Corollary 5.28])** 定理 12.12 と同じ主張が、 $(\mathcal{X}_t, v_t, \omega_t)$  が定義 12.10 の仮定を満たすことを仮定せずに、一般化 DT 不变量  $\mathrm{DT}_{\omega_t}(v_t)$  に対して成立する。

**例 12.79** 例 12.14 と同じ状況で  $v = 2 \mathrm{ch}(\mathcal{O}_C)$  とおく。このとき、

$$\emptyset = \mathfrak{M}_\omega^s(v) \subset \mathfrak{M}_\omega(v) = \left[ \frac{\mathrm{Spec} \mathbb{C}}{\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})} \right]$$

となることが容易にわかる。ここで右辺の唯一の幾何的点は  $\mathcal{O}_C^{\oplus 2}$  に対応している。さらに例 12.69 と同様の計算により

$$\hat{\epsilon}_\omega(v) = -\frac{1}{2L(L+1)} \delta_{\mathcal{O}_C^{\oplus 2}}$$

となる。定義通り計算すると  $\chi_B(\mathcal{O}_C^{\oplus 2}) = 1$  であるため、 $\mathrm{DT}_\omega(v) = 1/4$  を得る。

## 12.15 Poisson トーラス

Poisson 代数  $H^{sc}(\mathcal{A})$  は非常に大きな代数であるが、 $X$  が 3 次元 Calabi–Yau 多様体の場合には Poisson トーラスと呼ばれるより簡明な Poisson 代数と関連付けることが可能である。まず 3 次元 Calabi–Yau 多様体  $X$  および Chern 標数の像  $\Gamma \subset H^{2*}(X, \mathbb{Q})$  に対して非対称双線形形式

$$\chi: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$$

を各  $E, F \in D^b(X)$  に対して等式

$$\chi(\text{ch}(E), \text{ch}(F)) = \chi(E, F)$$

が成立するように定める。等式 (4.2) を用いると

$$\begin{aligned} & \chi((r_1, D_1, -\beta_1, -n_1), (r_2, D_2, -\beta_2, -n_2)) \\ &= n_1 r_2 - n_2 r_1 + D_1 \beta_2 - D_2 \beta_1 + \frac{c_2(X)}{12} (r_1 D_2 - r_2 D_1) \end{aligned} \quad (12.42)$$

となる。

また  $E, F$  が  $D^b(X)$  のある t-構造の核  $\mathcal{A}$  の対象としたとき、 $\text{Ext}^{<0}(E, F) = 0$  である。また Serre 双対性定理と  $X$  が 3 次元 Calabi-Yau 多様体であることから  $\text{ext}^i(E, F) = \text{ext}^{3-i}(F, E)$  であるから

$$\begin{aligned} & \chi(\text{ch}(E), \text{ch}(F)) \\ &= \text{hom}(E, F) - \text{ext}^1(E, F) + \text{ext}^1(F, E) - \text{hom}(F, E) \end{aligned} \quad (12.43)$$

が成り立つ。

$\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $C(X)$  を各  $v \in \Gamma$  たちを基底とする  $\mathbb{Q}$ -線形空間とする：

$$C(X) := \bigoplus_{v \in \Gamma} \mathbb{Q} \cdot c_v$$

ここで、 $\mathbb{Q} \cdot c_v$  は  $c_v$  を基底とする 1 次元ベクトル空間である。 $C(X)$  に Poisson 代数の構造を入れよう。まず積構造は

$$c_{v_1} * c_{v_2} := (-1)^{\chi(v_1, v_2)} c_{v_1 + v_2}$$

と定め、また Poisson 括弧は

$$\{c_{v_1}, c_{v_2}\} := (-1)^{\chi(v_1, v_2)} \chi(v_1, v_2) c_{v_1 + v_2} \quad (12.44)$$

と定義する。すると 3 つ組

$$(C(X), *, \{-, -\})$$

は可換な Poisson 代数となる。これは **Poisson トーラス** (Poisson torus) と呼ばれる。

**問題 12.80** 3 つ組  $(C(X), *, \{-, -\})$  は可換な Poisson 代数となることを確認せよ。

**注意 12.81** ベクトル空間  $C(X)_{\mathbb{C}}$  に積構造  $c_{v_1} *' c_{v_2} = c_{v_1+v_2}$  を入れたものはトーラス  $\Gamma^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  の座標環に他ならない。一方、上述の Poisson トーラスの定義は  $C(X)$  の量子変形を施した量子トーラス (quantum torus) を用いて説明できる。量子トーラス  $C_q(X)$  は

$$C_q(X) := \bigoplus_{v \in \Gamma} \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}) \cdot c_v \quad c_{v_1} *_q c_{v_2} := q^{\frac{1}{2}\chi(v_1, v_2)} c_{v_1+v_2}$$

と定義する。すると、Poisson トーラスにおける積構造  $*$  および Poisson 括弧  $\{-, -\}$  は

$$\begin{aligned} c_{v_1} * c_{v_2} &= \lim_{q^{1/2} \rightarrow -1} c_{v_1} *_q c_{v_2} \\ \{c_{v_1}, c_{v_2}\} &= \lim_{q^{1/2} \rightarrow -1} \frac{c_{v_1} *_q c_{v_2} - c_{v_2} *_q c_{v_1}}{q - 1} \end{aligned}$$

で得られる。

$\mathbb{Q}$ -ベクトル空間  $C(X)$  に  $\Lambda$ -加群の構造を

$$u \cdot c_v := e(u)c_v \quad (u \in \Lambda)$$

と定める。ここで  $e(-)$  は (12.31) で定めた Euler 数写像である。また、 $t$ -構造の核  $\mathcal{A} \subset D^b(X)$  に対して写像の合成

$$H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\chi_n} H_v^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{e} \mathbb{Q} \cdot c_v$$

を考える。ここで最初の写像は (12.40) で、2 番目の写像は (12.34) で与えられる。すべての  $v \in \Gamma$  で直和をとって、写像

$$\Upsilon: H^{\text{sc}}(\mathcal{A}) \rightarrow C(X)$$

が得られる。写像  $\Upsilon$  は明らかに  $\Lambda$ -加群としての準同型である。また、前節で定義した不変量  $\text{DT}_{\sigma}(v)$  と  $\Upsilon$  は

$$\Upsilon(\widehat{\epsilon}_{\sigma}(v)) = -\text{DT}_{\sigma}(v) \cdot c_v \tag{12.45}$$

と関係付けられる。

**定理 12.82 ([JS12, Theorem 5.14], [Bru11, Theorem 5.1])**  $\Lambda$ -加群準同

型  $\Upsilon$  は Poisson 代数としての準同型である.

**証明** ここでは簡単のため、デルタ関数についてのみ  $\Upsilon$  が Poisson 代数としての構造を保つことを示す.  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  および  $v_i := \text{ch}(E_i)$  に対してデルタ関数  $\delta_{E_i} \in H_{v_i}^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  を考える. 2つの等式

$$\begin{aligned}\Upsilon(\delta_{E_1} * \delta_{E_2}) &= \Upsilon(\delta_{E_1}) * \Upsilon(\delta_{E_2}) \\ \Upsilon(\{\delta_{E_1}, \delta_{E_2}\}) &= \{\Upsilon(\delta_{E_1}), \Upsilon(\delta_{E_2})\}\end{aligned}$$

を示す. まず  $\Upsilon$  の定義から

$$\Upsilon(\delta_{E_i}) = \chi_B(E_i) c_{v_i}$$

が従う. 補題 12.56 の証明内で示したように、 $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$ において  $\delta_{E_1} * \delta_{E_2} = \mathbb{L}^{-\text{hom}(E_2, E_1)} \delta_{E_1 \oplus E_2}$  が成り立つため

$$\Upsilon(\delta_{E_1} * \delta_{E_2}) = \chi_B([E_1 \oplus E_2]) c_{v_1 + v_2}$$

となる. よって補題 12.83 より最初の等式が従う.

また等式 (12.35) より

$$\begin{aligned}\Upsilon(\{\delta_{E_1}, \delta_{E_2}\}) &= (\text{hom}(E_1, E_2) - \text{hom}(E_2, E_1)) \chi_B([E_1 \oplus E_2]) c_{v_1 + v_2} \\ &\quad + \left( \int_{\xi \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(E_2, E_1))} \chi_B(E_\xi) \, de \right) c_{v_1 + v_2} \\ &\quad - \left( \int_{\xi \in \mathbb{P}(\text{Ext}^1(E_1, E_2))} \chi_B(E_\xi) \, de \right) c_{v_1 + v_2}\end{aligned}$$

となる. 等式 (12.43) と補題 12.83 を用いると

$$\Upsilon(\{\delta_{E_1}, \delta_{E_2}\}) = (-1)^{\chi(v_1, v_2)} \chi(v_1, v_2) \chi_B(E_1) \chi_B(E_2) c_{v_1 + v_2}$$

が成り立ち、2番目の等式が得られる.  $\square$

**補題 12.83**  $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$  上の Behrend 関数  $\chi_B : \mathfrak{M}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$  は  $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$  に対し、等式

$$\chi_B([E_1 \oplus E_2]) = (-1)^{\chi(E_1, E_2)} \chi_B(E_1) \cdot \chi_B(E_2)$$

および

$$\begin{aligned} & \int_{\xi \in \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1))} \chi_B(E_\xi) \, de - \int_{\xi \in \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(E_1, E_2))} \chi_B(E_\xi) \, de \\ &= (\mathrm{ext}^1(E_2, E_1) - \mathrm{ext}^1(E_1, E_2)) \chi_B([E_1 \oplus E_2]) \end{aligned}$$

を満たす。ここで  $E_\xi$  は拡大  $\xi$  に対応する  $\mathcal{A}$  の対象であり、積分は構成可能関数  $\xi \mapsto \chi_B(E_\xi)$  に関して積分している。

**証明** 証明は省略する。詳細は [JS12, Theorem 5.11] を参照されたい。  $\square$

## 12.16 一般化 DT 不变量の壁越え

$X$  を 3 次元 Calabi–Yau 多様体とする。 $\sigma$  を変えたときに一般化 DT 不变量  $\mathrm{DT}_\sigma(v) \in \mathbb{Q}$  がどのように変化するか考察しよう。前節までの結果を用いると、この問い合わせに答えることができる。<sup>8</sup>

以下では  $\mathrm{Stab}^*(X)$  を  $\mathrm{Stab}(X)$  の連結成分の 1 つとする。やや曖昧な形であるが、次の定理が成立する。

**定理 12.84**  $\sigma, \tau \in \mathrm{Stab}^*(X)$  に対して  $\mathrm{DT}_\sigma(v)$  を  $\mathrm{DT}_\tau(v)$  によって記述する公式が存在する。

**証明**  $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ ,  $\tau = (W, \mathcal{B})$  とする。これらは同じ連結成分に属するので、 $\sigma$ ,  $\tau$  を結ぶコンパクトな曲線が  $\mathrm{Stab}^*(X)$  に存在する。この曲線上には壁と部屋の構造が存在して、一般化 DT 不变量は部屋内では定数であるが壁を越えるとジャンプし得る。よって  $\sigma$  は壁に、 $\tau$  は部屋に入っており、 $\sigma$  と  $\tau$  の距離が十分近いと仮定してよい。さらに必要なら  $\mathbb{C}$  を  $\sigma$  に作用させることで  $\arg Z(v) \in (0, \pi)$  と仮定してよい。（ここで  $\mathbb{C}$  の  $\mathrm{Stab}^*(X)$  への作用によって  $D^b(X)$  の半安定対象の同型類の集合は不变であることに注意されたい。）すると任意の  $[E] \in \mathfrak{M}_\sigma(v)$  に対して、 $\tau$  に関する HN フィルトレーションは  $\mathcal{A}$  におけるフィルトレーションとなる。 $E$  の  $\tau$  における HN フィルトレーションを

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

とすると、各  $F_i = E_i/E_{i-1}$  は  $\tau$ -半安定であり、

---

<sup>8</sup> ただし、実際に不变量の間の簡明な関係式を得られるかどうかは別問題である。

$$\arg W(F_1) > \cdots > \arg W(F_k),$$

$$\arg Z(F_1) = \cdots = \arg Z(F_k)$$

を満たし、よって命題 12.52 と同じ議論により、 $H(\mathcal{A})$ において

$$\delta_\sigma(v) = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{v_1 + \cdots + v_k = v \\ \arg W(v_1) > \cdots > \arg W(v_k) \\ \arg Z(v_1) = \cdots = \arg Z(v_k)}} \delta_\tau(v_1) * \cdots * \delta_\tau(v_k) \quad (12.46)$$

が成り立つ。原点を端点とする半直線  $l \subset \mathbb{H}$  に対して、

$$\Gamma_{\sigma,l} := \{\text{ch}(E) : E \text{ は } Z\text{-半安定で } Z(E) \in l\}$$

とおき、また

$$\hat{H}_{\sigma,l}(\mathcal{A}) := \prod_{v \in \Gamma_{\sigma,l}} H_v(\mathcal{A})$$

と定める。 $\hat{H}_{\sigma,l}(\mathcal{A})$  の元を

$$\delta_\sigma(l) := 1 + \sum_{v \in \Gamma_{\sigma,l}} \delta_\sigma(v), \quad \epsilon_\sigma(l) := \sum_{v \in \Gamma_{\sigma,l}} \epsilon_\sigma(v)$$

と定め、さらに原点を端点とする他の半直線  $l' \subset \mathbb{H}$  に対して

$$\delta_\tau(l') := 1 + \sum_{\substack{v \in \Gamma_{\sigma,l'} \\ W(v) \in l'}} \delta_\tau(v), \quad \epsilon_\tau(l') := \sum_{\substack{v \in \Gamma_{\sigma,l'} \\ W(v) \in l'}} \epsilon_\tau(v)$$

とする。これらは定義から、 $\hat{H}_{\sigma,l}(\mathcal{A})$  において関係式

$$\epsilon_\sigma(l) = \log \delta_\sigma(l), \quad \epsilon_\tau(l') = \log \delta_\tau(l') \quad (12.47)$$

を満たしている。 $(\log)$  の定義については注意 12.67 を参照のこと。これらを用いて、等式 (12.46) は

$$\delta_\sigma(l) = \prod_{l'}^{\curvearrowright} \delta_\tau(l')$$

と言い換えることができる。さらに関係式 (12.47) により、

$$\epsilon_\sigma(l) = \log \left( \prod_{l'}^{\curvearrowright} \exp(\epsilon_\tau(l')) \right)$$

を得る. 以下の定理 12.85 で述べる公式を用いて上の関係式を展開すると, 各  $v_1, \dots, v_k \in \Gamma_{\sigma, l}$  に対して有理数  $U(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{Q}$  が存在して,  $H(\mathcal{A})$  における等式

$$\epsilon_\sigma(v) = \sum_{k \geq 1} \sum_{v_1 + \dots + v_k = v} U(v_1, \dots, v_k) [\epsilon_\tau(v_1), [\epsilon_\tau(v_2), \dots [\epsilon_\tau(v_{k-1}), \epsilon_\tau(v_k)] \dots]]$$

が成立することがわかる. ここで  $[-, -]$  は交換子であり,  $v, v_i \in \Gamma_{\sigma, l}$  である. 両辺に  $(\mathbb{L} - 1)$  を掛けて,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  に射影する. 等式

$$(\mathbb{L} - 1) \cdot [\epsilon_\tau(v_1), [\epsilon_\tau(v_2), \dots [\epsilon_\tau(v_{k-1}), \epsilon_\tau(v_k)] \dots]] \\ = \frac{1}{\mathbb{L} - 1} \left[ \bar{\epsilon}_\tau(v_1), \frac{1}{\mathbb{L} - 1} \left[ \bar{\epsilon}_\tau(v_2), \dots \frac{1}{\mathbb{L} - 1} [\bar{\epsilon}_\tau(v_{k-1}), \bar{\epsilon}_\tau(v_k)] \dots \right] \right]$$

に注意することで,  $H^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  における等式

$$\widehat{\epsilon}_\sigma(v) = \sum_{k \geq 1} \sum_{v_1 + \dots + v_k = v} U(v_1, \dots, v_k) \{ \widehat{\epsilon}_\tau(v_1), \{ \widehat{\epsilon}_\tau(v_2), \dots \{ \widehat{\epsilon}_\tau(v_{k-1}), \widehat{\epsilon}_\tau(v_k) \} \dots \} \} \quad (12.48)$$

が成立する. 定理 12.82 における Poisson 準同型  $\Upsilon$  を施し, 等式 (12.45) に注意することで求める主張を得る.  $\square$

上の定理の証明において, 非可換代数に関する次の結果を用いた.

**定理 12.85 (Baker–Campbell–Hausdorff 公式)**  $\mathbb{C}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$  を非可換形式べき級数環とする.  $X, Y \in \mathbb{C}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$  に対して次が成立する.

$$\log(\exp(X) \cdot \exp(Y)) \\ = \sum_{n > 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i+s_i > 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (r_i + s_i))^{\!-1}}{r_1!s_1! \cdots r_n!s_n!} \\ \underbrace{[X, [X, \dots [X,}_{r_1} \underbrace{[Y, [Y, \dots [Y,}_{s_1} \dots \underbrace{[X, [X, \dots [X,}_{r_n} \underbrace{[Y, [Y, \dots Y]] \dots]}_{s_n}]$$

**注意 12.86** 定理 12.84 において実際に  $\text{DT}_\sigma(v)$  と  $\text{DT}_\tau(v)$  の関係式を具体的に求めるには, 証明中に現れた  $U(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{Q}$  を計算する必要がある. これは

組み合わせ論的に複雑な記述を持つ。具体的な記述については [Joy08, Definition 4.4] を参照されたい。

問題 12.87 内の等式は上の定理の類似物であるが、直接計算で簡単に示すことができる。

問題 12.87 定理 12.85 の状況で、次の等式が成立することを示せ。

$$\begin{aligned} \exp(X) \cdot Y \cdot \exp(-Y) &= \exp([X, -])(Y) \\ &:= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \overbrace{[X, [X, \dots [X, Y] \dots ]]}^k. \end{aligned}$$

問題 12.87 は次節で用いる

## 12.17 君のママが僕のママであるために

この節では定理 12.32 で与えた DT/PT 対応を証明する。定理 12.84 を直接用いるわけではないが、その証明の背後にあるアイデアは共通している。

$\omega$  を  $X$  上の豊富因子として、 $\mathrm{Coh}(X)$  の捩れ対  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  を (11.12) の記号で  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{0, \omega}$ ,  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{0, \omega}$  とおく。つまり、 $E \in \mathrm{Coh}(X)$  に対して

$$\mu_\omega(E) := \mathrm{ch}_1(E) \cdot \omega^2 / \mathrm{rank}(E)$$

と定めると

$$\mathcal{T} = \langle E \in \mathrm{Coh}(X) : E \text{ は } \mu_\omega\text{-半安定で } \mu_\omega(E) > 0 \rangle_{\mathrm{ex}}$$

$$\mathcal{F} = \langle E \in \mathrm{Coh}(X) : E \text{ は } \mu_\omega\text{-半安定で } \mu_\omega(E) \leq 0 \rangle_{\mathrm{ex}}$$

である。対応する傾斜を

$$\mathcal{A} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{T}[-1] \rangle_{\mathrm{ex}} \subset D^b(X) \tag{12.49}$$

とする。<sup>9</sup>補題 11.31 より、任意の  $E \in \mathcal{A}$  に対して  $\mathrm{ch}_1(E) \cdot \omega^2 \leq 0$  となる。よって  $\mathcal{A}$  の部分圏を

$$\mathcal{C} := \{E \in \mathcal{A} : \mathrm{ch}_1(E) \cdot \omega^2 = 0\}$$

---

<sup>9</sup> ( $\mathcal{A}$  は 11.13) で与えた  $\mathcal{B}_{B, \omega}$  とはシフトの分だけ異なっている。

と定めると、これは  $\mathcal{A}$  の部分 Abel 圈となる。さらに

$$\begin{aligned}\mathrm{Coh}_I(X) &:= \{E \in \mathrm{Coh}(X) : E \text{ は } \mu_\omega\text{-半安定で } \mu_\omega(E) = 0\}, \\ \mathrm{Coh}_{\leq 1}(X) &:= \{F \in \mathrm{Coh}(X) : F \text{ の台の次元は } 1 \text{ 以下}\}\end{aligned}$$

と定義する。定義 12.50 における記号を用いると補題 11.31 の証明から

$$\mathcal{C} = \langle \mathrm{Coh}_I(X), \mathrm{Coh}_{\leq 1}(X)[-1] \rangle_{\mathrm{ex}} \quad (12.50)$$

が従う。

また、 $\mathrm{Coh}_0(X)$  を  $X$  上の 0 次元層からなる Abel 圈、 $\mathrm{Coh}_{\leq 1}^{\mathrm{pure}}(X)$  を純 1 次元層からなる  $\mathrm{Coh}_{\leq 1}(X)$  の部分圏とする。また  $\bar{\mathcal{C}}$  を

$$\bar{\mathcal{C}} := \langle \mathrm{Coh}_I(X), \mathrm{Coh}_0(X)[-1] \rangle_{\mathrm{ex}} \quad (12.51)$$

と定める。すると  $(\mathrm{Coh}_0(X), \mathrm{Coh}_{\leq 1}^{\mathrm{pure}}(X))$  は  $\mathrm{Coh}_{\leq 1}(X)$  の捩れ対をなすので、

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \langle \mathrm{Coh}_I(X), \mathrm{Coh}_0(X)[-1], \mathrm{Coh}_{\leq 1}^{\mathrm{pure}}(X)[-1] \rangle_{\mathrm{ex}} \\ &= \langle \bar{\mathcal{C}}, \mathrm{Coh}_{\leq 1}^{\mathrm{pure}}(X)[-1] \rangle_{\mathrm{ex}}\end{aligned}$$

が成り立つ。

**命題 12.88**  $\bar{\mathcal{C}}$  の部分圏  $\mathrm{Coh}_P(X)$  を

$$\mathrm{Coh}_P(X) := \{E \in \bar{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}(\mathrm{Coh}_0(X)[-1], E) = 0\} \quad (12.52)$$

と定めると

$$\bar{\mathcal{C}} = \langle \mathrm{Coh}_0(X)[-1], \mathrm{Coh}_P(X) \rangle_{\mathrm{ex}}$$

が成り立つ。さらに、 $\mathrm{rank}(E) = 1$  となる対象  $E \in D^b(X)$  が  $E \in \mathrm{Coh}_P(X)$  であることと、 $E$  が安定対から定まる 2 項複体 (12.16) と同型であることは同値である。

**証明**  $\mathrm{Coh}_P(X)$  の定義より  $\mathrm{Coh}_0(X)[-1]$  から  $\mathrm{Coh}_P(X)$  に非自明な射は存在しない。この事実と Abel 圈  $\mathcal{A}$  の Noether 性から（補題 11.33 の証明を参照）、 $(\mathrm{Coh}_0(X)[-1], \mathrm{Coh}_P(X))$  が  $\bar{\mathcal{C}}$  の捩れ対となることがわかる。

後半の主張を示す。まず  $\mathrm{rank}(E) = 1$  となる対象  $E \in \mathrm{Coh}_P(X)$  をとる。定義より  $E \in \bar{\mathcal{C}}$  であるため、 $Q := \mathcal{H}^1(E)$  は  $X$  上の 0 次元層である。また  $\bar{\mathcal{C}}$  の定義 (12.51) より  $\mathcal{H}^0(E)$  は階数 1 の安定層であるため、問題 12.21 より 1 次元以下の部分スキーム  $C \subset X$  が存在して  $\mathcal{H}^0(E) \cong I_C$  となる。ここで  $I_C$  は  $C$  を定義す

るイデアル層である。よって完全三角形

$$I_C \rightarrow E \rightarrow Q[-1] \rightarrow I_C[1]$$

を得る。上の完全三角形から定まる射  $Q[-2] \rightarrow I_C$  と自然な埋め込み  $I_C \hookrightarrow \mathcal{O}_X$  の合成  $\eta: Q[-2] \rightarrow \mathcal{O}_X$ 、つまり図式

$$\begin{array}{ccccc} Q[-2] & \longrightarrow & I_C & \longrightarrow & E \\ & \searrow \eta & \downarrow & \nearrow \eta' & \\ & & \mathcal{O}_X & & \end{array} \quad (12.53)$$

を考える。Serre 双対性定理と  $Q$  が 0 次元であることから、 $i \neq 3$  に対し

$$\mathrm{Ext}^i(Q, \mathcal{O}_X) = H^{3-i}(X, Q)^\vee = 0 \quad (12.54)$$

となる。よって上述の合成射  $\eta$  は 0 射となり、したがって図式 (12.53) の点線で示したように埋め込み  $I_C \hookrightarrow \mathcal{O}_X$  は射  $\eta': E \rightarrow \mathcal{O}_X$  に拡張する。 $\eta'$  の写像錐  $F$  をとって完全三角形

$$E \xrightarrow{\eta'} \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F \rightarrow E[1] \quad (12.55)$$

を得る。図式

$$\begin{array}{ccccc} & & F[-1] & & \\ & & \downarrow & & \\ I_C & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Q[-1] \\ \parallel & & \downarrow & & \\ I_C & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_C \end{array}$$

に八面体公理を適用することで、完全三角形

$$\mathcal{O}_C \rightarrow F \rightarrow Q \rightarrow \mathcal{O}_C[1]$$

が存在する。特に  $F$  は 1 次元層となり、 $E$  は 2 項複体 ( $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} F$ ) と  $D^b(X)$ において同型になる。対  $(F, s)$  が安定対であることを示す。射  $s$  の余核は  $\mathrm{Coker}(s) = \mathcal{H}^1(E) = Q$  であり、これは 0 次元層であった。また  $E \in \mathrm{Coh}_P(X)$  であるため  $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coh}_0(X)[-1], E) = 0$  であり、これと完全三角形 (12.55) より  $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coh}_0(X), F) = 0$  が従う。よって  $F$  は純粋であり、 $(F, s)$  は安定対を定め

ることがわかる。 (12.55) より  $E$  は安定対  $(F, s)$  が定める 2 項複体である。

逆に  $(F, s)$  を安定対とし、 $E \in D^b(X)$  を安定対が定める 2 項複体とする。すると  $\mathcal{H}^1(E) = \text{Coker}(s)$  は 0 次元層である。更にある 1 次元部分スキーム  $C \subset X$  が存在し  $\mathcal{H}^0(E) = I_C$  となるため、 $E \in \bar{\mathcal{C}}$  がわかる。 $E \in \text{Coh}_P(X)$  を示すには、任意の  $Q \in \text{Coh}_0(X)$  に対して  $\text{Hom}(Q[-1], E) = 0$  を示せばよい。 $F$  が純粹であることおよび (12.54) から

$$\text{Hom}(Q[-1], F[-1]) = \text{Hom}(Q[-1], \mathcal{O}_X) = 0$$

であり、完全三角形

$$F[-1] \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow F[1]$$

に  $\text{Hom}(Q[-1], -)$  を適用することで  $\text{Hom}(Q[-1], E) = 0$  が得られる。よって命題が示された。□

**問題 12.89**  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$  に対して  $n(\beta) \in \mathbb{Z}$  が存在して、 $E \in \bar{\mathcal{C}}$  が  $\text{ch}(E) = (1, 0, -\beta, -n)$  となるならば  $n \geq n(\beta)$  となることを示せ。(問題 12.22 を参照。)

傾斜 (12.49) によって与えられる t-構造の核  $\mathcal{A}$  から定まるモチーフ的 Hall 代数  $H(\mathcal{A})$  を考える。問題 12.89 で得られた整数  $n(\beta)$  を用いて

$$\widehat{H}(\mathcal{A}) := \prod_{\substack{n, \beta \\ n \geq n(\beta)}} H_{(1, 0, -\beta, -n)}(\mathcal{A})$$

とし、さらに

$$\widehat{H}_{\leq 1}(X) := \prod_{\beta \geq 0, n \geq 0} H_{(0, 0, -\beta, -n)}(\mathcal{A})$$

と定める。等式 (12.50) より

$$H_{(0, 0, -\beta, -n)}(\mathcal{A}) = H_{(0, 0, -\beta, -n)}(\text{Coh}_{\leq 1}(X)[-1]) \quad (12.56)$$

であることに注意する。部分圏  $\text{Coh}_{\leq 1}(X)[-1] \subset \mathcal{A}$  が拡大で閉じていることから、 $H(\mathcal{A})$  における \*-積は  $\widehat{H}_{\leq 1}(X)$  における積、および  $\widehat{H}_{\leq 1}(X)$  の  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  への作用を誘導する。問題 12.22 より、 $\widehat{H}(\mathcal{A})$  の元

$$\delta_{\bar{\mathcal{C}}} := \sum_{n, \beta} [\mathcal{O}bj_{(1, 0, -\beta, -n)}(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

が定まる。また (12.50)、(12.51) および命題 12.88 より  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  の元

$$\delta_I := \sum_{n,\beta} [[I_n(X, \beta) / \mathbb{C}^*] \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

$$\delta_P := \sum_{n,\beta} [[P_n(X, \beta) / \mathbb{C}^*] \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

が自然に定まる。さらに等式 (12.56) より、 $\widehat{H}_{\leq 1}(X)$  の元

$$\delta_0 := \sum_{n \geq 0} [\mathcal{O}bj_{(0,0,0,-n)}(\text{Coh}_0(X)[-1]) \rightarrow \mathcal{O}bj(\mathcal{A})]$$

が定まる。すると、等式 (12.51), (12.52) そして命題 12.49 の議論により  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  において、等式

$$\delta_{\overline{C}} = \delta_I * \delta_0 = \delta_0 * \delta_P \quad (12.57)$$

が成立する。ここで  $\epsilon_0 = \log \delta_0$  とおくと  $\delta_0 = \exp(\epsilon_0)$  である ( $\log$  や  $\exp$  については注意 12.67 参照) ことから

$$\delta_0 * \exp(-\epsilon_0) = 1_0$$

が従う。ここで  $1_0$  は  $\widehat{H}(\mathcal{A})$  の単位元である。よって  $* \exp(-\epsilon_0)$  を (12.57) の両辺に施すことで、 $\widehat{H}(\mathcal{A})$  において等式

$$\delta_I = \exp(\epsilon_0) * \delta_P * \exp(-\epsilon_0)$$

が成立する。そこでこの場合に問題 12.87 を当てはめると上の等式は単純化され

$$\delta_I = \exp([\epsilon_0, -])(\delta_P) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \underbrace{[\epsilon_0, [\epsilon_0, \dots [\epsilon_0,}_{k \text{個}} [\epsilon_0, \delta_P] \dots]] \quad (12.58)$$

となる。一方  $\delta_I, \delta_P$  の定義から、

$$\bar{\delta}_I := (\mathbb{L} - 1)\delta_I, \bar{\delta}_P := (\mathbb{L} - 1)\delta_P$$

は  $\widehat{H}^{\text{reg}}(\mathcal{A})$  の元となる。また、定理 12.68 と同様に

$$\bar{\epsilon}_0 := (\mathbb{L} - 1)\epsilon_0$$

は  $H_0^{\text{reg}}(X)$  の元となる。 $\bar{\delta}_I, \bar{\delta}_P, \bar{\epsilon}_0$  を  $\widehat{H}^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  に射影した像を  $\widehat{\delta}_I, \widehat{\delta}_P, \widehat{\epsilon}_0$  とすると、等式 (12.48) と同様に  $\widehat{H}^{\text{sc}}(\mathcal{A})$  における等式

$$\widehat{\delta}_I = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \overbrace{\{\widehat{\epsilon}_0, \{\widehat{\epsilon}_0, \dots, \{\widehat{\epsilon}_0, \widehat{\delta}_P\} \dots\}\}}^k \quad (12.59)$$

が成立する。上の等式に定理 12.82 における Poisson 準同型  $\Upsilon$  を適用すると Poisson トーラス  $C(X)$  (の適当な完備化) において、等式

$$\Upsilon(\widehat{\delta}_I) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \overbrace{\{\Upsilon(\widehat{\epsilon}_0), \{\Upsilon(\widehat{\epsilon}_0), \dots, \{\Upsilon(\widehat{\epsilon}_0), \Upsilon(\widehat{\delta}_P)\} \dots\}\}}^k \quad (12.60)$$

が成り立つ。以降、等式 (12.60) を展開して不变量の関係式の形にする。 $\delta_I, \delta_P$  の定義より

$$\Upsilon(\widehat{\delta}_I) = \sum_{n, \beta} -I_{n, \beta} \cdot c_{(1, 0, -\beta, -n)}, \quad \Upsilon(\widehat{\delta}_P) = \sum_{n, \beta} -P_{n, \beta} \cdot c_{(1, 0, -\beta, -n)}$$

となる。また

$$N_{n, 0} := DT_\omega(0, 0, 0, n) \in \mathbb{Q}$$

とおくと、これは  $\omega$  に依存せず  $\delta_0$  の定義から

$$\Upsilon(\widehat{\epsilon}_0) = - \sum_{n \geq 0} N_{n, 0} \cdot c_{(0, 0, 0, -n)}$$

が従う。また Poisson 括弧の定義 (12.44) よび Euler 対の公式 (12.42) から

$$\{c_{(0, 0, 0, -n')}, c_{(1, 0, -\beta, -n)}\} = (-1)^{n'} n' \cdot c_{(1, 0, -\beta, -n-n')}$$

である。よって (12.60) を展開すると、Poisson トーラス  $C(X)$  において

$$\begin{aligned} & \sum_{n, \beta} I_{n, \beta} c_{(1, 0, -\beta, -n)} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n_0, n_1, \dots, n_k, \beta} \frac{(-1)^{k+n_1+\dots+n_k}}{k!} \left( \prod_{i=1}^k n_i N_{n_i, 0} \right) P_{n_0, \beta} \cdot c_{(1, 0, -\beta - \sum_{0 \leq i \leq k} n_i)} \end{aligned}$$

が成り立つ。各係数の関係式に直すと、

$$I_{n, \beta} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{n_0+n_1+\dots+n_k=n} \left( \prod_{i=1}^k (-1)^{n_i-1} n_i N_{n_i, 0} \right) P_{n_0, \beta}$$

が得られる。また生成関数の間の等式にすると、

$$\sum_{n,\beta} I_{n,\beta} q^n t^\beta = \exp \left( \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n N_{n,0} q^n \right) \left( \sum_{n,\beta} P_{n,\beta} q^n t^\beta \right) \quad (12.61)$$

が成り立つ。ここで定数項が 0 であるべき級数  $f(q)$  に対して  $\exp(f(q))$  を

$$\exp(f(q)) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f(q)^k$$

とおいた。等式 (12.61) の  $t^0$  の項を取り出し、等式 (12.13) を用いると

$$M(-q)^{e(X)} = \exp \left( \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n N_{n,0} q^n \right) \quad (12.62)$$

が従う。等式 (12.61) および (12.62) より、定理 12.32 (i) における求める公式  $I_\beta(X) = M(-q)^{e(X)} P_\beta(X)$  が証明された。



# 付録 A Grothendieck 双対性

本書で出てくる Cohen–Macaulay 環や, Cohen–Macaulay 加群, そして Gorenstein 環について, これらの定義と双対化複体を使った特徴付け, およびよく知られた性質を与えよう. さらに局所双対性と, Grothendieck 双対性の主張を述べる.

この章で出てくる環はすべて可換環とする. ここで述べる多くの結果は, 可換環として次数付き環  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  をとれば, 次数付き版の結果に置き換わるが, ここでは詳細は省略する. 適当な文献（例えば [BH93]）を参照されたい. また A.2 節にある結果の証明などは, 例えば [Mat89, BH93] を参考にされたい.

## A.1 双対化複体

$R$  を Noether 環とする. このとき  $* \in \{-, b\}$  に対し,  $D_{\mathrm{mod}\,R}^*(\mathrm{Mod}\,R)$  は  $D^*(\mathrm{mod}\,R)$  と同値であることが知られている（補題 2.42, [KS94, Proposition 1.7.11].

**定義 A.1** 複体  $\omega_R^\bullet \in D_{\mathrm{mod}\,R}^b(\mathrm{Mod}\,R)$  が  $R$  上の双対化複体 (dualizing complex) であるとは,  $\omega_R^\bullet$  は单射的対象のなす有界な複体と擬同型で, さらに自然な写像

$$R \rightarrow \mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}(\omega_R^\bullet)$$

が同型であるときをいう. ここで関手  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(-, \omega_R^\bullet)$  を  $\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}$  と書いた.

関手  $\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}$  は

$$\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet} : D_{\mathrm{mod}\,R}(\mathrm{Mod}\,R)^\circ \rightarrow D_{\mathrm{mod}\,R}(\mathrm{Mod}\,R)$$

とも

$$\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet} : D_{\text{mod } R}(\text{Mod } R) \rightarrow D_{\text{mod } R}(\text{Mod } R)^\circ$$

ともみなすことができる。このとき次が成り立つ。

**補題 A.2**  $\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet} \circ \mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}$  は恒等関手と同型であり、特に  $\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}$  は同値を与える。さらに  $\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}$  は  $D^+(\text{mod } R)^\circ$  と  $D^-(\text{mod } R)$  (もしくは  $D^b(\text{mod } R)^\circ$  と  $D^b(\text{mod } R)$ ) の間の同値も誘導する。

$\omega_R^\bullet, \tilde{\omega}_R^\bullet$  を  $R$  上の双対化複体とすると、可逆  $R$ -加群  $L$ 、整数  $n$  が存在し、 $\omega_R^\bullet \cong \tilde{\omega}_R^\bullet \otimes_R L[n]$  が成り立つ。さらに  $(R, \mathfrak{m}, k)$  を Noether 局所環とし、 $\omega_R^\bullet$  をその双対化複体とすると、ある整数  $m$  が存在し、

$$\mathbb{D}_{\omega_R^\bullet}(k) \cong k[m]$$

が成り立つ。必要なら  $\omega_R^\bullet$  に転換関手を施せば、 $m = 0$  ととることができる。このような双対化複体  $\omega_R^\bullet$  を正規化された双対化複体 (normalized dualizing complex) と呼ぶ。 $R$  上の可逆加群は  $R$  と同型であるから、正規化された双対化複体は同型を除いてただ 1 つである。

双対化複体が存在するような Noether 環の例を挙げておこう。

**例 A.3** (i) 完備な Noether 局所環は双対化複体を持つ。例えば  $k$  を体とすると、 $k$  は  $k$  上の正規化された双対化複体となる。

(ii) Noether 環  $R$  が双対化複体  $\omega_R^\bullet$  を持つとする。 $R$  上の代数  $T$  が  $R$ -加群として有限生成であるときは  $\mathbf{R}\text{Hom}_R(T, \omega_R^\bullet)$  は  $T$  上の双対化複体となる。

(iii) Noether 環  $R$  が双対化複体  $\omega_R^\bullet$  を持つとする。このとき  $\omega_R^\bullet \otimes_R R[x]$  は  $R$  上多項式環  $R[x]$  上の双対化複体となる。

(iv) (i), (ii), (iii) より体上有限生成な代数は双対化複体を持つ。

より一般的の場合の双対化複体の存在に関しては、定理 A.14 を参照されたい。

単射的  $R$ -加群  $E$  がその部分加群  $M$  の单射的包絡 (injective hull) であるとは、 $0$  でない  $E$  の部分加群  $N$  に対し、 $N \cap M \neq 0$  となることをいう。与えられた加群  $M$  の单射的包絡は必ず存在することが知られている。

**定理 A.4 (局所双対定理)**  $(R, \mathfrak{m}, k)$  を  $d$  次元 Noether 局所環とし、 $\omega_R^\bullet$  を  $R$  の正規化された双対化複体とする。 $E(k)$  を  $k$  の单射的包絡とすると、任意の  $M \in \text{mod } R$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R^{-i}(M, \omega_R^\bullet)^\wedge &\cong \mathrm{Hom}_R(H_{\mathfrak{m}}^i(M), E(k)) \\ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R^{-i}(M, \omega_R^\bullet), E(k)) &\cong H_{\mathfrak{m}}^i(M)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで  $\wedge$  は  $\mathfrak{m}$  完備化を意味し, 局所コホモロジー  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  は次で定義される.

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) := \varinjlim_n \mathrm{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}^n, M).$$

上の  $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$  は局所コホモロジー (local cohomology) と呼ばれる.

次に Noether スキーム上の双対化複体を定義しよう.

**定義 A.5**  $X$  を Noether スキームとする. 複体  $\omega_X^\bullet \in D_{\mathrm{Coh}(X)}^b(\mathrm{Mod} \mathcal{O}_X)$  が  $X$  上の双対化複体 (dualizing complex) であるとは,  $X$  のあるアファイン開被覆  $\{U_i = \mathrm{Spec} A_i\}$  が存在し,  $\omega_X^\bullet$  の各  $U_i$  への制限が  $A_i$  の双対化複体となるときをいう.

$X$  が双対化複体  $\omega_X^\bullet$  を持つとき, 関手  $\mathbb{D}_{\omega_X^\bullet} := \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(-, \omega_X^\bullet)$  に対し, 補題 A.2 と同様に次が成り立つ.  $* \in \{-, b\}$  に対し,  $D_{\mathrm{Coh}(X)}^*(\mathrm{QCoh}(X)) \cong D^*(X)$  が成り立つことに注意されたい (補題 2.42 は  $X$  が Noether でさえあれば成り立つ.).

**補題 A.6**  $\mathbb{D}_{\omega_X^\bullet} \circ \mathbb{D}_{\omega_X^\bullet}$  は恒等関手と同型であり, 特に関手  $\mathbb{D}_{\omega_X^\bullet}$  は  $D_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathrm{QCoh}(X))^\circ$  と  $D_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathrm{QCoh}(X))$  の間の同値を与える. さらに  $D^+(X)^\circ$  と  $D^-(X)$  (もしくは  $D^b(X)^\circ$  と  $D^b(X)$ ) の間の同値を誘導する.

$\omega_X^\bullet, \tilde{\omega}_X^\bullet$  を  $X$  上の双対化複体とすると,  $X$  上の可逆層  $\mathcal{L}$ , 整数  $n$  が存在し,  $\omega_X^\bullet \cong \tilde{\omega}_X^\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_X \mathcal{L}[n]$  が成り立つ. 例えは体上有限型のスキームには双対化複体が存在する.

**定理 A.7 (Grothendieck 双対性)**  $f: X \rightarrow Y$  を準射影的代数多様体間の固有射とし,  $\omega_Y^\bullet$  を双対化複体とする.

- (i)  $\mathbf{R}f_*: D^+(X) \rightarrow D^+(Y)$  の右随伴関手  $f^!$  が存在し, さらに  $\omega_X^\bullet := f^! \omega_Y^\bullet$  は  $X$  の双対化複体となる.
- (ii)  $f^! = \mathbb{D}_{\omega_X^\bullet} \circ \mathbf{L}f^* \circ \mathbb{D}_{\omega_Y^\bullet}$  が成り立つ.
- (iii)  $E \in D^-(X), F \in D^+(Y)$  に対し, 次の同型が存在する.

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\mathcal{H}om_X(E, f^!F) \cong \mathbf{R}\mathcal{H}om_Y(\mathbf{R}f_* E, F)$$

Grothendieck 双対性は次で述べるように双対化関手  $\mathbb{D}_{\omega_x^\bullet}, \mathbb{D}_{\omega_y^\bullet}$  と導來関手  $\mathbf{R}f_*$  の可換性と解釈できる。

**系 A.8** 定理 A.7 の状況を考える。このとき次の関手の同型が存在する：

$$\mathbb{D}_{\omega_y^\bullet} \circ \mathbf{R}f_* \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_* \circ \mathbb{D}_{\omega_x^\bullet} \quad (\text{A.1})$$

**証明** 定理 A.7(iii)において、 $F = \omega_y^\bullet$  とすると  $f^!F = \omega_x^\bullet$  となることから得られる。  $\square$

$X$  を体  $k$  上で定義された射影的代数多様体とする。例 A.3 によると  $k$  は  $k$  上の正規化された双対化複体であった。 $f: X \rightarrow \text{Spec } k$  を構造射とすると、定理 A.7(i) より  $f^!k$  は  $X$  上の双対化複体を定める。このとき

$$-\dim X = \min\{i : \mathcal{H}^i(f^!k) \neq 0\}$$

が成り立つ。そこで

$$\omega_X^\circ := \mathcal{H}^{-\dim X}(f^!k)$$

とおく。こうして定まる連接層  $\omega_X^\circ$  を  $X$  の双対化層 (dualizing sheaf) と呼ぶ。

## A.2 Cohen–Macaulay 加群と Gorenstein 環

$(R, \mathfrak{m}, k)$  を  $d$  次元 Noether 局所環とする。つまり  $\mathfrak{m}$  は局所環  $R$  の極大イデアルで  $k = R/\mathfrak{m}$  である。以下では  $M \in \text{mod } R$  とする。

$$\text{Ann } M := \{a \in R : aM = 0\}$$

とおくとこれは  $R$  のイデアルとなり、 $M$  は環  $R/\text{Ann } M$  上の加群であると思える。

$$\dim M := \dim(R/\text{Ann } M)$$

と定義する。

$a \in R$  が  $M$ -正則 ( $M$ -regular) であるとは  $0 \neq m \in M$  に対し、 $am \neq 0$  となることである。 $\mathfrak{m}$  の元の列  $\{a_1, \dots, a_m\}$  は、各  $0 \leq i < m$  に対し  $a_{i+1}$  が

$M/(a_1, \dots, a_i)M$ -正則となり、さらに、 $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$ となるとき（長さ  $m$  の） $M$ -正則列 ( $M$ -regular sequence) と呼ばれる。

$R$  の元の列  $a_1, \dots, a_n$  をとり、しばしば単に  $\mathbf{a}$  と表す。以下で定義する  $\mathbf{a}$  による  $M$  の Koszul 複体  $K_{\bullet}(\mathbf{a}, M)$  を用いて、 $\mathbf{a}$  が  $M$ -正則列になることの特徴付け（補題 A.9）が得られるのでここで述べておこう。まず  $R$  のイデアルを

$$I := (a_1, \dots, a_n)$$

とする。まず整数  $k$  に対し、 $k \notin [0, n]$  のときは  $K_k(\mathbf{a}) := 0$  とする。さらに階数  $n$  の自由  $R$ -加群を

$$V := R^{\oplus n} \cong Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$$

とおき、 $0 \leq k \leq n$  であるときは、階数  $\binom{n}{k}$  の自由  $R$ -加群を

$$K_k(\mathbf{a}) := \bigwedge^k V$$

と決め、 $0 < k \leq n$  に対して  $R$  準同型を

$$\begin{aligned} d_k: K_k(\mathbf{a}) &\rightarrow K_{k-1}(\mathbf{a}) \quad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \\ &\mapsto \sum_{s=1}^k (-1)^{s+1} a_{i_s} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_s}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \end{aligned}$$

と定める。ただし  $\widehat{e_{i_s}}$  はその項を除く、という意味である。このとき  $d_{k-1} \circ d_k = 0$  が成り立ち、 $(K_{\bullet}(\mathbf{a}), d_{\bullet})$  は複体となる。さらに

$$K_{\bullet}(\mathbf{a}, M) := K_{\bullet}(\mathbf{a}) \otimes M$$

とおき、 $\mathbf{a}$  による  $M$  の Koszul 複体 (Koszul complex) と呼ぶ。

補題 A.9  $(R, \mathfrak{m}, k)$  を  $d$  次元 Noether 局所環とし、 $M$  を  $0$  でない有限生成  $R$ -加群とする。 $\mathfrak{m}$  の元の列  $a_1, \dots, a_n$  を  $\mathbf{a}$  で表す。

(i)  $\mathbf{a}$  が  $M$ -正則列であるとき、

$$H_i(K_{\bullet}(\mathbf{a}, M)) = \begin{cases} 0 & (i \neq 0) \\ M/IM & (i = 0) \end{cases}$$

が成り立つ。

(ii)  $H_1(K_{\bullet}(\mathbf{a}, M)) = 0$  であるなら、 $\mathbf{a}$  は  $M$ -正則列である。

補題 A.9 により、 $\mathbf{a}$  が  $R$ -正則列であるとき、 $K_{\bullet}(\mathbf{a})$  は  $R/I$  の自由分解を与えることがわかるが、さらに最小自由分解を与えることも知られている。

$M$  の深さ (depth) を  $\operatorname{depth}_R M$  もしくは単に  $\operatorname{depth} M$  と書き

$$\operatorname{depth} M := \max\{m \in \mathbb{Z} : \exists \text{長さ} m \text{の } M\text{-正則列}\}$$

と定義する。 $M$  が  $\operatorname{depth} M = \dim M$  を満たすとき、 $M$  を **Cohen–Macaulay (CM)** 加群であるといい、さらに  $\dim M = d$  となるとき、極大 **Cohen–Macaulay (MCM)** 加群 (maximal Cohen–Macaulay module) であるという。便宜上 0 加群も MCM であると定める。 $R$  自身が  $R$ -加群として CM 加群であるとき  $R$  は **Cohen–Macaulay (CM)** 環であるという。このときもちろん  $R$  は MCM 加群となる。

0 でない加群  $M$  の射影次元  $\operatorname{proj dim} M$  が有限であれば **Auslander–Buchsbaum** の公式 (Auslander–Buchsbaum formula) より、

$$\operatorname{proj dim} M = \operatorname{depth} R - \operatorname{depth} M \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ。例えばこれから、 $R$  が CM 環、 $\operatorname{proj dim} M < \infty$  であるときは、 $M$  が MCM 加群であることと射影加群であることは同値である。

$M$  が MCM 加群であることの特徴付けを与えよう。

**定理 A.10**  $(R, \mathfrak{m}, k)$  を  $d$  次元 Noether 局所環とし、 $M \in \operatorname{mod} R$  とする。

(i) 次は同値である。

- (1)  $M$  は MCM 加群である。
- (2)  $i < d$  に対し  $\operatorname{Ext}_R^i(k, M) = 0$ 。
- (3) 任意の  $i \neq d$  に対し、 $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ 。

(ii)  $R$  が双対化複体を持つとし、 $\omega_R^{\bullet}$  を正規化された双対化複体とする。さらに

$M = R$  であるときは (i) の各条件は次と同値である。

- (4) 加群  $\omega_R$  が存在し、 $\omega_R^{\bullet} \cong \omega_R[d]$  が成り立つ。

(4) で得られた加群  $\omega_R$  を  $R$  の双対化加群 (dualizing module) という。次は Gorenstein 環の定義と特徴付けを与える。

**定理 A.11**  $(R, \mathfrak{m}, k)$  を  $d$  次元 Noether 局所環とすると次はすべて同値である。

- (i)  $\operatorname{inj dim} R < \infty$ 。
- (ii)  $\operatorname{inj dim} R = d$ 。

- (iii)  $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(k, R) = k[-d]$ .
- (iv)  $R$  は CM 環であり, かつ  $\mathrm{Ext}_R^d(k, R) = k$ .
- (v)  $R[d]$  は正規化された双対化複体となる.

これらが成り立つとき  $R$  を **Gorenstein 環** という.

$R$  が正則局所環 (regular local ring) であるとは  $d = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  が成り立つことであり, 代数多様体  $X$  が滑らかであるとは各閉点  $x \in X$  に対し, 局所環  $\mathcal{O}_{X,x}$  が正則になることであった.  $R$  が Noether 環のときは,  $R$  が正則であるとはすべての素イデアルでの局所化が正則になることと定める.

環  $R$  の大域次元 (global dimension)  $\mathrm{gl.dim} R$  を

$$\mathrm{gl.dim} R := \sup\{\mathrm{proj\, dim\,} M : M \in \mathrm{Mod\,} R\}$$

で定義する.

$$\mathrm{gl.dim} R = \sup\{\mathrm{proj\, dim\,} M : M \in \mathrm{mod\,} R\}$$

が成り立つことが知られている.

例えば正則局所環  $(R, \mathfrak{m}, k)$  に対し,  $a_1, \dots, a_d$  を  $\mathfrak{m}$  の最小生成系とすると, これは  $R$ -正則列になる. そこで Koszul 複体  $K_\bullet = K_\bullet(a_1, \dots, a_d)$  に対し,

$$0 \rightarrow K_d \rightarrow \cdots \rightarrow K_0 \rightarrow R/(a_1, \dots, a_d) \cong k \rightarrow 0$$

は  $k$  の  $R$ -加群としての最小自由分解を与える.  $\mathrm{gl.dim} R = \mathrm{proj\, dim}_R k$  が成り立つことが知られているので,  $\mathrm{gl.dim} R = d$  であることがわかる. より強く次が成り立つ.

**定理 A.12**  $R$  を  $d$  次元 Noether 環とすると次はすべて同値である.

- (i)  $R$  は正則環である.
- (ii)  $\mathrm{gl.dim} R < \infty$ .
- (iii)  $\mathrm{gl.dim} R = d$ .
- (iv)  $M, N \in \mathrm{Mod\,} R$ ,  $i > d$  に対し,  $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) = 0$ .
- (v)  $M, N \in \mathrm{mod\,} R$ ,  $i > d$  に対し,  $\mathrm{Ext}_R^i(M, N) = 0$ .

**注意 A.13** Noether 環  $R$  の Krull 次元が無限であるときは ([AM, Exercise 11.4] にそのような環の例がある)  $R$  が正則であっても,  $\mathrm{gl.dim} R < \infty$  とはならない.

局所環に対して

正則局所環  $\Rightarrow$  完全交叉環  $\Rightarrow$  Gorenstein 環  $\Rightarrow$  CM 環

が成り立つ。さらに Noether 環  $R$  が CM 環（もしくは Gorenstein 環）であるとは、すべての極大イデアルによる局所化が CM 環（もしくは Gorenstein 環）になることであるとする。Noether 環上の加群が CM であることも同様に定義する。

ちなみに定理 A.11(v) の条件から Gorenstein Noether 局所環は双対複体を持つが、より強く次が成り立つ ([Kawas, Corollary 1.4]).

**定理 A.14**  $R$  を Noether 環とする。このとき  $R$  が双対化複体を持つことと、 $R$  が有限次元 Gorenstein 環の商で書けることは同値である

代数多様体  $X$  が CM 特異点（もしくは Gorenstein 特異点）を持つ、もしくは単に CM（もしくは Gorenstein）であるとは、各閉点  $x \in X$  に対し、 $\mathcal{O}_{X,x}$  が CM 環（もしくは Gorenstein 環）となることである。

**補題 A.15**  $X$  を代数多様体とし、 $\omega_X^\bullet$  をその双対化複体とする。次は同値である。

- (i)  $X$  が CM 特異点（もしくは Gorenstein 特異点）を持つ。
- (ii) 整数  $n \in \mathbb{Z}$  と連接層（もしくは可逆層） $\mathcal{F}$  が存在し、 $\omega_X^\bullet \cong \mathcal{F}[n]$  が成り立つ。

### A.3 標 準 層

$X$  が滑らかな代数多様体としたとき、 $X$  の標準束を

$$\omega_X := \det \Omega_X = \bigwedge^{\dim X} \Omega_X$$

と定義した。次に  $X$  を正規な代数多様体とし、 $U$  を  $X$  の正則部分、つまり  $x \in X$  で、 $\mathcal{O}_{X,x}$  が正則となる点全体とする。このとき  $U$  は  $X$  の開集合で  $\text{codim}(X \setminus U, X) \geq 2$  となるから、因子類群  $\text{Cl}(X)$  と  $\text{Cl}(U)$  の間に同型が存在し ([Har77, Proposition II.6.5])。 $U$  上の標準因子  $K_U$  に対応し、 $X$  上の Weil 因子（の線形同値類）が定まる。これを  $X$  の標準因子 (canonical divisor) と呼び、 $K_X$  と書く。

階数 1 の反射的層を因子的層 (divisorial sheaf) と呼ぶ。因子的層の同型類と Weil 因子の線形同値類の間には自然な 1 対 1 対応が存在する。可逆層は因子的層であり、上記の対応で Cartier 因子の線形同値類に対応する：

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{因子的層の同型類} \} & \longleftrightarrow & \text{Cl}(X) := \{ \text{Weil 因子の線形同値類} \} \\ \cup & & \cup \\ \text{Pic } X := \{ \text{可逆層の同型類} \} & \longleftrightarrow & \text{CaCl}(X) := \{ \text{Cartier 因子の線形同値類} \} \end{array}$$

正規な代数多様体  $X$  の標準因子  $K_X$  に対応する因子的層を  $X$  の標準層 (canonical sheaf) と呼び,  $\omega_X$  と書く. さらに  $X$  が射影的代数多様体になるときは双対化層  $\omega_X^\circ$  と標準層  $\omega_X$  は同型となる ([KM98, Proposition 5.75]).

正規な代数多様体  $X$  が Gorenstein であることと,  $X$  は CM であり, かつ  $\omega_X$  が可逆層となることが同値であることが知られている.  $\omega_X$  が可逆層という条件だけからは  $X$  が Gorenstein であることは従わないことが次の例よりわかる.

**例 A.16**  $X$  を Abel 曲面上の錐とすると  $X$  は正規である. このとき  $\omega_X$  は構造層  $\mathcal{O}_X$  と同型となるが,  $X$  の頂点は CM 特異点でない. 特に Gorenstein 特異点でもない ([Kol13, Example 3.6]).



# 付録 B 代数上の加群

以下  $k$  を体とし、断らない限り加群はすべて右加群を考える。また  $k$ -代数  $A$  上の有限次元右加群のなす Abel 圈を f.d.  $A$  で表す。もし  $A$  が有限次元代数ならば、f.d.  $A = \text{mod } A$  となることに注意されたい。ここで述べる内容は [ARS97] や [ASS06] に詳しく解説されている。

## B.1 有限次元代数

加法圏  $\mathcal{C}$  の対象  $E$  が直既約 (indecomposable) とは、 $F, G \in \mathcal{C}$  に対して、 $E \cong F \oplus G$  となるとき  $F = 0$ 、もしくは  $G = 0$  となることである。

$A$  を有限次元  $k$ -代数とする。 $\text{mod } A$  に対しては Kull-Schmidt の定理が成り立つ。つまりすべての  $M \in \text{mod } A$  は有限個の直既約な加群の直和で書け、さらにこの直和分解の仕方は同型と順序の入れ替えを除いて一意である。このことから  $A$  を  $A$ -加群と見ると、直既約な射影加群  $P_i$  を用いて、 $A = \bigoplus_{i=1}^N P_i$  と書ける。 $\text{mod } A$  の射影加群は  $A$  の自由加群の直和因子なので、再び Kull-Schmidt の定理から、直既約射影加群は  $P_i$  のいずれかと同型となる。ここで  $i \neq j$  ならば  $P_i \not\cong P_j$  が成り立つき、 $A$  は基本代数 (basic algebra) である、という。

## B.2 箭

箭 (quiver)  $Q = (Q_0, Q_1) = (Q_0, Q_1, s, t)$  は、頂点 (vertex) の集合  $Q_0$ 、矢印 (arrow) の集合  $Q_1$ 、矢印に始点 (source) を対応させる写像  $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ 、終点 (target) を対応させる写像  $t: Q_1 \rightarrow Q_0$  からなる。矢印  $\alpha \in Q_1$  に対し、 $a = s(\alpha), b = t(\alpha)$  であるとき、 $\alpha$  を  $a \rightarrow b$  を書く。 $Q$  の頂点  $a$  から頂点  $b$  への長さ  $l \geq 1$  の道 (path) とは列

$$(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \mid b)$$

であって、 $1 \leq k < l$  に対し、

$$s(\alpha_1) = a, \quad t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1}), \quad t(\alpha_l) = b$$

が成り立つものとをいう。同じ道を単に  $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$  とか、

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b$$

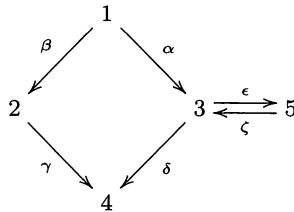
などと書く。またこの道を  $p$  とおき、 $s(p) = a, t(p) = b$  と定め、それぞれ  $p$  の始点、終点と呼ぶ。 $Q$  の長さ  $l$  の道全体からなる集合を  $Q_l$  とし、各頂点  $a \in Q_0$  に対応し、始点、終点とも  $a$  となる長さ 0 の道

$$e_a = (a \parallel a)$$

があると思うことにする。つまり  $Q_0$  は長さ 0 の道全体からなる集合であり、さらに  $Q_1$  は長さ 1 の道全体からなる集合と思える。 $Q$  の長さ 1 以上の道  $p$  で  $s(p) = t(p)$  が成り立つとき、道  $p$  は  $Q$  のサイクル (cycle) である、という。

以下では簇  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  として有限簇、つまり頂点の集合  $Q_0$ 、矢印の集合  $Q_1$  が有限集合である場合のみを考える。

**例 B.1** 簇  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  として、次の図のようなものを考える。



すると、 $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta\}$  であり、 $s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 3$  などとなる。 $\alpha\delta, \epsilon\zeta$  などは  $Q$  の長さ 2 の道であり、 $\epsilon\zeta$  はサイクルである。

### B.3 簇上の道代数

簇  $Q$  の  $k$  上の道代数 (path algebra) とは、 $k$ -代数であり、ベクトル空間としては  $Q$  の長さ 0 以上のすべての道をその基底に持ち、2 つの道の積を

$$(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_l \mid b)(c \mid \beta_1, \dots, \beta_m \mid d) \\ = \begin{cases} (a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m \mid d) & (b = c \text{ のとき}) \\ 0 & (b \neq c \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めたものである。\$Q\$ の \$k\$ 上の道代数を \$kQ\$ と書く。

\$Q\$ がサイクルを持たないとき、\$Q\$ は非輪状 (acyclic) であるという。このとき \$Q\_0 = \{1, 2, \dots, N\}\$ とおき、矢印 \$p \in Q\_1\$ に対し、\$s(p) < t(p)\$ が成り立つようにできる。このような簾 \$Q\$ を順序付き簾 (ordered quiver) と呼ぶ。簾 \$Q\$ の道代数 \$kQ\$ が有限次元であること、\$Q\$ が非輪状であること、\$Q\_0\$ の元をうまく並べて \$Q\$ を順序付き簾とできること、はすべて同値である。

簾 \$Q\$ の道代数 \$kQ\$ に対し、\$R\_Q\$ をすべての矢印（長さ 1 の道）で生成される道代数 \$kQ\$ の両側イデアルとすると \$k\$-ベクトル空間として、

$$R_Q = \bigoplus_{l \geq 1} kQ_l, \quad R_Q^m = \bigoplus_{l \geq m} kQ_l$$

が成り立つ。道代数 \$kQ\$ の両側イデアル \$I\$ が許容イデアル (admissible ideal) であるとは、ある正の整数 \$m\$ が存在し、\$R\_Q^m \subset I \subset R\_Q^2\$ が成り立つことである。つまり \$I\$ は長さ 2 以上の道で生成され、長さ \$m\$ 以上の道をすべて含んでいるようなイデアルである。したがって道代数 \$kQ\$ が無限次元であっても、\$I\$ が許容イデアルであるときは \$kQ/I\$ は有限次元になる。また \$Q\$ が非輪状のときは、すべての道は有限の長さを持つから、\$R\_Q^2\$ に含まれる両側イデアルは許容イデアルとなる。

\$\rho = \{\rho\_i\}\$ を \$Q\$ の関係式の集合とする。ここで \$Q\$ の関係式とは始点と終点をそれぞれ共有する長さ 2 以上の道たちの \$k\$ 上の線形結合のことである。\$(Q, \rho)\$ を関係式付き簾 (quiver with relations) と呼ぶ。さて関係式付き簾 \$(Q, \rho)\$ の道代数

$$A_Q := kQ/I$$

を考えよう。つまり \$I\$ は任意の \$\rho\_i \in \rho\$ たちで生成される両側イデアルである。

以下 B.3 節のおわりまでは簡単のため \$I\$ が許容イデアル、特に \$A\_Q\$ が有限次元であるとする。\$e\_i\$ は頂点 \$i \in Q\_0\$ に対応する長さ 0 の道であったが、それを \$kQ\$ の元、さらには \$A\_Q\$ の元とも思える。このとき加群

$$P(i) := e_i A_Q \in \text{mod } A_Q$$

は \$Q\$ の頂点 \$i\$ から出発する道全体で生成される直既約な \$A\_Q\$-加群である。\$A\_Q\$ は

すべての道で生成されるから、 $A_Q$ -加群として  $A_Q = \bigoplus_{i=1}^N P(i)$  と直和分解できる。このことと B.1 節で述べたことから  $\text{mod } A_Q$  のすべての直既約射影加群は  $P(i) (i \in Q_0)$  のいずれかと同型で、また  $A_Q$  は基本代数であることがわかる。さらにもし  $Q$  が非輪状であるとき、 $A_Q$  の大域次元  $\text{gl.dim } A_Q$  は  $Q$  の道の長さの最大値以下となる ([HZ13] 参照)。特に

$$\text{gl.dim } A_Q \leq |Q_0| - 1$$

が成り立つ。

有限次元代数  $A$  に対し、有限次元基本代数  $A_b$  が存在し、 $A$  と  $A_b$  は森田同値 (Morita equivalence)，すなわち Abel 圈  $\text{mod } A$  と  $\text{mod } A_b$  が同値になる。一方  $k$  を代数閉体とすると、 $k$  上の有限次元基本代数は、ある簇の道代数のある許容イデアルによる商環と同型になる。したがって任意の有限次元代数  $A$  に対し、簇  $Q$  とその道代数の許容イデアル  $I$  が存在し

$$\text{mod } A \cong \text{mod } kQ/I$$

が成り立つ。さらに  $kQ$  の許容イデアルは  $Q$  の有限個の関係式で生成されていることが知られているので、有限次元代数の加群を考える上では、関係式付き簇の道代数の加群を考えることが本質的である。

## B.4 簇上の表現

この節では関係式付き簇の表現を導入する。定理 B.2 および定理 B.3 で示すように関係式付き簇の道代数上の加群のなす圏と、関係式付き簇の表現のなす圏は圏同値である。後者の方が理解しやすいことが多い。

簇  $Q = (Q_0, Q_1)$  に対し、 $Q$  の表現 (representation of quiver) とは各  $i \in Q_0$  に対し、 $k$ -ベクトル空間  $W_i$  があり、各  $\alpha \in Q_1$  に対し、線形写像  $w_\alpha: W_{s(\alpha)} \rightarrow W_{t(\alpha)}$  からなるものである。これを単に  $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (w_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$  などと書く。 $Q$  の表現  $W$  が有限次元であるとは各ベクトル空間  $W_i$  が有限次元であることである。 $W$  の次元ベクトル (dimension vector) を  $(\dim_k W_i)_{i \in Q_0}$  のこととし  $\dim W (\in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{Q_0})$  と書くことにする。

$Q$  の表現  $W$  から  $W'$  への射とは、線形写像の族  $\{\psi_i\}_{i \in Q_0}$  であって、各  $\alpha \in Q_1$  に対して次の図式を可換にするものである：

$$\begin{array}{ccc} W_{s(\alpha)} & \xrightarrow{w_\alpha} & W_{t(\alpha)} \\ \psi_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \psi_{t(\alpha)} \\ W'_{s(\alpha)} & \xrightarrow{w'_\alpha} & W'_{t(\alpha)} \end{array}$$

すべての  $\psi_i$  が单射であるとき,  $W$  を  $W'$  の部分表現という. このようにして決まる箱  $Q$  の表現のなす圏を  $\text{Rep}(Q)$  と表し, 有限次元表現のなす  $\text{Rep}(Q)$  の部分圏を  $\text{rep}(Q)$  と表す. これらは Abel 圈となる.  $\text{Rep}(Q)$  の 0 対象を自明な表現と呼ぶ. つまり  $Q$  の自明な表現は次元ベクトルが 0 ベクトルとなるような表現のことである.

**定理 B.2** 箱  $Q$  に対し, その道代数上の右加群のなす圏  $\text{Mod } kQ$  と  $Q$  の表現のなす圏  $\text{Rep}(Q)$  は同値である. この同値を制限して  $\text{f.d. } kQ$  と  $\text{rep}(Q)$  の間にも Abel 圈の同値がある.

**証明** 対象の対応だけを記すので詳細は各自確かめられたい. まず

$$W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (w_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \in \text{Rep}(Q)$$

に対し, 右  $kQ$ -加群  $M$  を次のようにして定める. まず  $k$ -ベクトル空間として  $M := \bigoplus_{i \in Q_0} W_i$  とおく. さらに  $m = \bigoplus_{i \in Q_0} m_i \in M$  に対し

$$m e_i := m_i$$

とし, また道  $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$  に対し  $w_p = w_{\alpha_l} \circ \cdots \circ w_{\alpha_1}$  とおくと

$$m p := w_p(m)$$

と定めることで加群の構造が定まる. 逆に  $M \in \text{Mod } kQ$  が与えられたとき,  $i \in Q_0$  に対し  $W_i := M e_i$  とし,  $\alpha \in Q_1$  に対し

$$w_\alpha: W_{s(\alpha)} \rightarrow W_{t(\alpha)} \quad m \mapsto m\alpha$$

として定める.

□

関係式付き箱  $(Q, \rho)$  の表現 (representation of a quiver with relations) とは,  $W = ((W_i)_{i \in Q_0}, (w_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \in \text{Rep}(Q)$  であってさらに任意の関係式

$$\sum_j a_j p_j \in \rho \quad (a_j \in k, p_j \text{ は } Q \text{ の長さ 2 以上の道})$$

に対し,

$$\sum_j a_j w_{p_j} = 0$$

が成り立つもののこととする. ここで道  $p_j$  が矢印  $\alpha_k \in Q_1$  を用いて

$$p_j = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$$

と書けるとき定理 B.2 の証明中のように

$$w_{p_j} := w_{\alpha_l} \circ \cdots \circ w_{\alpha_1}$$

と定める. 関係式付き簇の表現のなす Abel 圈を  $\text{Rep}(Q, \rho)$  と表し, その有限次元表現のなす部分 Abel 圈を  $\text{rep}(Q, \rho)$  で表す. 定理 B.2 で考えた関手を制限することで次が得られる.

**定理 B.3** 関係式付き簇  $(Q, \rho)$  に対し,  $I$  を  $\rho$  の元で生成される  $kQ$  の両側イデアルとする. このとき  $\text{Mod } kQ/I$  と  $(Q, \rho)$  の表現のなす圏  $\text{Rep}(Q, \rho)$  は同値である. この同値を制限して f.d.  $kQ/I$  と  $\text{rep}(Q, \rho)$  の間にも圏同値がある.

$(Q, \rho)$  を関係式付き簇とし, 各  $i \in Q_0$  に対し, 表現  $S(i) \in \text{rep}(Q, \rho)$  を次のように定める.  $j \in Q_0$  に対し,

$$S(i)_j := \begin{cases} k & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とおく. 明らかに  $S(i)$  は自明でない部分表現を持たないから,  $S(i)$  は Abel 圈  $\text{rep}(Q, \rho)$  の単純対象 (simple object) である. つまり,  $S(i)$  は自明な表現ではなく, さらに任意の  $S(i)$  の部分表現は  $S(i)$  自身か, もしくは自明な表現のみとなる. 定理 B.3 によって得られた圏同値 f.d.  $kQ/I \cong \text{rep}(Q, \rho)$  によって  $S(i) \in \text{rep}(Q, \rho)$  と対応する f.d.  $kQ/I$  の対象も  $S(i)$  と表すこともある.

**補題 B.4** 関係式付き簇  $(Q, \rho)$  の道代数  $kQ/I$  が有限次元であるとき, その表現のなす圏  $\text{rep}(Q, \rho)$  の単純対象は  $S(i)$  の形の対象のみである.

**証明** まず簇  $Q$  が非輪状であると仮定する. このとき  $Q_0 = \{1, 2, \dots, N\}$  とおき, 任意の矢印  $p \in Q_1$  に対し,  $s(p) < t(p)$  が成り立つようになる. 自明でない表現  $W \in \text{rep}(Q, \rho)$  に対し,  $i := \max\{j \in Q_0 \mid W_j \neq 0\}$  と定めると  $S(i)$  は  $W$  の部分表現となることがわかる. そこでもし  $W$  が単純表現であるならば,  $W = S(i)$  となるしかない.  $Q$  が非輪状とは限らない場合の主張は [ASS06,

Lemma III.2.1] を参照されたい.

□

**定理 B.5** (i) 関係式付き旗  $(Q, \rho)$  の道代数  $A_Q := kQ/I$  が有限次元であるとする. このとき Abel 圈  $\text{mod } A_Q$  の Grothendieck 群  $K(\text{mod } A_Q)$  は  $[S(i)]$  ( $i \in Q_0$ ) たちで生成される自由 Abel 群となる.

(ii)  $A$  を有限次元代数とすると  $\text{mod } A$  の Grothendieck 群  $K(\text{mod } A)$  は有限生成な自由 Abel 群となる.

**証明** (i) 任意の対象  $W \in \text{rep}(Q, \rho)$  に対し, 補題 B.4 と  $W$  が有限次元表現であることから, 組成列

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_l = W$$

が存在し, 各  $j$  に対し  $V_j/V_{j-1}$  はある  $S(i)$  と同型である.  $W$  の組成因子に  $S(i)$  の同型類が現れる回数を  $a_i$  とすると,  $K(\text{rep}(Q, \rho))$  の中で

$$[W] = \sum_{j=1}^l [V_j/V_{j-1}] = \sum_i a_i [S(i)]$$

と書ける. よって  $K(\text{rep}(Q, \rho))$  は  $[S(i)]$  たちで生成されることがわかった.

次元ベクトル  $\mathbf{dim}$  は加法的なので群準同型

$$\mathbf{dim}: K(\text{rep}(Q, \rho)) \rightarrow \mathbb{Z}^{Q_0} \quad \sum_i a_i [S(i)] \mapsto (a_i)_i$$

を定めるが, 逆写像を作ることでこれが同型であることがわかる.

(ii) B.3 節で見たように, 有限次元代数  $A$  に対し旗  $Q$  とその道代数の許容イデアル  $I$  が存在し

$$\text{mod } A \cong \text{mod } kQ/I$$

が成り立つ. よって (i) の主張より (ii) が従う.

□



# 付録 C 代数群の代数多様体への作用

代数閉体  $k$  上で定義された代数群  $G$  が準射影的代数多様体  $X$  に左から作用しているとする。ここではこの作用によって導かれる座標環への作用について簡単に触れる。さらに幾何学的不变式論において、 $X$  の  $G$  による商をとるときや、商スタック  $[X/G]$  上の連接層などを考えるときに自然に出てくる  $G$ -同変層の定義と性質を与えよう。

以下では作用を決める射を

$$\sigma: G \times X \rightarrow X$$

とし、さらに  $G$  の演算を決める射を

$$\mu: G \times G \rightarrow G$$

とする。さらに  $G$  の逆元を与える射を  $\iota: G \rightarrow G$ 、 $G$  の単位元を指定する射を  $e: \text{Spec } k \rightarrow G$  とすると、よく知られているように  $\sigma, \mu, \iota, e$  はいくつかの可換性を満たしている ([Mil17, p. 6, p. 26])。

## C.1 代数群の座標環への作用

代数閉体  $k$  の元を成分とする  $n$  次正方行列全体を  $M(n, k)$  で表す。 $k$  上の代数群  $G$  が一般線形群

$$\text{GL}(n, k) := \{A \in M(n, k): \det A \neq 0\}$$

の閉部分群と同型になるとき、 $G$  を線形代数群 (linear algebraic group) という。例えば有限群は線形代数群であり、また 1 次元 (代数的) トーラス

$$\mathbb{G}_m := \text{Spec } k[t, t^{-1}] = k^*$$

の  $n$  個の直積である  $n$  次元（代数的）トーラス (algebraic torus)

$$\mathbb{G}_m^n = (k^*)^n$$

は  $\text{GL}(n, k)$  の中にて対角行列全体のなす部分群

$$\{A = (a_{i,j}) \in \text{GL}(n, k) : i \neq j \text{ ならば } a_{i,j} = 0\}$$

と同型であるから線形代数群である。

$\text{GL}(n, k)$  はアファイン空間  $M(n, k) \cong \mathbb{A}^{n^2}$  の中に方程式  $\det = 0$  で決まる閉集合の補集合なのでアファイン代数多様体となり、したがって線形代数群はアファイン代数群となるが、実はアファイン代数群は常に線形代数群となることも知られている ([Mil17, Corollary 4.10]).

以下、 $G$  がアファイン代数群、 $X := \text{Spec } R$  がアファイン代数多様体である場合を考えよう。代数多様体の射  $\sigma, \mu$  から誘導される大域切断の間の射をそれぞれ

$$\sigma^* : R \rightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes R, \quad \mu^* : \mathcal{O}_G(G) \rightarrow \mathcal{O}_G(G) \otimes \mathcal{O}_G(G)$$

とし、同様に  $\iota, e$  が導く射を  $\iota^*, e^*$  すると、 $\sigma, \mu, \iota, e$  の満たす可換性を反映して、 $\sigma^*, \mu^*, \iota^*, e^*$  はいくつかの可換性を満たす。このとき  $\sigma^*$  は余作用 (coaction)、 $\mu^*$  は余積 (comultiplication) と呼ばれる ([Mil17, Ch.3.a,b, Ch.4.a]).

例えば一般線形群

$$\text{GL}(n, k) = \text{Spec } k[x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n] \left[ \frac{1}{\det(x_{i,j})} \right]$$

のときは  $\mu^*(x_{i,j}) = \sum_{l=1}^n x_{i,l} \otimes x_{l,j}$  となる。また 1 次元トーラス  $\mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$  に対しては  $\mu^*(t) = t \otimes t$  となる。

逆に  $k$  上有限生成な代数  $A$  と与えられた  $k$ -代数の準同型  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  がいくつかの可換性を満たすとき、 $(A, \Delta)$  を Hopf 代数 (Hopf algebra) という。Hopf 代数  $(A, \Delta)$  に対し、関手  $\text{Spec}$  を施せばアファイン代数群が得られ、これらの対応はアファイン代数群のなす圏と Hopf 代数のなす圏の間の（反変的な）圏同値を与える ([Mil17, Corollary 3.7]).

Hopf 代数  $A$ 、 $k$  上ベクトル空間  $R$ 、余作用  $m : R \rightarrow A \otimes R$  が与えられているとき  $R$  は  $A$ -余加群 (comodule) となる。 $A$ -余加群  $R$  が  $k$  上有限生成な代数であるとき  $\text{Spec}$  をとることで、代数群  $\text{Spec } A$  のアファインスキーム  $X = \text{Spec } R$  への作用を導く。

$f \in R$  に対し

$$\sigma^*(f) = \sum_i t_i \otimes f_i \quad (t_i \in \mathcal{O}_G(G), f_i \in R)$$

とおく。任意の  $g \in G, p \in X$  に対し

$$(f \cdot g)(p) := \sigma^*(f)(g, p) (= \sum_i t_i(g) f_i(p)) \quad (\text{C.1})$$

と定めれば、余作用に関する可換性を用いるとこれが右作用であることがわかる。  
(一般にベクトル空間  $V$  に対し、 $V$  上にアファイン代数群  $G$  の表現を与えることと  $V$  に Hopf 代数  $\mathcal{O}_G(G)$ -余加群の構造を与えることは対応する [Mil17, Remark 4.1])。また

$$\sigma^*(f)(g, p) = f \circ \sigma(g, p)$$

でもあるから

$$(f \cdot g)(p) = f(g \cdot p) \quad (\text{C.2})$$

と書き表すこともでき、これからも右作用であることがわかる。

**例 C.1** 1 次元トーラス  $\mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$  がアファイン代数多様体  $\text{Spec } R$  に作用しているとする。余積

$$\sigma^*: R \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{G}_m) \otimes R \cong k[t, t^{-1}] \otimes R$$

は、 $f \in R$  に対し

$$\sigma^*(f) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} t^i \otimes f_i \quad (f_i \in R)$$

と書ける。このとき射  $p_i: R \rightarrow R$  を  $p_i(f) = f_i$  と定めると、 $p_i(f_i) = f_i$  を満たす。そこで  $R_i := p_i(R)$  とおけば、 $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$  となり、また  $R_i R_j \subset R_{i+j}$  が成り立つのので、 $R$  を  $\mathbb{Z}$ -次数付き環とみなせる。 $R_i$  の 0 ではない元を ( $\mathbb{G}_m$  の作用における) 重み (weight) $i$  の元であるという。逆に  $\mathbb{Z}$ -次数付き環  $R = \bigoplus_i R_i$  が与えられたとき、 $f = \sum_i f_i \in R$  ( $f_i \in R_i$ ) に対し

$$\sigma^*(f) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i \otimes t^i$$

と定めれば、余作用が定まる。

## C.2 $G$ -同変層

射影

$$p_2: G \times X \rightarrow X, \quad p_{23}: G \times G \times X \rightarrow G \times X$$

を考える。さらに  $X$  上の準連接層  $E$  と、 $\mathcal{O}_{G \times X}$ -加群の同型

$$\lambda^E: \sigma^* E \xrightarrow{\sim} p_2^* E \tag{C.3}$$

であって、 $\mathcal{O}_{G \times G \times X}$ -加群の間の図式

$$\begin{array}{ccc} (\sigma \circ (\text{id}_G \times \sigma))^* E & \xrightarrow{(\text{id}_G \times \sigma)^* \lambda^E} & (p_2 \circ (\text{id}_G \times \sigma))^* E = (p_2 \circ p_{23})^* E \\ \parallel & & \downarrow p_{23}^* \lambda^E \\ (\sigma \circ (\mu \times \text{id}_X))^* E & \xrightarrow{(\mu \times \text{id}_X)^* \lambda^E} & (p_2 \circ (\mu \times \text{id}_X))^* E = (p_2 \circ p_{23})^* E \end{array}$$

が可換になる、つまり

$$(\mu \times \text{id}_X)^* \lambda^E = p_{23}^* \lambda^E \circ (\text{id}_G \times \sigma)^* \lambda^E \tag{C.4}$$

が成り立つとする。このとき組  $(E, \lambda^E)$  を  $X$  上の  $G$ -同変 ( $G$ -equivariant) 準連接層と呼ぶ。しばしば  $\lambda^E$  を省略し単に、 $E$  は  $G$ -同変準連接層である、などともいう。 $G$ -同変準連接層  $E, F$  に対し、 $\lambda^{E \otimes F} := \lambda^E \otimes \lambda^F$  と定義することで、 $E \otimes F$  も  $G$ -同変準連接層となる。 $E$  が  $G$ -同変な局所自由層とすると、 $\lambda^{E^\vee} := ((\lambda^E)^\vee)^{-1}$  と定めれば双対局所自由層  $E^\vee$  も  $G$ -同変な局所自由層となる。

**問題 C.2**  $E$  を  $G$ -同変準連接層とし、任意の  $g \in G$  に対し、式 (C.3)で得た  $\mathcal{O}_{G \times X}$ -加群の同型  $\lambda^E$  を  $\{g\} \times X$  に制限したものを  $\mathcal{O}_X$ -加群の同型とみなし、

$$\lambda_g^E: g^* E \xrightarrow{\sim} E$$

と書くことにする。 $\mathcal{O}_{G \times G \times X}$ -加群の同型射の等式 (C.4)を任意の  $g_1, g_2 \in G$  に対し  $\{g_1\} \times \{g_2\} \times X$  に制限すると、

$$\lambda_{\text{id}_G}^E = \text{id}_E \text{かつ } \lambda_{g_1 g_2}^E = \lambda_{g_2}^E \circ g_2^*(\lambda_{g_1}^E) \tag{C.5}$$

が成り立つことを示せ。

$G$  が有限群のときは、式 (C.5)を満たすような同型の組  $\{\lambda_g^E\}_{g \in G}$  を与えれば、 $E$  は  $G$ -同変層の構造が定まることに注意されたい。

$G$ -同変準連接層  $(E, \lambda^E)$ ,  $(F, \lambda^F)$  に対し,  $\text{Hom}_X(E, F)$  には, 右からの  $G$  の作用が

$$\varphi^g = \lambda_g^F \circ g^* \varphi \circ (\lambda_g^E)^{-1} \quad (g \in G, \varphi \in \text{Hom}_X(E, F))$$

で定まる. この作用によって  $G$ -不变な射, つまり

$$\varphi \circ \lambda_g^E = \lambda_g^F \circ g^* \varphi$$

が成り立つような  $\varphi$  が  $G$ -同変準連接層の圏

$$\text{QCoh}_G(X)$$

の射を定める. Abel 圈

$$\text{Coh}_G(X)$$

を連接層のなす  $\text{QCoh}_G(X)$  の部分圏として定める.  $G$ -不变な射全体を

$$G\text{-}\text{Hom}_X(E, F) \text{ もしくは } \text{Hom}_X(E, F)^G$$

と表す. 関手  $G\text{-}\text{Hom}_X(-, -)$  の導來関手が存在し, その  $i$  番目のコホモロジーを

$$G\text{-Ext}_X^i(-, -)$$

と書く.  $G$  が線形簡約 (定義 10.1 参照) のときは, これは  $\text{Ext}_X^i(-, -)$  の  $G$  不変部分  $\text{Ext}_X^i(-, -)^G$  と一致することもわかる ([BFK19, Lemma 2.2.8] 参照). Abel 圈  $\text{Coh}_G(X)$  の有界な導來圏  $D^b(\text{Coh}_G(X))$  を

$$D_G^b(X)$$

と書くことにする.

擬射影代数多様体  $X, Y$  に  $G$  が作用しているとき, その間の射  $f: X \rightarrow Y$  が  $G$ -同変 (G-equivariant) であるとは任意の  $p \in X, g \in G$  に対し,  $g \cdot f(p) = f(g \cdot p)$  を満たしていることである. 適当な仮定の下,  $G$ -同変射  $f$  に対して導來関手  $\mathbf{L}f^*: D_G^b(Y) \rightarrow D_G^b(X)$ ,  $\mathbf{R}f_*: D_G^b(X) \rightarrow D_G^b(Y)$  などが定義でき, また射影公式や様々な随伴性 (例えば  $\mathbf{L}f^* \dashv \mathbf{R}f_*$ ) なども成り立つ. 本書ではこれらの結果を断りなしに使っている. 必要ならば [BKR01]などを参照されたい.

次に有限群  $G$  が  $X$  に自明に作用している場合を考えよう. このとき任意の  $g \in G$ ,  $E \in \text{QCoh}_G(X)$  に対し  $g^* E = E$  であるから,  $\lambda_g^E$  は  $E$  の自己同型を与える. それによって  $G$  は  $E$  (の切断) に作用する.  $G$  の既約表現全体を  $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k\}$

(以下では  $\rho_0$  を自明表現とする.) とすると, 分解

$$E = \bigoplus_i E_i \otimes \rho_i \quad (E_i \in \mathrm{QCoh}(X))$$

が存在する. このとき

$$[-]^G: \mathrm{QCoh}_G(X) \rightarrow \mathrm{QCoh}(X) \quad E \longmapsto E_0$$

と定義すれば  $X$  の開集合  $U$  に対し,  $\Gamma(U, [E]^G) = \Gamma(U, E)^G$  が成り立つ. また  $E_0 \in \mathrm{QCoh}(X)$  に対し,  $G$  が  $\Gamma(U, E_0)$  に自明に作用していると思って,  $E_0$  を  $\mathrm{QCoh}_G(Y)$  の対象とみなすことができる. このとき  $E_0$  を  $E_0 \otimes \rho_0 \in \mathrm{QCoh}_G(X)$  と書く. これにより

$$- \otimes \rho_0: \mathrm{QCoh}(X) \rightarrow \mathrm{QCoh}_G(X)$$

が定まる.  $E \in \mathrm{QCoh}_G(X)$ ,  $F_0 \in \mathrm{QCoh}(X)$  に対し,

$$\begin{aligned} G\text{-Hom}(E, F_0 \otimes \rho_0) &= G\text{-Hom}\left(\bigoplus_i E_i \otimes \rho_i, F_0 \otimes \rho_0\right) \\ &= G\text{-Hom}(E_0 \otimes \rho_0, F_0 \otimes \rho_0) = \mathrm{Hom}(E_0, F_0) = \mathrm{Hom}([E]^G, F_0) \end{aligned}$$

であるから,  $- \otimes \rho_0$  は  $[-]^G$  の右随伴関手であり, 同様にして左随伴関手にもなることもわかる. またこれらの関手  $- \otimes \rho_0$ ,  $[-]^G$  はともに完全関手であって, それぞれ互いに随伴な三角関手  $D^b(X) \rightarrow D_G^b(X)$ ,  $D_G^b(X) \rightarrow D^b(X)$  を定める.

### C.3 代数群のベクトル束への作用

$\mathcal{E}$  を  $X$  上の  $G$ -同変な局所自由層としよう. 式 (C.3) で与えた  $\mathcal{O}_{G \times X}$ -加群の同型射  $\lambda^\mathcal{E}$  に対応し, ベクトル束の間に (ベクトル束としての) 同型

$$\Lambda^\mathcal{E}: (G \times X) \times_X V(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (G \times X) \times_X V(\mathcal{E})$$

が存在する. ただし右辺は  $G$  の  $X$  への作用  $\sigma: G \times X \rightarrow X$  を用いて, 左辺は射影  $p_2: G \times X \rightarrow X$  を用いてファイバー積を決めた.<sup>1</sup> 両辺を自然な同型で  $G \times V(\mathcal{E})$  と同一視し, 射影  $p_{V(\mathcal{E})}: G \times V(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E})$  に対し

---

<sup>1</sup> 局所自由層  $\mathcal{E}$  とベクトル束  $V(\mathcal{E})$  は反変的に対応するので  $\lambda^\mathcal{E}$  と  $\Lambda^\mathcal{E}$  は逆向きで与えるのが自然であろう.

$$\Sigma := p_{V(\mathcal{E})} \circ \Lambda^{\mathcal{E}} : G \times V(\mathcal{E}) \rightarrow V(\mathcal{E}) \quad (\text{C.6})$$

とおく。式(C.4)をベクトル束の言葉に置き換えると、下の図式に現れるすべての四角形が可換となり、特に  $\Sigma$  により代数群  $G$  がベクトル束  $V(\mathcal{E})$  に左から作用しており、さらにその作用において射影  $\pi: V(\mathcal{E}) \rightarrow X$  が  $G$ -同変であることがわかる。ここで縦の射はすべて  $\pi$ 、もしくは  $\pi$  によって引き起こされる射である。

$$\begin{array}{ccccc}
G \times G \times V(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_{V(\mathcal{E})}} & G \times V(\mathcal{E}) & & \\
\downarrow & \searrow \text{id}_G \times \Sigma & \downarrow & \searrow \Sigma & \\
& G \times V(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\Sigma} & V(\mathcal{E}) & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_X} & G \times X & & \\
\downarrow & \searrow \text{id}_G \times \sigma & \downarrow & \searrow \sigma & \downarrow \pi \\
& G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X &
\end{array}$$

このように局所自由層  $\mathcal{E}$  に対する  $G$ -同変性は、ベクトル束  $V(\mathcal{E})$  への  $G$ -作用であって射影  $\pi$  が  $G$ -同変となるようなものを局所自由層の性質として書き直したもの、と見ることができる。

$\pi: V \rightarrow X$  を準射影的代数多様体  $X$  上のベクトル束とし、代数群  $G$  が  $V$  にも左から作用しており、さらに  $\pi$  は  $G$ -同変であるとする。このとき  $\pi$  の大域切断  $s: X \rightarrow V$  に対し、

$$(s \cdot g)(p) := g^{-1} \cdot (s(g \cdot p)) \quad (g \in G, p \in X)$$

と定めれば、 $s \cdot g$  も  $\pi$  の大域切断となる。このようにして  $\pi$  の大域切断全体に  $G$  の右からの作用が定まる。<sup>2</sup> そこで  $G$ -同変局所自由層  $\mathcal{E}$  に対し、 $f \in H^0(X, \mathcal{E})$  をベクトル束  $V(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow X$  の大域切断と思い ([Har77, Exercise II.5.18])、上で定義した、ベクトル束  $V(\mathcal{E}^\vee)$  の大域切断への  $G$  の右作用を考えると

$$(f \cdot g)(p) = g^{-1} \cdot f(g \cdot p) \quad (g \in G, p \in X) \quad (\text{C.7})$$

となる。

**注意 C.3**  $\sigma, \lambda^{\mathcal{E}}$  と Künneth の公式によって定まる射

<sup>2</sup>  $(g \cdot s)(p) := g \cdot (s(g^{-1} \cdot p))$  と定めれば左からの作用が定まる。

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(X, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\sigma^*} & H^0(G \times X, \sigma^* \mathcal{E}) & \xrightarrow[\cong]{\lambda^\mathcal{E}} & H^0(G \times X, p_2^* \mathcal{E}) \\
 & & & & \downarrow \cong \\
 & & & & H^0(G, \mathcal{O}_G) \otimes H^0(X, \mathcal{E})
 \end{array}$$

によってベクトル空間  $H^0(X, \mathcal{E})$  に  $H^0(G, \mathcal{O}_G)$ -余加群の構造が入り、さらに [Mil17, Remark 4.1] を用いて  $H^0(X, \mathcal{E})$  への  $G$  の作用を定めることもできる ([MFK94, p. 32]). これは式 (C.7) で定めたものと一致することを以下で確認しておこう。

まず可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 V(\mathcal{E}^\vee) & \longleftarrow & V(\sigma^* \mathcal{E}^\vee) \cong G \times V(\mathcal{E}^\vee) & \xleftarrow[\cong]{\Lambda^{\mathcal{E}^\vee}} & V(p_2^* \mathcal{E}^\vee) \cong G \times V(\mathcal{E}^\vee) & \longrightarrow & V(\mathcal{E}^\vee) \\
 \pi \downarrow & \square & \downarrow \pi_\sigma & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \\
 X & \xleftarrow[\sigma]{} & G \times X & \xlongequal{\quad} & G \times X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

を考える。 $f \in H^0(X, \mathcal{E})$  を  $\pi$  の大域切断と考え、 $\sigma$  で引き戻すとベクトル束  $\pi_\sigma$  の大域切断

$$(\sigma^* f)(g, p) = (g, f(g \cdot p)) \quad (g \in G, p \in X)$$

が得られる。さらに式 (C.6) のように  $G$  の  $V(\mathcal{E}^\vee)$  への作用を  $\Lambda^{\mathcal{E}^\vee}$  を用いて定めるのでベクトル束  $\pi_2$  の大域切断  $(\Lambda^{\mathcal{E}^\vee})^{-1} \circ (\sigma^* f)$  は

$$(\Lambda^{\mathcal{E}^\vee})^{-1} \circ (\sigma^* f)(g, p) = (g, g^{-1} \cdot f(g \cdot p))$$

で与えられる。この第 2 項に式 (C.7) で定めた  $f \cdot g$  が確かに現れる。

$G$  から  $\mathbb{G}_m$  への（代数的）群準同型、つまり  $G$  の 1 次元表現を指標 (character) という。 $G$  の指標のなす群、指標群 (group of characters) を

$$\widehat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$$

とおくと、 $\widehat{G}$  は Abel 群となることに注意する。例えば  $\chi \in \widehat{G}, j \in \mathbb{Z}, g \in G$  に対し

$$(j\chi)(g) := \chi(g)^j$$

として  $j\chi \in \widehat{G}$  を定義する。

$G$  の指標  $\chi \in \widehat{G}$  に対し,  $G$ -同変な可逆層  $\mathcal{O}_X(\chi)$  を以下のように定める. まず  $G$  の作用を忘れると, 層としては  $\mathcal{O}_X(\chi) = \mathcal{O}_X$  とする. ベクトル束  $V(\mathcal{O}_X(\chi))$  への  $G$  の作用を,  $g \in G, (p, q) \in X \times \mathbb{A}^1 \cong V(\mathcal{O}_X(\chi))$  に対し

$$g \cdot (p, q) = (gp, \chi(g^{-1})q)$$

と定める.<sup>3</sup> すると射影  $V(\mathcal{O}_X(\chi)) \rightarrow X$  は明らかに  $G$ -同変になるから, 上で述べたことから  $G$ -同変可逆層  $\mathcal{O}_X(\chi)$  が定まる. さらに  $G$ -同変準連接層  $E$  に対し, 新たな  $G$ -同変準連接層を  $E(\chi) := E \otimes \mathcal{O}_X(\chi)$  と定める.

$G$  の  $H^0(X, \mathcal{O}_X(\chi))$  への右作用は,  $V(\mathcal{O}_X(-\chi))$  の大域切断への作用で決まるから,  $g \in G, f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\chi)), p \in X$  に対し

$$(f \cdot g)(p) = ((-\chi)(g^{-1}))^{-1} f(g \cdot p) = \chi(g^{-1}) f(g \cdot p) \quad (\text{C.8})$$

となる. したがって  $H^0(X, \mathcal{O}_X(\chi))$  の  $G$ -不変部分空間は

$$\begin{aligned} & H^0(X, \mathcal{O}_X(\chi))^G \\ &= \{f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(\chi)) \mid \forall g \in G, \forall p \in X \text{ s.t. } f(g \cdot p) = \chi(g)f(p)\} \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

となる. ちなみに  $\chi$  が定値写像のとき, つまり  $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$  に対しては, 式 (C.8) で与えた作用と式 (C.2) で与えた作用は一致する.

---

<sup>3</sup> 例えば [CLS11, p. 678] ではベクトル束  $V(\mathcal{O}_X(-\chi)) \rightarrow X$  の切断のなす可逆層を  $\mathcal{L}_\chi$  と表記しているので, 我々の記号では  $\mathcal{L}_\chi$  は  $\mathcal{O}_X(\chi)$  のことである.



# 付録 D 商スタッツク

ここではスキームの一般化としてスタッツクを定義する。スキームの点を集めると集合になるのに対し、スタッツクの点を集めると圏、特に亜群 (groupoid)（圏であって、射は同型射のみからなるもの）をなす。特にスタッツクの点は自己同型群を持つ。大まかにいえばこの自己同型群が自明な群であるのがスキーム（もしくは代数空間 (algebraic space)）である。様々な対象のモジュライ空間は、このスキームの持つ強い制約によって、スキームとしては実現できず、スタッツクとして実現される。この点に関してはあまり立ち入らず、スタッツクの中でも特に重要で、本書でも陰に陽に出てくる商スタッツクを定義しよう。より詳しくは、スタッツクの秀逸な解説 [G01], [Vis89, Appendix], [Ols16] を参考にされたい。

## D.1 スタッツク

スタッツクの定義はスキーム  $S$  上の亜群と呼ばれる特殊な圏として与える方法と、 $(\mathsf{Sch}/S)$  から亜群のなす 2-圏  $\mathsf{Groupoids}$  への反変 2-関手として与える方法 (D.2 節参照) がある。以下では前者で定義を与える。後者に関しては D.2 節で注釈を与える。

**定義 D.1** (i) 圏  $\mathcal{X}$  が  $S$  上の亜群 (groupoid over  $S$ ) であるとは、関手  $p: \mathcal{X} \rightarrow (\mathsf{Sch}/S)$  を持ち、次の 2 条件を満たすことである。 $p$  を  $S$  上の亜群  $\mathcal{X}$  の構成関手と呼ぶ。

- (1)  $f: T' \rightarrow T$  を  $(\mathsf{Sch}/S)$  の射とし、対象  $X \in \mathcal{X}$  が  $p(X) = T$  を満たすとする。このとき対象  $X' \in \mathcal{X}$  と射  $\phi: X' \rightarrow X$  が存在し、 $p(X') = T'$ かつ  $p(\phi) = f$  が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\phi} & X \\ \downarrow & | & \downarrow \\ T' & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

(2) 対象  $X_i \in \mathcal{X}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対し,  $(\mathfrak{Sch}/S)$  の対象を  $T_i := p(X_i)$  と定める.  $\mathcal{X}$  における射  $\psi: X_3 \rightarrow X_1$ ,  $\phi: X_2 \rightarrow X_1$  と,  $(\mathfrak{Sch}/S)$  における射  $f': T_3 \rightarrow T_2$  が与えられており,  $p(\psi) = p(\phi) \circ f'$  を満たすとする. このとき射  $\varphi: X_3 \rightarrow X_2$  がただ 1 つ存在し,  $\psi = \phi \circ \varphi$ かつ  $p(\varphi) = f'$  を満たす.

$$\begin{array}{ccccc} X_3 & \xrightarrow{\psi} & X_1 & & \\ \downarrow & \searrow \varphi & \nearrow \phi & \downarrow & \\ & X_2 & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ T_3 & \xrightarrow{p(\phi) \circ f'} & T_1 & & \\ \downarrow & \searrow f' & \nearrow p(\phi) & & \\ & T_2 & & & \end{array}$$

(ii)  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  に対し,  $T$  上のファイバーと呼ばれる, 圏  $\mathcal{X}$  の部分圏  $\mathcal{X}(T)$  を次のように定義する.  $\mathcal{X}(T)$  の対象は  $p(X) = T$  が成り立つような  $X \in \mathcal{X}$  からなり, 射  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{X}(T)}(X_1, X_2)$  は  $p(\phi) = \text{id}_T$  が成り立つもののみを考える.

$S$  上の亜群  $\mathcal{X}$  は, 亜群, つまりすべての射が同型射であるような圏, をファイバーに持つことが次の問題で説明される. このことが  $\mathcal{X}$  を  $S$  上の亜群と呼ぶ所以である.

**問題 D.2** (i)  $\mathcal{X}$  が  $S$  上の亜群であるとする. 定義 D.1(i-1) で得られる  $X'$  は標準的な同型を除いてただ 1 つであることを示せ. このとき

$$X' := f^* X$$

と書く.

- (ii) 定義 D.1(i-1) で得られた  $\phi$  に対し,  $\phi$  が同型であることと,  $p(\phi)$  が同型であることが同値であることを示せ.
- (iii) 圈  $\mathcal{X}(T)$  は亜群となることを示せ.

**例 D.3**  $X \in (\mathfrak{Sch}/S)$  とし  $G$  を  $S$  上滑らかなアファイン群スキームとし,  $X$  に左から作用しているとする.  $S$  上の亜群  $[X/G]$  を次のように定義する.

まず  $[X/G]$  の対象は主  $G$ -束  $\pi: E \rightarrow B$  と  $G$ -同変射  $f: E \rightarrow X$  の対とし,  $[X/G]$  の対象  $(\pi: E \rightarrow B, f: E \rightarrow X)$  から  $(\pi': E' \rightarrow B', f': E' \rightarrow X)$  への射  $(h, g)$  を, 図式

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ \pi \downarrow & \square & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

がファイバー積になり, さらに  $h$  は  $G$ -同変で, かつ  $f = f' \circ h$  が成り立つものとする. 構造関手  $p: [X/G] \rightarrow (\mathfrak{Sch}/S)$  は  $[X/G]$  の対象  $(\pi: E \rightarrow B, f: E \rightarrow X)$  を対象  $B \in (\mathfrak{Sch}/S)$  へ移し,  $[X/G]$  における射  $(h, g)$  を  $(\mathfrak{Sch}/S)$  における射  $g$  に移す.  $[X/G]$  が実際に  $S$  上の亜群となることは各自チェックされたい.

**定義 D.4**  $(\mathfrak{Sch}/S)$  上の亜群  $(\mathcal{X}, p: \mathcal{X} \rightarrow (\mathfrak{Sch}/S))$  が,  $S$  上のスタック (stack) であるとは次の 2 条件を満たすことである.

- (i)  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  と  $X, Y \in \mathcal{X}(T)$  に対し, 反変関手

$$\text{Isom}_T(X, Y): (\mathfrak{Sch}/T) \rightarrow \mathfrak{Sets} \quad T' \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{X}(T')}(f^* X, f^* Y)$$

がエタール位相で層になる. ここで  $T' \in (\mathfrak{Sch}/T)$  の構造射を  $f: T' \rightarrow T$  とした.

- (ii)  $\{U_i \rightarrow T\}_i$  が  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  のエタール被覆とする.  $X_i \in \mathcal{X}(U_i)$  と, コサイクル条件  $(\varphi_{ij}|_{U_{ijk}} \circ \varphi_{jk}|_{U_{ijk}} = \varphi_{ik}|_{U_{ijk}})$  を満たす  $\mathcal{X}(U_{ij})$  の同型射

$$\varphi_{ij}: X_j|_{U_{ij}} \rightarrow X_i|_{U_{ij}}$$

が与えられているとする. このとき対象  $X \in \mathcal{X}(T)$  と,  $\mathcal{X}(U_i)$  の同型射

$$\psi_i: X|_{U_i} \rightarrow X_i$$

が存在し

$$\varphi_{ij} = (\psi_i|_{U_{ij}}) \circ (\psi_j|_{U_{ij}})^{-1}$$

が成り立つ。ただし  $U_{ij} := U_i \times_T U_j$  とし、射  $\iota: U_{ij} \rightarrow U_i$  に対し、 $X_i|_{U_{ij}} := \iota^* X_i$  などと定めた。

スタック  $(\mathcal{X}, p_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow (\mathfrak{Sch}/S))$  からスタック  $(\mathcal{X}', p_{\mathcal{X}'}: \mathcal{X}' \rightarrow (\mathfrak{Sch}/S))$  への射  $F$  は関手  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  であって、 $p_{\mathcal{X}} = p_{\mathcal{X}'} \circ F$  を満たすものとして定める。

例 D.3 で与えた亜群  $[X/G]$  はスタックになることが知られており、商スタック (quotient stack) と呼ばれる。

## D.2 2-圏の補足

この節では 2-圏に関して大まかな説明を与える。正確な定義などは省くので興味ある読者は他の文献を参照されたい。

圏  $\mathcal{C}$  (もしくは 2-圏との対比で 1-圏とも呼ぶ)、対象  $V, W \in \mathcal{C}$  に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$  は集合となったが、一方 2-圏 (two-category) では  $\xi, \eta \in \mathcal{C}$  に対し、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\xi, \eta)$  が圏となることを要請する。圏  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\xi, \eta)$  の対象を 1-射 (1-morphism) といい、2 つの 1-射  $\Phi, \Psi$  の間の射を 2-射 (2-morphism) という。集合はその元を対象とし射は恒等射のみを考えることによって自然に圏とみなせるので 1-圏は自然に 2-圏となるが、その逆は一般に成り立たない。

2 つの 1-圏の間には関手が定義されるように、2-圏の間には自然な仮定を課して 2-関手 (2-functor) が定義される。

例 D.5 (i) 圏のなす 2-圏  $\mathbf{Cat}$ において、その対象  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbf{Cat}$  に対し、 $\mathcal{C}$  から  $\mathcal{D}$  への関手のなす圏  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  の対象は  $\mathcal{C}$  から  $\mathcal{D}$  への関手である。2 つの関手  $\Phi, \Psi \in \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  の間の射としては自然変換を考える。つまり 2-圏  $\mathbf{Cat}$  では 1-射は関手、2-射は自然変換である。

(ii) 亜群全体は 2-圏  $\mathbf{Groupoids}$  をなし、 $\mathbf{Cat}$  の 2-部分圏になる。集合全体のなす 1-圏  $\mathbf{Sets}$  を自然に 2-圏と思うと、これは  $\mathbf{Groupoids}$  の 2-部分圏をなす：

$$\mathbf{Sets} \subset \mathbf{Groupoids} \subset \mathbf{Cat}$$

D.3 節ではこの事実から  $S$  上のスキームのなす圏  $(\mathfrak{Sch}/S)$  が  $S$  上のスタックのなす圏  $(\mathfrak{Sta}/S)$  の 2-部分圏となることを説明する。

スタック  $\mathcal{X}$  は反変 2-関手

$$\mathcal{X}: (\mathsf{Sch}/S) \rightarrow \mathsf{Groupoids} \quad T \mapsto \mathcal{X}(T)$$

を定める。ここで  $(\mathsf{Sch}/S)$  は 1-圏であるから 2-圏でもあることに注意されたい。 $(\mathsf{Sch}/S)$  から  $\mathsf{Groupoids}$  への諸々の性質を持つ反変 2-関手としてスタックの定義を与える方法もある。

### D.3 スタックとしてのスキーム

$S$  上のスタックのなす 2-圏を  $(\mathsf{Sta}/S)$  で表すことにする。以下では充満忠実 2-関手  $(\mathsf{Sch}/S) \rightarrow (\mathsf{Sta}/S)$  の存在を示し、スタックがスキームの一般化であることを説明しよう

**例 D.6** (スキームに付随するスタック)  $X \in (\mathsf{Sch}/S)$  に対し、その構造射を  $f: X \rightarrow S$  とする。関手

$$p: (\mathsf{Sch}/X) \rightarrow (\mathsf{Sch}/S) \quad (g: Y \rightarrow X) \mapsto (f \circ g: Y \rightarrow S)$$

と定めると、 $(\mathsf{Sch}/X)$  は  $S$  上の亜群を定めることができる。また  $T \in (\mathsf{Sch}/S)$  に対し、

$$(\mathsf{Sch}/X)(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$$

が成り立つ。さらに  $(\mathsf{Sch}/X)$  はスタックになることもわかる。このようにして得られるスタックをスキームに付随するスタック (stack associated to a scheme) と呼ぶ。

次は有用である。

**補題 D.7**  $\mathcal{X} \in (\mathsf{Sta}/S)$ ,  $X \in (\mathsf{Sch}/S)$  とする。このとき  $\mathcal{X}(X)$  と  $\mathrm{Hom}_{(\mathsf{Sta}/S)}((\mathsf{Sch}/X), \mathcal{X})$  の間に圏同値が存在する。

**証明** 関手

$$\mathrm{Hom}_{(\mathsf{Sta}/S)}((\mathsf{Sch}/X), \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}(X) \quad (F: (\mathsf{Sch}/X) \rightarrow \mathcal{X}) \mapsto F(\mathrm{id}_X)$$

と関手

$$\mathcal{X}(X) \rightarrow \text{Hom}_{(\mathfrak{Sch}/S)}((\mathfrak{Sch}/X), \mathcal{X}) \quad Y \mapsto ((f: T \rightarrow X) \mapsto f^*Y)$$

は互いに擬逆関手を与える。どちらの関手も射の対応のさせ方を述べていないが、各自考えられたい。□

例 D.6 により 2-関手

$$\iota: (\mathfrak{Sch}/S) \rightarrow (\mathfrak{Sch}/S) \quad X \mapsto (\mathfrak{Sch}/X)$$

が定まる。補題 D.7において、スタック  $\mathcal{X}$  としてスキーム  $X'$  に付随するスタック  $(\mathfrak{Sch}/X')$  をとれば、圏同値

$$\text{Hom}_S(X, X') = (\mathfrak{Sch}/X')(X) \cong \text{Hom}_{(\mathfrak{Sch}/S)}((\mathfrak{Sch}/X), (\mathfrak{Sch}/X'))$$

が得られるが、これは 2-関手  $\iota$  によって引きこされる 1-射のなす圏の間の関手と同一であることがわかる。つまり  $\iota$  は充満忠実になる。

$\mathcal{X} \in (\mathfrak{Sch}/S)$  が 2-関手  $\iota$  の本質的像に入っている、つまりスキーム  $X \in (\mathfrak{Sch}/S)$  が存在し、スタックとしての同型  $\mathcal{X} \cong (\mathfrak{Sch}/X)$  が存在するとき、 $\mathcal{X}$  はスキーム  $X$  で表現されるという。圏  $(\mathfrak{Sch}/X)$  をスタックと思うとき、関手  $\iota$  によってスキーム  $X$  と同一視し、単に  $X$  と書くことが多い。例えば  $T$  上のファイバー  $(\mathfrak{Sch}/X)(T) = \text{Hom}_S(T, X)$  を  $X(T)$  と表す。以下では誤解の恐れがない限り、この慣例に従うこととする。

注意 D.8  $X, T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  に対し、 $T$  上のファイバー  $X(T)$  の対象の間の射  $\phi$  は  $p(\phi) = \text{id}_T$  となるもののみを考えるのであったから、 $\phi = \text{id}_T$  となる。したがって任意の  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  に対し、 $\mathcal{X}(T)$  の任意の対象の間の射が恒等射しか存在しないことは、スタック  $\mathcal{X}$  がスキームで表現されることの必要条件となる。亜群で、射が恒等射しかないものは集合とみなせたから、上で述べたことを言い換えれば、スタック  $\mathcal{X}$  を D.2 節で見たように反変 2-関手  $\mathcal{X}: (\mathfrak{Sch}/S) \rightarrow \mathfrak{Groupoids}$  と思ったとき、それがスキームで表現されるためには、任意の  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  に対し  $\mathcal{X}(T)$  がある集合と亜群として同型になることが必要条件となる。

## D.4 Artin スタック, Deligne–Mumford スタック

スタックは断らない限り常に  $S$  上のものを考える。スタックの間の射  $F_i: \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{Y}$  ( $i = 1, 2$ ) に対し、ファイバー積  $\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}_2$  を以下のように定める。まず  $\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}_2$  の対象は 3 つ組み  $(X_1, X_2, \alpha)$  (ただし、ある  $U \in (\mathfrak{Sch}/S)$  に対し  $X_i \in$

$\mathcal{X}_i(U)$  であり,  $\alpha: F_1(X_1) \rightarrow F_2(X_2)$  は  $\mathcal{Y}$  の同型射) であり,  $(X_1, X_2, \alpha)$  から  $(X'_1, X'_2, \alpha')$  への射は, 射  $\phi_i: X_i \rightarrow X'_i$  の対  $(\phi_1, \phi_2)$  であつて  $p_{\mathcal{X}_1}(\phi_1) = p_{\mathcal{X}_2}(\phi_2)$ かつ  $\alpha' \circ F_1(\phi_1) = F_2(\phi_2) \circ \alpha$  が成り立つものとする. スタック  $\mathcal{X}$  に對し, 対角射を

$$\Delta_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$$

とおく.

スタックの間の射  $F: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  が表現可能 (representable) であるとは, 任意の  $T \in (\mathsf{Sch}/S)$ , 射  $T \rightarrow \mathcal{X}_2$  に対し, ファイバー積  $\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}_2} T$  がスキームで表現されることである.  $\mathcal{P}$  をスキーム間の射の性質としたとき,<sup>1</sup> 表現可能な射  $F$  に対し,  $F$  が性質  $\mathcal{P}$  を持つとは, 任意の  $T \in (\mathsf{Sch}/S)$ , 射  $T \rightarrow \mathcal{X}_2$  に対し, スキームの射  $\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}_2} T \rightarrow T$  が性質  $\mathcal{P}$  を持つこととする.

次の証明は簡単であるが略する.

**補題 D.9**  $\mathcal{X} \in (\mathsf{Sta}/S)$  に対し, 次は同値である.

- (i)  $\Delta_{\mathcal{X}}$  は表現可能である.
- (ii) 任意の  $T \in (\mathsf{Sch}/S)$  に対し, 任意の射  $T \rightarrow \mathcal{X}$  は表現可能である.

次で述べる Artin スタック, Deligne–Mumford スタックはスタックの中で特に重要なクラスである. 補題 D.9 を使えば定義 D.10 の条件 (i) により条件 (ii), (iii) で考へる射  $u$  は表現可能であることに注意されたい.

**定義 D.10** スタック  $\mathcal{X}$  が **Artin** スタックであるとは次の (i), (ii) を満たすことであり, **Deligne–Mumford** スタックであるとは (i), (iii) を満たすことである.

- (i)  $\Delta_{\mathcal{X}}$  が表現可能で, 準コンパクトかつ分離的である.
- (ii) スキーム  $T$  と全射で滑らかな射  $u: T \rightarrow \mathcal{X}$  が存在する.
- (iii) スキーム  $T$  と全射エタール射  $u: T \rightarrow \mathcal{X}$  が存在する.

射  $u$  を  $\mathcal{X}$  のアトラスと呼ぶ.

擬有限で滑らかな射がエタール射であったから, Deligne–Mumford スタックは Artin スタックとなる.

<sup>1</sup> 例えば  $\mathcal{P}$  は準コンパクト, 全射, 分離的, 滑らか, エタール, Zariski 局所的に自明, といった性質である.

## D.5 商スタック

例 D.3 の状況を考える. 射影によって定まる自明な主  $G$ -束  $G \times_S X \rightarrow X$ , さらに  $G$ -同変射として群作用  $G \times_S X \rightarrow X$  を考えると, これらの対は  $[X/G](X)$  の対象を与える. このとき補題 D.7 によりスタックの間の射

$$u: X \rightarrow [X/G] \quad (\text{D.1})$$

が得られる.

スタック  $[X/G]$  が補題 D.9 の条件 (ii) を満たすことをチェックする.  $T \in (\mathfrak{Sch}/S)$  と任意の射  $g: T \rightarrow [X/G]$  に対し, 補題 D.7 により対応する  $[X/G](T)$  の対象を主  $G$ -束  $\pi: E \rightarrow T$  と  $G$ -同変射  $f: E \rightarrow X$  の対とする, 図式

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & \square & \downarrow u \\ T & \xrightarrow{g} & [X/G] \end{array}$$

はファイバー積になり,  $T \times_{[X/G]} X$  と  $E$  は同型である. したがって  $u$  は表現可能となる. さらに  $\Delta_{[X/G]}$  は表現可能で準コンパクトかつ分離的であることが知られている. また  $G$  は滑らかであることから,  $\pi$  は滑らかで, また全射である. 任意の射  $g$  に対し,  $\pi$  が全射かつ滑らかであるので,  $u$  も全射で滑らかである. 以上のことより,  $[X/G]$  は  $u$  をアトラスとする Artin スタックとなる.

さらに  $G$  が  $S$  上エタールであるとき射  $u$  はエタールになり,  $[X/G]$  は Deligne–Mumford スタックとなる. 一方  $u$  がエタールでなくとも, アトラスが見つかり  $[X/G]$  が Deligne–Mumford スタックとなることはある. 例えば,  $X$  の幾何的点  $x$  の  $G$  の作用における安定化群  $G_x$  が有限でかつ被約であるとき  $[X/G]$  は ( $G$  が  $S$  上エタールでなくとも) Deligne–Mumford スタックとなることが知られている. 商スタックの解説は [Gó1, Example 2.29], [Vis89, Example 7.17], [Ols16, Example 8.1.12] にあるので, 上で証明が省かれている箇所はそれらをご覧いただきたい.

詳細は省略するが Artin スタック  $\mathcal{X}$  上に準連接層や, 連接層が定義される. 以下では  $k$  を代数閉体とし,  $X$  を簡単のため  $k$  上準射影的代数多様体,  $G$  を  $k$  上の滑らかなアファイン代数群とする. 次の事実は重要である.

**定理 D.11** 上の状況で商スタック  $[X/G]$  上の準連接層のなす圏  $\mathrm{QCoh}([X/G])$

と  $X$  上の  $G$ -同変な準連接層のなす圏  $\mathrm{QCoh}_G(X)$  は同値である. またこの同値を制限すれば連接層のなす Abel 圏  $\mathrm{Coh}([X/G])$  と  $\mathrm{Coh}_G(X)$  の同値も導く.

$\mathrm{Spec} k$  からスタック  $\mathcal{X}$  への射を  $\mathcal{X}$  の幾何的点 (geometric point) と呼ぶ. 補題 D.7 より  $\mathcal{X}(\mathrm{Spec} k)$  の対象は  $\mathcal{X}$  の幾何的点に他ならない.

**問題 D.12** 商スタック  $[X/G]$  の幾何的点と,  $X$  の幾何的点の軌道の間に自然な対応があることを示せ.

商スタックの幾何的点  $x \in [X/G](\mathrm{Spec} k)$  に対し, その自己同型群  $\mathrm{Aut}_{[X/G]}(x)$  は  $x$  に対応する  $X$  の軌道内の点における安定化群とみなせる. そこでもし  $G$  が  $X$  に自由に作用していなければ, ある点での安定化群は自明でないので, 注意 D.8 により,  $[X/G]$  はスキームで表現されないことがわかる.



# 参考文献

- [ABCH13] D. Arcara, A. Bertram, I. Coskun, and J. Huizenga, *The minimal model program for Hilbert schemes of points on the projective plane and Bridgeland stability*, Adv. Math. **235** (2013), 580–626.
- [AG60] Maurice Auslander and Oscar Goldman, *Maximal orders*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 1–24. MR 0117252
- [AM] E. Andriyash and G. Moore, *Ample  $D_4$ - $D_2$ - $D_0$  decay*, arXiv:hep-th/0806.4960.
- [Ann58] *Anneaux de chow et applications*, Seminaire C. Chevalley, 2e annee, Ecole Normale Superieure, Secretariat mathematique, Paris, 1958.
- [AO13] Valery Alexeev and Dmitri Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections*, Math. Ann. **357** (2013), no. 2, 743–759. MR 3096524
- [ARS97] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Corrected reprint of the 1995 original. MR 1476671
- [Art88] I. V. Artamkin, *On the deformation of sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), no. 3, 660–665, 672. MR 954302
- [ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, Techniques of representation theory.
- [AT14] N. Addington and R. Thomas, *Hodge theory and derived categories of cubic fourfolds*, Duke Math. J. **113** (2014), 1885–1927.

- [Ati57] M. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957), 414–452.
- [AZ94] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. Math. **109** (1994), no. 2, 228–287. MR1304753
- [BB07] K. Behrend and J. Bryan, *Super-rigid Donaldson-Thomas invariants*, Math. Res. Lett. **14** (2007), 559–571.
- [BB17] A. Bayer and T. Bridgeland, *Derived automorphism groups of  $K3$  surfaces of Picard rank 1*, Duke Math. J. **166** (2017), 1–24.
- [BBBBJ15] O. Ben-Bassat, C. Brav, V. Bussi, and D. Joyce, *A ‘Darboux Theorem’ for shifted symplectic structures on derived Artin stacks, with applications*, Geom. Topol. **19** (2015), 1287–1359.
- [BBD82] A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces I, Asterisque **100** (1982), 5–171.
- [BC09] L. Borisov and A. Căldăraru, *The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), 201–222.
- [BDF<sup>+</sup>16] Matthew Ballard, Dragos Deliu, David Favero, M. Umut Isik, and Ludmil Katzarkov, *Resolutions in factorization categories*, Adv. Math. **295** (2016), 195–249. MR3488035
- [Bec] Hanno Becker, *Khovanov-Rozansky homology via Cohen-Macaulay approximations and Soergel bimodules*, preprint, arXiv:1105.0702.
- [Beh09] K. Behrend, *Donaldson-Thomas invariants via microlocal geometry*, Ann. of Math **170** (2009), 1307–1338.
- [Bei78] A. Beilinson, *Coherent sheaves on  $\mathbb{P}^n$  and problems of linear algebra*, Funct. Anal. Appl. **12** (1978), 214–216.
- [BF97] K. Behrend and B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math. **128** (1997), 45–88.
- [BF08] ——, *Symmetric obstruction theories and Hilbert schemes of points on threefolds*, Algebra Number Theory **2** (2008), 313–345.
- [BFK19] Ballard, Matthew; Favero, David; Katzarkov, Ludmil, *Variation of geometric invariant theory quotients and derived categories*, J. Reine Angew. Math. **746** (2019), 235–303.
- [BGG78] I. N. Bernštejn, I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand, *Algebraic vector bundles on  $\mathbb{P}^n$  and problems of linear algebra*, Funktsional. Anal. i

- Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 66–67. MR 509387
- [BGvBKS15] Christian Böhning, Hans-Christian Graf von Bothmer, Ludmil Katzarkov, and Paweł Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 7, 1569–1592. MR 3361723
- [BGvBS14] Christian Böhning, Hans-Christian Graf von Bothmer, and Paweł Sosna, *On the Jordan-Hölder property for geometric derived categories*, Adv. Math. **256** (2014), 479–492. MR 3177299
- [BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1251956
- [BH13] Ragnar-Olaf Buchweitz and Lutz Hille, *Hochschild (co-) homology of schemes with tilting object*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 6, 2823–2844. MR 3034449
- [BHPdV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, A series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 3, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2004.
- [BK90] A. Bondal and M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and Mutations*, Math. USSR-Izv. **35** (1990), 23–42.
- [BKR01] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.
- [BM96] K. Behrend and Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke Math. J. **85** (1996), 1–60.
- [BM01] T. Bridgeland and A. Maciocia, *Complex surfaces with equivalent derived categories*, Math. Z **236** (2001), 677–697.
- [BM02] ——, *Fourier-Mukai transforms for K3 and elliptic fibrations*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 629–657.
- [BMS16] Arend Bayer, Emanuele Macrì, and Paolo Stellari, *The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds*, Invent. Math. **206** (2016), no. 3, 869–933. MR 3573975
- [BMT14] A. Bayer, E. Macrì, and Y. Toda, *Bridgeland stability conditions on 3-folds I: Bogomolov-Gieseker type inequalities*, J. Algebraic Geom. **23** (2014), 117–163.

- [BO] A. Bondal and D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, preprint, arXiv:9506012.
- [Bog78] F. A. Bogomolov, *Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), 1227–1287.
- [Bon89] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44.
- [Bor18] Lev A. Borisov, *The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), no. 2, 203–209.
- [Bor91] Armand Borel, *Linear algebraic groups*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1102012
- [BR05] G. Berhuy and Z. Reichstein, *On the notion of canonical dimension for algebraic groups*, Adv. Math. **198** (2005), no. 1, 128–171. MR 2183253
- [Bri99] T. Bridgeland, *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 25–34.
- [Bri02] ——, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147** (2002), 613–632.
- [Bri07] ——, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math **166** (2007), 317–345.
- [Bri08] ——, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Math. J. **141** (2008), 241–291.
- [Bri09a] ——, *Spaces of stability conditions*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 1–21. MR 2483930
- [Bri09b] ——, *Stability conditions and Kleinian singularities*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 21, 4142–4157. MR 2549952
- [Bri11] ——, *Hall algebras and curve-counting invariants*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), 969–998.
- [Bri12a] ——, *An introduction to motivic Hall algebras*, Adv. in Math. **229** (2012), 102–138.
- [Bri12b] ——, *An introduction to motivic Hall algebras*, Adv. Math. **229**

- (2012), no. 1, 102–138. MR 2854172
- [BS17] Brown Morgan; Shipman Ian, *The McKay correspondence, tilting, and rationality*, Michigan Math. J. **66** (2017), no. 4, 785–811.
- [BS13] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 136, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, An algebraic introduction with geometric applications. MR 3014449
- [Buc] R.-O. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-Cohomology over Gorenstein rings*, preprint.
- [BvBS13] Christian Böhning, Hans-Christian Graf von Bothmer, and Paweł Sosna, *On the derived category of the classical Godeaux surface*, Adv. Math. **243** (2013), 203–231. MR 3062745
- [Căl00] Andrei Horia Căldăraru, *Derived categories of twisted sheaves on Calabi-Yau manifolds*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000, Thesis (Ph.D.)—Cornell University. MR 2700538
- [Căl02] ——, *Nonfine moduli spaces of sheaves on K3 surfaces*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 20, 1027–1056. MR 1902629
- [Căl05] ——, *The Mukai pairing. II. The Hochschild-Kostant-Rosenberg isomorphism*, Adv. Math. **194**(2005), no. 1, 34–66. MR 2141853
- [CdLOGP91] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory*, Nuclear Physics **B359** (1991), 21–74.
- [CG15] John Calabrese and Michael Groechenig, *Moduli problems in abelian categories and the reconstruction theorem*, Algebr. Geom. **2** (2015), no. 1, 1–18. MR 3322195
- [Che02] J-C. Chen, *Flops and equivalences of derived categories for threefolds with only Gorenstein singularities*, J. Differential Geom. **61**(2002), 227–261.
- [CL18] Cho Yonghwa, Lee Yongnam, *Exceptional collections on Dolgachev surfaces associated with degenerations*, Adv. Math. **324** (2018), 394–436.
- [CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2810322

- [CP10] John Collins and Alexander Polishchuk, *Gluing stability conditions*, Adv. Theor. Math. Phys. **14** (2010), no. 2, 563–607. MR 2721656
- [Dao10] Hailong Dao, *Remarks on non-commutative crepant resolutions of complete intersections*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 1021–1030. MR 2628801
- [DH98] Igor V. Dolgachev and Yi Hu, *Variation of geometric invariant theory quotients*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1998), no. 87, 5–56, With an appendix by Nicolas Ressayre. MR 1659282
- [Dim04] Alexandru Dimca, *Sheaves in topology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2050072
- [Dol03] Igor Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 296, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR 2004511
- [Dou01] M. Douglas, *D-branes, categories and  $N=1$  supersymmetry*, J. Math. Phys. **42** (2001), 2818–2843.
- [Dou02] ——, *Dirichlet branes, homological mirror symmetry, and stability*, Proceedings of the 1998 ICM (2002), 395–408.
- [DW16] W. Donovan and M. Wemyss, *Noncommutative deformations and flops*, Duke Math. J. **165** (2016), 1397–1474.
- [Dyc11] Tobias Dyckerhoff, *Compact generators in categories of matrix factorizations*, Duke Math. J. **159** (2011), no. 2, 223–274. MR 2824483
- [EH16] David Eisenbud and Joe Harris, *3264 and all that—a second course in algebraic geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. MR 3617981
- [Eis80] David Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), no. 1, 35–64. MR 570778
- [Eis00] ——, *Commutative algebra. with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer-Verlag, 2000.
- [EL16] Alexey Elagin and Valery Lunts, *On full exceptional collections of line bundles on del Pezzo surfaces*, Mosc. Math. J. **16** (2016), no. 4, 691–709. MR 3598503
- [FF74] Robert Fossum and Hans-Bjørn Foxby, *The category of graded modules*, Math. Scand. **35** (1974), 288–300. MR 0379473

- [Ful98] William Fulton, *Intersection theory*, second ed., *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998. MR 1644323
- [Gó1] Tomás L. Gómez, *Algebraic stacks*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **111** (2001), no. 1, 1–31. MR 1818418
- [Gab62] Pierre Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448. MR 0232821
- [Gal14] Lennart Galinat, *Orlov’s equivalence and maximal Cohen-Macaulay modules over the cone of an elliptic curve*, Math. Nachr. **287** (2014), no. 13, 1438–1455. MR 3256973
- [GH78] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, New York, Wiley, 1978.
- [GHH15] Martin G. Gulbrandsen, Lars H. Halle, and Klaus Hulek, *A relative Hilbert-Mumford criterion*, Manuscripta Math. **148** (2015), no. 3–4, 283–301. MR 3414477
- [Gie79] D. Gieseker, *On a theorem of Bogomolov on Chern Classes of Stable Bundles*, Amer. J. Math. **101** (1979), 77–85.
- [GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535. MR 2108443
- [GKMS15] Sergey Galkin, Ludmil Katzarkov, Anton Mellit, and Evgeny Shinder, *Derived categories of Keum’s fake projective planes*, Adv. in Math. **278** (2015), 238–258.
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR 1950475
- [GO13] Sergey Gorchinskiy and Dmitri Orlov, *Geometric phantom categories*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 329–349. MR 3090263
- [Hal] Mihai Halic, *Quotients of affine spaces for actions of reductive groups*, preprint, arXiv:math/0412278.
- [Hap88] Dieter Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture

- Note Series, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.  
MR 935124
- [Har66] R. Hartshorne, *Residues and duality : Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/1964*, Lecture Notes in Mathematics, no. 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [Har77] ——, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [Has00] B. Hassett, *Special cubic fourfolds*, Compos. Math. **120** (2000), 1–23.
- [HHP] Manfred Herbst, Kentaro Hori, and David Page, *Phases of  $n=2$  theories in  $1+1$  dimensions with boundary*, preprint, arXiv:0803.2045.
- [HKR62] G. Hochschild, B. Kostant, and A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. AMS **102** (1962), 383–408.
- [HL10] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR 2665168
- [HL15] Daniel Halpern-Leistner, *The derived category of a GIT quotient*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 3, 871–912. MR 3327537
- [HMS09] D. Huybrechts, E. Macri, and P. Stellari, *Derived equivalences of  $K3$  surfaces and orientation*, Duke. Math. J. **149** (2009), 461–507.
- [HP11] Lutz Hille and Markus Perling, *Exceptional sequences of invertible sheaves on rational surfaces*, Compos. Math. **147** (2011), no. 4, 1230–1280. MR 2822868
- [HRS96] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 120, 1996.
- [HT10] D. Huybrechts and R. P. Thomas, *Deformation-obstruction theory for complexes via Atiyah-Kodaira-Spencer classes*, Math. Ann. (2010), 545–569.
- [Hum75] James E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. MR 0396773
- [Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. MR 2244106

- [Huy16] ——, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. MR 3586372
- [HVdB07] Lutz Hille and Michel Van den Bergh, *Fourier-Mukai transforms*, Handbook of tilting theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 332, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 147–177. MR 2384610
- [HZ13] Dieter Happel and Dan Zacharia, *Algebras of finite global dimension*, Algebras, quivers and representations, Abel Symp., vol. 8, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 95–113. MR 3183882
- [Ill71] Luc Illusie, *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR 0491680
- [IN96] Yukari Ito and Iku Nakamura, *McKay correspondence and Hilbert schemes*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), no. 7, 135–138. MR 1420598
- [IN00] Yukari Ito and Hiraku Nakajima, *McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three*, Topology **39** (2000), no. 6, 1155–1191. MR 1783852
- [IR08] Osamu Iyama and Idun Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 4, 1087–1149. MR 2427009
- [Isi13] Mehmet Umut Isik, *Equivalence of the derived category of a variety with a singularity category*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 12, 2787–2808. MR 3071664
- [IU05] A. Ishii and H. Uehara, *Autoequivalences of derived categories on the minimal resolutions of  $A_n$ -singularities on surfaces*, J. Differential Geom. **71** (2005), 385–435.
- [IUU10] Akira Ishii, Kazushi Ueda, and Hokuto Uehara, *Stability conditions on  $A_n$ -singularities*, J. Differential Geom. **84** (2010), no. 1, 87–126. MR 2629510
- [IW14] Osamu Iyama and Michael Wemyss, *Singular derived categories of  $\mathbb{Q}$ -factorial terminalizations and maximal modification algebras*, Adv. Math. **261** (2014), 85–121. MR 3213296
- [Joy07a] D. Joyce, *Configurations in abelian categories II. Ringel-Hall alge-*

- bras*, Adv. in Math. **210** (2007), 635–706.
- [Joy07b] ——, *Configurations in abelian categories III. Stability conditions and identities*, Adv. in Math. **215** (2007), 153–219.
- [Joy07c] ——, *Motivic invariants of Artin stacks and ‘stack functions’*, Quart. J. Math. **58** (2007), 345–392.
- [Joy08] ——, *Configurations in abelian categories IV. Invariants and changing stability conditions*, Adv. in Math. **217** (2008), 125–204.
- [Joy15] ——, *A classical model for derived critical loci*, J. Differential Geom. **101** (2015), no. 2, 289–367. MR 3399099
- [JS12] D. Joyce and Y. Song, *A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants*, Mem. Amer. Math. Soc. **217** (2012).
- [Kap84] M. Kapranov, *Derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), 192–202.
- [Kaw02a] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, J. Differential Geom. **61** (2002), 147–171.
- [Kaw02b] ——, *Francia’s flip and derived categories*, Algebraic geometry, de Gruyter, Berlin (2002), 197–215.
- [Kaw05] ——, *Log crepant birational maps and derived categories*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **12** (2005), 1–53.
- [Kaw06] ——, *Derived categories of toric varieties*, Michigan Math. J. **54** (2006), 517–535.
- [Kaw08] ——, *Flops connect minimal models*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008), no. 2, 419–423. MR 2426353
- [Kaw09] ——, *Derived categories and birational geometry*, Proc. Sympos. Pure Math. **80** (2009), 655–665.
- [Kawas] Takeshi Kawasaki, *On arithmetic Macaulayfication of Noetherian rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 1, 123–149. MR 1859029
- [Kel94] B. Keller, *Deriving DG categories*, Annales scientifiques de l’E. N. S. **27** (1994), 63–102.
- [Kel96] Bernhard Keller, *Derived categories and their uses*, Handbook of al-

- gebra, Vol. 1, Handb. Algebr., vol. 1, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 671–701. MR 1421815
- [Kin94] A. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) **45** (1994), 515–530.
- [KL15] Alexander Kuznetsov and Valery A. Lunts, *Categorical resolutions of irrational singularities*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 13, 4536–4625. MR 3439086
- [KM92] S. Katz and D. R. Morrison, *Gorenstein threefold singularities with small resolutions via invariant theory for Weyl groups*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), 449–530.
- [KM98] J. Kollar and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, 1998.
- [KO94] S. A. Kuleshov and D. O. Orlov, *Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **58** (1994), no. 3, 53–87.
- [Kol89] J. Kollar, *Flops*, Nagoya Math. J **113** (1989), 15–36.
- [Kol96] ——, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse Math. Grenzgeb.(3), vol. 32, Springer-Verlag, 1996.
- [Kol13] ——, *Singularities of the minimal model program*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 200, Cambridge University Press, Cambridge, 2013, With a collaboration of Sandor Kovács. MR 3057950
- [Kon95] Maxim Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 120–139. MR 1403918
- [Kre99] A. Kresch, *Cycle groups for Artin stacks*, Invent. math. **138**(1999), 495–536.
- [KS] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, preprint, arXiv:0811.2435.
- [KS94] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original. MR 1299726

- [KS06] ——, *Categories and sheaves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR 2182076
- [KST09] H. Kajiura, K. Saito, and A. Takahashi, *Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights  $\epsilon = -1$* , Adv. in Math. **220** (2009), 1602–1654.
- [Kuza] A. Kuznetsov, *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, arXiv:0610957.
- [Kuzb] ——, *Hochschild homology and semiorthogonal decompositions*, preprint, arXiv:0904.4330.
- [Kucz] ——, *A simple counterexample to the Jordan-Hölder property for derived categories*, preprint, arXiv:1304.0903.
- [Kuz07] ——, *Homological projective duality*, Publ. Math. IHES (2007), no. 105, 157–220.
- [Kuz08a] ——, *Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics*, Adv. Math. **218** (2008), 1340–1369.
- [Kuz08b] ——, *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities*, Selecta Math. (2008), no. 13, 661–696.
- [Kuz10] ——, *Derived categories of cubic fourfolds*, in: Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Progr. Math. **282**(2010), 219–243.
- [Kuz11] ——, *Base change for semiorthogonal decompositions*, Compos. Math. **147** (2011), no. 3, 852–876. MR 2801403
- [Kuz16] ——, *Derived categories view on rationality problems*, Rationality problems in algebraic geometry, Lecture Notes in Math., vol. 2172, Springer, Cham, 2016, pp. 67–104. MR 3618666
- [KV00] M. Kapranov and E. Vasserot, *Kleinian singularities, derived categories and Hall algebras*, Math. Ann. **316** (2000), no. 3, 565–576. MR 1752785
- [Lam78] T. Y. Lam, *Serre’s conjecture*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. MR 0485842
- [Lam99] ——, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag, New York, 1999. MR 1653294

- [Li19a] Chunyi Li, *Stability conditions on Fano threefolds of Picard number 1*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 3, 709–726.
- [Li19b] ——, *On stability conditions for the quintic threefold*, Invent. Math. **218** (2019), no. 1, 301–340. MR 3994590
- [Lie06] M. Lieblich, *Moduli of complexes on a proper morphism*, J. Algebraic Geom. **15** (2006), 175–206.
- [LQ] J. Lo and Z. Qin, *Mini-walls for Bridgeland stability conditions on the derived category of sheaves over surfaces*, Asian J. Math. **18**, 321–344.
- [LW12] Graham J. Leuschke and Roger Wiegand, *Cohen-Macaulay representations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 181, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 2919145
- [Mac14a] Antony Maciocia, *Computing the walls associated to Bridgeland stability conditions on projective surfaces*, Asian J. Math. **18** (2014), 263–279.
- [Mac14b] E. Macri, *A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the three-dimensional projective space*, Algebra Number Theory **8** (2014).
- [Mat89] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, 1989.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory. Third Enlarged Edition*, Springer-Verlag, 1994.
- [Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. MR 559531
- [Mil17] ——, *Algebraic groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 170, Cambridge University Press, Cambridge, 2017, The theory of group schemes of finite type over a field. MR 3729270
- [Miy91] Jun-ichi Miyachi, *Localization of triangulated categories and derived categories*, J. Algebra **141** (1991), no. 2, 463–483. MR 1125707
- [MNOP06] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory. I*, Compos. Math. **142** (2006), 1263–1285.
- [MP15] A. Maciocia and D. Piyaratne, *Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds*, Algebr. Geom. **2** (2015), 270–297.

- [MP16] ——, *Fourier-Mukai Transforms and Bridgeland Stability Conditions on Abelian Threefolds II*, Internat. J. Math. **27** (2016).
- [MR82] V. B. Mehta and A. Ramanathan, *Semistable sheaves on projective varieties and their restriction to curves*, Math. Ann. **258** (1981/82), no. 3, 213–224. MR 649194
- [Muk81] S. Mukai, *Duality between  $D(X)$  and  $D(\hat{X})$  with its application to picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 101–116.
- [Muk87] ——, *On the moduli space of bundles on K3 surfaces I*, Vector Bundles on Algebraic Varieties, M. F. Atiyah et al., Oxford University Press (1987), 341–413.
- [Muk88] ——, *Moduli of vector bundles on K3 surfaces and symplectic manifolds*, Sugaku Expositions I (1988), 139–174.
- [Muk03] ——, *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, Translated from the 1998 and 2000 Japanese editions by W. M. Oxbury. MR 2004218
- [Nag64] Masayoshi Nagata, *Invariants of a group in an affine ring*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963/1964), 369–377. MR 0179268
- [New78] P. E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 51, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by the Narosa Publishing House, New Delhi, 1978. MR 546290
- [Ols16] Martin Olsson, *Algebraic spaces and stacks*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. MR 3495343
- [Orl93] D. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. (1993), 133–141.
- [Orl97] ——, *On Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), 1361–1381.
- [Orl09] ——, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progr. Math. **270** (2009), 503–531.
- [OU13] Ryo Ohkawa and Hokuto Uehara, *Frobenius morphisms and derived*

- categories on two dimensional toric Deligne-Mumford stacks*, Adv. Math. **244**(2013), 241–267. MR 3077872
- [OU15] Shinnosuke Okawa and Hokuto Uehara, *Exceptional Sheaves on the Hirzebruch Surface  $\mathbb{F}_2$* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 23, 12781–12803.
- [Pol03] Alexander Polishchuk, *Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 153, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR 1987784
- [Pos] Leonid Positselski, *All strictly exceptional collections in  $D^b(\text{Coh } \mathbb{P}^m)$  consist of vector bundles*, preprint, arXiv:alg-geom/9507014.
- [PP17] R. Pandharipande and A. Pixton, *Gromov-Witten/Pairs correspondence for the quintic 3-fold*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 389–449.
- [PS11] Mihnea Popa and Christian Schnell, *Derived invariance of the number of holomorphic 1-forms and vector fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), no. 3, 527–536. MR 2839458
- [PT] D. Piyaratne and Y. Toda, *Moduli of Bridgeland semistable objects on 3-folds and Donaldson-Thomas invariants*, to appear in Crelle, arXiv:1504.01177.
- [PT09] R. Pandharipande and R. P. Thomas, *Curve counting via stable pairs in the derived category*, Invent. Math. **178** (2009), 407–447.
- [Rei] M. Reid, *Minimal models of canonical 3-folds*, Algebraic Varieties and Analytic Varieties (S. Iitaka, ed), Adv. Stud. Pure Math, Kinokuniya, Tokyo, and North-Holland, Amsterdam **1**, 131–180.
- [Rod00] E. A. Rodland, *The Pfaffian Calabi-Yau, its Mirror, and their link to the Grassmannian  $G(2,7)$* , Compos. Math. **122**(2000), 135–149.
- [Ros98] Alexander L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, Compositio Math. **112** (1998), no. 1, 93–125. MR 1622759
- [RS19] Jørgen Vold Rennemo, Ed Segal, *Hori-mological projective duality*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 11, 2127–2205.
- [Sch12] Christian Schnell, *The fundamental group is not a derived invariant*, Derived categories in algebraic geometry, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2012, 279–285. MR 3050707
- [Sch14] B. Schmidt, *A generalized Bogomolov-Gieseker inequality for the smooth quadric threefold*, preprint **46** (2014), 915–923, Bull. Lond.

Math. Soc.

- [Sch17] Benjamin Schmidt, *Counterexample to the generalized Bogomolov-Gieseker inequality for threefolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 8, 2562–2566. MR 3658208
- [Seg11] Ed Segal, *Equivalence between GIT quotients of Landau-Ginzburg B-models*, Comm. Math. Phys. **304** (2011), no. 2, 411–432. MR 2795327
- [Shi12] Ian Shipman, *A geometric approach to Orlov’s theorem*, Compos. Math. **148** (2012), no. 5, 1365–1389. MR 2982435
- [ST01] P. Seidel and R. P. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J. **108** (2001), 37–107.
- [ST11] J. Stoppa and R. P. Thomas, *Hilbert schemes and stable pairs: GIT and derived category wall crossings*, Bull. Soc. Math. France **139**(2011), 297–339.
- [Tha96] Michael Thaddeus, *Geometric invariant theory and flips*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 3, 691–723. MR 1333296
- [Tho] R. P. Thomas, *Notes on HPD*, preprint, arXiv:1512.08985.
- [Tho00] ——, *A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds and bundles on K3-fibrations*, J. Differential. Geom. **54** (2000), 367–438.
- [Tod20] Toda Yukinobu, *Hall algebras in the derived category and higher-rank DT invariants*, Algebr. Geom. **7** (2020), no. 3, 240–262.
- [Tod06] ——, *Fourier-Mukai transforms and canonical divisors*, Compos. Math. **142** (2006), 962–982.
- [Tod07] ——, *On a certain generalization of spherical twists*, Bulletin de la SMF **135** (2007), 97–112.
- [Tod08a] ——, *Moduli stacks and invariants of semistable objects on K3 surfaces*, Adv. in Math. **217** (2008), 2736–2781.
- [Tod08b] ——, *Stability conditions and crepant small resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 6149–6178.
- [Tod09] ——, *Stability conditions and Calabi-Yau fibrations*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), 101–133.
- [Tod10a] ——, *Curve counting theories via stable objects I: DT/PT correspondence*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 1119–1157.

- [Tod10b] ——, *Generating functions of stable pair invariants via wall-crossings in derived categories*, Adv. Stud. Pure Math. **59**(2010), 389–434, New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008).
- [Tod13] ——, *Stability conditions and extremal contractions*, Math. Ann. **357** (2013), 631–685.
- [Tod14] ——, *Stability conditions and birational geometry of projective surfaces*, Compos. Math. **150** (2014), 1755–1788.
- [TT90] R. W. Thomason and Thomas Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 247–435. MR 1106918
- [Ueh04] Hokuto Uehara, *An example of Fourier-Mukai partners of minimal elliptic surfaces*, Math. Res. Lett. **11** (2004), no. 2-3, 371–375. MR 2067481
- [Ueh12] ——, *A counterexample of the birational Torelli problem via Fourier-Mukai transforms*, J. Algebraic Geom. **21** (2012), no. 1, 77–96. MR 2846680
- [Ueh14] ——, *Exceptional collections on toric Fano threefolds and birational geometry*, Internat. J. Math. **25** (2014), no. 7, 1450072, 32. MR 3238094
- [Ueh16] ——, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension*, Algebr. Geom. **3** (2016), no. 5, 543–577. MR 3568337
- [Ueh19] ——, *A trichotomy for the autoequivalence groups on smooth projective surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 5, 3529–3547. MR 3896121
- [VdB04a] Michel Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, The legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, pp. 749–770. MR 2077594
- [VdB04b] ——, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 3, 423–455. MR 2057015
- [Vis89] Angelo Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces*, Invent. Math. **97** (1989), no. 3, 613–670. MR 1005008

- [Yos90] Yuji Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR 1079937
- [Yos01a] K. Yoshioka, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), 817–884.
- [Yos01b] ——, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), no. 4, 817–884. MR 1872531
- [YZ97] Amnon Yekutieli and James J. Zhang, *Serre duality for noncommutative projective schemes*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 3, 697–707. MR 1372045
- [YZ06] ——, *Dualizing complexes and perverse sheaves on noncommutative ringed schemes*, Selecta Math. (N.S.) **12** (2006), no. 1, 137–177. MR 2244264
- [戸 16] 戸田幸伸, 『接層の導來圏に関する諸問題 (問題・予想・原理の数学)』, 数学書房, 2016.
- [川 97] 川又雄二郎, 『代数多様体論 (共立講座 21世紀の数学)』, 共立出版, 1997.
- [中 15] 中岡宏行, 『圏論の技法 (アーベル圏と三角圏でのホモロジー代数)』, 日本評論社, 2015.

# 索引

## ■数字・欧文

- 1-パラメーター部分群, 274
- 2-圈, 454
- 2 次超曲面ファイプレーション, 248
- $\alpha$ -捻れベクトル束, 140
- $\alpha$ -捻れ連接層, 140
- Artin スタック, 457
  - の Grothendieck 群, 386
- Auslander–Buchsbaum の公式, 428
- Azumaya 代数の層, 141
- $B$ -捻り Chern 標数, 328
- Behrend 関数, 375, 407
- Bogomolov–Gieseker 不等式, 329
- Brauer 群, 141
- Calabi–Yau 圈, 53
- Calabi–Yau 多様体, 53
- Calabi–Yau ファイバー空間, 134
- Clifford 空間, 249
- Cohen–Macaulay 加群, 428
- Cohen–Macaulay 環, 428
- coniveau フィルトレーション, 64
- Deligne–Mumford スタック, 457
- Donaldson–Thomas 不変量, 372
- DT/PT 対応, 384
- Euler 形式, 65
- Ext-例外生成列, 167
- Fourier–Mukai 関手, 46
- Fourier–Mukai パートナー, 61

Fourier–Mukai 変換, 47

Frobenius 圈, 198

$G$ -Hilbert スキーム, 150

$G$ -クラスター, 150

$G$ -代数的同値, 273

$G$ -同変, 444, 445

gauged LG 模型, 223

—の因子化, 223

—の準連接因子化的導來圏, 227

—の連接因子化的導來圏, 227

Gepner 点, 326

GIT-同値, 298

GIT-扇, 298

GKZ-扇, 298

Gorenstein 環, 429

Gorenstein パラメーター, 207

Gromov–Witten 不変量, 380

Grothendieck–Riemann–Roch の定理,  
64

Grothendieck 環, 63

Grothendieck 群, 62, 63

Grothendieck 双対性, 45

$H$ -ファンタム, 102

Harder–Narasimhan 因子, 111

Harder–Narasimhan フィルトレーショ  
ン, 111

Hilbert–Chow 射, 150

Hilbert 多項式, 114

Hirzebruch–Riemann–Roch の定理, 65

Hochschild–Kostant–Rosenberg(HKR)  
同型, 69

Hochschild コホモロジー, 67

- Hochschild ホモロジー, 67  
 Hodge 数, 70  
 Hopf 代数, 442
- Jordan–Hölder 因子, 111  
 Jordan–Hölder 性, 78  
 Jordan–Hölder フィルトレーション, 111, 317
- K-群, 63  
 K3 曲面, 130  
 Koszul 複体, 427
- Lefschetz 分解, 239
- $\mu_\omega$ -(半) 安定, 114  
 MacMahon 関数, 379  
 Mukai 格子, 131  
 Mukai 内積, 131  
 Mukai ベクトル, 66  
 M-正則(列), 426, 427
- $\nu_{B,\omega}$ -(半) 安定, 361  
 Noether 性, 78  
 $n$  次対称積, 149
- $\omega$ -Gieseke(半) 安定, 115  
 $\omega$  原始的, 117
- $\pi$ -ネフ, 144  
 Pandharipande–Thomas 不变量, 383  
 Pfaffian 多様体, 136  
 Poisson 括弧, 401  
 Poisson 代数, 401  
 Poisson トーラス, 409
- $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子, 144  
 $\mathbb{Q}$ -Gorenstein, 144  
 $\mathbb{Q}$ -分解的, 144  
 Quot スキーム, 120
- Serre 関手, 53  
 Serre 商, 199  
 Serre 双対性, 46  
 Serre 部分圏, 199  
 stupid フィルトレーション, 31
- t-構造, 164
- の核, 164  
 thick 部分圏, 54  
 thick 閉包, 54
- Verdier 商, 200  
 Yoneda 拡大, 37
- Zariski 局所的に自明, 386  
 Z-(半) 安定, 312
- あ
- 亞群, 451  
 $S$  上の——, 451  
 アファイン安定化群, 385  
 安定圏, 198  
 安定写像, 380  
 安定性条件, 313  
 ——の空間, 319  
 安定層のモジュライ空間, 116  
 安定対, 382  
 安定点, 272
- 位相  $\phi$  の安定対象, 315  
 位相  $\phi$  の半安定対象, 315  
 一般化された Pfaffian 多様体, 136  
 一般化 DT 不变量, 408  
 一般的指標, 298  
 因子的層, 430
- 簇, 433  
 簇の表現, 436  
 簇領域, 344
- 重み, 443  
 重み付き射影空間, 214
- か
- 可換な Poisson 代数, 401  
 核, 46  
 拡大閉包, 99, 167  
 仮想サイクル, 370  
 仮想次元, 366  
 壁, 298, 342  
 関係式付き簇, 435  
 関係式付き簇の表現, 437  
 完全関手, 19  
 完全圏, 198

- 完全三角形, 14  
 完全障害理論, 368  
 完全複体, 151  
 簡約, 270  
 幾何学的種数, 70  
 幾何学的商, 271  
 幾何的簡約, 270  
 幾何的全単射, 385  
 幾何的点, 459  
 擬同型, 26  
 基本 HKKN ストラテイフィケーション, 289  
 基本壁越え, 290  
 基本サイクル, 382  
 基本代数, 433  
 既約複素シンプレクティック多様体, 130  
 球面対象, 47  
 境界の部屋, 298  
 狹義完全複体, 151  
 狹義充満部分圏, 54  
 強例外列, 81  
 極小モデル, 144  
 局所コホモロジー, 425  
 局所射影生成元, 181  
 極大 Cohen–Macaulay 加群, 428  
 極大体積極限, 312, 326  
     —の近傍, 337  
 極大半直交分解, 72  
 許容イデアル, 435  
 許容可能, 244  
 許容部分三角圏, 74  
 空の部屋, 298  
 クレバント解消, 147  
 傾斜, 110, 114, 169  
 傾斜対象, 91  
 傾斜ベクトル束, 91  
 原始的, 340  
 圈論的商, 270  
 圈論的特異点解消, 250  
 構成可能関数, 375  
 小平次元, 68  
 古典的に生成する, 54  
 コニフォールド点, 326  
 コホモロジー的 Brauer 群, 139  
 コホモロジー的関手, 21  
 ■さ  
 サイクル, 434  
 三角関手, 19  
 三角圏, 14  
 三角同値, 19  
 次元ベクトル, 436  
 自己同値群, 320  
 次数  $I$  の窓, 280, 291  
 次数付き行列因子化, 216  
     —の圏, 216  
     —のホモトピー圏, 219  
 次数付き極大 Cohen–Macaulay 加群の  
     安定圏, 222  
 指標, 448  
 指標群, 448  
 射影関手, 73  
 射影公式, 44  
 射影生成元, 173  
 写像錐, 16  
 充満部分三角圏, 19  
 順序付き簇, 435  
 純粹, 115  
 障害類, 123  
 小拡大, 123  
 商スタッツ, 454  
 スタック, 453  
     —がスキームで表現される, 456  
     スキームに付随する—, 455  
     —の射が表現可能, 457  
 スライス, 313  
 正規化された双対化複体, 424  
 生成関数, 377  
 生成する, 54  
 正則局所環, 429  
 正則シンプレクティック形式, 130  
 積閉系, 23  
 線形簡約, 270  
 線形代数群, 441  
 全複体, 226  
 双対化加群, 428  
 双対化層, 426  
 双対化複体, 423, 425

双対 Lefschetz 分解, 245  
粗モジュライ空間, 119

## ■た

台, 56  
大域次元, 154, 429  
対角化可能, 294  
台条件, 316  
対称的完全障害理論, 369  
第2種扇, 298  
端射的収縮射, 76  
单射的包絡, 424  
單純対象, 438  
端末特異点, 144  
  
中心電荷, 315  
長方形型, 246  
直既約, 57, 433  
  
転換関手, 14  
点の Hilbert スキーム, 126

導來圏, 28  
導來 McKay 対応, 157  
トーリック Deligne–Mumford 軌道体, 300  
トーリック Deligne–Mumford スタック, 299  
(代数的) トーラス, 442  
特異点の三角圏, 204  
特殊代数群, 386

■な  
捩れ対, 168  
ネフ, 144

■は  
八面体公理, 16  
(半) 安定, 110  
半安定点, 272  
半直交分解, 72

非可換クレバント解消, 183  
非可換捩り関手, 196  
非可換変形関手, 194  
左隨伴関手, 49  
左直交部分三角圏, 55  
左変異, 98

左変異関手, 97  
捻り関手, 48  
被約な行列因子化, 217  
被約 Hilbert 多項式, 115  
表現可能, 116  
標準因子, 430  
標準環, 68  
標準層, 431  
標準フィルトレーション, 29  
非輪状, 26, 227, 435  
  
ファンタム, 102  
深さ, 428  
不正則数, 70  
普遍層, 117  
フロップ, 145  
フロップ-フロップ関手, 190  
分数的 Calabi–Yau 圈, 235  
  
部屋, 298, 342  
偏屈連接層, 172

母関数, 377  
ホモトピー圏, 12  
ホモトピー同値, 12  
ホモトピック, 12  
ホモロジー的射影双対, 243  
ホモロジカル次元, 151  
本質的全射, 54

■ま  
右隨伴関手, 49  
右直交部分三角圏, 55  
右導來関手, 32  
右(左)直交部分圏, 54  
右変異, 98  
右変異関手, 97  
道, 433  
道代数, 434

モチーフ的 Hall 代数, 393  
森田同値, 436

■や  
有界な質量, 340  
有限型, 80  
有理性定理, 384  
有理的特異点, 251

良い商, 271  
余加群, 442  
余作用, 442  
余積, 442  
余接複体, 368  
米田の補題, 51

■ら  
量子トーラス, 410  
良モジュライ空間, 119  
例外生成列, 81  
例外対象, 79  
例外列, 81

著者  
上原 北斗（うえはら ほくと）  
東京都立大学大学院理学研究科数理科学  
専攻准教授

戸田 幸伸（とだ ゆきのぶ）  
東京大学国際高等研究所カブリ数物連携  
宇宙研究機構教授

現代数学シリーズ編者  
中村 周（なかむら しゅう）  
学習院大学理学部教授

山田 澄生（やまだ すみお）  
学習院大学理学部教授

現代数学シリーズ  
連接層の導來圏と代数幾何学

---

令和2年12月25日発行

著作者 上原 北斗  
戸田 幸伸

編 者 中村 周  
山田 澄生

発行者 池田 和博

発行所 丸善出版株式会社  
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番  
編集：電話 (03) 3512-3266／FAX (03) 3512-3272  
営業：電話 (03) 3512-3256／FAX (03) 3512-3270  
<https://www.maruzen-publishing.co.jp>

---

© Hokuto Uehara, Yukinobu Toda, 2020

---

組版印刷・大日本法令印刷株式会社／製本・株式会社松岳社

---

ISBN 978-4-621-30591-1 C 3341 Printed in Japan

**JCOPY** ((一社)出版者著作権管理機構 委託出版物)

本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています。複写される場合は、そのつど事前に、(一社)出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail : [info@jcopy.or.jp](mailto:info@jcopy.or.jp)) の許諾を得てください。