

Gli esercizi da 1 a 5 si riferiscono al seguente problema di soddisfacibilità:

$$\{\neg P, \neg Q\} \{P, Q\} \{P, R\} \{Q, S\} \{\neg R, S\} \{\neg S, M\} \{\neg M\}$$

In tutti, T e F stanno per i valori di verità *Vero* e *Falso*

1. Quali dei seguenti stati potrebbero essere successori dello stato

$$[M=T; P=F; Q=F; R=F; S=T]$$

se viene fatto un **passo di ottimizzazione** in WalkSAT?

1.a  $[M=F; P=F; Q=F; R=F; S=T]$  ✓

La clausola che contiene  $\neg M$  non è soddisfatta e potrebbe essere scelta.

1.b  $[M=T; P=T; Q=F; R=F; S=T]$  ✓

La clausola  $\{P, Q\}$  non è soddisfatta e potrebbe essere scelta. Si può verificare che P è il letterale il cui flip rende più clausole soddisfatte (6 contro le 5 se si invertisse il valore di Q).

1.c  $[M=T; P=F; Q=F; R=T; S=T]$  ✗

R sta in una clausola non soddisfatta  $\{P, R\}$  ma il passo di ottimizzazione preferirebbe P.

1.d  $[M=T; P=F; Q=F; R=F; S=F]$  ✗

S non sta in alcuna clausola non soddisfatta, non può essere scelto

2. Quali dei seguenti stati potrebbero essere successori dello stato

$$[M=T; P=T; Q=F; R=F; S=F]$$

se viene fatto un **passo di ottimizzazione** in WalkSAT?

$$\{\neg P, \neg Q\} \{P, Q\} \{P, R\} \{Q, S\} \{\neg R, S\} \{\neg S, M\} \{\neg M\}$$

2.a  $[M=F; P=T; Q=F; R=F; S=F]$  ✓

La clausola che contiene  $\neg M$  non è soddisfatta e potrebbe essere scelta.

2.b  $[M=T; P=T; Q=T; R=F; S=F]$  ✗

Potrebbe essere scelta la clausola non soddisfatta  $\{Q, S\}$  ma si può verificare che il flip di Q rende meno clausole soddisfatte rispetto al flip di S (5 contro 6). Q non sarà scelto.

2.c  $[M=T; P=T; Q=F; R=F; S=T]$  ✓

Vedi risposta 2.b

2.d  $[M=T; P=F; Q=F; R=F; S=T]$  ✗

Ad ogni passo viene invertito il valore di verità di un solo simbolo

3. Quali dei seguenti stati potrebbero essere successori dello stato

[M=F; P=F; Q=T; R=T; S=F]

se viene fatto un **passo casuale** in WalkSAT?

3.a [M=T; P=F; Q=T; R=T; S=F] **X**

Le clausole che contengono M sono già soddisfatte.

3.b [M=F; P=T; Q=T; R=T; S=F] **X**

Le clausole che contengono P sono già soddisfatte.

3.c [M=F; P=F; Q=T; R=F; S=F] **V**

R sta nella clausola non soddisfatta  $\{\neg R, S\}$  e potrebbe essere scelto (il flip di R e il flip di S rendono vere lo stesso numero di clausole, 6)

3.d [M=F; P=F; Q=T; R=T; S=T] **V**

Vedi risposta 3.c

4. Quale delle seguenti affermazioni è vera considerando il seguente assegnamento **totale** in riferimento all'algoritmo DPLL?

{M=F, P=T, Q=F, R=T, S=T}

4.a L'algoritmo termina restituendo SUCCESSO **X**

La clausola  $\{\neg S, M\}$  non è soddisfatta

4.b L'algoritmo termina restituendo FALLIMENTO **V**

Vedi sopra

5. Si consideri il seguente stato di avanzamento dell'algoritmo DPLL visto a lezione.

Assegnamento parziale	Simboli (non ancora assegnati)
{M=F, S=F}	[P, Q, R]

Quale, tra i seguenti, **può essere** lo stato (assegnamento e simboli non ancora assegnati) al passo successivo?

5.a

Assegnamento parziale	Simboli (non ancora assegnati)
{M=F, S=F, <b>Q=T</b> }	[P, R]

✓

Con l'assegnamento dato, non ci sono simboli puri. D'altro canto, la quarta e la quinta clausola sono "diventate" unitarie. Potrebbe essere scelta la quarta da cui l'assegnamento Q=T.

5.b

Assegnamento parziale	Simboli (non ancora assegnati)
{M=F, S=F, <b>Q=T, P=F</b> }	[R]

✗

Ad ogni passo viene esteso l'aggiornamento parziale con un solo nuovo elemento.

5.c

Assegnamento parziale	Simboli (non ancora assegnati)
{M=F, S=F, <b>R=F</b> }	[P,Q]

✓

Con l'assegnamento dato, non ci sono simboli puri. D'altro canto, la quarta e la quinta clausola sono "diventate" unitarie. Potrebbe essere scelta la quinta da cui l'assegnamento R=F.

5.d

Assegnamento parziale	Simboli (non ancora assegnati)
{M=F, S=F, <b>P=T</b> }	[Q,R]

✗

P non è un simbolo puro, né è l'unico elemento di una clausola unitaria. Il prossimo passo selezionerà una delle clausole unitarie e procederà di conseguenza (vedi 5.a e 5.c)

Negli esercizi da 6 a 8, si fa riferimento alle seguenti regole R1 ÷ R4

- R1:  $P \Rightarrow \neg Q$
- R2:  $\neg Q \Rightarrow (P \vee R)$
- R3:  $R \vee \neg S$
- R4:  $S \vee \neg P$

6. Data la base di conoscenza KB costituita dalle regole R1 ÷ R4, si completi la Tavola di verità sottostante

P	Q	R	S	R1	R2	R3	R4
T	T	T	T	F	T		
T	T	T	F	F	T		
T	T	F	T	F	T		
T	T	F	F	F	T		
T	F	T	T	T	T		
T	F	T	F	T	T		
T	F	F	T	T	T		
T	F	F	F	T	T		
F	T	T	T	T	T		
F	T	T	F	T	T		
F	T	F	T	T	T		
F	T	F	F	T	T		
F	F	T	T	T	T		
F	F	T	F	T	T		
F	F	F	T	T	F		
F	F	F	F	T	F		

e si dica quali delle seguenti formule sono conseguenza logica di KB

- 6.1  $P \vee Q$
- 6.2  $\neg Q \Rightarrow (S \vee R)$
- 6.3  $(P \wedge \neg S) \Rightarrow \alpha$  dove  $\alpha$  è una formula qualsiasi

## Soluzione

P	Q	R	S	R1	R2	R3	R4	PVQ	$\neg Q \Rightarrow (S \vee R)$	$(P \wedge \neg S) \Rightarrow \alpha$
T	T	T	T	F	T	T	T			
T	T	T	F	F	T	T	F			
T	T	F	T	F	T	F	T			
T	T	F	F	F	T	T	F			
T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	F			
T	F	F	T	T	T	F	T			
T	F	F	F	T	T	T	F			
F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	F	T			
F	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F	T			
F	F	F	F	T	F	T	T			

Nella tabella le righe azzurre sono tutti e soli i modelli di KB, da cui si evince che:

6.1  $P \vee Q$  non è conseguenza logica di KB, essendo falsa negli ultimi due modelli di KB

6.2  $\neg Q \Rightarrow (S \vee R)$  è conseguenza logica di KB, essendo vera in tutti i modelli di KB

6.3  $(P \wedge \neg S) \Rightarrow \alpha$  è conseguenza logica di KB, indipendentemente da  $\alpha$ , poiché la premessa  $P \wedge \neg S$  è falsa in tutti i modelli di KB

7. Quale tra le seguenti è la corretta trasformazione in forma a clausole della KB formata dalle regole R1  $\div$  R4?

- |     |                      |                         |                               |   |
|-----|----------------------|-------------------------|-------------------------------|---|
| 7.1 | $\{\neg P, \neg Q\}$ | $\{P, \neg Q, R\}$      | $\{R, \neg S\} \{\neg P, S\}$ | X |
| 7.2 | $\{P, \neg Q\}$      | $\{P, Q, R\}$           | $\{R, \neg S\} \{\neg P, S\}$ | X |
| 7.3 | $\{\neg P, \neg Q\}$ | $\{P, Q, R\}$           | $\{R, \neg S\} \{\neg P, S\}$ | V |
| 7.4 | $\{\neg P, \neg Q\}$ | $\{\neg P, Q, \neg R\}$ | $\{R, \neg S\} \{\neg P, S\}$ | X |

8. Si dimostri mediante il metodo di risoluzione che la formula  $\neg Q \Rightarrow (S \vee R)$  è conseguenza logica della KB

## Soluzione

Sia  $G$  la formula data. Trasformiamo in forma a clausole  $\neg G$  e deriviamo la clausola vuota da  $FC(KB) \cup FC(\neg G)$ .

$$FC(\neg G) = FC(\neg(\neg Q \Rightarrow (S \vee R))) = FC(\neg(Q \vee S \vee R)) = FC(\neg Q \wedge \neg S \wedge \neg R)$$

Dunque, la trasformazione in forma a clausole dà luogo a tre clausole

$\{\neg Q\} \{\neg S\} \{\neg R\}$

Siano allora

- C1:  $\{\neg P, \neg Q\}$
  - C2:  $\{P, Q, R\}$
  - C3:  $\{R, \neg S\}$
  - C4:  $\{\neg P, S\}$
  - C5:  $\{\neg Q\}$
  - C6:  $\{\neg S\}$
  - C7:  $\{\neg R\}$

Ie clausole in  $\text{FC}(\text{KB}) \cup \text{FC}(-\text{G})$ . Rappresentiamo un passo di risoluzione come segue:

$C_n, C_m, W \Rightarrow C_k : \{ \dots \}$

ad indicare che la clausola  $C_k$  è ottenuta per risoluzione da  $C_n$  e  $C_m$  risolvendo il letterale  $W$  (che deve occorrere positivamente in  $C_n$  (resp.  $C_m$ ) e negativamente in  $C_m$  (resp.  $C_n$ ))

- |            |               |      |        |
|------------|---------------|------|--------|
| C2, C7, R  | $\Rightarrow$ | C8:  | {P, Q} |
| C8, C5, Q  | $\Rightarrow$ | C9:  | {P}    |
| C9, C4, P  | $\Rightarrow$ | C10: | {S}    |
| C10, C6, S | $\Rightarrow$ | C11: | { }    |

Il corrispondente grafo (parziale) di risoluzione è il seguente

