# PROP

**Esercizio 1**

È vera la seguente affermazione ($\alpha$ e $\beta$ sono formule proposizionali)

$\alpha \models \beta$ *se e soltanto se* $\alpha \Rightarrow \beta$ *è valida*

**Soluzione**

La risposta è affermativa. Basta osservare che il significato di $\alpha \models \beta$ è che $\beta$ è vera in tutti i modelli di $\alpha$. Inoltre, vista la semantica di $\Rightarrow$, la validità di $\alpha \Rightarrow \beta$ significa che, data una qualunque interpretazione $\mathcal{I}$, se $\mathcal{I} \models \alpha$, allora $\mathcal{I} \models \beta$.

**Esercizio 2**
Dire se è vera o falsa la seguente affermazione

*Ogni clausola proposizionale non vuota, di per sé, è soddisfacibile.*

**Soluzione**
La risposta è affermativa. Una clausola è una disgiunzione di letterali e i suoi modelli sono l'unione degli insiemi dei modelli dei letterali.
Si noti che *Falso* è insoddisfacibile, ma è in realtà un “sinonimo” per la clausola vuota. Anche $A \wedge \neg A$ è insoddisfacibile, ma sono sue clausole, non una.

**Esercizio 3**

È data la seguente KB

$(A \lor B) \land (\neg C \lor \neg D \lor E)$

Quali delle seguenti sono conseguenza logica di KB?

i. $(A \lor B)$
ii. $(A \lor B \lor C) \land (B \land C \land D \Rightarrow E)$
iii. $(A \lor B) \land (\neg D \lor E)$
iv. $(A \lor B \lor E)$

**Soluzione**

i. Lo è. Basta applicare $\land$-eliminazione a KB ($P \land Q \Rightarrow P$)
ii. Lo è. Osserviamo che $(A \lor B \lor C)$ segue da $(A \lor B)$ ($\lor$-introduzione) e che $(B \land C \land D \Rightarrow E)$ si può riscrivere come $(\neg B \lor \neg C \lor \neg D \lor E)$ e dunque, di nuovo, si ottiene dal secondo congiunto di KB per $\lor$-introduzione
iii. Non lo è. L'eliminazione di $\neg C$ dal secondo congiunto rafforza la formula, escludendo dei modelli di KB, tutti quelli in cui C=*false*, D=*true*, E=*false*.
iv. Lo è. Si ottiene applicando $\land$-eliminazione e $\lor$-introduzione

**Esercizio 4**

Supponiamo di voler dimostrare che una formula del FOL $\alpha$ è conseguenza logica di KB, utilizzando il metodo di risoluzione, quale dei seguenti è il metodo corretto? Nel seguito FC($\beta$) sta per la trasformazione in forma a clausole di $\beta$.

a. $FC(KB) \vdash_{RES} FC(\alpha)$
b. $FC(KB) \cup FC(\neg\alpha) \vdash_{RES} \{ \}$
c. $FC(KB) \cup \neg FC(\alpha) \vdash_{RES} \{ \}$
d. Nessuna delle altre opzioni.

**Soluzione**

Il metodo corretto è b.

**Esercizio 5**

Mostrare che dall'insieme di formule $\Gamma = \{(P \wedge Q) \Rightarrow R, P, P \Rightarrow Q\}$ si deriva $Q \wedge R$ utilizzando

a. DPLL
b. Risoluzione

**Soluzione**

a. $\Gamma \models Q \wedge R$ se e solo se $\Gamma \cup \{\neg(Q \wedge R)\}$ è insoddisfacibile. Trasformiamo dapprima $\Gamma \cup \{\neg(Q \wedge R)\}$ in forma a clausole

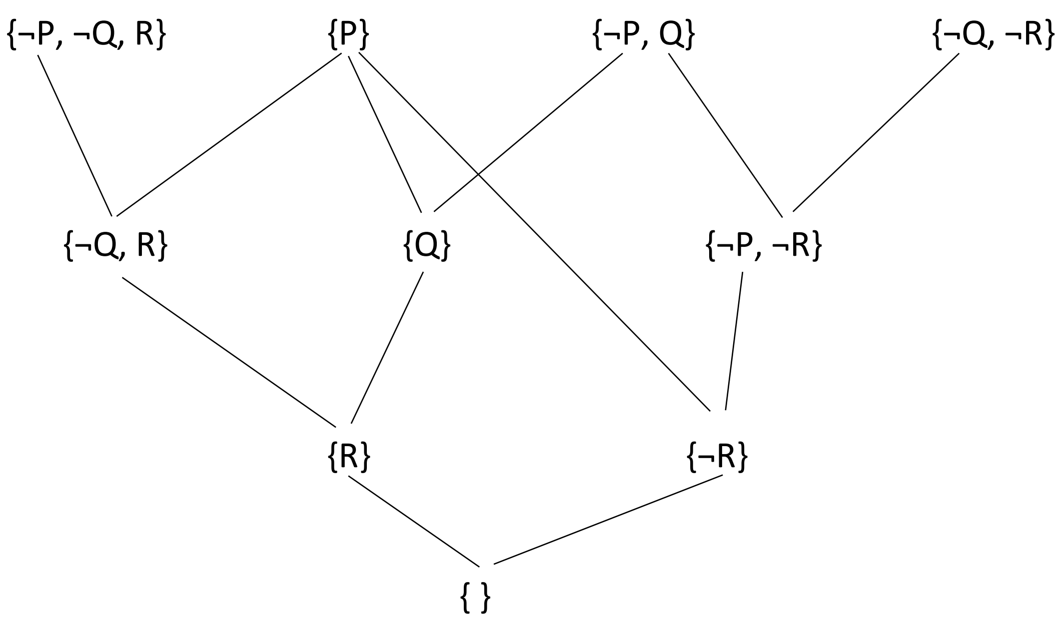
$FC(\Gamma \cup \{\neg(Q \wedge R)\}) = \{\neg P, \neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg P, Q\}\ \{\neg Q, \neg R\}$

La tabella sotto fornisce un metodo ordinato di svolgere questo tipo di dimostrazioni. Ad ogni passo si evidenzia: l'assegnamento parziale, le clausole soddisfatte (ok) le clausole semplificate sulla base degli assegnamenti fatti (se A=***t*** una clausola che contiene ¬A può essere vera solo in virtù degli altri letterali e quindi può essere semplificata, stessa cosa se A=***f*** si semplificano le clausole che contengono A).

| | Assegnamento | Clausole | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | {} | {¬P, ¬Q, R} | {P} | {¬P, Q} | {¬Q, ¬R} |
| Passo 1 (unit.) | {P=***t***} | {¬Q, R} | ok | {Q} | {¬Q, ¬R} |
| Passo 2 (unit.) | {P=***t***, Q=***t***} | {R} | ok | ok | {¬R} |
| Passo 3.1 (unit.) | {P=***t***, Q=***t***, R=***f***} | **NO** | ok | ok | ok |
| Passo 3.2 (unit.) | {P=***t***, Q=***t***, R=***t***} | ok | ok | ok | **NO** |

Non ci sono modelli e dunque $\Gamma \models Q \wedge R$

b. Mostriamo una porzione del grafo di risoluzione



**Esercizio 6**

È valida la seguente formula?

$((A \lor B) \land ((C \land B) \Rightarrow D) \land (C \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \lor D)$

**Soluzione**

Dall'esercizio 1 sappiamo che

$\alpha \vDash \beta$ se e soltanto se $\alpha \Rightarrow \beta$ è valida.

Consideriamo

$\alpha$: $(A \lor B) \land ((C \land B) \Rightarrow D) \land (C \Rightarrow A)$

$\beta$: $A \lor D$

e verifichiamo se $\alpha \land \neg\beta$ è insoddisfacibile.

La forma a clausole FC($\alpha \land \neg \beta$) si determina semplicemente attraverso le usuali trasformazioni (lasciate per esercizio):

{A, B} {¬C, ¬B, D } {¬C, A } {¬A} {¬D}

DPLL

| | Assegnamento | Clausole | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | {} | {A, B} | {¬C, ¬B, D } | {¬C, A} | {¬A} | {¬D} |
| Passo 1 (puro) | {C=***f***} | {A, B} | ok | ok | {¬A} | {¬D} |
| Passo 2 (puro) | { B=***t***, C=***f*** } | ok | ok | ok | {¬A} | {¬D} |
| Passo 3 (puro) | { A=***f***, B=***t***, C=***f*** } | ok | ok | ok | ok | {¬D} |
| Passo 4 (puro) | { A=***f***, B=***t***, C=***f***, D=***f***} | ok | ok | ok | ok | ok |

Abbiamo trovato un assegnamento (parziale) che soddisfa tutte le clausole. Dunque, la formula data non è valida.

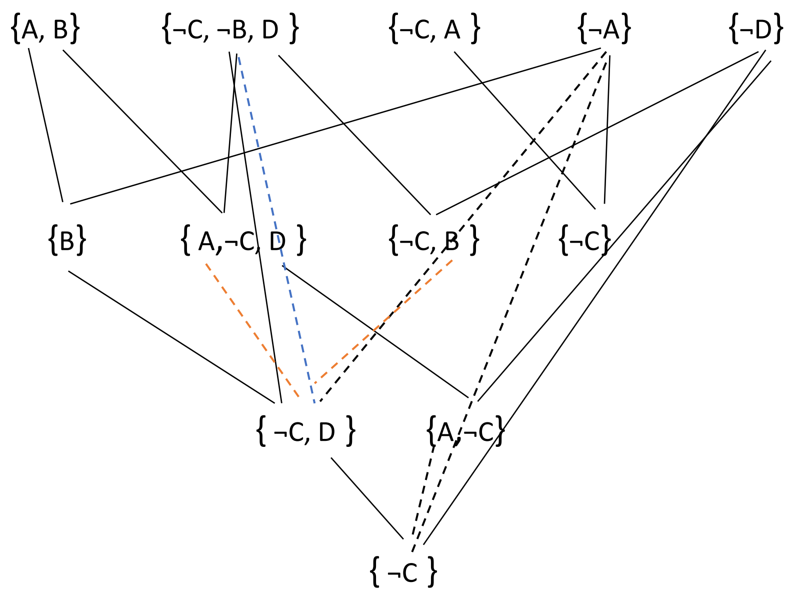
Vediamo un esempio di esecuzione di WALKSAT in questo caso. Partiamo da un assegnamento casuale (ott. sta per passo di ottimizzazione).

{A=***t***, B=***t***, C=***t***, D=***f***}

WALKSAT

| | Assegnamento | Clausole | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | {A, B} | {¬C, ¬B, D } | {¬C, A} | {¬A} | {¬D} |
| Passo 1 (casuale) | {A=***t***, B=***t***, C=***t***, D=***f***} | ok | no | ok | no | ok |
| Passo 1: flip B | {A=***t***, B=***f***, C=***t***, D=***f***} | ok | ok | ok | no | ok |
| Passo 2: ott. | {A=***f***, B=***f***, C=***t***, D=***f***} | no | ok | no | ok | ok |
| Passo 3: flip C | {A=***f***, B=***f***, C=***f***, D=***f***} | no | ok | ok | ok | ok |
| Passo 4: flip B | {A=***f***, B=***t***, C=***f***, D=***f***} | ok | ok | ok | ok | ok |

Vediamo infine cosa accade applicando la risoluzione




Come potevamo aspettarci, non si arriva alla clausola vuota { }, cioè a un cammino di successo, in quanto la formula è soddisfacibile.

# FOL

**Esercizio 1**

Per tutti gli abitanti di *SportCity* sappiamo che:

*Chi ama il Calcio ama anche il Basket*

*Chi ama il Tennis non ama il Basket*

Sappiamo anche che

*Laura* è abitante di *SportCity*

1. Formalizzare questa conoscenza in FOL
2. Dimostrare mediante risoluzione che la seguente affermazione

   Se *Laura* ama il *Tennis* non ama il *Calcio*

   è conseguenza logica della base di conoscenza
3. Dimostrare che le seguenti affermazioni
   a. Se *Laura* ama il *Calcio* ama anche il *Tennis*
   b. Se *Laura* non ama il *Basket* ama il *Tennis*

   non sono conseguenza logica della base di conoscenza, fornendo per ciascuna un controesempio (ovvero una interpretazione che sia modello della base di conoscenza ma non dell'affermazione in esame).

**Soluzione proposta**

1.1 Utilizziamo il seguente vocabolario

*Costanti*: C (Calcio), B (Basket), T (Tennis), S (città di SportCity), L (Laura)

*Predicati*: V, A binari

V(x, y) "x vive nella città y"

A (x, y) "x ama y"

Formalizzazione

R1: $\forall x \, \big(V(x,S) \land A(x, C)\big) \Rightarrow A(x, B)$

R2: $\forall x \, \big(V(x,S) \land A(x, T)\big) \Rightarrow \neg A(x, B)$

Aggiungiamo inoltre il fatto che *Laura* abita a *SportCity*

R3: $V(L, S)$

Sia allora **KB** la base di conoscenza costituita da R1, R2, R3.

1.2 Trasformiamo KB in forma a clausole

<u>$\mathcal{FC}$(R1)</u>

| | |
|---|---|
| R1 | ∀x (V(x,S) ∧ A(x, C)) ⇒ A(x, B) |
| Eliminazione ⇒ | ∀x ¬ (V(x,S) ∧ A(x, C)) ∨ A(x, B) |
| De Morgan | ∀x ¬V(x,S) ∨ ¬A(x, C) ∨ A(x, B) |
| Eliminazione ∀ | ¬V(x,S) ∨ ¬A(x, C) ∨ A(x, B) |
| **$\mathcal{FC}$(R1)** | **{ ¬V(x,S) , ¬A(x, C), A(x, B) }** |

<u>$\mathcal{FC}$(R2)</u>

| | |
|---|---|
| R2 | ∀x (V(x,S) ∧ A(x, T)) ⇒ ¬ A(x, B) |
| Eliminazione ⇒ | ∀x ¬ (V(x,S) ∧ A(x, T)) ∨ ¬A(x, B) |
| De Morgan | ∀x ¬V(x,S) ∨ ¬A(x, T) ∨ ¬A(x, B) |
| Eliminazione ∀ | ¬V(x,S) ∨ ¬A(x, T) ∨ ¬A(x, B) |
| Standardizzazione | ¬V(y,S) ∨ ¬A(y, T) ∨ ¬A(y, B) |
| **$\mathcal{FC}$(R2)** | **{ ¬V(y,S) , ¬A(y, T), ¬A(y, B) }** |

| | |
|---|---|
| **$\mathcal{FC}$(R1)** | **{ V(L, S) }** |

L'affermazione

Se *Laura* ama il *Tennis* non ama il *Calcio*

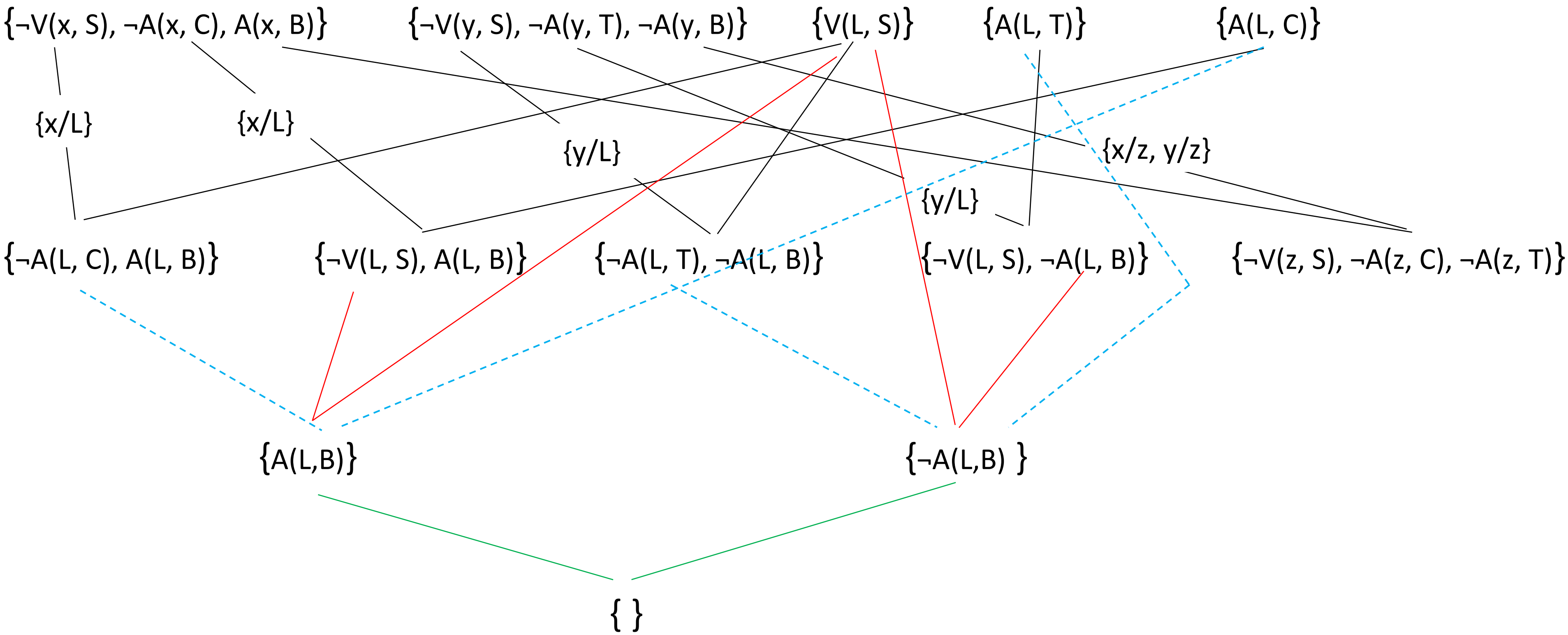
si traduce nella seguente implicazione

G1: A(L, T) ⇒ ¬ A(L, C)

Per dimostrare KB ⊨ G1 proviamo a dimostrare $\mathcal{FC}$(KB) ∪ $\mathcal{FC}$(¬G1) ⊢ { }

| | |
|---|---|
| ¬ G1 | ¬ (A(L, T) ⇒ ¬ A(L, C)) |
| Eliminazione ⇒ | ¬ (¬A(L, T) ∨ ¬ A(L, C)) |
| De Morgan | ¬ ¬A(L, T) ∧ ¬¬ A(L, C)) |
| Doppia negazione | A(L, T) ∧ A(L, C) |
| **FC(¬G1)** | **{ A(L, T) } { A(L, C) }** |

Costruiamo (fino ad ottenere il nostro obiettivo) il grafo di risoluzione per $\mathcal{FC}$(KB) ∪ $\mathcal{FC}$(¬G1)


{¬V(x, S), ¬A(x, C), A(x, B)}
{¬V(y, S), ¬A(y, T), ¬A(y, B)}
{V(L, S)}
{A(L, T)}
{A(L, C)}
{x/L}
{x/L}
{y/L}
{x/z, y/z}
{y/L}
{¬A(L, C), A(L, B)}
{¬V(L, S), A(L, B)}
{¬A(L, T), ¬A(L, B)}
{¬V(L, S), ¬A(L, B)}
{¬V(z, S), ¬A(z, C), ¬A(z, T)}
{A(L,B)}
{¬A(L,B) }
{ }

1.3.a Consideriamo l'affermazione

Se *Laura* ama il *Calcio* ama anche il *Tennis*

che si traduce nella seguente implicazione

G2: $A(L, C) \Rightarrow A(L, T)$

Per convincerci che KB $\not\models$ G2, costruiamo un controesempio, ovvero una interpretazione $\mathcal{I}$ che sia modello di KB ma non di G2.

Il dominio $\mathcal{D}$ di $\mathcal{I}$ è l'insieme $\mathcal{D} = \{c, b, t, \ell, s\}$.

$\mathcal{I}(C) = c$ $\mathcal{I}(B) = b$ $\mathcal{I}(T) = t$ $\mathcal{I}(L) = \ell$ $\mathcal{I}(S) = s$

Il predicato V è interpretato dalla relazione

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{V} = \{ \langle \ell , s \rangle \}$

Il predicato A è interpretato dalla relazione

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{A} = \{ \langle \ell , c \rangle, \langle \ell , b \rangle \}$

È facile vedere che $\mathcal{I}$ è modello di KB. Ma osserviamo che il goal G2 è falso in $\mathcal{I}$ in quanto

$\langle \ell , c \rangle \in \mathcal{A}$ ma $\langle \ell , t \rangle \notin \mathcal{A}$

Un altro controesempio è dato dal seguente modello $\mathcal{I}'$ di KB che a sua volta non è modello di G2.

Il dominio $\mathcal{D}'$ di $\mathcal{I}'$ è l'insieme $\mathcal{D}' = \{ 0, 1 \}$

$\mathcal{I}'(C) = 0$ $\mathcal{I}'(B) = 0$ $\mathcal{I}'(T) = 1$ $\mathcal{I}'(L) = 0$ $\mathcal{I}'(S) = 0$

Il predicato V è interpretato dalla relazione

$\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{V}' = \{ \langle 0, 0 \rangle \}$

Il predicato A è interpretato dalla relazione

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{A}' = \{ \langle 0, 0 \rangle \}$

È facile vedere che anche $\mathcal{I}'$ è modello di KB. Ma osserviamo che il goal G2 è falso in $\mathcal{I}'$ in quanto

$\langle 0, 0 \rangle \in \mathcal{A}'$ ma $\langle 0, 1 \rangle \notin \mathcal{A}'$

1.3.b Consideriamo l'affermazione

Se *Laura* non ama il *Basket* ama il *Tennis*

che si traduce nella seguente implicazione

G3: $\neg A(L, B) \Rightarrow A(L, T)$

Anche in questo caso costruiamo una interpretazione $\mathcal{I}$ che sia modello di KB ma non di G3.

Il dominio $\mathcal{D}$ di $\mathcal{I}$ è l'insieme $\mathcal{D} = \{c, b, t, \ell, s\}$.

$\mathcal{I}(C) = c$ $\mathcal{I}(B) = b$ $\mathcal{I}(T) = t$ $\mathcal{I}(L) = \ell$ $\mathcal{I}(S) = s$

Il predicato V è interpretato dalla relazione

$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{V} = \{ \langle \ell , s \rangle \}$

Il predicato A è interpretato dalla relazione

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ $\mathcal{A} = \{ \}$

È facile vedere che $\mathcal{I}$ è modello di KB. Ma osserviamo che il goal G2 è falso in $\mathcal{I}$ in quanto

$\langle \ell , b \rangle \notin \mathcal{A}$ ma anche $\langle \ell , t \rangle \notin \mathcal{A}$

**Esercizio 2**

Per ciascuna delle seguenti coppie di letterali, dire se sono unificabili e, in caso affermativo, fornire il MGU e, se esiste, un unificatore più forte del MGU.

| | | |
|---|---|---|
| a) | P(A, B, B) | P(x, y, z) |
| b) | Q(y, G(A, B)) | Q(G(x, x), y) |
| c) | Older(Father(y), y) | Older(Father(x), John) |
| d) | Knows(Father(y), y) | Knows(x, x) |
| e) | Ama(x, figlio(Mary)) | Ama(Mary, z) |
| f) | P(x,A,y) | P(z,z,F(w)) |

**Soluzione**

a) θ = {x/A, y/B, z/B} è il MGU, ovviamente, non esiste un unificatore più forte
b) I due letterali non unificano
c) θ = {y/John, x/John}, non esiste un unificatore più forte
d) Non unificano a causa dell'occur check. x dovrebbe legare sia con y che con Father(y)
e) θ = {x/Mary, z/figlio(Mary)}
f) θ = {z/a, x/a, y/F(w)} è il MGU. In questo caso possiamo determinare un unificatore più forte, ad esempio γ = {z/a, x/a, y/F(a), w/a}.

**Esercizio 3**

Dato il seguente insieme di clausole

{P(x,A), ¬Q(y, B, x)} {P(A,A), Q(A, w, A), R(w,w)} {¬R(A,z), ¬P(A,B)}

indicare tra i seguenti quali sono risolventi corretti

a. { ¬Q(y, B, A), Q(A, w, A), R(w,w) }
b. { ¬Q(y, B, A), ¬R(A,z)}
c. { Q(A, A, A), R(A,A), ¬R(A,A)}
d. {P(A,A), Q(A, A, A), ¬P(A,B)}
e. {P(A,A), R(B,B)}

**Soluzione**

Vediamo tutti i possibili modi di effettuare un passo di risoluzione con le clausole date.

{P(x,A), ¬Q(y, B, x)}    {P(A,A), Q(A, w, A), R(w,w)}

{x/A, y/A, w/B}

{P(A,A), R(B,B)}

{P(A,A), Q(A, w, A), R(w,w)}    {¬R(A,z), ¬P(A,B)}

{w/A, z/A}

{ P(A,A), Q(A, A, A), ¬P(A,B)}

Concludiamo che, dell'elenco dato, solo d. ed e. sono corretti.