Esame Scritto del Terzo Appello

Tempo a disposizione: 2 ore

Riportare il numero di matricola **all'inizio** di ogni foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere scritta in modo chiaro e ordinato, e può non essere valutata se la calligrafia è illeggibile. Se l'esercizio lo richiede, evidenziare il risultato numerico nella soluzione. Le soluzioni degli esercizi devono essere riportate sul foglio protocollo nell'ordine proposto, la soluzione di ogni esercizio deve iniziare in una nuova pagina.
Le soluzioni devono includere il procedimento dettagliato che porta alle risposte. Risposte corrette non adeguatamente motivate saranno penalizzate.
È permesso l'uso di note, appunti, manuali e materiale didattico. Non è permesso l'uso di dispositivi elettronici ad esclusiva eccezione di una calcolatrice non programmabile. L'infrazione di queste regole o la comunicazione con altri comportano l'annullamento del compito.

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni si determini se essa è VERA oppure FALSA, motivando rigorosamente le risposte.

   (a) Siano X e Y due v.a. con densità f_X, f_Y rispettivamente. Se X e Y hanno stessa media e varianza, allora hanno la stessa legge (cioè la stessa densità).
   FALSA: Si prendano ad esempio X esponenziale di parametro 1 e Y $N(1,1)$, entrambe con media e varianza 1.

   (b) Siano $(x_1, \dots x_{100})$ i dati relativi alla massa corporea media di 100 specie di animali; se sostituiamo x_{100} con la massa (corporea media) di una nuova specie, la media campionaria dei dati varia di poco.
   FALSA: Se i dati sono relativi alle masse di specie di insetti (non oltre un 1kg), e la nuova specie è una specie di elefanti (6000kg), la media campionaria varia parecchio.

   (c) Se X è una variabile discreta, a valori in $x_1, \dots x_n$, con funzione di massa p, la sua varianza è data da

   $$\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p(x_k) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p(x_k)\right)^2.$$

   VERA: segue da $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ e dalle formule per il valore atteso di $\mathbb{E}[g(X)]$.

   (d) Dato un campione i.i.d. $X_1, \dots X_n$ (supponiamo le X_i limitate e non costanti),

   $$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2])$$

   ha distribuzione approssimativamente gaussiana per n grande.
   VERA: si applica il TCL alle v.a. X_i^2, per cui $(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2]))/\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X_i^2)}$ è approssimativamente gaussiana, e la gaussianità rimane per moltiplicazione per costanti (non nulle).

(e) Dati A e B eventi non trascurabili, vale $\mathbb{P}(A \mid B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \mid B)$.
FALSA: Si prenda ad esempio $A = \Omega$: $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^c) = 1$.

(f) Dato un campione i.i.d. $X_1, \dots X_n$ di legge Poisson di parametro λ, la media campionaria $\bar{X}_n$ è uno stimatore corretto e consistente di λ.
VERA: La media campionaria è uno stimatore corretto e consistente di $\mathbb{E}[X_1] = \lambda$.

2. In un'urna ci sono 3 monete, due equilibrate (con probabilità 1/2 di testa) e una truccata, con probabilità $p \in (0, 1)$ di testa. Dall'urna viene estratta e poi lanciata una moneta; quindi la moneta estratta viene rimessa nell'urna, e si ripete l'esperimento.

(a) Calcolare la probabilità che, su 4 ripetizioni, testa esca esattamente 3 volte. Suggerimento: calcolare prima la probabilità di testa in una singola ripetizione.
Sia X_i l'esito dell'i-simo lancio (1 = testa). Siamo in presenza di una sequenza di esperimenti ripetuti (estrazione e lancio), con successo $X_i = 1$ di probabilità

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \mid A_i)\mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(X_i = 1 \mid A_i^c)\mathbb{P}(A_i^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + p \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 + p),$$

dove A_i è l'evento "moneta equilibrata all'i-simo lancio". Quindi la v.a. Y che conta il numero di teste ha distribuzione $B(4, (1 + p)/3 =: q)$. La probabilità cercata è

$$\mathbb{P}(Y = 3) = 4q^3(1 - q).$$

(b) Se testa è uscita esattamente 3 volte (su 4), calcolare la probabilità che in tutte e 4 le estrazioni sia stata estratta una moneta equilibrata.
Se ogni moneta estratta è equilibrata ($A_1 \cap \dots A_4$), Y ha distribuzione $B(4, 1/2)$ e la probabilità di 3 teste è

$$\mathbb{P}(Y = 3 \mid A_1 \cap \dots A_4) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Per indipendenza, $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_4) = (2/3)^4$. Per Bayes, la probabilità cercata è

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_4 \mid Y = 3) = \frac{\mathbb{P}(Y = 3 \mid A_1 \cap \dots A_4)\mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_4)}{\mathbb{P}(Y = 3)} = \frac{1/4 \cdot (2/3)^4}{4q^3(1 - q)} = \frac{1}{3^4 q^3 (1 - q)}.$$

(c) Siano $X_1, \dots X_n$ i risultati di n ripetizioni (dell'esperimento "estrazione moneta e lancio della moneta estratta"). Trovare uno stimatore corretto per p e calcolarne la varianza.
Sappiamo che $\bar{X}_n$ è uno stimatore corretto di $\mathbb{E}[X_1] = q = (1 + p)/3$. Quindi, per linearità del valore atteso, $3\bar{X}_n - 1$ è uno stimatore corretto di p. La sua varianza è

$$\mathrm{Var}(3\bar{X}_n - 1) = 9\,\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = 9\frac{q(1 - q)}{n} = \frac{(1 + p)(2 - p)}{n}.$$

3. Siano X, Y v.a. indipendenti con distribuzione rispettivamente $N(0,1)$, $N(0,4)$.

   (a) Trovare un valore $r \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{P}(Y \geq r) = 0.15$.
   Tramite standardizzazione abbiamo

   $$0.15 = \mathbb{P}(Y \geq r) = \mathbb{P}(Z \geq r/2) = 1 - \Phi(r/2),$$

   da cui $\Phi(r/2) = 0.85$ e quindi $r = 2q_{0.85} = 2 \cdot 1.04 = 2.08$.

   (b) Calcolare $\mathbb{P}(|3X + 2Y| \leq 5)$.
   Poiché X e Y sono gaussiane indipendenti, per riproducibilità, $3X + 2Y$ ha distribuzione $N(3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0, 9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 25)$. Quindi la probabilità cercata è

   $$\mathbb{P}(|3X + 2Y| \leq 5) = \mathbb{P}(|Z| \leq 5/5 = 1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826.$$

   (c) Sia ora V una v.a. discreta indipendente da X, a valori in $\{-1, 1\}$, tale che $\mathbb{P}(V = 1) = \mathbb{P}(V = -1) = 1/2$. Dimostrare che VX ha la stessa distribuzione di X (cioè $N(0,1)$).
   Verifichiamo che, per ogni $a < b$,

   $$\mathbb{P}(a < VX < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

   con φ densità $N(0,1)$. Per formula della partizione e per l'indipendenza, abbiamo

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < VX < b) &= \mathbb{P}(a < X < b \mid V = 1)\mathbb{P}(V = 1) + \mathbb{P}(a < -X < b \mid V = -1)\mathbb{P}(V = -1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(a < X < b) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(a < -X < b)\end{aligned}$$

   Ora, poiché la densità gaussiana standard φ è pari, X e $-X$ hanno la stessa distribuzione, quindi $\mathbb{P}(a < -X < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$. Ne segue che $\mathbb{P}(a < VX < b) = \mathbb{P}(a < X < b)$.