VIRGOLA MOBILE

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE IN BASE

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, SCELTA UNA BASE DI RAPPRESENTAZIONE β

$\beta \geq 2 \Rightarrow \exists!\ p \in \mathbb{Z}$, $\{d_i\}_{i \geq 1}$ INTERI t.c. → SUCCESSIONE

1. $d_1 \neq 0$ (d_i = i-ESIMA CIFRA DELLA MANTISSA)
2. $0 \leq d_i \leq \beta - 1$ INTERI, $\forall i$
3. $\forall\, k > 0\ \exists\, j \geq k \Rightarrow d_j \neq \beta - 1$

$$x = \text{segno}(x) \cdot \underbrace{\beta^p}_{\text{ESPONENTE}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i} \right)}_{\text{MANTISSA } (f)}$$

$0 < f < 1$

EX.

$3 \quad 123 = +10^3 (0.123) = +10^3 (1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3})$

$-2 \quad 0.00123 = +10^{-2} (0.123)$

EX.

$(1011)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^3 = (11)_{10}$

$\overset{!}{=} 2^4 \cdot (0.1011)$

ESPONENTE p = # CIFRE DEL NUMERO PER $x > 0$

= # ZERO CHE PRECEDONO PER $x < 0$

MANTISSA	ESPONENTE

3,15 IN BASE 2 ?

$3 = (11)_2$

$0.15 \cdot 2 = 0.30$ — 0.0

$0.30 \cdot 2 = 0.60$ — 0.00

$0.60 \cdot 2 = 1.20$ — 0.001

$1.20 - 1 = 0.20$

$0.20 \cdot 2 = 0.40$ — 0.0010

$0.40 \cdot 2 = 0.80$ — 0.00100

$0.80 \cdot 2 = 1,60$ — 0.001001

$1.60 - 1 = 0,60$

$0.60 \cdot 2 = 1,2$ PERIODICO $\Rightarrow 0,00\overline{1001}$

$$3.15 = (11.00\overline{1001})_2 = 2^2(0.1100\overline{1001})$$

PROBLEMA! É PERIODICO ⇒ NO SPAZIO IN MACCHINA

SOLUZIONE: VA APPROSSIMATO:

TRONCAMENTO

$$(3,15)_{10} \approx 2^2(0.11001001)$$

ARROTONDAMENTO

9° CIFRA

$$(3,15)_{10} \approx 2^2(0,110010011)$$

$$\approx 2^2(0.11001010)$$

$t \Rightarrow$ # CIFRE RAPPRESENTABILI (LUNGHEZZA MANTISSA)

$-m \leq p \leq M \Rightarrow$ RANGE ESPONENTE $([-1021; 1024])$

INSIEME DEI NUMERI DI MACCHINA

$$\mathcal{F}(\beta, t, m, M) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \boxed{x = \text{segno}(x) \cdot \beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i}}, \; d_1 \neq 0, \; 0 \leq d_i \leq \beta - 1, \; -m \leq p \leq M\}$$

$\Omega \Rightarrow$ IL PIÙ GRANDE NUMERO DI MACCHINA

$$\boxed{\Omega} = \beta^M \left(\sum_{i=1}^{t} (\beta - 1) \beta^{-i} \right) = \boxed{\beta^M \underbrace{(1 - \beta^{-t})}}$$

PER $t=3$, $1 - 10^{-3} = 1 - 0{,}001 = \boxed{0{,}999}$

EX.

$\mathcal{F}(10, 3, m, M)$ $\quad \Omega = 10^M \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} 9 \cdot 10^{-i} \right)$

$= 10^M \cdot (0{,}999)$

$\omega \Rightarrow$ IL PIÙ PICCOLO NUMERO DI MACCHINA

$$\boxed{\omega} = \beta^{-m} \underbrace{(0.1)_\beta}_{\text{MANTISSA PIÙ PICCOLA}} = \boxed{\beta^{-m-1}}$$

$$\# \mathcal{F} = \underbrace{1}_{\{0\}} + \underbrace{2}_{\pm x} \underbrace{(m + M + 1)}_{\text{ESPONENTI}} \underbrace{(\beta^t - \beta^{t-1})}_{\text{MANTISSE}}$$

$t=3$ $\quad 0, \_ \_ \_$

SONO 1000 POSSIBILI $= \beta^t$

CI DEVO SOTTRARRE TUTTI I CASI DOVE $d_1 = 0$

$\Rightarrow 100 = \beta^{t-1}$

$+10 + 10 + 1 = 21$

EX.

$\mathcal{F}(2,3,1,1)$

$$\#\mathcal{F} = 1+2(1+1+1)(2^3-2^2) = 1+6(8-4) = 1+24 = 25$$

$x > \Omega \Rightarrow x = \text{INF}$ OVERFLOW

$0 < x < \omega \Rightarrow x = 0$ UNDERFLOW

SERIE GEOMETRICA!!

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \qquad |q|<1$$

FLOATING POINT

1	11	52	
		$d_2, d_3, d_4, \dots, d_{52}, d_{53}$	8B
SEGNO	ESPONENTE	MANTISSA	

$$\mathcal{F}(2, 53, -1021, 1024) \Rightarrow \text{IEEE}$$

SICCOME $d_1 \neq 0$ $\Rightarrow$ NELLA MANTISSA SALVO DA d_2 A d_{53}

($d_1 = 1$ PER FORZA)

2^{11} = CONFIGURAZIONI PER L'ESPONENTE

$$[m, M] = [-1021, 1024] = 1021 + 1024 + 1 = 2046 = 2^{11} - 2$$

2 CONFIGURAZIONI SPECIALI:

1) SE ESPONENTE $= (0\dots0)_2$ $\Rightarrow$ NUMERI DENORMALIZZATI

EX. $2^{-1021}(0.\underline{\underline{0}}\,d_2 \dots d_{53}) = 2^{-1022}(0.d_2 \dots d_{53})$

FINO A TUTTI 0 CON $d_{53} = 1$

2) SE ESPONENTE $= (1\dots1)_2$ $\Rightarrow$ NUMERI SPECIALI

EX. $\pm$ INF , NaN

$x \in \mathbb{R}$ $x = \beta^p \cdot f = \beta^p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} d_i \, \beta^{-i}$

- x SI RAPPRESENTA SU $\mathcal{F}$:

  $-m \le p \le M$, $d_{t+i} = 0 \ \forall i \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i \, \beta^{-i}$ É UN NUMERO DI MACCHINA

- x NON SI RAPPRESENTA SU $\mathcal{F}$:

$$-m \le p \le M$$

- $\tilde{x} = \mathrm{TRUN}(x)$

  $\tilde{x} = \beta^p \sum_{i=1}^{t} d_i \, \beta^{-i}$

- $\tilde{x} = \mathrm{ARR}(x)$

  $$\tilde{x} = \begin{cases} \mathrm{TRUN}(x) & d_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ \mathrm{TRUN}(x) + \beta^{p-t} & d_{t+1} \ge \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE

$|\tilde{x} - x|$ = ERRORE ASSOLUTO

$|\varepsilon_x| = \dfrac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$ = ERRORE DI RAPPRESENTAZIONE / RELATIVO

TEOREMA:

SE NON SI VERIFICA OVERFLOW O UNDERFLOW:

① $|\text{TRUN}(x) - x| < \beta^{p-t}$

② $|\text{ARR}(x) - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{p-t}$

$t=3 \qquad x = 3{,}141 \qquad x = 10^{1} \cdot (0{,}3141)$

$\Rightarrow |3{,}14 - 3{,}141| < 10^{1-3} = 0{,}001 < 0{,}01$

$\Rightarrow |3{,}14 - 3{,}141| < 10^{1-3} = 0{,}001 \leq 0{,}005$

DIMOSTR.

$x = \Omega \Rightarrow \text{TRUN}(x) = \text{ARR}(x) = x$

$\text{TRUN}(x) - x = 0$

$\text{ARR}(x) - x = 0$

$$0 < x < \Omega \Rightarrow x = \beta^{p} \sum_{i=1}^{\infty} d_i \beta^{-i}$$

$$a = \beta^{p} \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \qquad\qquad a \leq x < b$$

$$b = \beta^{p} \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} + \beta^{-t} \qquad\qquad b - a = \beta^{p-t}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{x} = \mathrm{TRUN}(x) = a \Rightarrow |\mathrm{TRUN}(x) - x| = |a - x| < |a - b| = \beta^{p-t}$$

$$\tilde{x} = \mathrm{ARR}(x) = \begin{cases} a & \text{SE } x < \frac{a+b}{2} \\ b & \text{SE } x \geq \frac{a+b}{2} \end{cases} \Rightarrow |\mathrm{ARR}(x) - x| \leq \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}\beta^{p-t}$$

TEOREMA:

$$x \in \mathbb{R}, \quad \omega \leq |x| \leq \Omega, \quad x \neq 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < \underline{u}$$ PRECISIONE DI MACCHINA

$u = \beta^{1-t}$ SE $\tilde{x} = \mathrm{TRUN}(x)$

$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$ SE $\tilde{x} = \mathrm{ARR}(x)$

DIMOSTR.

- TRONCAMENTO $\tilde{x} = \mathrm{TRUN}(x)$

MANTISSA + PICCOLA

$$x = \beta^p \left(\sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right) \Rightarrow x \geq \beta^{p-1} = \beta^p (\underline{0.10\ldots0})$$

$$|\tilde{x} - x| < \beta^{p-t}$$

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{1-t}$$ u IN TRONCAMENTO

- ARROTONDAMENTO $\quad \tilde{x} = ARR(x)$

$$|\tilde{x} - x| \leq \frac{1}{2}\beta^{p-t}$$

$$|\varepsilon_x| = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} < \frac{\frac{1}{2}\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

u in ARROTONDAMENTO

$$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 2^{1-53} = 2^{-53} \approx 10^{-16}$$

$$\tilde{x} = FL(x) \qquad |\varepsilon_x| < u$$

$$\frac{\tilde{x} - x}{x} = \varepsilon_x \qquad FL(x) = \tilde{x} = x(1 + \varepsilon_x)$$

OPERAZIONI DI MACCHINA

$$\beta = 10 \quad , \quad t = 3$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0.123 \cdot 10^3 \\ y &= 0.456 \cdot 10^0 \end{aligned}\right\} \quad x+y = (0.\underline{123456}) \cdot 10^3 \notin \mathcal{F}$$

TROPPI NUMERI NELLA MANTISSA

$\oplus, \ominus, \otimes, \oslash \Rightarrow$ OPERAZIONI DI MACCHINA

$$x \oplus y = FL(x+y) \Rightarrow x \circledcirc_{op} y = FL(x \; op \; y)$$

$$x \oplus y = (x+y)(1+\varepsilon) \qquad |\varepsilon| < u$$

↳ ERRORE LOCALE DELL'OPERAZIONE

$$\varepsilon = \frac{(x \circledcirc y) - (x \text{ op } y)}{(x \text{ op } y)}$$

NON VALGONO PIÙ LE PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE

EX.

$$x \oplus (y \oplus z) \neq (x \oplus y) \oplus z$$

$a, b \in \mathbb{R}$ NO OVER/UNDER

$$\begin{array}{ccc} & a+b & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \tilde{a} & \oplus & \tilde{b} \end{array} = fl(\tilde{a} + \tilde{b})$$

$$\tilde{a} = a(1+\varepsilon_a) \qquad = (\tilde{a} + \tilde{b})(1+\varepsilon)$$

$$\tilde{b} = b(1+\varepsilon_b) \qquad = (a(1+\varepsilon_a) + b(1+\varepsilon_b))(1+\varepsilon)$$

ANALISI AL PRIMO ORDINE:

$$= a(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon) + b(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon)$$

IGNORO TUTTI GLI ERRORI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

$$\doteq a + b + a\varepsilon_a + b\varepsilon_b + (a+b)\varepsilon$$

ERRORE TOTALE

$$\frac{(\tilde{a} \oplus \tilde{b}) - (a+b)}{a+b} \doteq \frac{\cancel{a+b} + a\varepsilon_a + b\varepsilon_b + (a+b)\varepsilon \cancel{-(a+b)}}{a+b} \doteq$$

$$\doteq \underbrace{\frac{a}{a+b}\varepsilon_a + \frac{b}{a+b}\varepsilon_b}_{\text{ERRORE INERENTE}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{ERRORE ALGORITMICO}}$$

CAMBIANO IN BASE A OP

CALCOLO ERRORE NELLA FUNZIONE

$$g(\tilde{x}) = (\tilde{x} \ominus 1) \otimes (\tilde{x} \oplus 1)$$

CALCOLO (x^2-1) USANDO L'ALGORITMO $g(\tilde{x})$

CON SEMPLIFICAZIONE AL I° ORDINE

$$= \left(\left((\tilde{x}-1)(1+\varepsilon_1)\right) \cdot \left((\tilde{x}+1)(1+\varepsilon_2)\right)\right)(1+\varepsilon_3)$$

$$= \left(\left(\left(x(1+\varepsilon_x)-1\right)(1+\varepsilon_1)\right) \cdot \left(\left(x(1+\varepsilon_x)+1\right)(1+\varepsilon_2)\right)\right)(1+\varepsilon_3)$$

$$= \left(\left(\underbrace{(x+x\varepsilon_x-1)(1+\varepsilon_1}_{x\varepsilon_x\varepsilon_1})\right) \cdot \left(\underbrace{(x+x\varepsilon_x+1)(1+\varepsilon_2}_{x\varepsilon_x\varepsilon_2})\right)\right)(1+\varepsilon_3)$$

TOLGO x SEMPLIFICAZIONE AL I° ORDINE

$$= \left(\left(x+x\varepsilon_1+x\varepsilon_x-1-\varepsilon_1\right)\cdot\left(x+x\varepsilon_2+x\varepsilon_x+1+\varepsilon_2\right)\right)\cdot(1+\varepsilon_3)$$

$$= (x-1-\varepsilon_1+x\varepsilon_1+x\varepsilon_x)\cdot(x+1+\varepsilon_2+x\varepsilon_2+x\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_3)$$

$$= \left(x^2 \cancel{+x} + \cancel{x\varepsilon_2} + x^2\varepsilon_2 + x^2\varepsilon_x \cancel{-x} - 1 - \varepsilon_2 \cancel{-x\varepsilon_2} \cancel{-x\varepsilon_x} \right.$$
$$\left. \cancel{-x\varepsilon_1} - \varepsilon_1 + x^2\varepsilon_1 \cancel{+x\varepsilon_1} + x^2\varepsilon_x \cancel{+x\varepsilon_x}\right)\cdot(1+\varepsilon_3) =$$

$$= \left((x^2-1)+\varepsilon_1(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+2x^2\varepsilon_x\right)(1+\varepsilon_3) =$$

$$= (x^2-1)+\varepsilon_1(x^2-1)+\varepsilon_2(x^2-1)+\varepsilon_3(x^2-1)+2x^2\varepsilon_x =$$

RISULTATO FINALE DEL CALCOLO DI $g(x)$. NON SEMPLIFICO PERCHÉ APPLICO FORMULA ε_{TOT} E SI SEMPLIFICA LÌ.

$$f(x) = (x^2 - 1)$$

$$g(\tilde{x}) = (\tilde{x} \ominus 1) \otimes (\tilde{x} \oplus 1)$$

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{(x^2-1) + \varepsilon_1(x^2-1) + \varepsilon_2(x^2-1) + \varepsilon_3(x^2-1) + 2x^2\varepsilon_x - (x^2-1)}{(x^2-1)}$$

$$= \frac{(x^2-1)}{(x^2-1)} + \frac{\varepsilon_1(x^2-1) + \varepsilon_2(x^2-1) + \varepsilon_3(x^2-1) + 2x^2\varepsilon_x}{(x^2-1)} - \frac{(x^2-1)}{(x^2-1)}$$

$$= \cancel{1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \frac{2x^2}{(x^2-1)}\varepsilon_x - \cancel{1}$$

$$= \underbrace{\frac{2x^2}{(x^2-1)}}_{\varepsilon_{IN}}\varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\varepsilon_{ALG}} = \varepsilon_{TOT}$$

STUDIO DELL'ERRORE

$f(x)$ FUNZIONE RAZIONALE EX. $f(x) = x^2 - 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &x^2 = (1+2\varepsilon_x) \\ &x \cdot x = x(1+\varepsilon_x) \cdot x(1+\varepsilon_x) \\ &\qquad x^2(1+\varepsilon_x+\varepsilon_x+\cancel{\varepsilon_x^2}) = x^2(1+2\varepsilon_x) \\ &x^3 = (1+2\varepsilon_x)(1+\varepsilon_x) = \\ &= x(1+\varepsilon_x) \cdot x(1+\varepsilon_x) \cdot x(1+\varepsilon_x) \\ &= +2\varepsilon_x + \varepsilon_x + \cancel{2\varepsilon_x^2} = x^3(1+3\varepsilon_x) \end{aligned}}$$

DEF.

Si dice **ERRORE INERENTE** LA QUANTITÀ:

$$\varepsilon_{IN} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$f(x) \neq 0$

ERRORE INEVITABILE DATO DA $x \to \tilde{x}$

NON DIPENDE DALL'ALGORITMO

DEF.

Si dice **ERRORE ALGORITMICO** LA QUANTITÀ:

$$\varepsilon_{ALG} = \frac{g(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

$f(\tilde{x}) \neq 0$

DEF.

Si dice **ERRORE TOTALE** LA QUANTITÀ:

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$f(x) \neq 0$

ERRORE DATO DALLA SOMMA DI:

$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{IN} + \varepsilon_{ALG}$

- $g(\tilde{x})$ É L'ALGORITMO SCELTO PER RISOLVERE IL PROBLEMA

TEOREMA

$$\varepsilon_{TOT} \doteq \varepsilon_{IN} + \varepsilon_{ALG} \quad \text{SE} \quad f(x) \neq 0$$

DIM.

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} + \boxed{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}$$

ε_{IN}

$$= \frac{\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})}{f(x)} \cdot \frac{f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} + \varepsilon_{IN}$$

ε_{ALG}

$$= \varepsilon_{ALG}\left(\frac{f(\tilde{x})}{f(x)}\right) + \varepsilon_{IN}$$

$$= \varepsilon_{ALG}\left(\frac{f(\tilde{x}) + f(x) - f(x)}{f(x)}\right) + \varepsilon_{IN} = (\varepsilon_{IN} + 1)\,\varepsilon_{ALG} + \varepsilon_{IN}$$

ε_{IN}

II ORDINE

$$= \cancel{\varepsilon_{IN}\varepsilon_{ALG}} + \varepsilon_{ALG} + \varepsilon_{IN}$$

$$\varepsilon_{TOT} = \varepsilon_{ALG} + \varepsilon_{IN}$$

C.M.V.

$$\frac{2x^2}{(x^2-1)}\varepsilon_x + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{TOT}$$

ε_{IN}

ε_{ALG}

STABILITÀ E CONDIZIONALITÀ

- UN PROBLEMA É MAL CONDIZIONATO SE IL SUO $\mathcal{E}_{IN}$ É ALTO, ALTRIMENTI É BEN CONDIZIONATO

EX.

$$\frac{2x^2}{(x^2-1)}$$

→ MAL CONDIZIONATO PER $\lim_{x \to \pm 1} (x^2-1)$

→ BEN CONDIZIONATO PER VALORI LONTANI DA ± 1

DENOMINATORE $= 0$
$\Rightarrow$ OPERAZIONE $\to \pm\infty$

- UN ALGORITMO É INSTABILE SE IL SUO $\mathcal{E}_{ALG}$ É ALTO, ALTRIMENTI É STABILE

EX.

$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \to$ STABILE (LINEARE DELIMITATO DALLA PRECISIONE DI MACCHINA)

$\boxed{\frac{x^2}{x^2-1}}$ $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \to$ INSTABILE (IMPOSSIBILE LIMITARE IL DENOMINATORE PER $x \to \pm 1$)

STUDIO ERRORE INERENTE

$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon_x) \qquad \varepsilon_x = \frac{\tilde{x}-x}{x}$$

$$\varepsilon_{IN} = \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} = \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}\cdot\frac{(\tilde{x}-x)}{f(x)}\cdot\frac{x}{x}$$

$$= \overbrace{\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x}}^{\text{TAYLOR}*}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{(\tilde{x}-x)}{x}}_{\varepsilon_x}$$

CONTINUA E DERIVABILE 2 VOLTE

SE $f \in C^2[a,b]$

$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + f''(\xi_x)\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2!}$

DOVE $|\xi_x - x| \le |\tilde{x}-x|$ KSI

PER TAYLOR

$$= \frac{f'(x)(\tilde{x}-x) + f''(\xi_x)\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2!}}{(\tilde{x}-x)}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\varepsilon_x$$

IN QUEL CASO FACCIO

* $f(\tilde{x}) - f(x) = f'(x)(\tilde{x}-x) + f''(\xi_x)\frac{(\tilde{x}-x)^2}{2!}$

$$= f'(x) + \cancel{f''(\xi_x)\frac{(\tilde{x}-x)}{2!}}\;^{*}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\varepsilon_x$$

$$f''(\xi_x)\frac{(\tilde{x}-x)}{2!}\cdot\frac{x}{x} = f''(\xi_x)\underbrace{\frac{(\tilde{x}-x)}{x}}_{\varepsilon_x}\cdot\frac{x}{2!}$$

$$= f''(\xi_x)\frac{\varepsilon_x x}{2!}$$

II ORDINE QUANDO MOLTIPLICO PER ε_x *

$$= f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\varepsilon_x$$

TEOREMA

$$\varepsilon_{IN} \doteq \underbrace{\frac{x}{f(x)} f'(x)}\varepsilon_x$$

COEFFICIENTE DI AMPLIFICAZIONE $\leftarrow C_X$

C_X MISURA QUANTO ε_{IN} SUL DATO SI PROPAGA NEL CALCOLO DELLA FUNZIONE

EX.

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$C_X = \frac{x}{x^2-1} \cdot (2x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

NEL CASO DI $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f(x_1, x_2 \dots) \to \mathbb{R}$

f DIFFERENZIABILE 2 VOLTE

$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ VETTORE

DERIVATA PARZIALE

$$\Rightarrow \varepsilon_{IN} = \sum_{i=1}^{n} C_{x_i} \varepsilon_{x_i} \qquad C_{x_i} = \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

COEFFICIENTI PER LE 4 OPERAZIONI

$+$ $\quad f(x,y) = x+y \qquad \varepsilon_{IN} = C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$

$$C_X = \frac{x}{x+y} \cdot 1 \qquad C_Y = \frac{y}{x+y} \cdot 1$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE DELLA SOMMA

$-$ $\quad f(x,y) = x-y \qquad \varepsilon_{IN} = C_x \varepsilon_x + C_y \varepsilon_y$

$$C_X = \frac{x}{x-y} \cdot 1 \qquad C_Y = \frac{y}{x-y} \cdot (-1) = -\frac{y}{x-y}$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE DELLA SOTTRAZIONE

$\otimes$ $f(x,y) = xy$

$$C_x = \frac{x}{xy} \cdot y = 1 \qquad C_y = \frac{y}{xy} \cdot x = 1$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE DEL PRODOTTO

$\oslash$ $f(x,y) = x/y$

$$C_x = \frac{x}{\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y} = \cancel{x} \cdot \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = 1$$

COEFFICIENTI DI AMPLIFICAZIONE DELLA DIVISIONE

$$C_y = \frac{y}{\left(\frac{x}{y}\right)} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \cancel{y} \cdot \frac{\cancel{y}}{\cancel{x}} \cdot \left(-\frac{\cancel{x}}{\cancel{y^2}}\right) = -1$$

op \ c	C_x	C_y
$+$	$\frac{x}{x+y}$	$\frac{y}{x+y}$
$-$	$\frac{x}{x-y}$	$-\frac{y}{x-y}$
$\times$	1	1
$\div$	1	-1

$$f(x,y) \rightsquigarrow g(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$f(x,y) \to f(\tilde{x},\tilde{y}) \to g(\tilde{x},\tilde{y})$$

ERRORE ALGORITMICO

EX.

$$f(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x} + \tilde{y}$$

$$g(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{x} \oplus \tilde{y} = (\tilde{x}+\tilde{y})(1+\varepsilon)$$

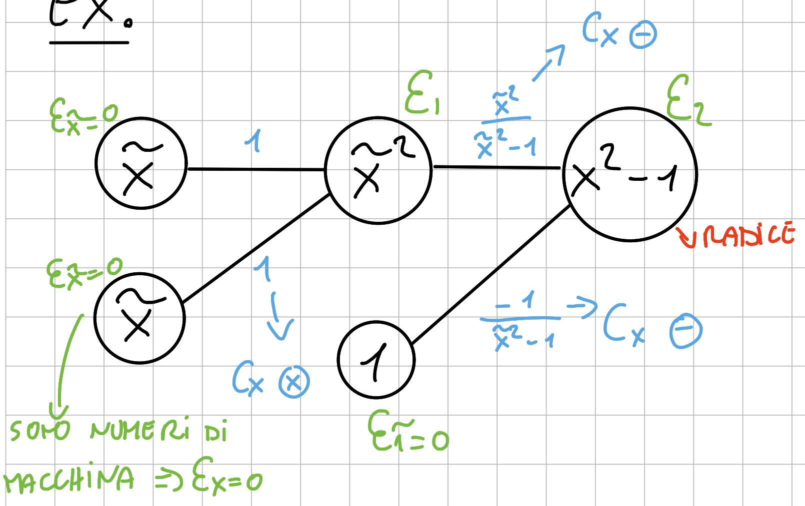
$$\varepsilon_{ALG} = \frac{g(\tilde{x},\tilde{y}) - f(\tilde{x},\tilde{y})}{f(\tilde{x},\tilde{y})} = \frac{(\tilde{x}+\tilde{y})(1+\varepsilon) - (\tilde{x}+\tilde{y})}{\tilde{x}+\tilde{y}}$$

$$= \frac{\cancel{(\tilde{x}+\tilde{y})}(1+\varepsilon)}{\cancel{\tilde{x}+\tilde{y}}} - \frac{\cancel{\tilde{x}+\tilde{y}}}{\cancel{\tilde{x}+\tilde{y}}}$$

$$= 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

ε_{ALG} CON GRAFO

EX.



$$g(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 - 1$$

PER LEGGERLO SCENDO DALLA RADICE VERSO LE FOGLIE TENENDO CONTO DEI VARI C_x SUI RAMI

$$\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_2 - \frac{1}{\tilde{x}^2-1}\Big(\underbrace{\varepsilon_{\tilde{1}}}_{=0}\Big) + \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{x}^2-1}\Big(\varepsilon_1 + 1\big(\underbrace{\varepsilon_{\tilde{x}}}_{=0}\big) + 1\big(\underbrace{\varepsilon_{\tilde{x}}}_{=0}\big)\Big)$$

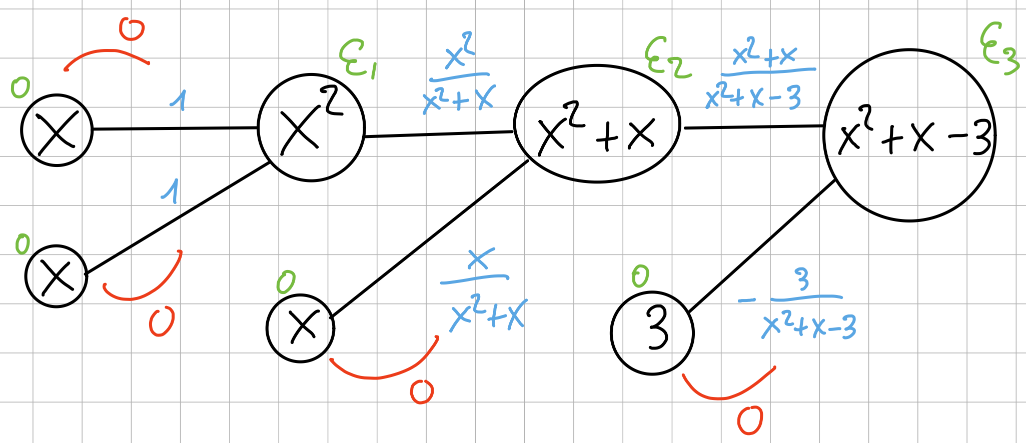
$$\boxed{\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_2 + \frac{\tilde{x}^2}{\tilde{x}^2-1}(\varepsilon_1)}$$

$$X \ \text{OP} \ Y \rightarrow \mathcal{E}_{TOT} = \underbrace{\mathcal{E}_{IN}}_{c_x \mathcal{E}_x + c_y \mathcal{E}_y} + \underbrace{\mathcal{E}_{ALG}}_{\mathcal{E}_{OP}}$$

<u>EX.</u>

$$f(x) = x^2 + x - 3$$

$$g(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 + \tilde{x} - 3$$



$$\mathcal{E}_{ALG} = \varepsilon_3 + \frac{x^2+x}{x^2+x-3}\left(\varepsilon_2 + \frac{x^2}{x^2+x}\varepsilon_1\right)$$

ESERCITAZIONE

ES. 1

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \qquad x \neq 0$$

STUDIARE IL CONDIZIONAMENTO $(\mathcal{E}_{in})$

$$\mathcal{E}_{in} = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \qquad \tilde{x} = x(1+\mathcal{E}_x)$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\mathcal{E}_{in} = \frac{x}{f(x)} f'(x)\, \mathcal{E}_x = x \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-(x-1)}{x^2}\, \mathcal{E}_x$$

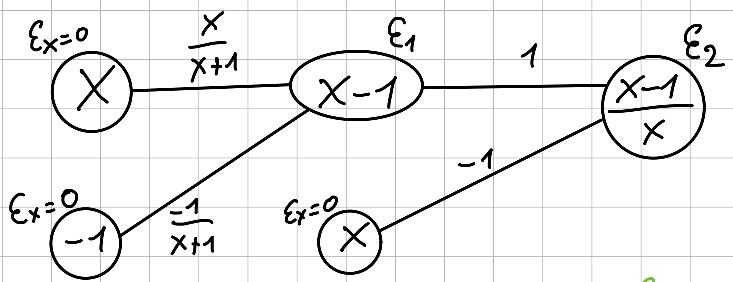
$$= \frac{\cancel{x^2} \cdot 1}{\cancel{x^2}(x-1)} \mathcal{E}_x = \underbrace{\frac{1}{(x-1)}}_{C_x} \mathcal{E}_x$$

$\exists$ VALORI DI x PER CUI É MAL CONDIZIONATA?

PER $x \to 1 \Rightarrow |C_x| \to +\infty$ NON É POSSIBILE LIMITARE SUPERIORMENTE $|\mathcal{E}_{in}|$

Studiare la stabilità (ε_{ALG})

$$g_1(x) = \frac{x-1}{x}$$



$$\varepsilon_{ALG_1} = \varepsilon_2 + 1(\varepsilon_1 + 0)$$

$$\varepsilon_{ALG_1} = \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

Per dire che è stabile devo riuscire a limitare il $|\varepsilon_{ALG_1}|$ con una costante $\cdot\, u$

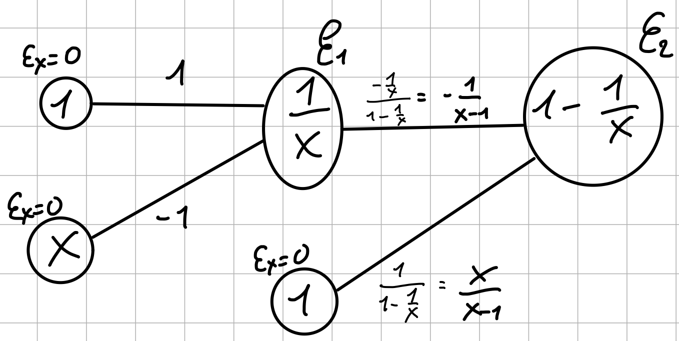
$$|\varepsilon_{ALG_1}| = |\varepsilon_2 + \varepsilon_1| \le |\varepsilon_2| + |\varepsilon_1| < 2u$$

$|\varepsilon_2| < u$

$|\varepsilon_1| < u$

Disuguaglianza triangolare dei moduli

$$g_2(x) = 1 - \frac{1}{x}$$



$$\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_2 - \frac{1}{x-1}(\varepsilon_1 + 0)$$

$$\varepsilon_{ALG} = \varepsilon_2 - \frac{1}{x-1}\varepsilon_1$$

$|\varepsilon_2| < u$ $\quad |\varepsilon_1| < u$

$$|\varepsilon_{ALG_2}| = \left|\varepsilon_2 - \frac{1}{x-1}\varepsilon_1\right| \le |\varepsilon_2| + \left|\frac{-1}{x-1}\right||\varepsilon_1| < u\left(1 + \frac{1}{|x-1|}\right)$$

Punti di instabilità? $x \to 1$ è instabile

Es. 2

$$x_1 \dots x_n \qquad x_i > 0 \qquad f(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

CONDIZIONAMENTO $\Rightarrow$ STUDIO ε_{in}

$$\varepsilon_{in} = \sum_{i=1}^{n} c_{x_i} \cdot \varepsilon_{x_i}$$

$$c_{x_i} = \frac{x_i}{f(x_1 \dots x_n)} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{in} \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{f(x_1 \dots x_n)} \cdot \varepsilon_{x_i} = \frac{1}{f(x_1 \dots x_n)} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varepsilon_{x_i}$$

$x_i > 0$

NON DIPENDENTE DALL'INDICE DELLA SOMMATORIA $\Rightarrow$ POSSO TIRARLO FUORI.

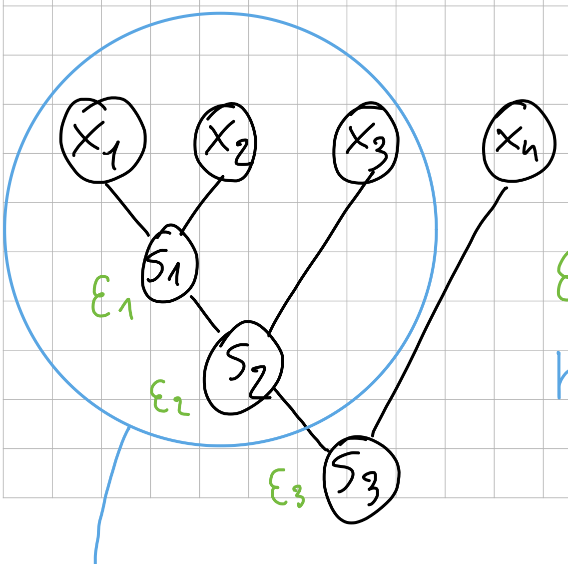
DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE DEI MODULI

$$|\varepsilon_{in}| \doteq \frac{1}{|f(\bar{x})|} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \varepsilon_{x_i}\right| \le \frac{1}{|f(\bar{x})|} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \underbrace{|\varepsilon_{x_i}|}_{<u} < \frac{u}{\cancel{|f(\bar{x})|}} \overbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}}^{f(\bar{x})}$$

EQUIV.

BEN CONDIZIONATO PER $x_i > 0$

STABILITÀ $\Rightarrow$ STUDIO IN ε_{ALG}



$$S_K = \sum_{i=1}^{K} x_i$$

ε_i = ERR LOCALE i-ESIMA SOMMA

η_i = ERR AL PASSO i-ESIMO

$$\eta_2 = \varepsilon_2 + \frac{S_1}{S_2}\left(\eta_1 + \cancel{\frac{x_3}{S_2}\cdot \varepsilon_x}^{=0}\right)$$

$X \to S_1$

XOPY $\to S_2$

$$|\varepsilon_{ALG}| = |\eta_n|$$

$$\left|\frac{S_{k-1}}{S_k}\right| < 1$$

$$\eta_k = \varepsilon_k + \frac{S_{k-1}}{S_k}\eta_{k-1} \qquad |\varepsilon_k| < u \qquad S_k = S_{k-1} + x_k$$

MAGGIORO CON 1

$$= |\eta_n| = \left|\varepsilon_k + \frac{S_{k-1}}{S_k}\eta_{k-1}\right| \leq \overbrace{|\varepsilon_k|}^{<u} + \overbrace{\left|\frac{S_{k-1}}{S_k}\right|}^{<1}|\eta_{k-1}| \leq u + 1|\eta_{k-1}| <$$

$$< u + |\eta_{k-1}| < u + u + |\eta_{k-2}| < \ldots\ldots < (k-1)u$$

$$\Rightarrow |\varepsilon_{ALG_1}| = |\eta_n| \leq (n-1)u$$

STABILE?

SÌ, STABILE PER VALORI "RAGIONEVOLI" DI n

Errore Analitico

$\varepsilon_{IN} \leftarrow$ CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA

$\varepsilon_{ALG} \leftarrow$ STABILITÀ DI UN PROBLEMA

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \rightsquigarrow EXP(x, n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

SI INTRODUCE UN ERRORE QUANDO SI PASSA DA:

$f(x)$ NON RAZIONALE $\longrightarrow$ $h(x)$ RAZIONALE

Errore Analitico:

$$\varepsilon_{AN} = \frac{h(x) - f(x)}{f(x)}$$

$$\varepsilon_{TOT} \doteq \varepsilon_{IN} + \varepsilon_{ALG} + \varepsilon_{AN}$$

$$f(x) \xrightarrow[\text{RAZIONALE}]{\text{APPROSSIMAZIONE}} h(x) \xrightarrow{} h(\tilde{x}) \xrightarrow{} g(\tilde{x})$$

ε_{AN} $\qquad$ ε_{IN} $\qquad$ ε_{ALG}

$$\varepsilon_{TOT} = \frac{g(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq$$

NORME VETTORIALI

DEFINIZIONE

SI CHIAMA NORMA VETTORIALE SU $\mathbb{F}^n$ UNA FUNZIONE

$f : \mathbb{F}^n \Rightarrow \mathbb{R}_+$ TALE CHE:

1) $\forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n$, $f(\vec{v}) \geq 0$ E $f(\vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = 0$
2) $\forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n$, $\forall \alpha$ in $\mathbb{F}$, $f(\alpha\vec{v}) = |\alpha| f(\vec{v})$
3) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{F}^n$, $f(\vec{v}+\vec{w}) \leq f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

$$f(\vec{v}) = \|\vec{v}\| = \|v\|$$

EX. DI NORMA

VALORE ASSOLUTO $\quad x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$

OSS.

LE NORME INDUCONO UNA DISTANZA CHE GODE DI CERTE PROPRIETÀ:

$d : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \Rightarrow \mathbb{R}$

$- \forall v, w \in \mathbb{F}^n$, $\quad d(v,w) = \|v-w\|$

1) $d(v,w) \geq 0$ E $d(v,w) = 0 \Leftrightarrow v \equiv w$
2) $d(v,w) = d(w,v)$
3) $d(v,z) \leq d(v,x) + d(x,z)$

NORME CHE USEREMO

- NORMA 2 EUCLIDEA → $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

$|x_i|$: VALORE ASSOLUTO PER i NUMERI COMPLESSI

NEL CASO REALE $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$

$\vec{v}$ RIGA × $\vec{v}$ COLONNA

NEL CASO COMPLESSO $x \in \mathbb{C}^n$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{x^H x}$

EX. H → TRASPOSTO CONIUGATO

$$x = \begin{pmatrix} 1+3i \\ -2i \\ -5-7i \end{pmatrix}$$

DA COLONNA → RIGA E PARTI IMMAGINARIE INVERTITE DI SEGNO

$$x^H = (1-3i, +2i, -5+7i)$$

- NORMA 1 → $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

- NORMA ∞ → $\|x\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |x_i|$

LE NORME SONO TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI:

TEOREMA

SONO f E g DUE NORME SU $\mathbb{F}^n$

$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0$ TALI CHE:

$$\forall v \in \mathbb{F}^n \quad \alpha g(v) \le f(v) \le \beta g(v)$$

EX.

$$1\,\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$
$$1\,\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$$
$$1\,\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

NORMA MATRICIALE

DEFINIZIONE

UNA NORMA MATRICIALE É UNA FUNZIONE

$f: \mathbb{F}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE:

1) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad f(A) \geq 0 \quad$ E $\quad f(A) = 0 \iff A = 0_{n \times n}$

2) $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)$

3) $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad f(A+B) \leq f(A) + f(B)$

4) $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad f(A \cdot B) \leq f(A) \cdot f(B)$

LE NORME MATRICIALI INDUCONO UNA DISTANZA TRA MATRICI:

Norme matriciali indotte o compatibili con norma vettoriale

DEFINIZIONE:

Se $\|\cdot\|$ é una norma vettoriale su $\mathbb{F}^n$, una funzione $f: \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\forall A \in \mathbb{F}^{n\times n} \quad f(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

f si dice norma matriciale indotta della norma vettoriale $\|\cdot\|$

1) $\|I\| \geq 1$ per le norme matriciali indotte $\|I\| = 1$

$$\|I\|_M = \max_{\|x\|_V=1} \|Ix\|_V$$

2) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ <u>NON</u> é una norma matriciale indotta

TEOREMA COMPATIBILITÀ DELLE NORME:

Sia $\|\cdot\|_V$ una norma vettoriale su $\mathbb{F}^n$ e $\|\cdot\|_M$ la norma matriciale indotta corrispondente su $\mathbb{F}^{n\times n}$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathbb{F}^{n\times n}, \forall x \in \mathbb{F}^n \quad \|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V$$

DIMOSTRAZIONE:

SE $x=\vec{0}$ $\quad \|Ax\|_v = \|\vec{0}\|_v = 0 \qquad 0 = \|Ax\|_v \underset{=}{\le} \|A\|_M \cdot \overset{\overset{0}{\|}}{\|x\|_v} = 0$

SE $x \ne 0$ $\quad \frac{1}{\|x\|_v}\|Ax\|_v \le \|A\|_M = \max_{\|v\|_v=1} \|Av\|_v$

$$\|$$

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|_v \le \|A\|_M$$

$\in \{v : \|v\|=1\}$

PERCHÉ:

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\underbrace{\frac{1}{\|x\|}}_{\text{COSTANTE}} \cdot x\right\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1$$

TEOREMA:

SIA $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, SI HA CHE:

1) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ MAX RIGHE

2) $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ MAX COLONNE

3) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$ RAGGIO SPETTRALE

IL RAGGIO SPETTRALE DI UNA MATRICE $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ É DEFINITO COME:

$$\rho(M) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| \,, \quad \lambda_i \text{ AUTOVALORE DI } M \text{ SU } \mathbb{C}$$

EX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = \max\{1+2,\ |-1|+3\} = 4$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+|-1|,\ 2+3\} = 5$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

MATRICE SIMMETRICA $\Rightarrow$ HANNO AUTOVALORI REALI

CALCOLO AUTOVALORI $A^H A$

① TROVO IL POLINOMIO CARATTERISTICO:

(1.1) $\lambda I - A$ CON $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-13 \end{bmatrix}$$

(1.2) CALCOLO IL DETERMINANTE

$$\det(\lambda I - A) = ad - bc = (\lambda-2)(\lambda-13) - (-1)(-1) = (\lambda-2)(\lambda-13) - 1$$

(1.3) ESPANDO

$$(\lambda-2)(\lambda-13) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 13\lambda + 26 - 1 = \underline{\lambda^2 - 15\lambda + 25} = p_A(\lambda)$$

② CALCOLO AUTOVALORI

$$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 100}}{2} \begin{cases} \frac{15+\sqrt{125}}{2} \\ \frac{15-\sqrt{125}}{2} \end{cases}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{15+\sqrt{125}}{2}} \rightarrow \rho(M) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

CONDIZIONAMENTO DELLA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{F}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{F}^n$$

- RANK$(A) = n$
- KER$(A) = \{\emptyset\}$
- DIM$(\text{IM}(A)) = n$
- DET$(A) \neq 0$
- A INVERTIBILE
- $\lambda = 0$ NON É AUTOVALORE DI A

NON SINGOLARE

STUDIARE QUANTO É SENSIBILE LA SOLUZIONE X AL VARIARE DI A E b.

EX.

$$\begin{cases} 1.01X + 1.02Y = 2.03 \\ 0.99X + Y = 1.99 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1.01 & 1.02 \\ 0.99 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.03 \\ 1.99 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

INTRODUCO UNA PERTURBAZIONE:

$$\tilde{A} = A + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.01X + 1.02Y = 2.03 \\ 1X + Y = 1.99 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02\ldots \\ 2.01\ldots \end{bmatrix}$$

PROBLEMA MAL CONDIZIONATO! DIFFERENZA >>

$$Ax = b \qquad x = f(A,b)$$

$$\hat{A}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad \tilde{x} = f(\hat{A},\tilde{b})$$

$$\frac{\overset{\vec{v}}{f(\hat{A},\tilde{b})} - \overset{\vec{v}}{f(A,b)}}{f(A,b) = \vec{v}}$$

NON POSSO FARE LA DIVISIONE PER UN VETTORE

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

MISURA IL CONDIZIONAMENTO DI UN PROBLEMA

BUONO SE PICCOLO ⇒ RISPETTO ALLA PERTURBAZIONE SU b

SUPPONIAMO PER SEMPLICITÀ DI NON AVERE UN ERRORE SU A MA DI INTRODURRE SOLO UNA PERTURBAZIONE SU b.

TEOREMA

$Ax = b$, $A\tilde{x} = \tilde{b}$, A NON SINGOLARE

SCELTA UNA NORMA CHE INDUCE UNA NORMA MATRICIALE

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

$\mu(A)$ NUMERO DI CONDIZIONAMENTO ≥ 1

$$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|I\| = 1$$

DIMOSTRAZIONE

$$\tilde{x} - x = A^{-1}\tilde{b} - A^{-1}b = A^{-1}(\tilde{b} - b)$$

COMPATIBILITÀ TRA NORMA VETTORIALE E NORMA MATRICIALE INDOTTA

$$\|\tilde{x} - x\| = \|A^{-1}(\tilde{b} - b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$$

$$\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|} \quad \|A\| \to > 0 \Rightarrow \|A\| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\|x\|} \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|}$$

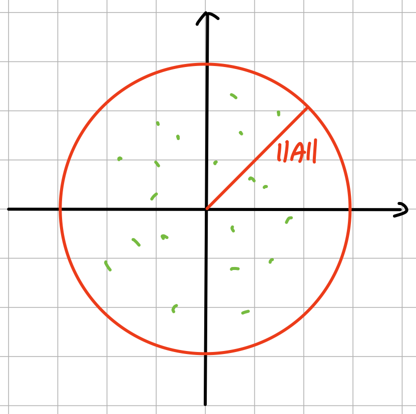
TEOREMI SULLE NORME

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|$$

TEOREMA DI HIRZ

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|\cdot\|$ NORMA MATRICIALE INDOTTA.

$\forall \lambda$ DI $A \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$



DIMOSTRAZIONE

λ É AUTOVALORE $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$:

$$Ax = \lambda x$$

$\|\cdot\|$ NORMA VETTORIALE CHE INDUCE LA NORMA MATRICIALE

$$\underbrace{|\lambda|}_{\text{cost.}} \cdot \|x\|_v \underset{\text{PROP. 2}}{=} \|\lambda x\|_v = \|Ax\|_v \underset{\substack{\text{COMPATIBILITÀ} \\ \text{DELLE NORME}}}{\leq} \|A\|_M \cdot \|x\|_v$$

$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ $\quad x \neq 0$ POSSO DIVIDERE

$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$

TEOREMA DI GERSHGORIN 1

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. DEFINIAMO IL CERCHIO NEL PIANO COMPLESSO

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \le \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|} \right\}$$

CERCHIO DI GERSHGORIN i-ESIMO

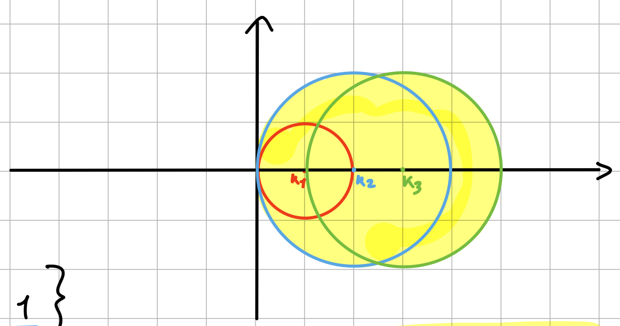
SOMMA DEI VALORI NELLA RIGA TRANNE A[i][j] DOVE $j=i$

PER $i = 1 \dots n$ INVECE:

SE λ É AUTOVALORE DI $A \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

EX.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



$$K_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \underbrace{1}_{a_{ij}}| \le \underbrace{1}_{\sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}|} \right\}$$

$$\boxed{\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i}$$

a_{ij} = CENTRO

$\sum_{\substack{j=1 \\ j=i}}^{n} |a_{ij}|$ = RAGGIO

$$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \le 2 \}$$

$$K_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \le 2 \}$$

DIMOSTRAZIONE

$Ax = \lambda x \quad x \in \mathbb{C}^n, \; x \ne 0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leftarrow$$

GUARDO LA i-ESIMA RIGA

$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = \lambda x_i$ RIGA X COLONNA $\Rightarrow$

POSSO RISCRIVERLA $\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} = \lambda x_i$ VALIDA $\forall i = 1 \dots n$

PRELEVO QUESTO ADDENDO DALLA SOMMATORIA E LO PORTO A DX CAMBIANDO IL SEGNO.

$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i - \underline{a_{ii} x_i}$ VALIDA $\forall i = 1 \dots n$

SARÀ VALIDA ANCHE PER L'INDICE p TALE CHE $|x_p| = \|x\|_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$

- $x_p \neq 0$ x_p AUTOVETTORE $\Rightarrow$ ALMENO UNA COMPONENTE $\neq 0$

SIA $i = p$

$$\underline{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j} = \underline{\lambda x_i - a_{ii} x_i} \Rightarrow \underline{(\lambda - a_{pp}) x_p} = \underline{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j}$$

PASSIAMO AI MODULI:

DISUG. TRIANG. MODULI

$$|(\lambda - a_{pp}) x_p| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj} x_j|$$

$\Rightarrow$ DISTRIBUISCO IL VALORE ASSOLUTO

$$\Rightarrow |(\lambda - a_{pp})| |x_p| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| |x_j|$$

POICHÉ $x_p \neq 0$ $|x_p| > 0$

PERCHÉ $|x_p| = \|x\|_\infty$

≤ 1 $\Rightarrow |x_p| = \max_{i=1..n} |x_i| \Rightarrow x_j < x_p$

$$\underline{|\lambda - a_{pp}|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \frac{|x_j|}{|x_p|} \leq \underline{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}|}$$

$$\Rightarrow \lambda \in K_p = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \right\}$$

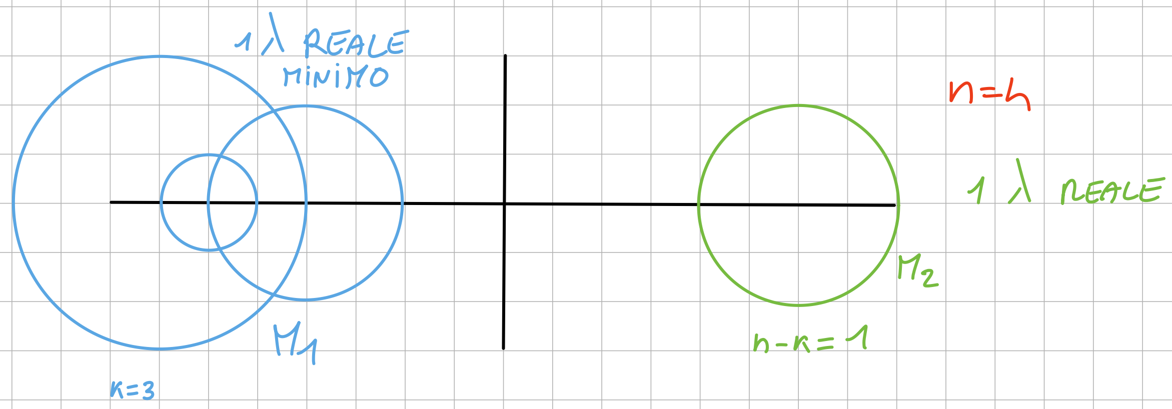
NON SAPENDO CHI È p:

$$\Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

TEOREMA DI GERSHGORIN 2

SE L'UNIONE M_1 DI K CERCHI DI G É DISGIUNTA DALL' UNIONE M_2 DEI RIMANENTI $n-k$ CERCHI,

$\Rightarrow$ K AUTOVALORI $\in M_1$, $n-K$ AUTOVALORI $\in M_2$



POSTILLA AUTOVALORI

GLI AUTOVALORI COMPLESSI POSSONO ESISTERE SOLO IN COPPIE CONIUGATE $(a+ib), (a-ib)$ AFFINCHÉ IL POLINOMIO RIMANGA REALE, OVVERO NON CONTENGA PARTI IMMAGINARIE. CON IL COMPLESSO CONIUGATO SI GARANTISCE CHE LA PARTE IMMAGINARIA SI ANNULLI NEI CALCOLI.

SE n É DISPARI: POSSIEDO PER CERTO ALMENO UN AUTOVALORE REALE

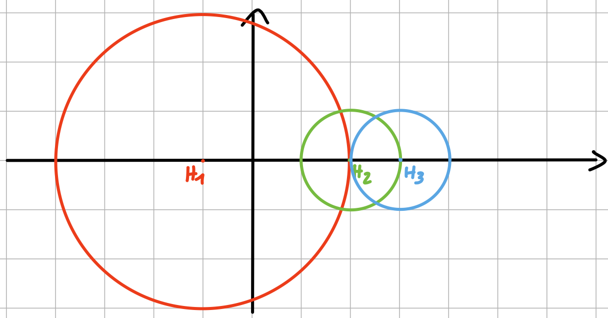
SE n É PARI: C'É LA POSSIBILITÀ CHE GLI AUTOVALORI SIANO TUTTI COMPLESSI

POICHÉ GLI AUTOVALORI DI A E A^T COINCIDONO POSSO ALLORA DIRE CHE SE:

$$H_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$ CERCHI IN COLONNA

EX.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



$$H_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq 3 \}$$
$$H_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq 1 \}$$
$$H_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \leq 1 \}$$

COROLLARIO

$$\lambda \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} H_j \right)$$

DEF.

UNA MATRICE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ SI DICE A PREDOMINANZA DIAGONALE PER RIGHE SE VALE CHE:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1 \dots n$$

DEF.

UNA MATRICE $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ SI DICE A PREDOMINANZA DIAGONALE PER COLONNA SE VALE CHE:

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall j = 1 \dots n$$

TEOREMA

SE A É A PREDOMINANZA DIAGONALE (RIGA / COLONNA) ALLORA A É NON SINGOLARE.

DIMOSTRAZIONE

A É NON SINGOLARE $\iff \forall \lambda \neq 0$

PER DIMOSTRARE BASTA VERIFICARE CHE $\lambda = 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ($\bigcup H_i$ X COLONNA)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1 \dots n$$ $\rightarrow$ PREDOMINANZA DIAGONALE

$$|a_{ii}| = |0 - a_{ii}|$$

$$\Rightarrow |0 - a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$0 \notin K_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

SICCOME NON RISPETTA $\Rightarrow 0 \notin K_i$

ESERCITAZIONE

EX. 1

$e_{1..n}$ VETTORE DELLA BASE CANONICA:

$n=3$

$e_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad e_2 \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad e_3 = e_n \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix} \qquad n \geq 2 \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = I + \alpha\, e_n e_1^T + \alpha\, e_1 u^T \qquad \text{CON} \quad u = [0, 1, \dots, 1]$$

$$e_n \begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} \cdot e_1^T [1 \dots 0] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_n \qquad e_1 \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} \cdot u [0, 1, \dots, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}_n$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ \alpha & & 0 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ \alpha & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ & \ddots & & \\ \alpha & & & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A NON SINGOLARE PER $|\alpha| < 1$ E SINGOLARE PER $|\alpha| = 1$?

(1.1)

• PREDOMINANZA DIAGONALE PER COLONNA

$\forall$ COLONNA $\quad 1 > |\alpha|$

POICHÉ A É A PRED. DIAG. PER COLONNA PER $|\alpha| < 1$ E LE MATRICI A PRED. DIAG. SONO NON SINGOLARI $\Rightarrow$ A NON É SINGOLARE PER $|\alpha| < 1$

1.2

SE $|\alpha|=1$ A É SINGOLARE.

CERCO UNA DELLE CONDIZIONI DA RISPETTARE PER DIRE CHE É SINGOLARE, OVVERO NON INVERTIBILE.

1. $DET(A)=0$
2. $RANK(A)<n \Rightarrow$ 2+ COLONNE NON LINEARMENTE INDIPENDENTI
3. $KER(A)>0$
4. $\lambda=0$

PER $|\alpha|=1$:

$\alpha=1$ $\quad A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A[0]$ E $A[n]$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\quad A[0]=A[n]$

$\alpha=-1$ $\quad A\begin{bmatrix} 1 & -1 \cdots & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A[0]$ E $A[n]$ NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI $\quad A[0]=-A[n]$

$\Rightarrow RANK(A)=n-1 \Rightarrow$ SINGOLARE

3

$$\|A\|_1 \le \|A\|_\infty$$

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ MAX RIGHE

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ MAX COLONNE

$\Rightarrow 1+|\alpha| \le 1+(n-1)|\alpha|$

$= |\alpha| \le (n-1)|\alpha|$

$= (n-2)|\alpha| \ge 0 \qquad n\ge 2$

(h) $\alpha = 1$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$

SI DIMOSTRI CHE:

h.1) $A^T A = I + ee^T + e_1 e_n^T + e_n e_1^T \qquad e = [1 \dots 1]$

h.2) $\|A\|_2 \le \sqrt{n+2}$

$$A = I + e_n e_1^T + e_1 u^T$$
$$A^T = I + e_1 e_n^T + u e_1^T$$

$$\underset{\text{RIGA}}{e_i^T}\,\underset{\text{COLONNA}}{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{SE } i \neq j \\ 1 & \text{SE } i = j \end{cases}$$

$$A^T A = (I + e_1 e_n^T + u e_1^T)(I + e_n e_1^T + e_1 u^T)$$
$$= I + e_1 e_n^T + u e_1^T + e_n e_1^T + e_1 \underbrace{e_n^T e_n}_{1} e_1^T + u \underbrace{e_1^T e_n}_{0} e_1^T + e_1 u^T + e_1 \underbrace{e_n^T e_1}_{0} u^T + u \underbrace{e_1^T e_1}_{1} u^T$$
$$= I + e_1 e_n^T + e_n e_1^T + \boxed{u e_1^T + e_1 e_1^T + e_1 u^T + u u^T}$$

$$\boxed{u e_1^T + e_1 e_1^T + e_1 u^T + u u^T} \Rightarrow e_1^T e + u^T e$$

$$\left.\begin{aligned} u e_1^T + e_1 e_1^T &= e_1^T (u + e_1) = e_1^T e \\ e_1 u^T + u u^T &= u^T (e_1 + u) = u^T e \end{aligned}\right\} e(e_1^T + u^T)$$
$$\Downarrow$$
$$e e^T$$

$$\left.\begin{aligned} u^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ e_1^T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} = e^T$$

$$A^T A = I + e_1 e_n^T + e_n e_1^T + e e^T$$

4.2) $\|A\|_2 \leq \sqrt{n+2}$ ORA DIMOSTRIAMO QUESTO

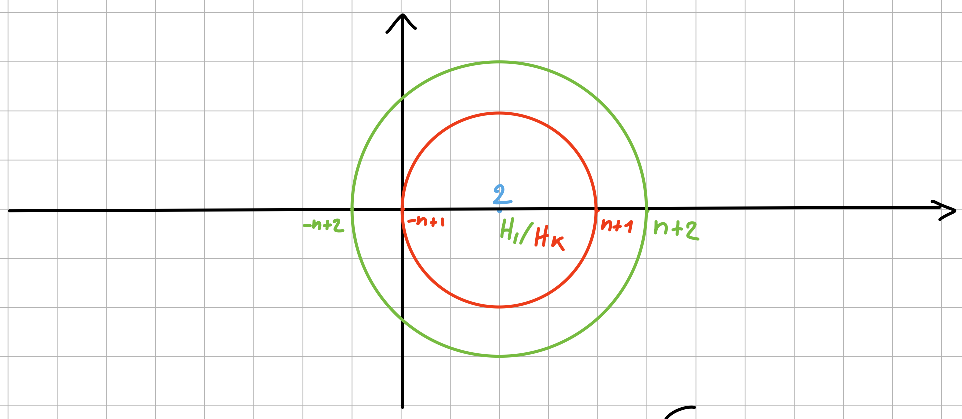
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} \Rightarrow \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & & \vdots \\ 1 & \ddots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

CALCOLARE GLI AUTOVALORI È COMPLICATO, QUINDI USIAMO I CERCHI DI GERSHGORIN

$A^T A$ È UNA MATRICE SIMMETRICA $\Rightarrow$ AUTOVALORI REALI



$H_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq (n-2)1 + 2 = n\}$

$H_K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \leq (n-1)1 = n-1\}$

SICCOME IL CENTRO È 2 E IL RAGGIO $= n$,
IL VALORE MAX CHE UN λ PUÒ ASSUMERE È $n+2$

$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|)} \leq \sqrt{n+2}$

PERCHÉ STIAMO SOLO STIMANDO CON I CERCHI.

EX. 2

$$a_{ij} = \begin{cases} n & i=j \\ -1 & |i-j|=1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

1) $\mu_2(A) = \rho(A)\rho(A^{-1})$ NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DELLA MATRICE

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & n \end{bmatrix}$$

A É A PRED. DIAG.

$\Rightarrow$ É INVERTIBILE (NON SINGOLARE)

A É SIMMETRICA $\Rightarrow$ $A^T = A$ $\quad A^TA = A^2$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^T(A^{-1}))} = \sqrt{\rho(A^{-1})^2} = \rho(A^{-1})$$

AUTOVALORI DI $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ $\quad$ A É INVERT. $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$

$$Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x)$$

$$\Rightarrow Ix = \lambda A^{-1}x$$

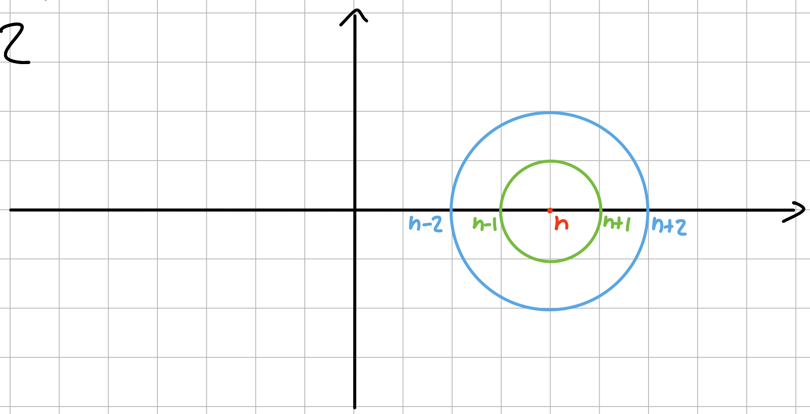
$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

$$\rho(A^{-1}) = \frac{1}{|\lambda_{MIN}|}$$

$$\Rightarrow \mu_2(A) = \frac{|\lambda_{MAX}|}{|\lambda_{MIN}|}$$

② $\mu_2(A) \leq \frac{n+2}{n-2}$

$$A = \begin{bmatrix} n & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & n \end{bmatrix}$$



PER GERSHGORIN:

$H_1 = H_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-n| \leq 1 \}$

$H_k = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-n| \leq 2 \}$

$\Rightarrow \quad n-2 \leq \lambda \leq n+2$

$\Downarrow$

$\mu_2(A) \leq \frac{n+2}{n-2}$

Risoluzione di un sistema lineare

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$$

- la x soluzione esiste ed é unica se e solo se:

  - $\text{rank}(A) = n \rightarrow \dim(\text{Img}(A)) = n$
  - $\text{Ker}(A) = \{\emptyset\} \rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 0$
  - $\det(A) \neq 0$
  - $\lambda = 0$ non é autovalore

- la x soluzione esiste ma non é unica quando:

$$\text{Img}(A|b) = \text{Img}(A)$$

In generale per risolvere il sistema si usa il metodo di Gauss

matrice triangolare superiore

$$[A|b] = [A^0|b^0] \rightarrow \dots \rightarrow [A^{n-1}|b^{n-1}] \rightarrow \left[\begin{matrix} a_{11}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}^{(n-1)} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} b_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{matrix}\right]$$

$$Ax = b \iff A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$ sistema equivalente

Metodo di sostituzione all'indietro

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right]$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$ se $a_{nn} \neq 0$

$$a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}\frac{b_n}{a_{nn}} = b_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}\frac{b_n}{a_{nn}}}{a_{n-1\,n-1}}$$

$$\boxed{x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}}}$$

ES.

$$Ax=b \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ALGORITMO

$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ $\qquad O(n^2)$

FOR $k=n-1; -1; 1$

$s=0$

FOR $j=k+1; n$

$s = s + a_{kj} x_j$

$x_k = (b_k - s)/a_{kk}$

$$\left.\begin{aligned} A^{(0)} &= A \quad \dots\dots \quad A^{(k)} \to A^{(k+1)} \\ b^{(0)} &= b \quad \dots\dots \quad b^{(k)} \to b^{(k+1)} \end{aligned}\right\} A^{(n-1)} = T$$

SUPPONIAMO

$$A^{(k+1)} = E^{(k+1)} A^{(k)}$$

$$T = A^{(n-1)} = E^{(n-1)} A^{(n-2)} = E^{(n-1)} E^{(n-2)} A^{(n-3)} = \dots = \underbrace{E^{(n-1)} \dots E^{(1)}}_{L^{-1}} \underbrace{A^{(0)}}_{A}$$

$T = L^{-1}A \implies A = LT$ FATTORIZZAZIONE DI A

$$Ax=b \implies L\underbrace{Tx}_{y}=b \quad < \begin{cases} Ly=b \\ Tx=y \end{cases}$$

DEF.

Si dice che $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é fattorizzabile LU se esistono L triangolare inferiore con 1 sulla diagonale e U triangolare superiore tali che $A=LU$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[A^{(0)}|b^{(0)}] \to [A^{(1)}|b^{(1)}] \to \dots \to [\underbrace{A^{(n-1)}}_{U}|\underbrace{b^{(n-1)}}_{Y}]$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = Y \end{cases} \leftarrow \text{SIAMO QUA}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$a_{nj}^{(1)} = a_{nj}^{(0)} - (x)\, a_{kj}^{(0)}$$

n, k SONO RIGHE

DEVO SEMPRE SOTTRARRE

$$-1\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right] = 2\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right] = -2\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA FATT. LU

SIA $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. SE LE SOTTOMATRICI PRINCIPALI DI TESTA DI A DI ORDINE k CON $k = 1, \dots, n-1$ SONO NON SINGOLARI

$\Rightarrow \exists$ UNICA LA FATT. LU DI A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A(1:k, 1:k)$

$$A_1 = a_{11} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE

CASO BASE: $n=1$ $A=[a_{11}]$ NON HA SOTTOMATRICI

$\Rightarrow L=[1]$ $U=[a_{11}]$ UNICA PER LA STRUTTURA DI L

SUPPONIAMO CHE SIA VERO PER MATRICI DI ORDINE $m \leq n-1$ E DIMOSTRIAMO CHE VALE PER A DI ORDINE n.

SE A FATT. LU $\Rightarrow \exists\, LU$ T.C. $A=LU$

$$A=\left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & z \\ \hline x^T & a_{nn} \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right]}_{L} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]}_{U}$$

$$\begin{cases} A_{n-1} = \hat{L}\hat{U} + \underbrace{0 \cdot 0^T}_{=0} \\ z = \hat{L}y + \underbrace{0 \cdot \beta}_{=0} \\ x^T = w^T \hat{U} + \underbrace{1 \cdot 0^T}_{=0} \\ a_{nn} = w^T y + 1 \cdot \beta \end{cases}$$

① A_{n-1} É IL MINORE // SOTTOMATRICE PRINCIPALE DI TESTA DI A DI ORDINE $n-1$ É INVERTIBILE.

② I MINORI PRINCIPALI DI TESTA DI A_{n-1} E DI A COINCIDONO

$\Rightarrow$ PER LE IPOTESI DEL TEOREMA, A_{n-1} HA I MINORI PRINCIPALI DI TESTA DI ORDINE K CON $K=1 \dots n-2$ <u>NON SINGOLARI</u>

A_{n-1} SODDISFA L'IPOTESI INDUTTIVA, QUINDI É FATTORIZZABILE $\hat{L}\hat{U}$

ANALIZZIAMO IL S.L.

$$\hat{L}\, y = z$$

LA SOLUZIONE y $\exists !$ POICHÉ $\det(\hat{L}) = 1$

$$x^T = w^T \hat{U} \iff \hat{U}^T w = x$$

$\hat{U}$: TRIANG. SUP. — $\hat{U}^T$: TRIANG. INF.

$$w \ \exists ! \iff \det(\hat{U}^T) \neq 0 \qquad \Rightarrow A_{n-1} = \hat{L}\hat{U} \quad \det(A_{n-1}) = \det(\hat{L}\hat{U}) = \underbrace{\det(\hat{L})}_{=1} \cdot \underbrace{\det(\hat{U})}_{\neq 0}$$

PER IPOTESI DEL TEOREMA

$$\beta = a_{nn} - w^T y \quad \text{ED É UNICO!}$$

EX.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

A É FATT. LU?

$$a_{ij} \begin{cases} 1 & \text{SE } i = j \\ -1 & \text{SE } i < j \\ 1 & \text{SE } i = n,\ j = 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

MINORE SUPERIORE

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \end{matrix}$$

k

$\det(A_k) \neq 0 \quad \forall k = 1 \dots n-1$?

$\Rightarrow \det(A_k) = 1 \quad \forall k = 1 \dots n-1$ SONO TUTTI DET = 1

$\Rightarrow$ FATTORIZZAZIONE $\exists !$

COME LA TROVO? COME LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & -1 & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & & & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{L} & 0 \\ \hline w^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \hat{U} & y \\ \hline 0^T & \beta \end{array}\right]$$

DEVO RISOLVERE QUESTO SISTEMA

SE A É TRIANG. SUP/INF O DIAGONALE (ED É SEMPLICE) POSSO INDOVINARE $\hat{L}$ E $\hat{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{U}}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}}_{\hat{U}}$$

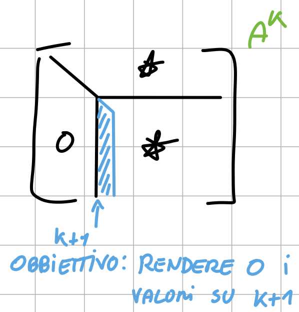
$$\begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} = \underset{= I}{\hat{L}} \cdot y \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[1\,0 \ldots 0] = w^T \hat{U} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{U}^T w = x^T$$

$$\beta = \underset{a_{nn}}{1} - w^T y$$

ANCORA FATTORIZZAZIONE

$$A^{k+1} = E^{k+1} A^k$$



$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{n-1}^{-1}$$

E = MATRICE ELEMENTARE DI GAUSS

DEF.

UNA MATRICE $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SI DICE "ELEMENTARE DI GAUSS" SE $\exists k \in \mathbb{N}$ E UN $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_k = 0$ T.C. :

$$E = I - \vec{v} e_k^T$$

$\to$ K-ESIMO VETTORE DELLA BASE CANONICA $e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$

EX.

$$k=2 \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad E_2 = I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (0\,1\,0 \dots 0) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & v_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -v_3 & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -v_n & & 1 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ:

1. LE MATRICI ELEMENTARI DI GAUSS SONO TRIANGOLARI INFERIORI CON 1 SULLA DIAGONALE

2. SONO INVERTIBILI E E^{-1} É ANCORA UNA MATRICE INVERTIBILE DI GAUSS

$$E = I - v e_k^T \qquad E^{-1} = I + v e_k^T$$

③ DATO $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k \neq 0 \Rightarrow \exists$ UNA MATRICE ELE. DI G. T.C.:

$$Ex = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = I - ve_k^T \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big\} \text{K-EL.}$$

CERCO IL $\vec{v}$ T.C. $Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Ex = (I - ve_k^T)x = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -v_{k+1} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -v_n & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ COLONNA K

$$(Ex)_i = x_i \quad \text{SE} \quad i \leq k$$

$$-v_{k+1} \cdot x_k + x_{k+1} = 0 \Rightarrow v_{k+1} = \frac{x_{k+1}}{x_k}$$

MOLTIPLICA SEMPRE x_K PERCHE TUTTI I $v_{K+1..}$ SONO NELLA COLONNA K

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{v_3} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{v_4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vdots$$

$$-v_n \cdot x_k + x_n = 0 \Rightarrow v_n = \frac{x_n}{x_k}$$

④ $E_k = I - ve_k^T \qquad E_h = I - we_h^T$

$v_1 = \ldots = v_k = 0 \qquad w_1 = \ldots = w_H = 0$

SE $H > K$: $\quad E_K \cdot E_H = I - ve_k^T - we_h^T$

⑤ Ey COSTA $O(n-k)$ FLOPS

$$z = Ey = (I - \vec{v}e_k^T)y = y - \vec{v}\underbrace{(e_k^T y)}_{\text{SCALARE} = y_k} = y - y_k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - y_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - y_k \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \boxed{\begin{matrix} y_{k+1} - y_k v_{k+1} \\ \vdots \\ y_n - y_k v_n \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

DEVO CALCOLARMI SOLO QUESTE COMPONENTI

$$z_i = \begin{cases} y_i & i \leq k \\ y_i - y_k v_i & i = k+1 \dots n \end{cases}$$

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ | & \ddots & | \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(k)} = E_k A^{(k-1)}$$

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(k-1)} & \cdots & a_{1,n}^{(k-1)} \\ 0 & \ddots & \vdots & & \\ | & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & & \\ | & & & a_{kk}^{(k-1)} \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & & & a_{n,k}^{(k-1)} \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

DIAGONALE

RIGA K

RIGA K+1

RIGA n

FINO A QUI MANTENGO

FACCIO DIVENTARE 0 NELLA COLONNA K-ESIMA CON $i = k+1 \dots n$

$$E_k = I - v e_k^T \qquad v = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ | \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{K-RIGHE} \\ \left.\begin{matrix} \frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \\ \vdots \\ \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ \vdots \\ \frac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \end{matrix}\right\} \text{n-K RIGHE} \end{pmatrix}$$

LASCIO 0

DEVO CALCOLARMELI DI NUOVO

FORMULE:

- $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$ SE $i \leq k$, $j = 1 \dots n$
- $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} = 0$ SE $i = k+1 \dots n$, $j = 1 \dots k-1$
- $a_{ik}^{(k)} = 0$ SE $i = k+1 \dots n$
- $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}$ SE $i = k+1 \dots n$, $j = k+1 \dots n$ CON $m_{ik}^{(k-1)} = \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$

Teorema

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A(1:k, 1:k)$ non singolare per $k = 1 \dots n-1$

sottomatrice quadrata   det $\neq 0$

$\Rightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ per $k = 1 \dots n-1$

non va bene   det $= 0$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ scambio righe

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad PA^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow PAx = Pb$$

Osservazione:

Se A invertibile $\Rightarrow$ é sempre possibile trovare P tale che:

$$PA = LU$$

Esiste anche $A = PLU \Leftrightarrow P^T A = LU$

serve a posizionare il pivot più grande sulla diagonale

$$|a_{pk}^{(k-1)}| = \max_{j=k \dots n} |a_{jk}^{(k-1)}|$$ $\Rightarrow$ scambio la riga p-esima con la k-esima

EX.

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{SE} \quad i=j \ , \ i \neq n \\ \beta & \text{SE} \quad i=1 \ , \ j=n \\ 1 & \text{SE} \quad i=n \ , \ 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & & & \beta \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

PER QUALI α, β A È FATT. LU?

$$A(1:k, 1:k) = \alpha I_k \qquad \text{CON } k = 1 \ldots n-1$$

$$\det(A(1:k,1:k)) = \alpha^k \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists! \text{ FATT. LU}$$

Esercitazione

Testo non l'ho capito ma è tipo: A fatt. LU con Gauss?

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j=1 \\ 2 & \text{se } i=j>2 \\ 1 & \text{se } j=i+1 \text{ o } j=i-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = E^{(1)} A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Per induzione dimostro che:

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ \hline & & & A_{n-k} \end{array}\right] \qquad A^{(k+1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ \hline & & & A_{n-k-1} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{(n-2)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad A^{(n-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \underbrace{E_1^{-1}}_{I + v e_i^T} E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} \qquad E_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & +1 & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

colonna i-esima

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \cdot \underbrace{\det(U)}_{=1} = 1$$

② DATO $K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$,

$$K_\infty(A) \le K_\infty(L)\, K_\infty(U) \quad ?$$

$$\|A\|_\infty = \|LU\|_\infty \le \|L\|_\infty \cdot \|U\|_\infty$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \|(LU)^{-1}\|_\infty = \|U^{-1}L^{-1}\| \le \|U^{-1}\|_\infty \cdot \|L^{-1}\|_\infty$$

$$\|A\|\|A^{-1}\| \le \|L\|_\infty \cdot \underbrace{\|U\|_\infty \cdot \|U^{-1}\|_\infty}_{K_\infty(U)} \cdot \|L^{-1}\|_\infty = K_\infty(U) \cdot \underbrace{\|L\|_\infty \cdot \|L^{-1}\|_\infty}_{K_\infty(L)}$$

$$\|A\|\|A^{-1}\| \le K_\infty(L) \cdot K_\infty(U)$$

EX.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE } i=j \\ -\frac{1}{2} & \text{SE } j-i=1 \\ \gamma_j & \text{SE } i=n, \quad j<n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\frac{1}{2} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

① SE $|\gamma_j| < \frac{1}{2}$ $\quad 1 \le j \le n-1 \Rightarrow A$ È INVERTIBILE

DIMOSTRA.

POSSO USARE LA PREDOMINANZA DIAGONALE PER COLONNE.

$1 > |-\frac{1}{2}| + |\gamma_j|$ PERCHÉ $|\gamma_j| < \frac{1}{2}$

$1 > |\gamma_1|$ SEMPRE

$1 > |-\frac{1}{2}|$ SEMPRE

✓

② A È FATT. LU $\forall \gamma_j$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2} \\ \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

PER LE CONDIZIONI SUFFICIENTI

$$\det\left(A(1:k)(1:k)\right) \neq 0 \quad \forall k = 1 \dots n-1 \Rightarrow \exists!\ LU$$

$$A(1:k)(1:k) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline \gamma_1 & \cdots & & \gamma_{n-1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & x^T & & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & y \\ & & -\frac{1}{2} & \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & \beta \end{array}\right]$$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_{n-1} \cdot y = y$

- $(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}) = x^T \cdot U_{n-1} = x^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} = U_{n-1}^T x \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \begin{cases} x_0 = \gamma_1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 = \gamma_2 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}x_{i-1} + x_i = \gamma_i \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}x_{n-2} + x_{n-1} = \gamma_{n-1} \end{cases}$$

- $1 = x^T \cdot y + \beta \Rightarrow \beta = 1 - x^T y$

$$x_i = \sum_{k=1}^{i} 2^{k-i} \cdot \gamma_k$$

RISOLUZIONE S.L. CON METODI ITERATIVI

$x^{(0)}$ VETTORE DI PARTENZA

$\{x^{(k)}\}$ SUCCESSIONE DI VETTORI

$\{x^{(k)}\} \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} x$ DI $Ax=b$

① $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \iff \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$

② PER IL TEOREMA DI EQUIVALENZA DELLE NORME POSSO SCEGLIERE QUALSIASI NORMA

③ CRITERI DI ARRESTO: (FISSATO TOL.)

- $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| <$ TOLLERANZA
- $\|Ax^{(k)} - b\| <$ TOL. (RESIDUO)

$A = M - N$ DET$(M) \neq 0$

É INVERTIBILE QUINDI POSSO DIVIDERE PER M^{-1} CHE FINIRÀ A SINISTRA

$Ax=b \to (M-N)x=b \to Mx - Nx = b \to Mx = b + Nx \to x = \underbrace{\boxed{M^{-1}N}}_{P}x + \underbrace{\boxed{M^{-1}b}}_{q \in \mathbb{R}^n}$

MATRICE DI ITERAZIONE $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Rightarrow x = Px + q$

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q & k \geq 0 \end{cases}$$

EX.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE SE $\{x^{(k)}\} \Rightarrow x$ (CONVERGE)

$\Rightarrow$ x É SOLUZIONE DEL SISTEMA $Ax = b$

TEOREMA ("FA LA COSA GIUSTA")

SE $\{x^{(k)}\}$ É CONVERGENTE $\Rightarrow \lim_{x \Rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ SOLUZIONE DI $Ax = b$,

CIOÉ $x = Px + q$

DIMOSTRAZIONE

$g(x) = Px + q \qquad g : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n \qquad g$ É CONTINUA

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x^{(k)}, x : \|x^{(k)} - x\| < \delta$

$$\Rightarrow \|g(x^{(k)}) - g(x)\| \leq \varepsilon$$

$$\|g(x^{(k)}) - g(x)\| = \|Px^{(k)} + q - Px - q\| = \|P(x^{(k)} - x)\| \leq \|P\| \|x^{(k)} - x\|$$

SE $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|P\|} \Rightarrow \|P\| \|x^{(k)} - x\| \leq \|P\| \delta = \|P\| \dfrac{\varepsilon}{\|P\|} = \varepsilon$

PERCHÉ É CONTINUA POSSO TIRARLA FUORI DAL LIMITE

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) = g\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}\right) = g(x)$$

TENDE A X

$\Rightarrow \quad x = Px + q = g(x)$ PUNTO FISSO PER $g(x)$

UN METODO ITERATIVO È:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = Px^{(k)} + q \end{cases}$$

DEF.

UN METODO ITERATIVO SI DICE CONVERGENTE SE LA SUCCESSIONE GENERATA PER UN QUALSIASI $x^{(0)}$ CONVERGE

EX.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{(k+1)} = Px^{(k)}$$

SE IL METODO CONVERGE $\Rightarrow$ DA TEOREMA $\lim(x^{(k+1)}) = x$: $x = Px + q$

$\Rightarrow \quad x = Px + q \quad \Rightarrow x - Px = q \Rightarrow (I - P)x = q$

$\det(I - P) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ SE $q = 0 \Rightarrow x^{(k+1)} = P^{(k+1)} \cdot x^{(0)}$

PRENDO $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & -2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-2)^k \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ NON CONVERGE, OSCILLA.

EX.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad x^{(k)} = P^{(k)} \cdot x^{(0)}$$

PRENDO x GENERICO:

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

TENDE A 0 PER $k \to \infty$
$\Rightarrow 0 \cdot \alpha = 0$, $0 \cdot \beta = 0$

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k}\alpha \\ \frac{1}{2^k}\beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CONVERGE

CONDIZIONI SUFFICIENTI:

TEOREMA

IL METODO È CONVERGENTE SE $\exists$ UNA NORMA MATRICIALE INDOTTA DA UNA NORMA VETTORIALE TALE CHE $\|P\| < 1$.

DIM.

$$e^{(k)} = x^{(k)} - x \qquad \text{VETTORE ERRORE}$$

BASTA DIMOSTRARE CHE SE $\exists\ \|P\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|e^{(k)}\| = 0$

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = Px^{k} + q - Px - q = P(x^{(k)} - x) = Pe^{(k)} = P(Pe^{(k-1)})$$

$$= P^{k-1} e^{(0)}$$

SIA $\|\cdot\|$ LA NORMA VETT. T.C. $\|P\| < 1$

RIPETTO K VOLTE $\Rightarrow \|P\| \cdot \|P\| \cdot \ldots \|P\|$

$$\|e^{(k+1)}\| = \|P^{k+1} e^{(0)}\| \leq \|P^{k+1}\| \cdot \|e^{(0)}\| \leq \|P\| \cdot \|P^k\| \cdot \|e^{(0)}\| \leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|$$

$\|P\| < 1$ PER IPOTESI

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \|e^{(k+1)}\| \leq \|P\|^{k+1} \|e^{(0)}\|$$

FACCIO $\lim_{k \to \infty}$:

$$0 \leq \|e^{(k+1)}\| \leq 0 \cdot \|e^{(0)}\| = 0$$

$$\Rightarrow \|e^{(\infty)}\| = 0 \qquad \text{C.V.D.}$$

CONDIZIONI NECESSARIE

TEOREMA

SE IL METODO È CONVERGENTE $\Rightarrow \rho(P) < 1$

RAGGIO SPETTRALE

TUTTI GLI AUTOVALORI DI P SONO IN MODULO < 1

DIM.

SE $|\det(P)| \geq 1 \Rightarrow$ ALMENO UN AUTOVALORE DI P È IN MODULO ≥ 1

$\Rightarrow$ NON CONVERGE

$\lambda : |\lambda| = \rho(P)$ E v L'AUTOVETTORE T.C. $Pv = \lambda v$, $v \neq 0$

SE IL METODO È CONVERGENTE $\Rightarrow$ CONVERGE $\forall x^{(0)}$

MA SE $x^{(0)} = x + v \qquad x = A^{-1} b$

$e^{(k+1)} = P^{k+1} e^{(0)} \qquad e^{(0)} = x^{(0)} - x = x + v - x = v$

$\downarrow 0$
PER IPOTESI DEVE CONV.

$$\Rightarrow \; e^{(k+1)} = P^{k+1} v = \lambda^{k+1} v$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{k \to \infty} \|e^{k+1}\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda^{k+1} v\| = \underbrace{\|v\|}_{\neq 0} \lim_{k\to\infty} |\lambda|^{k+1}$$

$|\lambda| < 1$

Risoluzione S.L. con metodi iterativi 2

Condizione suff.

Se $\exists$ una norma M.I. t.c. $\|P\|<1 \Rightarrow$ metodo convergente

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x^{(k+1)} = P x^{(k)} + q \end{cases}$$

Condizione necessaria

Se il metodo é convergente $\Rightarrow \rho(P)<1$

---

① se $|\det(P)| \geq 1 \Rightarrow$ metodo non converge

$\quad = |\prod \lambda_i|$ produttoria

② se $|\text{Traccia}(P)| \geq n \Rightarrow$ metodo non converge

$\quad = |\sum \lambda_i|$ sommatoria

Lemma:

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho(A)<1$

$\Rightarrow \exists$ una norma matriciale indotta t.c. $\|A\|<1$

Teorema.

Un metodo iterativo é convergente $\Leftrightarrow \rho(P)<1$

Dim.

① Dimostrazione condizione necessaria lezione 15

② Se $\rho(P)<1$ usando il lemma so che esiste una norma M.I. t.c.

$\|P\|<1 \Rightarrow$ verificate le ipotesi per la condizione suff.

METODO DI JACOBI E DI GAUSS-SEIDEL

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} D & & -U \\ & \ddots & \\ -L & & \end{bmatrix}$$

JACOBI

$$M = D \qquad N = L + U \quad \Rightarrow \quad A = M - N \qquad J = \underset{M^{-1}}{D^{-1}}\,(\underset{N}{L+U})$$

AFFINCHÉ IL METODO SIA APPLICABILE OCCORRE CHE:

$$a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} = J x^{(k)} + D^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left((L+U)x^{(k)} + b\right) \quad \Rightarrow \quad D x^{(k+1)} = L x^{(k)} + U x^{(k)} + b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{11} x_1^{(k+1)} = 0 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} + b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}$$

JACOBI IN COMPONENTI

GAUSS - SEIDEL

D-L È INVERTIBILE PERCHÉ È TRIANGOLARE E $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i=1...n$

$$M = D - L \qquad N = U \qquad G = (D-L)^{-1} U$$

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + (D-L)^{-1} b$$

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1} (U x^{(k)} + b) \Rightarrow (D-L) x^{(k+1)} = U x^{(k)} + b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ -a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{11} x_1^{(k+1)} = b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)}$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)}$$

GAUSS-SEIDEL IN COMPONENTI

CONDIZIONI DI ARRESTO

OBBIETTIVO: $\| x^{(k+1)} - \underline{\underline{x}} \| < TOL.$ (TOLLERANZA; x ? NON LO CONOSCO)

- $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < TOL.$
- $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k)} \|} < TOL.$
- $\| A x^{(k+1)} - b \| < TOL$
- $\dfrac{\| A x^{(k+1)} - b \|}{\| x^{(k+1)} \|}$

NON ABBIAMO LA GARANZIA CHE SE UNO DI QUESTI È VERIFICATO

$\Rightarrow \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq TOL$

SAPPIAMO CHE:

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x = P e^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} - x^{(k)} = \overbrace{x^{(k+1)} - x}^{e^{(k+1)}} - \overbrace{(x^{(k)} - x)}^{e^{(k)}} = P e^{(k)} - e^{(k)} = (P - I) e^{(k)}$$

SE IL METODO È CONVERGENTE $\Rightarrow \rho(P) < 1 \Rightarrow (P - I)$ INVERTIBILE

$$e^{(k)} = (P - I)^{-1} \cdot (x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

$$\| e^{(k)} \| = \| (P - I)^{-1} \cdot (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \| \leq \| (P - I)^{-1} \| \cdot \| (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \| \leq \| (P - I)^{-1} \| \cdot TOL.$$

TEOREMA

SIA $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, SE A É A PREDOM. DIAGONALE

1) A É INVERTIBILE

2) I METODI DI J E GS SONO APPLICABILI ($a_{ii} \neq 0$)

3) I METODI DI J E GS SONO CONVERGENTI

DIM.

1). $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $\underset{\text{ZERO}}{0}$ NON APPARTIENE A NESSUN CERCHIO

$\Rightarrow$ NO AUTOVALORE $\Rightarrow$ NON SINGOLARE

$$|0 - a_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

2) $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0 \quad \Rightarrow a_{ii} \neq 0$ PERCHÉ $a_{ii} > 0$

3) P MATRICE DI ITERAZIONE $\begin{cases} P = J \\ P = G \end{cases}$

IL METODO É CONV. SE $\rho(P) < 1 \Rightarrow \forall \lambda : |\lambda| < 1$

$\det(P - \lambda I) = 0$ SE λ É AUT. VAL DI P

$$0 = \det(M^{-1}N - \lambda \overset{M^{-1}M}{I}) = \det(-M^{-1}(\lambda M - N)) = \underset{\neq 0}{\det(-M^{-1})} \cdot \det(\lambda M - N)$$

$\frac{1}{\det(M)}$

QUINDI $\forall \lambda$ DI P VALE CHE $H = \lambda M - N$ É SINGOLARE

PER ASSURDO ASSUMIAMO CHE $\exists \lambda$ DI P T.C. $|\lambda| \geq 1$

$H = \lambda M - N$ NEL CASO DI J E GS SOTTO LE IPOTESI

$|\lambda| \geq 1$ E A A PRED. DIAG.

$\Rightarrow$ RISULTA A SUA VOLTA DI PRED. DIAG.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$$|\lambda||a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

PER GS

$$H = \lambda M - N = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ \lambda a_{n1} & & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ RISULTA QUINDI CHE H É A PRED. DIAG.

$$|\lambda a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$\Rightarrow$ H É INVERTIBILE $\Rightarrow$ É ASSURDO!

PER J

$$H = \lambda M - N = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|\lambda||a_{ii}| > |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \geq \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO PRED. DIAG. NEL CASO DI J

$\Rightarrow$ H NON SINGOLARE $\Rightarrow$ ASSURDO!

$$\Rightarrow \quad |\lambda| < 1$$

ESERCITAZIONE

COMPITO 21/01/19

$$A_n = I + x e_n^T + e_n x^T \qquad x = [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

1) $\|x\|_1 < 1 \Rightarrow$ METODO G.S. CONVERGENTE ?

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ IN QUESTO CASO $\Rightarrow$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|$ PERCHÉ $x_n = 0$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} [0 \dots 0\ 1] + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [x_1 \dots x_{n-1}\ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

SE $\|x\|_1 < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| < 1 \Rightarrow |x_i| < 1$ $\quad A$ É A PRED. DIAGONALE

QUINDI $1 > |x_1|$, $1 > |x_{n-1}|$, $1 > \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|$ ULTIMA RIGA

$\Rightarrow$ IL METODO DI GS É CONVERGENTE PERCHÉ A É A PRED. DIAG.

RIGUARDARE!

2) $\|x\|_2 < 1 \Leftrightarrow$ METODO G.S. CONVERGENTE ? $\rho(A) < 1$ COND. NEC. E SUFF.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ x_1 \cdots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & & -x_1 \\ & & \vdots \\ & & -x_{n-1} \\ & & 0 \end{bmatrix} \qquad G = M^{-1} N$$

$$G = M^{-1}N = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ x_1 \cdots & x_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{n-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}}_{n-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} ? \\ ? \\ \vdots \\ ? \end{matrix} \end{bmatrix}}_{n-1}$$

TT 0 XKÉ MOLTIPLICO LE PRIME n-1 COLONNE (QUALSIASI SIA IL VALORE DI M^{-1}) PER 0

COME CALCOLO LA COLONNA n ?

$$M^{-1}\begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = g \iff Mg = -x$$

$$M = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \hat{x}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[x_1 \ldots x_{n-1}]$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= M_{11}\cdot g_1 + M_{12}\cdot g_2 + \ldots + M_{1n}\cdot g_n \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= M_{n-1\,1}\cdot g_1 + \ldots + M_{n-1\,n}\cdot g_n \end{aligned}}$$

MATRICE X VETTORE = VETTORE

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= -x_1 \\ g_2 &= -x_2 \\ &\vdots \\ g_{n-1} &= -x_{n-1} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \end{bmatrix} = -\hat{x}$$

$$\hat{x}_1^T g_1 + \hat{x}_2^T g_2 + \ldots + \hat{x}_{n-1}^T g_{n-1} + g_n = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}^T \underbrace{[g_1 \ldots g_{n-1}]}_{= -\hat{x}} + g_n = 0$$

$$\Rightarrow g_n = +\hat{x}^T\hat{x}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_{n-1} \\ \underbrace{\hat{x}^T\hat{x}}_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

G HA COME λ 0 CON MOLTEPLICITÀ n-1 E $+\hat{x}^T\hat{x}$ CON MOLT. 1

NELLE MATRICI TRIANGOLARI SUP/INF, i λ SONO i VALORI SULLA DIAGONALE

$$\rho(G) = \underline{\hat{x}^T\hat{x}} = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2 = \|\hat{x}\|_2^2$$

$$[x_1\ x_2 \cdots x_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \text{RIGA X COL.} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = \|x\|_2^2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2}$$

POICHÉ $\rho(G) = \|x\|_2^2$ MA $\|x\|_2 < 1 \iff \|x\|_2^2 < 1 \Rightarrow$ <u>CONVERGENTE!</u>

3) $\|X\|_2 \leq \|X\|_1$ VALE? 3.1) $\|X\|_1 \leq \|X\|_2$ NON VALE? $\forall x$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|X\|_1$$

EQUIVALENTE

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_n|)^2$$

VERO PERCHÉ HO I VAL. ASS. E POI SI AGGIUNGONO I DOPPI PRODOTTI A DX CHE SONO +

3.1) $\|X_1\| \leq \|X\|_2$ BASTA UN CONTROESEMPIO PER DIRE CHE NON VALE

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|X\|_1 = 1+1=2$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

NON È GIÀ PIÙ VERO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & 1 & \ddots & \alpha \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in R$$

1) PER QUALI α A È A PRED. DIAG.?

NESSUN VALORE DI α PERCHÉ, SIA PER RIGA SIA PER COLONNA, (ULTIMA RIGA, PRIMA COLONNA) ABBIAMO SEMPRE $a_{ii} = 1 < \sum_{\dots}^{\dots} |a_{ij}| = n$

E IN GENERALE DALLE RIGHE DA $2 \dots n$ E COLONNA DA $1 \dots n-1$.

2) METODO GS (APPLICABILITÀ E CONVERGENZA)

APPLICABILE PERCHÉ $a_{ii} \neq 0 \Rightarrow a_{ii} = 1$ ✓

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & & \\ \vdots & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & -\alpha \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0$ $\#1$

$\lambda = \alpha$ $\#n-1$

$\rho(G) = |\alpha|$

METODO CONVERGENTE $\iff |\alpha| < 1$

METODO DELLE POTENZE E PAGERANK

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$Ax = \lambda x$ AUTOVETTORE DESTRO

$y^H A = \lambda y^H$ AUTOVETTORE SINISTRO $y \in \mathbb{C}^n$, $y \neq 0$

METODO DELLE POTENZE

ASSUMIAMO A DIAGONALIZZABILE:

DIAGONALIZZABILE: $\exists$ UNA MATRICE X DI CAMBIAMENTO DI BASE INVERTIBILE X^{-1} CHE CI PORTA A IN FORMA DIAGONALE D

$X^{-1} A X = D \Rightarrow$ MATRICE DIAGONALE

$AX = XD$

$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \overset{X}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \overset{X^{-1}}{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ASSUMIAMO ANCHE: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}}$ $\quad X^{-1} A X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{4} & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0 \Rightarrow$ L'AUTOVETTORE DI MODULO MASSIMO É UNICO.

$v^{(1)} = A v^{(0)}$

$v^{(2)} = A v^{(1)} = A(A v^{(0)}) = A^2 v^{(0)}$

$v^{(k+1)} = A^{k+1} v^{(0)}$

SE HO QUESTE IPOTESI $v^{(k)}$ $\underbrace{\text{PUNTA NELLA DIREZIONE}}_{\text{MI INDIVIDUA L'AUTOSPAZIO}}$ DI $x^{(1)}$

DIM.

$\exists\, y \in \mathbb{C}$, $y = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ VOGLIO SCRIVERE $v^{(0)}$ COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE.

y É IL VETTORE DELLE COMPONENTI

$$v^{(0)} = \overset{\text{MATRICE}}{X}\, y \;\text{-> VETTORE} = \psi_1 x^{(1)} + \psi_2 x^{(2)} + \dots + \psi_n x^{(n)}$$

$$\left[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right] \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \psi_1 x^{(1)} + \psi_2 x^{(2)} + \dots + \psi_n x^{(n)}$$

$$\Rightarrow \quad A v^{(0)} = A X y$$

$$= A(\psi_1 x^{(1)} + \dots + \psi x^{(n)})$$

$$= \psi_1 A x^{(1)} + \dots + \psi_n A x^{(n)}$$

$$= \psi_1 \lambda_1 x^{(1)} + \dots + \psi_n \lambda_n x^{(n)}$$

$A x^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$ -> MATRICE x AUTOVETTORE RESTITUISCE UN VETTORE CHE É ESATTAMENTE L'AUTOVETTORE MOLTIPLICATO PER LO SCALARE λ

$$AX = XD \quad \Rightarrow \quad v^{(1)} = A v^{(0)} = A X y = X D y$$

$$\Rightarrow v^{(2)} = A v^{(1)} = A X D y = X D \cdot D y = X D^2 y$$

AL PASSO K-ESIMO:

$$v^{(k)} = X D^k y = \left[\, x^{(1)} \,\middle|\, x^{(2)} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, x^{(n)} \right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot y$$

$$= \psi_1 \lambda_1^k x^{(1)} + \psi_2 \lambda_2^k x^{(2)} + \dots + \psi_n \lambda_n^k x^{(n)}$$

$$= \lambda_1^k \left(\psi_1 x^{(1)} + \psi_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x^{(2)} + \dots + \psi_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x^{(n)} \right)$$

AVENDO CHE $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \quad \text{PER } i = 2 \dots n$$

$$v^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} \underbrace{\lambda_1^k \psi_1 x^{(1)}}_{\text{VETTORE NELLA DIREZIONE DI } x^{(1)}} \quad \square$$

PROBLEMI:

$|\lambda_1| > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^k$ DIVERGE E POTREI AVERE OVERFLOW

$|\lambda_1| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^k$ VA A ZERO

$|\lambda_1| = 1 \quad \Rightarrow$ TUTTO OK!

PER I CONTI SU MACCHINA.

VOGLIO TOGLIERE L'INFLUENZA DI λ_1: DIVIDO PER $\frac{1}{\lambda_1^k}$

$\Rightarrow v^{(k)'} = \frac{1}{\lambda_1^k} A^k v^{(0)}$ POICHÉ $v^{(0)} = Xy$ CON $y = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$

$$= \frac{1}{\lambda_1^k} A^k X y = \frac{1}{\lambda^k} \boxed{XD^k y} = \frac{1}{\lambda_1^k} \cdot \lambda_1^k \left(\psi_1 x^{(1)} + \psi_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x^{(2)} + \dots + \psi_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x^{(n)} \right)$$

$$= \psi_1 x^{(1)} + \underbrace{\psi_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x^{(2)} + \dots + \psi_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x^{(n)}}_{0 \text{ PER } k \to \infty}$$

$\lambda_1 > \lambda_i$

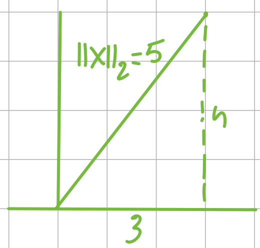
$v^{(k)}$

$\Rightarrow v^{(k)'} = \psi x^{(1)}$ PER $k \to \infty$

MA NOI NON ABBIAMO λ_1^k. QUINDI?

SI NORMALIZZA AD OGNI PASSO.

$x = (3,4)$



DISTANZA DA (0,0)

$v^{(k+1)} = A v^{(k)}$

$v^{(k+1)'} = \frac{v^{(k+1)}}{\|v^{(k+1)}\|_2}$ OBBLIGO TUTTI I VETTORI AD AVERE $\|\cdot\|_2 = 1$ = LUNGHEZZA 1

$\lim_{k \to \infty} \frac{v^{(k)T} A v^{(k)}}{v^{(k)T} v^{(k)}} = \lambda_1$ QUOZIENTE DI REILEIGH (Rayleigh forse), AUTOVALORE PIÙ GRANDE

E PER IL PIÙ PICCOLO?

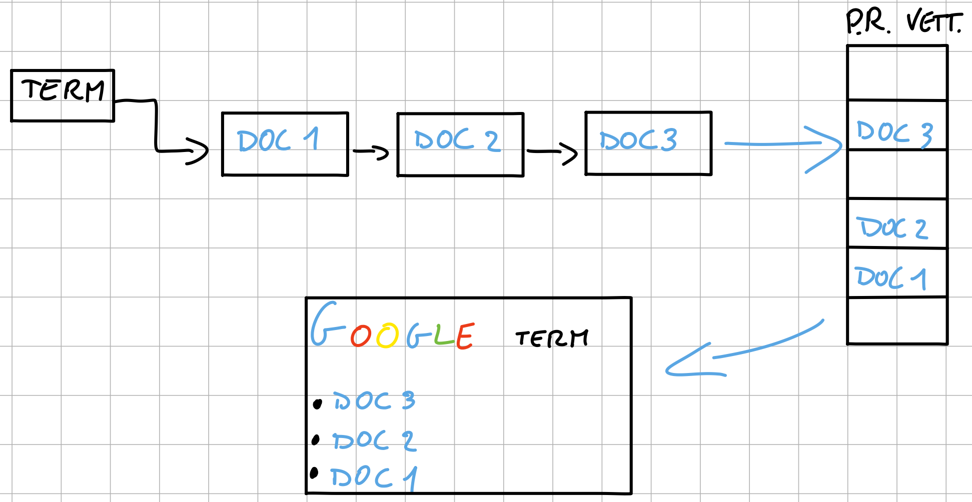
$\downarrow$

Variante di Wieland

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$ Gli autoval. di $A^{-1} = \frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \dots \geq \frac{1}{|\lambda_1|}$

$$v^{(k+1)} = A^{-1} v^{(k)} \iff \underbrace{A}_{LU} v^{(k+1)} = v^{(k)}$$

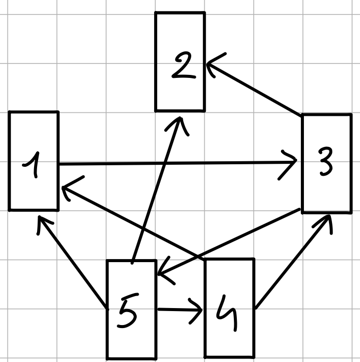
PageRank



Una pagina è importante se viene votata da pagine importanti.

EX.

Il mio "web" ha solo 5 pagine



$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di adiacenza

π_i - importanza (PageRank) della pagina i $\qquad \pi_j = \sum_{i \in \mathcal{I}(j)} \frac{\pi_i}{\text{outdegree}(i)}$

EX.

$$\pi_1 = \frac{\pi_4}{2} + \frac{\pi_5}{3} \qquad \pi_4 = \frac{\pi_5}{3}$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_3}{2} + \frac{\pi_5}{3} \qquad \pi_5 = \frac{\pi_3}{2}$$

$$\pi_3 = \frac{\pi_1}{1} + \frac{\pi_4}{2}$$

π PUÒ ESSERE CALCOLATO CON IL METODO DELLE POTENZE

① SI PASSA DA G A P

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

DIVIDO PER L'OUTDEGREE DI OGNI NODO. # ARCHI USCENTI.

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad 0 \leq p_{ij} \leq 1$$

INTERPRETIAMO COME PROBAB.

RANDOM SURFER MODEL

PER CALCOLARE π POSSO METTERE SU UN METODO ITERATIVO:

DATO $\pi^{(0)}$

FOR $K=0,1\dots$

$$\pi_j^{(k+1)} = \sum_{i \in \mathcal{J}(j)} \pi_i^{(k)} \cdot p_{ij} \qquad \text{CON} \quad p_{ij} = \frac{1}{\text{OUTDEG}(i)}$$

$$\pi_j^{(k+1)} = P^T \pi^{(k)}$$

METODO DELLE POTENZE

π É L'AUTOVETTORE DESTRO DI P^T RELATIVO A λ_1

HP: - DIAGONALIZZABILITÀ

- $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$
- $\pi_i^{(0)} \geq 0$ PERCHÉ I VALORI DI π SONO PUNTEGGI DI RANKING

OCCORRE FARE ALCUNI AGGIUSTAMENTI PER GARANTIRE QUESTE PROPRIETÀ

① SE APPLICO GERSHGORIN ABBIAMO CHE POICHÉ $p_{ii} = 0$

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|p_{ij}|}_{=1} \right\}$$

CENTRO = 0 , RAGGIO = 1 / 0 SE RIGHE NULLE $\Rightarrow$ $|\lambda| \leq 1$

SE P NON HA RIGHE NULLE $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ $\Rightarrow$ $Pe = 1e$

POSSO FORZARE P AD ESSERE STOCASTICA $(Pe = e)$

$$\hat{P} = P + \frac{1}{n} d e^T \qquad d_i = \begin{cases} 1 & \text{SE OUTDEG}(i) = 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

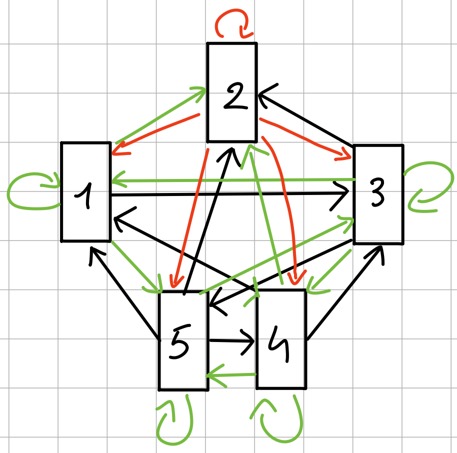
AUTOVETTORE $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \hat{P} e = 1 e$ $\hat{P}$ STOCASTICA PER RIGHE

$\hat{P}$ HA COME AUTOVALORE 1

$$\Rightarrow \pi^{(k+1)} = \hat{P}^T \pi^{(k)}$$

INTRODUCIAMO DEGLI ARCHI ARTIFICIALI PER RENDERE IL GRAFO FORTEMENTE CONNESSO (CI SERVE PER GARANTIRE $\lambda = 1$)



GLI ARCHI ARTIFICIALI SONO SEGUITI SOLO CON UNA PROBABILITÀ $1-\alpha$

NODI DANGLING (EX-RIGHE DI TUTTI 0 CHE VENGONO INSERITI)

$$\bar{P} = \alpha \hat{P} + (1-\alpha)\frac{ee^T}{n}$$

PROBABILITÀ CON LA QUALE SEGUO I LINK

PROB. $1-\alpha$ CHE VADO IN QUALSIASI ALTRO NODO DEL GRAFO

- $\bar{P}$ È STOCASTICA $\Rightarrow \bar{P}e = \alpha \hat{P}e + (1-\alpha)\frac{ee^T}{n}e = \alpha e + (1-\alpha)\frac{e}{n}\cdot n = 1e$

$\hat{P}e = e$

$e^Te = n$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+1 = 2 = n$

$\Rightarrow$ QUINDI 1 È AUTOVALORE

- $\bar{P}$ È IRRIDUCIBILE PERCHÉ IL GRAFO CHE INDICA È FORTEMENTE CONNESSO QUINDI:

  1 È L'UNICO AUTOVALORE DI MODULO MASSIMO.

- NON HO BISOGNO DI NORMALIZZARE PERCHÉ $\lambda_1 = 1$!

$$\pi^{(k+1)} = \bar{P}^T \pi^{(k)}$$

$\bar{P}$ È TROPPO GROSSA PER LAVORARCI SOPRA.

C'È UN MODO PER USARE QUESTA FORMULA CON I DATI DI P.

SOLUZIONI EQUAZIONI NON LINEARI

$p(x)=0 \qquad f(x)=0 \qquad \underbrace{Ax-b}_{f(x)}=0$

PER CALCOLARE i λ DI UNA MATRICE DEVO TROVARE GLI ZERI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO:

$Ax=\lambda x \qquad x\neq 0$

$p(\lambda) = \det(A-\lambda I)=0$

VOGLIO CALCOLARE GLI ZERI DI UN POLINOMIO $p(x)$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

IL CALCOLO DEGLI ZERI DI $p(x)$ SI RICONDUCE AL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE "SPECIALE" DETTA COMPANION

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

GLI AUTOVALORI DI C SONO GLI ZERI DI $p(x)=0$

PER CALCOLARE GLI AUTOVALORI GENERALMENTE NON SI PASSA AL POLINOMIO CARATTERISTICO, MA SI COSTRUISCE UNA SUCCESSIONE DI MATRICI SIMILI

$$\begin{cases} A^{(0)} = A \\ A^{(k+1)} = S^{(k)-1} A^{(k)} S^{(k)} \end{cases} \qquad A^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} T$$

TRIANGOLARE COSÌ i λ SONO SULLA DIAGONALE

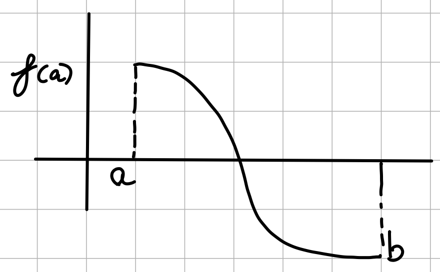
$$A^{(0)} = L^{(0)} U^{(0)} \Rightarrow L^{(0)-1} A^{(0)} = \underbrace{L^{(0)-1} L^{(0)}}_{I} U^{(0)}$$

$$A^{(1)} = L^{(0)-1} A^{(0)} L^{(0)} = U^{(0)} L^{(0)} = L^{(1)} U^{(1)}$$

$$A^{(k)} = U^{(k)} L^{(k)}$$

APPROSSIMAZIONE DEGLI ZERI DI FUNZIONE

$$f: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(\alpha) = 0 \quad \alpha \in (a,b)$$



- CAMBIO DI SEGNO: $f(a) \cdot f(b) < 0$
- f CONTINUA

$\exists$ UNA SOLUZIONE SE MONOTONA

METODI DI ITERAZIONE FUNZIONALE

$$f(x) = 0 \rightsquigarrow g(x) - x = 0$$

SONO EQUIVALENTI SE:

$$f(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = \alpha$$

α É DETTO PUNTO FISSO PER $g(x)$

EX.

$f(x)$: $\sin x - x = 0 \Rightarrow \sin x + 2x - 2x - x = 0$

$= \sin x + 2x - 3x = 0 \rightarrow g(x) = \dfrac{\sin x + 2x}{3}$

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

LEMMA

SE g È $\overset{\text{CONTINUA}}{C^0}([a,b])$ E $x_k \in [a,b]$, $\forall k > 0$

CON $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha \implies \alpha = g(\alpha)$

DIM.

g DEL LIMITE
PERCHÉ g È CONTINUA

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = g(\alpha)$$

DEF.

SIA $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\alpha = g(\alpha)$, $\alpha \in (a,b)$

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$$

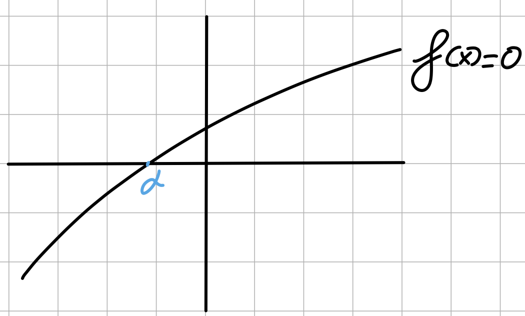
IL METODO È CONVERGENTE LOCALMENTE SE:

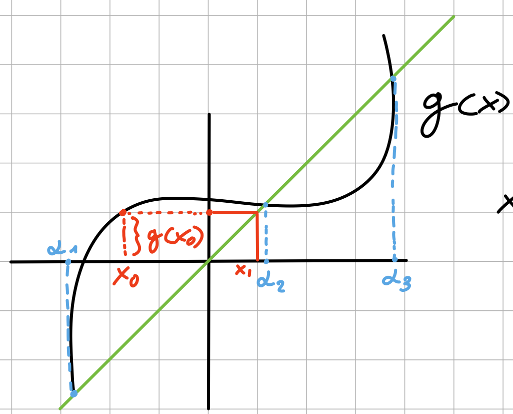
- $\exists \rho > 0 : \forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

① $x_k \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

② $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$

$x = g(x)$ $\qquad f(x) = 0$





$x_1 = g(x_0)$

TEOREMA DEL PUNTO FISSO:

SIA $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in C^{1}([a,b])$ (CONTINUA, DERIVABILE CON DERIVATA CONTINUA)

$g(\alpha)=\alpha$, $\alpha\in(a,b)$

SE $\exists\, \rho>0 : |g'(x)|<1 \quad \forall x\in(\alpha-\rho,\alpha+\rho)$

$\Rightarrow \forall\, x_0 \in [\alpha-\rho, \alpha+\rho]$

VALE: 1) $x_k\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$

2) $\lim_{x\to\infty} x_k=\alpha$

DIM.

CONTINUA PER HP

$$\lambda = \max_{x\in[\alpha-\rho,\,\alpha+\rho]}|g'(x)|$$

DIMOSTRIAMO: SE VALE, ABBIAMO LE 2 TESI:

$$|x_k-\alpha|\le\lambda^k\rho \quad \forall k\ge 0$$

- $\underbrace{|x_k-\alpha|\le\overset{\lambda<1}{\lambda^k\rho}\le\rho}$ $\Rightarrow$ $x_k\in[\alpha-\rho,\alpha+\rho]$

- $\underset{\downarrow\, 0}{0}\le\underset{\Downarrow\, 0}{|x_k-\alpha|}\le\underset{\downarrow\, 0}{\lambda^k\rho}$ $\Rightarrow$ PER I CARABINIERI

PASSIAMO A DIMOSTRARE $|x_k - \alpha| \leq \lambda^k \rho$ PER INDUZIONE SU k.

- $k = 0$ $\quad |x_0 - \alpha| \leq \lambda^0 \rho = \rho$ VERO PER IPOTESI XKÉ $x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

- ASSUMIAMO CHE LA DISUGUAGLIANZA VALGA PER k E DIMOSTRIAMO PER $k+1$

$$|x_{k+1} - \alpha| = \underbrace{|g(x_k) - g(\alpha)|}_{\text{USO LAGRANGE}} = |g'(\eta_k)(x_k - \alpha)| = |g'(\eta_k)|\,|x_k - \alpha| \leq |g'(\eta_k)| \cdot \lambda^k \rho \leq \lambda \cdot \lambda^k \rho$$

HP. $|\eta_k - \alpha| \leq |x_k - \alpha| \leq \rho$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda^{k+1} \rho$$

COROLLARIO

SIA $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a, b])$, $g(\alpha) = \alpha$, $\alpha \in (a, b)$

SE $|g'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ METODO LOCALMENTE CONVERGENTE

DIM.

$h(x) = |g'(x)| - 1 \quad , h \in C^0([a, b])$

$h(\alpha) = |g'(\alpha)| - 1 < 0$

- PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO $\Rightarrow \exists\, \rho > 0$ T.C.:

$\forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $h(x) < 0$ CIOÉ $|g'(x)| < 1$

EX.

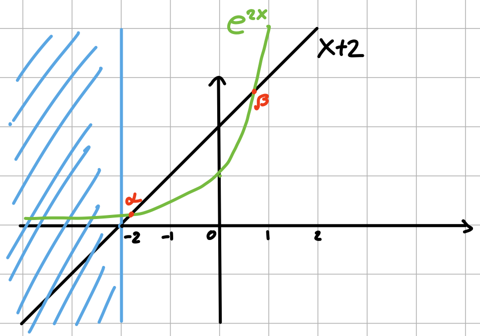
$$f(x) = \sqrt{x+2} - e^x = 0 \qquad x \geq -2$$

① QUANTE SOLUZIONI $f(x) = 0$

② STUDIARE CONVERGENZA $x_{k+1} = g(x_k)$ CON $g(x) = \frac{1}{2} \log(x+2)$

1) $\sqrt{x+2} - e^x = 0 \qquad x \geq -2$

$\Rightarrow \sqrt{x+2} = e^x \Rightarrow x+2 = e^{2x}$



2 SOLUZIONI: $-2 < \alpha < -1$
$0 < \beta < 1$

$$\log(x+2) = 2x \iff x = \frac{1}{2} \log(x+2)$$

METODO DELLE TANGENTI

$x_{k+1} = g(x_k)$ PER DETERMINARE I PUNTI FISSI DI $x = g(x)$

SE $\exists \rho : |g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$

SUCCESSIONE x_k

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases} \Rightarrow \{x_k\} \to \alpha$$

ORDINE DI CONVERGENZA

SIA $\{x_k\}$ CONVERGENTE A α PUNTO FISSO PER $g(x)$, SE $x_k \neq \alpha$

SE $\exists \; p \geq 1$ T.C. $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = \gamma$ CON $\begin{cases} 0 < \gamma \leq 1 & \text{SE } p = 1 \\ \gamma > 0 & \text{SE } p > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ SI DICE CHE LA SUCCESSIONE CONVERGE CON ORDINE p

$$|x_{k+1} - \alpha| \simeq \gamma \cdot |x_k - \alpha|^p$$

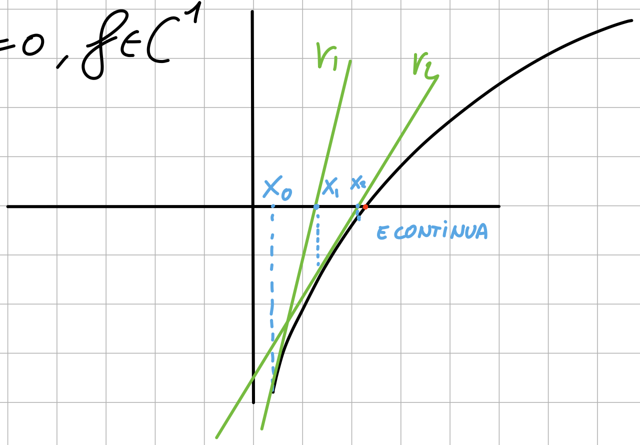
SE $p = 1$ E $0 < \gamma < 1$ $\Rightarrow$ CONVERGENZA LINEARE

SE $p = 1$ E $\gamma = 1$ $\Rightarrow$ CONVERGENZA SUBLINEARE !!

SE $p = 2$ $\Rightarrow$ CONVERGENZA QUADRATICA

METODO DELLE TANGENTI

$f(x) = 0, f \in C^1$



MI VOGLIO CALCOLARE LA RETTA TANGENTE A $f(x)$ CHE PASSA DA $(x_0, f(x_0))$

LA RETTA INCONTRERÀ L'ASSE DELLE X IN X_1 E RIPETO IL PROCEDIMENTO

$$r_1 \Rightarrow \quad y = mx + q \quad \rightarrow \quad y \overbrace{- f(x_0)}^{-q} = \underbrace{f'(x_0)}_{m = \text{DERIVATA}} (\overset{x}{x} - x_0)$$

VOGLIO TROVARE X_1:

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{k+1} = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{g(x)} \end{cases} \qquad f'(x_k) \neq 0}$$

METODO DELLE TANGENTI (NEWTON)

$\alpha : f(\alpha) = 0$ È DETTA RADICE SEMPLICE PER UNA CERTA FUNZIONE $f \in C^1([a,b])$ SE $\alpha \in [a, b]$ E $f'(\alpha) \neq 0$

EX.

$f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2) \qquad \alpha = 2, \ \alpha = -2$ RADICI SEMPLICI

$f'(x) = 2x \qquad f'(2) \neq 0 \quad f'(-2) \neq 0$

$f(x) = (x-2)^2 \qquad \alpha = 2$

$f'(x) = 2(x-2) = 0$ PER $\alpha = 2$ CIOÉ $f'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ NON É SEMPLICE

IL METODO DELLE TANGENTI É LOCALMENTE CONVERGENTE NEL CASO DI APPROSSIMAZIONI DI RADICI SEMPLICI E LA CONVERGENZA É QUADRATICA.

TEOREMA

DERIVABILE 2 VOLTE CON DERIVATA 2 CONTINUA

SIA $f : [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b])$, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in (a,b)$

SE α É SEMPLICE $(f'(\alpha) \neq 0)$ ALLORA:

① IL METODO $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ É LOCALMENTE CONVERGENTE AD α.

LOCALMENTE CONVERGENTE:

$\exists \rho > 0$ T.C. $\forall x_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho] = I_\alpha$

- $\{x_k\} \in I_\alpha$
- $\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$

② SE $x_k \neq \alpha$, $\forall k \geq 0 \Rightarrow$ LA CONVERGENZA É ALMENO QUADRATICA:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \ell \in \mathbb{R}$$

DIM.

(1) Poiché $f'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow f'(\alpha)$ SARÀ >0 / <0, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

$$\Rightarrow \exists\, h>0 : \forall x \in [\alpha-h, \alpha+h] \quad f'(x)\neq 0$$

MI DEFINISCO g COME:

$$\begin{cases} g : [\alpha-h, \alpha+h] \to \mathbb{R} \\ g(x) = x - \dfrac{f(x)}{\underbrace{f'(x)}_{\neq 0}} \end{cases}$$

BEN DEFINITA SULL'INTERVALLO

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$g \in C^1([\alpha-h, \alpha+h]) \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f''(x)\cdot f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= 1 - \frac{(f'(x))^2}{(f'(x))^2} + \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$= 1 - 1 + \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = + \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

$$g'(\alpha) = \frac{\overset{0}{\overset{\parallel}{f(\alpha)}}\cdot f''(\alpha)}{\underset{0\neq}{(f'(\alpha))^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ HO CONVERGENZA LOCALE PER IL COROLLARIO DEL TEOREMA DEL PUNTO FISSO

(2)

$$\lim \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2}$$

SVILUPPO CON TAYLOR SU $f(x)$ NEL PUNTO x_k

$$f(x_k) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k) + f''(\xi_k)\frac{(x-x_k)^2}{2!} \qquad |\xi - x| \leq |x_k - x|$$

PER $x=\alpha$ ABBIAMO:

$$0 = f(\alpha) = f(x_k) + f'(x_k)(\alpha-x_k) + f''(\xi_k)\frac{(\alpha-x_k)^2}{2!} \qquad |\xi_k-\alpha| \leq |x_k-\alpha|$$

$$\Rightarrow (x_k-\alpha) f'(x_k) - f(x_k) = f''(\xi_k)\frac{(x_k-\alpha)^2}{2!}$$

DIVIDO PER $f'(x_k) \neq 0$, $x_k \in [\alpha-h, \alpha+h]$

$$\frac{(x_k-\alpha) f'(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f''(\xi_k)\frac{(x_k-\alpha)^2}{2!}}{f'(x_k)}$$

$$= \boxed{x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} = \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \frac{(x_k-\alpha)^2}{2}$$

SICCOME:

$$\Rightarrow x_{k+1} - \alpha = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \alpha = \boxed{(x_k-\alpha) - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} = \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \frac{(x_k-\alpha)^2}{2}$$

X DEF.

QUINDI:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|x_k-\alpha|^2} \cdot \frac{|f''(\xi_k)|}{|2 f'(x_k)|} \cdot |x_k-\alpha|^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\xi_k)|}{|2 f'(x_k)|}$$

PER $x_k \to \alpha$ f' É CONTINUA $\to$ $0 \leq |\xi_k - \alpha| \leq |x_k - \alpha|$

f'' É CONTINUA $\Rightarrow \xi_k \to \alpha$

(the term $|x_k-\alpha|$ $= 0$)

QUINDI:

$$\lim_{x_k\to\alpha} \frac{|f''(\xi_k)|}{|2 f'(x_k)|} = \frac{|f''(\alpha)|}{2\,|f'(\alpha)|}$$ É UN VALORE FINITO $= \ell \in \mathbb{R}$

SE $f''(\alpha) = 0 \Rightarrow$ ORDINE SUPERIORE AL SECONDO

TEOREMA DI CONVERGENZA IN LARGO

SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b])$, $f(\alpha)=0$, $\alpha \in (a,b)$

SE $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in \underbrace{[\alpha, \alpha+\delta]}_{=S} \overset{\text{SOTTOINSIEME}}{\subset} (a,b)$ SI HA CHE:

1. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$
2. $f(x) f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ IL METODO DELLE TANGENTI CON $x_0 \in S$ GENERA SUCCESSIONI MONOTONE,

DECRESCENTI E CONVERGENTI AD α

Esercitazione

Esercizio ①

$f(x): \log x + 2x + 1 = 0$

① Si dimostri che $f(x)$ ha una sola radice reale $\alpha \in (0,1)$

② Metodo delle Tangenti (MdT) localmente convergente ad α?

③ Studiare convergenza MdT $\forall x_0 \in (0, \alpha]$

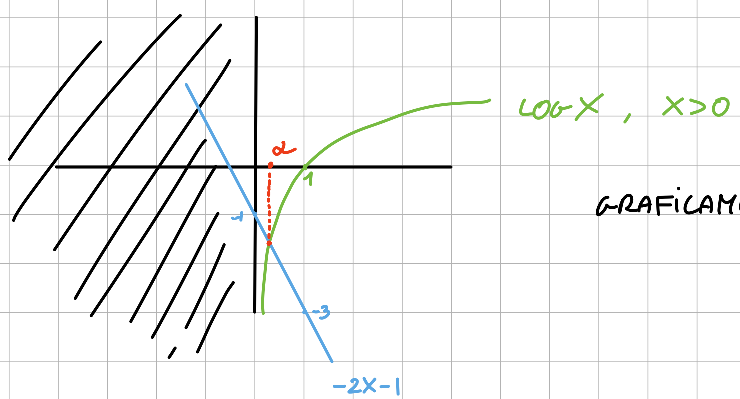
④ Studiare convergenza MdT $\forall x_0 \in (\alpha, 1)$

⑤ Cosa accade se $x_0 = 1$?

⑥ Funzione MATLAB che dati in input $x_0 \in (0,1)$ implementa il MdT applicato a $f(x) = 0$ con punto iniziale x_0 arrestandosi quando $x_k - x_{k-1} \leq 0$ e $k > 1$. Riportare in output l'approssimazione x_k di α e il n° di iterazioni

---

① $f(x): \log x + 2x + 1 = 0 \iff \log x = -2x - 1$

a) 

Graficamente trovo che $\alpha \in (0,1)$

Altro metodo (per funzioni più complesse)

b) Disegno $f(x) = \log x + 2x + 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Siccome va da $-\infty$ a $+\infty$ abbiamo la certezza che $\exists$ almeno una radice di $f(x)$

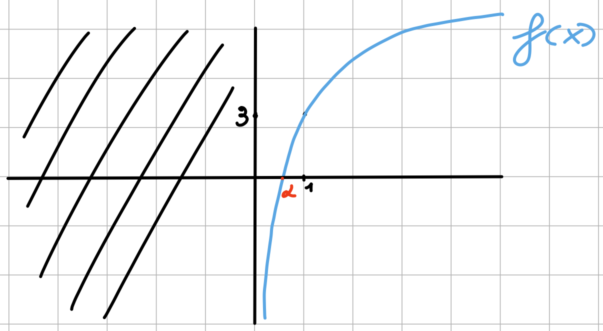
$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \quad \forall x > 0$ $f(x)$ È CRESCENTE

SICCOME $f(x)$ È CRESCENTE, HA UNA SOLA SOLUZIONE:

$f(1)$: $\log 1 + 2 + 1 = 3 > 0$ $\lim_{x \to 0} \log x + 2x + 1 = -\infty < 0$

CONTROLLANDO GLI ESTREMI DEL MIO INTERVALLO NOTO CHE $f(x)$ CAMBIA SEGNO $\Rightarrow \alpha \in (0, 1)$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) < 0 \Rightarrow$ CONCAVITÀ RIVOLTA VERSO IL BASSO



② LOCALE CONVERGENZA DEL MdT?

VERIFICARE CHE:

① $f \in C^2((0, +\infty))$

② $f'(\alpha) \neq 0$ CIOÈ α RADICE SEMPLICE

PUNTO ① VERIFICATO PERCHÉ $\exists f''(x)$ ED È CONTINUA IN $(0, +\infty)$

PUNTO ② VERIFICATO PERCHÉ $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2 \quad \forall \alpha \in (0, 1) \neq 0$

$\Rightarrow$ CONVERGENZA LOCALE DIMOSTRATA

③ STUDIARE CONVERGENZA MdT $\forall x_0 \in (0, \alpha]$

DOBBIAMO VERIFICARE CHE SIANO SODDISFATTE LE HP DE TEOREMA

DI CONVERGENZA IN LARGO SULL'INTERVALLO $S = [\alpha - \delta, \alpha]$ CON $\delta < \alpha$

- $f \in C^2((0, +\infty))$ ✓
- $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in S$ ✓ $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$
- $f(x) f''(x) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \log x + 2x + 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} > 0 \text{ QUANDO } f(x) < 0$$

$f(x) < 0$ QUANDO $x \in (0, \alpha)$

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ CONVERGE

④ STUDIARE CONVERGENZA MdT $\forall x_0 \in (0, 1)$

DOBBIAMO DIMOSTRARE FORMALMENTE CHE SE PRENDIAMO $x_0 \in (\alpha, 1)$

$\Rightarrow x_1 \in (0, \alpha)$ PER CUI CONVERGONO PER IL PUNTO ③

$(0, 1) = (0, \alpha] \cup (\alpha, 1)$ MI BASTA VEDERE PER $(\alpha, 1)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \underbrace{0 < \overbrace{x_1 < \alpha}^{①}}_{②}$$ VOGLIAMO DIMOSTRARE QUESTO

① $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(\xi_x)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$ $\quad |\xi_x - x_0| \leq |x-x_0|$

SOSTITUISCO $x=\alpha$ PERCHÉ $f(\alpha)=0$

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha-x_0) + f''(\xi_x)\frac{(\alpha-x_0)^2}{2}$$

$-\dfrac{1}{\xi_x} < 0$ $\Rightarrow$ LA MAGGIORO PER TOGLIERE QUEL MEMBRO

$$f(x_0) + f'(x_0)(\alpha-x_0) > 0$$

DIVIDO PER $f'(x_0)$ $\quad f'(x_0) \neq 0$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \alpha - x_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \underbrace{x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}_{x_1}$$

PRIMO PEZZO DIMOSTRATO.

② ORA IMPONIAMO $x_1 > 0$: $\quad x_0 > 0$

$$x_0 - \frac{\log(x_0) + 2x_0 + 1}{\underbrace{\frac{1}{x_0} + 2}_{>0}} > 0$$

TROVIAMO GLI x_0 CHE RENDONO VERO >0

$$= x_0\left(\frac{1}{x_0} + 2\right) - \log(x_0) - 2x_0 - 1 > 0$$

$$= 1 + 2x_0 - \log(x_0) - 2x_0 - 1 > 0$$

$$= -\log(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \log(x_0) < 0 \quad \text{SE} \quad 0 < x_0 < 1$$

✓ VERIFICATO $x_0 \in (0,1)$ $\Rightarrow x_1 > 0$

SICCOME $\alpha > x_1$ E $x_1 > 0$, POSSIAMO DIRE CHE:

$$0 < x_1 < \alpha$$

DATO CHE $x_1 \in (0, \alpha)$ ALLORA CONVERGE PER IL PUNTO ③

⑤ COSA ACCADE SE $x_0 = 1$?

$$x_1 = 1 - \frac{\log(1) + 2 + 1}{1 + 2} = 3 - 3 = 0$$

NON POSSO ANDARE AVANTI PERCHÉ $\log(x)$ NON É DEFINITO IN ZERO $\Rightarrow$ SUCC. NON CONVERGE