Espacios Métricos. Ortonormalización.

Dr. Roberto Eduardo Vieytes
rvieytes@itba.edu.ar

Métodos Numéricos Avanzados. 93.75. 2doC 2022

- Un producto interno o escalar definido sobre $\mathbb{V}$ es una aplicación entre el conjunto de todos los pares de vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ y $\mathbb{K}$, cuyo resultado es un escalar; denotado por $\langle u, v\rangle$, que satisface las siguientes propiedades para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$; ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):

$$\langle \cdot; \cdot \rangle \; \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$$

  I $\langle \vec{u} + \vec{v}; \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}; \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}; \vec{w} \rangle$

  II $\langle \alpha \vec{u}; \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$

  III $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}; \vec{u} \rangle^*$ Donde * denota el conjugado del número complejo.

  IV $\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \in \mathbb{R} \; y \; \langle \vec{u}; \vec{u} \rangle \geqslant 0;$ la igualdad se da solo si $\vec{u} = 0$

- Producto interno canónico en $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, se define al producto interno canónico como:

$$\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ y definimos el producto interno:

$$\langle (a_0 + a_1 x); (b_0 + b_1 x) \rangle = a_0 b_0 + 2 a_1 b_1$$

  Verificar que cumple con las propiedades de un producto interno.

- Sean $p(x) = a_0 + a_1 x; \quad q(x) = b_0 + b_1 x; \quad t(x) = c_0 + c_1 x \in \mathbb{R}_1[x]$

  I)

$$\begin{aligned} \langle (p+q); t \rangle &= (a_0 + b_0) c_0 + 2(a_1 + b_1) c_1 \\ &= a_0 c_0 + b_0 c_0 + 2 a_1 c_1 + 2 b_1 c_1 \\ &= (a_0 c_0 + 2 a_1 c_1) + b_0 c_0 + 2 b_1 c_1) = \langle p; t \rangle + \langle q; t \rangle \end{aligned}$$

  II)

$$\begin{aligned} \langle \alpha p; q \rangle &= (\alpha a_0) b_0 + 2(\alpha a_1) b_1 \\ &= \alpha (a_0 b_0 + 2 a_1 b_1) = \alpha \langle p; q \rangle \end{aligned}$$

  III Es trivial ya que los coeficientes son reales.

  iV)

$$\langle p; p \rangle = a_0^2 + 2 a_1^2$$

  es la suma de números positivos, la única posibilidad de que sea nulo es que ambos sumandos lo sean.

EJEMPLO 2

- Un mismo espacio vectorial puede tener varios productos internos
- Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}_1[x]$ y definimos el producto interno para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_1[x]$

$$\langle (a_0 + a_1 x); (b_0 + b_1 x) \rangle = \int_{\infty}^{\infty} (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 x) e^{-x^2}\, dx$$

  Verifica que cumple con las propiedades de un producto interno. (DIY)
- Sea $\mathbb{V}$ es espacio vectorial de funciones reales periódicas en el intervalo $[0; 2\pi]$ Se define el producto interno para $f_1, f_2 \in \mathbb{V}$ como

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_0^{2\pi} f_1(x) f_2(x)\, dx$$

- Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; se define una norma sobre $\mathbb{V}$ a una función $\| \quad \| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_0^+$ que cumple:
  - I si $\vec{u} \in \mathbb{V}$; $\|\vec{u}\| \geqslant 0$; $\|\vec{u}\| = 0$ sii $\vec{u} = 0_{\mathbb{V}}$.
  - II si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\vec{u} \in \mathbb{V}$ $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\|$.
  - III Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).
- Dado el espacio vectorial $\mathbb{V}$ con el producto interno $\langle .; . \rangle$ este induce la norma en $\mathbb{V}$ según:

$$\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{u}; \vec{u} \rangle}.$$

- Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$, normado, se define la distancia entre dos vectores como:
- La distancia entre $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}$ como:

$$d(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Usualmente se utiliza $\|\cdot\|_2$ como norma y verifica:

DI.1 $d(\vec{u};\vec{v}) \geqslant 0$
DI.2 Se verifica la igualdad solo si $\vec{u} = \vec{v}$.
DI.3 $d(\vec{u};\vec{v}) = d(\vec{v};\vec{u})$
DI.4 $d(\vec{u};\vec{w}) \leqslant d(\vec{u};\vec{v}) + d(\vec{v};\vec{w})$ (Desigualdad triangular en distancia)
DI.5 Dado dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio vectorial normado se verifica que: $|\langle\vec{u};\vec{v}\rangle| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)

- Calculemos la distancia entre $p(x) = 1$ y $q(x) = 1 + 2x \in \mathbb{R}_1[x]$ que derivan de las normas definidas en los ejercicios 1 y 2.
- $q(x) - p(x) = 2x$
- Para la norma del ejemplo 1 $\langle 2x; 2x \rangle = 2\,2^2 = 8$ por lo tanto la distancia queda $d(2x; 2x) = \sqrt{8}$.
- Con la norma definida en el ejemplo 2

$$d(2x, 2x) = \sqrt{\int_{\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx = 0}$$

- Sea $\mathbb{V}$;un espacio vectorial real, con un producto interno $\langle\cdot\rangle$ y la norma que él induce $\|\cdot\|$. Se define el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de ese espacio como:

$$\cos\theta_{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\langle\vec{u};\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

  La desigualdad de Cauchy–Schwarz establece que $-1 \leqslant \cos\theta_{\vec{u}\vec{v}} \leqslant +1$

- Si el espacio no es real, $\theta_{\vec{u}\vec{v}}$ podría ser complejo y su tratamiento cae fuera de este curso.

Ejemplo 4

- ¿Cuál es el ángulo entre los polinomios $p(x) = 1$ y $q(x) = 1 + 2x$ con el producto interno definido en el ejemplo 1?
- $\langle p; q\rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 = 1$
- $\|p\| = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 0^2} = 1$; $\|q\| = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 2^2} = 3$
- $\cos\theta_{pq} = \frac{2}{1\cdot 3} = \frac{2}{3}$
- ¿Cuál es el ángulo entre las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ con el producto interno definido para funciones periódicas en el ejemplo 2?
- $\langle \operatorname{sen}(x); \cos(x)\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\, dx = 0$ Por lo tanto el ángulo buscado es $\pi/2$.

- Al tener definido el ángulo entre dos vectores, se puede definir dos conceptos importantes: Ortogonalidad y Colinealidad.
- Se dice que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio vectorial real, son ortogonales si $\langle\vec{u};\vec{v}\rangle = 0$ y se notará $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Se dice que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{V}$ son colineales si existe un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Se notará que dos vectores son colineales con $\vec{u} \parallel \vec{v}$.
- Un conjunto $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ de vectores se llamará ortogonal si $\left\langle \vec{b}_i; \vec{b}_j \right\rangle = 0 \, \forall i,j$.
- Si son linealmente independientes, formarán una base ortogonal.
- Y si, ademas $\left\langle \vec{b}_i; \vec{b}_i \right\rangle = 1$ el conjunto/base se llamará ortonormal.

- Si la base en la cual queremos conocer un vector es ortonormal, obtener sus coordenadas es inmediato.
- En efecto sea $B = \{\vec{v}_1; \cdots; \vec{v}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$ y sea $\vec{u} \in \mathbb{V}$, entonces

  $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \vec{v}_i$; tomando producto interno con cada uno de los elementos de la base

  $\langle \vec{v}_j; \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \langle \vec{v}_j; \vec{v}_i \rangle = \alpha_j$
- Encontremos las coordenadas del vector $\vec{u} = (3;2)'$ (expresado en la base canónica) en la base $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1;2)'; \frac{1}{\sqrt{5}(}2;-1)'\}$
- $\vec{u} = (3;2)' = \frac{\alpha_1}{\sqrt{5}}(1;2)' + \frac{\alpha_2}{\sqrt{5}(}2;-1)'$
- $\alpha_1 = \langle (3;2)'; (1;2)' \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7;$
- $\alpha_2 = \langle (3;2)'; (2;-1)' \rangle = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4$

- Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ subespacios de $\mathbb{V}$; B_1 una base ortogonal de $\mathbb{S}_1$ y B_2 una base ortogonal de $\mathbb{S}_2$; se dirán que son $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ son ortogonales si $B_1 \cup B_2$ es un conjunto ortogonal (no necesariamente una base de $\mathbb{V}$). Si la unión de las bases generan $\mathbb{V}$ a $\mathbb{S}_2$ se lo denomina complemento ortogonal de $\mathbb{S}_1$.
- Nos resultará muy útil en lo que sigue lograr descomponer un vector $\vec{u}$ en dos subespacios ortogonales; es decir escribir:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \text{ con } \vec{v} \in \mathbb{S}_1 \text{ y } \vec{w} \in \mathbb{S}_2$$

Ejemplo 5

- Se tiene el subespacio vectorial $\Pi \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ definido por $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} / 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$. Hallemos una base Π y una de su complemento ortogonal L.
- ¿Qué dimensión tiene Π? (dimensión del espacio que lo contiene - número de ecuaciones que lo definen =2, se trata de un plano).
- La ecuación del plano la podemos escribir como $\langle (3; 2; -3)'; \vec{x} \rangle = 0$. Lo cual indica que el complemento ortogonal a Π, una recta, es generada por $(3; 2; -3)'$
- Para hallar la base de Π debemos encontrar dos soluciones independientes de $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ que pueden ser $(1; 0; 1)'$ y $0(0; \frac{3}{2}; 1)'$
-

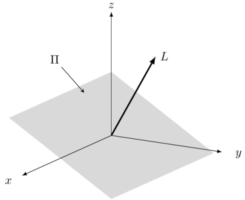


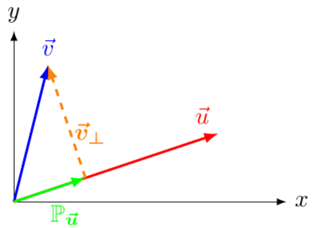
FIGURA: Plano y recta ortogonales en $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

- ¿Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ como hallar "su parte" en L y su parte en Π?.
- Para esto tenemos que introducir la idea de Proyector de un vector $\vec{v}$, en una dirección prefijada $\vec{u}$: $\mathbb{P}_{\vec{u}}(\vec{v})$ definido por:

$$\mathbb{P}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \tag{1}$$

Esta expresión nos da la parte en L del vector, la parte en Π se obtiene por diferencia (pues Π es el complemento ortogonal a L).

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \mathbb{P}_{\vec{u}}(\vec{v})$$



- Un proyector puede pensarse como una transformación lineal y su matriz es idempotente, es decir $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$.

- Encontremos la base ortogonal de Π a partir de la encontrada en el ejemplo 5.
- $\Pi : Gen\{(1; 0; 1)'; (0; \frac{3}{2}; 1)'\}$ Tomamos el primer vector como $\vec{u}$ y calculamos

$$\mathbb{P}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\langle(1; 0; 1)'; (0; \frac{3}{2}; 1)'\rangle}{\langle(1; 0; 1)'; (1; 0; 1)'\rangle}(1; 0; 1)' = \frac{1}{2}(1; 0; 1)'$$

- Ahora calculamos $\vec{v}_\perp$

$$\vec{v}_\perp = (0; \frac{3}{2}; 1)' - \frac{1}{2}(1; 0; 1)' = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)'$$

- y como son combinación lineal de los elementos de una base, general el mismo subespacio.
- Si quisiéramos una base ortonormal, nos restaría dividir a cada vector por su norma:

$$B_{ortonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)'; \frac{1}{\sqrt{11}}(-1; 3; 1)'\right\}$$

- ¿Y si tenemos "muchos vectores"?
- GNU Octave tiene el comando `orth(A)` que nos entrega una matriz cuyas columnas forman un conjunto ortonormal de vectores que generan el mismo subespacio que las columnas de $\boldsymbol{A}$.

- El procedimiento que se presenta a continuación, denominado Método de Gramd–Schmidt Clásico nos permitirá lograr el objetivo.
- El primer paso es elegir un vector de $B \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y asignamos a $\hat{q}_1$ el versor correspondiente. $\hat{q}_1 \longleftarrow \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$
- Elegimos $\vec{q}_2$ como el vector complementario
  $\vec{q}_2 = \vec{u}_2 - \mathbb{P}_{\hat{q}_1}(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 - \langle \hat{q}_1; \vec{u}_2 \rangle \, \hat{q}_1$
- y lo normalizamos $\hat{q}_2 \longleftarrow \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}$
- para q_3 tendremos
  $\vec{q}_3 = \vec{u}_3 - \mathbb{P}_{\hat{q}_1}(\vec{u}_3) - \mathbb{P}_{\hat{q}_2}(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 - \langle \hat{q}_1; \vec{u}_3 \rangle \, \hat{q}_1 - \langle \hat{q}_2; \vec{u}_3 \rangle \, \hat{q}_2$
  $\hat{q}_3 \longleftarrow \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}$
- y así seguimos hasta agotar los vectores del conjunto B
  $\vec{q}_p = \vec{u}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \mathbb{P}_{\hat{q}_i}(\vec{u}_i) = \vec{u}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle \hat{q}_i; \vec{u}_i \rangle \, \hat{q}_i$
  $\hat{q}_p \longleftarrow \frac{\vec{q}_p}{\|\vec{q}_p\|}$
- El guión en GNU Octave CLGRSCH(V) que figura en los apuntes permite realizar este procedimiento.

- Una forma de verificar el trabajo realizado por el método de Gramd–Schimidt, es armar la matriz $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}}$ colocando como columnas los vectores ortonormalizados y calculando $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}}$
- Esta cuenta es equivalente a calcular los productos escalares entre las columnas de $\boldsymbol{Q}$ que al ser ortonormales daría $\mathbb{I}_{p\times p}$
- una medida sería

$$e = \|\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} - \mathbb{I}_{p\times p}\|$$

- Si $e \ll 1$ el método es correcto, pero de lo contrario no.
- Analicemos qué ocurre si aplicamos CLGRSCH(V a la matriz

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-8} \end{pmatrix}$$

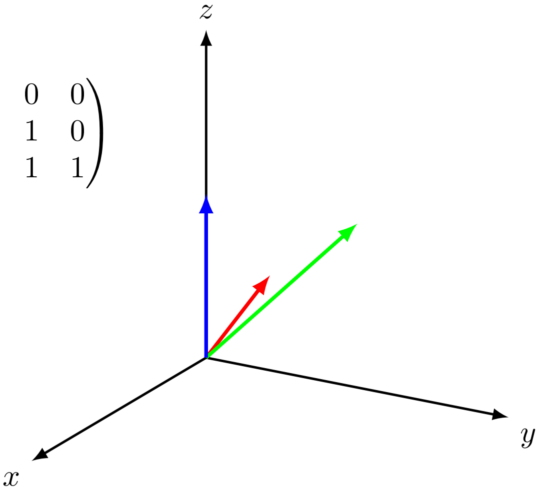
- Notemos que los vectores son casi paralelos

```
>> format long
>> e= 1e-8;
>> V=[ 1 1 1; e 0 0; 0 e 0; 0 0 e]
V =
   1.00000...e+00   1.00000,,,e+00   1.00000...e+00
   1.00000...e-08   0.00000...e+00   0.00000...e+00
   0.00000...e+00   1.00000...e-08   0.00000...e+00
   0.00000...e+00   0.00000...e+00   1.00000...e-08
>> q=CLGRSCH(V)
q =
   1.00000...e+00   0.00000...e+00   0.00000...e+00
   1.00000...e-08  -7.07106...e-01  -7.07106...e-01
   0.00000...e+00   7.07106...e-01   0.00000...e+00
   0.00000...e+00   0.00000...e+00   7.07106...e-01
>> norm(q'*q-eye(3),'fro')
ans =    7.071067811865476e-01
```

¡Un error monstruosamente grande!

- Veamos la ortogonalidad de los vectores encontrados
- ```
  >> q(:,1)'*q(:,2)
  ans =   -7.071067811865475e-09
  >> q(:,1)'*q(:,3)
  ans =   -7.071067811865475e-09
  >> q(:,2)'*q(:,3)
  ans =    4.999999999999999e-01
  ```
- Observamos que la primer columna ($q(:,1)$) es perpendicular con un error aceptable tanto a $q(:,2)$ como a $q(:,3)$
- Sin embargo $q(:,2)$ y $q(:,3)$ no pueden considerarse ortogonales.
- El método arrastra muchos errores de truncamiento.
  ```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El núcleo del problema está en que se proyecta el vector original sobre la base ortonormal encontrada
-
```
for i = 1:n
v=V(:,i);
for k = 1:i-1
v = v - (q(:,k)'*V(:,i))*q(:,k);
endfor
q(:,i)=v/norm(v);
endfor
```

- se puede ganar estabilidad si se proyecta el último vector generado
-
```
for i = 1:n
q(:,i) = V(:,i);
for k = 1:i-1
q(:, i) = q(:, i)-q(:, k )'*q(:, i)*q(:, k);
endfor
q(:, i) = q(:, i)/norm(q(:, i));
endfor
```

- En el método de Gramd-Schmidt clásico (CLGRSCH), tomamos cada vector, uno a la vez, y lo hacemos ortogonal a todos los vectores anteriores. En Gramd-Schmidt modificado (MOGRSCH), tomamos cada vector y modificamos todos los vectores siguientes para que sean ortogonales a él.
- Experimento numérico

```
>> n=200;
>> A=1e-6*eye(n)+hilb(n);
>> Q=CLGRSCH(A);
>> norm(Q'*Q-eye(n))
ans = 179.85
>> [Q e]=MOGRSCH(A);
>> e
e = 4.0074e-10
>> Q=orth(A);
>> norm(Q'*Q-eye(n))
ans = 7.4384e-15
```

- La función `orth()` usa un mejor algoritmo para ortonormalizar las columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ ¿Cual será?
- Respuesta Clase 11.

- Sea $\mathbb{R}_2[t]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales en el intervalo $[0;1]$. Una base para este espacio podría ser $B = \{1; t; t^2\}$. Encontremos una base ortonormal para este espacio con el producto interno definido por

$$\langle p; q\rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt$$

- Aplicaremos el método de Gramd–Schmidt para generar los $\hat{q}_i$:

$$q_1(t) = 1 \qquad \hat{q}_1(t) = 1$$

$$q_2(t) = t - \mathbb{P}_{\hat{q}_1}(t) = t - \left(\int_0^1 t\, 1\, dt\right) 1 = t - \frac{1}{2}$$

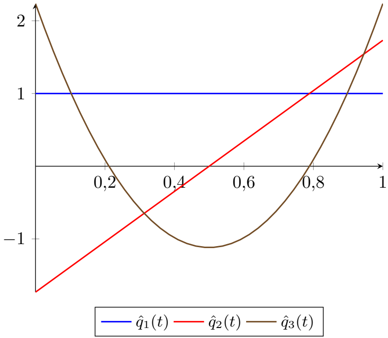
$$\langle q_2(t); q_2(t)\rangle = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\, dt = \frac{1}{12} \qquad \hat{q}_2(t) = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

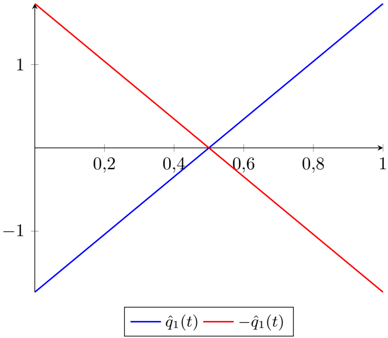
$$q_3(t) = t^2 - \left(\int_0^1 t^2 \, 1 \, dt \right) 1 - \left(\int_0^1 t^2 \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2} \right) dt \right) \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

$$q_3(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$\langle q_3(t); q_3(t) \rangle = \frac{1}{180} \qquad \hat{q}_3(t) = \sqrt{180} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right)$$

- Cualquier polinomio de grado menor o igual que 2, se escribirá exactamente como combinación lineal de los $\hat{q}_i(t)$.





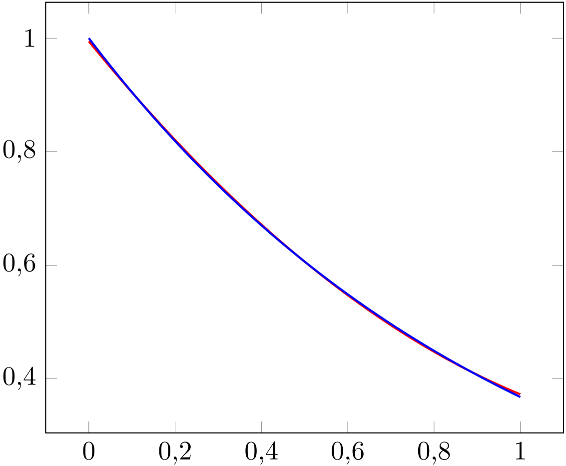
- Ortogonales no significa lo mismo que perpendiculares.

- ¿Y si queremos aproximar e^{-t} en el intervalo $[0; 1]$?
- La exponencial no es un polinomio de grado finito.
- Podemos encontrar una aproximación si la "proyectamos" en $\mathbb{R}_2[x]$
- Para ello utilizamos la base ortonormal encontrada y

$$e^{-t} \approx \alpha_1 \hat{q}_1 + \alpha_2 \hat{q}_2 + \alpha_3 \hat{q}_3$$

- con $\alpha_i = \int_0^1 e^{-t} \hat{q}_i \, dt$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - e^{-1} = 0{,}6321... \\ \alpha_2 &= \sqrt{3}\left(1 - 3e^{-1}\right) = -0{,}1795... \\ \alpha_3 &= \sqrt{5}\left(7 - 19e^{-1}\right) = 0{,}0230... \end{aligned}$$



$$\left\| e^{-t} - (\alpha_1 \hat{q}_1(t) + \alpha_2 \hat{q}_2(t) + \alpha_3 \hat{q}_3(t)) \right\| \approx 1{,}9437e-03$$

$$\left\| e^{-t} - (\alpha_1 \hat{q}_1(t) + \alpha_2 \hat{q}_2(t) + \alpha_3 \hat{q}_3(t)) \right\|_\infty \approx 5{,}5114e-03$$

LICENCIA DE DISTRIBUCIÓN

Este documento fue realizado en LaTeX con la clase beamer. Muchas de las figuras se realizaron con Tikz con el editor KTikz, los cálculos y simulaciones con GNU Octave y GNU Maxima.