Álgebra Lineal

Dr. Roberto Eduardo Vieytes
rvieytes@itba.edu.ar

Métodos Numéricos Avanzados. 93.75. 2doC 2022

INSTITUTO TECNOLOGICO DE BUENOS AIRES
• UNIVERSIDAD PRIVADA •

- Clases Jueves 16 a 19 y Viernes 13 a 17 hs.
- Conformación de la Cátedra:

  Prof. Dr. en Físico (UBA) Roberto Vieytes. PRM

  Prof. Ing. Electrónico (UTN) Alejandro Hayes. Asociado

  JTP. Ing. Electrónico (UNQ) Matías Benítez.
- Modalidad mixta 50 % presencial 50 % Virtual.
- Se pide 80 % de asistencia en ambas modalidades.
- Dos parciales, un sólo recuperatorio.
- Los parciales son 100 % presenciales.
- Fecha de parciales y recuperatorios (en el cronograma que se encuentra en el campus).

- Numerical Linear Algebra with Applications using Matlab. W. Ford; Elsevier 2015.
- Numerical Linear Algebra F. Bornemann. Springer 2018.
- Introduction to Linear Algebra G. Strang. 5th edition; Wellesley-Cambridge Press; 2016.
- Linear Algebra and its Applicattions D. Lay S, Lay J McDonald; 5th edition Pearson Education Inc. 2016.
- Apuntes de la Cátedra.

Canales en youtube interesantes

- Steve Brunton channel. https://www.youtube.com/channel/UCm5mt-A4w61lknZ9lCsZtBw
- Gilber Strang series MIT Open Courses. https://www.youtube.com/c/mitocw

Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto de elementos, denominados escalares y dos operaciones $+$ y $*$ que cumplen:

C1: $\mathbb{K}$ es cerrado para $+$ y $*$ Si α y $\beta \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha + \beta \in K$, $\alpha * \beta \in \mathbb{K}$.

C2: Asociatividad de $+$ y $*$ Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ y $(\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$.

C3: Conmutatividad de $+$ y $*$ Si $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ y $\alpha * \beta = \beta * \alpha$;

C4: Distributividad Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha * (\beta + \gamma) = (\alpha * \beta) + (\alpha * \gamma)$.

C5: Existencia de neutro para $+$ Existe $\mathbf{0} \in \mathbb{K}$ tal que si $\alpha in \mathbb{K}$ $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.

C6: Existencia de neutro para $*$ Existe $\mathbf{1} \in \mathbb{K}$ tal que si $\alpha \in \mathbb{K}$ $\alpha * \mathbf{1} = \alpha$.

C7: Inverso aditivo Si $\alpha \in \mathbb{K}$, existe $-\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$.

C8: Inverso multiplicativo Si $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq \mathbf{0}$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha * \alpha^{-1} = \mathbf{1}$

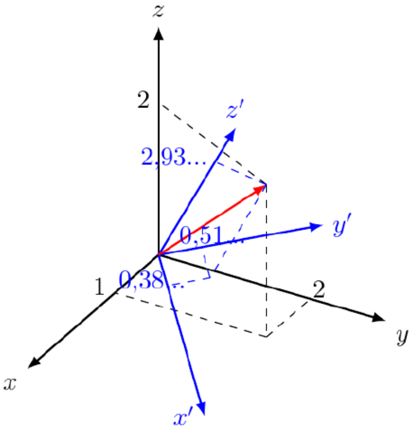
- El conjunto de los enteros positivos modulo p con p primo (Cuerpos de Galois) F(p), Veamos $p = 3$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- Los cuerpos finitos tienen importancia en criptografía.
- Trabajaremos con los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

- Los vectores son propiedades del espacio que están más alla del array de números que los representan.



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0{,}38\ldots \\ 0{,}51\ldots \\ 2{,}93\ldots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

- Son "vectores" presentados de otra manera:

$$\vec{v} = (1;2;3;4;5;6;7;8;9;0) \to \boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{M}_1 \in \mathbb{R}^{\mathbf{5}\times\mathbf{2}}; \boldsymbol{M}_2 \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}\times\mathbf{5}}$
- Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ tiene m filas y n columnas.

1. Las matrices y vectores se suman componente a componente.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6 \\ 2+5 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

2. El producto por un escalar, también es componente a componente.

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2+i) \begin{pmatrix} 3i & 2 \\ 1+i & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6i & 4+2i \\ 1+3i & 8+4i \end{pmatrix}$$

- Si las dimensiones de las matrices son concordantes, se pueden multiplicar: Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}$ y $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{q}}$ entonces $\boldsymbol{AB} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}}$
- El número de columnas de la primer matriz debe ser igual al número de filas de la segunda; entonces

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}\times\mathbf{3}} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 38 & 92 & 146 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}\times\mathbf{3}}$$

- La multiplicación de matrices es no conmutativa; es más puede no estar definida.

Sean las matrices $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ y $\boldsymbol{C} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+i & 2-3i & 0 \\ 0 & 4+i & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ -i & 1-4i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Hallemos $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{AB} - 2\boldsymbol{C}'$

Cuando las matrices tienen números complejos el operador " ′ " no solo transpone sus elementos, sino que también los conjuga, por lo tanto

$$\boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

Conocido esto resta sólo hacer cuentas

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -2+i & -11-10i \\ 1-4i & 13-15i \end{pmatrix} \qquad 2\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2i & -2i \end{pmatrix}$$

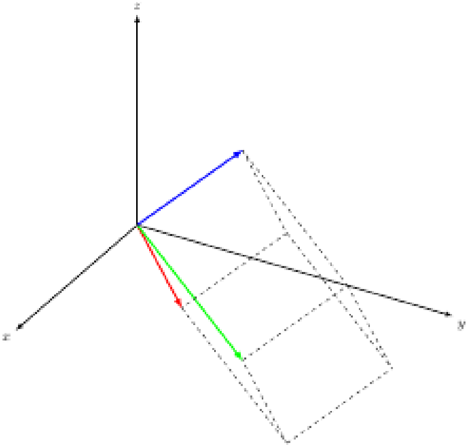
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -4+i & -11-10i \\ 1-2i & 12-13i \end{pmatrix}$$

Matriz invertible

- Si $\boldsymbol{A}$ no es cuadrada puede ser que existan (o no) Matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$ tal que $\boldsymbol{LA} = \mathbb{I}_n$ y $\boldsymbol{A}R = \mathbb{I}_m$
- Dada una matriz $\boldsymbol{A}$ cuadrada, es útil conocer si existe $\boldsymbol{B}$ tal que $AB = BA = \mathbb{I}$; si existe se dirá que $\boldsymbol{A}$ es invertible y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$
- Hagamos dos preguntas, cómo sabemos si $\boldsymbol{A}$ es invertible, y cómo calculamos su inversa.
- Como ejemplo utilicemos las matrices:

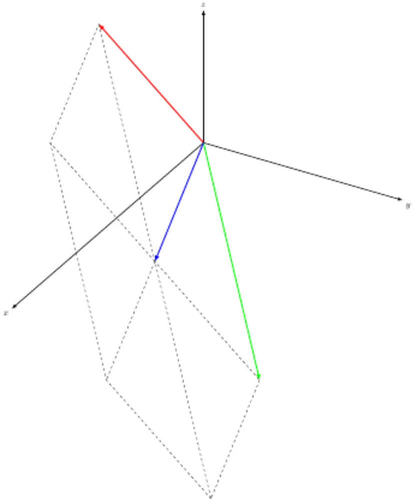
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos cada columna de la matriz como el lado de un paralelepípedo n-dimensional (tridimensional en este caso)



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz No Invertible



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si el paralelepípedo formado por los vectores columna tiene volumen (n-dimensional), la matriz es invertible.
- Si el paralelepípedo no tiene volumen, la matriz no es invertible.
- El volumen (n-dimensional) es “medido por el determinante de la matriz. (Aunque hay formas menos onerosas desde el punto de operaciones de cálculo para determinar si es o no invertible)

- Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ su traspuesta $\boldsymbol{A}'$ es una matriz $\in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}$ que tiene por filas, las columnas de $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

- Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se llama matriz adjunta $\boldsymbol{A}^{+}$ al la matriz que tiene como filas, las columnas de $\boldsymbol{A}$ conjugadas.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2i & 1+3i \\ 3 & 1-2i \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{+} = \begin{pmatrix} -2i & 3 \\ 1-3i & 1+2i \end{pmatrix}$$

Aceptaremos sin demostración las siguientes propiedades de los determinantes:

D.1 Si intercambiamos dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo aunque son iguales en valor absoluto.

D.2 El determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta, es decir: $Det(A) = Det(A')$

D.3 Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos matrices $\in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ entonces $Det(\boldsymbol{AB}) = Det(\boldsymbol{A})Det(\boldsymbol{B})$

D.4 si $\boldsymbol{A}$ es invertible $Det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (Det(\boldsymbol{A}))^{-1}$

D.5 Si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número k, su determinante queda multiplicado por dicho número.

D.6 Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una fila o columna nulos, su determinante es cero.

D.7 Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales su determinante es cero.

D.8 Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas proporcionales su determinante es cero.

D.9 todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en dos sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha fila o columna el primero y el segundo sumando respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

$$Det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + Det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{pmatrix}$$

D.10 Si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de dos o más de las restantes filas o columnas, su determinante es cero.

D.11 Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela a ella, su determinante no varía.

D.12 Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela a ella multiplicada por un número, su determinante no varía.

Si $\vec{v}_i$ son vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ armamos la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}$ cuyas columnas son los vectores $\vec{v}_i$. Sabiendo que $Det(\boldsymbol{A}) = -3$ calculemos el valor de $Det\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}'\right)$. Si la matriz $\boldsymbol{B}$ tiene por columnas: $\boldsymbol{B} = (\vec{v}_1 - 3\vec{v}_3;\ \vec{v}_3;\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.
Por la propiedad D.3 resulta que:

$$Det\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}'\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 Det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right) Det\left(\boldsymbol{A}'\right)$$

Por D.2 y D.4 tendremos que:

$$\frac{27}{64}\frac{Det\left(\boldsymbol{A}\right)}{Det\left(\boldsymbol{B}\right)} = -\frac{81}{64}\frac{1}{Det(\boldsymbol{B})}$$

tenemos que evaluar $Det(B)$

$$\begin{aligned}
Det(B) &= Det([\vec{v}_1 - 3\vec{v}_3\ \vec{v}_3\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2]) \\
&= Det([\vec{v}_1\ \vec{v}_3\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2]) + Det([-3\vec{v}_3\ \vec{v}_3\ \vec{v}_1 - \vec{v}_2]) \qquad \text{por D.9} \\
&= Det([\vec{v}_1\ \vec{v}_3\ \vec{v}_1]) - Det([\vec{v}_1\ \vec{v}_3\ \vec{v}_2]) + 0 \qquad \text{por D.9 y D.8} \\
&= 0 + Det([\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3]) \qquad \text{por D.8 y D.1} \\
&= Det(\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

Por lo tanto el determinante buscado es $\frac{27}{64}$

Hallemos la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

por lo tanto la inversa buscada es la matriz

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si en la matriz de la izquierda queda una fila con todos sus elementos nulos, la matriz original no es invertible.

- Una matriz cuadrada se llama diagonal cuando $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Una matriz cuadrada se denomina a bandas si los elementos distintos de cero se colocan todos en una banda diagonal que incluye la Diagonal principal y, opcionalmente, una o más diagonales a su derecha o izquierda. Formalmente una matriz cuadrada es una matriz de banda si todos los elementos fuera de una tira diagonal son nulos.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada se denomina triangular inferior ($\boldsymbol{A}$) si $a_{ij} = 0$ sii $i > j$ y triangular superior ($\boldsymbol{B}$)si $b_{ij} = 0$ sii $i < j$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuadrada se dice simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ y anti simétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Una matriz $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$ se dice es ortogonal

$$\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M} = \mathbb{I}_{n \times n} \qquad \text{si } n = m \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}'$$

es decir la traspuesta de una matriz ortogonal cuadrada es su propia inversa.

- Una matriz se dice que es escalonada, escalonada por filas o que está en forma escalonada si:
  1. Todos las filas cero están en la parte inferior de la matriz.
  2. El primer elemento no nulo de una fila está a la derecha del elemento no nulo de la fila anterior.
  3. El primer elemento no nulo o 1 de cada fila está a la derecha del primer elemento diferente de 0.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

  La matriz $\boldsymbol{A}$ es escalonada mientras que la $\boldsymbol{B}$ no lo es.
- Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}}$, arbitraria, por eliminación Gaussiana se la puede llevar a su forma escalonada.
- En GNU Octave se puede llegar a la forma escalonada con el comando `rref(A)`. Un ejemplo

```
>> A=[ 1 2 3; 4 5 6; 5 7 9];
>> rref(A)
ans =
   1    0   -1
   0    1    2
   0    0    0
```

- Se una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ que tiene m filas y n columnas y su "versión escalonada" tiene l filas nulas, se define rango de la matriz al número que resulta de restar el número de filas nulas del número total de filas de la matriz. $rang(A) = m - l$. La matriz $\boldsymbol{A}$ del ejemplo anterior tiene rango 2. En GNU Octave se puede obtener directamente el rango con el comando `rank(A)`.
- Se dice que una matriz tiene el rango máximo cuando su rango es igual al mínimo entre el numero de filas y columnas.
- Si una matriz es cuadrada y tiene rango máximo entonces es invertible

- En una ecuación lineal, las incógnitas no aparecen multiplicándose ni elevadas a una potencia distinta de 1. Una ecuación lineal con n incógnitas se escribirá como

$$b = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

- Si tenemos n de estas ecuaciones, llegamos a un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas:

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \qquad j = 1; \cdots, n$$

- Este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\boldsymbol{M}\vec{x} = \vec{b} \qquad M_{jk} = a_{jk}$$

- La solución es inmediata si $\boldsymbol{M}$ es invertible:

$$\vec{x} = \boldsymbol{M}^{-1}\vec{b}$$

- Si el vector $\vec{b}$ es nulo es sistema se denomina homogéneo.

- Diremos que un sistema es compatible cuando admite soluciones. Se denominará compatible determinado (SCD) cuando tiene una única solución y compatible indeterminado cuando tiene infinitas soluciones (SCI). Cuando no tiene soluciones se lo denomina sistema incompatible SI.
- ¿Cómo saber que clase de sistema tenemos?
- Primero armamos la matriz ampliada del sistema, la cual tiene una columna más que la del sistema. La columna extra es el vector de términos independientes.
- Aplicamos el teorema de Rouché–Frobenius:
- Sea $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$ la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas. Entonces:
  1. El sistema es incompatible (SI) si el rango de la matriz del sistema $\boldsymbol{A}$ es distinto del rango de la matriz ampliada $\left(\boldsymbol{A}|\vec{b}\right)$.
  2. El sistema es compatible si los rangos coinciden. En este caso, si el rango es igual al número de incógnitas (es decir, n), el sistema es determinado (SDC).
  3. Si es menor que n, es indeterminado (SCI).

Ejemplo I

Estudiemos la compatibilidad, o no, de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$rang(M_1) = 3; \quad rang(M_2) = 2; \quad rang(M_3 = 3)$$

- Armamos las matrices ampliadas

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos su rango:

$$rang(A_1) = 3; \quad rang(A_2) = 2; \quad rang(M_3 = 3)$$

- En el caso de M_1 el rango de la matriz del sistema y la ampliada coinciden y aparte el rango es máximo. El sistema es compatible determinado: tiene una única solución.
- En el caso de M_2 Los rangos coinciden aunque no son máximos, el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.
- En el caso de M_3 los rangos son distintos, el sistema es incompatible: no tiene solución.

Espacio Vectorial

Diremos que el conjunto $(\mathbb{V}; \oplus; \otimes)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ si cumple con las siguientes propiedades:

EV1; Cerrado para la suma $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ $\vec{u} \oplus \vec{v} \in \mathbb{V}$.

EV2; Conmutatividad de la suma vectorial $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$.

EV3; Asociatividad de la suma vectorial $\vec{u}.\ \vec{v}, \vec{w}$
$\in hV \quad \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w}$.

EV4; Elemento neutro suma vectorial Existe un único elemento $\vec{0}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ llamado vector cero, tal que si $\vec{u} \in \mathbb{V} \quad \vec{u} \oplus \vec{0}_{\mathbb{V}} = \vec{u}$.

EV5; Elemento inverso de la suma vectorial Si $\vec{u} \in \mathbb{V}$, entonces existe único elemento neutro $-\vec{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\vec{u} \oplus (-\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{V}}$. A $-\vec{u}$ se lo denomina inverso aditivo de la suma vectorial.

EV6; Distributividad de $\otimes$ con la suma vectorial Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ entonces:
$\alpha \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \alpha \otimes \vec{u} \oplus \alpha \otimes \vec{v}$;
$(\alpha + \beta) \otimes \vec{u} = \alpha \otimes \vec{u} \oplus \beta \otimes \vec{u}$;
$(\alpha * \beta) \otimes \vec{u} = \alpha \otimes (\beta \otimes \vec{u})$.

Las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ no necesariamente son las usuales.

Consideremos $\mathbb{V} = (\mathbb{R}^+; \oplus; \otimes)$ donde las operaciones son las habituales, claramente esta tríada no es un espacio vectorial, ya que no se cumplen **EV4** y **EV5** ya que todos los elementos de $\mathbb{R}^+$ son positivos, pero si se definen las operaciones como:

$$x \oplus y = x * y;$$
$$\lambda \otimes x = x^\lambda.$$

Esta estructura tiene propiedades de espacio vectorial. Donde el el cero de $\mathbb{V}$ es el número 1: $0_\mathbb{V} = 1$ y el inverso aditivo es $-\vec{u} = u^{-1}$

- Es cerrado para la suma (**E1**): $x, y \in \mathbb{V}$ $x \oplus y \in \mathbb{V}$ pues el producto de números reales positivos es positivos.
- La suma es conmutativa (**EV2**) pues el producto de reles lo es.
- $\oplus$ es asociativa (**EV3**), pues el producto de números reales lo es.
- elemento neutro de la suma vectorial (**EV4**). Si y es elemento neutro

$$x \oplus y = x$$
$$x = x * y$$
$$y = 1.$$

- Elemento inverso de la suma vectorial (**EV5**). Sea y el elemento inverso de la suma

$$\begin{aligned} x \oplus y &= 1 \\ x * y &= 1 \\ y &= x^{-1} \end{aligned}$$

- Distributividad del producto por escalar con la suma vectorial (**EV6**). Sean $x, y \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+}$

$$\begin{aligned} \alpha \otimes (x \oplus y) &= (x * y)^{\alpha} \\ \alpha \otimes x \oplus \alpha \oplus y &= x^{\alpha} * y^{\alpha} = (x * y)^{\alpha} \end{aligned}$$

- Las otras propiedades quedan para que las demuestren Uds.

- Se dirá que un conjunto de vectores $\mathbb{W}$ es un subespacio vectorial, $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ si es un conjunto no vacío y cerrado bajo la suma y el producto por escalar con las mismas operaciones que $\mathbb{V}$.
- En la práctica, para probar que $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ basta con verificar que: $\vec{0}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{W}$; y que es cerrado con la suma y el producto por escalares. Sea

$$\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] n \leqslant 4 \text{ y } p(x) = p(-x)\}$$

Es decir que $\mathbb{W}$ es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 4 pares, es decir que sólo tiene potencias pares, si $p \in \mathbb{W}$ entonces:

$$p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$$

Consideremos también la suma y producto por escalar habitual. El cero pertenece al subespacio, basta elegir $a_0; a_2; a_4$ Sean

$$p(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$$
$$q(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4$$
$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_2 + b_2)x^2 + (a_4 + b_4)x^4$$

Que también es un polinomio par.

- Dado un conjunto de vectores $\{\vec{u}_j\}_1^n$ se llamará combinación lineal de ellos a cualquier vector de la forma:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{u}_j$$

  donde los escalares α_j se llaman coeficientes de la combinación lineal.
- Diremos que un conjunto es linealmente dependiente si Existe una combinación lineal de sus elementos

$$\vec{0}_{\mathbb{V}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{u}_j$$

  donde algún α_j es distinto de cero. Y definiremos al conjunto como linealmente independiente, si la única manera de obtener el vector cero, es con todos los coeficientes de la combinación nulos.

- Supongamos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}, \quad \vec{u} = (1;3)', \vec{v} = (2;5)', \vec{w} = (3:4)'$ probaremos que es un conjunto linealmente dependiente, para ello planteamos:
$$(0;0)' = \alpha(1;3)' + \beta(2;2)' + \gamma(3;1)'$$
Lo que lleva al sistema de ecuaciones indeterminado:
$$0 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$$
$$0 = 3\alpha + 2\beta + 1\gamma$$
Que, dentro de sus soluciones no triviales tenemos a $(\alpha = 1;\ \beta = -2;\ \gamma = 1)$. El conjunto dado es, entonces, un conjunto linealmente dependiente.
- Supongamos ahora los vectores $\in \mathbb{R}^4 \quad \vec{u} = (1:0;0;0)';\ \vec{v} = (0;0;0;1)$ ¿Será un conjunto linealmente dependiente o independiente? Escribimos
$$(0;0;0;0) = \alpha(1;0;0;0) + \beta(0;0;0;1)$$
Trivialmente verificamos que debe ser $\alpha = 0;\ \beta = 0$ y por lo tanto el conjunto dado es linealmente independiente.

- Dado un conjunto de vectores $B = \{\vec{u}_j\}_1^n \subset \mathbb{V}$ definimos al subespacio generado por B: $Gen(B)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de B:

$$Gen(B) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} : \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{u}_j;\ \alpha_j \in \mathbb{K}\}.$$

- Se define como rango de un conjunto $B \subseteq \mathbb{V}$ al número de vectores linealmente independientes que contiene B Este número se denomina dimensión del subespacio $Gen(B)$.
- Diremos que un conjunto B es una base de un espacio (o subespacio) $\mathbb{V}$ cuando tiene el número máximo posible de vectores linealmente independiente.
- Diremos que la dimensión de un subespacio es la cantidad de vectores linealmente independientes que tiene un conjunto que lo genera. O, de otra manera, es la cantidad mínima de vectores que se requiere para que cualquier vector de él se escriba como combinación lineal del conjunto mínimo.

- Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ definimos:

  Espacio columnas de una matriz $\mathcal{C}ol(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{K}^m$ al subespacio generado por las columnas de la misma.

  Espacio filas de una matriz $\mathcal{F}il(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{K}^n$ al generado por las filas de la misma.

  Espacio nulo de la matriz $\mathcal{N}ul(A) \subset \mathbb{K}^m$ al generado por las soluciones $\boldsymbol{A}\vec{x} = 0$.

- Con estas nuevas definiciones podemos darle una interpretación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales; en efecto.
- El producto de una matriz por un vector se puede reinterpretar como un nuevo vector que es combinación lineal de las columnas de la matriz:

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$$

$$(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

- Para que el sistema tenga al menos una solución, $\vec{b}$ debe pertenecer al espacio columnas de la matriz del sistema (SCI).
- Si las columnas de $\boldsymbol{A}$ son linealmente independientes, entonces serán una base del espacio columna y tendremos una única solución (SCD).
- Si $\vec{b}$ no pertenece al espacio columnas, no habrá solución (SI)

- La primera extensión de los espacios de dimensión finita (los vistos) es considerar cada vez más componentes, los vectores se transforman en sucesiones.
- una definición para este tipo de espacios podría ser:
- Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. $\mathbb{V}$ es de dimensión infinita (numerable) si solo si existe una secuencia $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ de vectores en $\mathbb{V}$ tal que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Un espacio de este tipo es $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, el conjunto de todos los polinomios (de cualquier grado) con coeficientes reales. Una base para este espacio es $B = \{1; x; x^2; x^3; \ldots\}$
- Otro ejemplo que desarrollaremos próximamente, es el conjunto de funciones con un número finito de discontinuidades y de extremos en el intervalo $[0; 2\pi]$; para este caso, una base de este espacio es $B = \{1; \cos(nt); \operatorname{sen}(nt)\ n = 1; 2; \ldots\}$

Espacios de Dimensión Infinita (No Numerable)

- Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{P}\ (\mathbb{R}\ )$ y la función $f(x) = e^x$.
- Observemos que todo vector $p \in \mathbb{P}[\mathbb{R}]$ es de grado finito (aunque pueda ser muy grande) y que la función exponencial no pertenece a dicho espacio. (La exponencial se puede aproximar por un polinomio pero no es un polinomio).
- Si consideramos el conjunto de funciones $\mathbb{W} = \{f : [a; b] \to \mathbb{R}\}$ y definimos:

$$f; g \in B; \alpha \in \mathbb{R}$$
$$(\alpha \cdot f \oplus g)(x) = \alpha f(x) + g(x)$$

Es fácil probar que es un espacio vectorial, y (no tan fácil) de darse cuenta que este espacio es "más grande" que $\mathbb{P}\ (\mathbb{R}\ )$ ya que en $\mathbb{W}$ hay más funciones que en $\mathbb{P}$. Este es un ejemplo de espacio vectorial de dimensión infinita no numerable.

Este documento fue realizado en LaTeX con la clase beamer. Muchas de las figuras se realizaron con Tikz con el editor KTikz, los cálculos y simulaciones con Scilab.