

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 1. Tydzień rozpoczynający się 25. lutego

Zadania

1. (2p.) Sprawdzić, że:

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$$

$$(b) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

2. Sprawdzić, że

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1,$$

$$(b) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$$

3. Funkcją Γ -Eulera nazywamy wartość całki:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p > 0.$$

Wykazać, że $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Niech $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $\lambda > 0$. Obliczyć wartości całek:

$$(a) \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

$$(b) \int_0^{\infty} x f(x) dx.$$

5. Wykazać, że $D_n = n$, gdzie

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

6. (2p.) Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy dx$. Stosując podstawienie $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

7. Symbol \bar{s} oznacza średnią ciągu s_1, \dots, s_n . Udowodnić, że:

$$(a) \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - n \cdot \bar{x}^2,$$

$$(b) \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k - n \bar{x} \bar{y}.$$

8. (2p.) Dane są wektory $\vec{\mu}, X \in \mathbb{R}^n$ oraz macierz $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Niech $S = (X - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (X - \vec{\mu})$ oraz $Y = A \cdot X$, gdzie macierz A jest odwracalna. Sprawdzić, że $S = (Y - A\vec{\mu})^T (A \Sigma A^T)^{-1} (Y - A\vec{\mu})$.