

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 11

19 grudnia 2018 r.

Zajęcia 8 stycznia 2019 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

- L11.1.** 1 punkt Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta*.
- L11.2.** 1 punkt Niech $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ będzie układem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Udowodnij, że dla $0 \leq n \leq N$ wielomiany P_0, P_1, \dots, P_n tworzą bazę przestrzeni Π_n .
- L11.3.** 1 punkt Niech P_k ($1 \leq k \leq N$) będzie k -tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$.
- L11.4.** 2 punkty Udowodnij, że wielomiany Czebyszewa T_0, T_1, \dots, T_r ($r \in \mathbb{N}$) są ortogonalne względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g) := \sum_{k=0}^r p(u_k) f(u_k) g(u_k),$$

gdzie $u_k := \cos \frac{k\pi}{r}$ ($k = 0, 1, \dots, r$) oraz

$$p(u_k) := \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r), \\ 1 & (1 \leq k \leq r-1). \end{cases}$$

- L11.5.** 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k) g(x_k)$, gdzie x_0, x_1, \dots, x_N są parami różnymi punktami. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.
- L11.6.** 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x - c_1, \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$

$$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \quad (k = m, m-1, \dots, 0),$$

$$\text{wynik} := B_0,$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^m a_k P_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $P_m(x)$?

L11.7. 1 punkt Dwoma poznanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -8 + 4j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$).

L11.8. 1 punkt Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j := -8 + 4j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) odpowiednio wartości $2, -3, 1, -3, 2$. Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz takie stałe a, b, c , aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^4 [ax_j^2 + bx_j + c - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

(-) *Paweł Woźny*