Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Komentarz do wykładu z 27. lutego

Zadania

1. Prostszy dowód równości $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$.
   Zachodzą równości:
   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1, \quad \mathrm{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx.$$
   Jest zatem $\mathrm{E}(aX+b) = \int_{\mathbb{R}} (ax+b)\, f(x)\,dx = a\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx + b\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = a\mathrm{E}(X) + b$.
   Można powiedzieć ogólniej: jeżeli $Y = g(X)$, to $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f(x)\,dx$.

2. Definicja dystrybuanty zmiennej losowej.

   Definicja 1. *Niech X będzie zmienną losową. Dystrybuantą $F_X(t)$ nazywamy funkcję określoną jako $F_X(t) = P(X \leqslant t)$.*

   Jeżeli wiadomo o jakiej zmiennej losowej mówimy, to używamy oznaczenia $F(t)$. W wypadku dyskretnym (tu był błąd, przepraszam) $F_X(t) = \sum_{x_i \leqslant t} p_i$, w wypadku zmiennej typu ciągłego (tu – na szczęście – nie było błędu) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$.

3. Nawiązując do wypadku ciągłego i dystrybuanty $F(t)$ powołajmy się na tzw. "pierwsze główne twierdzenie rachunku całkowego".

   Twierdzenie 1.
   Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na zbiorze $\mathbb{R}$. Niech $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$. Jest wówczas:

   (a) funkcja $F(t)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$,
   (b) funkcja $F(t)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie t ciągłości funkcji $f(t)$, i w tychże punktach jest $F'(t) = f(t)$.

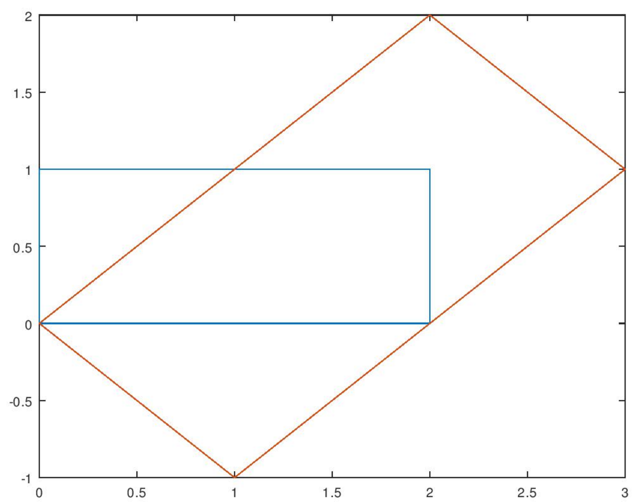
   Z czysto praktycznego (obliczeniowego) punktu widzenia interesuje nas podpunkt (b).

4. Dodatkowy przykład na zamianę zmiennych (czyli komentarz do zadania L1.6).
   Weźmy pod uwagę funkcję $f(x,y) = xy$ na obszarze $[0,2]\times[0,1]$. Sprawdzamy na początek, że
   $$\int_0^2\int_0^1 xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_{y=0}^{1} dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1.$$
   Wprowadźmy nowe zmienne $S = X+Y$, $T = X-Y$. Przekształcenie odwrotne to $X = \dfrac{S+T}{2}$ oraz $Y = \dfrac{S-T}{2}$. Obliczenie $J \equiv J_{xy}$ daje
   $$J_{xy} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \tag{1}$$
   Zauważmy też, że (pochodna funkcji odwrotnej to odwrotność pochodnej wyjściowej funkcji)
   $$J_{st} = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 = \frac{1}{J_{xy}}.$$
   Mamy więc dwa elementy dla funkcji $f(x(s,t), y(s,t))$:

(a) $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t)) = \dfrac{s^2-t^2}{4}$,

(b) $|J_{xy}| = \dfrac{1}{2}$

Do określenia pozostaje jeszcze znalezienie obszaru całkowania. Wprawdzie $s \in [0,3],\ t \in [-1,2]$ ale $\neg\left((s,t) \in [0,3]\times[-1,2]\right)$. Na rysunku poniżej zaznaczono obszary całkowania dla funkcji $f(x,y),\ g(s,t)$. Rozpoczynamy od stwierdzenia, że $s \in [0,3]$. Dla ustalonego s należy znaleźć przedział zmienności dla t. Wówczas przejdziemy do obliczenia całki $\int_0^3 \int_{l(s)}^{h(s)} g(s,t)\,|J|\,dt\,ds$. Symbole $l(s), h(s)$ oznaczają granice całkowania po zmiennej t przy ustalonej wartości s.



$$\begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 < \frac{s+t}{2} < 2 \\ 0 < \frac{s-t}{2} < 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} -s & < t < & 4-s \\ s-2 & < t < & s \end{cases}.$$

W podsumowaniu: dla ustalonego $s \in [0,3]$ jest $t \in [\max\{-s, s-2\}, \min\{4-s, s\}]$. Pod całką występuje wyrażenie $\dfrac{s^2-t^2}{8}\,dt\,ds$, natomiast całki oznaczone są następujące

$$\int_0^1 \int_{-s}^{s} \ldots + \int_1^2 \int_{s-2}^{s} \ldots + \int_2^3 \int_{s-2}^{4-s} \ldots = 1.$$

Witold Karczewski