Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 2. Tydzień rozpoczynający się 4. marca

Zadania

1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.
   (a) Sprawdzić, że $\Omega \in \Sigma$.
   (b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.
2. Niech $\Omega = \{a, b, c\}$.
   (a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.
   (b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.
3. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $S = \{1, 4\}$. Wyznaczyć najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S.
4. Wyznaczyć dystrybuantę i obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X o rozkładzie

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

5. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następująco:

x	$(-\infty; -2)$	$[-2; 3)$	$[3; 5)$	$[5; \infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

6. Niech X będzie zmienną losową typu dyskretnego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
7. Niech X będzie zmienną losową typu ciągłego. Udowodnić, że $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.
8. **2p.** Sprawdzić, że
   (a) $B(p, q + 1) = B(p, q)\,\dfrac{q}{p + q}$,
   (b) $B(p, q) = B(p, q + 1) + B(p + 1, q)$.
9. **2p.** Udowodnić, że $\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p + q)\,B(p, q)$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$ (czyli wszystkie potrzebne całki istnieją).

<u>Def. 1.</u> Niepusty zbiór Ω nazywamy **przestrzenią zdarzeń**.

<u>Def. 2.</u> Rodzinę podzbiorów $\Sigma \subset 2^{\Omega}$ nazywamy **σ-ciałem zbiorów** wtedy i tylko wtedy gdy
1. $\bar{\bar{\Sigma}} > 0$.
2. $A \in \Sigma \;\Rightarrow A^C \in \Sigma$.
3. $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma \;\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

<u>Def. 3.</u> Funkcję $P : \Sigma \to [0, 1]$ nazywamy **prawdopodobieństwem** wtedy i tylko wtedy gdy
1. $P(\Omega) = 1$.
2. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \;\Rightarrow P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_k)$.

<u>Def. 4.</u> Układ (Ω, Σ, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

<u>Def. 5.</u> Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad X^{-1}((-\infty, a]) \in \Sigma.$$

<u>Def. 6.</u> **Funkcją beta** nazywamy wartość całki

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}\,(1 - t)^{q-1}\,dt, \quad p > 0,\ q > 0.$$

Witold Karczewski