Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

16 stycznia 2019 r.

Zajęcia 22 stycznia 2019 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L13.1. 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

L13.2. 1 punkt O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 1$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

L13.3. 1 punkt Jak należy dobrać n, aby stosując złożony wzór Simpsona S_n obliczyć przybliżoną wartość całki $\displaystyle\int\limits_{-\pi/3}^{\pi} \cos(2x - \pi/2)\,\mathrm{d}x$ z błędem względnym $\le 10^{-10}$?

L13.4. 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

L13.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenie $T_{15,0}$ następujących całek:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2019x^5 - 2018x^4 + 2017x^3)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 25x^2}$, c) $\displaystyle\int_{1}^{2\pi} \frac{\sin(9x+1)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Skomentuj wyniki.

L13.6. 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki $I := \int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ (f – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału $[-3, 5]$ wystarczy wyznaczyć wartość funkcji f, aby obliczyć przybliżenie $T_{10,0}$ całki I?

L13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a,b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

L13.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dobierz węzły x_0, x_1, x_2 oraz współczynniki A_0, A_1, A_2 kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = Q_2(f)$$

zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 5.

L13.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ W języku `PWO++` procedura `LegendreZeros(`m`)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe m-tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu w stopnia mniejszego od $2n+2$ zachodzi

$$\int_{-2}^{3} w(x)\,\mathrm{d}x = Q_n(w),$$

gdzie

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

(–) Paweł Woźny