

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 14

23 stycznia 2019 r.

Zajęcia 29 stycznia 2019 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L14.1. 1 punkt Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\tilde{r} := A\tilde{x} - b$, $\hat{r} := A\hat{x} - b$ oraz wektory błędów $\tilde{e} := \tilde{x} - x$, $\hat{e} := \hat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów \tilde{x} , \hat{x} jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L14.2. 1 punkt Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & -2 & 2 \\ -10 & -8 & 36 & -41 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1} .

L14.3. 1 punkt Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 17 \\ 6 & 5 & 9 & 30 \\ 8 & 6 & 17 & 46 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 65 \\ 153 \\ 324 \\ 503 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L14.4. 1 punkt Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójkątnej.

L14.5. 1 punkt Udowodnij następujące twierdzenia:

- (a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).
- (b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynekami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L14.6. 1 punkt Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej. Jaka jest jego złożoność?

L14.7. 1 punkt Niech dana będzie macierz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & b_1 \\ & a_2 & & & & b_2 \\ & & a_3 & & & b_3 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy A_n . Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(-) *Paweł Woźny*