

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 15

30 stycznia 2019r.

- Lista ta zawiera **wybrane** zadania egzaminacyjne z ostatnich lat.
- Podanymi zadaniami **nie należy** nadmiernie sugerować się podczas przygotowań do egzaminu.^a

^aNie oznacza to jednak, że prawdopodobieństwo zdarzenia *10 bardzo podobnych zadań pojawi się na egzaminie* jest zerowe.

- L15.1.** W języku programowania PWO++ funkcja $\cos(x)$ oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\cos(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując funkcję \cos , zaproponuj algorytm wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
- L15.2.** Jakie znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej ma pojęcie uwarunkowania zadania?
- L15.3.** Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli: **a)** $f(x) = \ln(x)$, **b)** $f(x) = (x - 1)^{10}$.
- L15.4.** Podaj definicję zadania źle uwarunkowanego, a następnie zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- L15.5.** Załóżmy, że liczby x_0, x_1, \dots, x_n są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?
- L15.6.** Wytlumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^2 + 2} + x)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.
- L15.7.** Dla $x \approx 0$ obliczanie wartości wyrażenia $x^{-5}(\sin(3x) - 3x + 9x^3/2)$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku. Zakładając, że $|x| \leq \frac{1}{10}$, zaproponuj taki sposób obliczenia wartości tego wyrażenia, aby mieć pewność, że błąd bezwzględny nie przekracza 10^{-7} .
- L15.8.** Sprawdź czy następujący algorytm jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=x[0];

for i from 1 to 4
do
    S:=3*S+x[i]
od;

return(S)
```

L15.9. Niech dany będzie wielomian $w(x) := a_1x/3! - a_3x^3/5! + a_5x^5/7! - a_7x^7/9!$. Rozważmy następujący algorytm obliczania jego wartości w punkcie $x \in \mathbb{R}$:

```

w:=a[7]

for n from 3 downto 1
do
    w:=a[2*n-1]-x^2/(2*n+3)/(2*n+2)*w
od

return(w*x/2/3)

```

Przyjmując, że a_1, a_3, a_5, a_7 oraz x są liczbami maszynowymi, sprawdź czy algorytm ten jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L15.10. Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.

L15.11. Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ ($a > 0$). Jak dobrać x_0 ? Jak powinien wyglądać warunek *stopu*?

L15.12. Niech α będzie pierwiastkiem pojedynczym funkcji f ($f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Udowodnij, że wówczas rząd zbieżności metody Newtona wynosi $p = 2$.

L15.13. Zaproponuj efektywny algorytm obliczania z dużą dokładnością wartości \sqrt{a} ($a > 0$) wykorzystując **jedynie** operacje arytmetyczne (+, −, ·, /).

L15.14. Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych. Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać *warunek stopu*?

L15.15. Podaj efektywny algorytm wyznaczania wartości liczby naturalnej a , której cyframi dziesiętnymi (od najbardziej do najmniej znaczącej) są a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , gdzie $a_n \neq 0$.

L15.16. Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.

L15.17. Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.

L15.18. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_4 \in \Pi_4$ dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_k & 1 & 2 & 10 & 29 & 106 \end{array}.$$

L15.19. Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

$$\text{a) } \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_k & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}, \quad \text{b) } \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline y_k & -4 & -30 & 0 & 2 & 2 \end{array}.$$

L15.20. Funkcję $f(x) = \cos(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1} . Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8} ?$$

L15.21. Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ w węzłach postaci

$$x_{nk} := \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right) + \frac{1}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-15} ?$$

L15.22. Niech dane będą: liczba naturalna n i parami różne liczby rzeczywiste a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Zaproponuj algorytm znajdowania takich liczb c_0, c_1, \dots, c_n , że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x^n = c_0 + c_1(x - a_0) + c_2(x - a_0)(x - a_1) + \dots + c_n(x - a_0)(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}).$$

Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

L15.23. (a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklepanej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklepaną trzeciego stopnia dla danych

$$\frac{x_k \parallel -1 \mid 0 \mid 1}{y_k \parallel -1 \mid 2 \mid -3}.$$

L15.24. Niech dane będą wektory $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ oraz $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklepaną trzeciego stopnia (w skrócie: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). Jak pamiętamy, w języku PW0++ procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathbf{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsz zerowych** funkcji f znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka PW0++, a mianowicie `Solve3(a,b,c,d)` znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $\mathbf{a}x^3 + \mathbf{b}x^2 + \mathbf{c}x + \mathbf{d}$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

L15.25. Dana jest *postać Béziera* wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^n a_k B_k^n(t), \quad \text{gdzie} \quad B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \quad \text{dla} \quad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \leq k \leq n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

L15.26. Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0, 1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.

L15.27. Niech P będzie krzywą Béziera stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Ustalmy $t \in [0, 1]$. Zaproponuj algorytm wyznaczania $P(t)$ w czasie $O(n)$.

L15.28. Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n . W języku **PW0++** procedura **BezierCoeffs**(p, t) wyznacza taki wektor $c := [c_0, c_1, \dots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n . Współczynniki c_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p . Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być $n \leq 50$** .

W jaki sposób, używając procedury **BezierCoeffs** co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

L15.29. Pomiary (t_k, c_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k > 0$, $c_k > 1$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{(At^2+2018)^{-1}}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A .

L15.30. Wyznacz funkcję postaci $y(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 + 1}$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y_k & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array},$$

przy założeniu, że $s_2 = 10$, $s_4 = -3$, gdzie $s_m := \sum_{k=0}^n \frac{x_k^m}{(x_k^2 + 1)^2}$ ($m = 2, 4$).

L15.31. (a) Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) := f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

(b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_k & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}.$$

L15.32. Niech P_0, P_1, \dots, P_N będą wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k),$$

gdzie $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $a > 0$). Udowodnij, że jeśli α jest miejscem zerowym wielomianu P_k ($0 \leq k \leq N$), to także $-\alpha$ jest miejscem zerowym tego wielomianu.

L15.33. Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

L15.34. Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Q_n wynosi przynajmniej $n + 1$, to jest to kwadratura liniowa.

L15.35. Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.

L15.36. Opisz ideę kwadratur złożonych. Wyprowadź złożony wzór Simpsona.

L15.37. Opisz metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

L15.38. Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadraturami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?

L15.39. Znajdź rozkład LU macierzy $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystaj

otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [17, -33, 70, -112]^T$.

L15.40. Niech dana będzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Opracuj algorytm numerycznego wyznaczania rzędu macierzy A . Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.41. Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej A^{-1} i podaj jego złożoność.

L15.42. Niech dane będą macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, aby zachodziła równość $AX = B$. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

L15.43. Opracuj metodę wyznaczania rozkładu LU macierzy $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 \\ & a_2 & & & c_2 \\ & & a_3 & & c_3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Podaj jej złożoność.

(-) Paweł Woźny