

# Mathematics Foundation in AI

## Contents

1. 第一章: 机器学习与优化建模 .....	1
1.1. 矩阵奇异值分解 .....	1
1.2. 范数 .....	2
1.3. 酉矩阵和酉不变性 .....	3
1.4. 经验风险最小化与期望风险最小化模型 .....	4
1.5. 过拟合与欠拟合 .....	7
1.6. 最优化问题 .....	7
2. 第二章: 凸集与凸函数 .....	16
2.1. 凸集的定义 .....	16
2.2. 重要的凸集举例 .....	17
2.3. 保凸的运算 .....	19
2.4. 广义不等式与对偶锥 .....	20
2.5. 分离超平面定理 .....	23
2.6. 凸函数的数学准备 .....	24
2.7. 凸函数的定义与性质 .....	27
2.8. 保凸的运算 .....	29
2.9. 凸函数的推广 .....	32

## 1. 第一章: 机器学习与优化建模

### 1.1. 矩阵奇异值分解

#### 1.1.1. 定义

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则  $A$  的 **奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)** 为

$$A = U \Sigma V^T$$

其中  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  和  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为正交矩阵,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  为对角矩阵, 其对角线上的元素  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  (其中  $r = \min\{m, n\}$ ) 为  $A$  的奇异值, 且满足  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ .

#### 1.1.2. 分解方法

1. 计算  $A^T A$  和  $A A^T$  的特征值和特征向量.

2. 设  $A^T A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (按降序排列), 则  $A$  的奇异值为  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, r$ .
3.  $V$  的列向量为  $A^T A$  的单位特征向量.

## 1.2. 范数

### 1.2.1. 向量范数

若实值函数  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  满足下列条件:

1. 正定性:  $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
2. 齐次性:  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
3. 三角不等式:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

则  $\|\cdot\|$  为向量范数

定义  $L_p$  范数为

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left[ \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j\|^p \right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

特别地, 我们有  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_j |x_j|$ .

### 1.2.2. 矩阵范数

#### 1.2.2.1. 定义

若实值函数  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  满足下列条件:

1. 正定性:  $\|A\| \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}. \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}$ .
2. 齐次性:  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .
3. 三角不等式:  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

则  $\|\cdot\|$  为矩阵范数

#### 1.2.2.2. 一些常见的矩阵范数

- Frobenius 范数:

$$\|A\|_F = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}$$

- 核范数 (Nuclear norm):

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i$$

其中  $\sigma_i$  为  $A$  的奇异值,  $r = \min\{m, n\}$ . 或者我们也可以定义  $\sigma_i$  为  $A$  的非零奇异值,  $r = \text{rank}(A)$ .

- 谱范数 (Spectral norm):

$$\|A\|_2 = \sigma_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

其中  $\sigma_1$  为  $A$  的最大奇异值.

### 1.2.2.3. 矩阵内积

矩阵  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  的内积定义为

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

我们有 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\langle A, B \rangle \leq \|A\|_F \|B\|_F$$

## 1.3. 酉矩阵和酉不变性

### 1.3.1. 酉矩阵

设  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 如果  $U$  满足  $U^* U = U U^* = I$ , 则称  $U$  为 **酉矩阵 (Unitary Matrix)**. 这里  $U^*$  为  $U$  的共轭转置, 即先对  $U$  中的每个元素取共轭, 再转置.

特别地, 在实数域上, 酉矩阵称为 **正交矩阵 (Orthogonal Matrix)**, 即  $Q^T Q = Q Q^T = I$ .

### 1.3.2. 酉不变性

矩阵范数  $\|\cdot\|$  如果满足

$$\|UAV\| = \|A\|, \quad \forall U \in \mathbb{C}^{m \times m}, V \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ 为酉矩阵.}$$

则称  $\|\cdot\|$  为 **酉不变 (Unitary Invariant)** 的.

向量的  $\ell_2$  范数和矩阵的 Frobenius 范数均为酉不变的.

## 1.4. 经验风险最小化与期望风险最小化模型

### 1.4.1. 损失函数

损失函数是针对 **单个** 具体的样本而言的, 用于衡量模型预测值与真实值之间的差异. 损失函数通常记作  $\ell(y, f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))$ , 其中  $y$  是样本的真实标签,  $f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  是模型对输入  $\mathbf{x}$  的预测输出,  $\boldsymbol{\theta}$  是模型的参数.

### 1.4.2. 经验风险

经验风险 (Empirical Risk) 是在给定的训练数据集上计算的平均损失, 用于评估模型在训练数据上的表现. 设训练数据集为  $\{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ , 则经验风险定义为

$$R_{\text{emp}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(y_i, f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}))$$

### 1.4.3. 期望风险

期望风险 (Expected Risk) 是在整个数据分布上计算的平均损失, 用于评估模型在未见过的数据上的表现. 设数据分布为  $P(\mathbf{x}, y)$ , 则期望风险定义为

$$R_{\text{exp}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{(\mathbf{x}, y) \sim P}[\ell(y, f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}))]$$

期望风险刻画的就是统计意义上的 **母体**.

### 1.4.4. 结构风险

结构风险 (Structural Risk) 是在经验风险的基础上, 加入正则化项以控制模型复杂度, 从而防止过拟合. 结构风险定义为

$$R_{\text{srm}} = R_{\text{emp}} + \lambda J(\boldsymbol{\theta})$$

这里  $J(\boldsymbol{\theta})$  衡量模型 (参数) 的复杂度,  $\lambda$  是正则化参数, 用于平衡经验风险和模型复杂度之间的权重. 通常我们用正则化项来惩罚过于复杂的模型, 以提升模型的泛化能力. 在这种情况下, 监督学习就变成了一个最优化问题

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} R_{\text{srm}}(\boldsymbol{\theta}) = \min_{\boldsymbol{\theta}} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ell(y_i, f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta})) + \lambda J(\boldsymbol{\theta}) \right]$$

### 1.4.5. Bayes 风险

如果一个算法  $h^*$  在全体数据集  $\mathbb{D}$  上是最好的算法, 则它的期望风险  $R_{\text{exp}}(h^*)$  称为 **Bayes 风险** (Bayes Risk). 换句话说, Bayes 风险是所有可能的算法中期望风险最小的算法所达到的风险水平.

#### 1.4.6. 近似误差, 估计误差与泛化误差

记 1.  $\hat{h}_{\mathcal{H}}$  是基于有限样本集合  $S$  根据经验风险最小从有限算法集合  $\mathcal{H}$  中选出的最佳算法 (i.e. 经验风险最小). 2.  $h_{\mathcal{H}}^*$  是基于全体数据集  $\mathbb{D}$  根据期望风险最小从有限算法集合  $\mathcal{H}$  中选出的最佳算法 (i.e. 期望风险最小). 3. 假设  $h^*$  的真实 Bayes 风险为  $R^*$

从一般性考虑, 大范围的最优肯定优于子范围的最优, 即:

$$R^* \leq R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}^*) \leq R_{\text{emp}}(\hat{h}_{\mathcal{H}})$$

我们定义 1. **近似误差 (Approximation Error):**  $R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}^*) - R^*$ , 反映了算法集合  $\mathcal{H}$  的表达能力.

2. **估计误差 (Estimation Error):**  $R_{\text{emp}}(\hat{h}_{\mathcal{H}}) - R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}^*)$ , 反映了有限样本对算法选择的影响.

3. **泛化误差 (Generalization Error):**  $R_{\text{emp}}(\hat{h}_{\mathcal{H}}) - R^*$ , 这里把上面两个限制都加上, 可以看出泛化误差是近似误差和估计误差之和.

#### 1.4.7. 泛化误差限

引入 Hoeffding 不等式, 对于独立同分布的随机变量  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ , 且  $Z_i \in [a, b]$ , 设

$$P\left(\frac{1}{N}S_N - \mathbb{E}[Z] \geq \epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2N\epsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

特别地, 当  $Z_i \in [0, 1]$  时, 有

$$P\left(\frac{1}{N}S_N - \mathbb{E}[Z] \geq \epsilon\right) \leq \exp(-2N\epsilon^2)$$

我们考虑二分类问题, 损失函数为 0-1 损失函数, 即

$$\ell(y, f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})) = \begin{cases} 0, & y = f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \\ 1, & y \neq f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \end{cases}$$

设训练数据集  $T = \{(\mathbf{u}_i, v_i)\}_{i=1}^N$  独立同分布采样自总体分布  $P(\mathbf{u}, v)$ , 其中  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_i \in \{-1, 1\}$  设  $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$  为有限假设空间, 且  $\beta = |\mathcal{H}|$  为函数个数.

将 0-1 损失函数  $\ell$  视为随机变量, 由于始终有  $\ell \in [0, 1]$ , 因此可以使用 Hoeffding 不等式. 对于 **任意一个函数**  $h$ , 由

$$P(R_{\text{emp}}(h) - R_{\text{exp}}(h) \geq \epsilon) \leq \exp(-2N\epsilon^2)$$

现在我们计算在整个假设空间  $\mathcal{H}$  中, **存在某个函数**  $h$  使得上式成立的概率.

$$\begin{aligned} P(\exists h \in \mathcal{H} : R_{\text{emp}}(h) - R_{\text{exp}}(h) \geq \epsilon) &= P\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}} \{R_{\text{emp}}(h) - R_{\text{exp}}(h) \geq \epsilon\}\right) \\ &\leq \sum_{h \in \mathcal{H}} P(R_{\text{emp}}(h) - R_{\text{exp}}(h) \geq \epsilon) \\ &\leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \exp(-2n\epsilon^2) \\ &= |\mathcal{H}| \exp(-2n\epsilon^2) \\ &= \beta \exp(-2n\epsilon^2) \end{aligned}$$

我们假设这个满足条件的函数为  $h_{\mathcal{H}}$ , 则

$$P(R_{\text{emp}}(h_{\mathcal{H}}) - R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}) < \epsilon) \leq 1 - \beta \exp(-2n\epsilon^2)$$

令  $\delta = \beta \exp(-2n\epsilon^2)$ ,  $\epsilon(\delta, \beta, N) = \sqrt{\frac{1}{2N} \ln \frac{\beta}{\delta}}$ , 则有

$$P(R_{\text{emp}}(h_{\mathcal{H}}) - R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}) < \epsilon(\delta, \beta, N)) \geq 1 - \delta$$

这说明至少有  $1 - \delta$  的概率, 使得估计误差小于  $\epsilon(\delta, \beta, N)$ . 这就找到了估计误差的上界.

对于泛化误差的上节, 我们令

$$\hat{h}_{\mathcal{H}} = \arg \min_{h \in \mathcal{H}} R_{\text{emp}}(h)$$

则有

$$\begin{aligned} \| R_{\text{emp}}(\hat{h}_{\mathcal{H}}) - R^* \| &\leq \underbrace{R_{\text{emp}}(\hat{h}_{\mathcal{H}}) - R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}^*)}_{\text{估计误差}} + \underbrace{R_{\text{exp}}(h_{\mathcal{H}}^*) - R^*}_{\text{近似误差}} \\ &< \epsilon(\delta, \beta, N) + \text{近似误差} \end{aligned}$$

这就是泛化误差界, 它刻画了学习算法的经验风险与期望风险之间偏差和收敛速度.

由此可知: 1. 假设空间的复杂度  $\beta$  越大, 估计误差的上界越大, 泛化能力越差. 2. 训练样本数  $N$  越大, 估计误差的上界越小, 泛化能力越强.

## 1.5. 过拟合与欠拟合

### 1.5.1. 过拟合

过拟合 (Overfitting) 是指模型在训练数据上表现良好, 但在未见过的测试数据上表现较差的现象. 过拟合通常发生在模型过于复杂, 参数过多, 或训练数据量不足的情况下.

### 1.5.2. 欠拟合

欠拟合 (Underfitting) 是指模型在训练数据上和测试数据上都表现不佳的现象.

### 1.5.3. 模型评估

为了定量考虑这些问题, 往往将数据集进行随机分组, 一部分作为训练集 (Training Set), 用于模型训练; 另一部分作为测试集 (Test Set), 用于选择最合适的模型. 通过比较模型在训练集和测试集上的表现, 可以判断模型是否存在过拟合或欠拟合现象.

设在训练集  $T$  上, 我们训练后的模型为  $h_T(u)$ , 那么该模型对数据  $u$  的预测输出为  $f(\bar{u}) = \mathbb{E}_T[h_T(u)]$ .

设验证集样本的真实值为  $v$ , 由于会有噪声的存在, 样本的标签值可能与真实值有出入, 设标签值为  $v_T$ , 噪声  $v_\epsilon = v - v_T$ , 这里假设  $v_\epsilon \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

定义

1. **偏差 (Bias):**  $\text{Bias}(u) = v_T - f(\bar{u})$ , 衡量模型预测值的期望与真实值之间的差异.
2. **方差 (Variance):**  $\text{Var}(u) = \mathbb{E}_T[(h_T(u) - f(\bar{u}))^2]$ , 衡量模型预测值在不同训练集上的波动性.
3. **泛化误差 (Generalization Error):**  $\text{Err}(u) = \mathbb{E}_T[(h_T(u) - v)^2]$ , 衡量模型在新数据上的表现.

通过推导可以得到

$$\text{Err}(u) = \text{Bias}^2(u) + \text{Var}(u) + \sigma^2$$

## 1.6. 最优化问题

### 1.6.1. 最优化问题的一般形式

最优化问题的一般形式为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

其中

1.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为决策变量 (Decision Variable).
2.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为目标函数 (Objective Function).
3.  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  为可行域 (Feasible Region). 特别地, 当  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  时, 称为无约束最优化问题 (Unconstrained Optimization Problem).
4. 集合  $\mathcal{X}$  通常可以由约束函数  $c_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  来定义, 即

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : c_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m; c_i(\mathbf{x}) = 0, i = m + 1, m + 2, \dots, m + l\}$$

5. 在所有满足约束条件的决策变量中, 使目标函数取最小值的决策变量  $\mathbf{x}^*$  称为最优解 (Optimal Solution), 即

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x})$$

### 1.6.2. 最优化问题的类型

1. 当目标函数和约束函数均为线性函数时, 问题称为 **线性规划 (Linear Programming, LP)**.
2. 当目标函数和约束函数中至少有一个为非线性函数时, 问题称为 **非线性规划 (Nonlinear Programming, NLP)**.
3. 如果目标函数是二次函数而约束函数是线性函数, 则问题称为 **二次规划 (Quadratic Programming, QP)**.
4. 包含非光滑函数的问题称为 **非光滑优化 (Nonsmooth Optimization)**.
5. 不能直接求导数的问题称为 **无导数优化 (Derivative-free Optimization)**.
6. 变量只能取整数的问题称为 **整数规划 (Integer Programming, IP)**.
7. 在线性约束下极小化关于半正定矩阵的线性函数的问题称为 **半定规划 (Semidefinite Programming, SDP)**.
8. 最优解只有少量非零元素的问题称为 **稀疏优化 (Sparse Optimization)**.
9. 最优解是低秩矩阵的问题称为 **低秩优化 (Low-rank Optimization)**.

### 1.6.3. 全局最优解和局部最优解

对于可行解  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}$ , 定义如下概念:

1. 如果  $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$  对于所有  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  成立, 则称  $\bar{\mathbf{x}}$  为 **全局极小解 (Global Minimum)**.



2. 如果存在某个  $x \in \mathcal{X} \cap B(\bar{x}, \epsilon)$  成立, 其中  $B(\bar{x}, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \epsilon\}$ , 则称  $\bar{x}$  为 **局部极小解 (Local Minimum)**.
3. 进一步地, 如果  $f(\bar{x}) < f(x)$  对于所有  $x \in \mathcal{X} \cap B(\bar{x}, \epsilon)$  且  $x \neq \bar{x}$  成立, 则称  $\bar{x}$  为 **严格局部极小解 (Strict Local Minimum)**.
4. 如果一个点是局部极小解, 但不是严格局部极小解, 则称其为 **非严格局部极小解 (Non-strict Local Minimum)**.

#### 1.6.4. 优化算法的收敛性

对于实际的最优化问题, 我们常使用 **迭代法 (Iterative Method)** 来求解. 设  $\{x^k\}$  为算法产生的迭代序列, 如果在某种范数  $\|\cdot\|$  下, 对于某个局部 (或全局) 最优解  $x^*$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0$ , 则称迭代序列  $\{x^k\}$  **依点列收敛** 于  $x^*$ , 相应的算法称为是 **依点列收敛到局部 (或全局) 最优解**.

如果从任意的出发点  $x^0 \in \mathcal{X}$  开始, 迭代序列  $\{x^k\}$  都依点列收敛于某个局部 (或全局) 最优解  $x^*$ , 则称该算法 **全局依点列收敛到局部 (或全局) 最优解**. 对于 **凸优化** 问题, 因为任意局部最优解也是全局最优解, 所以全局依点列收敛到局部最优解等价于全局依点列收敛到全局最优解.

#### 1.6.5. 算法的渐进收敛速度

设  $\{x^k\}$  为算法产生的迭代序列,  $x^*$  为某个局部 (或全局) 最优解: 1. 算法 (点列)  $\mathcal{Q}$ -线性收敛 (Q-linear Convergence): 存在

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \mu \|x^k - x^*\|$$

2. 算法 (点列)  $\mathcal{Q}$ -超线性收敛 (Q-superlinear Convergence):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 0$$

3. 算法 (点列)  $\mathcal{Q}$ -次线性收敛 (Q-sublinear Convergence):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 1$$

这里超线性收敛速度最快, 次线性收敛速度最慢, 分别是线性收敛的两个极端.

4. 算法 (点列)  $\mathcal{Q}$ -二次收敛 (Q-quadratic Convergence): 存在

5. 算法 (点列)  $\mathcal{R}$ -线性收敛 (R-linear Convergence): 存在一个  $\mathcal{Q}$ -线性收敛到 0 的非负数列  $\{v_k\}$ , 使得对于所有  $k \geq k_0$ , 有

$$\|x^k - x^*\| \leq v_k$$

类似地可以定义  $\mathcal{R}$ -超线性收敛和  $\mathcal{R}$ -次线性收敛. 从  $\mathcal{R}$ -收敛速度的定义可以看出序列  $\{v_k\}$  的收敛速度被另一个序列  $\{v_k\}$  所控制, 当知道  $v_k$  的形式时, 我们也称算法 (点列) 的收敛速度为  $\mathcal{O}(v_k)$ .

### 1.6.6. 优化算法的收敛准则

在实际应用中, 由于计算资源和时间的限制, 我们通常不会让算法无限迭代下去, 而是设定一个合理的停止准则 (Stopping Criterion), 当满足该准则时, 算法停止迭代并输出当前的解作为最终结果.

对于无约束优化问题, 常用的收敛准则有

$$\frac{f(x^k) - f(x^*)}{\max\{|f(x^*)|, 1\}} < \epsilon_1, \quad \|\nabla f(x^k)\| < \epsilon_2$$

其中  $\epsilon_1, \epsilon_2$  为预设的精度阈值,  $x^*$  为问题的最优解 (如果已知的话). 这个准则结合了目标函数值的变化和梯度的大小, 能够较好地反映算法的收敛情况.

对于有约束优化问题, 还需要考虑约束违反度, 即要求最后得到的点满足

$$\begin{aligned} \max\{c_i(x^k), 0\} &< \epsilon_3, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ |c_i(x^k)| &< \epsilon_4, \quad i = m + 1, m + 2, \dots, m + l \end{aligned}$$

其中  $\epsilon_3, \epsilon_4$  为预设的精度阈值. 这个准则确保了最终解不仅在目标函数上接近最优, 还满足约束条件.

### 1.6.7. 最优化的实例

#### 1.6.7.1. 最小二乘法线性回归

给定训练数据集  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ , 其中  $x_i \in \mathbb{R}^n$  为输入特征,  $y_i \in \mathbb{R}$  为目标值. 我们假设模型为线性模型, 即

$$f(x; \theta) = \theta^T x$$

其中  $\theta \in \mathbb{R}^n$  为模型参数. 我们使用均方误差 (MSE) 作为损失函数, 即  $\ell(y, f(x; \theta)) = (y - f(x; \theta))^2$ . 如果有偏置项, 则可以将输入特征扩展为  $x' = [1, x^T]^T$ , 参数扩展为  $\theta' = [\theta_0, \theta^T]^T$ , 其中  $\theta_0$  为偏置项.

我们定义 **增广矩阵**  $\tilde{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbb{R}^{N \times n}$  和 **目标值向量**  $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \in \mathbb{R}^N$ . 则经验风险可以写成矩阵形式

$$R_{\text{emp}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \| \tilde{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y} \|_2^2$$

最优化问题就为  $\min_{\boldsymbol{\theta}} R_{\text{emp}}(\boldsymbol{\theta})$ . 这个问题有解析解

$$\boldsymbol{\theta}^* = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \mathbf{y}$$

### 1.6.7.2. 岭回归

岭回归 (Ridge Regression) 是在最小二乘法的基础上, 引入  $L_2$  正则化项以防止过拟合. 岭回归的目标函数为

$$R_{\text{ridge}}(\boldsymbol{\theta}) = \| \tilde{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y} \|_2^2 + \lambda \| \boldsymbol{\theta} \|_2^2$$

$$\boldsymbol{\theta}^* = (\tilde{X}^T \tilde{X} + \lambda I)^{-1} \tilde{X}^T \mathbf{y}$$

**岭回归的几何解释:** 岭回归的最优化问题

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \| \tilde{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y} \|_2^2 + \lambda \| \boldsymbol{\theta} \|_2^2$$

等价于约束最优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}} \quad & \| \tilde{X}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y} \|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \| \boldsymbol{\theta} \|_2^2 \leq t \end{aligned}$$

这个约束条件定义了一个以原点为中心的球体, 岭回归的解  $\boldsymbol{\theta}^*$  必须位于这个球体内.

**Woodbury-Sherman-Morrison 公式:** 回顾岭回归的解析解

$$\boldsymbol{\theta}^* = (\tilde{X}^T \tilde{X} + \lambda I)^{-1} \tilde{X}^T \mathbf{y}$$

设这里  $X$  的维度为  $N \times D$ , 其中  $N$  为样本数,  $D$  为特征数. 那么  $(\tilde{X}^T \tilde{X} + \lambda I)$  的维度为  $D \times D$ . 当  $D$  很大时, 计算其逆矩阵的时间复杂度为  $\mathcal{O}(D^3)$ , 这在高维数据下是无法接受的.

这时, Woodbury-Sherman-Morrison 公式就派上用场了. 该公式指出, 对于  $2 \times 2$  的可逆分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  满足  $A$  和  $D$  可逆, 则有

$$(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} = A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}$$

令  $A = \lambda I$ ,  $B = \tilde{X}^T$ ,  $C = -\tilde{X}$ ,  $D = I$ , 则有

$$(\tilde{X}^T \tilde{X} + \lambda I)^{-1} \tilde{X}^T = \tilde{X}^T (\lambda I + \tilde{X} \tilde{X}^T)^{-1}$$

这里的计算复杂度为  $\mathcal{O}(N^3)$ . 所以当  $N < D$  时, 使用 Woodbury-Sherman-Morrison 公式可以显著降低计算复杂度.

### 1.6.7.3. 稀疏优化

给定  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 且有  $m \ll n$ . 我们希望找到一个尽可能稀疏的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $Ax = b$ .

注意到由于  $m \ll n$ , 该线性方程组有无穷多解, 重构出原始信号看似很难. 但是, 这些解当中大部分是不重要的, 真正有用的解是所谓的 **稀疏解**, 即原始信号中大部分元素为零, 只有少数元素非零. 因此, 我们可以将问题转化为

$$\begin{aligned} (\ell_p) : \min \|x\|_p \\ \text{s.t. } Ax = b, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

当  $p = 0$  时,  $\|x\|_0$  表示  $x$  中非零元素的个数, 该问题称为  $\ell_0$  优化问题. 该问题是 NP-hard 的,  $\|x\|_0$  的取值只能为整数, 不能使用常规的最优化方法. 同时需要注意的是,  $\ell_1$  和  $\ell_2$  的解也不一定相同.

**LASSO 问题:** 考虑带  $\ell_1$  正则化的最小二乘问题, 即

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

该问题称为 LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) 问题, 该问题可以被看作是  $\ell_1$  优化问题的一个变种. 通过调整正则化参数  $\lambda$ , 可以控制解的稀疏性.

### 1.6.7.4. 回归分析

考虑线性模型  $b = Ax + \epsilon$ , 假设  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$ , 则我们可以得到给定  $A$  和  $x$  时, 观测值  $b$  的条件概率分布为

$$p(b | A, x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma^m} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|Ax - b\|_2^2\right)$$

我们希望估计一个最优的  $x$  使得观测值  $b$  出现的概率最大, 即最大化对数似然函数

$$\max_x \log p(b | A, x) = \max_x -\frac{1}{2\sigma^2} \|Ax - b\|_2^2 + \text{const}$$

可以看到这个最优化问题等价于最小化  $\|Ax - b\|_2^2$ , 这就是最小二乘法. 也就是说, 当假设误差是高斯白噪声时, 最小二乘解就是线性回归模型的最大似然解.

**Tikhonov 正则化:** 为了平衡数据拟合和模型复杂度, 我们可以引入正则化项, 得到 Tikhonov 正则化问题

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$$

这就类似于最小二乘法中的岭回归. 由于正则项的存在, 该问题的目标函数为强凸函数, 解的性质得到改善

**LASSO 问题及其变形** 另一方面, 如果希望解  $x$  是稀疏的, 可以添加  $\ell_1$  正则化项, 得到 LASSO 问题

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$$

也可以考虑问题

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_1 \leq t$$

考虑到噪声  $\epsilon$  的存在, 我们可以将约束条件改为  $\|Ax - b\|_2^2 \leq \nu$ , 这样就得到了一个等价的优化问题

$$\min_x \|x\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|Ax - b\|_2^2 \leq \nu$$

如果参数  $x$  具有 **分组稀疏性** (Group Sparsity), 即  $x$  的分量可分为  $G$  个组, 每个组内的参数必须同时为零或同时非零, 为此人们提出了 **分组 LASSO 问题**:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \mu \sum_{g=1}^G \sqrt{n_g} \|x_{\mathcal{J}_g}\|_2$$

其中  $\mathcal{J}_g$  是第  $g$  个组的索引, 且

$$n_g = |\mathcal{J}_g|, \quad \sum_{g=1}^G n_g = n$$

这里的正则项也可以被看做是  $\|x_{\mathcal{J}_g}\|_2$  的  $\ell_1$  范数, 也就是对每个组的  $\ell_2$  范数求和. 分组 LASSO 问题把稀疏性从单个特征提升到了组的级别上, 但不要求组内的稀疏性.

如果需要同时保证分组以及单个特征的稀疏性, 可以考虑将两种正则项结合起来, 即有稀疏分组 LASSO 模型

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \mu \sum_{g=1}^G \sqrt{n_g} \|x_{\mathcal{J}_g}\|_2 + \lambda \|x\|_1$$

当特征  $x$  本身不稀疏但在某种变换下是稀疏的, 则需调整正则项

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|Fx\|_1$$

特别地, 如果要求  $x$  相邻元素之间是稀疏的 (i.e. 相邻元素之间的差分稀疏), 则可以取

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

**逻辑回归 (Logistic Regression):** 考虑二分类问题, 设  $y \in \{-1, 1\}$ , 输入特征为  $x \in \mathbb{R}^n$ . 我们假设输出  $y$  的条件概率分布为

$$p(y = 1 | x) = \sigma(w^T x) = \frac{1}{1 + e^{-w^T x}};$$

$$p(y = -1 | x) = 1 - p(y = 1 | x) = \frac{e^{-w^T x}}{1 + e^{-w^T x}}$$

这可以被统一为

$$p(y | x) = \frac{1}{1 + e^{-yw^T x}}$$

由此可以写出对数似然函数

$$\ell(w) = \sum_{i=1}^N \log p(y_i | x_i) = - \sum_{i=1}^N \log(1 + e^{-y_i w^T x_i})$$

在此基础上加上正则项

$$R_{\text{emp}}(w) = \sum_{i=1}^N \log(1 + e^{-y_i w^T x_i}) + \lambda \|w\|_2^2$$

### 1.6.7.5. 支持向量机 (SVM)

TODO

### 1.6.7.6. 低秩矩阵恢复

我们考虑下面的实际问题:

某视频网站提供了约 48 万用户对 1 万 7 千多部电影的上亿条评级数据, 希望对用户的电影评级进行预测, 从而改进用户电影推荐系统, 为每个用户更有针对性地推荐影片. 显然每一个用户不可能看过所有的电影, 每一部电影也不可能收集到全部用户的评级. 电影评级由用户打分 1 星到 5 星表示, 记为取值 1 ~ 5 的整数. 我们将电影评级放在一个矩阵  $M$  中,  $M$  的每一行表示不同用户, 每一列表示不同电影,  $M_{ij}$  表示用户  $i$  对电影  $j$  的评级. 由于每个用户只看过部分电影, 因此矩阵  $M$  是一个稀疏矩阵, 其中大部分元素为 0.

由于用户对电影的评级受多种因素影响, 如用户的兴趣、电影的类型、导演等, 因此我们可以假设矩阵  $M$  的秩较低. 我们形式化这个问题为, 令  $\Sigma$  是矩阵  $M$  中所有已知评级元素的下标的集合, 即  $\Sigma = \{(i, j) : M_{ij} \neq 0\}$ , 我们希望找到一个低秩矩阵  $X$  使得

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \text{rank}(X) \quad \text{s.t.} \quad X_{ij} = M_{ij}, \quad (i, j) \in \Sigma$$

回顾矩阵的核范数定义为

$$\|X\|_* = \sum_{i=1}^{\min(m, n)} \sigma_i(X)$$

其中  $\sigma_i(X)$  是矩阵  $X$  的奇异值. 由于核范数是一个凸函数, 因此我们可以将上述问题转化为

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|X\|_* \quad \text{s.t.} \quad X_{ij} = M_{ij}, \quad (i, j) \in \Sigma$$

考虑到观测可能出现误差, 我们可以给出该问题的二次罚函数形式

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|X\|_* + \lambda \sum_{(i, j) \in \Sigma} (X_{ij} - M_{ij})^2$$

又考虑到低秩矩阵可以被分解  $X = LR^T$ , 其中  $L \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $r \ll \min(m, n)$  是矩阵的秩, 因此我们可以将问题转化为

$$\min_{L \in \mathbb{R}^{m \times r}, R \in \mathbb{R}^{n \times r}} \sum_{(i,j) \in \Sigma} (L_i^T R_j - M_{ij})^2 + \alpha \|L\|_F^2 + \beta \|R\|_F^2$$

这里  $\|L\|_F$  和  $\|R\|_F$  分别是矩阵  $L$  和  $R$  的 Frobenius 范数, 它的作用是消除  $L$  和  $R$  在放缩意义下的不唯一性,  $\alpha$  和  $\beta$  是正则化参数.

## 2. 第二章: 凸集与凸函数

### 2.1. 凸集的定义

#### 2.1.1. 凸集的几何定义

在  $\mathbb{R}^n$  中, 对于任意两个点  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , 连接这两点的直线定义为

$$\{\theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}\}$$

特别地, 当  $\theta \in [0, 1]$  时, 该直线退化为线段.

如果过集合  $\mathcal{C}$  中任意两点  $x_1, x_2$  的 **直线** 都包含在  $\mathcal{C}$  中, 即

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{C}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in \mathbb{R}$$

则称集合  $\mathcal{C}$  是 **仿射集 (Affine Set)**. 如果过集合  $\mathcal{C}$  中任意两点  $x_1, x_2$  的 **线段** 都包含在  $\mathcal{C}$  中, 即

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{C}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in [0, 1]$$

则称集合  $\mathcal{C}$  是 **凸集 (Convex Set)**. 仿射集肯定是凸集.

#### 2.1.2. 凸集的性质

1. 如果  $\mathcal{S}$  是凸集, 则  $k\mathcal{S} = \{kx \mid x \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{R}\}$  也是凸集.
2. 如果  $\mathcal{S}$  和  $\mathcal{T}$  都是凸集, 则  $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{x + y \mid x \in \mathcal{S}, y \in \mathcal{T}\}$  也是凸集.
3. 如果  $\mathcal{S}$  和  $\mathcal{T}$  都是凸集, 则  $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$  也是凸集.
4. 凸集的内部 (Interior) 和闭包 (Closure) 也是凸集. 这里
  - 内部定义为 其中  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$ .
  - 闭包定义为  $\text{cl}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \{x : x \text{ is the limit point of } \mathcal{C}\}$ .

#### 2.1.3. 凸组合和凸包

形如

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k, \quad \theta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k; \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$$



的点称为点  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的 **凸组合 (Convex Combination)**

集合  $\mathcal{S}$  中所有点的凸组合构成的集合称为  $\mathcal{S}$  的 **凸包 (Convex Hull)**, 记为  $\text{conv}(\mathcal{S})$ . 显然,  $\text{conv}(\mathcal{S})$  是最小的包含  $\mathcal{S}$  的凸集.

同时, 我们也有  $\text{conv}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$  当且仅当  $\mathcal{S}$  是凸集.

### 2.1.4. 仿射组合和仿射包

形如

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k, \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$$

的点称为点  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的 **仿射组合 (Affine Combination)**. 仿射组合与凸组合的区别在于, 仿射组合的系数  $\theta_i$  可以为负数.

集合  $\mathcal{S}$  中所有点的仿射组合构成的集合称为  $\mathcal{S}$  的 **仿射包 (Affine Hull)**, 记为  $\text{aff}(\mathcal{S})$ . 显然,  $\text{aff}(\mathcal{S})$  是最小的包含  $\mathcal{S}$  的仿射集.

### 2.1.5. 锥组合和凸锥

相比于凸组合和仿射组合, 锥组合不要求系数之和为 1. 形如

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k, \quad \theta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$$

的点称为点  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的 **锥组合 (Conical Combination)**.

若集合  $\mathcal{S}$  中的任意点的锥组合都包含在  $\mathcal{S}$  中, 则称集合  $\mathcal{S}$  是 **凸锥 (Convex Cone)**.

## 2.2. 重要的凸集举例

### 2.2.1. 超平面和半空间

在  $\mathbb{R}^n$  中, 设  $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ , 则集合

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

称为 **超平面 (Hyperplane)**. 超平面将  $\mathbb{R}^n$  分成两个部分, 即

$$\mathcal{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}, \quad \mathcal{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$$

超平面是仿射集, 也是凸集.

**半空间 (Half-space)** 是指超平面  $\mathcal{H}$  的任一侧, 即  $\mathcal{H}_-$  或  $\mathcal{H}_+$ . 半空间是凸集, 但不是仿射集.

### 2.2.2. 多面体

**多面体 (Polyhedron)** 是指由有限个线性不等式和线性等式所定义的集合, 即

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Cx = d\}$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{l \times n}, d \in \mathbb{R}^l$ .  $x \leq$  和  $=$  分别表示逐元素的比较.

多面体是有限个半空间和超平面的交, 因此由凸集的性质可知, 其为凸集.

### 2.2.3. 范数球和椭球

**范数球 (Norm Ball)** 是指形如

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_c\| \leq r\}$$

$\|\cdot\|$  为某种范数. 范数球是凸集.

**椭球 (Ellipsoid)** 是指形如

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$$

的集合, 其中  $x_c \in \mathbb{R}^n$  为椭球心,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为对称正定矩阵. 椭球是凸集.

椭球也可以被表示为

$$\mathcal{E} = \{x_c + Au : \|u\|_2 \leq 1\}$$

其中  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  满足  $P = AA^T$ . 这里的  $A$  可以被看做是将单位球映射到椭球的线性变换矩阵.

### 2.2.4. 范数锥

**范数锥 (Norm Cone)** 是指形如

$$\mathcal{K} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t, t \geq 0\}$$

的集合, 其中  $\|\cdot\|$  为某种范数. 范数锥是凸锥. 特别地, 用  $\ell_2$  范数定义的范数锥称为二次锥

### 2.2.5. 特殊矩阵集合和 (半) 正定锥

• **对称矩阵集合:** 设  $\mathcal{S}^n$  表示所有  $n \times n$  实对称矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X = X^T\}$$

• **半正定矩阵集合:** 设  $\mathcal{S}_+^n$  表示所有  $n \times n$  实对称半正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succcurlyeq 0\}$$

这里  $X \succcurlyeq 0$  表示矩阵  $X$  是半正定的, 即对于任意非零向量  $z \in \mathbb{R}^n$ , 有  $z^T X z \geq 0$ .

我们一般称  $\mathcal{S}_+^n$  为 **半正定锥 (Positive Semidefinite Cone)**, 它是一个凸锥.

### 对称矩阵的半正定序

对称矩阵  $X, Y \in \mathcal{S}^n$  的 **半正定序 (Semidefinite Ordering)** 定义为

$$X \succcurlyeq Y \Leftrightarrow X - Y \text{ is positive semidefinite}$$

可以证明这是一个偏序 (Partial Order), 即对于任意  $X, Y, Z \in \mathcal{S}^n$ , 有

- $X \succcurlyeq X$  (自反性)
- 如果  $X \succcurlyeq Y$  且  $Y \succcurlyeq X$ , 则  $X = Y$  (反对称性)
- 如果  $X \succcurlyeq Y$  且  $Y \succcurlyeq Z$ , 则  $X \succcurlyeq Z$  (传递性)

- **正定矩阵集合:** 设  $\mathcal{S}_{++}^n$  表示所有  $n \times n$  实对称正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}_{++}^n = \{X \in \mathcal{S}^n : X \succ 0\}$$

## 2.3. 保凸的运算

### 2.3.1. 仿射变换的保凸性

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是一个仿射变换, 即  $f(x) = Ax + b$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , 则

- 凸集在  $f$  下的像是凸集

$$f(\mathcal{C}) = \{f(x) : x \in \mathcal{C}\} \text{ is convex if } \mathcal{C} \text{ is convex}$$

- 凸集在  $f$  下的原像是凸集

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = \{x : f(x) \in \mathcal{D}\} \text{ is convex if } \mathcal{D} \text{ is convex}$$

例子:

1. 线性矩阵不等式的解集

$$\{x \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m \preccurlyeq B\}$$

当  $A_i, B \in \mathcal{S}^m$  时, 是凸集. 这可以直接由仿射变换的保凸性得到.

2. 双曲锥

$$\left\{x \mid x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\right\}$$

当  $P \in \mathcal{S}_+^n$  时, 是凸锥. 这是因为双曲锥可以转化为二阶锥

$$\{x \mid \|Ax\|_2 \leq c^T x, c^T x \geq 0, A^T A = P\}$$

而二阶锥又可以通过二次锥  $\{(x, t) \mid \|x\|_2 \leq t, t \geq 0\}$  通过仿射变换得到.

### 2.3.2. 透视变换和分式线性变换的保凸性

• 透视变换  $P: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  定义为:

$$P(z) = P((x, t)) = \frac{x}{t}, \quad \text{dom } P = \{(x, t) : t \geq 0\}$$

这里  $\text{dom } P$  表示  $P$  的定义域. 透视变换下凸集的像和原像都是凸集.

• 分式线性变换  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  定义为:

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \quad \text{dom } f = \{x : c^T x + d \geq 0\}$$

分式线性变换下凸集的像和原像都是凸集.

## 2.4. 广义不等式与对偶锥

### 2.4.1. 适当锥

我们知道锥是凸集, 一个凸锥  $K \subset \mathbb{R}^n$  是适当锥, 当其还满足

1.  $K$  是闭集
2.  $K$  是实心的, 即  $\text{int } K \neq \emptyset$
3.  $K$  是尖的, 即内部不包含直线, 即如果  $x \in K$  且  $-x \in K$ , 则  $x = 0$ .

#### 闭集和内部

- 集合  $\mathcal{C}$  是 **闭集**, 如果对于任意收敛到  $x$  的点列  $\{x_k\}$ ,

$$\forall k, x_k \in \mathcal{C} \Rightarrow x \in \mathcal{C}.$$

- 集合  $\mathcal{C}$  的 **内部** 定义为

$$\text{int } \mathcal{C} = \{x \in \mathcal{C} : \exists r > 0, B(x, r) \subseteq \mathcal{C}\}$$

这里  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$ .

适当锥的例子有:

1. 非负卦限  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
2. 半正定锥  $K \in \mathcal{S}_+^n$
3.  $[0, 1]$  上的有限非负多项式

$$\left\{ p(t) = \sum_{i=0}^n p_i t^i \mid p(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1] \right\}$$

### 2.4.2. 广义不等式

广义不等式是一种偏序 (不必要保证所有对象都具有可比较性), 可以使用适当锥诱导. 对于适当锥  $K \subset \mathbb{R}^n$ , 定义广义不等式

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

严格广义不等式定义为

$$x <_{\cdot_K} y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$$

例子 坐标分量不等式:

$$x \leq_{\mathbb{R}_+^n} y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

### 性质

1. 自反性:  $x \leq_K x$
2. 反对称性: 如果  $x \leq_K y$  且  $y \leq_K x$ , 则  $x = y$
3. 传递性: 如果  $x \leq_K y$  且  $y \leq_K z$ , 则  $x \leq_K z$
4. 保持加法: 如果  $x \leq_K y$ , 则  $x + z \leq_K y + z$
5. 保持非负数乘法: 如果  $x \leq_K y$  且  $\alpha \geq 0$ , 则  $\alpha x \leq_K \alpha y$

### 2.4.3. 对偶锥

令锥  $K \subset \Omega$ , 则  $K$  的对偶锥定义为

$$K^* = \{y \in \Omega : \langle x, y \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K\}$$

对偶锥是相对于锥  $K$  定义的, 我们把对偶锥为自身的锥称为 **自对偶锥 (Self-dual Cone)**.

### 例子

1. 非负卦限  $\mathbb{R}_+^n$  是自对偶锥. 这是显然的.
2. 半正定锥  $\mathcal{S}_+^n$  是自对偶锥.

### 证明: 半正定锥是自对偶锥

第一步, 证明  $\mathcal{S}_+^n \subseteq (\mathcal{S}_+^n)^*$ . 对任意  $X \in \mathcal{S}_+^n$  和  $Y \in \mathcal{S}_+^n$ , 有  $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY) = \text{tr}(Y^{1/2}XY^{1/2}) \geq 0$ . (利用迹的循环不变性);

第二步, 证明  $(\mathcal{S}_+^n)^* \subseteq \mathcal{S}_+^n$ . 设  $Z \in (\mathcal{S}_+^n)^*$ , 则对于任意  $Y \in \mathcal{S}_+^n$ , 有  $\langle Z, Y \rangle = \text{tr}(ZY) \geq 0$ . 假设  $Z \notin \mathcal{S}_+^n$ , 则存在  $u \in \mathbb{R}^n$  使得  $u^T Z u < 0$ . 令  $Y = uu^T$ , 则  $Y \in \mathcal{S}_+^n$ , 但  $\langle Z, Y \rangle = \text{tr}(Zuu^T) = u^T Z u < 0$ , 矛盾. 因此,  $Z \in \mathcal{S}_+^n$ .

注: 对于  $X \in \mathcal{S}_+^n$ , 可分解为  $X = Q\Lambda Q^T$ , 其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . 由此我们可以定义  $X^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T \in \mathcal{S}_+^n$

3. 锥  $K = \{(x, t) \mid \|x\|_p \leq t, t \geq 0, p \geq 1\}$  的对偶锥为

$$K^* = \{(y, s) \mid \|y\|_q \leq s, s \geq 0, (p, q) \text{ are dual}\}.$$

因此二次锥 ( $p = 2$ ) 是自对偶锥.

### 对偶范数

设  $\|\cdot\|$  是  $\mathbb{R}^n$  上的某种范数, 则其 **对偶范数** 定义为

$$\|y\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, y \rangle = \sup_{\|x\| \leq 1} x^T y$$

这里的  $y$  定义在原范数的对偶空间中, 对于  $\mathbb{R}^n$  来说, 对偶空间仍然是  $\mathbb{R}^n$ .

**Hölder 不等式** 给出了范数与其对偶范数之间的关系:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|_*$$

特别地, 对于  $\ell_p$  范数, 其对偶范数为  $\ell_q$  范数, 其中  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 这是 Hölder 不等式的一个推论

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

#### 2.4.4. 对偶锥的性质

设  $K$  是一个锥,  $K^*$  是其对偶锥, 则

1.  $K^*$  是锥

2.  $K^*$  是闭集, 且是凸集
3. 若  $\text{int } K^* \neq \emptyset$ , 则  $K^*$  是尖的, 即内部不含有直线
4. 若  $K$  的闭包是尖的, 则  $K^*$  是实心的, 即  $\text{int } K^* \neq \emptyset$
5. 若  $K$  是适当锥, 则  $K^*$  也是适当锥
6.  $K^{**}$  是  $K$  的凸包. 特别地, 若  $K$  是凸且闭的, 则  $K^{**} = K$ .

### 2.4.5. 对偶锥诱导的广义不等式

既然适当锥的对偶锥仍是适当锥, 则可以使用对偶锥诱导广义不等式. 设  $K$  是适当锥, 则  $K^*$  诱导的广义不等式定义为

$$x \underset{K^*}{\leq} y \Leftrightarrow y - x \in K^*$$

使用对偶广义不等式的好处是, 对偶锥始终是闭且凸的, 并可将一个偏序问题转换为满足一个偏序条件的全序问题.

## 2.5. 分离超平面定理

### 2.5.1. 定理陈述

超平面是空间中一类特殊的凸集, 可以证明  $\mathbb{R}^n$  空间中的超平面恰好是  $n - 1$  维的. 我们可以用超平面分离不相交的凸集:

如果  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}$  是不相交的凸集, 则存在超平面将它们分开 (**软划分**), 即存在一个线性函数  $f(x) = a^T x + b$  使得

$$f(x) \begin{cases} \leq 0 & \forall x \in \mathcal{C} \\ \geq 0 & \forall x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

如果有任何一个集合不是凸集, 我们无法使用超平面对其划分, 而必须使用更加复杂的平面. 这就给划分问题带来了巨大的挑战.

### 2.5.2. 严格分离定理

如果  $\mathcal{C}$  和  $\mathcal{D}$  是不相交的凸集, 且  $\mathcal{C}$  是闭集,  $\mathcal{D}$  是紧集, 则存在超平面将它们严格分开 (**硬划分**), 即存在一个线性函数  $f(x) = a^T x + b$  使得

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \forall x \in \mathcal{C} \\ > 0 & \forall x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

该定理的退化形式即  $\mathcal{D}$  退化为单点集  $x_0$ , 则存在超平面将  $x_0$  与闭凸集  $\mathcal{C}$  严格分开.

### 2.5.3. 支撑超平面

上述严格分离定理的退化形式要求  $x_0 \notin \mathcal{C}$ . 而当  $x_0$  恰好落在  $\mathcal{C}$  的边界上时, 我们可以构造超平面:

给定集合  $\mathcal{C}$  以及其边界上的点  $x_0$ , 如果  $a \neq 0$  满足对  $\forall x \in \mathcal{C}$ , 有  $a^T x \leq a^T x_0$ , 那么称集合

$$\mathcal{H} = \{x : a^T x = a^T x_0\}$$

为  $\mathcal{C}$  在点  $x_0$  处的 **支撑超平面**.

### 2.5.4. 支撑超平面定理

如果  $\mathcal{C}$  是凸集, 则对于  $\mathcal{C}$  边界上的任意点  $x_0$ , 都存在支撑超平面.

## 2.6. 凸函数的数学准备

### 2.6.1. 梯度

给定函数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 且  $f$  在  $x$  的一个邻域内有意义, 若存在向量  $g \in \mathbb{R}^n$  满足

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(x+p) - f(x) - g^T p}{\|p\|} = 0$$

其中  $\|\cdot\|$  是某种范数, 则称  $f$  在点  $x$  处是 **Fréchet 可微**, 向量  $g$  称为  $f$  在点  $x$  处的 **梯度**, 记为  $\nabla f(x)$ .

特别地, 若我们把  $p$  写成  $p = t\mathbf{u}_i$ , 其中  $t \in \mathbb{R}$  是标量,  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n$  是单位向量, 则有

$$\nabla f(x)^T \mathbf{u}_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\mathbf{u}_i) - f(x)}{t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

从而

$$\nabla f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]^T.$$

### 2.6.2. Hessian 矩阵

如果函数  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  在点  $x$  处是 Fréchet 可微的, 且其梯度  $\nabla f(x)$  在点  $x$  处也是 Fréchet 可微的, 则称  $f$  在点  $x$  处是 **二阶 Fréchet 可微**, 此时定义  $f$  在点  $x$  处的 **Hessian 矩阵** 为



$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

若  $\nabla^2 f(x)$  在  $D$  的每一点都存在, 则称  $f$  在  $D$  上是二阶 Fréchet 可微的. 如果  $\nabla^2 f(x)$  还在  $D$  上连续, 则称  $f$  在  $D$  上是二阶连续 Fréchet 可微的, 此时可以证明 Hessian 矩阵是对称的, 即  $\nabla^2 f(x) = (\nabla^2 f(x))^T$ .

### 2.6.3. 矩阵变量函数的导数

多元函数梯度的定义可以推广到变量是矩阵的情形, 对于函数  $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , 若存在矩阵  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  满足

$$\lim_{\|V\| \rightarrow 0} \frac{f(X+P) - f(X) - \langle G, V \rangle}{\|V\|} = 0,$$

其中  $\|\cdot\|$  是某种矩阵范数,  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ , 则称  $f$  在点  $X$  处是 **Fréchet 可微**, 矩阵  $G$  称为  $f$  在点  $X$  处的 **梯度**, 记为  $\nabla f(X)$ . 令  $x_{ij}$  为矩阵  $X$  的第  $i$  行第  $j$  列元素, 则

$$(\nabla f(X))_{ij} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_{ij}}.$$

在实际应用中, 矩阵 Fréchet 可微的概念并不常用, 我们需要介绍另一种定义, 即 Gâteaux 可微. 对于函数  $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , 若存在矩阵  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  满足

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X+tV) - f(X)}{t} = \langle G, V \rangle, \quad \forall V \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

则称  $f$  在点  $X$  处是 **Gâteaux 可微**, 矩阵  $G$  称为  $f$  在点  $X$  处的 **梯度**, 记为  $\nabla f(X)$ . 这里  $V$  可以被看做是  $X$  的一个 **方向**.

可以证明, 如果  $f$  在点  $X$  处是 Fréchet 可微的, 则  $f$  在点  $X$  处也是 Gâteaux 可微的, 且两者的梯度相同. 反之, 如果  $f$  在点  $X$  处是 Gâteaux 可微的, 且  $\nabla f(X)$  在  $X$  的某个邻域内连续, 则  $f$  在点  $X$  处也是 Fréchet 可微的, 且两者的梯度相同.

### 矩阵变量函数的导数的例子

1. 对于线性函数  $f(X) = \text{tr}(AX^T B)$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X + tV) - f(X)}{t} = \text{tr}(AV^T B) = \langle BA, V \rangle, \quad \forall V \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

因此  $\nabla f(X) = BA^T$ .

2. 对于二次函数  $f(X) = \frac{1}{2} \|X - A\|_F^2 = \frac{1}{2} \text{tr}((X - A)(X - A)^T)$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 取任意方向  $V$  以及充分小的  $t \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} f(X + tV) - f(X) &= \frac{1}{2} \text{tr}((X + tV - A)(X + tV - A)^T) - \frac{1}{2} \text{tr}((X - A)(X - A)^T) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(t^2 VV^T + t(X - A)V^T + tV(X - A)^T) \\ &= t \text{tr}((X - A)V^T) + \mathcal{O}(t^2) \\ &= t \langle X - A, V \rangle + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

所以有  $\nabla f(X) = X - A$ .

#### 2.6.4. 广义实值函数与适当函数

令  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  为广义实数空间, 则映射  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  称为 **广义实值函数**.

给定广义实值函数  $f$  和非空集合  $\mathcal{X}$ , 如果存在  $x \in \mathcal{X}$  使得  $f(x) < +\infty$ , 并且对任意的  $x \in \mathcal{X}$ , 都有  $f(x) > -\infty$ , 则称  $f$  在  $\mathcal{X}$  上是 **适当的 (Proper)**. 概括来说, 适当函数  $f$  的特点是“至少有一处取值不为正无穷”且“处处取值不为负无穷”.

#### 2.6.5. 下水平集与上方图

对于广义实值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 定义其  $\alpha$ -下水平集 (**Lower Level Set**) 为

$$\mathcal{C}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

对于广义实值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 定义其 **上方图 (Epigraph)** 为

$$\text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \leq t\}$$

#### 2.6.6. 闭函数

对于广义实值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 如果其上方图是闭集, 则称  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上是 **闭函数 (Closed Function)**.

#### 2.6.7. 下半连续函数

设广义实值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 如果对于任意点  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$$

则称  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上是 **下半连续 (Lower Semicontinuous)** 的. 这里  $\liminf$  表示下极限, 即

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \inf_{\|y-x\| \leq \varepsilon} f(y) \right)$$

设广义实值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , 则下列命题等价:

1.  $f(x)$  的任意  $\alpha$ -下水平集  $\mathcal{C}_\alpha$  都是闭集
2.  $f(x)$  是下半连续的
3.  $f(x)$  是闭函数

## 2.7. 凸函数的定义与性质

### 2.7.1. 凸函数的定义

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  为适当函数, 如果  $\text{dom } f$  是凸集, 且

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad \forall x, y \in \text{dom } f, \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

则称  $f$  为 **凸函数 (Convex Function)**. 如果上述不等式中的 “ $\leq$ ” 替换为 “ $<$ ”, 则称  $f$  为 **严格凸函数 (Strictly Convex Function)**. 如果上述不等式中的 “ $\leq$ ” 替换为 “ $\geq$ ”, 则称  $f$  为 **凹函数 (Concave Function)**.

### 2.7.2. 一元凸函数的例子

- 仿射函数  $f(x) = ax + b$ , 其中  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- 指数函数  $f(x) = e^{ax}$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ .
- 幂函数  $f(x) = x^a$ , 其中  $a \geq 1$  或  $a \leq 0$ , 定义域为  $\mathbb{R}_+$ .
- 绝对值的幂函数  $f(x) = |x|^a$ , 其中  $a \geq 1$  或  $a \leq 0$ , 定义域为  $\mathbb{R}$ .
- 负熵函数  $f(x) = x \log x$ , 定义域为  $\mathbb{R}_+$ , 其中  $0 \log 0 = 0$ .

### 2.7.3. 多元凸函数的例子

欧式空间  $\mathbb{R}^n$  中的例子:

- 仿射函数  $f(x) = a^T x + b$ , 其中  $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ .
- $p$ -范数函数  $f(x) = \|x\|_p$ , 其中  $p \geq 1$ . 特别地,  $p \rightarrow \infty$  时,  $f(x) = \max_i |x_i|$ .

矩阵空间  $\mathbb{R}^{m \times n}$  中的例子:

- 仿射函数  $f(X) = \text{tr}(AX^T) + b = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + b$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

- 谱范数函数  $f(X) = \|X\|_2 = \sigma_{\max}(X) = (\lambda_{\max}(X^T X))^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $\sigma_{\max}(X)$  表示矩阵  $X$  的最大奇异值,  $\lambda_{\max}(X)$  表示矩阵  $X$  的最大特征值.

#### 2.7.4. 强凸函数

若存在常数  $m > 0$ , 使得对于任意  $x, y \in \text{dom } f$  以及  $\theta \in [0, 1]$ , 有

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) - \frac{m}{2}\theta(1 - \theta) \|x - y\|^2$$

则称  $f$  为 **强凸函数 (Strongly Convex Function)**, 其中  $\|\cdot\|$  是某种范数.

也可以用另一个等价的定义: 若存在常数  $m > 0$ , 使得  $f(x) - \frac{m}{2} \|x\|^2$  是凸函数, 则称  $f$  为强凸函数.

如果  $f$  是强凸函数, 且存在最小值, 则该最小值唯一.

#### 2.7.5. 凸函数判定定理

**降维法则:**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 当且仅当对每个  $x \in \text{dom } f, v \in \mathbb{R}^n$ , 函数

$$g(t) = f(x + tv), \quad \text{dom } g = \{t : x + tv \in \text{dom } f\}$$

是关于  $t$  的凸函数.

这个定理说明, 函数  $f$  是凸函数, 当且仅当其在任意方向上的单变量函数都是凸函数.

**一阶条件:** 对于定义在凸集  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  上的可微函数  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  是凸函数, 当且仅当对于任意  $x, y \in \mathcal{C}$ , 有

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$$

这里的  $\nabla f(x)$  是  $f$  在点  $x$  处的梯度. 该条件说明, 函数  $f$  在任意点处的切平面都在函数图像的下方.

**梯度单调性:** 对于定义在凸集  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  上的可微函数  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  是凸函数, 当且仅当对于任意  $x, y \in \mathcal{C}$ , 有

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq 0$$

即梯度是单调映射.

**上方图法则:**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 当且仅当其上方图

$$\text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) \leq t\}$$

是凸集.

**二阶条件:** 对于定义在开凸集  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  上的二阶连续 Fréchet 可微函数  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  是凸函数, 当且仅当对于任意  $x \in \mathcal{C}$ , 其 Hessian 矩阵  $\nabla^2 f(x)$  是半正定的, 即

$$\nabla^2 f(x) \succcurlyeq 0$$

如果  $\nabla^2 f(x)$  是正定的, 即  $\nabla^2 f(x) \succ 0$ , 则  $f$  是严格凸函数. 从几何上看, 该条件说明函数  $f$  的图像在任意点处都是“向上弯曲”的.

### 2.7.6. Jensen 不等式

设  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 则对于任意  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \text{dom } f$ , 以及任意非负数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  满足  $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^m \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \theta_i f(x_i)$$

写成概率的形式, 即对于随机变量  $X$  满足  $P(X = x_i) = \theta_i$ , 有

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

## 2.8. 保凸的运算

### 2.8.1. 非负加权与仿射函数的复合

**非负加权** 设  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  是非负数, 则函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \theta_i f_i(x)$$

是凸函数. 如果至少有一个  $f_i$  是严格凸函数, 且对应的  $\theta_i > 0$ , 则  $f$  是严格凸函数.

**仿射函数的复合** 设  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是仿射函数, 即  $g(x) = Ax + b$ , 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , 则函数

$$h(x) = f(g(x)) = f(Ax + b)$$

是凸函数.

### 2.8.2. 逐点取最大值

设  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 则函数

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, m} f_i(x)$$

是凸函数. 例如,  $x \in \mathbb{R}^n$  的前  $k$  大分量和函数

$$f(x) = \sum_{i=1}^k x_{[i]}, \quad x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$$

是凸函数, 这是因为  $f(x)$  可以写成  $f(x) = \max_{S \subset \{1, \dots, n\}, |S|=k} \sum_{i \in S} x_i$  的形式, 而  $\sum_{i \in S} x_i$  是仿射函数.

### 2.8.3. 逐点取上界

若对于每个  $x \in \mathbb{R}^n$ , 函数族  $\{f(x, y) \mid y \in \mathcal{A}\}$  的上界存在, 且对于每个  $y \in \mathcal{A}$ ,  $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 则函数

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{A}} f(x, y)$$

例如

- 集合  $\mathcal{C}$  到指定点  $x_0$  的最远距离  $f(x) = \sup_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|_2$  是凸函数.
- 对称矩阵  $X \in \mathcal{S}^n$  的最大特征值函数  $f(X) = \lambda_{\max}(X) = \sup_{\|v\|_2=1} v^T X v$  是凸函数.

#### 矩阵最大特征值函数的推导

设  $X \in \mathcal{S}^n$  的特征值分解为  $X = Q\Lambda Q^T$ , 其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 且根据谱定理,  $Q$  是正交矩阵. 令  $v = Qu$ , 由于  $Q$  是正交的 (i.e.,  $Q^T Q = I$ ), 则当  $\|v\|_2 = 1$  时, 有  $\|u\|_2 = 1$ . 因此

$$v^T X v = (Qu)^T (Q\Lambda Q^T) (Qu) = u^T \Lambda u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$$

由于  $\sum_{i=1}^n u_i^2 = \|u\|_2^2 = 1$ , 所以  $v^T X v$  是  $\lambda_i$  的一个凸组合, 因此

$$v^T X v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 = \lambda_1 = \lambda_{\max}(X)$$

特别地, 当  $u = (1, 0, \dots, 0)^T$ , 即  $v$  是  $X$  的最大特征值对应的单位特征向量时, 上式取等号. 因此,  $\lambda_{\max}(X) = \sup_{\|v\|_2=1} v^T X v$ .

### 2.8.4. 与标量函数的复合

给定函数  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  和  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 则函数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  定义为

$$f(x) = h(g(x))$$

- 如果  $g$  是凸函数, 且  $h$  是凸且非减函数, 则  $f$  是凸函数.
- 如果  $g$  是凹函数, 且  $h$  是凸且非增函数, 则  $f$  是凸函数.

### 推论

- 如果  $g$  是凸函数, 则  $f(x) = \exp(g(x))$  是凸函数.
- 如果  $g$  是正值凸函数, 则  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  是凸函数.

### 2.8.5. 与向量函数的复合

给定函数  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  和  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , 则函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  定义为

$$f(x) = h(g(x))$$

- 如果  $g_i(x)$  是凸函数,  $i = 1, \dots, m$ , 且  $h$  是凸且非减函数, 则  $f$  是凸函数.
- 如果  $g_i(x)$  是凹函数,  $i = 1, \dots, m$ , 且  $h$  是凸且非增函数, 则  $f$  是凸函数.

### 2.8.6. 取下确界

设  $\mathcal{A}$  是非空集合, 且对于每个  $y \in \mathcal{A}$ , 函数  $f(x, y): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是凸函数, 则函数

$$g(x) = \inf_{y \in \mathcal{A}} f(x, y)$$

是凸函数.

例如

- $x \in \mathbb{R}^n$  到集合  $\mathcal{C}$  的距离函数  $f(x) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|_2$  是凸函数.

### 2.8.7. 透视函数

定义  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 则其 **透视函数 (Perspective Function)** 定义为

$$g(x, t) = tf\left(\frac{x}{t}\right), \quad \text{dom } g = \left\{(x, t) : t > 0, \frac{x}{t} \in \text{dom } f\right\}$$

如果  $f$  是凸函数, 则  $g$  是凸函数.

例如,  $f(x) = \|x\|_2^2$  是凸函数, 则其透视函数

$$g(x, t) = t\left(\left\|\frac{x}{t}\right\|_2^2\right) = \frac{\|x\|_2^2}{t}, \quad \text{dom } g = \{(x, t) : t > 0\}$$

另外, 考虑到  $f(x) = -\log x$  是凸函数, 则其透视函数

$$g(x, t) = t \left( -\log \left( \frac{x}{t} \right) \right) = t \log t - t \log x, \quad \text{dom } g = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$$

也就是 **相对熵函数 (Relative Entropy Function)** 是凸函数.

### 2.8.8. 共轭函数

适当函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  的 **Fenchel 共轭函数 (Fenchel Conjugate Function)** 定义为

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (y^T x - f(x))$$

无论  $f$  是否是凸函数, 其共轭函数  $f^*$  总是凸函数. 这是因为  $y^T x - f(x)$  对于每一个固定的  $x$  都是关于  $y$  的仿射函数, 而  $f^*(y)$  是这些仿射函数的上确界.

## 2.9. 凸函数的推广

### 2.9.1. 拟凸函数

设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 如果  $\text{dom } f$  是凸集, 且下水平集  $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$  对于任意  $\alpha \in \mathbb{R}$  都是凸集, 则称  $f$  为 **拟凸函数 (Quasi-Convex Function)**.

若  $f$  是拟凸函数, 则称  $-f$  为 **拟凹函数 (Quasi-Concave Function)**. 如果  $f$  既是拟凸函数, 又是拟凹函数, 则称  $f$  为 **拟线性 (Quasi-Affine)** 的.

### 2.9.2. 拟凸函数的例子

#### 拟凸函数

- $f(x) = \sqrt{|x|}$  是  $\mathbb{R}$  上的拟凸函数, 但不是凸函数.
- 距离比值函数  $f(x) = \frac{\|x-a\|_2}{\|x-b\|_2}$ ,  $\text{dom } f = \{x : \|x-a\|_2 \leq \|x-b\|_2\}$  是拟凸函数.

#### 拟凹函数

- $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ,  $\text{dom } f = \mathbb{R}_+^2$  是拟凹函数

#### 拟线性函数

- $f(x) = \lceil x \rceil$  是  $\mathbb{R}$  上的拟线性函数
- $f(x) = \log(x)$  是  $\mathbb{R}_+$  上的拟线性函数
- 分式线性函数  $f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}$ ,  $\text{dom } f = \{x : c^T x + d > 0\}$  是拟线性函数

### 2.9.3. 拟凸函数的性质

**类 Jensen 不等式:** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  是拟凸函数, 则对于任意  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \text{dom } f$ , 以及任意非负数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  满足  $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ , 有



$$f\left(\sum_{i=1}^m \theta_i x_i\right) \leq \max_{i=1, \dots, m} f(x_i)$$

**一阶条件:** 对于定义在凸集  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  上的可微函数  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  是拟凸函数, 当且仅当对于任意  $x, y \in \mathcal{C}$ , 有

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \nabla f(x)^T (y - x) \leq 0$$

### 2.9.4. 对数凸函数

如果正值函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  满足  $\log f(x)$  是凸函数, 则称  $f$  为 **对数凸函数 (Log-Convex Function)**. 反之, 如果  $\log f(x)$  是凹函数, 则称  $f$  为 **对数凹函数 (Log-Concave Function)**.

- 幂函数  $f(x) = x^a$ , 其中  $x \in \mathbb{R}_+$ , 当  $a < 0$  或  $a \geq 1$  时,  $f$  是对数凸函数; 当  $0 < a \leq 1$  时,  $f$  是对数凹函数.
- Gaussian 分布的概率密度函数  $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ , 其中  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  是对数凹函数.

### 2.9.5. 对数凸函数的性质

定义在凸集上的二阶可微函数  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  是对数凸函数, 当且仅当对于任意  $x \in \mathcal{C}$ , 有

$$f(x) \nabla^2 f(x) - (\nabla f(x))(\nabla f(x))^T \succcurlyeq 0$$

对数凹函数的乘积是对数凹函数, 即如果  $f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  是对数凹函数, 则函数

$$f(x) = \prod_{i=1}^m f_i(x)$$

是对数凹函数.

### 2.9.6. 广义不等式意义下的凸函数

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  称为  $\mathcal{K}$ -凸函数, 如果  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$  是凸集, 且对于任意  $x, y \in \text{dom } f$ , 以及  $\theta \in [0, 1]$ , 有

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \preccurlyeq_{\mathcal{K}} \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$