理论计算机科学作业
L1.10 - L1.12

潘天麟 2023K8009908023

October 29, 2025

T1

1) 用分配律化简如下正则表达式, 得到两个不同但更简单的等价表达式

$$(0+1)^*1(0+1)(0+1)+(0+1)^*1(0+1) \tag{1}$$

2) 证明

$$(L+M)^* = (L^*M^*)^* \tag{2}$$

1) 第一个等价表达式, 我们直接提取公因式

$$(0+1)^*1(0+1)(0+1)+(0+1)^*1(0+1) \tag{3.1}$$
$$= (0+1)^*1^*(0+1)(\varepsilon+0+1) \tag{3.2}$$

第二个等价表达式, 我们直接利用分配律展开 Equation 3, 得到

$$(0+1)^*1^*(0+1)(\varepsilon+0+1) \tag{4.1}$$
$$= (0+1)^*1^*[(0+1)(0+1)+(0+1)] \tag{4.2}$$

2) 根据定义

$$(L+M)^* = \bigcup_{n\geq 0}(L+M)^n, \tag{5.1}$$
$$L^* = \bigcup_{n\geq 0}L^n, \quad M^* = \bigcup_{n\geq 0}M^n \tag{5.2}$$

从而

$$L^*M^* = \left(\bigcup_{i\geq 0}L^i\right)\left(\bigcup_{j\geq 0}M^j\right) = \bigcup_{i,j\geq 0}L^iM^j \tag{6.1}$$
$$\Longrightarrow (L^*M^*)^* = \bigcup_{k\geq 0}(L^*M^*)^k = \bigcup_{k\geq 0}\left(\bigcup_{i,j\geq 0}L^iM^j\right)^k \tag{6.2}$$

特别地, 在里面那个 “$\bigcup$” 中取 $(i,j)\in\{(1,0),(0,1)\}$, 则有

$$(L+M)^* = \bigcup_{n\geq 0}(L^1M^0+L^0M^1)^n \subseteq \bigcup_{k\geq 0}\left(\bigcup_{i,j\geq 0}L^iM^j\right)^k = (L^*M^*)^* \tag{7}$$

另一方面,

$$(L^*M^*)^* = \bigcup_{k\geq 0}\left(\bigcup_{i,j\geq 0} L^iM^j\right)^k \tag{8.1}$$

$$= \bigcup_{k\geq 0}\left[\bigcup_{(i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k)\geq 0} L^{i_1}M^{j_1}\ldots L^{i_k}M^{j_k}\right] \tag{8.2}$$

由于对于任意 $i,j\geq 0$, 有 $L^i\subseteq(L+M)^*$ 以及 $M^j\subseteq(L+M)^*$, 因此

$$L^{i_1}M^{j_1}\ldots L^{i_k}M^{j_k}\subseteq(L+M)^*(L+M)^*\ldots(L+M)^*=(L+M)^* \tag{9}$$

从而

$$(L^*M^*)^*\subseteq\bigcup_{k\geq 0}(L+M)^*=(L+M)^* \tag{10}$$

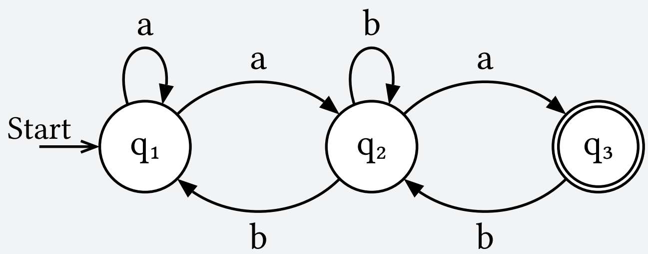
综上所述, 我们得出

$$(L+M)^*=(L^*M^*)^* \tag{11}$$

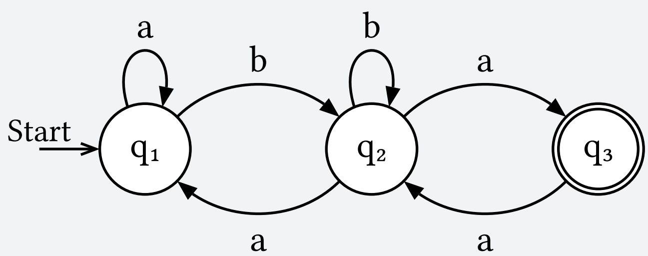
T2

利用 Arden 引理将如下有穷自动机转换为正则表达式

1)



2)



1) 设 $q_1\to q_1,q_2,q_3$ 分别对应正则表达式 R_1,R_2,R_3, 则根据自动机的转移关系, 我们有如下方程组

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_1 a + R_2 b + \varepsilon, &(12.1)\\
R_2 &= R_1 a + R_2 b + R_3 b, &(12.2)\\
R_3 &= R_2 a &(12.3)
\end{aligned}
$$

代入第三个方程到第二个方程, 结合 Arden 引理, 得到

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_1 a + R_2 b + (R_2 a) b = R_1 a + R_2 (b + ab) &(13.1)\\
\Longrightarrow R_2 &= R_1 a (b + ab)^* &(13.2)
\end{aligned}
$$

将此代入第一个方程, 同样结合 Arden 引理, 得到

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_1 a + (R_1 a (b + ab)^*) b + \varepsilon &(14.1)\\
&= R_1 a + R_1 a (b + ab)^* b + \varepsilon &(14.2)\\
\Longrightarrow R_1 &= \varepsilon (a + a (b + ab)^* b)^* &(14.3)\\
&= (a + a (b + ab)^* b)^* &(14.4)
\end{aligned}
$$

于是就有

$$
\begin{aligned}
L(M) &= R_3 = R_2 a = R_1 a (b + ab)^* a &(15.1)\\
&= (a + a (b + ab)^* b)^* a (b + ab)^* a &(15.2)
\end{aligned}
$$

2) 同理, 设 $q_1 \to q_1, q_2, q_3$ 分别对应正则表达式 R_1, R_2, R_3, 则根据自动机的转移关系, 我们有如下方程组

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_1 a + R_2 a + \varepsilon, &(16.1)\\
R_2 &= R_1 b + R_2 b + R_3 a, &(16.2)\\
R_3 &= R_2 a &(16.3)
\end{aligned}
$$

代入第三个方程到第二个方程, 结合 Arden 引理, 得到

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_1 b + R_2 b + (R_2 a) a = R_1 b + R_2 (b + aa) &(17.1)\\
\Longrightarrow R_2 &= R_1 b (b + aa)^* &(17.2)
\end{aligned}
$$

再代入此到第一个方程, 同样结合 Arden 引理, 得到

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R_1 a + (R_1 b (b + aa)^*) a + \varepsilon &(18.1)\\
&= R_1 a + R_1 b (b + aa)^* a + \varepsilon &(18.2)\\
\Longrightarrow R_1 &= \varepsilon (a + b (b + aa)^* a)^* &(18.3)\\
&= (a + b (b + aa)^* a)^* &(18.4)
\end{aligned}
$$

所以

$$L(M) = R_3 = R_2 a = R_1 b(b + aa)^* a \tag{19.1}$$

$$= (a + b(b + aa)^* a)^* b(b + aa)^* a \tag{19.2}$$