Several Problems in MO

天吾 (krydom)

Changzhou No.1 High School

3 Oct 2018

Section 1

课前杂谈

你是谁？我怎么没听说过你

你是谁？我怎么没听说过你

为啥改 ID 了？

你是谁？我怎么没听说过你

为啥改 ID 了？

为啥要讲数学？为啥讲 MO 的内容？

你是谁？我怎么没听说过你

为啥改 ID 了？

为啥要讲数学？为啥讲 MO 的内容？

关于课件的背景

你是谁？我怎么没听说过你

为啥改 ID 了？

为啥要讲数学？为啥讲 MO 的内容？

关于课件的背景

Section 2

不等式证明

常见的不等式

$$H_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$A_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

常见的不等式

H_n : 调和平均数

G_n : 几何平均数

A_n : 算术平均数

Q_n : 平方平均数

有： $H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$

称为均值 (Mean Value) 不等式（调几算方）

常见的不等式

柯西 (Cauchy) 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 或者 $\forall i, a_i b_i = 0$ 时取等

柯西不等式的证明：

构造二次函数

常见的不等式

- 绝对值 (Absolute Value) 不等式
- 排序 (Sequence) 不等式
- 卡尔松 (Carlson) 不等式
- 琴生 (Jensen) 不等式
- 闵科夫斯基 (Minkowski) 不等式
- 伯努利 (Bernoulli) 不等式
- 权方和不等式———赫尔德 (Hölder) 不等式

Q 1.1

$x_1, x_2, ..., x_{4n} \geq 0$

$x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \leq 1(x_0 = x_{4n}, x_{4n+1} = x_1)$

求 $\sum_{i=1}^{4n}(x_{i-1} * x_{i+1})$ 的最大值

Q 1.2

$$a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\forall i, a_i \neq 10$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 10n$$

求证：$(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \leq 3\sqrt{11}$

Q 1.3

$x_1 + x_2 + ... + x_n = n - 1$

$\forall i, x_i \geq 0$

求 $x_1^1 + x_2^2 + ... + x_n^n$ 的最大值

Section 3

多项式相关

Q 2.1

设 $f(n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + 1$

$f(n)$ 有 n 个实数根

$\forall i, a_i \geq 0$

证明：$f(2) \geq 3^n$

Q 2.2

设 n 次多项式 $f(x)$ 满足

$f(k)=\frac{1}{k}\ (k=1,2,...,n+1)$

求 $f(n+2)$

Q 2.3 威尔逊定理

设 p 是质数

证明威尔逊定理：

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

威尔逊定理

威尔逊定理的逆定理也是成立的

若 $p = a * b$

有 $(p-1)! \equiv 0 \pmod{a}$

$\Rightarrow (p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$

洛谷 < 3.0 > Luogu Enjoy Coding Life

少女歌劇 レヴュースタァライト

Q 2.4

试求所有正整数 m, n

使得 $1 + x + x^2 + \ldots + x^m$

整除 $1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}$

Section 4

数列相关

二阶线性递推数列的特征方程

$a_{n+2} = c_1 * a_{n+1} + c_2 * a_n$ 的特征方程为：

$x^2 = c_1 * x + c_2$

若此方程的两解为 x_1, x_2

则 a_n 的通项公式为 $a_n = x_1^n * C_1 + x_2^n * C_2$

Q 3.1

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1, b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$

求证：$\forall n, a_n, b_n$ 有且仅有一个被 5 整除

Q 3.2

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n=\begin{cases} u+v & n=1 \\ a_{\frac{n}{2}}+u & n \mod 2=0 \\ a_{\frac{n-1}{2}}+v & n \mod 2=1, n\neq 1 \end{cases}$$

其中 u,v 为给定的正整数，记 $S_m=a_1+a_2+\ldots+a_m$

证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项完全平方数

Q 3.3

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1 = -4, a_2 = -7, a_{n+2} = 5 * a_{n+1} - 6 * a_n$

证明：数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项合数

Q 3.4

已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=\frac{(1+a_{n-1})^2}{a_{n-2}}$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 求证：$\forall k, \sqrt{a_{2k-1}}$ 和 $\sqrt{\frac{a_{2k}}{2}}$ 都是整数

Section 5

初等数论

Bézout 定理

不定方程 $a * x + b * y = (a, b)$ 有整数解

Euler 定理

若 $n \perp a$，则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$

中国剩余定理

$$(S):\begin{cases} x \equiv a_1 \mod m_1 \\ x \equiv a_2 \mod m_2 \\ \quad\dots \\ x \equiv a_n \mod m_n \end{cases}$$

其中 m_i 两两互质

令 $M=\prod_{i=1}^{n} m_i,\ M_i=M/m_i,\ t_i=M_i^{-1} \mod m_i$

方程组 (S) 在 $\mod M$ 意义下有唯一解 $x=(\sum_{i=1}^{n} a_i t_i M_i) \mod M$

Lucas 定理

$$C_m^n = \prod_{i=0}^{k} C_{m_i}^{n_i} \mod p$$

$$m = \sum_{i=0}^{k} m_i * p^i, n = \sum_{i=0}^{k} n_i * p^i$$

Dirichlet 定理

若 $a \perp b$，则形如 $k * a + b$ 的素数有无穷多个

Q 4.1

求所有数对 (p,n) $(p\in\mathbb{P}, n\in\mathbb{Z}_+)$

满足 $n^p = p^n$

Q 4.2

设 n 为偶数，给定一 $n \times n$ 的矩阵 B

满足：$b_{i,j} = (i + j) \mod n$

求证：不能取出 $0, 1, ..., n-1$

使得每行每列恰好被取出一个数

Q 4.3

求所有 $n, \exists m, (2^n - 1) | (m^2 + 9)$

Q 4.4

求 $\lfloor (\frac{5+\sqrt{21}}{2})^{2016} \rfloor$ 的个位数字

Q 4.5

$M(a)$ 表示使得 $(a+b)|ab$ 的正整数 b 的个数

求 $M(a)$ 的表达式

Q 4.6

证明：对任意一对正整数 k, n

均存在 k 个（允许相同）正整数 $m_1, m_2, ...m_k$

使得 $1 + \frac{2^k-1}{n} = (1 + \frac{1}{m_1})(1 + \frac{1}{m_2})...(1 + \frac{1}{m_k})$

Q 4.7

记 $f_n = \lfloor 2^n * \sqrt{2008} \rfloor + \lfloor 2^n * \sqrt{2009} \rfloor$

求证：数列 $\{f_n\}$ 中有无穷多项奇数，无穷多项偶数

Q 4.8

令 $(a+\sqrt{33})^n = x_n + y_n * \sqrt{33}(x_n, y_n \in \mathbb{Z})$

p 为质数

求证：y_{p-1}, y_p, y_{p+1} 至少有一个被 p 整除

Q 4.9

p 为奇素数

证明：$\forall r, \exists n, C_{2n}^{n} \equiv r \pmod p$

Q 4.10

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1 = 4, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$

(1) 证明：存在无穷多素数，是 $\{a_n\}$ 至少一项的约数

(2) 是否存在无穷多素数，均不能整除 $\{a_n\}$ 中的每一项

Q 4.11

设正整数 $k \geq 5, m = (2^k)!$

证明：$d_1(m)$ 至少有一个不小于 $2^{k+1} * (4k+5)+1$ 的素因子

Q 4.12

已知 p 是一个大于 3 的质数

且 $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}=\frac{r}{ps}$ $(r,s\in\mathbb{N}_+\ (r,s)=1)$

证明：$p^3|(r-s)$

Section 6

组合/图论

Q 5.1

一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加

其中 $m, n \geq 2$ 为给定的正整数。

每道题的得分规则是：

若该题恰好有 x 个学生没有答对，则每个答对的学生得 x 分

每个学生的总得分为其 m 道题得分之和。

将所有学生的总分从高到低排列为：

$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$

求 $p_1 + p_n$ 可能的最大值

Q 5.2

设 $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$

其中 $A_1, A_2, ...A_n$ 是 n 个互不相同的有限集合 $n \geq 2$

满足对任意 $A_i, A_j \in S$, 均有 $A_i \cup A_j \in S$

若 $k = \min\{A_i\} \geq 2$

证明：存在 $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

使得 x 属于 $A_1, A_2, ..., A_n$ 中的至少 $\frac{n}{k}$ 个集合

Q 5.3

平面上 $2n$ 个点，无三点共线，任意两点间连线段

将其中任意 n^2+1 条边染成红色

求证：红色三角形至少有 n 个

Q 5.4

在 $2*n+1$ 个点的竞赛图中

求三元环数目的最大值

Q 5.5

初始时 $x = 1$

操作 1：令 $x = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$，操作 2：令 $x = 4 * x + 1$

(1) 是否可以经过有限次操作使得 $x = 2000$

(2) 小于 2000 的整数有多少可以出现

Q 5.6

在 $m \times n$ 的方格中，每一格染红白两色之一

已知对任意的 i, j，第 i 行与第 j 列的 $m+n-1$ 个格子中与格 (i,j) 同色的方格数小于另一种颜色的方格数

证明：mn 为 4 的倍数

Q 5.7

给定正整数 n

以任意方式将圆周上的 $4n$ 个等分点标上数 $1, 2, \ldots, 4n$

用 $2n$ 条两两不相交的线段连接这 $4n$ 个点

若每条线段两端点所标的两个数之差均不超过 M

求 M 的最小可能值

Thanks for listening!