求解级数问题. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. 是否是几何级数 → 直接求解.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n$ 是否为0 → 若不是，别浪费时间，必然发散.

3. 是否是交错级数 → $\begin{cases} \text{绝对值 } u_n \text{ 单调递减} \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{cases}$ ⇒ 收敛.

4. 是否有阶乘因子 → 比式判别法.

5. 是否包含n的指数 → 根式判别法.

6. 是否有因子 $\frac{1}{n}$ 和 $\ln n$ → 积分判别法.

1. 收敛的条件是底数绝对值 <1.

等差 × 等比 可直接求 S_n 的表达式

2. 第n项判别法. 先检验第n项是否趋于0.

3. 比式判别. 计算 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 和1的大小. 等于1时无法判定. 注意绝对值. 前提是正项级数.

4. 根式判别 计算 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 也注意绝对值.

5. 积分判别 若有 $a_n = f(n)$.

则 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 和 $\int_N^{\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同.

如 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 有 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty} \to \infty$. 故原级数发散.

6. 比较判别. 猜 $\sum a_n$ 收敛　设 $b_n \ge a_n$ 证明 $\sum b_n$ 收敛.

猜 $\sum a_n$ 发散.　设 $b_n \le a_n$ 证明 $\sum b_n$ 发散.

7. P判别法. 级数 $\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{a^p} \begin{cases} 收敛, & 若 p>1 \\ 发散, & 若 p \le 1. \end{cases}$

常利用极限比较判别:

若两个正项级数 $\sum u_n, \sum v_n$ s.t. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ = 某个常数. 则 $\sum u_n, \sum v_n$ 同敛散.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+7}{n^4+3n^3+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \sim$ 收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{27n^6+9n^2+4}}{n^3+9n^2+4} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \sim$ 发散.

又例 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}}$　由于 $\ln(n) \le C \cdot n^{0.0005}$

则 原级数 $\le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C}{n^{1.0005}}$ 收敛.

又例 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$. 首先, 这是一个正项级数.

再者 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 故原级数发散.

同理 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(\frac{1}{n})$ 收敛.

如果有很复杂的则先利用极限等价.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos^2(n) \tan\left(\frac{(n^2+4n-3)\ln(n)}{\sqrt{n^7+2n^4+3n}}\right) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \cos^2 n \tan\left(\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}\right) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^2 n \ln n}{n^{3/2}}$$

$$\le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

$$\le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C \cdot n^{0.25}}{n^{1.5}}$$

$$= C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.25}} \text{ 收敛.}$$