ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 4.

CHUỖI

Bài 1.
ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI

I. Định nghĩa

Cho dãy vô hạn các số thực: ***$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$***

Tổng vô hạn: **$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$** được gọi là một chuỗi số.

Kí hiệu: $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

Đặt $$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k}$$

$\rightarrow S_n$ *gọi là* *tổng riêng thứ n* *của chuỗi số* (1)

* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (*hữu hạn*) thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ về S và viết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

* Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ - phân kì của chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Giải:

Ta có: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=1$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ- phân kì của chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Ta có: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Do đó:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

II. Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ:

1. Định lí 1

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Hệ quả: (Điều kiện đủ để chuỗi phân kì)

Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1}$

Giải:

Ta có: $u_n = \frac{n+3}{n+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1 \neq 0$$

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1}$ phân kì.

Chú ý

Định lí trên chỉ là điều kiện cần, điều ngược lại chưa chắc đúng, tức là:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ chưa chắc } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

III. Vài tính chất đơn giản của chuỗi số hội tụ

1. *Tính chất 1:* Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng S

thì $\sum_{n=1}^{\infty} c.u_n$ cũng hội tụ và có tổng c.S

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} c.u_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n = c.S}$$

2. *Tính chất 2*: Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng là s và s'

thì $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ cũng hội tụ và

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s \pm s'}$$

Tổng kết

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ khi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì khi

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ hay không tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n$

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ hay không tồn tại $\lim_{n\to\infty} u_n$

Bài tập

Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số có số hạng tổng quát sau. Tính tổng của nó (nếu có)

$$a)\, u_n = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n \, (n \geq 1)$$

$$c)\, u_n = \frac{n^2 - 2n}{3n^2 - 5}$$

$$b)\, u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} (n \geq 1)$$

$$d)\, u_n = \frac{3^n + 5^n}{8^n}$$

BÀI 2.

CHUỖI SỐ DƯƠNG

I. Định nghĩa:

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *gọi là* *chuỗi số dương* *nếu* $u_n > 0, \forall n = \overline{1,\infty}$

Ví dụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1}$$

Các chuỗi trên có phải là chuỗi số dương không ?

II. Các định lí so sánh

1. Định lí 1 (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

trong đó $u_n \le v_n, \forall n \ge n_0$

Ta có:

- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ*.

- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kì thì* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kì*

Ví dụ: Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5^n}{4^n}$$

2. Định lí 2 (Tiêu chuẩn so sánh 2)

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$

Khi đó ta có:

- Nếu 0 < K < +∞ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì

- Nếu K = 0 và nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

- Nếu K = +∞ và nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

III. Quy tắc D'Alembert

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

Khi đó:

* Nếu D < 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

* Nếu D > 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì (D *có thể* $= +\infty$)

Ví dụ: Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$$

IV. Quy tắc Cauchy

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$

Khi đó: * Nếu C < 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

* Nếu C > 1 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.

Ví dụ: Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{2n-3}\right)^{n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$$

Chú ý

Một số chuỗi số đặc biệt thường dùng để so sánh khi xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi số

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{hội tụ khi} & \alpha > 1 \\ \text{phân kì khi} & \alpha \le 1 \end{cases}$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty} q^{n} \quad \begin{cases} \text{hội tụ khi} & |q| < 1 \\ \text{phân kì khi} & |q| \ge 1 \end{cases}$$

Bài 3.

Chuỗi có số hạng với dấu bất kì

I. Hội tụ tuyệt đối. Bán hội tụ

1. Định lí 1

Cho chuỗi số (bất kỳ) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

2. Định nghĩa

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ bán hội tụ nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kì

II. CHUỖI ĐAN DẤU

1. Định nghĩa

Chuỗi số có dạng: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$

hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^{n}u_n + \ldots$

với $u_n > 0, \forall n = \overline{1,\infty}$ được gọi là chuỗi đan dấu.

Ví dụ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$$

là các chuỗi đan dấu

2. Định lí (định lí Leibniz)

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ và $0 < u_{n+1} \le u_n$

thì chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ hoặc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ hội tụ

và có tổng $S \le u_1$

Ví dụ: Xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu

$a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ $\qquad$ $b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3n+1}$

Ví dụ:

Xét sự hội tụ tuyệt đối hay bán hội tụ của chuỗi số

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2}$$

III. Vài tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối

1.Tính chất 1: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S thì chuỗi số suy từ nó bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng và bằng cách nhóm tùy ý một số số hạng lại cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng S

2. Định nghĩa: Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ, người ta gọi tích của chúng là $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, trong đó $w_n = \sum_{n=1}^{n} u_k v_{n-k}$

3. Tính chất 2: Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ tuyệt đối và có tổng S và S' thì tích của chúng cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng SS'

Bài 4.

CHUỖI LŨY THỪA

I. Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi mà số hạng tổng quát của nó là hàm số có dạng $a_n(x-x_0)^n$, trong đó a_n là hằng số:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots}$$

a_n gọi là hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu $x_0 = 0$ thì $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots}$

Ví dụ:

a. $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

là các chuỗi lũy thừa

- Nếu cho x = c thì chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$$

Nếu chuỗi số này hội tụ, khi đó chuỗi lũy thừa hội tụ tại c và c là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa

- Tập hợp tất cả các điểm hội tụ gọi là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

II. Bán kính hội tụ. Miền hội tụ

1. Bán kính hội tụ.

Định lí 1.6 (Abel):

Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$

thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi x với $|x| < |x_0|$

Nếu chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại x_0

thì nó phân kì tại mọi x với $|x| > |x_0|$

Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại x = 0

Nếu tồn tại số R ≥ 0 sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ trong khoảng (-R, R) và phân kì trong các khoảng (- ∞, - R) và (R, + ∞) thì R gọi là bán kính hội tụ và khoảng (- R, R) gọi là khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Tại x = - R và x = R chuỗi có thể hội tụ, cũng có thể phân kì.

2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Định lí 1.7:

Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$ hoặc $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = D$

thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa trên được xác định như sau:

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{D} & \text{nếu } 0 < D < +\infty \\ 0 & \text{nếu } D = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } D = 0 \end{cases}$$

- Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa sau

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$$

3. Cách tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

a. Đối với chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (1)

B1. Tìm bán kính hội tụ R

B2. Xét sự hội tụ của chuỗi (1) tại x = ± R (nếu có)

B3. Kết luận:

* Nếu (1) hội tụ tại x = ± R thì miền hội tụ là [-R, R]
* Nếu (1) hội tụ tại x = - R , phân kì tại x = R thì miền hội tụ là [-R, R)
* Nếu (1) hội tụ tại x = R , phân kì tại x = - R thì miền hội tụ là (-R, R]
* Nếu (1) phân kì tại x = ± R thì miền hội tụ là (-R, R)

Ví dụ:

Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n^2}$$

b. Đối với chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ **(2)**

- Đặt $X = x - x_0$ chuyển chuỗi (2) thành $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ (*)

- Tìm miền hội tụ của (*) như trên, sau đó suy ra miền hội tụ của (2)

Ví dụ:

Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-4)^n$$

III. Các tính chất của chuỗi lũy thừa

IV. Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

V. Công thức Euler

VI. Ứng dụng chuỗi lũy thừa để tính gần đúng

Hết chương 4