ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 5.

HÀM SỐ HAI BIẾN SỐ

Bài 1.
KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

I. Định nghĩa hàm số hai biến số

1. Định nghĩa

$Cho\ \emptyset \neq D \subset R^2$. Ánh xạ **f : D → R**

$(x,y) \rightarrow z = f(x,y)$

được gọi là hàm số hai biến.

2. Ví dụ: Các hàm số sau đây là các hàm hai biến

a) $z = f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

b) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

II. Miền xác định

1. Miền xác định của hàm số: là tập hợp tất cả các cặp (x,y) sao cho biểu thức f(x,y) có nghĩa.

Nếu xem (x,y) là tọa độ của điểm M trong mặt phẳng thì miền xác định của hàm số f(x,y) là tập hợp những điểm M sao cho biểu thức f(M) có nghĩa.

2. Ví dụ . Tìm miền xác định của hàm số:

$$a)\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

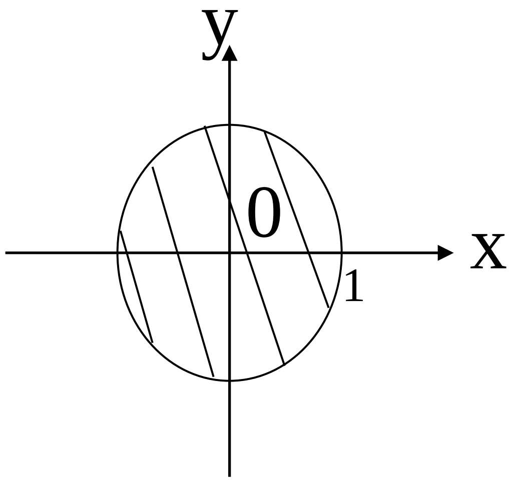
$$b)\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

$$c)\ z = \ln(2x - y + 1)$$

a) Hàm số $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ xác định khi

$1 - x^2 - y^2 \geq 0$ hay $x^2 + y^2 \leq 1$

Miền xác định của nó là *hình tròn đóng* tâm O, bán kính 1



Bài 2.
ĐẠO HÀM RIÊNG
VI PHÂN TOÀN PHẦN

I. Đạo hàm riêng

1) Nhắc lại một số công thức đạo hàm

2) Định nghĩa

a) Khi tính đạo hàm riêng đối với biến x của hàm số f(x,y), xem y là hằng số và lấy đạo hàm của f đối với x;

Đạo hàm riêng đối với x của hàm số f(x,y), kí hiệu

$$f_x \quad hay \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad hay \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

b) Khi tính đạo hàm riêng đối với biến y của hàm số f(x,y), xem x là hằng số và lấy đạo hàm của f đối với y.

Đạo hàm riêng đối với y của hàm số f(x,y), kí hiệu

$$f_y \quad hay \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad hay \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của

a) $z = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 2x$$

$$b) \quad z = e^{\frac{x}{y}}$$

c) $z = \text{arctg}(xy)$

3. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng f_x, f_y gọi là các *đạo hàm riêng cấp 1.*

Ta có thể xét các đạo hàm riêng: $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$ gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2 của f(x, y).*

Kí hiệu

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số

a) $z = f(x,y) = x^3y^2 + y^3$

b) $z = f(x,y) = e^x.\cos y$

II. Vi phân toàn phần

1. Định lí

Nếu hàm số f(x,y) có các đạo hàm riêng trong một miền D chứa điểm $M(x_0, y_0)$ và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì hàm số f(x,y) khả vi tại M_0, vi phân toàn phần của f(x,y) tại M_0 được tính bởi công thức

$$\boxed{df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy}$$

2. Ví dụ 7: Tính vi phân toàn phần của các hàm số sau:

$$a)\, z = 2x^3y + y^2$$

$$\text{b)}\ f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Bài 5.

CỰC TRỊ HÀM HAI BIẾN

I. Cực trị của hàm số hai biến số

1. Định nghĩa

Ta nói rằng hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu với mọi $M(x,y)$ khá gần M_0 nhưng khác M_0 thì $f(M) - f(M_0)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(M) > f(M_0)$ *thì* $f(M_0)$ *đạt cực tiểu;*

Nếu $f(M) < f(M_0)$ *thì* $f(M_0)$ *đạt cực đại.*

Cực đại và cực tiểu gọi chung là cực trị, điểm M_0 gọi là điểm cực trị.

2. Điều kiện cần của cực trị

a) Định lí

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ và tại đó các đạo hàm riêng tồn tại thì

$$\boxed{f_x(x_0,y_0) = 0,\ \ f_y(x_0,y_0) = 0}$$

b) Điểm dừng: Nếu điểm M_0 thỏa mãn hệ

$$f_x(x_0,y_0) = 0,\ f_y(x_0,y_0) = 0$$

thì gọi là điểm dừng

3. Điều kiện đủ của cực trị

a) Định lí

Giả sử $M_0(x_0,y_0)$ là điểm dừng của hàm số f(x,y) và hàm số f(x,y) có đạo hàm riêng cấp hai ở lân cận điểm M_0. Đặt:

$$r = f_{xx}(x_0,y_0),\ s = f_{xy}(x_0,y_0),\ t = f_{yy}(x_0,y_0)$$

Khi đó:

1) Nếu $s^2 - rt < 0$ thì f(x,y) đạt cực trị tại M_0.

   + $r > 0$: cực tiểu

   + $r < 0$: cực đại

2) Nếu $s^2 - rt > 0$ thì f(x,y) không đạt cực trị tại M_0;

3) Nếu $s^2 - rt = 0$ thì chưa kết luận được M_0

   (trường hợp nghi ngờ).

b) Phương pháp tìm cực trị của hàm 2 biến

- **Bước 1:** Tìm miền xác định

- **Bước 2**: Tìm tọa độ điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$

- **Bước 3:** Tìm các đạo hàm riêng cấp 2:

  $$r = f_{xx}(x_0,y_0),\ s = f_{xy}(x_0,y_0),\ t = f_{yy}(x_0,y_0)$$

- **Bước 4:** Kết luận:

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số

a) $z = f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$

Hàm số f(x,y) xác định trên toàn R^2.

Ta có: $f_x = 4x + 2y + 2$, $f_y = 2y + 2x + 2$

Tọa độ điểm dừng là nghiệm của $\begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 2y + 2x + 2 = 0 \end{cases}$

Vậy điểm dừng là M(0,-1)

Ta có: $r = f_{xx} = 4$, $s = f_{xy} = 2$, $t = f_{yy} = 2$

nên $s^2 - rt = -4 < 0$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại M(0,-1).

$$\mathbf{z_{CT} = f(0,-1) = -1.}$$

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số

a) $z = f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$

$$b)\quad z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

$$c)\quad z = f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

d) Tìm cực trị của hàm số $z = 2x^5 + y^3$

Hàm số f(x,y) xác định trên toàn R^2.

Ta có: $z_x = 10x^4, z_y = 3y^2$,
vậy có một điểm dừng $M_0(0,0)$

$z_{xx} = 40x^3, z_{yy} = 6y, z_{xy} = 0$
nên tại M_0 ta có $s^2 – rt = 0$.

Vậy chưa kết luận ngay được

Chú ý rằng $z(x,y) – z(0,0) = 2x^5 + y^3$. Hiệu ấy dương nếu điểm M(x,y) nằm trong góc phần tư thứ nhất, âm nếu M nằm trong góc phần tư thứ ba. Do đó dấu của hiệu $z(M) – z(M_0)$ thay đổi ở lân cận điểm M_0 nên M_0 không là điểm cực trị

II. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số hai biến số trong một miền đóng giới nội

Các bước thực hiện:

1) Tính giá trị của f tại các điểm dừng của f nằm trong miền D

2) Tính giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của f trên biên của miền D

3)Kết luận: GTLN-GTNN

Cụ thể

- Vẽ miền D
- Tìm tọa độ điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$. Tính $f(M_0)$ nếu M_0 nằm trong miền D
- Tìm GTLN,GTNN trên biên miền D
- So sánh các kết quả $\Rightarrow$ kết luận

Ví dụ .

VD 1: Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

Trên miền D đóng giới hạn bởi các đường:

$$x = 1,\ x = -1,\ y = 1 \text{ và } y = -1.$$

VD 2: Tính giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + x - y$ trên miền D đóng giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1$, $y = 1$ và $x + y = 1$

BÀI TẬP.

Bài 1: Tính các đạo hàm riêng cấp 1:

$$a)\ f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$b)\ f(x,y)=\frac{x^3}{y^3}+\frac{y}{x}$$

Bài 2: Tính các đạo hàm riêng cấp 2:

$$u(x,y) = x^3 + 3xy^2.$$

Tính $u_{xx} + u_{yy}$

Bài 3: Tính đạo hàm của hàm số hợp sau:

$z = u\sqrt{1+v^2}$ trong đó $u = xe^{-x}$, $v = \cos x$

Bài 4: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

Bài 5: Tìm GTLN,GTNN của hàm số

$$f(x,y) = 1 + xy - x - y,$$

D là miền đóng giới hạn bởi các đường $y = 4$, $y = x^2$

CHÚC CÁC EM THÀNH CÔNG