ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology

Chương 3.

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Nhắc lại đạo hàm của các hàm số sơ cấp

$$\left(x^n\right)' = n.x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x.\ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a^x)' = \frac{1}{x.\ln a}$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arc}\,cosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{ar}x\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arc}\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Bài 1. Tích phân bất định

I. Khái niệm về tích phân bất định

1. Định nghĩa

a) Nguyên hàm: Hàm số F(x) gọi là nguyên hàm của f(x) trên tập K, nếu: **F'(x) = f(x)**

VD: x^2 là một nguyên hàm của 2x, vì **$(x^2)' = 2x$**

b) Định nghĩa: Tập hợp các nguyên hàm của f(x) được gọi là tích phân bất định của hàm số f(x).

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

$$VD: \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

2. Bảng các tích phân cơ bản

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$$\int \cos x.dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + C$$

$$\int \sin x.dx = -\cos x + C$$

II. Các phương pháp tính tích phân bất định

1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

$$I = \int f(x)dx \xlongequal{\text{Phân tích}} \int g[u(x)].u'(x)dx$$

Các bước thực hiện:

+ Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

$$+ I = \int g[u(x)].u'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$$

VD:

$a)\ \int x.e^{x^2+1}dx$

$b)\ \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$

$c)\ \int x\sqrt{x^2+1}.dx$

$d)\ \int \frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}dx$

2. Phương pháp đổi biến số dạng 2

Xét tích phân $I = \int f(x)dx$

Các bước thực hiện:

+ Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$

$+I = \int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

Ví dụ: Tìm

$a) \int \sqrt{1-x^2}.dx$ $\qquad$ $b) \int \frac{dx}{4+x^2}$

3. Phương pháp tích phân từng phần

a) ĐL: $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

b)NX:

$TH1: \int f(x).\begin{bmatrix} \sin ax \\ cosax \\ e^{ax} \end{bmatrix}.dx$ ta đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$

$TH2: \int f(x)\ln(ax)dx$ ta đặt: $\begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x)dx \end{cases}$

c)VD: $a)\ \int x.\sin x dx$ $b)\ \int x.\ln x.dx$ $c)\ \int 2x\ln(1+x)dx$

Bài tập:

a) $\int (x^3+5)^4 x^2 dx$

b) $\int \sin^4 x \cos x dx$

c) $\int \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$

d) $\int x^3 \sqrt{x^2+1}.dx$

e) $\int (x^2+5)\sin x dx$

f) $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$

Bài 2

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Tích phân xác định

1. Định nghĩa: Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b]

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(với F(x) là một nguyên hàm của f(x))

VD:

$$\int_0^1 2x.dx = x^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

2. Tính chất

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với k: hằng số

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^m f(x)dx + \int_m^b f(x)dx$$

6) Nếu f(x) ≤ g(x), ∀x ∈ [a, b] thì

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

7) Nếu m ≤ f(x) ≤ M, ∀x ∈ [a, b] thì

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

II. Các phương pháp tính TPXĐ

1. Phương pháp đổi biến số

a) Đổi biến số dạng 1:

$$I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$$

Các bước thực hiện:

<u>Bước 1</u>: Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

<u>Bước 2</u>: Đổi cận : $\left| \begin{array}{l} x = b \\ x = a \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = u(b) \\ t = u(a) \end{array} \right.$

<u>Bước 3</u>: $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

VD: Tính các tích phân sau:

$$a)\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin^3 x.dx$$

$$b)\quad \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$c)\quad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 dx$$

b) Đổi biến số dạng 2:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Các bước thực hiện:

<u>Bước 1</u>: Đặt $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi^{/}(t)dt$

<u>Bước 2</u>: Đổi cận : $\left| \begin{array}{l} x = b \\ x = a \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = \beta \\ t = \alpha \end{array} \right.$

<u>Bước 3</u>: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

VD: Tính các tích phân sau:

$$a)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$b)\ \int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

2. Phương pháp tích phân từng phần

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Các bước thực hiện:

Bước 1: Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \\ v = v(x) \end{cases}$

Bước 2: Thay vào công thức $\int_a^b udv = [u.v]_a^b - \int_a^b vdu$

Bước 3: Tính $[u.v]_a^b$ và $\int_a^b vdu$

Ví dụ: Tính

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx$ b) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x}dx$

Bài 3.

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I.Trường hợp khoảng lấy tích phân vô hạn

1. Khoảng tích phân [a, +∞)

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \qquad (1)}$$

Các bước thực hiện:

Bước 1: Tính $\int_a^b f(x)dx = g(b)$

Bước 2: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} g(b)$

2. Khoảng tích phân (-∞, b]

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (2)}$$

Các bước thực hiện:

Bước 1: Tính $\int_{a}^{b} f(x)dx = h(a)$

Bước 2: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} h(a)$

Ví du: Tính các tích phân suy rộng sau:

$$a)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Giải.

$$b)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx$$

Giải.

3. Khoảng tích phân (-∞, + ∞)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)}$$

VD: Tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx$

Hướng dẫn:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx$$

ĐS: 0

Bài tập. ***Tính các tích phân suy rộng***

$$a)\ \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}$$

$$b)\ \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{1+x^2}}$$

$$c)\ \int_{1}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$d)\ \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$$

$$e)\ \int_{0}^{+\infty} e^{-x}.\sin x.dx$$

Chú ý

Nếu các tích phân suy rộng **(1), (2), (3)** là một số hữu hạn thì ta nói các tích phân suy rộng đó *hội tụ*, ngược lại nếu nó vô hạn hoặc không tồn tại thì ta nói nó *phân kì.*

II. Trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn

1. Hàm không bị chặn tại cận trên

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx}$$

2. Hàm không bị chặn tại cận dưới

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx}$$

VD: Tính $a)\ \int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ $b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Bài tập. Tính

$$a)\ \int_0^1 \ln x.dx \qquad b)\ \int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$$

$$c)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

Hết chương 3