Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií

2. Hamiltonova cesta a cyklus v grafu

IAL - Algoritmy: Náhradní projekt - skupinový

xdrahn00@stud.fit.vutbr.cz
xvavri10@stud.fit.vutbr.cz

Brno, 11. prosince 2019

1 Zadání

Cestu v grafu, ve které se vyskytuje každý vrchol právě jednou, nazýváme Hamiltonovou cestou. Má-li tato cesta počátek a konec v jednom jediném vrcholu, pak se jedná o Hamiltonův cyklus v grafu.

Vytvořte program pro hledání Hamiltonovy cesty (pro dva zadané vrcholy) a Hamiltonova cyklu v neorientovaném grafu.

Pokud existuje více řešení, nalezněte všechna. Výsledky prezentujte vhodným způsobem. Součástí projektu bude načítání grafů ze souboru a vhodné testovací grafy. V dokumentaci uveďte teoretickou složitost úlohy a porovnejte ji s experimentálními výsledky.

2 Úvod

Dokumentace popisuje implementaci a návrh řešení k zadání č. 2 Hamiltonova cesta a cyklus v grafu (přesná kopie zadání se nachází výše).

3 Vstupní podmínky

V kontrolování předpokladů splnitelnosti je snaha předejít zbytečnému prohledávání grafu algoritmicky. Základní vstupní podmínky jsou takto v programu naimplementovány, rozšířené vstupní podmínky slouží pouze jako informační při zapnutém ‘debug‘ přepínači.

3.1 Základní vstupní podmínky

Není možné v grafu nalézt Hamiltonovu cestu a cyklus pokud nejsou splněna následující pravidla:

1. Počet uzlů v grafu musí být větší než 2
2. Graf musí mít minimálně stupeň 1 pro každý uzel pro nalezení Hamiltonovi cesty
3. Graf musí mít pro každý uzel minimálně stupeň 2 pro každý uzel pro nalezení Hamiltonova cyklu

3.2 Rozšířené vstupní podmínky

K ověření zda lze v grafu nalézt Hamiltonovu cestu a cyklus stačí splnění některé z následujících podmínek. Nesplnění žádné z nich nutně nemusí znamenat, že graf Hamiltonovu cestu nebo cyklus neobsahuje.

1. **Diracova** podmínka - každý uzel má stupeň alespoň $\frac{1}{2}$ celkového počtu uzlů
2. **Oreho** podmínka - každá dvojice uzlů nespojených hranou má součet stupňů alespoň jako je celkový počet vrcholů
3. **Pósova** - pro každé přirozené číslo k $< \frac{1}{2}$ celkého počtu vrcholů existuje počet uzlů, jejichž stupeň nepřevyšuje k, menší než k

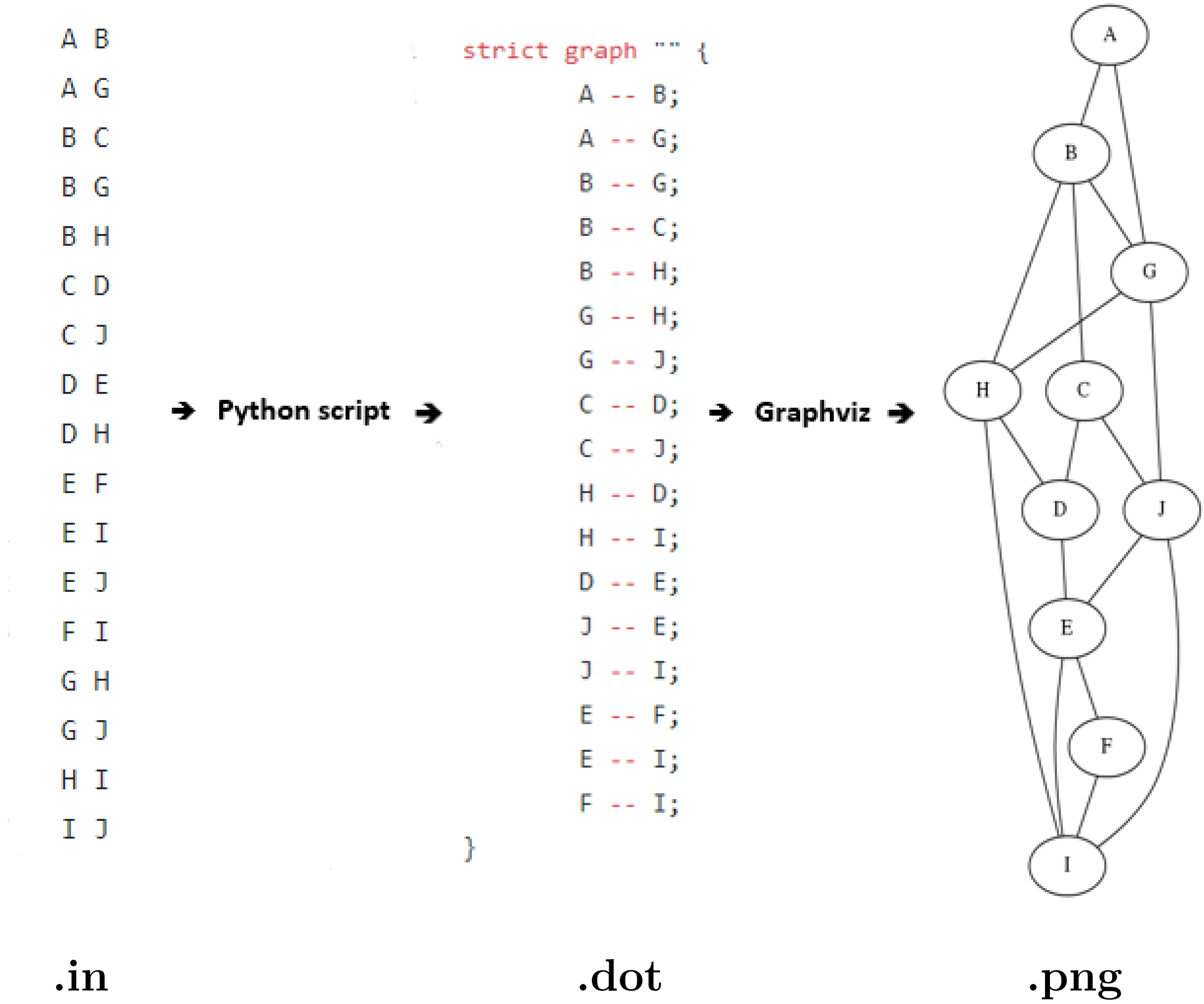
4 Algoritmus - Brute force

Algoritmus začíná prohledávat graf na počátečním vrcholu. Počáteční vrchol může být zadaný uživatelem. Algoritmus pro počáteční bod projde všechny jeho hrany a rekurzivně se zavolá pro vrcholy ke kterým jednotlivé hrany vedou. Nezavolá se rekurzivně a algoritmus pro konkrétní variantu cesty skončí neúspěchem pouze v případě pokud byl vrchol na této konkrétní variantě cesty již prozkoumán nebo při nalezení posledního vrcholu. Poslední vrchol může být také zadaný uživatelem. Bez uvedení vrcholů uživatelem se za první a cílový vrchol vybere vrchol uvedený na prvním řádku zdrojového grafu a hledá se tedy Hamiltonův cyklus. Tento algoritmus je dále označován jako Brute force, protože neobsahuje žádnou optimalizaci.

5 Vstupní data

Vstupní data jsou uloženy v souborech **.in**. Na každém řádku v tomto souboru se nachází právě dva charaktery, které značí daný vrchol. Význam spojení dvou vrcholů značí to, že mají společnou hranu. Tento soubor je potom pomocí jednoduchého python skriptu převeden do formátu **.dot** (graph description language) a nakonec s pomocí knihovny Graphviz[1] i do formátu **.png**.

Obrázek 1: Formát vstupních dat



6 Teoretická složitost

6.1 Analýza

- Celkem existuje $(|V| - 1)!$ kružnic
- Každá kružnice má $|V|$ hran
- Potřebujeme zpracovat $|V|$hran
- Časová složitost je faktoriálová - $O(n!)$
- Celkem existuje $(V - 1)!/2$ řešení
- Předpokládáme rychlost zpracovávání 1 000 000 000 hran za sekundu

6.2 Výpočet

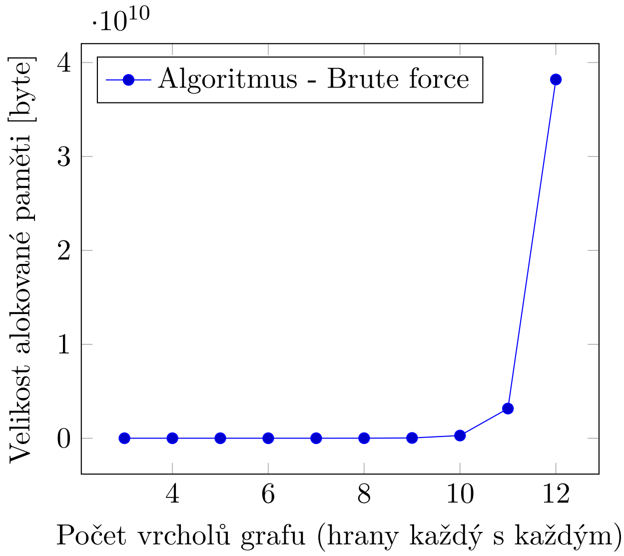
Vrcholy	Počet hran ke zpracování	Počet řešení	Čas zpracování
3	6	1	6 ns
4	24	3	24 ns
5	120	12	120 ns
6	720	60	720 ns
7	5,040	360	5 040 ns
8	40,320	2,520	40 000 ns
9	362,880	20,160	0,36 ms
10	3,628,800	181,440	3,6 ms
11	39,916,800	1,814,400	39,9 ms
12	479,001,600	19,958,400	479 ms

7 Experimentální ověření složitosti

K naměření dat byly použity grafy s počtem vrcholů od 3 do 13 uvedené ve složce 'complexity/graphs'. Všechny tyto grafy obsahují hrany propojující každý vrchol se všemi ostatními. Vstupní parametry nejsou zadány, je hledaný Hamiltonův cyklus z A do A. Počet nalezených cyklů odpovídá faktoriálu $(V-1)!$ kde V značí počet vrcholů.

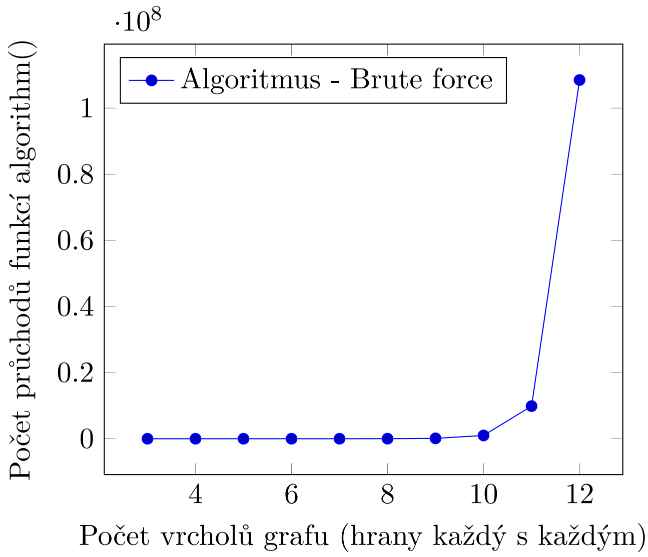
Graf	Vrcholy	Hrany	Prozkoumané vrcholy	Čas [s]	Výsledky	Alokování	Alokovaná pamět [byte]
3v.in	3	3	5	0.01	2	32	6,766
4v.in	4	6	16	0.01	6	58	8,948
5v.in	5	10	65	0.01	24	126	17,478
6v.in	6	15	326	0.01	120	410	64,204
7v.in	7	21	1,957	0.01	720	2,068	392,246
8v.in	8	28	13,700	0.02	5,040	13,842	3,091,836
9v.in	9	36	109,601	0.13	40,320	109,778	28,090,078
10v.in	10	45	986,410	1.22	362,880	986,626	284,130,788
11v.in	11	55	9,864,101	14.06	3,628,800	9,864,360	3,156,573,535
12v.in	12	66	108,505,112	187.34	39,916,800	108,505,418	38,193,881,957

7.1 Experimentální ověření prostorové složitosti



8 Experimentální ověření časové složitosti

K experimentálnímu ověření časové složitosti byly použity hodnoty získané počtem průchodů funkcí ‘algorithm()‘, údaj je ekvivalentní s počtem prozkoumaných vrcholů.



9 Závěr

Program byl zkontrolován pomocí programu ‘valgrind-3.13.0‘. V programu nedochází na žádné úniky paměti. V programu je využítá část kódu ze stejného projektu z akademického roku 2018/2019 v souboru ‘./tests/tests.sh‘ nepatřící ani jednomu z autorů uvedených v úvodu, autor větší části tohoto souboru je označený v hlaviče a je to Adam Láníček.

Reference

[1] Graphviz - Graph Visualization Software. Https://www.graphviz.org/.
URL `Graphviz - Graph Visualization Software [online]`

[2] Studijní materiály k předmětu IAL.

[3] Travelling Salesman Problem. A computer science portal for geeks [online].
URL `https://www.geeksforgeeks.org/travelling-salesman-problem-set-1/`

[4] Gould, R.: Advances on the Hamiltonian Problem - A Survey. [online]. 2002 [cit. 2017-12-05].
URL `http://www.mathcs.emory.edu/ rg/advances.pdf`