Краткое описание основных шагов метода ELECTRE I

Александр Владимирович Демидовский

30 мая 2022 г.

Аннотация

Данный документ содержит конспект основных шагов метода многокритериального анализа решений ELECTRE I. Даный документ носит ознакомительный характер и выполнен в рамках подготовки диссертации на соискание степени кандидата компьютерных наук.

1 Введение

Методы ELECTRE (ELimination and Choice Expressing REality) были изначально предложены Benayoun R. в [BRS66] и затем значительно доработаны исследователем Roy B. [Roy68]. В общем, данные подходы позволяют определять доминирование альтернативных решений друг относительно друга через призму анализа их согласованности. Рассмотрим процесс принятия решения с момента, когда начинается сбор оценок экспертов по каждой альтернативе по каждому критерию. В результате формируется матрица A, которая имеет следующую форму:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

где x_{ij} обозначает оценку, данную по i-той альтернативе и по j-тому критерию.

Оригинальный метод состоит из 9 последовательных шагов [?]. Каждый из них описан ниже.

2 Описание рассматриваемого метода: ELECTRE I

2.1 Расчет нормализованной матрицы решений

Во время данного шага нормализация происходит по столбцу в силу того, что столбец соответствует заданному критерию и ему соответствует одна единица измерения.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}} \tag{2}$$

В результате получаем нормализованную матрицу решений R.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots\cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots\cdots & r_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & r_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2 Расчет взвешенной нормализованной матрицы решений

Веса $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ назначаются каждому критерию так, что требуется умножить каждую i-тый столбец нормализованной матрицы решения на j-тый вес. Для сохранения матричной формы расчетов, представим веса как диагональную матрицу W:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & . \; . & w_n \end{bmatrix}$$

Затем, взвешенная нормализованная матрица решений получается в результате матричного умножения нормализованной матрицы решений и диагональной матрицы весов:

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots\dots\dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots\dots\dots & r_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ r_{m1} & r_{m2} & . \; . \; . \; . & r_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & . \; . & w_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} * w_1 & r_{12} * w_2 & \dots\dots\dots & r_{1n} * w_n \\ r_{21} * w_1 & r_{22} * w_2 & \dots\dots\dots & r_{2n} * w_n \\ \hdotsfor{4} \\ r_{m1} * w_1 & r_{m2} * w_2 & . \; . \; . \; . & r_{mn} * w_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

2.3 Построение множеств согласия и несогласия

Этот шаг является одним из ключевых в данном методе. Для каждой пары альтернатив A_k и A_l происходит разделение множества критериев J на два подмножества: первое (C_{kl}) содержит те критерии, по которым альтернатива A_k является предпочтительной относительно альтернативы A_l, а второе подмножество (D_{kl}) является дополнением первого до полного множества альтернатив:

$$\begin{aligned} C_{kl} &= \{j \mid x_{kj} \geq x_{lj}\} \\ D_{kl} &= \{j \mid x_{kj} < x_{lj}\} = J - C_{kl} \end{aligned} \tag{4}$$

2.4 Расчет матрицы согласия

Как только множества согласия определены, происходит расчет индекса согласия между двумя парами альтернатив A_k и A_l. Это сумма весов входящих в это множество критериев:

$$c_{kl} = \frac{\sum_{j \epsilon C_{kl}} w_j}{\sum_j^n w_j} \tag{5}$$

В результате получается матрица C:

$$\begin{bmatrix} - & c_{12} & \dots\dots\dots & c_{1n} \\ c_{21} & - & \dots\dots\dots & c_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ c_{m1} & c_{m2} & . \; . \; . \; . & - \end{bmatrix}$$

2.5 Расчет матрицы несогласия

Как только множества несогласия определены, происходит расчет индекса несогласия между парами альтернатив A_k и A_l. Общая мотивация заключается в понимании того, насколько первый критерий хуже, чем второй:

$$d_{kl} = \frac{\max_{j \epsilon D_{kl}} \mid v_{kj} - v_{lj} \mid}{\max_{j \epsilon J} \mid v_{kj} - v_{lj} \mid} \tag{6}$$

В результате получается матрица D:

$$\begin{bmatrix} - & d_{12} & \dots\dots\dots & d_{1n} \\ d_{21} & - & \dots\dots\dots & d_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ d_{m1} & d_{m2} & . \; . \; . \; . & - \end{bmatrix}$$

2.6 Построение матрицы доминирования согласия

Для того, чтобы можно было начать отбрасывать не доминирующие альтернативы, происходит преобразование матрицы согласия C в двоичную матрицу F с применением особого порогового значения (средний индекс согласия) $\widetilde{c}$:

$$\widetilde{c} = \sum_{k=1,k\neq l}^{m} \sum_{l=1,l\neq k}^{m} \frac{c_{kl}}{m*(m-1)} \tag{7}$$

Матрица доминирования согласия F строится согласно правилу:

$$f_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } c_{kl} \geq \widetilde{c} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{8}$$

2.7 Построение матрицы доминирования несогласия

Данный шаг происходит аналогично предыдущему шагу. В результате получается матрица доминирования несогласия G.

2.8 Построение общей матрицы доминирования

Во время данного шага происходит слияние матриц согласия и несогласия через поэлементное умножение этих матриц. Результирующая матрица E и есть общая матрица доминирования.

$$E = \|e_{kl}\| = \|f_{kl} * g_{kl}\| \tag{9}$$

2.9 Удаление наименее привлекательных альтернатив

Данный шаг требует анализа того, какие альтернативы оказываются доминирующими, и в результате остаются одна или несколько альтернатив, предлагаемых ЛПР как наилучшие.

Список литературы

[BRS66] R Benayoun, B Roy, and N Sussman. Manual de reference du programme electre. *Note de synthese et Formation*, 25:79, 1966.

[Roy68] Bernard Roy. Classement et choix en presence de points de vue multiples. *Revue francaise d'informatique et de recherche operationnelle*, 2(8):57–75, 1968.