Краткое описание основных шагов метода TOPSIS

Александр Владимирович Демидовский

30 мая 2022 г.

Аннотация

Данный документ содержит конспект основных шагов метода многокритериального анализа решений TOPSIS. Даный документ носит ознакомительный характер и выполнен в рамках подготовки диссертации на соискание степени кандидата компьютерных наук.

1 Введение

Метод TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) был предложен исследователями Yoon and Hwang [HY81a]. Общая идея заключается в том, что после определения «идеального» и «негативно-идеального» решения происходит попытка определения такой альтернативы, которая будет одновременно ближайшей к «идеальному» и максимально удаленной от «негативно-идеального» решения. Как и обычно, процесс принятия решения начинается с оценки альтернатив по критериям. В результате получается матрица решений A (1). Рассмотрим процесс принятия решения с момента, когда начинается сбор оценок экспертов по каждой альтернативе по каждому критерию. В результате формируется матрица A, которая имеет следующую форму:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots\dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots\dots\dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & . \quad . \quad . \quad . & x_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

где x_{ij} обозначает оценку, данную по i-той альтернативе и по j-тому критерию.

Оригинальный метод состоит из 6 шагов [HY81b], каждый из которых рассмотрен ниже.

2 Описание рассматриваемого метода: TOPSIS

2.1 Расчет нормализованной матрицы решений

Алгоритм расчета соответствует аналогичному шагу в методе ELECTRE I.

Во время данного шага нормализация происходит по столбцу в силу того, что столбец соответствует заданному критерию и ему соответствует одна единица измерения.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}} \tag{2}$$

В результате получаем нормализованную матрицу решений R.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots\dots\dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots\dots\dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & . \quad . \quad . \quad . & r_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2 Расчет взвешенной нормализованной матрицы решений

Веса $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ назначаются каждому критерию так, что требуется умножить каждую i-тый столбец нормализованной матрицы решения на j-тый вес. Для сохранения матричной формы расчетов, представим веса как диагональную матрицу W:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_2 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & . \quad . & w_n \end{bmatrix}$$

Затем, взвешенная нормализованная матрица решений получается в результате матричного умножения нормализованной матрицы решений и диагональной матрицы весов:

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots\ldots\ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots\ldots\ldots & r_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ r_{m1} & r_{m2} & . \quad . \quad . \quad . & r_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_2 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & . \quad . & w_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{11} * w_1 & r_{12} * w_2 & \ldots\ldots\ldots & r_{1n} * w_n \\ r_{21} * w_1 & r_{22} * w_2 & \ldots\ldots\ldots & r_{2n} * w_n \\ \hdotsfor{4} \\ r_{m1} * w_1 & r_{m2} * w_2 & . \quad . \quad . \quad . & r_{mn} * w_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

2.3 Определение «идеального» и «негативно-идеального» решений

Важно отметить, что критерии могут иметь различный смысл. Часть из них направлена на максимизацию значений (на выигрыш), другая - на сокращение (на затраты). Поэтому это учитывается при построении «идеального» A^* и «негативно-идеального» A^- решений:

$$\begin{aligned} A^* &= \{(\max_i v_{ij} \mid j \epsilon J^{benefit}), (\min_i v_{ij} \mid j \epsilon J^{cost}) \mid i = 1, 2, \ldots, m\} \\ A^- &= \{(\min_i v_{ij} \mid j \epsilon J^{benefit}), (\max_i v_{ij} \mid j \epsilon J^{cost}) \mid i = 1, 2, \ldots, m\} \end{aligned} \tag{4}$$

$J^{benefit}$ обозначает подмножество критериев, направленных на максимизацию значений, J^{cost} - на минимизацию. Вместе они формируют полное множество критериев J.

2.4 Расчет метрики различия

Для того, чтобы сравнивать векторы оценок по заданным альтернативам с «идеальным» и «негативно-идеальным» решениями, требуется использование некоторой метрики расстояния. В оригинальной работе в качестве метрики используется евклидово расстояние. Другими словами, для каждой i-той альтернативы рассчитывается ее расстояние до «идеального» решения (S_{i^*}) и до «негативно-идеального» (S_{i^-}):

$$\begin{aligned} S_{i^*} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^*)^2}, i = 1, 2, \ldots, m \\ S_{i^-} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^-)^2}, i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{5}$$

2.5 Расчет относительной близости к «идеальному» решению

Для каждой альтернативы A_i близость рассчитывается следующим образом:

$$C_{i^*} = \frac{S_{i^-}}{S_{i^-} + S_{i^*}} \tag{6}$$

Чем ближе C_{i^*} к 1, тем ближе альтернатива A_i к «идеальному» решению.

2.6 Ранжирование в порядке предпочтительности

Так как каждая альтернатива имеет соответствующую метрику близости, нужно осуществить сортировку всех альтернатив по этому критерию в порядке убывания и выбрать те альтернативы, которые имеют максимальное значение как лучшие.

Список литературы

[HY81a] C Hwang and K Yoon. Topsis (technique for order preference by similarity to ideal solution)—a multiple attribute decision making, w: Multiple attribute decision making—methods and applications, a state-of-the-art survey. *Methods and application: New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Springer Publications*, 1981.

[HY81b] Ching-Lai Hwang and Kwangsun Yoon. Methods for multiple attribute decision making. In *Multiple attribute decision making*, pages 58–191. Springer, 1981.