axis x line = middle, axis y line = middle
t1 tm1

Cálculo Integral: N3

Leon Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal Rural de Pernanbuco

Deibsom Silva
Departamento de Matemática
Universidade Federal Rural de Pernanbuco

April 26, 2021

Resumo

Aqui faremos um resumo das atividades da semana.

Aqui uma introdução será necessária “Introduction.”

1 A integral definida

1.1 Área e a integral definida

Objetivos: Estrutura

1. Calcular integral definida.
2. Usar o Teorema Fundamental do Cáculo para obter o valor da integral defnida.
3. Calcular integrais definidas usando o método de substituição.

Definição 1.1 Área. Seja f não negativa e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A área limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é denotado por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A expressão $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é chamada de **integral definida** de a até b, em que a e b são os limites inferior e superior de integração, respectivamente.

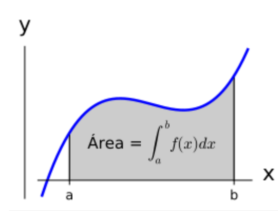


Figura 1.2 Área sob o gráfico de $f(x)$ entre a e b.

$\lozenge$

Exemplo 1.3 Calcule a área da região limitada pelo gráfico de pelo gráfico de $f(x) = 3x$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.

Solução.

De acordo com a Definição 1.1, a integral definida de $3x$ de 0 até 2 representa a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = 3x$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$, como mostra a figura Figura 1.4. A região é triângular, com uma base de 2 unidades e altura de 6 unidades. Portanto, usando a fórmula da área do triângulo, temos

$$\int_0^2 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2)(6) = 6.$$

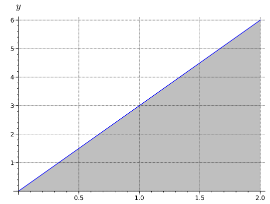


Figura 1.4 Área entre o gráfico de $f(x) = 3x$, o eixo x e a reta $x = 2$

□

Autoavaliação 1.5 Calcule a integral definida de $4x$ de 0 até 3, usando uma fórmula geométrica. Ilustre sua resposta com um gráfico apropriado.

Dica. Revise Exemplo 1.3.

Resposta. 18

Tecnologia 1.6 Faça você mesmo. Para visualizar a região sob o gráfico de um função *não negativa* entre a e b se dirija até a calculadora gráfica abaixo e siga os seguintes passos:

1. Em $f(x)$, insira uma função contínua pelo menos no intervalo $[-10, 10]$ ou em qualquer subintervalo deste. Por exemplo, $[0, 1]$. Por padrão usamos a função $f(x) = x^2$.

2. Olhando para o gráfico, faça ajustes no intervalo para garantir que o gráfico de $y = f(x)$, inserido no passo anterior, esteja sempre acima do eixo x. (A função deve ser não negativa, lembra?)

3. Marque a opção para mostrar a região pretendida.

Seguindo os passos acima você encontra a região cuja **área** é dada por

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Specify static image with `@preview` attribute,
Or create and provide automatic screenshot as
`images/interactive-numerical-integral-preview.png`
via the `mbx` script

Figura 1.7 Região sob o gráfico de uma função

Nota 1.8 Outra forma de introduzir a integral definida é através do processo de somas. Nesse caso, a região é dividida em um certo número de retângulos cuja a altura seja $f(x)$. A soma da área de cada retângulo definido dessa forma é denominada de **Soma de Riemann**. O limite da Soma de *Riemann*, quando a base de cada retângulo se aproxima de zero, é também chamado de **integral definida**. Nas próximas seções daremos mais detalhes sobre essa abordagem.

1.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 1.9 Teorema Fundamental do Cálculo - parte 1 (TFC1). *Se f é contínua definida no intervalo $[a, b]$. Seja $F(x)$ uma função definida, para todo x em $[a, b]$, por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Então F é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso,

$$F'(x) = f(x),$$

para todo x em (a, b).

Demonstração. *depois* ■

Exemplo 1.10 Adicionar exemplo

Solução. Adicionar solução □

Exemplo 1.11 Adicionar exemplo

Solução. Adicionar solução □

Autoavaliação 1.12 Adicionar autoavaliação

Dica. Adicionar dica

Resposta. Adicionar resposta

Autoavaliação 1.13 adicionar autovaliação

Dica. Adicionar dica

Resposta. Adicionar resposta

Teorema 1.14 Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2 (TFC2). *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$, e F é igual a $f(x)$ para todo x em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Demonstração. *mais adiante ...* ■

Na Definição 1.1 assumia-se que f era não negativa no intervalo fechado $[a, b]$. Assim, a integral definida era definida como uma área. Agora, a partir do Teorema Fundamental do Cálculo, a definição pode ser estendida para incluir funções negativas em todo o intervalo fechado $[a, b]$ ou em parte dele. Especificamente, se f for qualquer função contínua em um intervalo $[a, b]$, então a **integral definida** de $f(x)$ de a até b é definida como

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

em que $F'(x) = f(x)$. Dessa forma, as **integral definidas** não representam necessariamente áreas e, portanto, podem ser negativas, positivas ou zero.

Atenção.

Há uma significativa diferença entre integral indefinida e integral definida. A *integral indefinida*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

denota uma família de funções na qual cada membro é uma primitiva de $f(x)$, enquanto a *integral indefinida*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

é um número.

Exemplo 1.15 Usando o TFC resolva a integral definida

$$\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x.$$

Solução. Note que $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $2x$. Então, pelo TFC, temos

$$\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x = 2^2 - 0^2 = 4.$$

□

Autoavaliação 1.16 Usando o TFC resolva a integral

$$\int_0^3 4x\,\mathrm{d}x.$$

Dica. Revise Exemplo 1.15.

Resposta. 18

Notação útil.

Quando usamos o Teorema Fundamental do Cálculo é util usar a notação

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Investigação 1.1 Onde está a constante C? Revise o TFC e justifique o "sumiço" da constante C que forma a primitiva F.

Propriedades da integral definida.

Sejam f e g contínuas no intervalo $[a, b]$ e k uma constante.

I) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

II) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

III) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

IV) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad a < c < b$

V) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

VI) $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemplo 1.17 Cálculo da área. Determine a área sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ entre 1 e 2.

Solução. A Figura 1.18 ilustra a área área desejada, cujo valor é obtido como a seguir:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_1^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x && Integral definida\\
&= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 && Calcule a primitiva\\
&= \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) && Aplique o \text{ TFC}\\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos dizer que a área da região é de $\frac{4}{3}$.

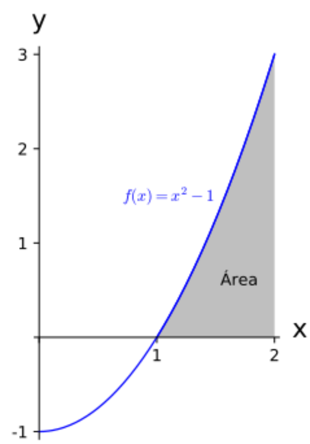


Figura 1.18 Região limitada por $f(x) = x^2 - 1$, o eixo x e a reta $x = 2$.

□

Autoavaliação 1.19 Determine a área da região limitada pelo eixo x, pelas retas $x = 2$, $x = 5$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2 + 1$.

Dica. Revise Exemplo 1.17.

Resposta. 42

Exemplo 1.20 Mais exemplos. Calcule as seguintes integrais definidas.
$\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$

primitiva de e^{2x} pode ser $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$. Então,

$$\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2x}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right) \approx 26.79$$

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

primitiva de $\frac{1}{x}$ pode ser $F(x) = \ln|x|$, e, já que $3 \leq x \leq 6$, podemos escrever $F(x) = \ln x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_3^6 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln x\Big|_3^6 = \ln 6 - \ln 3 \\ &= \ln\frac{6}{3} = \ln 2 \approx 0.6931 \end{aligned}$$

$$\int_1^4 -3\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$\sqrt{t}$ como $t^{1/2}$ e aplicando a regra da potência encontramos $F(x) = \frac{t^{3/2}}{3/2}$ como primitiva. Então,

$$\begin{aligned} \int_1^4 -3\sqrt{t}\,\mathrm{d}t &= -3\left(\frac{t^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_1^4 && \textit{Apliqueo}\ \text{TFC}. \\ &= -2x^{3/2}\Big|_1^4 && \textit{Simplifique}. \\ &= -2(4^{3/2} - 1^{3/2}) = -2(8-1) = -14 \end{aligned}$$

$\square$

Autoavaliação 1.21 Calcule cada integral definida. $\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

$F(x) = -e^{-x}$.

0.6321. $\int_3^6 -\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$

Tarefa .**??**.

$4\ln(1/2)$ ou aproximadamente -2.772.

Exemplo 1.22 Função modular. Sobre função $f(x) = |2x - 1|$, resolva.Esboce a região sob o gráfico de $f(x)$ de $x = 0$ até $x = 2$.

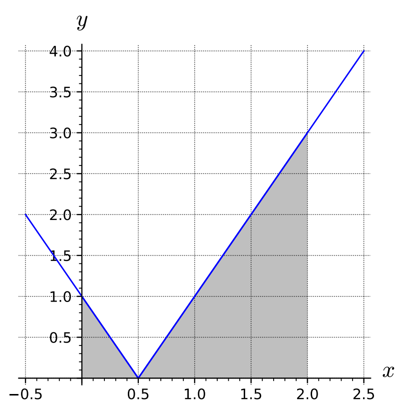


Figura 1.23 Região determinada por $f(x) = |x - 2|$, o eixo x e as reta $x = 0$ e $x = 2$

Calcule $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

partir da definição de valor absoluto, o integrando $|2x-1|$ pode ser escrito em duas partes, a saber:

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & x < 1/2 \\ 2x-1, & x \geq 1/2 \end{cases}.$$

Usando Item IV das propriedades de integral definida, podemos reescrever a integral como duas outras de modo que a soma seja igual a integral desejada.

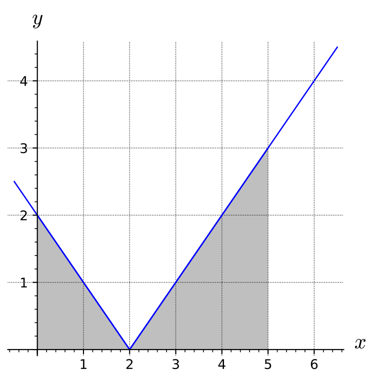
$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x-1|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} -(2x-1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^2 (2x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-x^2+x\right)\Big|_0^{1/2} + \left(x^2-x\right)\Big|_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0+0) + (4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

□

Atividade 1.2 Valor absoluto.

(a) Determine a região determinada pelo gráfico de $f(x) = |x-2|$, pelas as retas $x = 0$ e $x = 5$ e o eixo x.

Resposta.



(b) Calcule a área da região descrita no item anterior usando fórmulas geométricas.

Resposta. $\frac{13}{2}$

(c) Calcule $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$ e compare com o item anterior.

Resposta. $\frac{13}{2}$

Investigação 1.3 Use os recursos matemáticos apresentados até aqui para mostrar que as Propriedades da integral definida são verdadeiras.

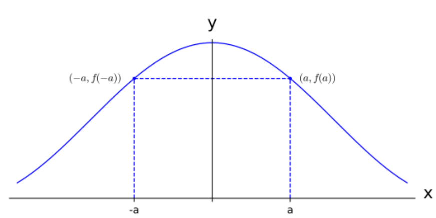
1.3 Sugestão de Vídeos

- Propriedade da integral definida: trocando o sinal da integral
- Propriedade da integral definida: somando áreas

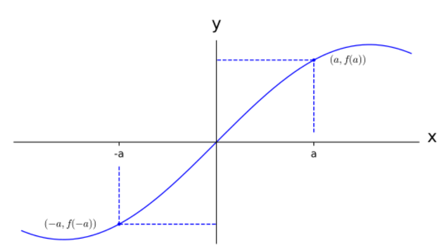
- Calculando área: usando o gráfico I
- Calculando área: usando o gráfico II
- Teorema Fundamental do Cálculo
- Encontrando $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^3 \sqrt{|\cos(t)|}\,\mathrm{d}t$
- Encontrando $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
- Calculando integrais do tipo $\displaystyle\int_a^b kx^n\,\mathrm{d}x$
- Calculando $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{16-x^3}{x^3}\,\mathrm{d}x$
- Calculando $\displaystyle\int_2^4 \frac{6+x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$ (envolve logaritmo)
- Calculando $\displaystyle\int_{\frac{11\pi}{2}}^{6\pi} 9\sin x\,\mathrm{d}x$
- Calculando a integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ para $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ \cos(\pi x), & x \geq 0. \end{cases}$
- Calculando $\displaystyle\int_{-4}^{0} |x+2|\,\mathrm{d}x$

1.4 Integrando funções com gráficos simétricos

Gráficos de funções são úteis para analisar várias propriedades importantes. Diversas funções possuem simetria em relação em relação ao eixo y, como na Figura 1.24(a) e outras apresentam simetria em relação a origem, como na Figura 1.24(b). No primeiro caso, a função é dita **par** e satisfaz $f(-x) = f(x)$ em $[-a, a]$, e no segundo a função é dita **ímpar** e satisfaz $f(-x) = -f(x)$ em $[-a, a]$.



(a) Simetria em relação ao eixo y



(b) Simetria em relação a origem

Figura 1.24 Gráficos simétricos.

Integração com funções pares e ímpares.

I) Se f for uma função **par**, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

II) Se f for uma função **ímpar**, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Exemplo 1.25 Calcule a integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$

função $f(x) = x^2$ é par, pois $x^2 = (-x)^2$ para todo x em $[-2, 2]$. Então, de acordo com o Item I, temos

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{2} x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = 2\cdot\frac{2^3}{3} - 2\cdot\frac{0^3}{3} = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-2}^{2} t^3\,\mathrm{d}t$

função t^3 é ímpar, já que $-t^3 = (-t)^3$ para todo x em $[-2, 2]$. Logo, de acordo com o Item II,

$$\int_{-2}^{2} t^3\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

Autoavaliação 1.26 $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^4\,\mathrm{d}t$

se t^4 é par ou ímpar em $[-1, 1]$ e depois use as propriedades da Integração com funções pares e ímpares.

$\frac{2}{5}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\,\mathrm{d}x$

se x^5 é par ou ímpar em $[-1, 1]$ e depois use as propriedades da Integração com funções pares e ímpares.

0

Investigação 1.4 Sobre a integral de funções pares e ímpares. Use os recursos matemáticos apresentados até aqui para mostrar que o Item I e o Item II são verdadeiros.

Investigação 1.5 Sobre a integral de funções pares e ímpares. Encontre uma justificativa geométrica para as afirmações Item I–II.

1.5 Integrais definidas por substituição

Existem duas formas de encontrar o valor da integral definida por substituição. A primeira, convida você a determinar uma primitiva e então aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Enquanto na segunda é necessário mudar os limites de integração de acordo com a substituição escolhida e, só depois, aplicar o teorema. O exemplo a seguir apresentamos duas soluções, cada uma ilustra uma das possibilidades.

Exemplo 1.27 Calcule a integral definida $\displaystyle\int_{0}^{1} (4x+1)^2\,\mathrm{d}x$.

Solução 1. Escolha $u = 4x + 1$. Então, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4$ e $\mathrm{d}u = 4\mathrm{d}x$. Assim, podemos afirmar que $\frac{(4x+1)^3}{3}$ é uma primitiva para $(4x+1)^2$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x+1)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{4}(4x+1)^2(4)\,\mathrm{d}x && Multipliqueedividapor 4.\\
&= \left(\frac{1}{4}\frac{(4x+1)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 && Mantenhaoslimitesdeintegração originais\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(4\cdot 1+1)^3}{3} - \frac{(4\cdot 0+1)^3}{3}\right) && Apliqueo\ \text{TFC}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right)\\
&= \frac{31}{3}
\end{aligned}$$

Solução 2. Escolha $u = 4x+1$. Então, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4$ e $\mathrm{d}u = 4\mathrm{d}x$. Para encontrar os novos limites de integração, observamos que quando $x = 0$, temos $u = 1$, por outro lado, para $x = 1$, obtemos $u = 5$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4x+1)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_1^5 u^2\,\mathrm{d}u && Multipliqueedividapor 4\\
&= \frac{1}{4}\frac{u^3}{3}\Bigg|_1^5 && Mudançadoslimitesdeintegração\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) && Apliqueo\ \text{TFC}\\
&= \frac{31}{3}
\end{aligned}$$

□

Autoavaliação 1.28 Calcule a integral definida $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)^3\,\mathrm{d}t$.

Dica. Escolha a substituição $u = 2t+3$.

Resposta. 68

Roteiro para encontrar integrais definidas por substituição.

- Use o método de substituição para encontrar uma primitiva em termos da variável original. Aplique o Teorema Fundamental do Cálculo utilizando os limites de integração originais; **ou**

- Escolha uma substituição adequada e converta os limites de integração originais em termos da nova variável. Aplique o Teorema Fundamental do Cálculo sem converter a primitiva em termos da variável original.

Nota 1.29 Embora as duas maneiras apresentadas para encontrar integrais definidas, por substituição, funcionem. É comum, por geralmente simplificar os cálculo, fazer uso da mudança dos limites de integração para a nova variável.

Autoavaliação 1.30 Resolva a integral $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ usando as duas opções apresentadas no Roteiro para encontrar integrais definidas por substituição.

Dica. Escolha a substituição $u = 2x + 1$.

Resposta. $\sqrt{3}$

Exemplo 1.31 Calcule $\displaystyle\int_0^2 x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Escolha $u = x^2$. Então, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$ e $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$. Quando $x = 0$, $u = 0$, e, quando $x = 2$, $u = 4$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} e^u \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e^4 - 1) \\ &\approx 26.79.\end{aligned}$$

□

Autoavaliação 1.32 Calcule $\displaystyle\int_1^2 2x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Dica. Revise Exemplo 1.31.

Resposta. $e^4 - e \approx 51.87$

Exemplo 1.33 Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Solução. Escolha $u = \tan t$. Então, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (1/\cos^2 t)$ e $\mathrm{d}u = (1/\cos^2 t)\mathrm{d}t$. Quando $t = 0$, $u = \tan 0 = 0$, e, quando, $x = \pi/4$, $u = \tan \pi/4 = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Autoavaliação 1.34 Refaça o Exemplo 1.33 fazendo a substituição $u = \cos t$. Conclua que embora o resultado final seja o mesmo, essa escolha torna o problema mais complicado.

Exemplo 1.35 Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{5 - x}\,\mathrm{d}x$.

Solução. A escolha u=5-x, fornece $\mathrm{d}u = (-1)\mathrm{d}x$. Além disso, quando $x = 1$, $u = 4$, e , quendo $x = 3$, $u = 2$. Então,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{5 - x}\,\mathrm{d}x &= \int_4^2 -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\ln u\Big|_4^2 = -(\ln 2 - \ln 4) \\ &= \ln\frac{4}{2} = \ln 2 \approx 0,6931.\end{aligned}$$

□

Autoavaliação 1.36 Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(3-5x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Dica. Escolha a substituição $u = 3 - 5x$.

Resposta. $\frac{1}{12}$

Exemplo 1.37 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Solução. Fazendo $u = \ln u$, obtemos $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1/x$. Então $\mathrm{d}u = (1/x)\mathrm{d}x$. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$, e, quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Autoavaliação 1.38 Calcule $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$.

Dica. Escolha a substituição $u = \ln x$.

Resposta. 2

1.6 Sugestão de Vídeos

- Resolvendo $\displaystyle\int_1^2 (2x(x^2+1)^3)\,\mathrm{d}x$
- Resolvendo $\displaystyle\int_0^1 x^2 2^{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.7 Calculando integrais definidas com SageMath

No Sage, usando o comando `integral(f, (x, a, b))` é possível calcular a integral definida de $f(x)$ de a até b.

Tecnologia 1.39 Faça você mesmo.

```
integral(x^2, (x, -1, 1))
```

```
2/3
```

Se a função estiver definida em uma variável simbólica diferente de x, é necessário proceder de uma das formas a seguir:

1. Substituir essa variável original por x quando for inserir o comando na célula.
2. Definir a nova variável usando comando `var()`.

Logo abaixo vamos cálcular a integral $\displaystyle\int_{-1}^1 t^5\,\mathrm{d}t$ de ambas as formas.

Usando a variável x.

```
integral(x^5, (x, -1, 1))
```

```
0
```

Usando a variável apresentada no problema.

```
t =  var('t')
integral(t^5, (t, -1, 1))
```

```
0
```

Atividade 1.6 Utilize a célular abaixo para calcular as integrais dos exemplos desta seção.

```

```

```
(for static output)
```

1.8 Exercícios

1. Encontre a área da região sob a curva $y = 2 - 4x^2$ e acima do eixo x.

área = ______________

Resposta. 1.88561808316413

Solução. Solução

A função que estamos considerando é

images/webwork-1-image-1.png

(Clique no gráfico para uma versão maior.)

A área que queremos está acima do eixo x e sob o gráfico da função. As inteseções com o eixo x são o lugar onde $y = 2 - 4x^2 = 0$, que está em $x = \pm\sqrt{\frac{2}{4}}$, então precisamos encontrar

$$\int_{-\sqrt{\frac{2}{4}}}^{\sqrt{\frac{2}{4}}} (2 - 4x^2)dx \approx 1.885.$$

Podemos localizar a área de várias maneiras, a mais fácil delas é usar uma calculadora gráfica. Por exemplo, o Geogebra.

2. Encontre a área da região sob a curva $y = 3x^3 - 3$ e acima do eixo x, para $3 \le x \le 7$.

área = ______________

Resposta. 1728

Solução. Solução

A função que estamos considerando é

images/webwork-2-image-1.png

(Clique no gráfico para uma versão maior.)

A área que queremos é aquela acima do eixo x e sob o gráfico da função, para $3 \leq x \leq 7$. Portanto, precisamos encontrar

$$\int_3^7 (3x^3 - 3)dx \approx 1728.$$

Podemos localizar a área de várias maneiras, a mais fácil delas é usar uma calculadora gráfica, como o GeoGebra.

3. Esboce e encontre a área da região abaixo do intervalo $[-5, -4]$ e acima da curva $y = \frac{x^3}{16}$.

área = ______________

Resposta. $\frac{369}{64}$

Solução. Solução

Traçando o gráfico, vemos que a região necessária tem:

Área $= -\displaystyle\int_{-5}^{-4} \frac{x^3}{16}\, dx = -\left[\frac{x^4}{64}\right]_{-5}^{-4} = -(4 - \frac{625}{64}) = \frac{369}{64}$

(Clique na imagem para ampliá-la)

images/webwork-3-image-1.png

$y = f(x)$

4. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar o valor de b se a área sob o gráfico de $f(x) = 6x$ entre $x = 1$ e $x = b$ é igual a 144. Assuma $b > 1$.

$b =$ ______________

Resposta. 7

Solução. Solução

A área sob $f(x) = 6x$ entre $x = 1$ e $x = b$ é dada por $\int_1^b (6x)dx$. Usando o Teorema Fundamental para avaliar o integral:

$$\text{Area } = 3x^2\Big|_1^b = 3b^2 - 3.$$

Uma vez que a área é 144, temos

$$3b^2 - 3 = 144,$$

logo

$$3b^2 = 147,$$

e assim

$$b^2 = 49, \quad \text{ou} \quad b = \pm 7.$$

Já que b é maior que 1, obtemos $b = 7$.

5. Determine as integrais definidas:

a) $\displaystyle\int_1^6 \frac{1}{x}\, dx =$ ______________

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}\, dx =$ ______________

c) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x^6}\, dx =$ ______________

d) $\displaystyle\int_0^8 x^2\,dx =$ ____________

e) $\displaystyle\int_0^1 x^{45}\,dx =$ ____________

Resposta 1. 1.79175946922805

Resposta 2. 0.75

Resposta 3. 0.199993896484375

Resposta 4. 170.666666666667

Resposta 5. 0.0217391304347826

Solução. ***Solução:***

Use o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{1}{x}\,dx &= (\ln|x|)\Big|_1^6\\ &= \ln(6)-\ln(1)\\ &= \ln 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx &= \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4\\ &= -\frac{1}{4}+1\\ &= 0.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^8 \frac{1}{x^6}\,dx &= \left(-\frac{x^{-5}}{5}\right)\Big|_1^8\\ &= -\frac{(8)^{-5}}{5}+\frac{1}{5}\\ &= 0.199994\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^8 x^2\,dx &= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^8\\ &= \frac{(8)^3}{3}-0\\ &= 170.667\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{45}\,dx &= \left(\frac{x^{46}}{46}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{(1)^{46}}{46}-0\\ &= \frac{1}{46}\end{aligned}$$

6. Determine as integrais definidas:

a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} -11\cos x\,dx =$ ____________

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 5\sec^2\theta\,d\theta =$ ____________

c) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} 13\csc t\cot t\,dt =$ ____________

Resposta 1. 11

Resposta 2. 5

Resposta 3. 10.9888930010697

Solução. ***Solução:***

Use o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} -11\cos x\,dx &= (-11\sin x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\\ &= (-11\sin\pi) - (-11\sin(\pi/2))\\ &= 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi/4} 5\sec^2\theta\,d\theta &= (5\tan\theta)\Big|_{0}^{\pi/4}\\ &= (5\tan(\pi/4)) - (5\tan 0)\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/3} 13\csc t\cot t\,dt &= (-13\csc t)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}\\ &= \left(\frac{-13}{\sin(\pi/3)}\right) - \left(\frac{-13}{\sin(\pi/6)}\right)\\ &= -\frac{26}{\sqrt{3}} + 26\end{aligned}$$

7. Determine as integrais definidas:

a) $\displaystyle\int_{0}^{25} \sqrt{t}\,dt =$ ____________

b) $\displaystyle\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz =$ ____________

c) $\displaystyle\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx =$ ____________

Resposta 1. 83.3333333333333

Resposta 2. 2

Resposta 3. 11.25

Solução. ***Solução:***

Use o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{25} \sqrt{t}\,dt &= \left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Big|_{0}^{25}\\ &= \frac{2(25)^{3/2}}{3} - \frac{2(0)^{3/2}}{3}\\ &= \frac{250}{3}\\ &= 83.3333\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz &= (2\sqrt{z})\Big|_{4}^{9}\\ &= 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx &= \left(\frac{3x^{4/3}}{4}\right)\Big|_1^8 \\
&= \frac{3(8)^{4/3}}{4} - \frac{3(1)^{4/3}}{4} \\
&= \frac{45}{4} \\
&= 11.25
\end{aligned}$$

8. Determine $\int_0^5 (2e^x + 5\cos x)\ dx =$ ____________________

Resposta. 290.032

9. Calcule $\int_1^4 \sqrt{t}(10+t)\,dt =$

Resposta. 59.0666666666667

10. Calcule $\int_{-1}^0 (2x - 10e^x)\,dx =$

Resposta. -7.32120558828558

11. Calcule $\int_{-4}^4 (16 - x^2)dx =$ ____________________

Resposta. 85.3333333333333

Solução. Já que a função $f(x) = 16 - x^2$ é par,
$\int_{-4}^4 (16-x^2)dx = 2\int_0^4 (16-x^2)dx = 2\left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2\left[\left(16\cdot 4 - \frac{4^3}{3}\right) - (0-0)\right] =$
$2\frac{128}{3} = 85.3333333333333$

12. Determine $\int_0^2 u^5(\sqrt{u} + \sqrt[5]{u})\,du =$ ____________________

Resposta. 25.7820957128638

Solução. Solução

$$\begin{aligned}
\int_0^2 u^5(\sqrt{u} + \sqrt[5]{u})\,du &= \int_0^2 u^5(u^{1/2} + u^{1/5})\,du \\
&= \int_0^2 (u^{\frac{11}{2}} + u^{\frac{26}{5}})\,du \\
&= \left.\tfrac{2}{13}u^{\frac{13}{2}} + \tfrac{5}{31}u^{\frac{31}{5}}\right]_0^2 \\
&= \tfrac{2}{13}2^{\frac{13}{2}} + \tfrac{5}{31}2^{\frac{31}{5}}
\end{aligned}$$

13. Determine as integrais definidas:

a) $\int_2^6 (9x^2 - 6x + 6)\,dx =$ _______________

b) $\int_0^6 (x+4)^2\,dx =$ _______________

c) $\int_{-1}^1 (x^5 - x^9)\,dx =$ _______________

Resposta 1. 552

Resposta 2. 312

Resposta 3. 0

Solução. ***Solution:***

Use o Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\begin{aligned}\int_2^6 (9x^2-6x+6)\,dx &= \left(9\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_2^6\\ &= \left(3x^3-3x^2+6x\right)\Big|_2^6\\ &= \left(3(6)^3-3(6)^2+6(6)\right)-\left(3(2)^3-3(2)^2+6(2)\right)\\ &= 552\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^6 (x+4)^2\,dx &= \int_0^6 \left(x^2+8x+16\right)\,dx\\ &= \left(\frac{x^3}{3}+4x^2+16x\right)\Big|_0^6\\ &= 312\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x^5-x^9)\,dx &= \left(\frac{x^6}{6}-\frac{x^{10}}{10}\right)\Big|_{-1}^1\\ &= \left(\frac{(1)^6}{6}-\frac{(1)^{10}}{10}\right)-\left(\frac{(-1)^6}{6}-\frac{(-1)^{10}}{10}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

14. Calcule $\displaystyle\int_{-4}^{-3}(x+3)e^{x^2+6x+8}\,dx =$ __________________

Resposta. -0.316060279414279

Solução. Escolha a substituição $u=g(x)=x^2+6x+8$. Então $du=(2x+6)\,dx=2(x+3)\,dx$. Use $g(x)$ para mudar os limites de integração.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-3}(x+3)e^{x^2+6x+8}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{(-4)^2+6(-4)+8}^{(-3)^2+6(-3)+8} e^u\,du\\ &= \frac{1}{2}e^u\Big|_0^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-1}-e^0\right]\\ &= -0.316060279414279.\end{aligned}$$

15. Calcule $\displaystyle\int_0^1 -2x^3(15-x^4)^5\,dx =$ __________________

Resposta. -321757.416666667

Solução. Escolha a substituição $u=g(x)=15-x^4$. Então $du=-4x^3\,dx$. Use $g(x)$ para mudar os limistes de integração.

$$\begin{aligned}\int_0^1 -2x^3(15-x^4)^5\,dx &= -\frac{1}{4}\int_{15-(0)^4}^{15-(1)^4} -2u^5\,du\\ &= -\frac{1}{4}\cdot -2\cdot\frac{u^6}{6}\Big|_{15}^{14}\\ &= (1/12)u^6\Big|_{15}^{14}\\ &= (1/12)\left[(14)^6-(15)^6\right]\\ &= -321757.416666667.\end{aligned}$$

16. Encontre o valor de $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\cos(5x)\,dx =$ __________________

Lembre-se: os ângulos para seno e cosseno são sempre (bem ... quase sempre) em radianos!

Resposta. -0.14142135623731

Solução. Usando substituição $u = 5x$ (e então $du = 5dx$) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \cos(5x)dx &= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/4} \cos(5x)\cdot 5dx \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\pi/4} \cos(u)du \\
&= \frac{1}{5}\left(\sin(5x)|_0^{\pi/4}\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \\
&= \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

17. Encontre a derivada da seguinte função

$$F(x) = \int_{x^5}^{x^4} (2t-1)^3\, dt$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

$F'(x) =$ ____________________

Resposta. $4x^3\left(2x^4-1\right)^3 - 5x^4\left(2x^5-1\right)^3$

18. Calcule

$$\int_{-\frac{5}{8}}^{2} \frac{3}{\sqrt{8x+9}}\, dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

Resposta. $\frac{9}{4}$

Solução. Seja $u = 8x+9$; então $du = 8\,dx$, ou $\frac{1}{8}\,du = dx$. Para alterar os limites de integração, observe que se $x = -\frac{5}{8}$ então $u = 4$, e se $x = 2$ então $u = 25$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{5}{8}}^{2} \frac{3}{\sqrt{8x+9}}\, dx &= \tfrac{3}{8}\int_4^{25} \frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{3}{4}\sqrt{u}\,\Bigg|_4^{25} \\
&= \tfrac{3}{4}\left(\sqrt{25}-\sqrt{4}\right) \\
&= \tfrac{3}{4}(5-2) \\
&= \tfrac{9}{4}.
\end{aligned}$$

19. Usando o método de substiyuição u,

$$\int_3^5 (2x-5)^4\, dx = \int_a^b f(u)\, du$$

em que

$u =$ ____________________ (insira uma função de x)

$du =$ ____________________ dx (insira uma função de x)

$a =$ ____________________ (insira um número)

$b =$ ____________________ (insira um número)

$f(u) =$ ____________________ (insira uma função de u).

O valor do integral original é ____________________.

Resposta 1. 312.4

Resposta 2. $2x-5$

Resposta 3. 2

Resposta 4. 1

Resposta 5. 5

Resposta 6. $\frac{u^4}{2}$

Solução. Solução

$u = 2x-5.$
$du = 2dx$
$a = 2\cdot 3 - 5 = 1$
$b = 2\cdot 5 - 5 = 5$
$f(u) = \frac{1}{2}u^4.$
O valor da integral original é:

$$\int_3^5 (2x-5)^4 dx = \int_1^5 \frac{1}{2}u^4 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^5}{5}\right]_1^5 = \frac{1}{10}\left[(5)^5 - (1)^5\right] = \tfrac{1562}{5}$$

20. Calcule $\displaystyle\int_7^9 \frac{1}{x-5}\,dx =$ __________________

Resposta. 0.693147180559945

Solução. Escolha a substiyuição $u = g(x) = x-5$. Então $du = dx$. Use $g(x)$ para mudar os limites de integração.

$$\begin{aligned}\int_7^9 \frac{1}{x-5}\,dx &= \int_{7-5}^{9-5} \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u|\Big|_2^4 \\ &= \ln(4) - \ln(2) = \ln 2.\end{aligned}$$

21. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine $\int_0^5 f(x)\,dx =$ ______________

Resposta. 2.1094379124341

22. Determine $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} 5x^9, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx =$ __________________

Resposta. 9.83333333333333

23. Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3, & -\pi \leq x < 0 \\ 7\sin(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx =$ __________________

Resposta. -34.7045455170016

Solução. Solução

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \textstyle\int_{-\pi}^{0} 2x^3\,dx + \int_0^{\pi} 7\sin(x)\,dx \\
&= \left[\tfrac{1}{2}x^4\right]_{-\pi}^{0} + \left[-7\cos x\right]_0^{\pi} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\cdot 0^4 - \tfrac{1}{2}(-\pi)^4\right) + ((-7\cos\pi + 7\cos 0)) \\
&= -\tfrac{1}{2}\pi^4 + 14
\end{aligned}$$

24. Calcule $\displaystyle\int_1^{\sqrt{7}} \frac{8}{1+x^2}dx =$ ________________

Resposta. 3.39224831592592

Solução. Nosso primeiro passo é encontrar a antiderivada de $\frac{8}{1+x^2}$. A melhor maneira de fazer isso é usar as tabelas de integração disponíveis no apêndice. Observe que esta integral tem uma forma semelhante à entrada abaixo, tirada de suas tabelas:

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$$

No nosso caso, $a = 1$ e $u = x$. Portanto, nossa primitiva é:

$$F(x) = 8\left(\tan^{-1} x\right) + C$$

Então, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e usando uma calculadora para calcular, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{7}} \frac{8}{1+x^2}dx &= F(\sqrt{7}) - F(1) \\
&= 8\left(\tan^{-1}\sqrt{7}\right) + C - 8\left(\tan^{-1} 1\right) - C \\
&= 3.3922
\end{aligned}$$

25. Determine o valor da integral $\displaystyle\int_0^{0.7} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$ ________________

Resposta. 0.775397496610753

Solução. Nosso passo inicial é encontrar a primitiva de $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. A melhor maneira de fazer isso é usar as tabelas de integração disponíveis no apêndice. Observe que esta integral tem uma forma semelhante à entrada abaixo, tirada de suas tabelas:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

No nosso caso, $a = 1$ e $u = x$. Portanto, nossa primitiva é:

$$F(x) = \left(\sin^{-1} x\right) + C$$

Então, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo e usando uma calculadora para calcular, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{0.7} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx &= F(0.7) - F(0) \\
&= \left(\sin^{-1} 0.7\right) + C - \left(\sin^{-1} 0\right) - C \\
&= 0.7754
\end{aligned}$$

26. Resolva:

a) Sabendo que $F(x) = \displaystyle\int_{22}^{x} \frac{1}{t}\,dt$, encontre $F'(x) =$ ________________

b) Sabendo que $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{2} \frac{1}{t}\,dt$, encontre $F'(x) =$ ________________

c) Sabendo que $F(x) = \displaystyle\int_{16}^{x^6} \frac{1}{t}\,dt$, encontre $F'(x) =$ ________________

c) Sabendo que $F(x) = \displaystyle\int_{2+\cos x}^{x^2+1} \frac{1}{t}\,dt$, encontre $F'(x) =$ ________________

Resposta 1. $\frac{1}{x}$

Resposta 2. $\frac{-1}{x}$

Resposta 3. $\frac{6}{x}$

Resposta 4. $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

Solução. ***Solução:***

Use o Tereoma fundamental do Cálculo (Part 1).

$$\frac{d}{dx}\int_{22}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{2} \frac{1}{t}\,dt = -\frac{d}{dx}\int_{2}^{x} \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{x}.$$

$$\frac{d}{dx}\int_{16}^{x^6} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x^6}\cdot(x^6)' = \frac{1}{x^6}\cdot 6x^5 = \frac{6}{x}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{2+\cos x}^{x^2+1} \frac{1}{t}\,dt &= \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' - \frac{1}{2+\cos x}\cdot(2+\cos x)' \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{-\sin x}{2+\cos x}\end{aligned}$$

27. Se $F(x) = \displaystyle\int_{9}^{x} \sqrt{t^2+19}\,dt$. Encontre

(a) $F(9) =$ ________________

(b) $F'(9) =$ ________________

(c) $F''(9) =$ ________________

Resposta 1. 0

Resposta 2. 10

Resposta 3. $\frac{9}{10}$

Solução. Solução

(a) $F(9) = \int_9^9 \sqrt{t^2+19}\,dt = 0.$

(b) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{9}^{x} \sqrt{t^2+19}\,dt = \sqrt{x^2+19}\ ,\ \ F'(9) = 10.$

(b) $F''(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+19}\right] = \frac{x}{\sqrt{x^2+19}}\ ,\ \ F''(9) = \frac{9}{10}.$

28. Considerando $f(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} (t^3+2t^2+3)\,dt$ encontre

$f''(x) =$ ________________

Resposta. $3x^2+4x$

29. Determine a integral definida

$$\int_2^3 \left(\frac{d}{dt} \sqrt{5 + 1t^4} \right) dt$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

$\displaystyle\int_2^3 \left(\frac{d}{dt} \sqrt{5 + 1t^4} \right) dt =$ ________________________________

Resposta. 4.69104280053986

30. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada

$\displaystyle\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{6 + \sqrt{t}} =$ ________________

Resposta. $\frac{1}{6+\sqrt{x}}$

Solução. Solução

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo Parte 2.

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{6 + \sqrt{t}} = \frac{1}{6 + \sqrt{x}}$$

31. Sabendo que $F(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{e^x} -5 \sin t \, dt$, encontre

$F'(x) =$ ________________________

Resposta. $-5 \sin(e^x)\, e^x - \frac{-5 \sin(\ln(x))}{x}$

Solução. ***Solução:***

Use o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\ln x}^{e^x} -5 \sin t \, dt &= -5 \sin(e^x) \cdot (e^x)' + 5 \sin(\ln x) \cdot (\ln x)' \\ &= -5e^x \sin(e^x) + 5 \frac{\sin \ln x}{x} \end{aligned}$$

32. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada de

$$y = \int_{-5}^{\sqrt{x}} \frac{\cos t}{t^5} dt$$

$\displaystyle\frac{dy}{dx} =$ ________________________________

Resposta. $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2x^3}$

Solução. Solução

Aqui, devemos ter o cuidado de usar a Regra da Cadeia em conjunto com a Parte I do Teorema Fundamental.

Seja $u = \sqrt{x}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_0^u \frac{\cos t}{t^5} du \\ &= \frac{d}{du} \left[\int_0^u \frac{\cos t}{t^5} du \right] \frac{du}{dx} \quad \text{(Regra da Cadeia)} \\ &= \frac{\cos u}{u^5} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{(pelo TFC)} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x}}{x^{2.5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\cos \sqrt{x}}{2x^3} \end{aligned}$$

33. Se f é contínua e $\int_0^9 f(x)\,dx = 7$, calcule $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

Resposta. 3.5

Solução. Seja $u = x^2$. Então $du = 2x\,dx$ logo

$$\begin{aligned}\int_0^3 xf(x^2)\,dx &= \int_0^9 f(u)\left(\frac{1}{2}du\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)\,du\\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

2 Referências

[1] LARSON, Ron. *Cálculo Aplicado. Cursos Rápido.* Cengage Learning, 2011.

[2] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo.* Bookman, 2007.

[3] HUGHES, Hallet et al. *Cálculo de uma variável.* LTC, 2004.

[4] Stewart, James *Cálculo, Volume I.* Cengage Learning, 2013.

[5] SILVA, Leon; SANTOS, Marcelo; Machado, Ricardo. *Elementos de Computação Matemática com SageMath.* SBM, 2019.