

误差函数定义为:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

(a) 对任意固定 $b > 0$, 取点 $x_k = k \frac{b-0}{n}, k = 0, 1, \dots, n, n = 100$. 构造被积函数 $f(s) = e^{-s^2}$ 的插值函数 $p(s)$, 则有

$$\operatorname{erf}(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^b e^{-s^2} ds \approx \frac{2}{\pi} \int_0^b p(s) ds = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = g(b)$$

利用 Matlab 内置函数 `erf`, 画出 $g(y_i) - \operatorname{erf}(y_i)$ 的散点图, 其中 $y_i = i \frac{3-0}{300}, i = 0, 1, \dots, 300$.

(b) 对任意固定 $b > 0$, 利用自适应 Simpson 法则求 $\operatorname{erf}(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^b e^{-s^2} ds$, 使得误差不超过 $\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$. 求 $\operatorname{erf}(1), \operatorname{erf}(2), \operatorname{erf}(3)$ 的近似值, 并和 Matlab 的结果对比.