

文章编号: 0255-8297(2003)03-0258-05

基于曲率数据的曲线拟合方法研究

吴家麒, 杨东英, 沈林勇, 陈建军

(上海大学 机电学院, 上海 200072)

摘 要: 从肠道内窥镜检查中镜体模型重建的需要出发, 介绍了基于曲率数据的曲线拟合方法. 首先完成了从线应变到曲率的转换, 以及从离散曲率到连续曲率的插值; 然后用微分几何的方法, 研究得出了三种基于曲率积分的曲线拟合方法; 并在对这些拟合方法进行试算验证的同时, 分析了拟合误差产生的原因, 以及相应的减小拟合误差的若干措施.

关键词: 内窥镜检查; 曲率; 曲线拟合; 模型重建

中图分类号: O186.1 **文献标识码:** A

Research on the Curve-Fitting Method Based on Curvature Data

WU Jia-qi, YANG Dong-ying, SHEN Lin-yong, CHEN Jian-jun

(School of Electromechanical Engineering & Automation, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: This paper presents the curve-fitting methods based on the curvature data, to meet the requirement of the model reconstruction of the endoscope. After the transformation from linear strain to curvature and the curvature linear interpolation, three methods based on curvature integral are developed for curve fitting by means of the differential geometry method. A test is carried out to validate the curve fitting methods and analyse the causes of errors. Finally some measures to reduce the fitting errors are suggested.

Key words: endoscopy; curvature; curve fitting; model reconstruction

内窥镜检查是结肠疾病的重要诊疗手段. 在检查过程中, 内窥镜将经过直肠、乙状结肠、降结肠、横结肠、升结肠直到结肠的始端. 由于结肠组织娇嫩, 形状复杂, 各段连接处弯曲较大, 而检查医师又不能直视内窥镜的弯曲形状, 因此医师放入内窥镜的难度很大. 尤其当病人肠道因病变而异常, 或因曾经手术而移位, 就不仅进一步加大了内窥镜的介入难度, 还容易产生镜体的缠绕、结襻现象, 而医师却难以察觉. 据统计, 结肠的内窥镜检查的穿孔率为 0.2~2%. 因此如果能够在医师放入内窥镜的同时, 将镜体形状显示出来, 就可以在最大程度上减小介入的盲目性, 提高检查的安全性.

镜体形状的显示方法取决于镜体形状信息的采

集方式. 可以在人体外设置信号源, 而在镜体的多个部位设置相应的信号传感器, 根据信号的差异来确定传感器的位置和镜体的形状; 也可以仅仅在镜体多个部位设置角度传感器或其他传感器, 用特殊的方法来确定镜体的形状. 鉴于内窥镜里空间狭小并有多种检查器械和手术器械, 因此对附加的传感器有严格的尺寸限制. 由于线应变传感器技术成熟, 尺寸小, 种类多, 因此采用合适的线应变传感器附置于镜体上是可行的选择.

虽然曲线拟合有不少成熟的方法^[1], 但根据镜体上的线应变来进行拟合, 却需要研究一套相应的根据线应变数据来计算曲率数据, 并进而重建镜体形状模型的方法.

收稿日期: 2002-08-27; 修订日期: 2002-11-05

基金项目: 国家 863 计划(2001AA422180); 国家自然科学基金(50075050)资助项目

作者简介: 吴家麒(1949-), 男, 上海人, 副教授.

1 从线应变到曲率的转换

根据线应变来研究曲率表达式的工作可以分为两步:从离散点线应变到离散点曲率的转换,以及从离散曲率到连续曲率的转换。

1.1 从线应变到离散曲率的转换

实际设备中,在被测部位的外表面上周向均匀安装两组线应变传感器,如图1a中AA、BB所示。镜体在AA方向的纵截面中发生弯曲时,参见图1b,其中 r 是内窥镜考察部位的半径, a 表示考察部位在未发生弯曲时的长度, a_1 是考察部位凸起部分的线应变, a_2 是考察部位凹进部分的线应变, α 是弯曲部分对应的张角, ρ 是弯曲部分的曲率半径。由图1可以列出两个方程

$$\begin{cases} a+a_1=\alpha \cdot (\rho+r) \\ a+a_2=\alpha \cdot (\rho-r) \end{cases} \quad (1)$$

从式(1)中可以解得

$$\rho=r \cdot (2 \cdot a+a_1+a_2)/(a_1-a_2)$$

曲率 k 是 ρ 的倒数

$$k=(a_1-a_2)/[r \cdot (2 \cdot a+a_1+a_2)] \quad (2)$$

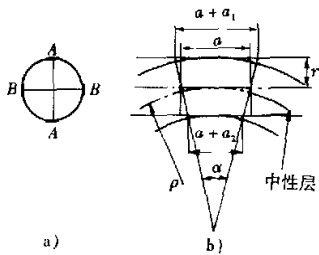


图1 从线应变到曲率的转换

在图示情况下, $a_1 > a_2$,算得 $k > 0$,说明曲线弯曲方向如图所示;如果测试的数据是 $a_1 < a_2$,算得 $k < 0$,说明曲线弯曲方向与图示相反。因此上述公式可以反映出曲线弯曲的两个方向。

在内窥镜作纯弯曲的情况下, $a_1 = -a_2$ 。如果内窥镜除了纯弯曲之外还有拉压变形,则 $a_1 \neq -a_2$ 。实际上,在推导公式(2)的过程中,我们并没有作出假定 $a_1 = -a_2$,甚至没有规定 a_1, a_2 的正负,因此公式(2)不仅适用于纯弯曲的情况,同时也适用于弯曲之外还有拉压变形的情况。

1.2 从离散曲率到连续曲率的线性插值

实际采样后计算得到的仅仅是离散点的曲率数

据,为了拟合出整条曲线的形状,必须得到整条曲线上的曲率数据。

由曲线的微分几何^[2]可知,如果曲线的曲率连续,即曲线的二阶导数连续,则该曲线就是连续而且光滑的。因此每两个离散点之间的曲率可以采用简单的线性插值,以便得到足够多的曲率数据。线性插值已经能够使采样点两旁的曲率数据连续,这样就确保拟合后的曲线在采样点处连续且光滑。

假定已经计算得到两个相邻离散点的曲率 k_i 与 k_{i+1} ,两点之间的弧长间隔为 $\Delta s (\Delta s = s_{i+1} - s_i)$ 。假设两个相邻离散点之间的曲率 k 与弧长 s 是线性关系

$$k = m \cdot s + n \quad (3)$$

式中的 m 和 n 是两个系数,为了确定 m 和 n 的值,可将两个相邻离散点的曲率 k_i, k_{i+1} 代入式(3),得

$$\begin{cases} k_{i+1} = m \cdot s_{i+1} + n \\ k_i = m \cdot s_i + n \end{cases} \quad (4)$$

从式(4)中可以解得

$$\begin{cases} m = (k_{i+1} - k_i) / (s_{i+1} - s_i) \\ n = (k_i \cdot s_{i+1} - k_{i+1} \cdot s_i) / (s_{i+1} - s_i) \end{cases} \quad (5)$$

2 由曲率积分求得曲线位置拟合方法

2.1 拟合方法之一: 由曲率积分求得曲线位置

根据曲线的微分几何^[2]知道,以自然参数描述的曲线方程为

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{e}_1 + y(s)\mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

将式(6)微分一次,得

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(s) \\ \dot{y}(s) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(s) = \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式(7)中 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 为切向量, φ 为切向量与 x 轴正向的夹角。将式(7)再一次微分,得

$$\ddot{\mathbf{r}}(s) = \begin{Bmatrix} \ddot{x}(s) \\ \ddot{y}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \\ \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式(8)中 $\frac{d\varphi}{ds} = k(s)$ 为曲线的曲率。将此式积分,并将式(3)的 $k(s)$ 代入其中,得

$$\varphi = \int k(s) ds = \int (ms + n) ds = \frac{1}{2}ms^2 + ns + c \quad (9)$$

式(9)中的积分常数 c 可以由边界条件求出。将式(9)代入式(7),并再次积分,得

$$\begin{cases} x(s) = \int \dot{x}(s) ds = \int \cos\varphi ds = \\ \int \cos\left(\frac{1}{2}ms^2 + ns + c\right) ds \\ y(s) = \int \dot{y}(s) ds = \int \sin\varphi ds = \\ \int \sin\left(\frac{1}{2}ms^2 + ns + c\right) ds \end{cases} \quad (10)$$

上述积分公式难以找到其解析解,但可以经过数值积分求出其数值解.实际上亦可以根据式(9)推导出简便的递推方法.

2.2 拟合方法之二: 由曲率积分递推曲线位置

对于两个相邻离散点之间的曲线,可以将此段曲线再等分为多个小的圆弧段,对于第*i*小段,从式(3)求得曲率的表达式,继而根据式(9)的积分公式求得倾角的表达式为

$$\begin{cases} k_i = m * s_i + n \\ \varphi(s_i) = \frac{1}{2} * m * s_i^2 + n * s_i + c \end{cases} \quad (11)$$

那么在第*i*小段上,以下式子成立

$$\begin{cases} \theta_i = \Delta s / \rho_i = \Delta s * k_i, \\ ds_i = 2 * \sin(\theta_i/2) / k_i, \quad (k_i \neq 0) \\ ds_i = \Delta s \quad (k_i = 0) \\ \Delta x_i = ds_i * \cos(\varphi_i + \theta_i/2) \\ \Delta y_i = ds_i * \sin(\varphi_i + \theta_i/2) \end{cases} \quad (12)$$

参见图2.其中 ρ_i, ρ_{i+1} 是曲线上相邻的两点 P_i, P_{i+1} 处的曲率半径,对应曲率 k_i, k_{i+1} . $\Delta s, ds_i$ 分别是两点间的弧长、弦长. θ_i 是 Δs 对应的圆心角. $\Delta x_i, \Delta y_i$ 是 P_{i+1} 相对 P_i 的坐标增量.

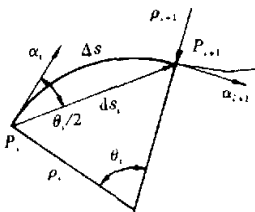


图2 由曲率积分递推曲线位置

于是得到从 P_i 到 P_{i+1} 坐标的递推公式

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \end{cases} \quad (13)$$

根据上述公式,就可以从头至尾,逐点求出曲线的位置.

2.3 拟合方法之三: 曲率的双线性插值方法

根据曲线微分几何,在自然坐标系下的曲线的

法向量 $\beta = \vec{r}$,曲线的曲率 $k = |\vec{r}|$,因此可以定义曲率向量 $k(s)$:

$$\begin{aligned} k(s) = \vec{r} &= \begin{Bmatrix} \dot{x}(s) \\ \dot{y}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \sin\varphi \\ k \cos\varphi \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}_s + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}; \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \end{aligned} \quad (14)$$

只要求出 a_x, a_y, b_x, b_y ,再对 $k(s)$ 求两次积分即可得到位置向量 $r(s)$

$$\begin{aligned} \vec{r}(s) &= \begin{cases} \dot{x}(s) = \ddot{x}(s) \\ \dot{y}(s) = \ddot{y}(s) \end{cases} \\ \vec{r}(s) &= \begin{cases} x(s) = \int \dot{x}(s) ds \\ y(s) = \int \dot{y}(s) ds \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

依照上述思路,在已知起末两点的曲率 k_0, k_1 ,起点的位置向量 $r(s_0) = \{x(s_0), y(s_0)\}$,以及起点的切向量 $a_0 = \{\cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0)\}$ 的条件下,推导求解曲线位置向量的相关公式.由公式(3)以及边界条件曲率 k_0, k_1 ,可以求得 m, n

$$\begin{cases} m = (k_1 - k_0) / \Delta s \\ n = (k_0 s_1 - k_1 s_0) / \Delta s \end{cases} \quad (16)$$

再由公式(9)以及边界条件起点的切向量,可以求得公式(9)中的常数 c

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}ms^2 + ns + c$$

$$c = \varphi_0 - \left(\frac{1}{2}ms_0^2 + ns_0 \right) = \arccos \dot{x}(s_0) - \frac{1}{2}ms_0^2 - ns_0$$

从而求得另一端的倾角

$$\varphi_1 = \varphi(s_1) = \frac{1}{2}ms_1^2 + ns_1 + c \quad (17)$$

将 φ_0, φ_1 代入式(14),得到

$$\begin{aligned} k_0 &= \begin{Bmatrix} a_x \\ b_x \end{Bmatrix}_{s_0} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_0 \sin\varphi_0 \\ k_0 \cos\varphi_0 \end{Bmatrix} \\ k_1 &= \begin{Bmatrix} a_x \\ b_x \end{Bmatrix}_{s_1} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_1 \sin\varphi_1 \\ k_1 \cos\varphi_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

从中可以解得

$$\begin{cases} a_x = -\frac{k_1 \sin\varphi_1 + k_0 \sin\varphi_0}{\Delta s} \\ b_x = -\frac{s_1 k_0 \sin\varphi_0 + s_0 k_1 \sin\varphi_1}{\Delta s} \\ a_y = \frac{k_1 \cos\varphi_1 - k_0 \cos\varphi_0}{\Delta s} \\ b_y = \frac{s_1 k_0 \cos\varphi_0 - s_0 k_1 \cos\varphi_1}{\Delta s} \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)代入式(14),并积分两次

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \int \ddot{x}(s) ds = \int (a_x s + b_x) ds = \\ \quad \frac{1}{2} a_x s^2 + b_x s + e_x, \\ \dot{y}(s) = \int \ddot{y}(s) ds = \int (a_y s + b_y) ds = \\ \quad \frac{1}{2} a_y s^2 + b_y s + e_y, \\ x(s) = \int \dot{x}(s) ds = \\ \quad \frac{1}{6} a_x s^3 + \frac{1}{2} b_x s^2 + e_x * s + f_x, \\ y(s) = \int \dot{y}(s) ds = \\ \quad \frac{1}{6} a_y s^3 + \frac{1}{2} b_y s^2 + e_y * s + f_y. \end{cases} \quad (20)$$

其中常数项 e_x, e_y, f_x, f_y 可以根据起始点处的边界条件求得。

上述三种拟合方法中,由曲率积分的方法公式完整,但确定其解析解较困难,可用数值积分的方法求解;双线性插值方法可求得积分式的解析解,用程序计算比较方便;而递推方法中仅用一次曲率积分求得倾角,曲线位置则由逐点递推求得,满足了我们不仅关心曲线终点位置,而且关心曲线形状的需求,简单实用。

3 拟合方法的试算验证和误差分析

3.1 拟合方法试算

为了对上述方法的效果进行验证,并对其误差进行考察,采用由曲率积分递推曲线位置的方法对一些已知形状的曲线进行了拟合试算。

图3是对一条三次曲线进行拟合的效果。图中虚线是曲线原型;细实线是采用3点(起点、中点、终点)的曲率进行重建的拟合曲线;粗实线是采用5点的曲率进行重建的拟合曲线模型。从图中可以看出,

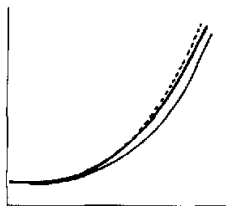


图3 对三次曲线的拟合

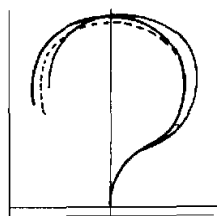


图4 对组合曲线的拟合

采用5点的曲率的拟合效果要好于采用3点的效果。

图4是对一条由7段圆弧和2段直线组成的曲线进行拟合的效果。图中点划线是曲线原型;细实线是采用12点的曲率进行重建的拟合曲线;粗实线是采用16点的曲率进行重建的拟合曲线模型。同样看出,采用16点的曲率的拟合效果要好于采用12点的效果。

采用上述方法,对软管模型的平面弯曲进行了实测,得到了相同的效果。采样点多时的拟合效果优于采样点少时的效果。曲率变化小时的拟合效果优于曲率变化大时的效果。

3.2 拟合误差分析

从试算和软管测试中发现,重构以后的拟合曲线与原始曲线之间存在误差,拟合不同的曲线对象,采用不同数目的采样点,会有不同大小的误差。这些误差大致来自以下几个方面。

影响误差的因素之一是误差的积累。如果采样所取的是相对于固定参照系的绝对坐标 x, y , 那么前面采样的误差并不影响后面点的位置。本文所述方法中采取的曲率,反映的是曲线的倾角变化,实际上是相对于移动参照系的信息,前面倾角的误差必定会累加到后面的倾角上去,因此不可避免地会有误差的积累。

影响误差的因素之二是误差的放大。采取的曲率直接反映了曲线倾角的变化,而曲线上倾角的误差对远端的位置误差会有放大作用,这就是所谓的“差之毫厘,失之千里”。在本文所述方法中,误差的放大作用对曲线位置的影响,比误差积累的影响更大。

影响误差的因素之三是被拟合曲线的曲率的变化剧烈程度。本文所述方法在离散点曲率之间采用线性插值,得到曲率的连续表达式,因此实际的曲率变化程度与线性表达式之间的差距影响了计算曲率

的正确性,从而影响了曲线位置的正确性.一般来说,被拟合曲管材料越软,被拟合曲管上载荷变化越大,则被拟合曲管的曲率的变化越剧烈,因而拟合曲线的误差越大.反之,则拟合曲线的误差就小.

影响误差的因素之四是采样点的密集程度.采样点稀疏,相邻离散点间距大,曲率变化大,用线性表达式来拟合引起的误差就大.反之,采样点密集,相邻离散点间距小,用线性表达式来拟合就比较合理.

4 结论

本文介绍的拟合方法,经过试算验证和软管模型测试,这些方法在理论上是可行的.由于所用方法的限制,和所采集信息的性质的限制,在拟合中不可避免地会产生误差.考虑到误差的放大作用,如果可能,应该特别注重减小前端采样的误差.由于被拟合曲线的曲率变化剧烈程度对拟合误差的影响,因此

在可能的条件下,应该设置适当的采样点,特别对曲率变化剧烈的曲线,应该采用相对较为密集的采样点,而对曲率变化较小的曲线,可以采用相对较为稀疏的采样点.注意到误差的存在,并采取相应的减小误差的措施,这些拟合方法可用于某些基于曲率数据的曲线模型重建场合,包括肠道内窥检查中内窥镜镜体形状的显示.

在平面曲线拟合方法的基础上,我们将进一步开展基于空间曲率数据对空间曲线的拟合,以及对三维空间中曲线本身扭转等复杂因素的研究.

参考文献:

- [1] 孙家广,等. 计算机图形学[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
- [2] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:人民教育出版社,1981.
- [3] 陈大鹏,周文伟. 空间弹性曲杆在三位变形中的曲率-位移关系[J]. 西南交通大学学报,1997,32(2): 123-129.