

参考文献

- 1 苗英恺. 雨伞的奥秘. 力学与实践, 2015, 37(5): 658-660
- 2 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学(下). 北京: 北京大学出版社, 1982. 83-99
- 3 尤明庆. 关于狮子盘球力学原理的注记. 大学物理, 2010, 29(6): 12-14
- 4 尤明庆. 狮子盘球中的功能转换关系. 河南理工大学学报, 2011, 30(1): 121-124

(责任编辑: 胡漫)



车辆转弯时内轮差的运动学理论模型¹⁾

李逸良 邱信明²⁾

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 基于刚体运动学知识, 利用速度投影定理建立了针对单车、半挂车的最大内轮差的运动学理论分析模型. 模型可以给出车辆转弯时不同车轮的轨迹, 并得出内轮差的准确计算公式. 通过定量讨论车辆最大内轮差随车身尺寸、回转半径的变化规律, 对于行人和驾驶员提出了具体的操作建议, 以避免内轮差造成的交通事故.

关键词 内轮差, 半挂车, 轴距, 速度投影定理, 交通安全

中图分类号: O311 **文献标识码:** A

doi: 10.6052/1000-0879-16-263

由于车辆自身的体积, 转弯时其前后轮的运行轨迹并不相同. 内后轮的轨迹半径要小于内前轮的轨迹半径, 这意味着车辆转弯过程中会向着圆心的方向不断靠近. 转弯时车辆内前轮的转弯半径与内后轮的转弯半径之差, 通常被称为内轮差. 如图1所示, 由于内轮差的存在, 前后内车轮轨迹之间会形成一个危险区域, 进入这个区域的行人和非机动车很容易被车身后半部卷入. 此外, 由于我国汽车驾驶员位置在车辆左侧, 车身右前侧、右侧后视镜下方是驾驶员的视线盲区; 大卡车的驾驶室相对于路面的行人又很高, 驾驶员不容易注意到危险区域内的行人和非机动车. 如果内轮差现象被汽车司机、行人

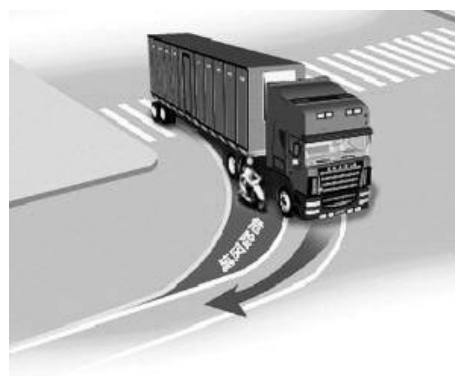


图1 内轮差引起的路面危险区域示意图^[2]

和非机动车忽视, 右转弯时就会带来严重的交通事故^[1].

以往人们针对这个现象的研究, 并没有给出内轮差的准确定义. 通常是从假设车辆前后轮轨迹均为圆形的角度出发, 半定性地分析内轮差的现象, 如褚正清等^[3]、李铁洪等^[4]、陈思嘉^[5]的研究. 为了定量分析车辆转弯过程中向圆心靠近的程度, 本文试图给出一种内轮差的准确数学定义, 并利用理论力学中运动学的知识, 定量分析影响内轮差的各种因素.

本文于 2016-08-15 收到.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11372163).

2) E-mail: qxm@tsinghua.edu.cn

引用格式: 李逸良, 邱信明. 车辆转弯时内轮差的运动学理论模型. 力学与实践, 2017, 39(1): 94-99

Li Yiliang, Qiu Xinming. A kinematical analysis model of the inner wheel difference. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(1): 94-99

因此,由速度投影定理可知 B 点速度的分量形式

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_B}{dt} \\ \frac{dy_B}{dt} \end{pmatrix} = \frac{v_A}{l^2} (x_B \sin \theta + y_B \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} R \cos \theta + x_B \\ -R \sin \theta + y_B \end{pmatrix}, \quad \theta = v_A t / R \quad (6)$$

利用初始条件: $t = 0$ 时刻, B 点坐标 $(-R, -l)$, 对上式进行积分即可得 B 点的轨迹, 同时可以计算出内轮差.

对于轴距 $l = 2 \text{ m}$ 的汽车, 计算出不同内前轮轨迹半径 R 下, 最大内轮差的数据列在表 1 中. 由表中的数据可知, 随着转弯半径 R 的增大, 最大内轮差 d_{\max} 单调降低. 可见, 为减小内轮差, 应尽量转大弯, 而不应转小弯.

表 1 不同转弯半径下的最大内轮差 (轴距 $l = 2 \text{ m}$)

内前轮轨迹半径 R/m	最大内轮差 d_{\max}/m
3.0	0.730
3.5	0.616
4.0	0.532
4.5	0.467
5.0	0.417
5.5	0.376
6.0	0.343

如图 4 所示, 若内前轮轨迹半径为确定值 $R = 4 \text{ m}$, 在图中用最靠上的黑实线表示; 带图标的线为对应不同轴距 $l = 1.5 \text{ m}, 2.0 \text{ m}, 2.5 \text{ m}, 3.0 \text{ m}$ 汽车的内后轮轨迹; 其中箭头指向是 $l = 1.5 \text{ m}$ 的汽车在不同时刻的车身位置. 显然, 除转弯半径 R 外, 车身轴距 l 也是影响内轮差大小的一个重要因素, 当 R 半

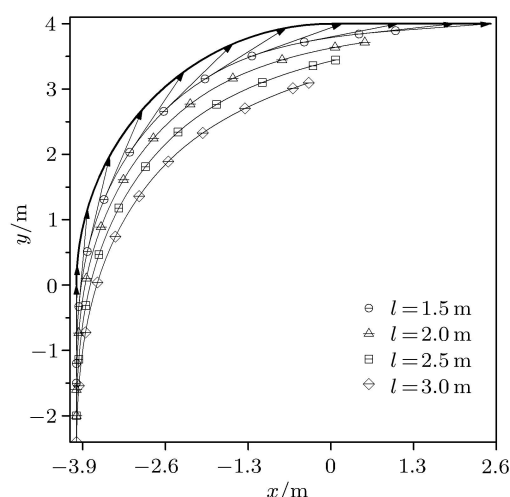


图 4 不同轴距 l 的车辆转弯时 A 点和 B 点的轨迹 ($R = 4 \text{ m}$)

径相同时, 轴距较长的车内轮差明显更大.

对于汽车而言, 方向盘打到极限位置, 外侧前轮距离转向中心 (瞬心) 的距离通常定义为最小转弯半径 r . 如图 5 所示, 在已知车宽 w 和轴距 l 的情况下, 容易换算出最小的内前轮轨迹半径 R_{\min} , 即 $R_{\min}^2 = (\sqrt{(r^2 - l^2)} - w)^2 + l^2$. 通过查阅不同车型的数据资料, 将车身尺寸、最小转弯半径、内前轮最小转弯半径列于表 2 中.

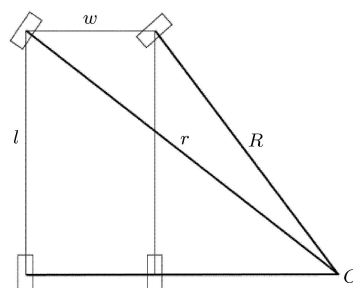


图 5 转弯半径与内前轮轨迹半径

表 2 典型车型的尺寸^[7]和最大内轮差

车型	轴距 l/m	轮间距 w/m	最小转弯半径 r/m	内前轮半径 R_{\min}/m	r/l	R_{\min}/l	最大内轮差 d_{\max}/m	d_{\max}/l
奇瑞 QQ	2.34	1.42	4.80	3.63	2.05	1.55	0.69	0.295
富康汽车	2.54	1.42	5.25	4.07	2.07	1.60	0.73	0.287
奥迪 A6L	3.01	1.61	5.20	4.00	1.72	1.33	0.98	0.325
宝马 7 系列	3.21	1.65	6.35	5.00	1.98	1.56	0.94	0.293
五征 1800 轻卡	3.25	1.42	6.20	5.05	1.91	1.55	0.96	0.295
一汽 CA6123TH2	6.10	1.85	11.5	9.98	1.86	1.64	1.73	0.284
黄海大客车	6.27	1.81	12.0	10.5	1.91	1.67	1.75	0.279

图 6 给出了无量纲化内轮差和转弯半径的关系图, 可见内轮差随转弯半径的增大而降低. 对于表 2 给出的典型车型, 用不同的图标在曲线上标示了其 d_{\max} 和 R_{\min} 所在的位置, 此处对应该车方向盘打到极限位置时的最大内轮差, 实际产生的内轮差在该点右侧的曲线上.

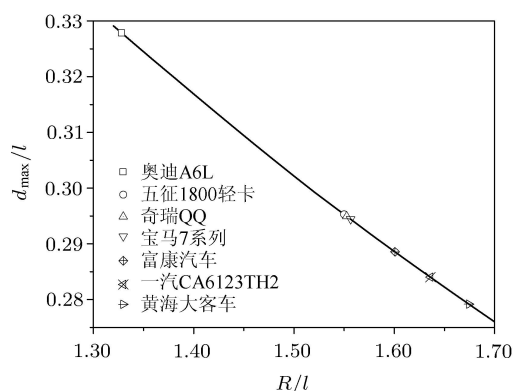


图 6 汽车内轮差随内前轮 (A 点) 转弯半径的变化关系图

根据表 2 给出的数据, 典型车型的最小转弯半径与轴距之比都约为 2 左右, 即 $r/l \approx 2$. 但由于轴距 l 不同, 奇瑞 QQ 等小型车的内轮差仅为 $d_{\max} = 0.69\text{ m}$, 而黄海等大型车则达到 $d_{\max} = 1.73\text{ m}$. 由表 2 可知, 所列的典型车型均有 $d_{\max}/l < 1/3$, 即最大内轮差小于 $1/3$ 轴距. 那么行人和非机动车要保证自身安全, 需要与汽车保持车长 $1/3$ 以上的距离.

3 半挂车内轮差的理论分析模型

大货车、水泥搅拌车等半挂车, 可认为是两个刚体 (牵引头、主车身) 连接而成的组合体, 如图 7 所示. 设图中牵引头 AB 轴距 l_1 , 车身 BC 轴距 l_2 , 刚体 AB 和 BC 在 B 点通过无摩擦转轴 (通常为大王销) 相互连接. 考察牵引头中线 AB 和车身中线 BC 的运动规律. 假设 A 点轨迹为圆弧, 半径为

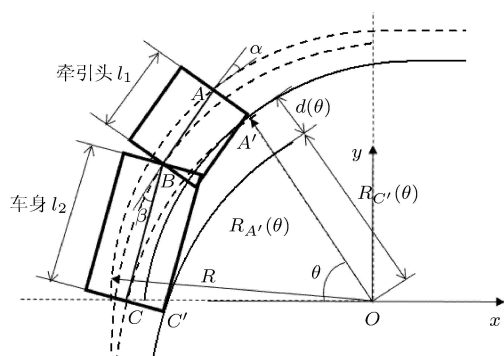


图 7 半挂车内轮差的理论模型示意图

R , 圆心为 O . 以 O 为坐标原点, 建立平面直角坐标系 Oxy , 如图 7 所示, 并以顺时针方向为转角 θ 的正方向. 图中 A, B, C 三点的轨迹用虚线描绘, 而内前轮 A' 和内后轮 C' 的轨迹用黑实线描绘.

由上节汽车的分析模型, 点 A 和点 B 的运动规律与单车的运动规律完全相同, B 点的关于时间的运动方程也与上节完全相同. 而点 C 的速度方向始终与 BC 平行, 速度大小可由速度投影定理得到. 对于时间积分可得 C 点在任意时刻的位置. 计算 A, C 点轨迹之差 d'_{\max}

$$d'_{\max} = \max \{R - R_C(\theta)\} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (7)$$

需要指出 d'_{\max} 并非最大内轮差, 半挂车的最大内轮差应为 A' 和 C' 的轨迹之差, 即

$$d_{\max} = \max \{R_{A'}(\theta) - R_{C'}(\theta)\} \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (8)$$

如果 A 点转弯半径为 $R = 6\text{ m}$, 对于不同轴距 l_1, l_2 的半挂车可以得到其转弯时的轨迹如图 8 所示. 图中最上方的黑实线为 A 点轨迹, 带图标的三条曲线为 C 点轨迹. 其中带弯折的箭头表示不同时刻车身 $AB-BC$ 线的方位, 对应车身尺寸为 $l_1 = 1.5\text{ m}$, $l_2 = 3.0\text{ m}$. 显然, 当 A 轨迹半径 R 相同时, 轴距较长的车 d'_{\max} 明显较大.

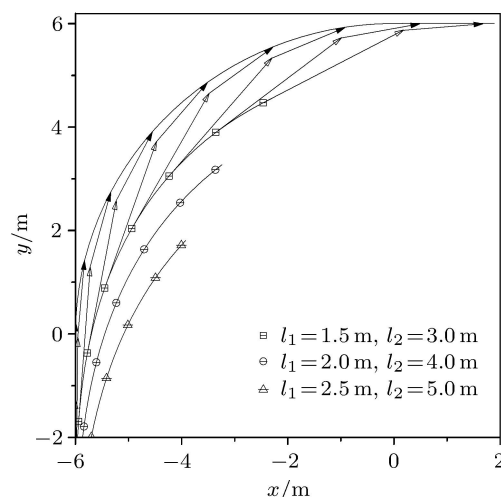


图 8 不同轴距的半挂车转弯时 C 点的轨迹 ($R = 6\text{ m}$)

表 3 给出了 A 点和 C 点轨迹之差最大值 d'_{\max} 与车身/牵引头轴距比 l_2/l_1 的变化关系. 可见 d'_{\max} 随 l_2/l_1 的增加而增加. 接下来我们考虑车身宽度对内轮差的影响. 当车身宽度 b_1, b_2 改变而其他条件不变时, 作为车身中线的 A, B, C 三点轨迹均不发生变化. A' 点与 A 点轨迹相比较, 相当于沿着径向向内

移动 $a = \frac{b_1}{2} \cos \alpha$ 的距离, 其中 α 为 BA 与 A 点轨迹切线方向的夹角. 同理, C' 点与 C 点轨迹相比较, 相当于沿着径向向内移动 $c = \frac{b_2}{2} \cos \beta$ 的距离. 其中 β 为线段 BC 方向与 C 点轨迹切向的夹角. 那么内轮差公式可写为

$$d = d' - a + c$$

由公式知, 牵引头宽度 b_1 增大时, 内轮差 d 线性减小; 车身宽度 b_2 增大时, 内轮差 d 线性增大.

对于车宽 $b_1 = b_2 = 1.8 \text{ m}$, $R/l_1 = 5$ 的半挂车, 计算得到的最大内轮差 d_{\max} 见表 3. 通过查阅资料, 一些典型半挂车的数据列于表 4 中. 将表 3 和表 4 中数据整理得到图 9. 从图 9 中可以看出, 当 $R/l_1 = 5$ 时, 典型半挂车的 d_{\max}/l_1 均在 1 以内. 因为没有查到半挂车的最小转弯半径数据, 因此得不到 R_{\min} 和最大的内轮差. 如果有读者能够找到半挂车的最小转弯半径, 可自行计算最大内轮差. 从当前数据来看, 建议行人和非机动车为了保证自身安全, 至少要与半挂车转弯轨迹保持约牵引车长度 l_1 的距离.

表 3 半挂车内轮差与轴距比 ($l_1 = 1.5 \text{ m}$, $R = 7.5 \text{ m}$, $b_1 = b_2 = 1.8 \text{ m}$)

l_2/l_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
d'_{\max}/m	0.377	0.395	0.413	0.451	0.494	0.539	0.588	0.638	0.691	0.745
d_{\max}/m	0.433	0.451	0.469	0.488	0.512	0.558	0.606	0.656	0.709	0.764
l_2/l_1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
d'_{\max}/m	0.802	0.861	0.921	0.983	1.047	1.111	1.178	1.244	1.311	1.380
d_{\max}/m	0.820	0.879	0.939	1.001	1.065	1.129	1.196	1.263	1.329	1.398

表 4 典型半挂车的尺寸^[7]与最大内轮差 ($R/l_1 = 5$)

车型	陕汽德龙 F3000	东风天龙	奔驰 ACTROSS	联合重卡	北奔 V3 重卡
前轴距 l_1/m	1.40	1.35	1.35	1.35	1.35
后轴距 l_2/m	3.18	3.30	3.30	3.83	3.83
l_2/l_1	2.27	2.44	2.44	2.84	2.84
牵引车宽度 b_1/m	1.80	1.82	1.80	1.83	1.80
车身宽度 b_2/m	1.80	1.82	1.80	1.83	1.80
d_{\max}/m	0.86	0.93	0.93	1.16	1.16

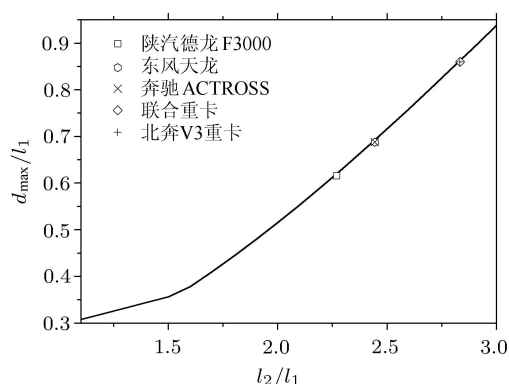


图 9 半挂车的内轮差随轴距比变化规律 ($R/l_1 = 5$)

4 讨论

本文基于理论力学的运动学知识, 建立了汽车和半挂车转弯时内轮差问题的理论模型. 此模型可以给出车辆转弯时不同车轮的轨迹, 并得出内轮差的准确计算公式. 通过定量分析得到车辆最大内轮

差随车身尺寸、回转半径的变化规律: 内轮差随车身长度增加而增大, 随回转半径的减小而增大.

对于驾驶者而言, 为了减小内轮差, 应采用尽可能大的转弯半径 R ^[8]. 此外, 汽车右转时, 驾驶员是通过车辆右侧后视镜观察路况的, 为了减小视觉盲区和观察误差应尽量降低速度^[9]. 当前的大型客车和半挂车的倒后镜, 有些已经考虑了缩小视觉盲区的因素, 比如有些车辆倒后镜由多块不同角度的镜子组成, 斜向下方的倒后镜, 可以起到缩小视觉盲区的作用. 而少数高端的轿车, 已经配备围绕车身的倒车雷达, 若周围物体、行人或车辆与本车距离过近, 会自动报警. 这些主动控制方案, 可以帮助驾驶员避免内轮差产生的交通事故.

内轮差的危害对象通常是汽车右侧的行人和非机动车. 为了避免内轮差带来的危险, 行人和非机动车需要保持和转弯汽车的安全距离, 不要超越正在

右转弯的车辆. 对于一体的单个汽车而言, 至少与汽车保持车身长度 1/3 以上的距离; 对于半挂车而言, 保持距离需要在牵引头长度以上.

从车辆设计者的角度, 单纯为减少内轮差而改变车身尺寸是不现实的. 本文的理论模型基于后轮不转向的基本假设, 因此后轮的速度沿着车身方向, 这对于当前的绝大多数车型都是适用的. 但是随着技术的发展, 高端的概念车已经可以实现四轮转向 (也叫全轮转向), 如在保时捷电动跑车的宣传中, 号称时速 50 km 以下时后轮偏转方向与前轮相反, 以减少转弯半径; 而时速超过 50 km 时, 后轮偏转方向将与前轮相同, 以获得更好的循迹性和高速过弯性能^[10]. 这种情况下, 内轮差的概念其实已经不适用了. 极限状态下车可以实现垂直车身长度方向的运动, 就像四轮行李箱一样, 这时必须配合复杂的车身控制系统才能保持需要的姿态. 虽然目前这些技术距离家用、大型车的应用还有距离, 但将来的应用是完全可以预期的, 只是时间的问题.

参 考 文 献

- 1 陈诗佳. 半挂车路口转弯时刮倒一对母子“内轮差”是主因. 新蓝网·浙江网络广播电视台, 2016. <http://n.cztv.com/news/12014073.html>
- 2 朱文. 了解“内轮差”, 远离转弯的大货车、工程车. 海宁日报, 2012. http://hnrh.zjol.com.cn/hnrh/html/2012-12/13/content_207927.htm
- 3 褚正清, 刘家保, 宋星. 货车右转弯内轮差的建模研究. 河北北方学院学报, 2015, 31(5): 49-52
- 4 李铁洪, 吴华金. 长直线路小半径曲线公路交通事故成因及预防对策. 中国公路学报, 2007, 20(1): 35-40
- 5 陈思嘉. 汽车转弯时由内轮差引发的交通事故原因建模与分析. 数学通报, 2013, 52(12): 55-57
- 6 李俊峰, 张雄, 任格学等. 理论力学. 北京: 清华大学出版社, 2001
- 7 唐恒望. 内轮差数学建模. 百度文库, 2007 <http://wenku.baidu.com/link?url=xEHJoIba1dvqiTfQ4gXrx5PtapBR0iY1r8.dxFhCkdEkJfrkmtkrlwWINWNmRTHaF3HOtgy4W1gMgGpCqon6PbGUmV4OZ6SLfX5i6ljWw1G>
- 8 范翔. 车辆内轮差问题的优化分析. 科技世界, 2016, 9: 31-34
- 9 万禄义. 公交车“内轮差”, 不容忽视. 人民公交, 2012, (1): 71
- 10 后桥转向系统. 保时捷(中国), 2016. <http://www.porsche.com/china/zh/models/panamera/panamera-4s/drive-chassis/rear-axle-steering/>

(责任编辑: 胡 漫)

第八届全国力学史与方法论学术研讨会 (HMM-VIII) 暨中国力学大会力学史与方法论分会场通知

经中国力学学会力学史与方法论专业委员会研究决定, “第八届全国力学史与方法论学术研讨会 (HMM-VIII) 暨中国力学大会力学史与方法论分会场” 将于 2017 年 8 月 13—16 日举办的全国力学学术大会期间 (分会场时间为 15 日或 16 日, 待定) 在北京举行. 会议由中国力学学会力学史与方法论专业委员会主办, 北京大学承办, 我们诚挚地邀请您参加会议.

全国力学史与方法论学术研讨会是本专业委员会的学术活动平台, 旨在交流力学史、方法论以及力学教学等方面的研究成果, 凝聚和扩大研究队伍, 促进产生力学史和方法论方面的新认识、新观点、新方法和新思想, 从而为繁荣我国力学研究提供参考.

前七届研讨会分别在北京、大连、烟台、银川等地召开, 2017 年适逢力学学会 60 周年庆典, 第八届全国力学史与方法论学术研讨会 (HMM-VIII) 将同时作为力学史与方法论分会场举办. 《力学与实践》将从 6 月 1 日前提交了全文的报告中择优发表, 格式请参照力学大会网站说明.

HMM-VIII 组织委员会
中国力学学会力学史与方法论专业委员会
2017 年 2 月

已接受邀请参会的力学界前辈学者:

武际可、王大钧、王敏中、余寿文、徐秉业、朱克勤、隋允康、刘延柱、程昌钧、嵇 醒、姜锡权
负责人: 郑晓静

联系人: 唐少强 (北京大学) maotang@pku.edu.cn, 胡锐锋 (西安电子科技大学) rifu@xidian.edu.cn