Extinction times for a birth-death process with weak competition

Лебедюк Ева, Василева Анна

Вступление

- **Линейная модель процесса рождения-смерти** $(X_0(t), t \geq 0)$ - одна из базовых моделей от непрерывного времени с фиксированными рождаемостью и смертностью (λ и μ соответственно)
- Выделяют три основных режима: **supercritical** (λ > μ), **critical** (λ = μ), **subcritical** (λ < μ)
- Свойства $X_0(\cdot)$ хорошо изучены, в частности, знаем:

$$\mathbb{E}_m X_0(t) = m e^{(\lambda-\mu)t}$$

and

$$\mathbb{P}_m(\tau_0 \leq t) = \begin{cases} \left(\frac{\mu(1-e^{(\mu-\lambda)t})}{\lambda-\mu e^{(\mu-\lambda)t}}\right)^m, & \text{in the sub- and supercritical cases,} \\ \left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^m, & \text{in the critical case,} \end{cases}$$

Добавляем конкуренцию

- Для улучшения модели вводят “лишние” смерти и получают индексированный процесс $(X_\theta(t), t \geq 0)$
- Считают, что он принимает на вход неотрицательные целые значения $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и имеет

$$
\begin{cases}
\mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i+1) = \lambda_i t + o(t), & \text{with } \lambda_i = i\lambda, \\
\mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i-1) = \mu_i t + o(t), & \text{with } \mu_i = i\mu + i(i-1)\theta, \\
\mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), &
\end{cases}
$$

- (λ, μ, θ) - ключевые параметры этой модели (в условии выполнения критериев выше) до тех пор пока i не сравняется с нулем (the process hits the absorption state i = 0)

Следствия:

- in the supercritical and critical cases $E_m(\tau_0) = \infty$ and in the subcritical case $E_m(\tau_0) < \infty$
- В предположении $t \to \infty$:

$$\mathbb{P}_m(\tau_0 < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{in the subcritical and critical cases,} \\ (\frac{\mu}{\lambda})^m, & \text{in the supercritical case.} \end{cases}$$

Moreover, it is easy to see that in the subcritical case

$$\mathbb{P}_m\left(\tau_0 \leq \frac{\ln m + \ln(1-\lambda/\mu) + x}{\mu - \lambda}\right) \to e^{-(e^{-x})}, \quad m \to \infty,$$

and in the critical case

$$\mathbb{P}_m\left(\tau_0 \leq mx\right) \to \exp\{-(\lambda x)^{-1}\}, \quad m \to \infty.$$

Пороговая величина

- $X_\theta(\cdot)$ - представитель так называемых логистических процессах ветвления (logistic branching process)
- Самая заметная черта, отличающая $X_\theta(\cdot)$ от $X_0(\cdot)$ - существование пороговой ве $i_\theta = \lfloor \frac{\lambda - \mu}{\theta} \rfloor + 1$ в supercritical случае, полученной из $\lambda_i \approx \mu_i$
- i_θ разделяет пространство на две части: $i > i_\theta$ ($X_\theta(\cdot)$ ↗) и $i < i_\theta$ ($X_\theta(\cdot)$ ↘)
- **i_θ - carrying capacity of the environment for the population in question (ёмкость среды)**

Общие свойства time homogeneous birth-death processes

- Положим вероятность $Q_i = \mathbb{P}_i$(reach i + 1 before 0) такова, что

$$Q_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} Q_{i-1} Q_i$$

- Тогда можно вычислить, что $\mathbf{Q_i = \Pi_i/(\Pi_i + 1)}$
- А более обще, дл $i \in (k, n) \subset (0, \infty)$

$$\mathbb{P}_i(\text{reach } n \text{ before } k) = \frac{\Pi_i - \Pi_k}{\Pi_n - \Pi_k},$$
$$\mathbb{P}_i(\text{reach } k \text{ before } n) = \frac{\Pi_n - \Pi_i}{\Pi_n - \Pi_k}.$$

- Из чего выходит .. $\mathbb{E}_m(\tau_0) = \dfrac{\ln m + \gamma + \ln(1 - \lambda/\mu)}{\mu - \lambda} + o(1), \ m \to \infty \quad \gamma = 0,577\ldots \text{ is Euler's constant}$

Связь с линейной моделью рождения-смерти

Рассмотрим двумерный марковский процесс $(X^*_\theta(\cdot), X^*_0(\cdot))$ с переходами:

Type of transition $(0 \le i < j)$	Transition rate
$(i,i) \to (i+1, i+1)$	λi
$(i,i) \to (i-1, i-1)$	μi
$(i,i) \to (i-1, i)$	$\theta i(i-1)$
$(i,j) \to (i+1, j)$	λi
$(i,j) \to (i-1, j)$	$\mu i + \theta i(i-1)$
$(i,j) \to (i, j+1)$	λj
$(i,j) \to (i, j-1)$	μj

The process is constructed in such a way that $\widehat{X}_\theta(t) \le \widehat{X}_0(t)$ for all $t \ge 0$, and the marginal distributions of $(\widehat{X}_\theta(\cdot), \widehat{X}_0(\cdot))$ coincide with those of $X_\theta(\cdot)$ and $X_0(\cdot)$, respectively.

Связь с линейной моделью рождения-смерти

Хотим узнать, как долго мы будем оставаться на диагонали, если $(\widehat{X}_\theta(0), \widehat{X}_0(0)) = (m, m).$

k_θ - кол-во прыжков процесс $(\widehat{X}_\theta(0), \widehat{X}_0(0))$ до ухода с диагонали. Тогда

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta \le n) \le \frac{(m+n)n\theta}{\lambda + \mu},$$

Устремляем $\theta \to 0$ и фиксируем m:

Основные результаты - 1

При $\theta \to 0$ для процесса рождения-смерти с однородными по времени скачками выполнено:

- Если $X_\theta(0) = m$, m - стартовое состояние процесса, m>0, m фиксировано:
    - для subcritical and critical states
    - для supercritical state

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta \to \tau_0) = 1,$$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta \to \tau_0 | \tau_0 < \infty) = 1,$$

and for any $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta > x c_1 \sqrt{\theta}\, e^{c_2/\theta}) | \tau_0 = \infty) \to e^{-x},$$

where

$$c_1 = \lambda(\lambda - \mu)^{-2}\sqrt{2\pi/\mu}, \qquad c_2 = \lambda - \mu - \mu \ln(\lambda/\mu).$$

Основные результаты - 2

При $\theta \to 0$, $X_\theta(0) = m_\theta$ и $\theta m_\theta \to a > 0$:

- for supercritical state

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) \sim c_1 \sqrt{\theta}\, e^{c_2/\theta} \qquad c_1 = \lambda(\lambda-\mu)^{-2}\sqrt{2\pi/\mu}, \quad c_2 = \lambda - \mu - \mu \ln(\lambda/\mu).$$

- for subcritical state

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) = \frac{\ln(a\theta^{-1}) + \ln\frac{\mu-\lambda}{\mu} + \ln\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+a} + \gamma}{\mu-\lambda} + o(1),$$

- for critical state

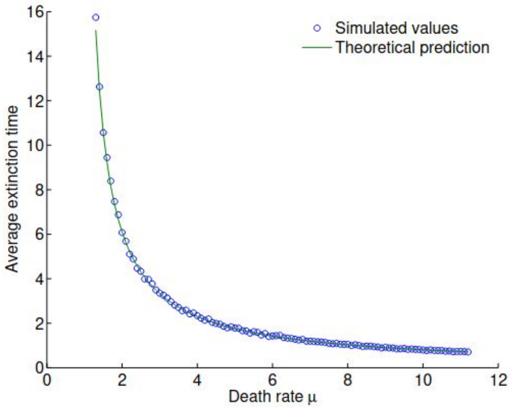
$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) \sim \frac{(\pi/2)^{3/2}}{\sqrt{\theta\mu}}.$$

Основные результаты - 2

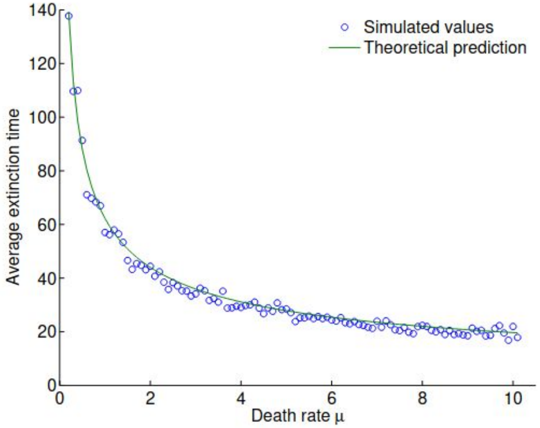
При $\theta \to 0$, $X_\theta(0) = m_\theta$ и θm_θ -> a > 0, for any x ≥ 0

- for supercritical state $$\mathbb{P}_{m_\theta}(\tau_\theta > x c_1 \sqrt{\theta}\, e^{c_2/\theta}) \to e^{-x},$$
- for subcritical state $$\mathbb{P}_{m_\theta}\left(\tau_\theta \le \frac{\ln(a\theta^{-1}) + \ln\frac{\mu-\lambda}{\mu} + \ln\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+a} + x}{\mu-\lambda}\right) \to e^{(-e^{-x})}$$

Подтверждение результата 2



Среднее 100 симуляций для каждого значения смертности и значения, предсказанные Теоремой 2 (ii).
Параметры: размер популяции mθ = 1000, уровень конкуренции θ = 0.001, уровень рождаемости λ = 1



Среднее 100 симуляций и значения, предсказанные Теоремой 2 (iii). Параметры: начальный размер популяции mθ = 1000, уровень конкуренции θ = 0.001