Процессы Пуассона

Лебедюк Ева   Василева Анна

Апрель 2023

Содержание

Случайные процессы

Случайный процесс – это семейство случайных величин $\{\xi(t)\}_{t \in T}$.
Пусть эти величины заданы на одном пространстве, $t \subseteq R$ Рассмотрим случайный процесс как функционал от ω, t
Траекторией случайного процесса называется функция
$\xi_w(t) : T \to R$
Сечением случайного процесса в точке t называется случайная величина $\xi(t) : \Omega \to R$

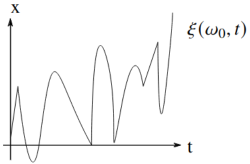
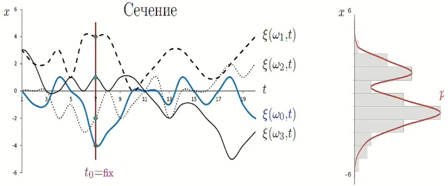


Рис. 1.1: Траектория случайного процесса.



Моменты случайного процесса - это моменты сечений случайного процесса

Пусть $\forall t \in T$ существует математическое ожидание величины $\xi(t)$

Матожидание случайного процесса: $m : T \to R$, $m(t) = E\xi(t)$, $t \in T$

Дисперсия случайного процесса: $d : T \to R_+$, $d(t) = D\xi(t)$, $t \in T$

Ковариационная функция случайного процесса: $R : T \otimes T \to R$, $R(t,s) = cov(\xi(t), \xi(s)) = E\xi(t)\xi(s) - E\xi(t)E\xi(s), t, s \in T$

Определение процесса Пуассона

Пусть K(t) - количество событий на интервале [0, t)
Случайный процесс $K(t)$, $t \geq 0$ называется **Пуассоновским**, если:
1. $K(0) = 0$ почти наверное
2. $K(t)$ - процесс с независимыми приращениями, то есть
   $\forall n \geq 2 \quad \forall t_1 \leq t_2 ... \leq t_n$
   $K(t_1), K(t_2) - K(t_1), ..., K(t_n) - K(t_{n-1})$ независимы в совокупности
3. $\forall t \geq s \geq 0 \;\; K(t) - K(s) \sim Pois(\lambda(t-s)), \lambda > 0$

Так как распределение $K(t) - K(s)$ зависит только от длины отрезка, Пуассоновский процесс является однородным по времени

Базовые свойства, следующие из определений

1. $K(t) \sim Pois(\lambda t)$
2. $EK(t) = \lambda t = DK(t)$
3. $R(t, s) = \lambda min(t, s)$

Свойства процессов Пуассона

Для полуинтервала и $(a_i, b_i]$ где $a_i < b_i \leqslant a_{i+1}$:

$$P\{K(a_i, b_i] = n_i, i = 1, \cdots, k\} = \prod_{i=1}^{k} \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)}$$

Отсюда:

1. $Mean(a, b] = \lambda(b - a) = Var(a, b]$
2. $P\{t_k > x\} = P\{K(0, x] < k\} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x}$

   И можно получить функцию плотности $f_k(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}$

Свойства процессов Пуассона

Считаем все точки как идентичными, за исключением их расположения. Тогда в физическом смысле удобнее рассматривать только несовпадающие N точек, распределенные на(0, T].

$$P\{K(o, x] = k | K(0, T] = N\} = \frac{P\{K(o, x] = k, K(0, T] = N\}}{P\{K(0, T] = N\}} =$$

$$= \binom{N}{k} (p_{x,T})^k (1 - p_{x,T})^{N-k}$$

Пуассонов поток требований

Пусть события происходят в случайное время. $\xi(t)$ - число событий на промежутке $[0, t)$

Поток событий $\xi(t), t > 0$ называется **пуассоновым**, если он:

1. имеет независимые приращения
2. однородный во времени
3. начинается в нуле
4. при h $\to$ 0, $\lambda = c$ распределение приращения $\xi(h) = \xi(t+h) - \xi(t)$:
   (a) $P(\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
   (b) $P(\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
   (c) $P(\xi(h) > 1) = o(h)$

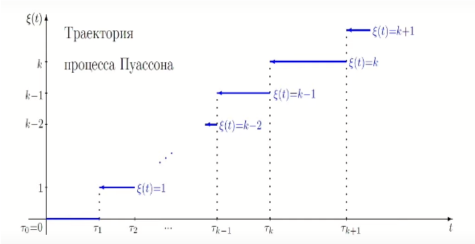
Теорема

Пуассонов поток событий $\xi(t), t > 0$ есть процесс Пуассона. Процесс Пуасссона можно рассматривать как пуассонов поток событий.

Траектория процесса Пуассона

Траектория процесса Пуассона - кусочно-постоянная функция

- скачки равны 1 и происходят в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2.., \tau_1 < \tau_2..$
- непрерывна слева



Отсюда следует, что $\tau_k \geq t \leftrightarrow \xi(t) < k$, значит, $\tau_k < t \leftrightarrow \xi(t) \geq k$
$F_{\tau_1} = P(\tau_1 < t) = P(\xi(t) \geq 1) = 1 - P(\xi(t) = 0) = 1 - \exp^{-\lambda t}$
Значит, $\tau_1 \sim Exp(\lambda)$, а смысл λ - средняя интенсивность потока требований

Процессы Пуассона в модели Дикмана-Лоу

- Рассматриваем поведение особей в n-мерном кубе.
- Граничные условия определяют, что произойдет при рождении особи вне границы области
- События рождения и смерти - пуассоновские потоки требований с фиксированными с фиксированными $\lambda = b_k, d_k$ - рождаемостью и смертностью для к-ого вида
- Аддитивное свойство Пуассоновских потоков позволяет производить симуляцию по одному событию за раз.