Appunti su

Spazi di Moduli

Docente
Prof. Arvid Perego

Scritti da
Filippo Papallo

A.A. 2025/26
Università di Genova

Questo documento ha lo scopo di raccogliere vari appunti tratti dagli incontri con il mio relatore, Prof. **Arvid Perego**, durante il mio ultimo anno di dottorato. Nel corso dell'anno accademico 2025/26, l'obiettivo è quello di studiare più in profondità la teoria degli spazi di moduli, sia dal punto di vista classico, sia dal linguaggio moderno introdotto da Bridgeland in [Bri08].

Ultimo aggiornamento: 26/11/2025

Indice

Lista delle lezioni

Capitolo 1.

Introduzione alle geometria birazionale

1

Lezione 1
12 nov., 2025

Forme differenziali

Sia X varietà quasi-proiettiva. Definiamo

$$\Phi^r[X] := \left\{ \varphi : X \to \bigsqcup_{x \in X} \bigwedge^r T^*_{X,x} \;\middle|\; \forall_{x \in x} \, \varphi(x) \in \bigwedge^r T^*_{X,x} \right\} . \tag{1.0.1}$$

1.1. Definizione. — Una r-forma differenziale $\varphi \in \Phi^r[X]$ si dice **regolare** se, per ogni $x \in X$, esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\varphi|_U$ appartiene al $k[U]$-sottomodulo di $\Phi^r[X]$ generato da elementi della forma

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_r \, , \quad \text{con } f_j \in k[U] \, , \tag{1.1.1}$$

e indichiamo l'insieme delle r-forme regolari con $\Omega^r(X)$. Se $\omega \in \Omega^r(X)$, allora in un aperto affine U si scrive come

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_r} g_{i_1, \dots, i_r} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_r} \, , \tag{1.1.2}$$

con $g_*, f_j \in k[U]$.

1.2. Teorema. — *Sia $p \in X$ un punto liscio. Allora esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\Omega^1(U)$ è un $k[U]$-modulo libero di rango* $\dim \mathcal{O}_{X,x} =: n$.

1.3. Teorema. — *Sia $p \in X$ un punto liscio. Allora esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\Omega^r(U)$ è un $k[U]$-modulo libero di rango $\binom{n}{r}$ e una base per il modulo è data da*

$$\{ \, du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \; | \; 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq r \, \} \, , \tag{1.3.1}$$

dove gli u_j sono presi da una base di $k[U]$ fissata.

In analogia a quanto accade per le funzioni razionali, introduciamo le forme differenziali *razionali*, che andremo a identificare con una relazione d'equivalenza. Consideriamo le coppie (ω, U), con $\omega \in \Omega^r(X)$ e $U \subset X$ un aperto. Diciamo che $(\omega, U) \sim (\omega', U')$ se $\omega|_{U \cap U'} = \omega'|_{U \cap U'}$.

1.4. Definizione. — Una classe di equivalenza rispetto a $\sim$ è detta **r-forma differenziale razionale** su X.

Denotiamo con $\mathcal{M}^r(X)$ l'insieme delle r-forme razionali su X. È facile vedere che $\mathcal{M}^r(X)$ è un $k(X)$-spazio vettoriale di dimensione $\binom{n}{r}$, in analogia a quanto accade per le forme regolari. Inoltre, $\mathcal{M}^r(X)$ è un inveriante birazionale.

1.5. Definizione. — Una r-forma razionale ω che ha un rappresentante della forma (ω, U) si dice **regolare su** U.

1.6. Osservazione. — L'insieme dei punti su cui una r-forma razionale ω **non** è regolare forma un chiuso in X.

1.7. Esempio. — Su $\mathbb{A}^n$, denotiamo con $z_1, \dots, z^n$ le coordinate. Ogni $\omega \in \mathcal{M}^n(X)$ si scrive unicamente come

$$\omega = \varphi(z)\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n\,, \tag{1.7.1}$$

dove $\varphi(z) \in k(z_1, \dots z_n)$ è una funzione razionale su $\mathbb{A}^n$, che si scrive come $\varphi = f/g$, per qualche $f, g \in k[z_1, \dots, z_n]$. L'insieme su cui ω non è regolare è l'ipersuperficie $\mathbb{V}(g)$.

1.8. Lemma. — $\Omega^n(\mathbb{P}^n) = 0$.

Dimostrazione. Siano $[x_0 : \cdots : x_n]$ coordinate omogenee. Considero due carte affini

$$(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \quad \text{e} \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) = \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \tag{1.8.1}$$

Notiamo che sull'intersezione vale

$$y_1 = \frac{z_1}{z_0}\,, \dots\,, y_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_0}\,, y_n = \frac{1}{z_0}\,, \tag{1.8.2}$$

quindi possiamo calcolare

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = d\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{1}{z_0}\right) = \cdots = \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\, dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1}\,. \tag{1.8.3}$$

Poiché ogni n-forma regolare sulla prima carta affine $\mathbb{A}^n_y$ è della forma $f(x) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, su $\mathbb{A}^n_z$ si scrive

$$\omega|_{\mathbb{A}^n_z} = \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} f\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_0}, \frac{1}{z_0}\right) dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1}\,, \tag{1.8.4}$$

che però non è regolare in $\{z_0 = 0\}$. □

1.9. Definizione. — Sia X una varietà liscia n-dimensionale. Un divisore $K_X \in CaDiv(X)$ si dice **canonico** se $K_X = \operatorname{div} \omega$, con $\omega \in \mathcal{M}^n(X) \setminus \{0\}$. Chiamiamo **il divisore canonico** un rappresentante della classe di equivalenza di K_X.

1.10. Definizione. — Il fascio Ω^1_X delle 1-forme differenziali regolari su X è il fascio che a ogni aperto $U \subset X$ associa il $k[U]$-modulo $\Omega^1(U)$. Il fascio delle r-forme regolari su X verrà denotato con $\Omega^r_X := \bigwedge^r \Omega^1_X$, e per $r = n$ otteniamo il **fascio canonico** $\omega_X := \Omega^n_X$.

1.11. Osservazione. — Vale $\omega_X \simeq \mathcal{O}(K_X)$. Infatti, sia ω tale che $K_X = \operatorname{div}\omega$ e definiamo il morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{O}(K_X) \to \omega_X$ come la mappa che sull'aperto $U \subset X$ è data da

$$\mathcal{O}(K_X)(U) \longrightarrow \Omega^n_X(U)\,, \quad f \longmapsto f\omega|_U\,. \tag{1.11.1}$$

Allora φ è ben definita: infatti

$$\operatorname{div}(f\omega|_U) = \operatorname{div} f + \operatorname{div}\omega_X = \operatorname{div} f + K_X|_U \geq 0\,, \tag{1.11.2}$$

poiché $f \in \mathcal{O}_X(K_X)(U)$. Quindi deduciamo che $f\omega|_U$ è regolare. L'iniettività segue dal fatto che $f\omega|_U = 0$ se e solo se $f = 0$, dato che (si dimostra che) $\{\omega = 0\}$ è un chiuso. Per la surgettività, si sfrutta che $\mathcal{O}_X(K_X)$ è un fascio invertibile: infatti, sia $\eta \in \omega_X$ e consideriamo $\{U_\alpha\}_\alpha$ un ricoprimento banalizzante di U, i.e. per ogni α vale

$$\eta|_{U_\alpha} = f_\alpha\omega|_{U_\alpha}\,, \quad f_\alpha \in k(X)\,. \tag{1.11.3}$$

Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, allora $\eta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\alpha\omega = f_\beta\omega$, e poiché $\omega \neq 0$ su questa intersezione, $f_\alpha = f_\beta$; da questo deduciamo che possiamo incollare le f_α a un elemento $f \in k(X)$. ...

1.12. Esempio. — Sia $X = \mathbb{P}^n$. La n-forma razionale

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{1.12.1}$$

è regolare sull'aperto $\mathbb{D}(x_0) = \{x_0 \neq 0\}$. Nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ abbiamo le coordinate

$$(x_0, 1, x_2, \ldots, x_n) = \left(1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)\,, \tag{1.12.2}$$

da cui deduciamo

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \cdots = \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} dx_0 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{1.12.3}$$

...

1.13. Esempio. — Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie di grado d, definita dall'equazione polinomiale $P(x) = 0$. Consideriamo la $(n-1)$-forma definita su $U_0 \cap X$ da

$$\omega_i := (-1)^i \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_i}(1, x_1, \ldots, x_n)}\,. \tag{1.13.1}$$

Considero $0 \leq i \leq n$ tale che $\partial P/\partial x_i \neq 0$ e usiamo la liscezza di P. Se esiste un altro indice j in cui la derivata lungo x_j non si annulla, allora posso definire ω_j e si verifica con un conto che $\omega_j = \omega_i$.

Sia X liscia e $U = \bigcup_i U_i$, dove U_i sono aperti in cui $\partial P/\partial x_i \neq 0$. Allora possiamo incollare le forme ω_i in modo da definire $\omega \in \Omega^{n-1}(U_0)$. Sull'aperto $U_0 \cap U_1$ possiamo scrivere

$$\frac{d\left(\frac{1}{x_0}\right) \wedge \left(\frac{x_3}{x_0}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_0}\right)}{\frac{\partial P}{\partial x_2}\left(1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)} = \frac{(-1)^{n-d}}{x^{n-(d-1)}} \frac{dx_0 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_2}(x_0, 1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{1.13.2}$$

e quindi vediamo che $K_X = -(n+1-d)H_0 \cap X$.

1.14. Osservazione. — Se $d = n+1$, allora $K_X \sim \mathcal{O}_X$ e quindi l'ipersuperficie è Calabi-Yau. Se $d < n+1$, allora K_X è anti-ampio e quindi X è Fano; viceversa, se $d > n+1$ il canonico K_X è ampio, quindi X è di tipo generale.

1.15. Esempio (Blow-up). — Sia X una varietà liscia n-dimensionale. Sia $Y \subset X$ liscia di codimensione r e consideriamo il blow-up

$$\pi : \widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Y X \longrightarrow X \tag{1.15.1}$$

con divisore eccezionale $E = \pi^{-1}(Y)$. Allora

$$K_{\widetilde{X}} = \pi^* K_X + (r-1)E \,. \tag{1.15.2}$$

Per dimostrarlo, ragioniamo localmente con le forme differenziali. Essendo X, Y lisce, scegliamo coordinate locali $x_1, \dots, x_n$ su X, in modo tale che $Y = \{\, x_1 = \cdots = x_r = 0 \,\}$. Quindi, le coordinate del blow-up sono

$$\widetilde{X} = \mathrm{Bl}_Y X = \left\{ \, \big((x_1, \dots, x_n), [u_1 : \cdots : u_n]\big) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \;\middle|\; \forall_{1 \le i < j \le r}\, x_i x_j = x_j x_i \, \right\} . \tag{1.15.3}$$

Localmente, $\widetilde{X}$ è coperto da carte affini $U_j = u_j \neq 0$; in U_1 e coordinate sono

$$x_1 \,, \quad x_2 = u_2 x_1 \,, \dots \,, x_r = u_r x_1 \,, x_{r+1} \,, \dots \,, x_n \,, \quad \text{con } u_j = \frac{x_j}{x_1} \,, \tag{1.15.4}$$

e quindi il blow-up e localmente

$$\pi(x_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, u_2 x_1, \dots, u_r x_1, x_{r+1}, \dots, x_n) \,. \tag{1.15.5}$$

Considero la n-forma regolare $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ su X. Tirandola indietro tramite il pull-back, si ottiene

$$\begin{aligned} \pi^* \left(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \right) &= dx_1 \wedge d(u_2 x_1) \wedge \cdots \wedge d(u_r x_1) \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= x_1^{r-1} dx_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_r \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \end{aligned}$$

...

La successione esponenziale

Sia X una varietà proiettiva liscia; la consideriamo adesso come una varietà complessa, con la topologia euclidea. Sia $\mathcal{O}_{an}$ il fascio delle funzioni olomorfe su X e $\mathcal{O}_{an}^*$ il sottofascio delle funzioni olomorfe mai nulle. Abbiamo il seguente morfismo surgettivo di fasci di gruppi abeliani

$$\exp : \mathcal{O}_{an} \longrightarrow \mathcal{O}_{an}^* \,, \quad f \longmapsto e^f \,. \tag{1.15.6}$$

Il nucleo è il fascio

$$\mathcal{K}er \exp = \{\, f \in \mathcal{O}_{an} \;|\; \forall_{p \in X} f(p) \in 2\pi i \mathbb{Z} \,\} \simeq \mathbb{Z}_{an} \,, \tag{1.15.7}$$

quindi abbiamo una successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{an} \longrightarrow \mathcal{O}_{an} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{an}^* \longrightarrow 0 \,, \tag{1.15.8}$$

che chiameremo **successione esponenziale**.

1.16. Remark. — La coomologia del fascio costante $H^*(X, \mathbb{Z}_{an})$ è isomorfa alla coomologia singolare $H^*(X;\mathbb{Z})$ di X con topologia euclidea.

1.17. Remark. — Il fascio $\mathcal{O}_{an}$ è coerente nella topologia complessa, e per un fatto molto profondo (i.e. il teorema **GAGA** di Serre), esiste un isomorfismo $H^*(X;\mathcal{O}_{an}) \simeq H^*(X,\mathcal{O}_X)$. In questo modo, possiamo identificare $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}^*_{an}$.

Quindi, la successione (1.15.8) induce la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow H^1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \tag{1.17.1}$$

Siccome X è una varietà priettiva liscia, complessa e compatta, allora i gruppi di coomologia singolare $H^i(X;\mathbb{Z})$ sono finitamente generati, dunque abbiamo il teorema di struttura per $\mathbb{Z}$-moduli che ci permette di decomporre

$$H^i(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_i(X)} \oplus T_i\,, \tag{1.17.2}$$

dove T_iè sottogruppo di torsione finito e $b_i(X)$ è l'i-esimo numero di Betti.

1.18. Osservazione. — $T_1 = 0$ poiché la mappa γ è iniettiva, quindi $H^1(X;\mathbb{Z}) \subset H^1(X,\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}^N$ e quest'ultimo non ha torsione.

1.19. Definizione. — Se $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ la **prima classe di Chern** di $\mathcal{L}$ è $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X;\mathbb{Z})$. Se D è un divisore di Cartier, scriveremo $c_1(D) = c_1(\mathcal{O}_X(D)$.

Si noti che il primo carattere di Chern è la "*giusta generalizzazione*"' del **grado** di una curva; tuttavia, a differenza della funzione deg, in generale la c_1 **non** è surgettiva.

1.20. Definizione. — Il **gruppo di Neron-Severi** di X è l'immagine del primo carattere di Chern:

$$NS(X) := \operatorname{im} c_1 \subset H^2(X;\mathbb{Z})\,.$$

1.21. Remark. — Il $NS(X)$ è un gruppo abeliano finitamente generato. Il suo rango ρ_X, detto **numero di Picard** di X, è un invariante numerico di X; inoltre, ρ_X è **invariante birazionale**. Si noti, per definizione, che $\rho_X \le b_2(X)$. Ad esempio, se $X = C$ è una curva, allora $NS(X) \simeq H^2(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, quindi $\rho_X = b_2(X) = 1$. Il Neron-Severi misura la "*parte discreta*" di X.

1.22. Definizione. — Il nucleo della prima classe di Chern verrà chiamato **varietà di Picard**

$$\mathrm{Pic}^0(X) := \ker c_1 \subset \mathrm{Pic}(X)\,. \tag{1.22.1}$$

Dalla successione esponenziale (1.15.8), si vede che

$$Pic^0(X) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X)/\ker\beta \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X)/H^1(X;\mathbb{Z})\,, \tag{1.22.2}$$

quindi notiamo che è un **toro complesso** di dimensione $h^1(\mathcal{O}_X)$, per questo diciamo che misura la "*parte continua*" di X. Ovviamente abbiamo la successione esatta corta di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\exp} NS(X) \longrightarrow 0\,. \tag{1.22.3}$$

Il caso delle curve

Sia $X = C$ una curva proiettiva liscia. Per la classificazione delle superfici topologiche, sappiamo che C è omeomorfa a una sfera con g manici, quindi

$$H^0(X;\mathbb{Z}) \simeq H^2(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\,, \quad H^1(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}\,. \tag{1.22.4}$$

A meno di scegliere il segno dell'isomorfismo $H^2(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, allora $c_1 = \deg$ e possiamo descrivere la varietà di Picard esplicitamente, poiché

$$\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X,\mathcal{O}_X)/H^1(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^{h^1(\mathcal{O}_X)}/\mathbb{Z}^{2g} \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}\,, \tag{1.22.5}$$

quindi è una varietà abeliana g-dimensionale.

Invarianza birazionale dei numeri di Hodge esterni

Sia X una varietà proiettiva con $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$, sia Y proiettiva e $f : X \to Y$ una mappa razionale tale che $\mathrm{codim}_X(X \setminus \mathrm{dom}\, f) \geq 2$. Allora il dominio di f corrisponde al luogo dei punti su cui f è regolare.

Dimostrazione. Come primo caso, supponiamo che X sia liscia e $Y \subset \mathbb{P}^N$. Dato che X è liscia, per ogni $x \in X$ l'anello locale $\mathcal{O}_{X,x}$ è un UFD. In un intorno di $x \in X$, possiamo scrivere

$$f = (f_0 : \cdots : f_N)\,, \quad \text{con } f_j = \frac{g_j}{h_j} \in k(X)\,, \tag{1.22.6}$$

dove $g_j, h_j \in \mathcal{O}_{X,x}$ sono primi tra loro, per ogni $j = 0, \ldots, N$. A meno di moltiplicare per il denominatore comune, possiamo supporre $f_j \in \mathcal{O}_{X,x}$, quindi

$$(X \setminus \mathrm{dom}\, f) \cap U \subset \mathbb{V}(f_0, \ldots, f_N)\,. \tag{1.22.7}$$

Si noti che l'insieme algebrico sulla destra non può contenere divisori, altrimenti se esistesse un divisore primo per x, detto $D \in \mathbb{V}(f_0, \ldots, f_N)$, allora l'equazione locale di D in x dividerebbe tutti gli f_j, contraddicendo l'ipotesi di primarietà fatta in precedenza.

In generale, se $\mathrm{codim}_X \mathrm{Sing}(X) \geq 2$, allora possiamo usare che

$$(X \setminus \mathrm{dom}\, f) \cap U \subset \mathrm{Sing}(X) \cup \overline{(X_{reg} \setminus \mathrm{dom}\, f)}\,, \tag{1.22.8}$$

e vedere che gli insiemi sulla destra non contengono divisori, da cui si conclude che $\mathrm{codim}_X(X \setminus \mathrm{dom}\, f) \geq 2$. □

1.23. Corollario. — *Siano X e Y due curve proiettive lisce. Allora $X \simeq Y$ se e solo se X e Y sono birazionalmente equivalenti.*

1.24. Remark. — Se $f : X \dashrightarrow Y$ mappa birazionale, esistono due aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ tali che $f : U \simeq V$. In generale, può accadere che $U \subsetneq \mathrm{dom}\, f$.

1.25. Esempio (Mappa di Cremona standard). — Consideriamo la mappa

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 , \quad f\left([x_0 : x_1 : x_2]\right) := [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1] = \left[\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}\right] . \tag{1.25.1}$$

Il dominio di f è dato da $\mathbb{P}^2 \backslash \{ [1:0:0], [0:1:0], [0:0:1] \}$ e un aperto su cui f è isomorfismo è dato da

$$U = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; x_0x_1x_2 \neq 0 \right\} . \tag{1.25.2}$$

Quando parleremo di risoluzione delle indeterminazioni, vedremo che

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bl}_{p_1,p_2,p_3}(\mathbb{P}^2) \arrow[dl, "\mathrm{bl}"'] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^2 \arrow[rr, dashed, "f"] & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd} \tag{1.25.3}$$

1.26. Osservazione. — Data X proiettiva liscia, ω una p-forma razionale su X, allora il chiuso in cui ω non è regolare è un divisore, cioè ha codimensione 1. Infatti, basta verificarlo su un aperto in coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$, dove possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_n} f_{i_1,\ldots,i_n}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} , \tag{1.26.1}$$

e notiamo che ω è regolare esattamente dove le funzioni f_* sono regolari. Invece, il luogo in cui ω non è regolare è localmente l'unione dei divisori dei poli delle f_*.

1.27. Corollario. — *Se $U \subset X$ è un aperto tale che $X \setminus U$ abbia codimensione almeno 2, allora la restrizione*

$$r : H^0(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^0(U, \Omega^p_U) , \quad \omega \longmapsto \omega|_U , \tag{1.27.1}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. La mappa è ben definita, è un omomorfismo di gruppi ed è iniettiva: se ω è una forma tale che $\omega|_U = 0$, su U un aperto denso, allora è nulla anche su X. La surgettività... □

1.28. Proposizione. — *Sia X una varietà proiettiva liscia*[1]*. I numeri di Hodge $h^{0,p}$ sono invarianti birazionali, dove ricordiamo che*

$$h^{0,p} := \dim H^p(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega^p_X) =: h^{p,0} . \tag{1.28.1}$$

Dimostrazione. Siano X e Y varietà birazionali; dimostriamo che esiste un isomorfismo

$$H^0(X, \Omega^p_X) \simeq H^0(Y, \Omega^p_Y) . \tag{1.28.2}$$

[1] Ma funziona più in generale, ad esempio per varietà normali.

Prendiamo $f : \dashrightarrow Y$ e $g : Y \dashrightarrow X$ inverse birazionali, con $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti su cui f e g sono isomorfismi. Allora abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H^0(Y, \Omega^p_Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "\simeq", "r_Y"'] & H^0(\mathrm{dom}(f), \Omega^p_{\mathrm{dom}(f)}) & H^0(X, \Omega^p_X) \arrow[l, "\simeq"', "r_X"] \arrow[dl, "g^*"] \\ & H^0(\mathrm{dom}(g), \Omega^p_{\mathrm{dom}(g)}) & \end{tikzcd} \quad . \tag{1.28.3}$$

Notiamo che le restrizioni r_X e r_Y sono isomorfismi per le osservazioni precedenti, quindi consideriamo $\alpha := r_X^{-1} \circ f^*$ e $\beta := r_Y^{-1} \circ g^*$. Dimostriamo che sono omomorfismi mutuamente inversi: per vedere che $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$, consideriamo $\omega \in H^0(Y, \Omega^p_Y)$.

... □

È importante tenere a mente che gli altri numeri di Hodge **non** sono invarianti birazionali.

1.29. Esempio. — Consideriamo il blow-up $\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2$ del piano proiettivo in un punto $p \in \mathbb{P}^2$. Questo è birazionale a $\mathbb{P}^2$, ma possiamo vedere dal diamante di Hodge che

$$h^{1,1} = b_2(\mathbb{P}^2) = 1\,, \quad h^{1,1} = b_2(\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2) = 2\,. \tag{1.29.1}$$

Intersezione tra divisori e curve

Per X una curva proiettiva liscia, abbiamo la funzione **grado**

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad \sum_i m_i D_i \longmapsto \sum_i m_i\,. \tag{1.29.2}$$

Vogliamo qualcosa di simile per una varietà X di dimensione qualsiasi. Dato D un divisore di Cartier su X e C una curva irriducibile in X, vogliamo definire un **prodotto d'intersezione**

$$D \cdot C \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.29.3}$$

Dato che D è Cartier, $\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$. Ora:

- se C è **liscia**, allora $\mathcal{O}_X(D)|_C \in \mathrm{Pic}(C)$ e quindi ha un grado ben definito, per cui poniamo $D \cdot C := \deg \mathcal{O}_X(D)|_C$. Osserviamo che, se $C \not\subseteq \mathrm{supp}\, D$, allora $D|_C$ è un divisore su C e $\deg D|_C = D \cdot C$, usando il fatto che $\mathcal{O}_C(D|_C) = \mathcal{O}(D)|_C$;
- se C è **singolare**, prendo la normalizzazione della curva $\widetilde{\nu} : C^\nu \xrightarrow{\nu} C \hookrightarrow X$ e poniamo $D \cdot C = \deg_{C^\nu}(\widetilde{\nu}^* \mathcal{O}_X(D))$.

1.30. Osservazione. — Ricapitolando, per un divisore di Cartier D e una curva irriducibile X abbiamo i casi:

1. ...

Denoteremo con $Z_1(X)$ il gruppo abeliano degli 1-cicli su X, i cui elementi sono della forma $\sum_i m_i C_i$, con $m_i \in \mathbb{Z}$ e C_i curva irriducibile su X. Abbiamo un'applicazione bilineare

$$\mathrm{CaDiv}(X) \times Z_1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \quad \left(D, \sum_i m_i C_i\right) \longmapsto \sum_i m_i (D \cdot C_i)\,. \tag{1.30.1}$$

1.31. Definizione. — Due divisori di Cartier D_1 e D_2 su X sono **numericamente equivalenti** se, per ogni $C \subset X$ curva irriducibile, vale $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$. Scriviamo allora $D_1 \equiv D_2$.

Se $D_1 \sim D_2$ allora $D_1 \equiv D_2$, ma il viceversa è falso.

1.32. Esempio. — Sia E la curva ellittica in $\mathbb{P}^2$ definita dall'equazione omogenea $y^2z = x^3 - xz^2$. Siano $O = [0:1:0], P = [0:0:1]$ e $Q = [1:0:1]$, allora $D_1 = P - O$ e $D_2 = Q - O$ sono due divisori con $\deg D_1 = \deg D_2 = 0$, quindi $D_1 \equiv D_2$. Tuttavia, su una curva ellittica abbiamo la **mappa di Abel-Jacobi**, cioè l'isomorfismo[2]

$$a : E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(E)\,, \quad p \longmapsto \mathcal{O}_E(p - O)\,. \tag{1.32.1}$$

Quindi, dato che $P \neq Q$, per iniettività di a segue che $a(Q) \neq a(P)$, da cui deduciamo che $P - O \nsim Q - O$, quindi i due divisori non sono linearmente equivalenti.

1.33. Proposizione. — *Sia X una varietà proiettiva liscia. Allora $D \equiv 0$ se e solo se $c_1(D)$ è di torsione in $H^2(X;\mathbb{Z})$.*

Idea della dimostrazione. È un risultato profondo, per cui bisogna combinare i risultati giusti della Teoria di Hodge: per il **Teorema** $(1,1)$ **di Lefschetz**, sappiamo che $c_1(D) \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X;\mathbb{Z})$. Usando la **dualità di Poincaré** e il **Teorema dell'indice di Hodge**, segue che $c_1(D) = 0$ in $H^2(X;\mathbb{R})$, da cui segue che $c_1(D)$ è di torsione quando si torna a coefficienti interi.

Per l'implicazione opposta, consideriamo D_1, D_2 sono divisori su X tali che esista $m \in \mathbb{N}$ per cui $mc_1(D_1) = mc_1(D_2)$. Per ogni $C \subset X$ curva liscia, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, "-|_C"'] & H^2(X;\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ \mathrm{Pic}(C) \arrow[r, "\deg"] & H^2(C;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\,, \end{tikzcd} \tag{1.33.1}$$

grazie al quale si nota che $D_1 \cdot C = \deg_C(\mathcal{O}_X(D_j)|_C) = c_1(D_j)|_C$. Adesso, sapendo che

$$m\,(c_1(D_1)|_C) = (m\,c_1(D_1)|_C) = (m\,c_1(D_2)|_C) = m\,(c_1(D_2)|_C)\ , \tag{1.33.2}$$

ed essendo un'equazione in $\mathbb{Z}$, allora $c_1(D_1)|_C = c_1(D_2)|_C$, ma essendo su una curva C questo equivale a $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$. $\square$

Come conseguenza, notiamo che tutto ciò che sta in $\mathrm{Pic}^0(X)$ è numericamente banale:

$$\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}^0(X) \quad \Longrightarrow \quad D \equiv 0\,. \tag{1.33.3}$$

Infatti, dalla successione esponenziale deduciamo che, se $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$ e $H^2(X;\mathbb{Z})$ è senza torsione, allora l'equivalenza numerica coincide con l'equivalenza lineare. In particolare, se X è **razionale**, allora $\sim$ coincide con $\equiv$: infatti, se X è birazionale a $\mathbb{P}^n$, per il **Vanishing di Kodaira** sappiamo che

$$h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0\,, \quad \text{se } i > 0\,, \tag{1.33.4}$$

[2] In generale, se $g(C) > 1$ la mappa è definita, ma vale solo l'iniettività.

quindi dall'invarianza birazionale dei $h^{0,p}$ si deduce che

$$h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0 = h^2(X, \mathcal{O}_X)\,, \tag{1.33.5}$$

da cui abbiamo $\mathrm{Pic}^0(X) = 0$. Quindi la successione esponenziale mostra che

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq NS(X) \simeq H^2(X; \mathbb{Z})\,, \tag{1.33.6}$$

che è un modulo libero, allora ???

1.34. Definizione. — Definiamo il reticolo

$$N^1(X)_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Div}(X)/\equiv = \mathrm{Pic}(X)/\equiv \simeq NS(X)/torsione \simeq \mathbb{Z}^{\rho(X)} \tag{1.34.1}$$

e poniamo $N^1(X) := N^1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\rho(X)}$ lo spazio dei divisori a coefficienti reali, modulo l'equivalenza numerica.

Il prodotto d'intersezione $\mathrm{Div}(X) \times Z_1(X) \to \mathbb{Z}$ passa al quoziente per l'equivalenza lineare, definendo un'applicazione bilineare non degenere

$$N^1(X) \times N_1(X) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \tag{1.34.2}$$

dove $N_1(X) := (Z_1/\equiv) \otimes \mathbb{R}$. Si dimostra che $N_1(X)$ e $N^1(X)$ sono in dualità.

1.35. Esempio. — Sia $X = \mathbb{P}^n$, $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva irriducibile e $H \subset \mathbb{P}^n$ un iperpiano che non contiene C. In questo caso

$$C \cdot H = \deg H|_C = |H \cap C|\,. \tag{1.35.1}$$

Dato che il primo carattere di Chern induce un isomorfismo

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}H \xrightarrow{\sim} H^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})\,, quad\mathcal{O}(D) \longmapsto \deg D\,, \tag{1.35.2}$$

e quindi l'equivalenza numerica coincide con quella lineare. Poiché per ogni divisore D si ha $D \sim (\deg D)H$, vediamo che

$$D \cdot C = (\deg D)(\deg C)\,; \tag{1.35.3}$$

posta $\ell \subset \mathbb{P}^n$ una retta, indichiamo $[\ell]$ la sua classe di equivalenza numerica, e quindi abbiamo

$$N^1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}[H]\,, \quad N_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}[\ell]\,. \tag{1.35.4}$$

LEZIONE 2
26 nov., 2025

Varietà unirigate e razionalmente connesse

Sia X una varietà proiettiva su $\mathbb{C}$.

1.36. Definizione. — Una curva irriducibile $C \subset X$ si dice **razionale** se la sua normalizzazione $C^\nu \simeq \mathbb{P}^1$.

Per quanto abbiamo visto nelle scorse lezioni, possiamo dire equivalentemente che una curva C è razionale se e solo se è birazionale a $\mathbb{P}^1$: infatti, se $C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ è una mappa birazionale, componendo con la normalizzazione si ottiene $C^\nu \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ mappa birazionale, che per le curve lisce è equivalente alla nozione di isomorfismo.

1.37. Osservazione. — Un curva razionale C è l'immagine di un morfismo non costante

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu"'] & & X \\ & C \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd} .$$

1.38. Definizione. — Una varietà X si dice **unirigata** se, per ogni $x \in X$, esiste una curva razionale C che passa per x.

1.39. Esempio. — Lo spazio proiettivo $X = \mathbb{P}^n$ è una varietà unirigata.

1.40. Osservazione. — Essere unirigata è un invariante birazionale.

1.41. Corollario. — *Se X è razionale, allora X è unirigata.*

1.42. Esempio. — Il viceversa del **Corollario 1.41** è falso: infatti, presa C una curva proiettiva liscia di genere $g \geq 1$, allora $X = \mathbb{P}^1 \times C$ è unirigata, infatti basta considerare le curve della forma $C = \mathbb{P}^1 \times \{pt.\}$, ma non può essere razionale per via dei suoi numeri di Hodge esterni: infatti, per dualità di Serre

$$g = h^1(\mathcal{O}_C) = h^0(\Omega^1_C) > 0\,,$$

quindi esiste una 1-forma regolare $\omega \neq 0$ su C; da questa otteniamo una 1-forma regolare $\mathrm{pr}_C^* \omega \in H^0(X, \Omega_X)$, da cui concludiamo che $h^{0,1}(X) \neq 0 = h^{0,1}(\mathbb{P}^2)$.

Sia $f : \mathbb{P}^1 \to X$ un morfismo non costante. Per il **Teorema di Grothendieck** sappiamo che

$$f^*\mathcal{T}_X \simeq \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)\,, \quad \text{con } a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \text{ interi}\,,$$

e dato che $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(2)$, possiamo dedurre che $a_1 \geq 2$: infatti

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)) = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}(a_i)) \simeq \bigoplus_{i=1}^n H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a_i - 2))\,;$$

affinché la mappa sia non nulla, abbiamo quindi bisogno che esista almeno un $a_i \geq 2$.

1.43. Definizione. — Sia $r > 0$ intero. Una curva razionale $f : \mathbb{P}^1 \to X$ è r**-free** se $f^*\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}(-r)$ è globalmente generato. Per $r = 0$, chiamiamo f **free**, per $r = 1$ chiamiamo f **very free**.

L'idea è che, più è grande r, più il fascio è globalmente generato e quindi aumenta la positività del fascio, quindi in altri termini aumentano le sezioni globali e questo dà molta più libertà di deformare la curva razionale, persino fissando dei punti sulla curva!

1.44. Proposizione. — *Sia X varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$. Allora X è unirigata se e solo se ammette una curva razionale free.*

1.45. Esempio. — Se X ha K_X nef, allora non esistono curve razionali free: infatti, se per assurdo esistesse $f : \mathbb{P}^1 \to X$ free, allora

$$f^*K_X = -\det(f^*\mathcal{T}_X) = \mathcal{O}(-a_1 - a_2 - \cdots - a_n)\,.$$

Per aggiunzione allora possiamo calcolare

$$K_X \cdot f_*C = f^*K_X \cdot C = -a_1 - \cdots - a_n\,;$$

sapendo che $f^*\mathcal{T}_X$ è globalmente generato, allora ogni $a_i \geq 0$, e inoltre $a_1 \geq 2$ per l'osservazione precedente, quindi $K_X \cdot f_*C < 0$, contraddicendo l'ipotesi di nefness.

1.46. Esempio. — Ogni curva razionale di $\mathbb{P}^n$ è very free. Infatti, $\det(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}) = \mathcal{O}(n+1)$ è ampio e, dato che una curva razionale è data da un morfismo finito $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, allora $\det(f^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n})$ è ancora ampio, da cui si può dedurre che

$$f^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)\,, \quad \text{con ogni } a_i > 0\,,$$

da cui deduciamo che $f^*\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}(-1)$ è globalmente generato. [3]

1.47. Definizione. — Sia X varietza proiettiva su $\mathbb{C}$. Diciamo che X è **razionalmente connessa** se, per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in X$, esiste una curva razionale per x_1 e x_2.

1.48. Teorema. — *Una varietà X è razionalmente connessa se e solo se X contiene una curva razionale very free.*

1.49. Remark. — L'idea della dimostrazione, come quella per l'unirazionalità, è quella di considerare l'insieme delle curve razionali che passano per due punti e mostrare che questo insieme contiene un aperto non vuoto. In breve, basta mostrare il risultato per una curva generica in un aperto denso; questo mostra anche che essere razionalmente connessi è un *invariante birazionale.*

1.50. Teorema. — *Se X è una varietà razionale, allora è anche razionalmente connessa.*

1.51. Proposizione. — *Sia X varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$. Se X è razionalmente connessa, allora:*

i) per ogni $m, p > 0$ interi, allora $H^0\left(X, (\Omega_X^p)^{\otimes m}\right) = 0$;

ii) X non ha rivestimenti connessi étale finiti non banali;

iii) X è semplicemente connessa.

Dimostrazione. Sia X razionalmente connessa.

i) Per ipotesi, esiste $f : \mathbb{P}^1 \to X$ curva very free per un punto generale di X. Allora, $f^*\Omega_X^p = (f^*\mathcal{T}_X)^\vee$ è somme diretta di fibrati lineari di grado negativo: segue che $H^0(\mathbb{P}^1, f^*\Omega_X^p) = 0$. Se $\omega \in H^0(X, \Omega_X^p)$, allora $f^*\omega \in H^0(\mathbb{P}^1, f^*\Omega_X^p) = 0$, quindi $f^*\omega = 0$. Questo implica che la restrizione di ω sulla curva $f(\mathbb{P}^1)$ è identicamente nulla; dato che ω si annulla su tutte le curve very free che coprono X, allora $\omega = 0$.

[3] Per i dettagli sul collegamento tra line bundles e positività, si guardi il Lazarsfeld, "*costruzione di Lutowski*".

ii) Per dualità, sappiamo che $H^0(X, \Omega^p_X) = H^p(X, \mathcal{O}_X)$, quindi per il punto $i)$ sappiamo che $\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Se $\pi : Y \to X$ è un rivestimento étale finito, allora si può vedere che le curve very free si sollevano, e in particolare che Y è a sua volta razionalmente connessa. Ma allora $\chi(\mathcal{O}_Y) = 1$, da cui deduciamo che

$$1 = \chi(\mathcal{O}_Y) = \deg \pi \cdot \chi(\mathcal{O}_X) = \deg \pi\,,$$

ma allora π è un isomorfismo.

iii) Omessa.

□

Congettura. — *Se* $H^0\left(X, (\Omega_X)^{\otimes m}\right) = 0$ *per ogni* $m > 0$*, allora* X *è razionalmente connessa. Si sa che la congettura è vera per* $\dim X \leq 3$*.*

1.52. Corollario. — *Se* X *è razionalmente connessa, allora l'equivalenza lineare e l'equivalenza numerica coincidono.*

Dimostrazione. Proviamo che, se $D \equiv D'$, allora $D \sim D'$ (l'altra implicazione è sempre vera). Dalla scorsa lezione sappiamo che $c_1(D - D')$ è di torsione in $H^2(X; \mathbb{Z})$, ma se X è razionalmente connessa, la parte $ii)$ della **Proposizione 1.51** sappiamo che il secondo gruppo di coomologia è senza torsione, quindi $D - D' \in \ker c_1$. Per la parte $i)$ della **Proposizione 1.51** sappiamo che c_1 è iniettiva, da cui $D \sim D'$. □

1.53. Teorema (Kóllar, Miyaka, Mori). — *Ogni varietà di Fano liscia è razionalmente connessa.*

1.54. Corollario. — *Se* X *è di Fano, allora* $D \sim D$ *se e solo se* $D \equiv D'$*.*

Cono relativo di curve

Sia $N_1(X) = Z_1(X)/\equiv$ lo spazio degli 1-cicli su X, modulo l'equivalenza numerica, e scriviamp $NE(X)$ per il cono convesso generato dalle classi di curve effettive. La sua chiusura è il **cono di Mori**

$$\overline{NE}(X) = \overline{\left\{ \sum a_i [C_i] \;\middle|\; a_i \geq 0,\, C_i \subset X \text{ curva irriducibile} \right\}} \subset N_1(X)\,. \tag{1.54.1}$$

Sia $f : X \to Y$ un morfismo tra varietà proiettive normali. Questa induce un omomorfismo $f_* : Z_1(X) \to Z_1(Y)$ nella seguente maniera: data $C \subset X$ una curva irriducibile, se C viene contratta da f, i.e. $f(C) = \{pt.\}$, allora $f_*(C) = 0$; se $f_*(C) \subset Y$ è una curva, allora $f_*C = mf(C)$, dove $m = \deg f|_C \in \mathbb{Z}$. Allora il **pushforward** si ottiene estendendo f_* per linearità su tutto $Z_1(X)$. Inoltre, il pushforward passa al quoziente per l'equivalenza lineare, quindi induce le mappe lineari

$$f_* : N_1(X) \longrightarrow N_1(Y)\,, \quad f^* : N^1(Y) \longleftrightarrow N^1(X)\,,$$

dove il pullback sulle classi dei divisori di Cartier è dato da $f^*[D] := [f^*(D)]$. Queste mappe sono legate dalla seguente formula:

1.55. Proposizione (Formula di proiezione). — *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà proiettive normali. Data $C \subset X$ curva e D un divisore di Cartier su Y, allora vale*

$$f^*D \cdot C = D \cdot f_*C \,. \tag{1.55.1}$$

1.56. Osservazione. — Se f è un morfismo suriettivo, allora f^* è iniettiva e f_* è surgettiva. Infatti, per ogni curva $C \subset Y$, esiste una curva $C' \subset X$ tale che $f(C') = C$ e quindi sappiamo che esiste $m > 0$ tale che $f_*([C']) = m[C]$. Dalla surgettività di f_* segue che $\dim \ker f_* = \rho_X - \rho_X$; dalla formula di proiezione si deduce che $\ker f^* \perp \operatorname{im} f_*$, ma avendo $\operatorname{im} f_* = N_1(Y)$, concludiamo che $\ker f^* = 0$.

1.57. Definizione. — Sia $f : X \to Y$ un morfismo tra varietà proiettive normali. Il **cono relativo di** f è il sottocono $NE(f)$ di $NE(X)$ generato dalle classi di equivalenza numerica di curve contratte da f, cioè

$$NE(f) := \ker f_* \cap \overline{NE}(X) \,.$$

1.58. Osservazione. — Dalla formula di proiezione, una curva irriducibile C su X è contratta da f se e solo se $f_*[C] = 0$. Equivlentemente, se A è un divisore ampio su Y, allora C è contratta da f se e solo se $f^*A \cdot C = 0$. La morale è che la proprietà di **essere contratta** è una proprietà *numerica* delle curve.

1.59. Definizione. — Un sottocono F di un cono $\mathcal{C}$ è una **faccia estremale** se, per ogni $a, b \in \mathcal{C}$, se $a + b \in F$, allora sia a, sia b appartengono a F. Una faccia è un **raggio estremale di** $\mathcal{C}$ se genera uno spazio vettoriale 1-dimensionale.

1.60. Definizione. — Un morfismo surgettivo $f : X \to Y$ tra varietà proiettive normali viene detto **contrazione** se le fibre di f sono connesse.

1.61. Lemma (Lemma di rigidità). — *Se $f : X \to Y$ una contrazione tra varietà proiettive normali, allora $NE(f)$ è una faccia estremale di $\overline{NE}(X)$. Se Y' è una varietà normale e $f' : X \to Y'$ è un morfismo tale che $NE(f) \subset NE(f')$, allora esiste un'unico morfismo $g : Y \to Y'$ che fa commutare il triangolo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & Y' \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} .$$

In altri termini, il cono relativo determina f (a meno di isomorfismi g).

1.62. Esempio. — Vedremo un esempio sulla decomposizione di conic bundles più avanti.

1.63. Esempio. — Il blow-up $f : \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ è una contrazione che contrae il divisore eccezionale E. Dunque il cono relativo è $NE(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}[E]$. Sappiamo che $\rho_{\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2} = 2$, e infatti il gruppo di Picard è $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E$, dove $H := f^*\ell$, con ℓ retta in $\mathbb{P}^2$. Detta $\widetilde{\ell} \subset \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2$ la trasformata stretta di una retta in $\mathbb{P}^2$ passante per p, notiamo che l'anticanonico $-K_{\mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2} = 3H - E$ dà

$$-K_X \cdot \widetilde{ell} > 0 \,. \tag{1.63.1}$$

La prossima volta vedremo il **Teorema delle contrazioni**, che ci garantisce l'esistenza di una contrazione $\widetilde{f}$ che contrae le rette $\widetilde{\ell}$, dando così origine a

$$\widetilde{f} : \mathrm{Bl}_p \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1 ,$$

il cui cono relativo è $NS(\widetilde{f}) = \mathbb{R}_{\geq 0}[\widetilde{\ell}]$.