

Appunti su

Spazi di Moduli

Docente
Prof. Arvid Perego

Scritti da
Filippo Papallo

A.A. 2025/26
Università di Genova

Questo documento ha lo scopo di raccogliere vari appunti tratti dagli incontri con il mio relatore, Prof. **Arvid Perego**, durante il mio ultimo anno di dottorato. Nel corso dell'anno accademico 2025/26, l'obiettivo è quello di studiare più in profondità la teoria degli spazi di moduli, sia dal punto di vista classico, sia dal linguaggio moderno introdotto da Bridgeland in [\[Bri08\]](#).

Ultimo aggiornamento: 12/11/2025

Indice

Lista delle lezioni	iv
1. Spazi di moduli classici	1
Filtrazioni	3
Harder-Narasimhan	3
2. Condizioni di stabilità di Bridgeland	6
Motivazioni	6
Stabilità su curve	8
Condizioni di stabilità di Bridgeland	11
i) Stabilità di King	11
ii) Stabilità di Bridgeland originale	13
Lo spazio delle condizioni di stabilità	16
Spazi di moduli	18
Wall-crossing	20
Condizioni di stabilità su superfici	20
Coppie di torsione	23
Wall-crossing per stabilità di Bridgeland	25
La teoria di Brill-Noether	29
Il problema di Weak Brill-Noether via Bridgeland	30
3. Introduzione alle geometria birazionale	33
Forme differenziali	33
La successione esponenziale	36
Il caso delle curve	38

Lista delle lezioni

Lezione 1 (17 settembre, 2025)	1
Introduzione alla teoria dei moduli.	
Lezione 2 (24 settembre, 2025)	1
Moduli di oggetti (semi)stabili come soluzioni di un problema GIT.	
Lezione 3 (9 ottobre, 2025)	3
.	
Lezione 4 (30 settembre, 2025)	6
Inquadramento storico e motivazione che ha portato alla formulazione delle condizioni di stabilità su categorie triangolate da parte di T. Bridgeland.	
Lezione 5 (7 ottobre, 2025)	11
.	
Lezione 6 (14 ottobre, 2025)	16
Costruzione dello spazio delle condizioni di stabilità di Bridgeland. Contestualizzazione dei problemi di rappresentabilità. Cenni di wall-crossing.	
Lezione 7 (21 ottobre, 2025)	20
Costruzione di condizioni di stabilità di Bridgeland per superfici, prendendo come esempio il caso K3. Tecnica di tilting per cuori di t -strutture per la costruzione di opportuni cuori per le condizioni di stabilità.	
Lezione 8 (4 ottobre, 2025)	25
Applicazione della teoria di Bridgeland per lo studio del problema di Weak Brill-Noether.	
Lezione 9 (12 novembre, 2025)	33
.	

CAPITOLO 1.

1

Spazi di moduli classici

LEZIONE 1 INRI

17 set., 2025

(DEVO ANCORA SCRIVERE GLI APPUNTI).

LEZIONE 2

24 set., 2025

Abbiamo quindi visto che aggiungendo condizioni sul tipo di fasci che vogliamo parametrizzare, si ha più speranza nell'esistenza di buoni spazi di moduli. In particolare, una proprietà che funziona bene è la **stabilità**, di cui ne esistono diverse nozioni, ad esempio:

1. **stabilità di Takemoto-Mumford** o **μ -stabilità**: dato $F \in \mathbf{Coh}(X)$ fascio **torsion-free**, definiamo la sua **pendenza** rispetto a un fibrato lineare ampio H come

$$\mu(F) := \mu_H(F) = \frac{c_1(F) \cdot H}{\mathrm{rk}(F)}, \quad (1.0.1)$$

dove la prima classe di Chern $c_1(F)$ si definisce come $c_1(\det F|_U)$, dove $U \subset X$ è un aperto di Zariski su cui F è localmente libero. Un fascio F si dice **μ -stabile** (resp. **μ -semistabile**) se, per ogni sottofascio proprio non banale $0 \neq F' \subsetneq F$ con $0 < \mathrm{rk}(F') < \mathrm{rk}(F)$, la pendenza cresce:

$$\mu(F') < \mu(F) \quad (\text{resp. } \mu(F') \leq \mu(F)).$$

Se nella definizione di $\mathfrak{M}_P(X, H)$ vi si aggiunge la condizione “ F_s è μ_H -stabile, per ogni $s \in S$ ”, allora il funtore diventa **pro-rappresentabile**!

2. **stabilità di Gieseker-Maruyama** o **H -stabilità**: per ogni fascio coerente $F \in \mathbf{Coh}(X)$ **puro**¹, di $\dim(F) = d$, andiamo a considerarne il polinomio di Hilbert rispetto a un fibrato ampio H

$$P_H(F) := \chi(F \otimes \mathcal{O}_X(nH)) = \alpha_d n^d + \text{altri termini...} \quad \text{per } n \gg 0,$$

e lo rendiamo monico, introducendo così il **polinomio di Hilbert ridotto** $p_H(F) := P_H(F)/\alpha_d$. Diremo che F è **H -stabile** (resp. **H -semistabile**) se, per ogni sottofascio $0 \neq F' \subsetneq F$ si ha

$$p_H(F') < p_H(F) \quad (\text{resp. } p_H(F') \leq p_H(F)), \quad (1.0.2)$$

dove l'ordine è da intendersi come ordinamento lessicografico. Anche in questo caso, gli oggetti H -stabili danno spazi di moduli belli e proiettivi!

¹Dato $G \in \mathbf{Coh}(X)$, si definisce la **dimensione di** G come la dimensione del supporto di G , cioè il sottoschema chiuso $\mathrm{Supp}(G) = \{x \in X \mid G_x \neq 0\}$. Un fascio G si dice **puro** di dimensione d se ogni sottofascio $0 \neq G' \subset G$ ha $\dim(G') = d$.

Ma come mai queste nozioni danno spazi di moduli? Grothendieck aveva scoperto che una condizione necessaria per la rappresentabilità è la **limitatezza**:

1.1. Definizione. — Una famiglia di fasci $\mathcal{F} \subset \mathbf{Coh}(X)$ si dice **limitata** se esiste S uno schema su \mathbb{C} di tipo finito e un fascio $\mathcal{O}_{S \times X}$ -coerente G tale che $\mathcal{F} = \{ F|_{s \times X} \mid s \in U \text{ punto chiuso} \}$, per un determinato *sottoinsieme* $U \subset S$.

Sottolineiamo che U nella definizione è solo un *insieme* che a priori non ha nessuna struttura geometrica. Questa proprietà è più facile da verificare rispetto alla rappresentabilità, grazie a criteri elaborati dallo stesso Grothendieck; uno di questi è legato incredibilmente alla **regolarità di Castelnuovo-Mumford**.

1.2. Proposizione. — Dato H un fibrato lineare ampio su X , se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che ogni $F \in \mathcal{F}$ sia m -regolare rispetto a H , allora \mathcal{F} è limitata.

1.3. Proposizione. — Dato H un fibrato lineare ampio su X e $P \in \mathbb{Q}[x]$, la famiglia

$$\mathcal{F} = \{ F \in \mathbf{Coh}(X) \mid F \text{ è } * \text{-semistabile e } P_H(F) = P \}, \quad (1.3.1)$$

con $*$ = H oppure $*$ = μ , è limitata.

In particolare, questo implica che esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $F \in \mathcal{F}$, il fascio $F \otimes \mathcal{O}_X(mH)$ è globalmente generato, cioè la valutazione è surgettiva:

$$H^0(X, F \otimes \mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_X(-mH) \twoheadrightarrow F.$$

Notiamo inoltre che la dimensione dell' H^0 non dipende da F , infatti per la scelta di m si ha

$$P_H(F)(m) = \chi(F \otimes \mathcal{O}_X(mH)) = \sum_{i=0}^{\dim(F)} (-1)^{-1} h^i(F \otimes \mathcal{O}_X(mH)) = h^0(F \otimes \mathcal{O}_X(mH)),$$

quindi $H^0(X, F \otimes \mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_X(-mH)$ è sempre lo stesso fascio, indipendentemente da F , che denoteremo \mathcal{H}_m . Il vantaggio, ora, è che possiamo vedere un $F \in \mathcal{F}$ qualsiasi come un quoziente $\mathcal{H}_m \twoheadrightarrow F$, ma quindi F è un punto di uno schema \mathbf{Quot} :

$$[F] \in \mathbf{Quot}_X(\mathcal{H}_m, P).$$

1.4. Definizione. — Sia \mathfrak{P} una proprietà di varietà su \mathbb{C} . Diremo che \mathfrak{P} è **aperta** se, per ogni famiglia piatta $f : \mathfrak{X} \rightarrow B$, l'insieme

$$\{ b \in B \mid \mathfrak{X}_b := f^{-1}(b) \text{ verifica } \mathfrak{P} \}$$

è un aperto di B . Analogamente, una proprietà \mathfrak{P} di fasci coerenti su una varietà X è detta **aperta** se, per ogni famiglia piatta $f : \mathfrak{X} \rightarrow B$ e $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(\mathfrak{X})$, l'insieme

$$\{ b \in B \mid \mathcal{F}_b := \mathcal{F}|_{f^{-1}(b)} \text{ verifica } \mathfrak{P} \}$$

è un aperto di B .

1.5. Esempio. — Essere Kähleriana è una proprietà aperta di varietà; essere proiettiva non lo è: si pensi ad esempio allo spazio dei moduli delle K3, dove le K3 proiettive vivono in codimensione 1.

1.6. Esempio. — Essere $*$ -(semi)stabili, con $*$ = H, μ , è una condizione aperta per fasci!

Segue da questo fatto che $R = \{ [F] \in \mathbf{Quot}_X(\mathcal{H}_m, P) \mid F \text{ è stabile} \}$ è un aperto dello schema **Quot**. Tuttavia, quest'ultimo **non** è lo spazio di moduli che stavamo cercando... in effetti, la notazione $[F]$ per un punto di R è un abuso di notazione: infatti, quello che tale schema parametrizza sono classi di equivalenza di **morfismi surgettivi** $[\mathcal{H}_m \rightarrow F]$, che in generale sono molti di più dei fasci stabili che vogliamo classificare. Posto $V := H^0(X, \mathcal{O}_X(mH))$, si noti che $\mathrm{GL}(V)$ agisce per cambio di base su $V \otimes \mathcal{O}_X(-mH)$. L'azione $\mathrm{GL}(V) \curvearrowright V \otimes \mathcal{O}_X(-mH)$ si solleva a un'azione $\mathrm{GL}(V) \curvearrowright \mathcal{H}_m$; in realtà, dato che gli scalari non cambiano la classe di isomorfismo del fibrato, il gruppo che vi agisce è $\mathrm{PGL}(V)$ e si ottiene

$$\begin{aligned} M_H^{ss}(X, P) &= R^{ss} / \mathrm{PGL}(V) \quad \text{buon quoziente,} \\ M_H^s(X, P) &= R^s // \mathrm{PGL}(V) \quad \text{quoziente geometrico!} \end{aligned}$$

LEZIONE 3
9 ott., 2025 Come sempre, sia k un campo algebricamente chiuso k , di caratteristica 0. Consideriamo X uno schema proiettivo connesso su k , fissiamo H un fibrato lineare ampio e $P \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio.

1.7. Teorema. — *Lo spazio dei moduli dei fasci H -semistabili $M_P(X, H)$ esiste ed è uno schema proiettivo.*

Questo risultato è generalissimo. La sua debolezza è che sappiamo solamente che $M_P(X, H)$ è uno schema, ma comunque siamo felici di avere uno schema proiettivo! Questo fatto è una conseguenza della costruzione GIT. Inoltre, le nozioni di **stabilità** coincidono, sia nel senso di Gieseker, sia nel senso GIT (ovvero la condizione sulle orbite).

Ma cerchiamo ora di capire cosa rappresentano i punti di questi schemi.

Filtrazioni

Harder-Narasimhan

Sia X come sopra.

1.8. Teorema (Harder-Narasimhan, 1975). — *Per ogni fascio $F \in \mathbf{Coh}(X)$, esiste un'unica filtrazione*

$$0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1} \subsetneq F_l = F$$

tale che, per ogni $0 < i \leq l$, ogni fattore E_i/E_{i-1} sia H -semistabile e si abbia pendenza decrescente $p_H(F_i/F_{i-1}) > p_H(F_{i+1}/F_i)$.

Lo stesso risultato vale per la μ -stabilità: nell'enunciato del teorema possiamo rimpiazzare ' H -semistabili' con ' μ -semistabili' e il polinomio di Hilbert ridotto p_H con la pendenza μ . Nel

seguito useremo solo la stabilità di Gieseker, ma va ricordato che risultati analoghi valgono anche per la slope stability.

Quindi, per capire i fasci su uno schema proiettivo connesso X è sufficiente classificare i suoi fasci semistabili (in un qualsiasi senso). Ma possiamo decomporre ulteriormente i fasci semistabili in *fattori stabili*:

1.9. Teorema (Filtrazione di Jordan-Hölder). — Dato $F \in \mathbf{Coh}(X)$ un fascio H -semistabile, esiste una filtrazione (non unica!)

$$0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1} \subsetneq F_l = F$$

tale che, per ogni $0 < i \leq l$, ogni fattore F_i/F_{i-1} sia H -stabile e tutti i termini abbiano lo stesso polinomio $p_H(F) = p_H(F_i/F_{i-1}) = p_H(F_{i+1}/F_i)$.

Quindi è sufficiente classificare solo i **fasci stabili**? Non proprio, perché abbiamo appena detto che questa filtrazione **non** è unica... Quindi dobbiamo considerarla a meno di una certa relazione di equivalenza: si dimostra che, se

$$0 = F'_0 \subsetneq F'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F'_{s-1} \subsetneq F'_s = F$$

è un'altra filtrazione di JH per F , allora $l = s$ e, per ogni $1 \leq i \leq l$, esiste un unico $1 \leq j \leq l$ tale che

$$F_i/F_{i-1} \simeq F'_j/F'_{j-1}. \quad (1.9.1)$$

Quindi a essere unico è il **graduato di Jordan-Hölder** associato a F , cioè il fascio di moduli graduati

$$gr_{JH}(F) = \bigoplus_{i=1}^l gr_{JH}^i(F) := \bigoplus_{i=1}^l F_i/F_{i-1}.$$

1.10. Definizione. — Due fasci H -semistabili F e F' sono **S-equivalenti** se e solo se

$$gr_{JH}(F) \simeq gr_{JH}(F').$$

Si deduce che i punti chiusi di $M_P(X, H)$ parametrizzano le **classi di S-equivalenza** dei fasci H -semistabili di polinomio di Hilbert fissato P , mentre $M_P^S(X, H)$ rappresenta le classi di S-equivalenza di fasci stabili, che però coincidono con le classi di **isomorfismo** di fasci stabili di polinomio fissato P .

Allora adesso possiamo concludere che $M_P^S(X, H)$ è uno schema che rappresenta il funtore dei fasci stabili? Purtroppo no... Cerchiamo di capire cosa impedisce la rappresentabilità del funtore $\mathfrak{M}_H(X, P)$.

Proposizione. — Per ogni $F \in \mathbf{Coh}(X)$, esiste una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

con E, G fasci H -stabili su X e $p_H(E) = p_H(G)$, e esiste $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X \times \mathbb{A}^1)$ una famiglia di fasci \mathbb{A}^1 -piatta tale che

$$\mathcal{F}|_0 \simeq E \oplus G, \quad \mathcal{F}|_t \simeq F, \quad \text{per ogni } t \neq 0.$$

Corollario. — *Il funtore $\mathfrak{M}_H(X, P)$ non è rappresentabile.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathfrak{M}_H(X, P)$ sia rappresentato da uno schema M . L'inclusione $\iota : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ induce una funzione $\mathfrak{M}_H(X, P)(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{M}_H(X, P)(\mathbb{A}^1)$, che per rappresentabilità corrisponde alla precomposizione con l'incusione

$$- \circ \iota : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathbb{A}^1, M) .$$

Ora, notiamo che l'immagine di $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}} \in \mathfrak{M}_H(X, P)(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\})$ attraverso questa funzione è $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_H(X, P)(\mathbb{A}^1)$. Tuttavia, $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}}$ è la famiglia che vale costantemente F sull'aperto $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, quindi per continuità si estende alla famiglia costante \underline{F} su tutta la retta \mathbb{A}^1 , ma questo contraddice il fatto che l'estensione sia \mathcal{F} , che non è costante. \square

Tuttavia ci sono dei casi in cui possiamo concludere che il funtore dei fasci stabili $\mathfrak{M}_H^s(X, P)$ è rappresentabile. Per enunciarlo, abbiamo bisogno di parlare di un altro fatto. Solitamente, leggendo gli articoli, in generale non si fissa $P \in \mathbb{Q}[t]$, ma è consuetudine fissare degli **invarianti numerici**. Adesso assumiamo che X sia uno schema proiettivo **liscio**². In questo caso, possiamo considerare il **gruppo di Grothendieck numerico** di X

$$K_{num}(X) := K_0(X)/T , \tag{1.10.1}$$

ottenuto quozientando il gruppo di Grothendieck $K_0(X) = K(\mathbf{Coh}(X))$ per il sottogruppo

$$T := \{ [E] \in K_0(X) \mid \forall_{a \in K_0(X)} \chi([E], a) = 0 \} ;$$

in questo modo, la caratteristica di Eulero χ definisce un pairing su $K_{num}(X)$. Dato $E \in \mathbf{Coh}(X)$, gli associamo $c(E) \in K_{num}(X)$. Osserviamo che, per definizione di $P_H(F)$, questo dipende dalla polarizzazione X e dal carattere di Chern: quindi fasci con stesso ch danno lo stesso polinomio. Notiamo che, se $[E] \in T$, allora per ogni fascio $G \in \mathbf{Coh}(X)$ Hirzebruch-Riemann-Roch ci dà

$$\chi(E, G) = - \int_X \mathrm{ch}(E) \mathrm{ch}(G)^\vee$$

$$\mathrm{ch} : K_{num}(X) \tag{1.10.2}$$

²Per il caso singolare dobbiamo capire quale sia il setting giusto; forse ce la possiamo cavare con il gruppo di Grothendieck dei **complessi perfetti**.

CAPITOLO 2.

Condizioni di stabilità di Bridgeland

2

LEZIONE 4
30 set., 2025

Motivazioni

Come sostiene sempre Arvid, per poter capire a fondo alcuni concetti matematici e il perché di alcune definizioni, è necessario capire il contesto storico in cui sono nate e le motivazioni che vi stanno dietro. Come molte teorie della matematica moderna, le ragioni dietro le condizioni di stabilità di Bridgeland vanno ricercate nella *fisica*, dove già era importante il concetto di **stabilità di fibrati vettoriali**.

Data M una varietà C^∞ e E un fibrato vettoriale C^∞ complesso su M , si può definire su esso una **connessione** D , cioè una mappa $C^\infty(M)$ -lineare

$$D : A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$$

che può a sua volta essere estesa a una $D : A^1(E) \rightarrow A^2(E)$ grazie alla quale si definisce l'**operatore di curvatura** $R_D := D \circ D$.

Fatto. — *Questo operatore può essere interpretato come $R_D \in A^2(\text{End}(E))$.*

In geometria complessa siamo interessati a varietà *più ricche*: se X è una varietà olomorfa e E un fibrato vettoriale C^∞ complesso su X , allora abbiamo la decomposizione di Hodge

$$A^1(E) = A^{1,0}(E) \oplus A^{0,1}(E),$$

da cui si deduce una decomposizione $D = D^{1,0} + D^{0,1}$, per una qualsiasi connessione D su X .

Definizione. — Una connessione D si dice **compatibile** con la struttura complessa su X se $D^{0,1} = \bar{\partial}$.

Fatto. — *Nel caso D sia compatibile, l'operatore di curvatura $R_D \in A^{1,1}(\text{End}(E))$.*

Quando studiamo un fibrato vettoriale complesso E , possiamo studiare delle **metriche hermitiane** h su di esso; anche in questo caso è si può studiare l'interazione di una connessione rispetto a una metrica:

Definizione. — Se h è una matrice hermitiana su E , una connessione D si dice **compatibile con h** se, per ogni $a, b \in A^0(E)$ vale

$$D(h(a, b)) = h(Da, b) + h(a, Db).$$

Teorema. — *Dato un fibrato vettoriale complesso E su una varietà olomorfa X e h una metrica hermitiana su E , esiste un'unica connessione D_h , detta **connessione di Chern**, compatibile sia con la struttura complessa di X , sia con h .*

D'altra parte, possiamo considerare una metrica hermitiana g sul tangente complessificato $T_M \otimes \mathbb{C}$ e con questa definire l'**operatore di Hodge** $*_g$ e l'**operatore di Lefschetz** L_g . Grazie all'aggiunto

$$\Lambda_g := *_g^{-1} \circ L_g \circ *_g : A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p-1,q-1}$$

viene definita la sezione $\Lambda_g(R_h) \in A^0(\text{End}(E))$.

Definizione. — La metrica h si dice **g -Hermite-Einstein** se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\Lambda_g(R_h) = \lambda \text{id}_E .$$

La costante λ nella definizione viene talvolta chiamata **costante cosmologica** e ha un'importante interpretazione in fisica: infatti, le connessioni Hermite-Einstein corrispondono alle soluzioni delle **equazioni di Yang-Mills** che descrivono le particelle del modello standard. Inoltre, queste connessioni hanno un inaspettato legame con la geometria algebrica: infatti, data h una metrica hermitiana su E , possiamo considerare la **prima classe di Chern**

$$c_1(E, h) \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Z}) ,$$

che indicheremo solo con $c_1(E)$ poiché, nonostante la 2-forma dipenda da h , la sua classe in coomologia è sempre la stessa. Grazie ad essa, definiamo la **g -slope** del fibrato E come la quantità

$$\mu_g(E) := \frac{c_1(E) \cdot \omega_X^{n-1}}{\text{rk}(E)} \in \mathbb{R} , \quad \text{dove } n = \dim X .$$

Fatto. — *Per h metrica g -Hermite-Einstein si dimostra che $\mu_g(E)$ è essenzialmente la costante cosmologica λ nella definizione, i.e. il rapporto μ_g/λ è una costante che non dipende da E .*

Definizione. — Un fibrato vettoriale olomorfo E su X si dice **μ_g -stabile** se, per ogni sottofascio coerente $0 \neq F \subsetneq E$ vale $\mu_g(F) < \mu_g(E)$. Diremo che E è **μ_g -polistabile** se $E \simeq E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$, dove ogni E_i è μ_g -stabile e $\mu_g(E_1) = \cdots = \mu_g(E_l)$.

Teorema (Corrispondenza di Kobayashi-Hitchin). — *Sia X una varietà Kähler compatta, E un fibrato vettoriale olomorfo su X e g metrica Kähleriana su E . Allora*

$$E \text{ è } g\text{-Hermite-Einstein} \quad \Longleftrightarrow \quad E \text{ è } \mu_g\text{-polistabile} .$$

Questo risultato è difficilissimo!

Altre motivazioni dietro la ricerca delle condizioni di stabilità vanno ricercate: nella **teoria delle stringhe**: a seguito della *homological mirror symmetry* cogetturata da Kontsevich in [Kon95], si è cominciato a pensare che le particelle descritte dalle equazioni di Yang-Mills dovrebbero corrispondere a *qualcosa di stabile* nella categoria derivata dei **fasci coerenti di una varietà**: ecco di nuovo i fasci stabili! In [Dou02], Douglas formalizza il concetto di π -stabilità e sviluppa il collegamento con la mirror symmetry. Tuttavia, i fisici si ritrovano

confusi dal seguente problema: cosa significa prendere un sottofascio di un complesso di fasci? La categoria derivata di una categoria abeliana non è quasi mai abeliana, quindi non ha senso parlare di sottoggetti...

Nel 2002, Tom Bridgeland formalizza per bene in il concetto di **condizioni di stabilità** per una categoria triangolata in una preprint di arXiv (pubblicata poi come [Bri07]), e in [Bri08] dà una teoria fatta e finita per superfici K3.

Imitiamo quello che succede per le curve, di cui conosciamo bene la teoria!

Tra gli strumenti principali ad aver avuto impatto in questa teoria ricordiamo la **filtrazione di Harder-Narasimhan** e gli **spazi di moduli**.

Domanda (di Arvid). — Nello studio della stabilità “classica” interviene lo studio delle metriche sui fibrati che crea un collegamento tra la stabilità in senso *differenziale* e quello *algebrico*. Passando alle condizioni di Bridgeland, questo pezzo viene a mancare? Esiste una qualche nozione di “metrica hermitiana” per complessi di fibrati che permetta di costruire un ponte tra il mondo differenziale e quello algebrico?

Stabilità su curve

Sia C una curva proiettiva liscia su \mathbb{C} . Un problema classico in geometria è la classificazione di tutti i fibrati vettoriali olomorfi $E \rightarrow C$. Nel caso $C = \mathbb{P}^1$ la classificazione è dovuta a **Grothendieck**:

2.1. Teorema. — *Dato E è un fibrato olomorfo su \mathbb{P}^1 , esiste un'unica sequenza di interi $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ e di spazi vettoriali V_1, \dots, V_n tali che*

$$E \simeq (V_1 \otimes \mathcal{O}(a_1)) \oplus \dots \oplus (V_n \otimes \mathcal{O}(a_n)). \quad (2.1.1)$$

Se la dimostrazione di questo fatto si riconduce, essenzialmente, a un problema di algebra lineare, la classificazione per C di genere positivo è stata risolta utilizzando tecniche di *stabilità*.

2.2. Definizione. — Sia C una curva e fissiamo H un fibrato lineare ampio su di essa. Dato E un fibrato olomorfo su C , definiamo la sua **pendenza** (dall'inglese “**slope**”) come

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)},$$

dove $\deg(E) := \deg(\det E)$ è il grado rispetto alla polarizzazione H .

2.3. Fatto. — *Se F è un fascio coerente su una curva C , allora in $\mathbf{Coh}(C)$ esiste una successione esatta corta canonica*

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_F \rightarrow F \rightarrow \mathcal{F}_F \rightarrow 0,$$

dove \mathcal{F}_F è un fascio localmente libero e \mathcal{T}_F è un fascio di torsione. Grazie a questa decomposizione, possiamo definire

$$\mathrm{rk}(F) := \mathrm{rk}(\mathcal{F}_F), \quad \deg(F) = \deg(\mathcal{F}_F) + \mathrm{length}(\mathcal{T}_F).$$

Grazie a questo fatto, possiamo quindi dare un senso alla pendenza $\mu(F)$ di qualsiasi fascio coerente usando la convenzione che, se $\text{rk}(F) = 0$, allora $\mu(F) = +\infty$. Si noti in particolare che $\text{rk}(F) = 0$ implica $\deg(F) = \text{length}(\mathcal{T}_F) > 0$.

2.4. Definizione. — Un fascio $F \in \mathbf{Coh}(C)$ è detto μ -stabile (resp. μ -semistabile) se, per ogni sottofascio $0 \neq F' \subsetneq F$ vale

$$\mu(F') < \mu(F) \quad (\text{resp. } \mu(F') \leq \mu(F)).$$

2.5. Teorema (Harder-Narasimhan, 1975). — Dato $F \in \mathbf{Coh}(C)$, esiste un'unica filtrazione

$$0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1} \subsetneq F_l = F$$

tale che, per ogni $0 < i \leq l$, ogni fattore E_i/E_{i-1} sia μ -semistabile e si abbia pendenza decrescente $\mu(F_i/F_{i-1}) > \mu(F_{i+1}/F_i)$.

Alla luce di questo risultato, per classificare tutti i possibili fibrati su una curva (ma in generale, su una varietà), è sufficiente conoscere tutti i possibili fasci μ -semistabili.

2.6. Esempio. — Se $C = \mathbb{P}^1$, un fibrato E è semistabile se e solo se $E = V \otimes \mathcal{O}(a)$, per un qualche $a \in \mathbb{Z}$ e V spazio vettoriale.

2.7. Esempio. — Se C è una curva ellittica, la classificazione dei fasci μ -semistabili è stata risolta da Atiyah. Se $\gcd(\text{rk}, \deg) = 1$, allora valgono le equivalenze

$$E \text{ è } \mu\text{-semistabile} \iff E \text{ è } \mu\text{-stabile} \iff E \text{ è indecomponibile},$$

e si sa che i fasci indecomponibili sono della forma $E \simeq L \otimes F$, dove $L \in \text{Pic}^0(C)$ e F si ottiene iterando un numero finito di volte estensioni di \mathcal{O}_C . Se $\gcd(\text{rk}, \deg) > 1$, la classificazione è più complicata, ma esiste.

Per genere $g(C) \geq 2$, utilizziamo invece un altro tipo di tecnica: dati $r \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{Z}$, definiamo

$$\mathfrak{M}_C(r, d) : \mathbf{Sch}/C \longrightarrow \mathbf{Set},$$

il funtore che su uno schema S vale

$$\mathfrak{M}_C(r, d)(S) := \left\{ E \text{ fibrato su } C \times S \left| \begin{array}{l} \text{per ogni } s \in S, \\ E_s := E|_{\text{pr}_S^{-1}(s)} \text{ è } \mu\text{-semistabile} \\ \text{e } \text{rk}(E_s) = r, \deg(E_s) = d \end{array} \right. \right\}.$$

2.8. Teorema. — Il funtore $\mathfrak{M}_C(r, d)$ è **pro-rappresentabile** da uno schema $M_C(r, d)$, chiamato **spazio dei moduli** di fasci semistabili (di rango r e grado d). Inoltre, $M_C(r, d)$ è una varietà proiettiva, integrale, normale e localmente fattoriale di dimensione $r^2(g-1) - 1$ e il suo gruppo di Picard è

$$\text{Pic}(M_C(r, d)) \simeq \text{Pic}(\text{Pic}^d(C)) \oplus \mathbb{Z}.$$

Remark. — Si noti che il grado d non entra nella dimensione, conseguenza del fatto che i jacobiani di ogni grado sono tutti isomorfi.

All'interno di $M_C(r, d)$ troviamo lo spazio $M_C^s(r, d)$ che parametrizza i fasci μ -stabili.

Fatto. — Se $\gcd(r, d) = 1$, allora lo spazio dei moduli è liscio e $M_C(r, d) = M_C^s(r, d)$. Se invece $\gcd(r, d) > 1$, allora $M_C(r, d) \setminus M_C^s(r, d)$ è il luogo singolare, che vive in codimensione maggiore o uguale a 2.

Invece di considerare il funtore $\mathfrak{M}_C(r, d)$, è interessante fissare $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$ e studiare il funtore $\mathfrak{M}_C(r, \mathcal{L})$ i cui fasci $E \in \mathfrak{M}_C(r, \mathcal{L})(S)$ hanno, per ogni $s \in S$, il determinante fissato $\det(E_s) = \mathcal{L}$; anche in questo caso lo spazio dei moduli $M_C(r, \mathcal{L})$ esiste come schema proiettivo e ha dimensione $(r^2 - 1)(g(C) - 1)$, esiste un divisore ampio θ tale che $\text{Pic}(M_C(r, \mathcal{L})) \simeq \mathbb{Z}\theta$ e $K_{M_C(r, \mathcal{L})} \simeq -2u\theta$, con $u = \gcd(r, d)$.

Nel caso in cui, al posto di una curva C andiamo a considerare una varietà di dimensione maggiore, la situazione diventa più complicata. Noi saremo maggiormente interessati al caso in cui X è una superficie complessa, compatta (probabilmente anche proiettiva). Anche in dimensione più alta, la filtrazione di Harder-Narasimhan 2.5 continua a esistere, ma abbiamo un'altra filtrazione molto utile, che ci permette di ridurre il problema della classificazione dei fasci μ -semistabili solamente a quelli μ -stabili.

2.9. Teorema (Filtrazione di Jordan-Hölder). — Sia F un fascio semistabile su X . Esiste una filtrazione (non unica!)

$$0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{l-1} \subsetneq F_l = F$$

tale che le sue componenti graduate $gr_i(F) := F_i/F_{i-1}$ siano μ -stabili, con stessa pendenza $\mu(gr_i(E)) = \mu(E)$, per ogni $0 < i \leq l$. Inoltre, il fascio graduato $gr(F) := \bigoplus_{i=1}^l gr_i(F)$ non dipende dalla filtrazione scelta.

Parallelamente, si possono studiare altre nozioni di stabilità, diverse dalla μ -stabilità, come ad esempio la **stabilità di Gieseker**, definita in (1.0.2): anche in questo caso otteniamo filtrazioni analoghe a quella di Harder-Narasimhan e Jordan-Hölder.

2.10. Remark. — Nel caso $X = C$ sia una curva, le nozioni di μ -stabilità e Gieseker stabilità coincidono, infatti, dato $F \in \mathbf{Coh}(C)$ un fascio, possiamo calcolare il polinomio di Hilbert di F rispetto a un fibrato H di classe $h \in H^2(C; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ fissato grazie a **Hirzebruch-Riemann-Roch** come

$$\begin{aligned} P_H(F)(n) &= \int_X \text{ch}(F \otimes \mathcal{O}_X(nH)) \smile \text{td}(X) \\ &= \int_X \text{ch}(F) \smile \text{ch}(\mathcal{O}_X(nH)) \smile \text{td}(X) \\ &= \int_X (\text{rk}(F), \deg(F)) \smile (1, hn) \smile (1, 1 - g) \\ &= \int_X (\text{rk}(F), \text{rk}(F)hn + \deg(F)) \smile (1, 1 - g) \\ &= \int_X (\text{rk}(F), \text{rk}(F)hn + \deg(F) + (1 - g) \text{rk}(F)) \\ &= h \text{rk}(F)n + \deg(F) + (1 - g) \text{rk}(F), \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Hilbert ridotto è

$$p_H(F)(n) = n + \frac{\deg(F)}{h \operatorname{rk}(F)} + \frac{(1-g)}{h} = n + \frac{\mu(F)}{h} + \text{costante}.$$

In dimensione più alta, però, la classe di Todd $\operatorname{td}(X)$ diventa più complicata e, nonostante la pendenza $\mu(F)$ compaia all'interno di $p_H(F)$, non possiamo dedurre un'equivalenza come in questo caso, ma le disuguaglianze strette

$$\mu\text{-stabilità} \implies H\text{-stabilità} \implies H\text{-semistabilità} \implies \mu\text{-semistabilità}.$$

A questo punto, per studiare la stabilità in dimensione alta, sono state seguite più strade:

- studiare i **fasci twistati**, sempre importanti per la fisica per le loro relazioni con i *B-fields*;
- studiare la **stabilità twistata** di fasci, i.e. presa una classe $B \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{R})$, si rifanno i conti della pendenza con il carattere di Chern twistato

$$\operatorname{ch}^B(F) := \operatorname{ch}(F) \smile e^{-B};$$

- studiare le **condizioni di stabilità di Bridgeland**, che offrono un punto di vista completamente nuovo e un formalismo non ancora studiato, in quanto vengono considerati non più fasci, ma complessi $E^\bullet \in D^b(X)$.

LEZIONE 5
7 ott., 2025

Condizioni di stabilità di Bridgeland

La scorsa volta abbiamo motivato l'interesse fisico dello studio della μ -stabilità, in quanto legato alle metriche Hermite-Einstein; passando alla teoria delle stringhe, si fa qualcosa di leggermente diverso che coinvolge le categorie derivate, alla maniera di Bridgeland. Per definire le sue condizioni di stabilità, si possono adottare due punti di vista:

- usando i cuori di t -strutture, cioè definizione su categorie abeliane; spesso questo approccio viene detto **condizioni di stabilità di King**;
- quello originale di Bridgeland, in cui vengono definite per categorie triangolate qualsiasi tramite la nozione di **slicing**; la definizione è lampante, ma il formalismo è più brutto.

i) Stabilità di King

Sia \mathcal{A} una categoria abeliana, e denotiamo con $K_0(\mathcal{A})$ il suo **gruppo di Grothendieck**.

2.11. Definizione. — Una **funzione di stabilità** su \mathcal{A} è una funzione $Z : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

- Z è un omomorfismo di gruppi;
- per ogni $E \in \mathcal{A}$, si ha $\Im Z([E]) \geq 0$;
- se $E \neq 0$ ha $\Im Z([E]) = 0$, allora $\Re([E]) < 0$.

Il formalismo *fa schifo* perché, a colpo d'occhio, non è affatto chiaro che relazione abbiano queste nozioni con quella di stabilità di fibrati vettoriali che abbiamo visto nelle motivazioni. Il seguente esempio fa luce su questo fatto:

2.12. Esempio. — Sia C una curva proiettiva liscia, $\mathcal{A} = \mathbf{Coh}(C)$, allora $K_0(\mathcal{A}) = K_0(C)$. Poniamo

$$Z : K_0(C) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Z([E]) := -\deg(E) + i \operatorname{rk}(E). \quad (2.12.1)$$

Per additività di grado e rango, Z è un omomorfismo di gruppi ben definito; inoltre $\Im Z = \operatorname{rk} \geq 0$ e se $\Im Z([E]) = \operatorname{rk}(E) = 0$, allora E è di torsione, quindi ha grado positivo $\deg(E) > 0$, da cui $\Re([E]) < 0$. Questo mostra che Z è una funzione di stabilità.

Perché rango e grado abbiano senso in questa combinazione all'interno di \mathbb{C} è ancora motivato dalla fisica: nei termini della teoria delle stringhe, la funzione Z , spesso chiamata **funzione di carica centrale**, rappresenta la carica di particelle sulle D -brane. Boh.

2.13. Definizione. — Data Z una funzione di stabilità su \mathcal{A} e $E \in \mathcal{A}$, poniamo

$$r_Z(E) := \Im Z([E]), \quad d_Z(E) := -\Re Z([E]), \quad \mu_Z(E) := \frac{d_Z(E)}{r_Z(E)}, \quad (2.13.1)$$

chiamate, rispettivamente, **Z -rango**, **Z -grado** e **Z -pendenza** di E .

2.14. Remark. — La presenza del “ $-$ ” nella definizione della funzione di carica centrale serve perché, se $r_Z(E) = 0$, allora $d_Z(E) > 0$, e quindi un fascio con rango nullo ha pendenza infinita (positiva) $\mu_Z(E) = +\infty$. Inoltre, le condizioni di **Definizione 2.11** permettono di definire Z per ogni oggetto non-zero della categoria abeliana \mathcal{A} , e $0 \in \mathcal{A}$ è l'**unico** oggetto per cui $Z(0) = 0$.

2.15. Definizione. — Un oggetto $E \in \mathcal{A}$ è detto **Z -semistabile** se, per ogni sottoggetto $0 \neq F \subsetneq E$, si ha

$$\mu_Z(F) \leq \mu_Z(E).$$

C'è un grande **problema** quando da C curva andiamo a considerare X una varietà proiettiva liscia di dimensione $n \geq 2$: preso $H \in \operatorname{Amp}(X)$ e posti $A = \mathbf{Coh}(X)$ e $K_0(\mathcal{A}) = K_0(X)$, uno sarebbe tentato di considerare la funzione:

$$Z_H : K_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Z_H([E]) := -(c_1(E) \cdot H^{n-1}) + i \operatorname{rk}(E) H^n. \quad (2.15.1)$$

Se questa fosse una funzione di stabilità, allora $\mu_Z = \mu_H$ sarebbe la solita pendenza rispetto a H , ma purtroppo non soddisfa le condizioni in **Definizione 2.11**: infatti, se E è un fascio supportato almeno in codimensione 2, allora $Z_H(E) = 0$... Però potrei aver scelto male la mia funzione Z . In realtà, c'è un problema più serio che non permette di ottenere mai funzioni di stabilità su $\mathbf{Coh}(X)$ in dimensione $n > 1$.

2.16. Definizione. — Una funzione di stabilità $Z : K_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ è detta **numerica** se esiste un omomorfismo di gruppi $Z' : H^{2*}(X; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $Z = Z' \circ \operatorname{ch}$, cioè il seguente triangolo commuti:

$$\begin{array}{ccc} K_0(X) & \xrightarrow{\operatorname{ch}} & H^{2*}(X; \mathbb{Q}) \\ & \searrow Z & \swarrow Z' \\ & \mathbb{C} & \end{array}.$$

2.17. Esempio. — Se $X = C$ è una curva, allora $Z = -\deg + i \operatorname{rk}$ è una condizione numerica, infatti $\operatorname{ch} : K_0(C) \rightarrow H^{2*}(C; \mathbb{Q}) = H^0(C; \mathbb{Q}) \oplus H^2(C; \mathbb{Q})$ è proprio

$$\operatorname{ch}(E) = (\operatorname{rk}(E), \deg(E)),$$

quindi basta porre $Z'(\alpha, \beta) := -\beta + i\alpha$.

2.18. Lemma (Toda). — *Se $\dim X \geq 2$ non esistono funzioni di stabilità numeriche su $\operatorname{Coh}(X)$.*

Essenzialmente, la ragione per cui si ha questo fallimento è che, in dimensione maggiore di 1, il carattere di Chern scontrato con H **non** è più lineare.

In tutto questo stiamo ancora parlando di *funzioni*, e non di *condizioni di stabilità*, e abbiamo già capito che è difficile in generale fabbricare le prime.

2.19. Definizione. — Una funzione di stabilità Z su \mathcal{A} è detta **condizione di stabilità** se, per ogni oggetto $E \in \mathcal{A}$, esiste una **filtrazione di Harder-Narasimhan** per E , i.e. una filtrazione

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{l-1} \subsetneq E_l = E$$

tale che, per ogni $0 < i \leq l$, ogni fattore E_i/E_{i-1} sia μ_Z -semistabile e si abbia pendenza decrescente $\mu(E_i/E_{i-1}) > \mu(E_{i+1}/E_i)$.

Dimostrare l'esistenza della filtrazione di HN, in generale, non è un compito semplice, ma se si pongono condizioni buone sulla Z che andiamo a costruire, allora abbiamo speranza di ottenere la filtrazione di HN in maniera automatica. Ad esempio, se so già che la categoria \mathcal{A} ha oggetti che ammettono filtrazioni infinite, allora ho poche speranze di ottenere una condizione di stabilità da una Z qualsiasi.

2.20. Definizione. — Una categoria abeliana \mathcal{A} è detta **noetheriana** se, per ogni $E \in \mathcal{A}$ e ogni catena ascendente

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l \subset \cdots \subset E$$

ammette un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $E_n = E_{n_0}$, per ogni $n \geq n_0$.

2.21. Teorema. — *Se \mathcal{A} è abeliana e noetheriana e $Z : K_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione di stabilità tale che $r_Z : K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ ha immagine discreta, allora Z è una condizione di stabilità.*

Quindi, in fin dei conti, è sufficiente fabbricare funzioni di stabilità.

ii) Stabilità di Bridgeland originale

Sia \mathcal{D} una categoria triangolata.

2.22. Definizione. — Una **t -struttura** su \mathcal{D} è una coppia $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$, con $\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0}$ due sottocategorie piene di \mathcal{D} , non necessariamente triangolate, tali che:

- se $A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $B \in \mathcal{D}^{\geq 0}$, allora $A[1] \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $B[-1] \in \mathcal{D}^{\geq 0}$;
- se $A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $B \in \mathcal{D}^{\geq 0}$, allora per ogni $i > j$ si ha $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A[i], B[j]) = 0$;
- per ogni $E \in \mathcal{D}$ esiste un triangolo esatto

$$A \longrightarrow E \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

con $A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $B \in \mathcal{D}^{\geq 0}$.

2.23. Esempio. — Per ogni categoria abeliana \mathcal{A} , esiste una t -struttura canonica $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ su $D^b(\mathcal{A})$ definita da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{ E \in D^b(\mathcal{A}) \mid \forall_{j>0} H^j(E) = 0 \}, \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{ E \in D^b(\mathcal{A}) \mid \forall_{j\leq 0} H^j(E) = 0 \}. \end{aligned}$$

Chiameremo questa la **t -struttura standard**.

2.24. Definizione. — Una t -struttura $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ su \mathcal{D} è **limitata** se, per ogni $E \in \mathcal{D}$, esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tale che $E[n] \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $E[m] \in \mathcal{D}^{\geq 0}$.

2.25. Teorema. — Data una t -struttura $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ su una categoria triangolata \mathcal{D} , la sottocategoria $\mathcal{D}^{\heartsuit} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ è una categoria abeliana, detta **cuore** della t -struttura.

2.26. Esempio. — Se $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ è la t -struttura standard in $D^b(\mathcal{A})$ dell'esempio precedente, allora \mathcal{D}^{\heartsuit} è equivalente a \mathcal{A} .

2.27. Teorema (Bridgeland). — Sia \mathcal{D} una categoria triangolata, una sottocategoria $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ abeliana è il cuore di una t -struttura se e solo se valgono le seguenti tre condizioni:

- se $A, B \in \mathcal{A}$, per ogni $i > j$ si ha $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A[i], B[j]) = 0$;
- per ogni $E \in \mathcal{D}$, esistono interi $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}$, oggetti $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{D}$ e $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che si abbia il diagramma di triangoli esatti

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_{m-1} & \longrightarrow & E_m = E \\ & \nwarrow +1 & \downarrow & \nwarrow +1 & \downarrow & & & \nwarrow +1 & \downarrow & \nwarrow +1 & \downarrow \\ & & A_1[h_1] & & A_2[h_2] & & & & A_{m-1}[h_{m-1}] & & A_m[h_m] \end{array}$$

che prende il ruolo della **filtrazione di Harder-Narasimhan** di E in \mathcal{D} .

Sia \mathcal{D} una categoria triangolata. Diamo ora una nozione molto simile a quella appena enunciata nel **Teorema 2.27**.

2.28. Definizione. — Uno **slicing** di \mathcal{D} è una famiglia $\mathcal{P} = \{ \mathcal{P}(\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R} \}$ di sottocategorie piene di \mathcal{D} tali che:

- per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$ vale $\mathcal{P}(\varphi)[1] = \mathcal{P}(\varphi + 1)$;
- per ogni coppia di numeri reali $\varphi_1 > \varphi_2$ e per ogni $A \in \mathcal{P}(\varphi_1)$ e $B \in \mathcal{P}(\varphi_2)$, si ha $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = 0$;

- iii) per ogni $E \in \mathcal{D}$, esistono numeri reali $\varphi_1 > \dots > \varphi_m$ e oggetti $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{D}$ e $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{D}$, con ogni $A_i \in \mathcal{P}(\varphi_i)$ tali che si abbia il diagramma di triangoli esatti

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \dots \longrightarrow E_{m-1} \longrightarrow E_m = E \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A_1 & & A_2 & & A_{m-1} \longrightarrow A_m
 \end{array}$$

$\nwarrow +1 \quad \nwarrow +1 \quad \nwarrow +1 \quad \nwarrow +1$

detta **filtrazione di Harder-Narasimhan** di E per \mathcal{P} .

Gli oggetti in $\mathcal{P}(\varphi)$ sono detti di **fase** φ .

2.29. Esempio. — Sia C una curva proiettiva liscia e $\mathcal{D} = D^b(C)$. Per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\mathcal{P}(\varphi) := \langle E \text{ fascio } \mu\text{-semistabile, con } \mu(E) = \varphi \rangle.$$

Allora la collezione di queste $\mathcal{P}(\varphi)$ è uno slicing di $D^b(C)$.

Data X una varietà proiettiva liscia, fissiamo ora $\mathcal{D} = D^b(X)$ e un reticolo Λ finitamente generato, con un omomorfismo di gruppi suriettivo

$$\nu : K_0(X) \twoheadrightarrow \Lambda.$$

Noi siamo interessati al caso $\Lambda = K_{num}(X) := K_0(X)/T$, dove

$$T := \{ a \in K_0(X) \mid \forall_b \chi(a, b) = 0 \}$$

e $K_{num}(X)$ è dotato del pairing $(a, b) := -\chi(a, b)$; il “ $-$ ” è messo lì per questione di compatibilità con il pairing tra vettori di Mukai.

2.30. Esempio. — Se X è una superficie K3, allora il vettore di Mukai

$$\mathbf{v} : K_{num}(X) \longrightarrow H^{2*}(X; \mathbb{Z}), \quad \mathbf{v}([E]) = (\text{rk}(E), c_1(E), \text{rk}(E) + \text{ch}_2(E)) \quad (2.30.1)$$

è un’isometria.

2.31. Definizione. — Una **condizione di stabilità di Bridgeland** su X è una coppia $\sigma = (\mathcal{P}, Z)$, dove \mathcal{P} è uno slicing di $D^b(X)$ e $Z : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ tali che:

- i) Z è un omorfismo di gruppi;
- ii) se $E \in \mathcal{P}(\varphi)$, allora $Z(\nu(E)) = \lambda e^{i\pi\varphi}$, con $\lambda > 0$ dipendente da E ;
- iii) vale la **proprietà di supporto**:

$$C_\sigma := \inf \left\{ \frac{|Z(\nu(E))|}{\|\nu(V)\|} \mid 0 \neq E \in \mathcal{P}(\varphi), \varphi \in \mathbb{R} \right\} > 0. \quad (2.31.1)$$

Gli oggetti di $\mathcal{P}(\varphi)$ vengono detti σ -semistabili.

Remark. — La proprietà di supporto è stata introdotta più avanti da **Kontsevich** e **Soibelman**, motivata dal fatto che, il numeretto C_σ definito in (2.31.1) è in qualche modo legato al **discriminante** del fascio E . Richiedendo questa condizione, si garantisce la validità di una disuguaglianza del tipo di **Bogomolov**, disuguaglianza soddisfatta dai fasci semistabili e che quindi è auspicabile che abbiano tutti i fasci *stabili* in un qualche senso.

2.32. Teorema. — Sia X una varietà proiettiva liscia e $\mathcal{D} = D^b(X)$. Dare una condizione di stabilità di Bridgeland (\mathcal{P}, Z) su $D^b(X)$ equivale a dare una coppia (\mathcal{A}, Z) , con \mathcal{A} abeliana e Z condizione di stabilità su \mathcal{A} nel senso di **Definizione 2.19** e tale che la **proprietà di supporto** è verificata:

$$\inf \left\{ \frac{|Z(\nu(E))|}{\|\nu(E)\|} \mid 0 \neq E \in \mathcal{A} \text{ è } Z\text{-semistabile} \right\} > 0. \quad (2.32.1)$$

Idea della costruzione. Data (\mathcal{P}, Z) , si pone $\mathcal{D}^{\leq 0} := \bigcup_{\varphi > 0} \mathcal{P}(\varphi)$ e $\mathcal{D}^{\geq 0} := \bigcup_{\varphi \leq 1} \mathcal{P}(\varphi)$. Allora la coppia $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ definiscono una t -struttura limitata su \mathcal{D} , il cui cuore $\mathcal{A} := \mathcal{D}^{\heartsuit} = \mathcal{P}((0, 1])$ ha la filtrazione di Harder-Narasimhan rispetto a Z , dove

$$Z(E) := \lambda \cos(\pi\varphi) + i\lambda \sin(\pi\varphi). \quad \square$$

LEZIONE 6
14 ott., 2025

Lo spazio delle condizioni di stabilità

Sia X una varietà proiettiva liscia di dimensione $\dim X = n$, Λ un reticolo di rango finito fissato e $\nu : K_0(X) \rightarrow \Lambda$ un morfismo surgettivo di gruppi. La scorsa volta abbiamo definito le **condizioni di stabilità di Bridgeland** rispetto a Λ e ν in due modi equivalenti, vedi **Teorema 2.32**.

2.33. Osservazione. — Per una curva proiettiva liscia C c'è sempre almeno una condizione di stabilità $\sigma_C = (\mathbf{Coh}(C), Z)$, dove $Z([E]) := -\deg(E) + i \operatorname{rk}(E)$. La categoria dei fasci $\mathbf{Coh}(C)$ è il cuore della t -struttura standard di $D^b(C)$ e Z è una condizione di stabilità su $\mathbf{Coh}(C)$. Preso $\Lambda = K_{\text{num}}(C)$, tensorizzando con \mathbb{R} possiamo vedere che il carattere di Chern dà un isomorfismo

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \longrightarrow H^0(C; \mathbb{R}) \oplus H^2(C; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{ch}([E]) = (\operatorname{rk}(E), \deg(E)).$$

Se dotiamo $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ della norma euclidea, allora notiamo che per ogni $0 \neq E \in \mathbf{Coh}(C)$ vale

$$\frac{|Z(E)|}{\|\nu(E)\|} = 1 \quad \implies \quad \inf \left\{ \frac{|Z(E)|}{\|\nu(E)\|} \mid 0 \neq E \in \mathbf{Coh}(C) \right\} = 1$$

e quindi la proprietà del supporto in (2.32.1) è verificata, concludendo la dimostrazione che σ_C è una condizione di stabilità di Bridgeland su C .

Quindi saremmo tentati di dire che le condizioni di stabilità di Bridgeland sono generalizzazioni della stabilità... Ma non è proprio così: *le condizioni di stabilità di Bridgeland sono generalizzazioni della stabilità sulle **curve**.*

Notazione. — Se $\sigma = (\mathcal{P}, Z)$ è una condizione di stabilità nel senso della **Definizione 2.28**, per ogni $E \in \mathcal{D}$, esistono numeri reali $\varphi_1 > \dots > \varphi_m$, detti **fasi**, univocamente determinati dalla filtrazione di HN in iii) della **Definizione 2.28**; noi saremo interessati principalmente alla fase massima e quella minima, che denotiamo rispettivamente come

$$\varphi_{\sigma}^{+} := \varphi_1, \quad \varphi_{\sigma}^{-} := \varphi_m.$$

Notazione. — Se $\sigma = (\mathcal{P}, Z)$, allora andiamo a dotare $Z \in \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{C})$ della **norma operatoriale** ereditata da $\text{Hom}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathbb{C})$, cioè

$$\|Z\| := \sup \left\{ \frac{|Z(\nu(E))|}{\|\nu(E)\|} \mid \varphi \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \neq E \in \mathcal{P}(\varphi) \right\}.$$

Notiamo che la formula nella definizione è la stessa che definisce la costante C_σ in (2.31.1). Richiedere che $C_\sigma > 0$ è equivalente all'esistenza di una forma bilineare simmetrica

$$Q : (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \times (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

1. se E è σ -semistabile, allora $Q(\nu(E), \nu(E)) \geq 0$;
2. se $\alpha \in \Lambda$ è tale che $Z(\alpha) = 0$, allora $Q(\alpha, \alpha) < 0$.

Data X una varietà proiettiva liscia e Λ un reticolo di rango finito con $\nu : K_0(X) \rightarrow \Lambda$ surgettiva, poniamo

$$\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X) := \{ \sigma = (\mathcal{P}, Z) \mid \sigma \text{ è una condizione di stabilità di Bridgeland} \}.$$

Per esperienza con il caso della stabilità classica, si sospetta che Stab non debba essere solo un insieme, ma in realtà abbia una struttura in più. Supponiamo (anche se non è così) che la stabilità di Bridgeland generalizzi la μ -stabilità vista nella prima lezione: data X una superficie, per la μ -stabilità serve una **classe di Kähler** ω , con cui si definisce

$$\mu_\omega(E) := \frac{c_1(E) \cdot \omega^{n-1}}{\text{rk}(E)}.$$

Ma allora possiamo identificare “ $\text{Stab}_\mu(X) = \text{Kah}(X)$ ” con il cono di Kähler della varietà, che è una varietà topologica! Quindi, se stiamo davvero generalizzando questa idea, vorremmo che le condizioni di stabilità formino una varietà. In realtà, la topologia su Stab è anche indotta da una **distanza generalizzata**

$$d_{\Lambda, \nu} : \text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X) \times \text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

dove la distanza tra due condizioni σ_1 e σ_2 è data da

$$d_{\Lambda, \nu}(\sigma_1, \sigma_2) = \sup \{ |\varphi_1^+(E) - \varphi_2^+(E)|, |\varphi_1^-(E) - \varphi_2^-(E)|, \|Z_1(E) - Z_2(E)\| \}. \quad (2.33.1)$$

2.34. Teorema (di deformazione di Bridgeland). — Se $\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$ è non vuoto ed è dotata della topologia indotta da $d_{\Lambda, \nu}$, allora la mappa

$$\mathcal{Z} : \text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X) \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \sigma = (\mathcal{P}, Z) \longmapsto Z \quad (2.34.1)$$

è un omeomorfismo locale. In particolare, $\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$ è una varietà complessa di dimensione $\text{rk}(\Lambda)$.

Il fatto che lo spazio delle condizioni di stabilità di Bridgeland (su una qualsiasi categoria triangolata) sia **non vuoto** è un problema non banale, e ci sono articoli che studiano quando è vuoto o no; altre proprietà topologiche di questo spazio non sono note in generale.

2.35. Osservazione. — Ci sono due azioni di gruppo su $Stab_{\Lambda, \nu}(X)$:

- i) il gruppo $\text{Aut}_{\Lambda, \nu}(D^b(X)) := \{ F : D^b(X) \rightarrow D^b(X) \mid \nu \circ F^K = \nu \}$ delle autoequivalenze che preservano ν , cioè tali che commutano il triangolo

$$\begin{array}{ccc} K_0(X) & \xrightarrow{F^K} & K_0(X) \\ & \searrow \nu & \swarrow \nu \\ & \Lambda & \end{array},$$

agisce a sinistra tramite

$$\begin{aligned} \lambda : \text{Aut}_{\Lambda, \nu}(D^b(X)) \times Stab_{\Lambda, \nu}(X) &\longrightarrow Stab_{\Lambda, \nu}(X), \\ \lambda(F, \sigma = (\mathcal{P}, Z)) &= F(\sigma) := (F(\mathcal{P}), F(Z)), \end{aligned}$$

dove $F(\mathcal{P})$ è lo slicing dato da $F(\mathcal{P})(\varphi) := F(\mathcal{P}(\varphi))$, per ogni $\varphi \in \mathbb{R}$, mentre la carica centrale si ottiene per precomposizione $F(Z) := Z \circ F^K$. Si verifica facilmente che la filtrazione di HN esiste, in quanto la filtrazione in $F(\sigma)$ di un oggetto E è data dall'immagine attraverso F della filtrazione in σ di $F^{-1}(E)$;

- ii) il rivestimento universale $\widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ di $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ ha una descrizione esplicita come

$$\widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R}) \simeq \left\{ (T, f) \mid \begin{array}{l} T \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R}), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ crescente tale che} \\ f(\varphi+1) = f(\varphi)+1 \text{ e } T|_{S^1} = f|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \end{array} \right\}. \quad (2.35.1)$$

Questo gruppo agisce a destra su $\sigma = (\mathcal{P}, Z) \in Stab_{\Lambda, \nu}(X)$ tramite la seguente formula: dato $a = (T, f) \in \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R})$, definiamo $\sigma \cdot a = \sigma_a = (\mathcal{P}_a, Z_a)$ come la coppia

$$\mathcal{P}_a := \{ \mathcal{P}(f(\varphi)) \mid \varphi \in \mathbb{R} \}, \quad Z_a := T^{-1} \circ Z.$$

2.36. Proposizione. — Se $X = C$ è una curva proiettiva liscia, allora $Stab_{\Lambda, \nu}(C)$ è noto:

- se $C = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, allora $Stab_{\Lambda, \nu}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \simeq \mathbb{C}^2$, dimostrato da **Okada** in [Ok06];
- se C ha genere positivo, allora $Stab_{\Lambda, \nu}(C) = \sigma_C \cdot \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H} \times \mathbb{C}$.

Quindi stiamo sì generalizzando le nozioni di stabilità sulle curve... ma mica tanto! Se $\dim X \geq 2$, allora il problema di caratterizzare $Stab_{\Lambda, \nu}(X)$ è ancora aperto e si hanno solo risultati parziali nel caso delle superfici K3, delle abeliane e poco altro.

Spazi di moduli

Data X una varietà proiettiva liscia e B uno schema localmente di tipo finito su \mathbb{C} .

2.37. Definizione. — Un oggetto $E \in D(\mathbf{QCoh}(X \times B))$ è **B -perfetto** se, per ogni $b \in B$, esiste un intorno aperto $U \subset B$ di b tale che $E|_{\text{pr}_B^{-1}(U)}$ è isomorfo a un complesso finito di fasci U -piatti.

2.38. Osservazione. — Quando $B = \text{Spec } \mathbb{C}$, un oggetto perfetto è quasi-isomorfo a un complesso limitato di fibrati vettoriali.

Questa nozione permette di definire il funtore

$$\mathfrak{M} : \underline{Sch} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \quad B \longmapsto \left\{ E \in D(\mathbf{QCoh}(X \times B)) \mid \begin{array}{l} E \text{ è } B\text{-perfetto tale che} \\ \forall_{b \in B} \forall_{i < 0} \mathcal{E}xt^i(E_b, E_b) = 0 \end{array} \right\}$$

2.39. Teorema (Lieblich). — \mathfrak{M} è uno stack di Artin localmente di tipo finito, localmente quasi separato e a diagonale separata.

Per chi non ha idea di cosa sia uno stack, questo enunciato ha poco senso, ma il nocciolo è che \mathfrak{M} si comporta bene, quasi come uno schema. Dentro \mathfrak{M} possiamo andare a considerare il funtore che va a considerare i complessi **semplici**

$$\mathfrak{M}_{spl} : \underline{Sch} \longrightarrow \mathbf{Grp}, \quad B \longmapsto \{ E \in \mathfrak{M}(B) \mid \forall_{b \in B} \text{End}(E_b) \simeq \mathbb{C} \}$$

che si verifica essere un sottostack aperto di \mathfrak{M} . Se si mette una relazione d'equivalenza \sim a \mathfrak{M} visto come insieme, allora si *fascifica lo stack* eliminandone gli automorfismi, e si ottiene così un funtore

$$\underline{M}_{spl} : \underline{Sch} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad B \longmapsto \mathfrak{M}_{spl}(B) / \sim,$$

dove $E \sim E'$ se e solo se esiste $\mathcal{L} \in \text{Pic}(B)$ tale che $E \simeq E' \otimes \text{pr}_B^* \mathcal{L}$.

2.40. Teorema (Inaba). — Il funtore \underline{M}_{spl} è rappresentabile da uno spazio algebrico (non esattamente uno schema) localmente di tipo finito M_{spl} .

Questo risultato è la base tecnica per poter parlare di spazi di moduli su X . Sia $\sigma = (\mathcal{P}, Z) \in \text{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$ e fissiamo $\alpha \in \Lambda$. Vorremmo parametrizzare gli oggetti σ -semistabili di fase φ , e quindi che il nostro spazio dei moduli fosse

$$\widehat{M}_\sigma(\alpha, \varphi) := \{ E \in \mathcal{P}(\varphi) \mid \nu(E) = \alpha \},$$

e analogamente denotiamo con $\widehat{M}_\sigma^s(\alpha, \varphi)$ quello dei fasci σ -stabili. È lo spazio dei moduli che cerchiamo? Più precisamente, stiamo considerando i funtori $\mathfrak{M}_\sigma^s(\alpha, \varphi) \subset \mathfrak{M}_\sigma(\alpha, \varphi) \subset \mathfrak{M}_{spl}$, con

$$\mathfrak{M}_\sigma(\alpha, \varphi)(B) := \left\{ E \in \mathfrak{M}_{spl}(B) \mid \forall_{b \in B} E_b \in \widehat{M}_\sigma(\alpha, \varphi) \right\},$$

analogamente $\mathfrak{M}_\sigma^s(\alpha, \varphi)(B)$ considera quelli σ -stabili, e ci chiediamo se siano **aperti** di \mathfrak{M}_{spl} . In generale, la **risposta non si sa**: in casi particolari, la risposta è affermativa grazie al lavoro di **Toda**. Se invece andassimo a considerare i funtori a valori in **Set**

$$\underline{M}_\sigma^s(\alpha, \varphi) \subset \underline{M}_\sigma(\alpha, \varphi) \subset \underline{M}_{spl},$$

ci chiediamo: sono rappresentabili? In caso affermativo, se sappiamo che gli stack associati sono aperti, allora abbiamo anche delle inclusioni aperte di schemi

$$M_\sigma^s(\alpha, \varphi) \subset M_\sigma(\alpha, \varphi) \subset M_{spl}.$$

Domanda. — Cosa sono punti di questi spazi di moduli $\widehat{M}_\sigma(\alpha, \varphi)$? Parametrizzano classi di S -equivalenza?

Risposta parziale. Negli esempi noti, la risposta è sempre sì:

- se $\dim X = 1$, allora abbiamo che $M_\sigma(\alpha, \varphi)$ (risp. $M_\sigma^s(\alpha, \varphi)$) è isomorfo allo spazio dei moduli di fasci μ -semistabili (risp. μ -stabili) su C , quindi la risposta è affermativa;
- se $\dim X = 2$, allora si hanno dei risultati sulla rappresentabilità nei casi in cui X sia \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $Bl_p \mathbb{P}^2$ e in alcuni casi in cui X è una superficie K3, Enriques o abeliana. In tutti questi casi, la risposta è affermativa.

□

Wall-crossing

Dato H un fibrato lineare ampio su X , se E è un fascio μ_H -stabile, per ogni $0 \neq F \subsetneq E$, possiamo riscrivere la disuguaglianza $\mu_H(F) < \mu_H(E)$ come

$$(\operatorname{rk}(E)c_1(F) - \operatorname{rk}(F)c_1(E)) \cdot H < 0. \quad (2.40.1)$$

Quindi, per ogni sottofascio F come sopra, possiamo definire il divisore su X

$$D_{E,F} := \operatorname{rk}(E)c_1(F) - \operatorname{rk}(F)c_1(E),$$

che per Hodge Index Theorem ha quadrato negativo; in particolare, si può dimostrare che esiste $\alpha > 0$ tale che $-\alpha \leq D_{E,F}^2 < 0$ per ogni $F \subsetneq E$. Viceversa, se esistesse un divisore D tale che $D \cdot H = 0$, potrebbe esserci la possibilità che $D = D_{E,F}$ per un qualche fascio che destabilizza E : vado quindi a togliere dal cono ampio queste polarizzazioni, cioè vado a considerare il complementare dei $D_{E,F}^\perp$ in $\operatorname{Amp}(X)$, al variare di F . Questo arrangiamento di iperpiani suddivide il cono ampio in **camere** in cui il segno del pairing con i $D_{E,F}$ rimane costante: più precisamente, presa una camera $\mathcal{C} \subset \operatorname{Amp}(X) \setminus \bigcup_{0 \neq F \subsetneq E} D_{E,F}^\perp$, per ogni $H, H' \in \mathcal{C}$, allora

$$D_{E,F} \cdot H < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_{E,F} \cdot H' < 0.$$

Un'idea analoga vale anche per lo spazio delle condizioni di stabilità di Bridgeland: infatti, ricordando che per una carica centrale Z la $\Im Z$ rappresenta il ‘*rango*’, mentre la $-\Re Z$ fa le veci del ‘*grado*’, possiamo rimpiazzare l’equazione $D_{E,F} \cdot H = 0$ con


$$\Im Z(v_0) \Re Z(\nu(E)) - \Im Z(\nu(E)) \Re Z(v_0) = 0, \quad \text{con } v_0 \in \Lambda, \quad (2.40.2)$$

definendo in questo modo una sottovarietà reale di codimensione 1 in $\operatorname{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$. Si può dimostrare che l’insieme di queste sottovarietà, detti **muri numerici**, è localmente finita e divide $\operatorname{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$ in camere, proprio come succedeva per il cono ampio. In particolare, la nozione di stabilità rimane costante in ogni camera: più precisamente, se $\mathcal{C} \subset \operatorname{Stab}_{\Lambda, \nu}(X)$ è una camera e $\sigma, \sigma' \in \mathcal{C}$, allora

$$M_\sigma(X, \nu(E)) \simeq M_{\sigma'}(X, \nu(E)).$$

LEZIONE 7
21 ott., 2025

Condizioni di stabilità su superfici

Warning . — Questa lezione è stata tenuta da **Filippo Papallo** (cioè da me).

Lo scopo di oggi è quello di costruire condizioni di stabilità di Bridgeland per una varietà X di $\dim X > 1$. Non andremo molto lontano, in quanto le costruzioni note riguardano solo $\dim X = 2$ e, congetturalmente, $\dim X = 3$; vedremo oggi il caso delle superfici.

Nella scorsa lezione, Arvid ci ha parlato della varietà $Stab_{\Lambda, \nu}(C)$ delle condizioni di stabilità nel caso in cui C sia una curva proiettiva liscia:

- i) se $C = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, **So Okada** ha dimostrato che $Stab_{\Lambda, \nu}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \simeq \mathbb{C}^2$ e i muri sono determinati dalle equazioni

$$Z(\mathcal{O}(k)) = Z(\mathcal{O}(k-1)[1]), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z};$$

quindi, a meno di autoequivalenze, abbiamo il solo muro $Z(\mathcal{O}) = Z(\mathcal{O}(-1)[1])$ che separa la *camera di Gieseker*, data da $Z(\mathcal{O}) < Z(\mathcal{O}(-1)[1])$, con la camera $Z(\mathcal{O}) > Z(\mathcal{O}(-1)[1])$ in cui gli unici oggetti semistabili sono $\mathcal{O}^{\oplus m}$ e $\mathcal{O}(-1)^{\oplus m'}[1]$.

- ii) se C è una curva di genere positivo, allora $Stab_{\Lambda, \nu}(C) = \sigma_C \cdot \widetilde{\text{GL}}_2^+(\mathbb{R})$, dove $\sigma_C = (\mathbf{Coh}(C), -\text{rk} + i \deg)$ è la condizione standard vista in **Esempio 2.12**; in altri termini, su una curva tutte le condizioni di stabilità di Bridgeland sono equivalenti alla nozione di μ -stabilità in senso classico.

Abbiamo visto infatti che in queste situazioni $\mathbf{Coh}(C)$ è un cuore accettabile per una possibile $\sigma \in Stab_{\Lambda, \nu}(C)$, ma non appena $\dim X \geq 2$, per il **Lemma 2.18** questo fallisce. Quindi, il problema non è che non abbiamo trovato la giusta carica centrale Z : il fatto è che dobbiamo cambiare categoria!

2.41. Osservazione. — Questo non è vero nel caso di varietà non-proiettive: infatti, se X è una superficie K3 con $\text{Pic}(X) = 0$, allora $\mathbf{Coh}(X)$ può essere il cuore per una condizione di stabilità: infatti, basta prendere $z := \alpha + i\beta$ con $\beta > 0$ e per $\mathbf{v}(E) = (r, 0, a)$ definire $Z(E) = -rz - a$. In questa situazione, **Huybrechts, Macrì e Stellari** hanno dimostrato che $Stab(X)$ è connessa e semplicemente connessa.

I primi esempi di costruzione di condizioni su una superficie S sono stati trovati da Bridgeland stesso per le superfici K3 proiettive e abeliane, nell'articolo [Bri08], e poi generalizzato da **Arcara e Bertram** per superfici *K-triviali*¹. Data S una superficie K3 proiettiva, il suo scopo principale nell'articolo è quello di studiare il gruppo delle autoequivalenze $\text{Aut}(D^b(S))$ e, per farlo, caratterizza esplicitamente le condizioni di stabilità $Stab^\dagger(S)$ di una speciale componente connessa di $Stab(S)$ e come si comportano i vari pezzi della sua frontiera sotto l'azione di $\text{Aut}(D^b(S))$.

2.42. Definizione. — Una **superficie K3** è una superficie complessa S compatta, semplicemente connessa, con canonico banale $\Omega_S^2 \simeq \mathcal{O}_S$. Più in generale, si può definire una **superficie K3 algebrica** su un campo k come una varietà completa, non singolare, di $\dim S = 2$ tale che

$$\Omega_{S|k}^2 \simeq \mathcal{O}_S, \quad H^1(S; \mathbb{Z}) = 0.$$

Prima di entrare nei dettagli tecnici della costruzione, seguiamo l'idea di Bridgeland, come spiegata nell'introduzione del suo articolo. Data S una K3, vogliamo studiarne le condizioni di stabilità *numeriche*, quindi consideriamo il suo **reticolo di Mukai algebrico**

$$\Lambda := H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) = H^0(S; \mathbb{Z}) \oplus \text{NS}(S) \oplus H^4(S; \mathbb{Z}),$$

¹...anche se Macrì afferma che la costruzione valga per *tutte* le superfici proiettive lisce.

che è isometrico al gruppo di Grothendieck numerico di S tramite il **carattere di Chern**

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : K_{num}(S) &\longrightarrow H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}), \\ \mathbf{v}([E]) &:= \text{ch}(E) \smile \sqrt{\text{td}(S)} = (\text{rk}(E), c_1(E), \text{rk}(E) + \text{ch}_2(E)), \end{aligned}$$

dato che $\sqrt{\text{td}(S)} = (1, 0, 1)$. Supponiamo ora che $\text{Stab}(S) = \text{Stab}_{(H_{alg}^*, \mathbf{v})}(S)$ sia non vuoto. Siccome siamo in spazi finito-dimensionali con prodotto scalare, possiamo riscrivere l'omeomorfismo locale \mathcal{Z} in (2.34.1) come

$$\mathcal{Z} : \text{Stab}(S) \longrightarrow (H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C})^\vee, \quad \mathcal{Z}(\sigma) = \langle \mathbf{v}(\sigma), - \rangle,$$

per un unico vettore $\mathbf{v}(\sigma) \in \mathbb{C} \oplus (\text{NS}(S) \otimes \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. All'interno di questo spazio vettoriale, andiamo a considerare solo i vettori

$$\mathcal{P}(S) := \{ \mathbf{w} \in \Lambda \otimes \mathbb{C} \mid \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re \mathbf{w}, \Im \mathbf{w}\} \text{ è un piano definito positivo in } \Lambda \otimes \mathbb{R} \}. \quad (2.42.1)$$

Esempio. — Per ogni $\omega \in \text{Amp}(S)_{\mathbb{R}}$ la classe $e^{i\omega} = \left(1, i\omega, \frac{-\omega^2}{2}\right)$ appartiene in $\mathcal{P}(S)$ poiché

$$\langle \Re e^{i\omega}, \Im e^{i\omega} \rangle = \left\langle \left(1, 0, \frac{-\omega^2}{2}\right), (0, \omega, 0) \right\rangle = 0, \quad \text{e} \quad (\Re e^{i\omega})^2 = (\Im e^{i\omega})^2 = \omega^2 > 0.$$

Inoltre, un conto veloce mostra che, per ogni $B \in \text{NS}(S) \otimes \mathbb{R}$, la moltiplicazione $e^{-B} \smile -$ è una trasformazione ortogonale di $H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, quindi tutti i vettori della forma

$$e^{-B+i\omega} = \left(1, -B + i\omega, \frac{B^2 - \omega^2}{2} - iB \cdot \omega\right)$$

appartengono a $\mathcal{P}(S)$.

Per avere una descrizione più geometrica, notiamo che anche $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ agisce liberamente su $\mathcal{P}(S)$, quindi $\mathcal{P}(S)$ può essere visto come un $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ -bundle sul quoziente. Una possibile sezione di questo fibrato è data da

$$\mathcal{Q}(S) := \{ \mathbf{w} = (w_0, w_2, w_4) \in \Lambda \otimes \mathbb{C} \mid \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0, \langle \mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}} \rangle > 0, w_0 = 1 \},$$

che ci descrive l'insieme delle condizioni di stabilità *a meno dell'azione di* $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Questo insieme $\mathcal{Q}(S)$ si identifica con il dominio tubolare $\{ -B + i\omega \in \text{NS}(S) \otimes \mathbb{C} \mid \omega^2 > 0 \}$ tramite la mappa esponenziale. Detta $\mathcal{P}^+(S)$ la componente connessa di $\mathcal{P}(S)$ che contiene le classi $e^{-B+i\omega}$, con ω ampio come nell'**Esempio**, questa ci dà una descrizione esplicita di un pezzo di $\text{Stab}(S)$.

2.43. Teorema (Bridgeland). — Sia $\Delta := \left\{ \delta \in H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) \mid \delta^2 = -2 \right\}$ l'insieme delle classi sferiche e poniamo

$$\mathcal{P}_0^+(S) := \mathcal{P}^+ \setminus \bigcup_{\delta \in \Delta} \delta^\perp, \quad \text{Stab}^\dagger(S) := \mathcal{Z}^{-1}(\mathcal{P}_0^+(S)).$$

La mappa $\mathcal{Z} : \text{Stab}^\dagger(S) \rightarrow \mathcal{P}_0^+(S)$ è un rivestimento.

In sintesi, questa linea di pensiero giustifica l'aspettativa che, al variare di $\omega \in \text{Amp}(S)_{\mathbb{R}}$ e $B \in \text{NS}(S)_{\mathbb{R}}$, le funzioni della forma

$$Z_{\omega,B} = \langle e^{-B+i\omega}, - \rangle$$

siano cariche centrali di una qualche condizione $\sigma_{\omega,B} \in \text{Stab}^{\dagger}(S)$. In effetti sarà così, ma la cosa complicata da capire, a priori, è come costruire il cuore della condizione $\sigma_{\omega,B}$.

Coppie di torsione

Gli appassionati di algebra non-commutativa e categorie triangolate che ci sono a Padova, Verona, Praga e Murcia, conoscono un metodo, chiamato **tilting**, per produrre t -strutture nuove da una già conosciuta. Questo metodo prevede di sfruttare la relazione tra t -strutture e **teoria di torsione** che esistono per un cuore \mathcal{A} .

2.44. Definizione. — Sia \mathcal{A} una categoria abeliana. Una **teoria di torsione** $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ (o **coppia di torsione**) è una coppia di sottocategorie additive piene $\mathcal{F}, \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ tali che $\text{Hom}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$ e, per ogni oggetto $E \in \mathcal{A}$, esiste una (unica) sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow T_E \longrightarrow E \longrightarrow F_E \longrightarrow 0, \quad \text{con } T_E \in \mathcal{T}, F_E \in \mathcal{F}.$$

2.45. Esempio. — Data X una varietà proiettiva liscia, la coppia $\mathcal{T} = \{ \text{fasci su } X \text{ di torsione} \}$ e $\mathcal{F} = \{ \text{fasci su } X \text{ senza torsione} \}$ definisce una teoria di torsione in $\mathbf{Coh}(X)$.

2.46. Teorema (Tilting). — Sia X una varietà proiettiva liscia. Dato $\mathcal{A} \subset D^b(X)$ il cuore di una t -struttura, con coomologico $H_{\mathcal{A}}$, e $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ una teoria di torsione su \mathcal{A} , allora la sottocategoria piena $\mathcal{A}^{\#}$, i cui oggetti sono i complessi $E \in D^b(X)$ tali che

$$H_0^{\mathcal{A}}(E) \in \mathcal{T}, \quad H_{\mathcal{A}}^{-1}(E) \in \mathcal{F} \quad \text{e} \quad H_{\mathcal{A}}^p(E) = 0 \text{ per ogni } p \notin \{0, -1\}, \quad (2.46.1)$$

è il cuore di una t -struttura. Denoteremo il **cuore tiltato** $\mathcal{A}^{\#} = \langle \mathcal{F}[1], \mathcal{T} \rangle$.

2.47. Osservazione. — Essenzialmente, in \mathcal{A} ogni oggetto E siede in un triangolo esatto $T \rightarrow E \rightarrow F$, con $(F, T) \in (\mathcal{F}, \mathcal{T})$, e quindi rappresenta un elemento di $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T, F)$. Quando tiltiamo, stiamo considerando estensioni nel senso opposto, cioè $E' \in D^b(X)$ che siedono in mezzo a un triangolo della forma $F_{E'}[1] \rightarrow E' \rightarrow T_{E'}$, con $F_{E'} \in \mathcal{F}$ e $T_{E'} \in \mathcal{T}$, quindi rappresentano degli elementi in $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T_{E'}, F_{E'}[1]) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(T_{E'}, F_{E'})$.

Tornando al caso di $X = S$ una superficie (qualsiasi), costruiamo una famiglia di teorie di torsione che dipendono da $\omega \in \text{Amp}_{\mathbb{R}}$ e $B \in \text{NS}(X) \otimes \mathbb{R}$. Per prima cosa, twistando il carattere di Chern $\text{ch}^B := e^{-B} \text{ch}$, possiamo definire una versione *twistata* della classica **slope-stability** considerando la pendenza

$$\mu_{\omega,B}(E) := \frac{\omega \cdot \text{ch}_1^B(E)}{\omega^2 \text{rk}(E)} = \frac{\omega \cdot c_1(E)}{\omega^2 \text{rk}(E)} - \frac{\omega \cdot B}{\omega^2};$$

siccome il secondo termine non dipende da E , è chiaro che la $\mu_{\omega,B}$ -(semi)stabilità coincide con la classica μ_{ω} -(semi)stabilità. L'utilità di B risiede nel poter definire diverse teorie di

torsione: infatti, definiamo una coppia $(\mathcal{F}_{\omega,B}, \mathcal{T}_{\omega,B})$ ‘troncando’ la filtrazione di HN rispetto all’equazione $\mu_{\omega,B} = 0$, o più precisamente definiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\omega,B} &:= \{ E \in \mathbf{Coh}(X) \mid \forall_q \mu_{\omega}(\mathrm{HN}_q(E)) > \omega \cdot B \} \\ \mathcal{F}_{\omega,B} &:= \{ E \in \mathbf{Coh}(X) \mid \forall_q \mu_{\omega}(\mathrm{HN}_q(E)) \leq \omega \cdot B \} .\end{aligned}$$

Allora $(\mathcal{F}_{\omega,B}, \mathcal{T}_{\omega,B})$ è una teoria di torsione per quanto sappiamo su μ_{ω} , e quindi possiamo tiltare $\mathbf{Coh}(X)$ rispetto a questa coppia per ottenere il cuore

$$\mathbf{Coh}^{\omega,B}(S) := \langle \mathcal{F}_{\omega,B}[1], \mathcal{T}_{\omega,B} \rangle . \quad (2.47.1)$$

Adesso che abbiamo un cuore e una possibile carica centrale, vogliamo convincerci che la coppia $\sigma_{\omega,B} = (\mathbf{Coh}^{\omega,B}(S), Z_{\omega,B})$ sia una condizione di stabilità di Bridgeland, usando il **Teorema 2.32**. Si dimostra che, per una **classe razionale** $B \in \mathrm{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$, la categoria $\mathbf{Coh}^{\omega,B}(S)$ è noetheriana; quindi, alla luce del **Teorema 2.21**, per costruire una condizione di stabilità nel senso della **Definizione 2.19** è sufficiente trovare una funzione di stabilità $Z_{\omega,B}$ con $\Im Z_{\omega,B}$ discreto in \mathbb{R} . Dall’introduzione, sappiamo che deve essere della forma $Z_{\omega,B}([E]) = \langle \mathbf{v}(\omega, B), \mathbf{v}(E) \rangle$ e un candidato appetibile è

$$Z_{\omega,B}([E]) = \langle e^{-B+i\omega}, \mathbf{v}(E) \rangle = - \int_X e^{i\omega} \smile \mathrm{ch}^B(E) ,$$

che esplicitamente, per $\mathbf{v} = (r, c, a) \in \Lambda$ appare come

$$Z_{\omega,B}(\mathbf{v}) = \left(-a + c \cdot B + r \frac{\omega^2 - B^2}{2} \right) + i\omega \cdot (c - rB) . \quad (2.47.2)$$

2.48. Proposizione. — Per ogni $\omega \in \mathrm{Amp}_{\mathbb{R}}$ e $B \in \mathrm{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$, la $Z_{\omega,B}$ è una funzione di stabilità su $\mathbf{Coh}^{\omega,B}(S)$.

Per avere una condizione di stabilità di Bridgeland è necessario verificare, infine, la **proprietà del supporto**: equivalentemente, è sufficiente trovare una forma quadratica definita positiva sugli oggetti semistabili, ma questa è data² dal **discriminante twistato**

$$\Delta_{\omega}^B(E) := (\omega \cdot \mathrm{ch}_1^B(E))^2 - 2\omega^2 \mathrm{ch}_0^B(E) \mathrm{ch}_2^B(E) , \quad (2.48.1)$$

come conseguenza della **disuguaglianza di Bogomolov**, che afferma $\Delta_{\omega}^B(E) \geq 0$ per ogni E fascio μ_{ω} -semistabile. Inaspettatamente, la disuguaglianza vale anche per oggetti $Z_{\omega,B}$ -semistabili, dopo aver svelato il legame tra la stabilità di Bridgeland e la μ_{ω} -stabilità:

2.49. Lemma (Large Volume Limit). — Un oggetto $E \in \mathbf{Coh}^{\omega,B}(S)$ è $\sigma_{\alpha \cdot \omega, B}$ -semistabile per ogni $\alpha \gg 0$ se e solo se E è lo shift di un fascio $\mu_{\omega, B}$ -semistabile. In altre parole: per $\alpha > 0$ tanto grande, la Bridgeland stabilità coincide con la slope-stability twistata.

Idea. La funzione $Z_{\omega,B}$ definisce la pendenza

$$\nu_{\omega,B}(E) = \frac{\mathrm{ch}_2^B(E)}{\omega \cdot \mathrm{ch}_1^B(E)} - \frac{\omega^2 \mathrm{rk}(E)}{2\omega \cdot \mathrm{ch}_1^B(E)} . \quad (2.49.1)$$

²Non è proprio questo il discriminante che va bene per tutti gli ω, B , ma è quello che funziona per il piano (α, β) ed è già molto utile nelle applicazioni.

Ora, per ogni $\alpha > 0$, un oggetto è $\nu_{\alpha\omega, B}$ -(semi)stabile se e solo se è $\frac{2}{\alpha}\nu_{\alpha\omega, B}$ -(semi)stabile. Ma allora prendere $\alpha \gg 0$ significa considerare il limite

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\alpha} \nu_{\alpha\omega, B}(E) &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{ch}_2^B(E)}{\alpha^2 \omega \cdot \operatorname{ch}_1^B(E)} - \frac{2\alpha^2 \omega^2 \operatorname{rk}(E)}{2\alpha^2 \omega \cdot \operatorname{ch}_1^B(E)} \\ &= -\frac{\omega^2 \operatorname{rk}(E)}{\omega \cdot \operatorname{ch}_1^B(E)} = -\frac{1}{\mu_{\omega, B}(E)}, \end{aligned}$$

quindi le disuguaglianze della semistabilità sono essenzialmente le stesse; la parte difficile è che bisogna fare attenzione alla nozione di *sottofascio* in $\mathbf{Coh}(S)$ e $\mathbf{Coh}^{\alpha\omega, B}(S)$, in quanto sono diverse. \square

2.50. Remark (per Arvid). — Non so perché si chiami Large Volume Limit.

Siccome Δ_ω^B è una forma quadratica che testimonia la proprietà del supporto, segue che $\sigma_{\omega, B} := (\mathbf{Coh}^{\omega, B}(S), Z_{\omega, B})$ è una condizione di stabilità di Bridgeland su $D^b(S)$.

Per poter concludere che la mappa


$$\sigma : \operatorname{Amp}(S)_{\mathbb{R}} \times \operatorname{NS}(S)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \operatorname{Stab}^\dagger(S), \quad (\omega, B) \mapsto \sigma_{\omega, B},$$

sia un embedding continuo, è necessario verificare che anche le classi reali $B \in \operatorname{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ danno condizioni di stabilità. Per il **Teorema 2.34 di deformazione**, siamo sicuri che anche dopo una piccola deformazione, $Z_{\omega, B}$ continua a dare una carica centrale per una condizione $\sigma_{\omega, B} = (\mathcal{A}, Z_{\omega, B}) \in \operatorname{Stab}^\dagger(S)$; la cosa sorprendente è che questa funzione di stabilità continua a essere valida su un cuore \mathcal{A} della forma $\mathbf{Coh}^{\omega, B}(S)$: infatti, queste categorie ammettono la seguente caratterizzazione.

2.51. Lemma. — *Sia $\sigma = (\mathcal{A}, Z_{\omega, B})$ una condizione di stabilità che soddisfa la proprietà del supporto. Tutti i fasci grattacielo $\mathbb{C}(s)$ sono oggetti σ -stabili di fase 1 (i.e. per ogni $s \in S$, $\mu_\sigma(\mathbb{C}(s)) = +\infty$) se e solo se $\mathcal{A} = \mathbf{Coh}^{\omega, B}(S)$.*

Dato che un fascio grattacielo ha vettore $\mathbf{v}(\mathbb{C}(s)) = (0, 0, 1)$, la formula (2.47.2) mostra che $Z_{\omega, B}(\mathbb{C}(s)) = -1$, quindi il **Lemma 2.51** vale.

LEZIONE 8
4 ott., 2025

Warning . — Continuiamo a camminare sui cocci di vetro perché anche questa lezione è stata tenuta da **Filippo Papallo** (cioè da me).

Nella lezione di oggi vedremo insieme un'applicazione delle condizioni di stabilità di Bridgeland allo studio di un problema classico, quello di *weak Brill-Noether*.

Wall-crossing per stabilità di Bridgeland

Sia S una superficie complessa proiettiva e fissiamo H un fibrato lineare ampio su di essa. La volta scorsa abbiamo visto che esiste un embedding continuo

$$\sigma : \operatorname{NS}(S)_{\mathbb{R}} \times \operatorname{Amp}(S)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \operatorname{Stab}^\dagger(S), \quad (B, \omega) \mapsto \sigma_{\omega, B},$$

che, in generale, non sarà surgettivo. Ma questo non è davvero un problema per studiare gli spazi di moduli: infatti, abbiamo accennato alla divisione di $Stab^\dagger(S)$ in *muri* e *camere* e abbiamo accennato al fatto che la nozione di stabilità rimane costante in ciascuna camera, analogamente a quanto accade alla classica stabilità con la suddivisione del *cono ampio*. Quindi, possiamo accontentarci di studiare una fettina **bidimensionale** di $Stab^\dagger(S)$, che da Macrì viene chiamata **piano** (α, β) , ma io chiamerò **piano** (s, t) :

$$\sigma : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \longrightarrow Stab^\dagger(S), \quad \sigma_{(s,t)} := \sigma_{tH, sH}. \quad (2.51.1)$$

Warning $\triangle!$. — Nelle loro note, **Macrì** e **Schmidt** scrivono che questa σ è un embedding, ma in realtà non è vero che ogni coppia (s, t) definisce una condizione di stabilità: questo è espresso chiaramente da Bridgeland nel suo articolo [Bri08] sulle K3, e in [CNY23] vengono descritte due regioni U_+ e U_- dove si è certi di avere condizioni di stabilità.

Preso $E \in D^b(S)$, per ogni $\mathbf{w} \in K_{num}(S)$ i **muri numerici** per E sono definiti dalle equazioni

$$\Im Z_{tH, sH}(\mathbf{v}(E)) \Re Z_{tH, sH}(\mathbf{w}) = \Im Z_{tH, sH}(\mathbf{w}) \Re Z_{tH, sH}(\mathbf{v}(E)), \quad (2.51.2)$$

che, scritte esplicitamente, descrivono una quadrica in s e t facile da studiare. A **Macioccia** è dovuta la caratterizzazione completa della struttura dei muri per qualsiasi superficie S .

2.52. Teorema (Struttura dei Muri per Superfici). — Sia $\mathbf{v} \in K_{num}(S)$ fissato.

- i) Tutti i muri numerici per \mathbf{v} sono semicerchi con centro sull'asse s , oppure sono semirette verticali;
- ii) muri distinti non si intersecano;
- iii) se $\text{ch}_0(\mathbf{v}) \neq 0$, allora il muro verticale è unico ed è definito dall'equazione

$$s = \frac{H \cdot \text{ch}_1(\mathbf{v})}{H^2 \text{ch}_0(\mathbf{v})}, \quad t > 0; \quad (2.52.1)$$

In questo caso, tutti i muri semicircolari sono inscatolati, e giacciono da un solo lato del muro.

- iv) se $\text{ch}_0(\mathbf{v}) = 0$, allora ci sono solo muri circolari inscatolati.
- v) se un muro numerico ha un punto in cui è un muro effettivo (i.e. esiste un oggetto $E \in \mathcal{A}_\sigma$ che diventa strettamente semistabile), allora il muro numerico è un muro effettivo.

Vale la pena sottolineare che non tutti i muri numerici “dividono” condizioni di stabilità diverse: possono esistere muri *superflui*, spesso chiamati *fake walls*, e muri che, una volta attraversati, trasformano gli spazi di moduli secondo fenomeni detti di *wall-crossing*. Stupefacentemente, in alcuni casi è possibile classificare esplicitamente la natura di tutti i muri e le trasformazioni birazionali ad essi legate.

2.53. Definizione. — Fissato $\mathbf{v} \in K_{num}(S)$, sia $\mathcal{W} \subset Stab^\dagger(S)$ un muro per \mathbf{v} . Indichiamo con $\sigma_0 \in \mathcal{W}$ una condizione sul muro, mentre con σ_+ e σ_- due condizioni che stanno in camere distinte, separate da \mathcal{W} . Diremo che \mathcal{W} è:

- un **fake wall** se in $M_{\sigma_+}(\mathbf{v})$ e $M_{\sigma_-}(\mathbf{v})$ non esistono curve di oggetti S-equivalenti tra loro rispetto alla stabilità indotta da σ_0 ;

- un **muro totalmente semistabile** se $M_{\sigma_0}(\mathbf{v}) = \emptyset$;
- un **flopping wall** se esiste una *flopping contraction* $M_{\sigma_+}(\mathbf{v}) \dashrightarrow M_{\sigma_-}(\mathbf{v})$;
- un **muro divisoriale** se esiste una contrazione divisoriale $\pi_{\pm} : M_{\sigma_{\pm}}(\mathbf{v}) \rightarrow \overline{M}_{\pm}$ verso una varietà proiettiva irriducibile e normale.

Non mi soffermo sul significato delle definizioni per due motivi: il primo è che non conosco queste trasformazioni, note in geometria birazionale; il secondo è che saremo interessati solamente ai **muri totalmente semistabili**.

2.54. Esempio. — Sia S una superficie K3 proiettiva. Esistono molti risultati di classificazione degli spazi $M_{S,H}(\mathbf{v})$ in base al vettore di Mukai $\mathbf{v} = (r, c, a)$ fissato, e in particolare **Bayer e Macrì** (tra gli altri) hanno portato a conclusione lo studio degli spazi dei moduli di oggetti Bridgeland semistabili:

2.55. Proposizione. — Sia $\mathbf{v} = m\mathbf{v}_0$ con $m > 0$ e \mathbf{v}_0 una classe primitiva. Supponiamo che σ sia **v-generica**, ovvero non giaccia su alcun muro numerico per \mathbf{v} . Se $\mathbf{v}_0^2 \geq -2$, allora $M_{\sigma}(\mathbf{v}) \neq \emptyset$, ha dimensione $\mathbf{v}^2 + 2$ e $M_{\sigma}^s(\mathbf{v}) \neq \emptyset$ (con l'eccezione $\mathbf{v}_0^2 \leq 0$ e $m > 1$). Inoltre, se $\mathbf{v}_0^2 > 0$, allora $M_{\sigma}(\mathbf{v})$ è una varietà normale, proiettiva e irriducibile.

Ora che sappiamo quando i moduli esistono, concentriamoci sui muri. Il **reticolo di Mukai** di S è definito come

$$H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) := H^0(S; \mathbb{Z}) \oplus \text{NS}(S) \oplus H^4(S; \mathbb{Z}),$$

e il **vettore di Mukai**

$$\mathbf{v} : K_{num}(S) \longrightarrow H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}), \quad \mathbf{v}(E) := \text{ch}(E) \smile \sqrt{\text{td}(S)} = (\text{rk}(E), c_1(E), \text{rk}(E) + \text{ch}_2(E))$$

induce un'isometria, dove il prodotto scalare è dato dal **pairing di Mukai**

$$\langle (r, c, a), (r_1, c_1, a_1) \rangle := c \cdot c_1 - ra_1 - r_1a,$$

che dunque per $E, F \in \mathbf{Coh}(S)$ coincide con il prodotto di Eulero

$$\langle \mathbf{v}(E), \mathbf{v}(F) \rangle = -\chi(E, F) = \sum_{p=0}^2 (-1)^{p+1} \text{ext}^p(E, F).$$

Nell'(s, t)-plane, la formula esplicita (2.47.2) della carica centrale diventa

$$Z_{(s,t)}(\mathbf{v}) = \langle e^{sH+itH}, (r, c, a,) \rangle = \left(s(c \cdot H) - a - rH^2 \frac{s^2 - t^2}{2} \right) + itH \cdot (c - rsH),$$

pertanto, se $\mathbf{v}_1 \in H_{alg}^*(S; \mathbb{Z})$ è un altro vettore, l'equazione (2.51.2) del muro per \mathbf{v} definita da \mathbf{v}_1 si può riscrivere come:

$$\frac{s^2 + t^2}{2} [r_1(c \cdot H) - r(c_1 \cdot H)] - s(r_1a - ra_1) = \frac{1}{H^2} [a_1(c \cdot H) - a(c_1 \cdot H)]. \quad (2.55.1)$$

Possiamo semplificare l'espressione come $\frac{\varepsilon}{2}(s^2 + t^2) - \gamma s = \frac{\delta}{H^2}$ ponendo

$$\varepsilon := r_1(c \cdot H) - r(c_1 \cdot H), \quad \delta := a_1(c \cdot H) - a(c_1 \cdot H), \quad \gamma := r_1a - ra_1; \quad (2.55.2)$$

si noti che $\varepsilon = 0$ significa che \mathbf{v} e \mathbf{v}_1 hanno la stessa pendenza μ e, in tal caso, il muro identificato da \mathbf{v}_1 è verticale. Altrimenti, abbiamo una semicirconferenza centrata sull'asse s . La seguente classificazione è dovuta a **Bayer** e **Macrì** [BM14, Theorem 5.7]:

2.56. Teorema. — *Supponiamo $\mathbf{v}^2 > 0$. Un muro numerico $\mathcal{W} \subset \text{Stab}^\dagger(S)$ dato dall'equazione (2.51.2) è totalmente semistabile se e solo se \mathbf{w} soddisfa una delle due condizioni:*

- $\mathbf{w}^2 = 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1$;
- $\mathbf{w}^2 = -2$, i.e. è una classe sferica effettiva, e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$.

2.57. Esempio. — Sia S una superficie di Enriques proiettiva. Ci concentreremo sul caso di una generica Enriques **non-nodale**, i.e. S non contiene (-2) -curve; in questo caso, il numero di Picard è 10 e quindi il diamante di Hodge appare così:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \\ 0 & & 10 & & 0 \\ & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \\ & 1 & & & . \end{array}$$

Per una tale S , consideriamo il reticolo

$$\Lambda = H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) := \left\{ \left(r, c, \frac{a}{2} \right) \mid r, a \in \mathbb{Z} \text{ tali che } r \equiv_2 a, c \in \text{NS}(S)/\langle K_X \rangle \right\} \subset H^*(S; \mathbb{Q}).$$

Ricordando che $\text{td}(S) = (1, 0, \frac{1}{2})$, notiamo che è ben definito il vettore di Mukai

$$\mathbf{v} : K_{num}(S) \longrightarrow H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}), \quad \mathbf{v}(E) := (\text{rk}(E), c_1(E), \frac{\text{rk}(E)}{2} + \text{ch}_2(E)),$$

compatibile con il pairing di Mukai

$$\left\langle \left(r, c, \frac{a}{2} \right), \left(r_1, c_1, \frac{a_1}{2} \right) \right\rangle := c \cdot c_1 - \frac{ra_1}{2} - \frac{r_1a}{2},$$

quindi è tutto formalmente simile al caso delle K3 e, in effetti, è compatibile: detto $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ il rivestimento universale $2 : 1$ dell'Enriques, esso induce un embedding di reticoli:

$$\pi^* : H_{alg}^*(S; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_{alg}^*(\tilde{S}; \mathbb{Z}), \quad \text{tale che } \langle \pi^*\mathbf{v}, \pi^*\mathbf{w} \rangle = 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Fissato $\mathbf{v} \in H_{alg}^*(S; \mathbb{Z})$, usando la notazione (2.55.2), l'equazione del muro individuato da $\mathbf{v}_1 = (r_1, c_1, \frac{a_1}{2})$ è

$$\varepsilon(s^2 + t^2) - \gamma s = \frac{\delta}{H^2}.$$

Lo studio degli spazi di moduli $M_\sigma(\mathbf{v})$ per le Enriques è stato effettuato nel dettaglio da **Yoshioka**; non riporto qui i criteri di esistenza, ma basti sapere che per $\mathbf{v}^2 \geq 4$ e σ condizione \mathbf{v} -generica, allora $M_\sigma(\mathbf{v})$ è non vuoto, irriducibile e normale. La classificazione completa dei muri in $\text{Stab}^\dagger(S)$ è dovuta a **Nuer** e **Yoshioka** in [NY20].

2.58. Teorema. — Sia S una generica Enriques non-nodale e $\mathbf{v} \in H_{\text{alg}}^*(S; \mathbb{Z})$ tale che $\mathbf{v}^2 \geq 4$. Allora un muro numerico $\mathcal{W} \subset \text{Stab}^\dagger(S)$ dato dall'equazione (2.51.2) è totalmente semistabile se e solo se $\mathbf{w} = (r_1, c_1, \frac{a_1}{2})$ soddisfa una delle seguenti condizioni:

- $\mathbf{w}^2 = -1$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$;
- $\mathbf{w}^2 = 0$, $\ell(\mathbf{w}) := \gcd(r, c, a) = 2$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 1$.

La teoria di Brill-Noether

Come ogni problema in geometria, il primo passo per formularlo è per le curve. Sia C una curva complessa di genere g . Con Arvid abbiamo parlato dell'esistenza degli spazi di moduli $M_C(r, d)$ di fibrati vettoriali di rango r e grado d , e in particolare nel **Teorema 2.8** abbiamo annunciato alcune sue proprietà. Il passo successivo è quello di capirne meglio la geometria e alcuni sottoluoghi speciali, andando a studiare, ad esempio, il comportamento coomologico del generico fibrato in $M_C(r, d)$.

Nel caso $r = 1$, sappiamo che i fibrati lineari di grado d sono parametrizzati da $\text{Pic}^d(C)$, che è una varietà abeliana, e il **Teorema di Riemann-Roch** mostra che $\chi(\mathcal{L}) = d - g + 1$, quindi la coomologia del generico $\mathcal{L} \in \text{Pic}^d(C)$ è essenzialmente determinato dal grado:

2.59. Proposizione. — Sia C curva di genere g e $\mathcal{L} \in \text{Pic}^d(C)$ generico, allora

$$h^0(C, \mathcal{L}) = \max\{0, d - g + 1\}, \quad h^1(C, \mathcal{L}) = \max\{0, g - d - 1\}.$$

In particolare, un generico \mathcal{L} con $\chi(\mathcal{L}) \geq 0$ ha $h^1(\mathcal{L}) = 0$.

2.60. Definizione. — Un fascio coerente \mathcal{F} su una varietà proiettiva (complessa) X soddisfa la condizione di **weak Brill-Noether** (in breve **WBN**) se \mathcal{F} ha al più un gruppo di coomologia non nullo. Chiamiamo \mathcal{F} **non-speciale** se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $i > 0$, e **speciale** altrimenti.

La classica Teoria di Brill-Noether si concentra sullo studio dei luoghi in $\text{Pic}^d(C)$ di fibrati speciali, quindi con un comportamento omologico inaspettato: solitamente, a $h > 0$ fissato, si studiano i cosiddetti

$$W_d^h := \left\{ \mathcal{L} \in \text{Pic}^d(C) \mid h^0 \geq h + 1 \right\}.$$

Per capirne la natura, è sufficiente il **numero di Brill-Noether**

$$\rho(g, h, d) := g - (r + 1)(g - d + r). \quad (2.60.1)$$

2.61. Teorema. — Se C è una generica curva di genere g , allora

- $W_d^h \neq \emptyset$ se e solo se $\rho(g, h, d) \geq 0$;
- Se $\rho(g, h, d) \geq 0$, allora W_d^h è normale, Cohen-Macaulay di dimensione $\rho(g, h, d)$, liscio al di fuori di W_d^{h+1} ; inoltre, se $\rho(g, h, d) > 0$, lo spazio W_d^h è irriducibile.

Ci sono anche generalizzazioni per fibrati vettoriali **stabili** di rango $r \geq 2$ sulle curve, e per studiarli confronta la pendenza μ con le quantità descritte sopra. Non entreremo nei dettagli, ma ci concentreremo sul problema per le superfici. Se S è una superficie complessa, emergono le seguenti difficoltà:

- la coomologia di un fibrato E su S è concentrato in ben tre gradi, i.e. $H^p(S, E) = 0$ per $p < 0$ e $p > 2$, mentre su una curva avevamo solo due possibili coomologie non nulle; in particolare, **Proposizione 2.59** mostra che tutte le curve soddisfano WBN, ma su S possono esserci più coomologie non nulle, nonostante qualche vanishing (e.g. se S è una K3, $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ ma $h^0(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 1$);
- a differenza del caso delle curve, lo stack dei fasci coerenti con invarianti fissati su S è quasi sempre riducibile; per ottenere proprietà migliori è necessario considerare i **fasci stabili** rispetto a un fibrato ampio H . Nonostante tutto, esistono casi in cui $M_{S,H}(\mathbf{v})$ sia ridotto o disconnesso, e quindi non ha senso parlare di un ‘*elemento generico*’.

Problema (Weak Brill-Noether). — Data una componente irriducibile di $M_{S,H}(\mathbf{v})$, calcolare la coomologia dell’elemento generico E in tale componente.

Esistono già risultati dettagliati nel caso di superfici razionali e nel caso di alcune superfici K -triviali, come le superfici K3, abeliane e biellittiche; un resoconto dettagliato sull’argomento è [CHN24]. Oggi vedremo come approcciare il problema per le superfici K3, usando la strategia di **Coskun, Nuer e Yoshioka**; la stessa strategia può essere usata per altre superfici K -triviali, come ad esempio le Enriques.

Il problema di Weak Brill-Noether via Bridgeland

Le superfici K -triviali S hanno una ricca struttura derivata e il **Teorema di ricostruzione di Bondal-Orlov** fallisce per queste varietà. In particolare, esistono molte autoequivalenze di Fourier-Mukai

$$\Phi^{\mathcal{E}} : D^b(S) \longrightarrow D^b(S), \quad \Phi^{\mathcal{E}}(E) := (\mathrm{pr}_2)_*(\mathrm{pr}_1^*(E) \otimes \mathcal{E}),$$

con $\mathcal{E} \in D^b(S \times S)$, che permettono (sotto opportune ipotesi) di passare tra spazi di moduli diversi. In particolare, utilizziamo una particolare trasformata di Fourier-Mukai per cambiare punto di vista al problema di WBN.

Sia S una superficie K3 proiettiva con $\mathrm{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}H$, con H ampio. Se E è un generico fascio stabile con vettore $\mathbf{v}(E) = (r, dH, a)$, dove $d > 0$, allora sappiamo già che

$$H^2(S, E) \simeq \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_S, E) \simeq \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_S)^\vee = 0,$$

dove l’annullamento è dovuto al fatto che $\mu(E) > 0 = \mu(\mathcal{O}_S)$. Quindi il problema di WBN si riduce al calcolo dell’ $h^1(E)$.

2.62. Lemma. — Sia $\Delta \subset S \times S$ la diagonale e indichiamo con \mathcal{I}_Δ l’ideale della diagonale. Sia $E \in \mathbf{Coh}(S)$ senza torsione in dimensione zero. Se $\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee$ è un fascio (in grado zero), allora E soddisfa WBN non-speciale (e inoltre è genericamente globalmente generato).

Dimostrazione. Dalla successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \longrightarrow \mathcal{O}_{S \times S} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0,$$

si ottiene un triangolo esatto di trasformate di Fourier-Mukai applicate a E , la cui successione esatta lunga in coomologia è

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{H}^0(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)) \longrightarrow H^0(S, E) \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{ev_E} E \\ &\longrightarrow \mathcal{H}^1(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(S, E) \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \\ &\longrightarrow \mathcal{H}^2(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)) \xrightarrow{\alpha_2} H^2(S, E) \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Riscrivendo le coomologie come

$$\mathcal{H}^p(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)) = \mathcal{H}^p(R\mathcal{H}om(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee, \mathcal{O}_S)) = \mathcal{E}xt^p(\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee, \mathcal{O}_S),$$

l'ipotesi che $\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee$ sia un fascio implica che il fascio $\mathcal{E}xt^p$ sia di torsione per ogni $p > 0$, da cui $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ poiché i codomini sono fasci liberi da torsione; la tesi segue. \square

Usando i criteri di Bondal e Orlov, si può anche dimostrare il seguente

2.63. Lemma. — *Il funtore $\Phi : E \mapsto \Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee$ induce un'autoequivalenza di $D^b(S)$.*

Quindi, per studiare il problema di weak Brill-Noether per E , ci siamo ricondotti a studiare quando la trasformata $\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee$ è un fascio (localmente libero). Per capirlo, useremo proprio le tecniche della teoria di Bridgeland! Infatti, all'interno di $Stab^\dagger(S)$ esiste una camera molto speciale: dato un qualsiasi punto $x \in S$, si verifica che il fascio $\mathcal{I}_\Delta|_{x \times S}^\vee$ è un oggetto $\sigma_{(s,t)}$ -stabile, per ogni $0 < s \ll 1$ e $t > 0$ in una determinata regione. Sia \mathcal{W} il muro per E determinato da $\mathbf{w} = \mathbf{v}(\mathcal{I}_\Delta|_{x \times S}^\vee[1]) = (-1, 0, 0)$, cioè la semicirconferenza

$$\mathcal{W}_0 : t^2 + s \left(s - \frac{2a}{dH^2} \right) = 0.$$

Sia \mathcal{C}_0 la camera adiacente a \mathcal{W}_0 'da sopra', in cui vale la disuguaglianza $\mu_{Z(s,t)}(\mathbf{w}) > \mu_{Z(s,t)}(\mathbf{v}(E))$.

2.64. Proposizione. — *Per ogni $(s, t) \in \mathcal{C}_0$, la trasformata Φ del **Lemma 2.63** induce un isomorfismo tra gli spazi di moduli*

$$\Phi : M_{\sigma_{(s,t)}}(r, dH, a) \xrightarrow{\sim} M_{S,H}(a, dH, r).$$

D'altra parte, a causa del **Large Volume Limit 2.49** sappiamo che per $t \gg 1$ cadiamo nella camera di Gieseker \mathcal{G} , i.e. esiste un isomorfismo di spazi di moduli $M_{\sigma_{(s,t)}}(r, dH, a) \simeq M_{S,H}(r, dH, a)$. Mettendo tutto insieme, ricapitoliamo quindi: se esiste un percorso in $Stab^\dagger(S)$ che parte da \mathcal{G} , arriva in \mathcal{C}_0 e non attraversa nessun muro totalmente semistabile, allora il generico elemento $E \in M_{S,H}(r, dH, a)$, che è $\sigma_{(s,t)}$ -semistabile per $(s, t) \in \mathcal{C}_0$, viene trasformato da Φ in un fascio μ -semistabile $\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(E)^\vee \in M_{S,H}(a, dH, r)$ e quindi deduciamo che E non ha coomologie in gradi positivi per via del **Lemma 2.62**.

Ora, come fare a capire se esistono muri totalmente semistabili? Grazie alla classificazione presentata nell'**Esempio 2.54**, il problema si riduce a studiare delle disequazioni molto elementari: infatti, osservando che \mathcal{W}_0 passa dall'origine dell' (s, t) -plane, per capire se

esistono dei muri più in alto di questo, è sufficiente studiare quando l'asse $s = 0$ interseca muri di equazione (2.51.2): quindi, una condizione necessaria che si aggiunge a quelle del **Teorema 2.58** è che $\varepsilon/\delta > 0$. In realtà, queste condizioni sono anche sufficienti, e riassumiamo tutto quanto detto nel seguente risultato:

2.65. Teorema. — *Sia S una generica $K3$ proiettiva, con $\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}H$, e fissiamo un vettore di Mukai $\mathbf{v} = (r, dH, a)$, con*

$$r \geq 0, \quad d > 0, \quad r + a \geq 0 \quad e \quad \mathbf{v}^2 > 0.$$

Se non esistono vettori $\mathbf{w} = (r_1, d_1H, a_1) \in H_{alg}^(S; \mathbb{Z})$ tali che*

$$\mathbf{w}^2 \in \{0, -1\}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < \mathbf{w}^2 + 2, \quad d \geq d_1 > 0 \quad e \quad \frac{ad_1 - a_1d}{rd_1 - r_1d} > 0, \quad (2.65.1)$$

allora E soddisfa la proprietà di weak Brill-Noether (non-speciale).

2.66. Remark. — La condizione $d \geq d_1 > 0$ in (2.65.1) deriva dalla definizione dei cuori tiltati: infatti, supponiamo che \mathbf{w} sia il vettore di Mukai di un fascio F destabilizzante tale che $F[1] \in \mathcal{F}_{(s,t)}$, i.e. $\Im Z_{(s,t)}(\mathbf{w}) = (d_1 - r_1s)tH^2 \geq 0$.

2.67. Teorema (Coskun-Nuer-Yoshioka). — *Sia S una generica $K3$ proiettiva, con $\text{Pic}(S) \simeq \mathbb{Z}H$ e $H^2 = 2h$. Consideriamo un vettore di Mukai $\mathbf{v} = (r, dH, a)$, con*

$$r \geq 2, \quad d > 0 \quad e \quad \mathbf{v}^2 \geq -2.$$

Allora:

1. *fissato $r \geq 2$, esiste un numero finito di tuple $(r, d, h, a) \in \mathbb{Z}^4$ per cui il vettore $\mathbf{v} = (r, dH, a)$ **non** soddisfa la proprietà di weak Brill-Noether;*
2. *se $h \geq r$, allora \mathbf{v} soddisfa weak Brill-Noether;*
3. *se $a \leq 1$, allora \mathbf{v} soddisfa weak Brill-Noether.*

Questo criterio offre quindi un modo sistematico per capire quando un (generico) fascio non ha coomologie superiori solamente studiandone il vettore di Mukai! I teoremi enunciati sopra possono offrire anche un modo per andare a individuare possibili controesempi al problema di WBN; tuttavia, bisogna fare attenzione, poiché non è sempre detto che l'esistenza di un \mathbf{w} che soddisfa le condizioni (2.65.1) implichi che il generico elemento $E \in M_{S,H}(\mathbf{v})$ non soddisfi WBN. In queste situazioni, è necessario raffinare i criteri e studiare più nel dettaglio cosa accade a E sul muro, ad esempio capendo la sua filtrazione di HN $E \in M_{\sigma_0}(\mathbf{v})$.

CAPITOLO 3.

3

Introduzione alle geometria birazionale

LEZIONE 9
12 nov., 2025

Forme differenziali

Sia X varietà quasi-proiettiva. Definiamo

$$\Phi^r[X] := \left\{ \varphi : X \rightarrow \bigsqcup_{x \in X} \bigwedge^r T_{X,x}^* \mid \forall_{x \in X} \varphi(x) \in \bigwedge^r T_{X,x}^* \right\}. \quad (3.0.1)$$

3.1. Definizione. — Una r -forma differenziale $\varphi \in \Phi^r[X]$ si dice **regolare** se, per ogni $x \in X$, esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\varphi|_U$ appartiene al $k[U]$ -sottomodulo di $\Phi^r[X]$ generato da elementi della forma

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_r, \quad \text{con } f_j \in k[U], \quad (3.1.1)$$

e indichiamo l'insieme delle r -forme regolari con $\Omega^r(X)$. Se $\omega \in \Omega^r(X)$, allora in un aperto affine U si scrive come

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_r} g_{i_1, \dots, i_r} df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_r}, \quad (3.1.2)$$

con $g_*, f_j \in k[U]$.

3.2. Teorema. — Sia $p \in X$ un punto liscio. Allora esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\Omega^1(U)$ è un $k[U]$ -modulo libero di rango $\dim \mathcal{O}_{X,p} =: n$.

3.3. Teorema. — Sia $p \in X$ un punto liscio. Allora esiste un aperto affine $U \subset X$ tale che $\Omega^r(U)$ è un $k[U]$ -modulo libero di rango $\binom{n}{r}$ e una base per il modulo è data da

$$\{ du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n \}, \quad (3.3.1)$$

dove gli u_j sono presi da una base di $k[U]$ fissata.

In analogia a quanto accade per le funzioni razionali, introduciamo le forme differenziali *razionali*, che andremo a identificare con una relazione d'equivalenza. Consideriamo le coppie (ω, U) , con $\omega \in \Omega^r(X)$ e $U \subset X$ un aperto. Diciamo che $(\omega, U) \sim (\omega', U')$ se $\omega|_{U \cap U'} = \omega'|_{U \cap U'}$.

3.4. Definizione. — Una classe di equivalenza rispetto a \sim è detta **r -forma differenziale razionale** su X .

Denotiamo con $\mathcal{M}^r(X)$ l'insieme delle r -forme razionali su X . È facile vedere che $\mathcal{M}^r(X)$ è un $k(X)$ -spazio vettoriale di dimensione $\binom{n}{r}$, in analogia a quanto accade per le forme regolari. Inoltre, $\mathcal{M}^r(X)$ è un invariante birazionale.

3.5. Definizione. — Una r -forma razionale ω che ha un rappresentante della forma (ω, U) si dice **regolare su U** .

3.6. Osservazione. — L'insieme dei punti su cui una r -forma razionale ω **non** è regolare forma un chiuso in X .

3.7. Esempio. — Su \mathbb{A}^n , denotiamo con z_1, \dots, z_n le coordinate. Ogni $\omega \in \mathcal{M}^n(X)$ si scrive unicamente come

$$\omega = \varphi(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n, \quad (3.7.1)$$

dove $\varphi(z) \in k(z_1, \dots, z_n)$ è una funzione razionale su \mathbb{A}^n , che si scrive come $\varphi = f/g$, per qualche $f, g \in k[z_1, \dots, z_n]$. L'insieme su cui ω non è regolare è l'ipersuperficie $\mathbb{V}(g)$.

3.8. Lemma. — $\Omega^n(\mathbb{P}^n) = 0$.

Dimostrazione. Siano $[x_0 : \dots : x_n]$ coordinate omogenee. Considero due carte affini

$$(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \quad \text{e} \quad (z_0, \dots, z_{n-1}) = \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} \right). \quad (3.8.1)$$

Notiamo che sull'intersezione vale

$$y_1 = \frac{z_1}{z_0}, \dots, y_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_0}, y_n = \frac{1}{z_0}, \quad (3.8.2)$$

quindi possiamo calcolare

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = d\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{1}{z_0}\right) = \dots = \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_{n-1}. \quad (3.8.3)$$

Poiché ogni n -forma regolare sulla prima carta affine \mathbb{A}_y^n è della forma $f(x) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$, su \mathbb{A}_z^n si scrive

$$\omega|_{\mathbb{A}_z^n} = \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} f\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_0}, \frac{1}{z_0}\right) dz_0 \wedge \dots \wedge dz_{n-1}, \quad (3.8.4)$$

che però non è regolare in $\{z_0 = 0\}$. □

3.9. Definizione. — Sia X una varietà liscia n -dimensionale. Un divisore $K_X \in \text{CaDiv}(X)$ si dice **canonico** se $K_X = \text{div } \omega$, con $\omega \in \mathcal{M}^n(X) \setminus \{0\}$. Chiamiamo **il divisore canonico** un rappresentante della classe di equivalenza di K_X .

3.10. Definizione. — Il fascio Ω_X^1 delle 1-forme differenziali regolari su X è il fascio che a ogni aperto $U \subset X$ associa il $k[U]$ -modulo $\Omega^1(U)$. Il fascio delle r -forme regolari su X verrà denotato con $\Omega_X^r := \bigwedge^r \Omega_X^1$, e per $r = n$ otteniamo il **fascio canonico** $\omega_X := \Omega_X^n$.

3.11. Osservazione. — Vale $\omega_X \simeq \mathcal{O}(K_X)$. Infatti, sia ω tale che $K_X = \text{div } \omega$ e definiamo il morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{O}(K_X) \rightarrow \omega_X$ come la mappa che sull'aperto $U \subset X$ è data da

$$\mathcal{O}(K_X)(U) \longrightarrow \Omega_X^n(U), \quad f \longmapsto f\omega|_U. \quad (3.11.1)$$

Allora φ è ben definita: infatti

$$\text{div}(f\omega|_U) = \text{div } f + \text{div } \omega_X = \text{div } f + K_X|_U \geq 0, \quad (3.11.2)$$

poiché $f \in \mathcal{O}_X(K_X)(U)$. Quindi deduciamo che $f\omega|_U$ è regolare. L'iniettività segue dal fatto che $f\omega|_U = 0$ se e solo se $f = 0$, dato che (si dimostra che) $\{\omega = 0\}$ è un chiuso. Per la surgettività, si sfrutta che $\mathcal{O}_X(K_X)$ è un fascio invertibile: infatti, sia $\eta \in \omega_X$ e consideriamo $\{U_\alpha\}_\alpha$ un ricoprimento banalizzante di U , i.e. per ogni α vale

$$\eta|_{U_\alpha} = f_\alpha \omega|_{U_\alpha}, \quad f_\alpha \in k(X). \quad (3.11.3)$$

Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, allora $\eta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\alpha \omega = f_\beta \omega$, e poiché $\omega \neq 0$ su questa intersezione, $f_\alpha = f_\beta$; da questo deduciamo che possiamo incollare le f_α a un elemento $f \in k(X)$

3.12. Esempio. — Sia $X = \mathbb{P}^n$. La n -forma razionale

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (3.12.1)$$

è regolare sull'aperto $\mathbb{D}(x_0) = \{x_0 \neq 0\}$. Nell'intersezione $U_0 \cap U_1$ abbiamo le coordinate

$$(x_0, 1, x_2, \dots, x_n) = \left(1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), \quad (3.12.2)$$

da cui deduciamo

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \cdots = \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} dx_0 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (3.12.3)$$

...

3.13. Esempio. — Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie di grado d , definita dall'equazione polinomiale $P(x) = 0$. Consideriamo la $(n-1)$ -forma definita su $U_0 \cap X$ da

$$\omega_i := (-1)^i \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_i}(1, x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.13.1)$$

Considero $0 \leq i \leq n$ tale che $\partial P / \partial x_i \neq 0$ e usiamo la liscenza di P . Se esiste un altro indice j in cui la derivata lungo x_j non si annulla, allora posso definire ω_j e si verifica con un conto che $\omega_j = \omega_i$.

Sia X liscia e $U = \bigcup_i U_i$, dove U_i sono aperti in cui $\partial P / \partial x_i \neq 0$. Allora possiamo incollare le forme ω_i in modo da definire $\omega \in \Omega^{n-1}(U_0)$. Sull'aperto $U_0 \cap U_1$ possiamo scrivere

$$\frac{d\left(\frac{1}{x_0}\right) \wedge \left(\frac{x_3}{x_0}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_0}\right)}{\frac{\partial P}{\partial x_2}\left(1, \frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)} = \frac{(-1)^{n-d}}{x^{n-(d-1)}} \frac{dx_0 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_2}(x_0, 1, x_2, \dots, x_n)} \quad (3.13.2)$$

e quindi vediamo che $K_X = -(n+1-d)H_0 \cap X$.

3.14. Osservazione. — Se $d = n + 1$, allora $K_X \sim \mathcal{O}_X$ e quindi l'ipersuperficie è Calabi-Yau. Se $d < n + 1$, allora K_X è anti-ampio e quindi X è Fano; viceversa, se $d > n + 1$ il canonico K_X è ampio, quindi X è di tipo generale.

3.15. Esempio (Blow-up). — Sia X una varietà liscia n -dimensionale. Sia $Y \subset X$ liscia di codimensione r e consideriamo il blow-up

$$\pi : \tilde{X} := \text{Bl}_Y X \longrightarrow X \quad (3.15.1)$$

con divisore eccezionale $E = \pi^{-1}(Y)$. Allora

$$K_{\tilde{X}} = \pi^* K_X + (r - 1)E. \quad (3.15.2)$$

Per dimostrarlo, ragioniamo localmente con le forme differenziali. Essendo X, Y lisce, scegliamo coordinate locali x_1, \dots, x_n su X , in modo tale che $Y = \{x_1 = \dots = x_r = 0\}$. Quindi, le coordinate del blow-up sono

$$\tilde{X} = \text{Bl}_Y X = \left\{ ((x_1, \dots, x_n), [u_1 : \dots : u_n]) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \mid \forall 1 \leq i < j \leq r \ x_i x_j = x_j x_i \right\}. \quad (3.15.3)$$

Localmente, \tilde{X} è coperto da carte affini $U_j = u_j \neq 0$; in U_1 le coordinate sono

$$x_1, \quad x_2 = u_2 x_1, \dots, x_r = u_r x_1, x_{r+1}, \dots, x_n, \quad \text{con } u_j = \frac{x_j}{x_1}, \quad (3.15.4)$$

e quindi il blow-up è localmente

$$\pi(x_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, u_2 x_1, \dots, u_r x_1, x_{r+1}, \dots, x_n). \quad (3.15.5)$$

Considero la n -forma regolare $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ su X . Tirandola indietro tramite il pull-back, si ottiene

$$\begin{aligned} \pi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= dx_1 \wedge d(u_2 x_1) \wedge \dots \wedge d(u_r x_1) \wedge dx_{r+1} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= x_1^{r-1} dx_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_r \wedge dx_{r+1} \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

...

La successione esponenziale

Sia X una varietà proiettiva liscia; la consideriamo adesso come una varietà complessa, con la topologia euclidea. Sia \mathcal{O}_{an} il fascio delle funzioni olomorfe su X e \mathcal{O}_{an}^* il sottofascio delle funzioni olomorfe mai nulle. Abbiamo il seguente morfismo surgettivo di fasci di gruppi abeliani

$$\exp : \mathcal{O}_{an} \longrightarrow \mathcal{O}_{an}^*, \quad f \longmapsto e^f. \quad (3.15.6)$$

Il nucleo è il fascio

$$\text{Ker } \exp = \{ f \in \mathcal{O}_{an} \mid \forall p \in X \ f(p) \in 2\pi i \mathbb{Z} \} \simeq \mathbb{Z}_{an}, \quad (3.15.7)$$

quindi abbiamo una successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{an} \longrightarrow \mathcal{O}_{an} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_{an}^* \longrightarrow 0, \quad (3.15.8)$$

che chiameremo **successione esponenziale**.

3.16. Remark. — La coomologia del fascio costante $H^*(X, \mathbb{Z}_{an})$ è isomorfa alla coomologia singolare $H^*(X; \mathbb{Z})$ di X con topologia euclidea.

3.17. Remark. — Il fascio \mathcal{O}_{an} è coerente nella topologia complessa, e per un fatto molto profondo (i.e. il teorema **GAGA** di Serre), esiste un isomorfismo $H^*(X; \mathcal{O}_{an}) \simeq H^*(X, \mathcal{O}_X)$. In questo modo, possiamo identificare $\text{Pic}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_{an}^*)$.

Quindi, la successione (3.15.8) induce la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow H^1(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \quad (3.17.1)$$

Siccome X è una varietà priettiva liscia, complessa e compatta, allora i gruppi di coomologia singolare $H^i(X; \mathbb{Z})$ sono finitamente generati, dunque abbiamo il teorema di struttura per \mathbb{Z} -moduli che ci permette di decomporre

$$H^i(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_i(X)} \oplus T_i, \quad (3.17.2)$$

dove T_i è sottogruppo di torsione finito e $b_i(X)$ è l' i -esimo numero di Betti.

3.18. Osservazione. — $T_1 = 0$ poiché la mappa γ è iniettiva, quindi $H^1(X; \mathbb{Z}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}^N$ e quest'ultimo non ha torsione.

3.19. Definizione. — Se $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ la **prima classe di Chern** di \mathcal{L} è $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Se D è un divisore di Cartier, scriveremo $c_1(D) = c_1(\mathcal{O}_X(D))$.

Si noti che il primo carattere di Chern è la “*giusta generalizzazione*” del **grado** di una curva; tuttavia, a differenza della funzione \deg , in generale la c_1 **non** è surgettiva.

3.20. Definizione. — Il **gruppo di Neron-Severi** di X è l'immagine del primo carattere di Chern:

$$NS(X) := \text{im } c_1 \subset H^2(X; \mathbb{Z}).$$

3.21. Remark. — Il $NS(X)$ è un gruppo abeliano finitamente generato. Il suo rango ρ_X , detto **numero di Picard** di X , è un invariante numerico di X ; inoltre, ρ_X è **invariante birazionale**. Si noti, per definizione, che $\rho_X \leq b_2(X)$. Ad esempio, se $X = C$ è una curva, allora $NS(X) \simeq H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, quindi $\rho_X = b_2(X) = 1$. Il Neron-Severi misura la “*parte discreta*” di X .

3.22. Definizione. — Il nucleo della prima classe di Chern verrà chiamato **varietà di Picard**

$$\text{Pic}^0(X) := \ker c_1 \subset \text{Pic}(X). \quad (3.22.1)$$

Dalla successione esponenziale (3.15.8), si vede che

$$\text{Pic}^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) / \ker \beta \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X; \mathbb{Z}), \quad (3.22.2)$$

quindi notiamo che è un **toro complesso** di dimensione $h^1(\mathcal{O}_X)$, per questo diciamo che misura la “*parte continua*” di X . Ovviamente abbiamo la successione esatta corta di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \text{Pic}^0(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{\exp} NS(X) \longrightarrow 0. \quad (3.22.3)$$

Il caso delle curve

Sia $X = C$ una curva proiettiva liscia. Per la classificazione delle superfici topologiche, sappiamo che C è omeomorfa a una sfera con g manici, quindi

$$H^0(X; \mathbb{Z}) \simeq H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H^1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}. \quad (3.22.4)$$

A meno di scegliere il segno dell'isomorfismo $H^2(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, allora $c_1 = \deg$ e possiamo descrivere la varietà di Picard esplicitamente, poiché

$$\mathrm{Pic}^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) / H^1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^{h^1(\mathcal{O}_X)} / \mathbb{Z}^{2g} \simeq \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}, \quad (3.22.5)$$

quindi è una varietà abeliana g -dimensionale.