

Appunti del corso di

Topologia Algebrica A

Docente
Filippo Gianluca Callegaro

Appunti scritti da
Filippo Papallo

Semestre estivo 2022/23
Università di Pisa

Questo documento contiene le note delle lezioni di *Topologia Algebrica A*, corso tenuto dai professori **Filippo Gianluca Callegaro** e **Mario Salvetti** nel secondo semestre dell'a.a. 2022/23.

Spero di riuscire ad aggiornare continuamente i file delle lezioni, che potete trovare sulla [mia pagina GitHub](#); eventuali correzioni o suggerimenti sono ben accetti e potete intervenire direttamente su GitHub, oppure scrivermi alla mail universitaria f.papallo@studenti.unipi.it.

Ultimo aggiornamento: 19 settembre 2023

Indice

Lista delle Lezioni	iv
I. Fibrizioni e cofibrizioni	1
Cofibrizioni	1
Successione di cofibrizione	7
Fibrizioni	10
II. Spazi di Eilenberg-MacLane	19
Torri di Postnikov	19
Spazi di Eilenberg-MacLane	24
Torri di Whitehead	26
Rappresentabilità della coomologia	27
Operazioni coomologiche stabili	34
III. Fibrati vettoriali	37
Fibrati principali	46
Spazi classificanti	50
Costruzione di Milnor	64
IV. Successioni spettrali	70
Applicazioni delle successioni spettrali	81
Successioni spettrali di Serre	90
Confronto di successioni spettrali	94
Classi di Serre	100
Sospensione	111
Operazioni di Steenrod	114
Calcoli di alcuni gruppi di omotopia stabile	122
Successione spettrale di Adams	124
Coppie esatte	127
References	131

Lista delle Lezioni

Lezione 1 (27th febbraio, 2023)	1
Cofibrazioni, proprietà ed esempi. Costruzione del mapping cone di una funzione continua, successione di cofibrazione, successioni coesatte e derivazione della successione di Barret-Puppe.	
Lezione 2 (3rd marzo, 2023)	10
Fibrazioni: proprietà generali. Proprietà del sollevamento dell'omotopia relativa per cofibrazioni. Successione di fibrato e definizione di fibra omotopica. Successione di fibrazione di Barratt-Puppe e successione esatta lunga di omotopia del fibrato e della coppia. Teorema di esistenza delle sezioni di Postnikov.	
Lezione 3 (6th marzo, 2023)	20
Esistenza delle sezioni di Postnikov. Unicità delle sezioni di Postnikov a meno di equivalenza omotopica debole. Costruzione della torre di Postnikov. Spazi di Moore e spazi di Eilenberg-MacLane.	
Lezione 4 (7th marzo, 2023)	26
Torri di Whitehead. Fattorizzazione di Moore-Postnikov. Unicità spazi di Eilenberg-MacLane CW complessi. Funtorialità della costruzione degli spazi di Eilenberg-MacLane. Definizione della classe fondamentale di un $K(\pi, n)$. Teorema di rappresentabilità della coomologia. Esempi.	
Lezione 5 (13th marzo, 2023)	32
Cenni al teorema di rappresentabilità. Lemma di Yoneda e applicazione alla rappresentazione della coomologia: operazioni coomologiche come gruppi di omologia di spazi di Eilenberg-Mac Lane. Omomorfismo di Bockstein. Definizioni di Ω -spettro.	
Lezione 6 (14th marzo, 2023)	35
Algebra delle operazioni coomologiche stabili. Definizione di algebra di Steenrod. Introduzione alle successioni spettrali: definizioni, filtrazioni, convergenza, modulo graduato associato ad una filtrazione, filtrazioni limitate, limite di una successione spettrale.	

LISTA DELLE LEZIONI

Lezione 7 (20th marzo, 2023)	37
Fibrati localmente banali, caso vettoriale. Funzioni di transizione. Esempi. Pull-back, varie costruzioni.	
Lezione 8 (21st marzo, 2023)	44
Metrica su fibrato. Teorema di I -invarianza. Corollari. Fibrati principali e esempi. Azione transitiva su un insieme e fibrazione associata. Fibrati associati (prodotto bilanciato). Isomorfismo tra Vect e Pring_{GL} .	
Lezione 9 (27th marzo, 2023)	50
Teorema di I -invarianza: dimostrazione surgettività. Definizione di G -CW-complessi. Definizione di G -fibrato principale universale. Teorema di classificazione.	
Lezione 10 (28th marzo, 2023)	56
Unicità del fibrato universale. Caratterizzazione tramite asfericità dello spazio totale. Esempi. Fibrato universale per i fibrati vettoriali.	
Lezione 11 (3rd aprile, 2023)	60
Caratterizzazioni equivalenti per il fibrato universale. Esempi e corollari (prima classe di Chern, prima classe di Stiefel-Whitney). Riduzione del gruppo strutturale: teorema di equivalenza tra la riduzione e il sollevamento della mappa classificante a BH . Categoria simpleso e insiemi simpliciali.	
Lezione 12 (4th aprile, 2023)	63
Join di spazi. Costruzione di Milnor del fibrato universale per un gruppo topologico. Insiemi simpliciali: realizzazione geometrica. Costruzione dello spazio simpliciale associato a un gruppo topologico. Bar complex.	
Lezione 13 (17th aprile, 2023)	77
Dimostrazione del teorema sull'esistenza della successione spettrale associata ad un complesso filtrato. Applicazione delle successioni spettrali.	
Lezione 14 (18th aprile, 2023)	88
Successione spettrale e successione della coppia. Fibrati di Serre e teorema sulla successione spettrale di omologia associata ad un fibrato di Serre. Applicazione al calcolo dell'omologia di alcuni gruppi $SU(n)$. Applicazione al calcolo di alcuni gruppi di omologia dello spazio dei loop su uno spazio X n -connesso.	

LISTA DELLE LEZIONI

Lezione 15 (24th aprile, 2023)	94
Omologia dello spazio dei loop su una sfera. Successione spettrale come funtore e teorema di confronto di successioni spettrali. Due dimostrazioni del teorema di successione spettrale di Serre.	
Lezione 16 (2nd maggio, 2023)	99
Successione spettrale di Serre di coomologia e proprietà moltiplicative. Applicazione al calcolo degli anelli di coomologia di $SU(n)$, \mathbb{CP}^n e ΩS^n . Descrizione della riga 0 e della colonna 0 della pagina E_2 della successione spettrale di Serre: identificazione con l'omologia della base e della fibra.	
Lezione 17 (8th maggio, 2023)	99
Descrizione della mappa di trasgressione nella successione spettrale di Serre. Classi di Serre di gruppi abeliani, anelli e ideali di Serre, anelli aciclici. Esempi. Verifica dell'aciclicità di alcune classi. Classi di Serre e successione spettrale di Serre. Enunciato del teorema di Hurewicz modulo classi di Serre.	
Lezione 18 (15th maggio, 2023)	110
Lez.19.	
Lezione 19 (16th maggio, 2023)	116
Lez.20.	

CAPITOLO I.

Fibrazioni e cofibrazioni

I

Cofibrazioni

LEZIONE 1
27th feb., 2023

Dati due spazi topologici X, Y , indichiamo con $Y^X := \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X a Y . Consideriamo un sottospazio $A \subset X$ e indichiamo con $i : A \rightarrow X$ la mappa di inclusione. Notiamo che, per ogni funzione $f : X \rightarrow Y$, possiamo definire la *restrizione* di f ad A come la composizione $f|_A := f \circ i$; questo induce una funzione $Y^X \rightarrow Y^A$.

Definizione. — La mappa $Y^X \rightarrow Y^A$ data dalla restrizione è una **fibrazione** se, dato un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & Y^X \\ \iota_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ I \times W & \longrightarrow & Y^A, \end{array} \quad (\text{I.0.1})$$

esiste un sollevamento $I \times W \rightarrow Y^X$ che rende il diagramma commutativo, dove ι_t è l'inclusione al “tempo t ” data da $\iota_t(w) := (t, w)$.

Per tutto il corso assumeremo che gli spazi topologici coinvolti siano localmente compatti e di Hausdorff: infatti, sotto queste ipotesi vale la *legge esponenziale*

$$\text{Hom}(X, Z^Y) \simeq \text{Hom}(X \times Y, Z). \quad (\text{I.0.2})$$

Dunque, se X e Y sono spazi localmente compatti e di Hausdorff, il diagramma (I.0.1) è equivalente a

COFIBRAZIONI

$$\begin{array}{ccc}
 W \times A & \xrightarrow{1_W \times i} & W \times X \\
 \downarrow \iota_0 \times 1_A & & \downarrow \\
 I \times W \times A & \longrightarrow & I \times W \times X \\
 & \searrow & \swarrow \text{dashed} \\
 & & Y,
 \end{array}$$

(A curved arrow also goes from $I \times W \times A$ to Y)

e riapplicando la legge esponenziale, portando W “all’esponente”, si può vedere anche come

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 \downarrow \iota_0 & & \downarrow \\
 I \times A & \longrightarrow & I \times X \\
 & \searrow & \swarrow \text{dashed} \\
 & & Y^W.
 \end{array} \tag{I.0.3}$$

Generalizziamo la proprietà descritta nel diagramma (I.0.3) sostituendo un qualsiasi spazio topologico Z a Y^W per ottenere la seguente

Definizione. — Una **cofibratura** $i : A \rightarrow X$ è una mappa continua che per ogni Z soddisfa la **homotopy extension property (HEP)**, cioè per ogni diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 \downarrow \iota_0 & & \downarrow \\
 I \times A & \longrightarrow & I \times X \\
 & \searrow & \swarrow \text{dashed} \\
 & & Z,
 \end{array} \tag{HEP}$$

esiste una mappa continua $I \times X \rightarrow Z$ che completa il diagramma.

Data una funzione continua $f : X \rightarrow Y$, ricordiamo che il **mapping cylinder** è lo spazio topologico

$$M_f := (I \times X \sqcup Y) / \sim,$$

dove \sim è la relazione d’equivalenza che identifica $(0, x) \sim f(x)$, per ogni $x \in X$, ed è banale altrove. Ricordiamo la seguente caratterizzazione delle cofibrature:

I.1. Teorema. — *I seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) *la mappa $i : A \rightarrow X$ è una cofibrazione;*
- (ii) *la mappa i ha la **(HEP)** per il mapping cylinder M_i ;*
- (iii) *la funzione $s : M_i \rightarrow I \times X$ ammette una retrazione, i.e. esiste $r : I \times X \rightarrow M_i$ tale che $rs = \mathbf{1}_{M_i}$.*

I.2. Proposizione. — *Una cofibrazione è un **embedding**.*

Osservazione. — In generale, se $i : A \rightarrow X$ è un embedding, allora $s : M_i \rightarrow I \times X$ è continua e iniettiva, ma può *non* essere un embedding. Se $i : A \hookrightarrow X$ è un'inclusione di sottospazio, allora s mappa bigettivamente

$$M_i \longrightarrow (I \times A) \cup (\{0\} \times X).$$

Ora, se $A \subset X$ è **chiuso**, allora s è un omeomorfismo con l'immagine; altrimenti, se A non chiuso oppure i non è una cofibrazione, la topologia di M_i può non coincidere con quella indotta su $N := (I \times A) \cup (\{0\} \times X)$.

Esempio. — Data l'inclusione di $A = (0, 1]$ nell'intervallo chiuso $X = [0, 1]$, consideriamo la successione $\left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ sulla diagonale del quadrato X^2 . Notiamo che in $N \subset X^2$ con la topologia prodotto la successione converge a $(0, 0)$, mentre invece non converge in M_i perché nella topologia quoziente esistono intorni aperti U dell'origine che intersecano la diagonale unicamente in $(0, 0)$, come ad esempio $U = (\{0\} \times X) \cup \{ (x, y) \mid x < y \}$. Questo mostra che la topologia di M_i è *più fine* della topologia prodotto di N , quindi i due spazi non sono omeomorfi.

Si può dimostrare che, se X è di Hausdorff, allora l'immagine di una cofibrazione $i : A \rightarrow X$ è chiusa. Si può dedurre dunque che un'inclusione chiusa $A \subset X$ è una cofibrazione se e solo se la mappa $(I \times A) \cup (\{0\} \times X) \hookrightarrow I \times X$ ha una retrazione.

Definizione. — Dato $x \in X$, diciamo che x è un **punto base non degenero** se $\{x\} \hookrightarrow X$ è una cofibrazione; in tal caso, si dice che (X, x) è **ben puntato**.

Esempio. — L'inclusione $S^{n-1} \subset D^n$ è una cofibrazione.

Esercizio. — La classe delle cofibrazioni è chiusa per le seguenti operazioni:

COFIBRAZIONI

- (i) **cambio di cobase:** se $i : A \rightarrow X$ è una cofibrazione e $\alpha : A \rightarrow B$ una qualsiasi funzione continua, allora la mappa i^B in basso al diagramma di pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{i^B} & X \cup_A B, \end{array}$$

è una cofibrazione, dove $X \cup_A B$ è ottenuto come quoziente di $X \sqcup B$ per la relazione d'equivalenza $\alpha(a) \sim i(a)$, per ogni $a \in A$.

- (ii) **coprodotto:** data una famiglia di cofibrazioni $\{ A_j \rightarrow X_j \}$, allora anche $\coprod A_j \rightarrow \coprod X_j$ è una cofibrazione.
- (iii) **composizione:** se $i : A \rightarrow X$ e $j : X \rightarrow Y$ sono cofibrazioni, allora anche $j \circ i : A \rightarrow Y$ è a sua volta una cofibrazione.

Una soluzione. (i) Sia Z uno spazio topologico qualsiasi e consideriamo due mappe $h : I \times B \rightarrow Z$ e $f : X \cup_A B$. Componendole con le mappe del pushout, queste inducono un'omotopia $h \circ (\mathbf{1}_I \times \alpha) : I \times A \rightarrow Z$ e una funzione continua $X \rightarrow Z$; siccome i è una cofibrazione, allora $h \circ (\mathbf{1}_I \times \alpha)$ si estende a un'omotopia $h' : I \times X \rightarrow Z$, quindi otteniamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} I \times A & \longrightarrow & I \times X \\ \mathbf{1}_I \times \alpha \downarrow & & \downarrow \\ I \times B & \longrightarrow & I \times (X \cup_A B) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow h' \\ \nearrow h \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ Z \end{array},$$

che tramite l'aggiunzione (I.0.2) diventa equivalente a

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & X \cup_A B \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ Z^I \end{array},$$

e quindi per la proprietà del pushout vediamo che esiste un'estensione $X \cup_A B \rightarrow Z^I$ che rende commutativo il diagramma.

- (ii) Per prima cosa, si noti che lo spazio $I \times (\coprod A_j)$ è omeomorfo al coprodotto $\coprod (I \times A_j)$: infatti, ricordiamo che una mappa $f : \coprod A_j \rightarrow Z$ equivale a dare una famiglia di mappe $f_j : A_j \rightarrow Z$, quindi per ogni spazio topologico Z si hanno le *bigezioni* naturali

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I \times (\coprod A_j), Z) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\coprod A_j, Z^I) \\ &\simeq \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(A_j, Z^I) \\ &\simeq \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(I \times A_j, Z), \end{aligned}$$

e quindi si conclude che $I \times (\coprod A_j) \simeq \coprod (I \times A_j)$ per il **Lemma di Yoneda**. Dunque, data una famiglia di cofibrazioni $A_j \rightarrow X_j$ e uno spazio Z qualsiasi, tutte le omotopie nei diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A_j & \longrightarrow & X_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times A_j & \longrightarrow & I \times X_j \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \text{curved arrow} \\ \searrow \\ \text{dashed arrow } H_j \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ Z \end{array}$$

si estendono a omotopie $H_j : I \times X_j \rightarrow Z$, e quindi inducono una mappa $H : \coprod (I \times X_j) \rightarrow Z$ che, dopo aver composto con l'omeomorfismo del ragionamento sopra, rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \coprod A_j & \longrightarrow & \coprod X_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times (\coprod A_j) & \longrightarrow & I \times (\coprod X_j) \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \text{curved arrow} \\ \searrow \\ \text{dashed arrow } H \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ Z \end{array}.$$

- (iii) Dato un qualsiasi spazio topologico Z e due mappe $f : Y \rightarrow Z$, $f : I \times A \rightarrow Z$, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I \times A & \longrightarrow & I \times X & \longrightarrow & I \times Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \text{curved arrow} \\ \searrow \\ \text{dashed arrow } h' \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \text{curved arrow} \\ \searrow \\ \text{dashed arrow } H \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ Z \end{array}.$$

Siccome i è una cofibrazione, allora possiamo estendere h a un'omotopia $h' : I \times X$, quindi in un secondo momento possiamo concentrarci sul quadrato più a destra e usare la (HEP) di j per ottenere un'estensione $H : I \times Y \rightarrow Z$ che rende commutativo il quadrato; questo mostra che $j \circ i$ è una cofibrazione.

□

Esempio. — L'inclusione $Y \subset X$ di un sottocomplesso CW è una cofibrazione.

I.3. Proposizione. — Sia $i : A \rightarrow X$ una cofibrazione. Se A è uno spazio contraibile, allora la mappa quoziente $p : X \rightarrow X/A$ è un'equivalenza omotopica.

Dimostrazione. Sia $h : I \times A \rightarrow A$ omotopia di contrazione, cioè tale che per ogni $a \in A$ valga $h(0, a) = a$ e $h(1, a) = x$, per qualche $x \in A$. Siccome i è una cofibrazione, possiamo estendere $i \circ p$ a un'omotopia $H : I \times X \rightarrow X$, ottenendo così il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 \wr_0 \downarrow & & \downarrow \\
 I \times A & \longrightarrow & I \times X \\
 & \searrow i \circ h & \downarrow H \\
 & & X
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow 1_X \\
 \downarrow
 \end{array}$$

dal diagramma deduciamo che $H(1, a) = x$ per ogni $a \in A$, quindi deduciamo che fattorizza attraverso la proiezione:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{H_1} & X \\
 p \searrow & & \nearrow \pi \\
 & X/A &
 \end{array}
 .$$

Notiamo che $\pi \circ p = H_1$ è omotopa all'identità di X dato che $H_0 = 1_X$.

Vogliamo ora costruire un'omotopia tra $p \circ \pi$ e $1_{X/A}$ per concludere che p è un'equivalenza omotopica. Siccome H è un'omotopia che manda $I \times A \rightarrow A$, definisce una mappa \bar{H} che fa commutare il quadrato

$$\begin{array}{ccc}
 I \times X & \xrightarrow{H} & X \\
 1_I \times p \downarrow & & \downarrow p \\
 I \times A & \xrightarrow{\bar{H}} & A,
 \end{array}$$

dove notiamo che \overline{H} è un'omotopia tra $\overline{H}_0 = \mathbf{1}_{X/A}$ e $\overline{H}_1 = p \circ \pi$, dunque si ha la tesi. \square

Successione di cofibrazione

Definizione. — Sia $*$ $\in X$ un punto base. Un'omotopia puntata è una mappa

$$X \wedge I_* := X \times I / * \times I \longrightarrow X.$$

Data una mappa $f : X \rightarrow Y$, definiamo il suo **mapping cylinder ridotto** come lo spazio

$$M(f) := (Y \times \{0\}) \cup_{X \times \{0\}} (X \wedge I_*).$$

Una **cofibrazione puntata** è una mappa $i : A \rightarrow X$ tale che $M(i)$ sia un retrato di $X \wedge I_*$.

I.4. Fatto. — *Ogni mappa continua $f : X \rightarrow Y$ fattorizza attraverso il proprio mapping cylinder ridotto*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_1} & M(f) & \longrightarrow & Y \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

Si può inoltre dimostrare che l'immersione $\iota_1 : X \rightarrow M(f)$ è una cofibrazione e $M(f) \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica; per questo motivo quando parliamo di cofibrazioni possiamo considerare delle inclusioni.

Esempio. — Dato uno spazio X , il **cono** di X può essere visto come

$$CX = M(X \rightarrow *),$$

dunque abbiamo una fattorizzazione $X \rightarrow CX \rightarrow *$.

Definizione. — Definiamo il **mapping cone** di una mappa $f : X \rightarrow Y$ come il pushout $C(f)$ del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & X & \longrightarrow & * & \\ & \downarrow \iota_1 & & \downarrow & \\ Y & \xleftarrow{\sim} & M(f) & \longrightarrow & C(f). \end{array}$$

Esempio. — Possiamo vedere la sospensione di uno spazio X come il mapping cone di una mappa costante

$$\Sigma X = C(X \rightarrow *).$$

Osservazione. — Il pushout che definisce $C(f)$ può essere costruito anche in un altro modo: se consideriamo la cofibrazione $\iota_1 : X \rightarrow CX$ al posto della mappa costante, possiamo definire il mapping cone di f come il pushout del diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & * \\ & \nearrow & \uparrow \\ X & \xrightarrow{\iota_1} & CX \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & C(f). \end{array}$$

Le due costruzioni sono omeomorfe tramite la mappa che “inverte il tempo”, cioè $t \mapsto 1 - t$.

Se f è una cofibrazione, allora anche $CX \rightarrow C(f)$ è a sua volta una cofibrazione (per cambio di cobase). Dato che il cono CX è contraibile, per [Proposizione I.3](#) deduciamo che $C(f)$ è omotopicamente equivalente a

$$C(f)/CX \simeq Y/X.$$

Abbiamo così provato il seguente

I.5. Lemma. — *Sia $f : X \rightarrow Y$ una cofibrazione. La mappa $C(f) \rightarrow Y/X$ è un’equivalenza omotopica.*

Definizione. — Una **successione di cofibrazione** è un diagramma omotopicamente equivalente a

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C(f),$$

per qualche f .

Si noti che la composizione $i(f) \circ f$ è omotopicamente banale, con omotopia

$$h : X \times I \longrightarrow C(f), \quad h(x, t) = [x, t],$$

dove $h_0 \sim f$ e h_1 è costante.

I.6. Fatto. — La coppia di mappe $(i(f), h)$ soddisfa la seguente proprietà universale: data una qualsiasi funzione continua $g : Y \rightarrow Z$ e un'omotopia H tale che $H_0 = g \circ f$ e H_1 sia costante, esiste un'unica $C(f) \rightarrow Z$ che estende g e induce H .

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i(f)} & C(f) \\ & \searrow & \downarrow g & \swarrow \exists! & \\ & & Z & & \end{array} .$$

I.7. Lemma. — Data una mappa di spazi puntati $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ e un qualsiasi spazio puntato (Z, z) , la sequenza di insiemi puntati

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{i(f)^*} [C(f), Z]$$

è **esatta**, cioè $\text{im}(i(f)^*) = (f^*)^{-1}([*])$.

Definizione. — Una successione di mappe puntate $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ si dice **coesatta** se, per qualsiasi spazio puntato (W, w) , dopo aver applicato $[-, W]$ si ottiene una sequenza esatta come nel [Lemma I.7](#).

Esempio. — Il [Lemma I.7](#) mostra che la successione $X \rightarrow Y \rightarrow C(f)$ è coesatta.

La costruzione del mapping cone $C(f)$ è funtoriale ed è determinata solamente da f . Riapplicando la costruzione a $i(f) : Y \rightarrow C(f)$ possiamo continuare la sequenza di mappe

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i(f)} C(f) \xrightarrow{i^2(f)} C(i(f)) \xrightarrow{i^3(f)} \dots$$

Abbiamo visto che $i(f)$ è il pushout dell'inclusione $X \rightarrow CX$ lungo $f : X \rightarrow Y$; dato che il cono è contraibile, per la [Proposizione I.3](#) si ha che la mappa quoziente è un'equivalenza omotopica, dunque per il [Lemma I.5](#) deduciamo che

$$CX \xrightarrow{\sim} C(i(f))/CY = Cf/Y = \Sigma X .$$

In questo modo otteniamo la sequenza

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i(f)} & C(f) & \xrightarrow{i^2(f)} & C(i(f)) & \xrightarrow{i^3(f)} & C(i^2(f)) & \xrightarrow{i^4(f)} & \dots \\ & & & & \searrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ & & & & & & \Sigma X & \xrightarrow{-\Sigma f} & \Sigma Y & \xrightarrow{-\Sigma i(f)} & \dots \end{array}$$

dove la sospensione di f è definita come la mappa

$$-\Sigma f([t, x]) := [1 - t, f(x)].$$

Considerando dunque la riga inferiore, otteniamo la sequenza

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C(f) \rightarrow \Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma C(f) \rightarrow \Sigma^2 X \rightarrow \dots \quad (\text{I.7.1})$$

detta **successione di Barret-Puppe**. La successione (I.7.1) è coesatta, cioè che ogni coppia di mappe consecutive è coesatta nel senso del Lemma I.7.

Osservazione. — Data una coppia (X, A) , allora vale

$$\widetilde{H}_*(X/CA) = H_*(X, A),$$

infatti si ha

$$H_*(X \cup CA) = H_*(X \cup CA, *) = H_*(X \cup CA, CA) = H_*(X \cup CA|_{\leq \frac{1}{2}}, CA|_{\leq \frac{1}{2}}) = H_*(X, A),$$

mentre dal fatto che $i : A \rightarrow X$ è una cofibrazione si ha $X \cup CA \simeq X/A$ e dunque $H_*(X \cup CA) = \widetilde{H}_*(X/CA)$.

Fibrazioni

LEZIONE 2
3rd mar., 2023

Lo scopo di oggi è costruire una successione esatta per le fibrazioni, analogamente a quanto fatto per la successione di Barret-Puppe.

Definizione. — L' n -esimo gruppo di omotopia di X è

$$\pi_n(X, *) := [(I^n, \partial I^n), (X, *)].$$

Definiamo la versione relativa come

$$\pi_n(X, A, *) := [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, *)],$$

dove $J^k := (\partial I^k \times I) \cup (I^k \times \{0\}) \simeq \partial I^n$ a cui è stata levata la faccia $I^{n-1} \times \{1\}$.

Osseviamo che la restrizione alla faccia $I^{n-1} \times \{1\}$ induce

$$\pi_n(X, A, *) \rightarrow \pi_n(A, *),$$

e ricordiamo che l'inclusione $* \subset A$ induce

$$\pi_{n+1}(X, *) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, *) \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, *) \rightarrow \pi_n(A, *) \dots$$

Vogliamo dimostrare che questa è una successione esatta.

Definizione. — Una **fibrazione** è una mappa $p : E \rightarrow B$ che soddisfa la **homotopy lifting property (HLP)** per ogni spazio W , cioè ogni quadrato commutativo della forma

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & E \\ \iota_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ I \times W & \longrightarrow & B, \end{array} \quad (\text{HLP})$$

ammette un sollevamento $I \times W \rightarrow E$ che fa commutare il diagramma.

I.8. Esercizio. — Le fibrazioni sono chiuse rispetto alle seguenti operazioni:

- (i) **cambio di base:** se $p : E \rightarrow B$ è una fibrazione, e consideriamo il *pullback* lungo una qualsiasi mappa $X \rightarrow B$ continua

$$\begin{array}{ccc} f^*X := X \times_B E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

allora anche la mappa $X \times_B E \rightarrow X$ è una fibrazione;

- (ii) **prodotti arbitrari:** data una famiglia di fibrazioni $p_i : E_i \rightarrow B_i$, allora anche $\prod E_i \rightarrow \prod B_i$ è una fibrazione;
- (iii) **composizione:** se $p : E \rightarrow B$ e $q : B \rightarrow B'$ sono fibrazioni, allora anche $q \circ p$ è una fibrazione;
- (iv) **esponenziazione:** se $p : E \rightarrow B$ è fibrazione, allora per ogni spazio A la mappa indotta per post-composizione $E^A \rightarrow B^A$ è ancora una fibrazione.

Una soluzione. Le dimostrazioni dei punti (ii) e (iii) sono analoghi a quelli per le cofibrazioni, ma con le frecce in direzione opposta.

- (i) Sia W uno spazio qualsiasi e consideriamo una mappa $W \rightarrow B$ e un'omotopia $h : I \times W \rightarrow B$. Si ha dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & X \times_B E & \longrightarrow & E \\ \iota_0 \downarrow & & \downarrow & \nearrow h' & \downarrow p \\ I \times W & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

FIBRAZIONI

e sfruttiamo che p è una fibrazione per sollevare $f \circ h$ a un'omotopia $h' : I \times W \rightarrow E$. Il sollevamento $H : I \times W \rightarrow X \times_B E$ si ottiene dunque dalla costruzione del pullback:

$$\begin{array}{ccccc}
 I \times W & & & & \\
 \swarrow & \xrightarrow{h'} & & & \\
 & & X \times_B E & \longrightarrow & E \\
 \searrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 & & X & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

- (iv) Ricordiamo che per la *legge esponenziale*, i due diagrammi sotto sono equivalenti

$$\begin{array}{ccc}
 W \longrightarrow E^A & & W \times A \longrightarrow E \\
 \downarrow \iota_0 & \xleftarrow{(I.0.2)} & \downarrow \iota_0 \\
 I \times W \longrightarrow B^A & & I \times (W \times A) \longrightarrow B
 \end{array}$$

quindi guardando il quadrato di destra troviamo un sollevamento $I \times W \times A \rightarrow E$ perché p è una fibrazione, e quindi la troviamo anche a livello degli esponenziali riapplicando l'aggiunzione (I.0.2).

□

D'ora in poi lavoreremo nella categoria degli spazi puntati, con punto base *non-degenere*.

I.9. Lemma (HLP relativa). — *Sia $A \subset X$ una cofibrazione chiusa e sia $p : E \rightarrow B$ una fibrazione. Allora esiste un sollevamento*

$$\begin{array}{ccc}
 (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
 X \times I & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

I.10. Proposizione. — *Se $i : A \rightarrow B$ è una cofibrazione chiusa e puntata di spazi localmente compatti, con punti base non degeneri, allora la mappa di restrizione di funzioni*

$$X_*^B \longrightarrow X_*^A, \quad f \longmapsto f \circ i,$$

è una fibrazione.

FIBRAZIONI

Dimostrazione. Dato uno spazio V , consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & X_*^B \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow \\ I \times V & \longrightarrow & X_*^A, \end{array}$$

e usando la legge esponenziale possiamo riscriverlo come

$$\begin{array}{ccc} V \times A & \xrightarrow{1 \times i} & V \times B \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow \iota_0 \\ I \times V \times A & \longrightarrow & I \times V \times B \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ X, \end{array}$$

e notiamo che la freccia tratteggiata esiste perché i soddisfa la (HEP). \square

Osservazione. — L'ipotesi di locale compattezza ci è servita per dire che l'aggiunzione

$$C(V, C(A, X)) \simeq C(V \times A, X)$$

è un omeomorfismo (vedi [Die08, p. 2.4]). Nel caso $(B, A, *) = (I, \partial I, 0)$ abbiamo

$$X_*^I = P(X) = \{ \omega : I \rightarrow X \mid \omega(0) = * \},$$

quindi abbiamo una naturale mappa di valutazione al tempo $t = 1$, la quale definisce una mappa continua $ev_1 : P(X) \rightarrow X$ che inoltre è una fibrazione.

Da Lemma I.9 otteniamo il seguente

I.11. Corollario. — *Sia $p : E \rightarrow B$ una fibrazione e siano $g : W \rightarrow E, f : W \rightarrow B$ mappe tali che $p \circ g \sim f$, cioè g è un sollevamento di f a meno di omotopia.*

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Allora g è omotopa a un vero sollevamento \bar{g} di f , cioè esiste $\bar{g} : W \rightarrow E$ tale che $p \circ \bar{g} = f$ e $\bar{g} \sim g$.

Dal [Corollario I.11](#) segue che $g : W \rightarrow E$ tale che $p \circ g \sim *$, allora g è omotopa a $\bar{g} : W \rightarrow p^{-1}(*)$ e quindi, posto $F := p^{-1}(*)$, la **successione di fibrato**

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

è **esatta**, cioè per ogni spazio W ben puntato, otteniamo una successione esatta di insiemi puntati

$$[W, F]_* \longrightarrow [W, E]_* \longrightarrow [W, B]_* .$$

Se $f : X \rightarrow Y$ non è una fibrazione, possiamo fattorizzare

$$X \longrightarrow T(f) := \left\{ (x, \omega) \in X \times Y^I \mid \omega(1) = f(x) \right\} , \quad x \longmapsto (x, \omega_{f(x)}) ,$$

dove $\omega_{f(x)}$ è il cammino costante nel punto $f(x)$. Si osserva che questa “inclusione” è in realtà un’equivalenza omotopica: per vederlo, è sufficiente “riavvolgere” ogni cammino sulla seconda componente fino al tempo 0 in maniera continua. Otteniamo così il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & T(f) \\ & \searrow f & \swarrow ev_0 \\ & Y & \end{array} .$$

Esercizio. — La valutazione $p = ev_0 : T(f) \rightarrow Y$ è una fibrazione.

Una soluzione. Dato uno spazio W qualsiasi e diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & F(f) \\ \iota_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow ev_0 \\ I \times W & \longrightarrow & Y , \end{array}$$

ricordiamo che g è della forma $g_X \times g_{Y^I}$, con $g_X : W \rightarrow X$ e $g_{Y^I} : W \rightarrow Y^I$ tali che $f(g_X(w)) = g_{Y^I}(w)(0)$, quindi possiamo sempre trovare un sollevamento H che fa commutare il diagramma definendo

$$H(t, w) := \left(g_X(w), g_{Y^I}(w)(t) \right) .$$

□

Definizione. — La **fibra omotopica** di f è la fibra di $p : T(f) \rightarrow Y$ nel punto base di Y , che è data dallo spazio

$$F(f) = \left\{ (x, \omega) \in X \times Y_*^I \mid \omega(1) = f(x) \right\},$$

dove 0 è il punto base dell'intervallo I .

La costruzione di $F(f)$ può essere descritta in maniera funtoriale come il pullback del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \longrightarrow & P(Y) = Y_*^I \\ p(f) \downarrow & & \downarrow ev_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array} \quad (\text{I.11.1})$$

Nel caso in cui f sia già una fibrazione, questa costruzione non ci dà nulla di nuovo, nel senso spiegato dal seguente

I.12. Lemma. — *Se $p : E \rightarrow B$ è una fibrazione, allora l'inclusione naturale $F \hookrightarrow F(p)$ è un'equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Vediamo la fibra omotopica $F(p)$ come pullback tramite p di $PB \rightarrow B$, dove lo spazio dei cammini liberi $PB = B_*^I$ è contraibile.

$$\begin{array}{ccc} F(p) & \longrightarrow & E \\ p(f) \downarrow & & \downarrow p \\ PB & \xrightarrow{ev_1} & B. \end{array}$$

Questo significa che “l'inclusione della fibra di $F(p) \rightarrow PB$ in $F(p)$ è un'equivalenza omotopica” (vedi Esercizio dopo), tale che la fibra è proprio $F = p^{-1}(*)$. \square

Esercizio. — In una fibrazione a base contraibile, l'inclusione della fibra nello spazio totale $F \subset E$ è una equivalenza omotopica.

La mappa $p(f) : F(p) \rightarrow X$ è una fibrazione, con fibra lo spazio dei loop

$$\Omega Y = \left\{ \omega \in Y_*^I \mid \omega(1) = \omega(0) = * \right\},$$

quindi reiterando la costruzione si ottiene la **successione di fibrazione di Barret-Puppe**

$$\dots \Omega F(f) \xrightarrow{\Omega p} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i} F(f) \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y, \quad (\text{I.12.1})$$

che è una successione esatta, dato che ogni mappa è una fibrazione (a meno di omotopia). Dunque, siccome

$$[S^0, \Omega^k X] = [S^k, X] = \pi_k(X, *),$$

applicando il funtore $[S^0, -]$ a (I.12.1) otteniamo la **successione esatta lunga in omotopia** della fibrazione.

I.13. Lemma (della fibra omotopica). — *Sia $(X, A, *)$ una coppia puntata e sia F la fibra omotopica di $A \subset X$. Allora, per ogni $n \geq 1$, c'è un isomorfismo naturale*

$$\pi_n(X, A, *) \simeq \pi_{n-1}(F, *)$$

tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, *) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, *) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \pi_{n-1}(\Omega X, *) & \xrightarrow{i} & \pi_{n-1}(F, *) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow p \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_{n-1}(A, *) \\ . \end{array}$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che

$$\pi_1(X, A, *) = [(I, \partial I, 0), (X, A, *)]$$

corrisponde alle componenti connesse per archi di

$$\{ f : I \rightarrow A \mid f(0) = *, f(1) \in A \} = F(A \rightarrow X),$$

dunque $\pi_0(F, *)$. Invece, per $n \geq 1$ si ha

$$\{ f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, *) \} = \Omega^{n-1} F(A \rightarrow X),$$

e si verifica facilmente che il diagramma commuta. \square

I.14. Corollario. — *La successione di omotopia della coppia è esatta e per $n \geq 2$ è una successione esatta di gruppi, mentre per $n \geq 3$ è successione esatta di gruppi abeliani.*

I.15. Proposizione. — *Sia $p : E \rightarrow B$ una fibrazione e, date funzioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow B$, siano E_0 e E_1 i rispettivi pullback di p . Se $f_0 \sim f_1$, allora E_0 e E_1 sono omotopicamente equivalenti.*

FIBRAZIONI

Dimostrazione. L'idea è costruire una fibrazione su B^X tale che la fibra di f sia f^*E , cioè il pullback di E tramite f . Scriviamo

$$\begin{array}{ccccc}
 & E \times_B (B^X \times X) & \longrightarrow & E & \\
 & \downarrow & & \downarrow p & \\
 * \times X & \longrightarrow & B^X \times X & \xrightarrow{ev} & B \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_{B^X} & & \\
 * & \xrightarrow{in_f} & B^X & &
 \end{array} ,$$

dove $in_f : * \mapsto f$. Dato che la composizione

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad f \quad} \\
 X \longrightarrow B^X \times X \xrightarrow{ev} B \\
 x \longmapsto (f, x) \longmapsto f(x),
 \end{array}$$

allora il diagramma sopra può essere completato da f^*E nel quadrato in alto a sinistra:

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*E & \dashrightarrow & E \times_B (B^X \times X) & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
 * \times X & \longrightarrow & B^X \times X & \xrightarrow{ev} & B \\
 \downarrow & & \downarrow \pi_{B^X} & & \\
 * & \xrightarrow{in_f} & B^X & &
 \end{array} .$$

Siccome un'omotopia tra f_0 e f_1 corrisponde a un cammino in B^X , si conclude grazie all'Esercizio che segue. \square

Esercizio. — Un cammino $\gamma : I \rightarrow B$ induce un'equivalenza omotopica tra $p^{-1}(\gamma(0))$ e $p^{-1}(\gamma(1))$.

$$\begin{array}{ccc}
 F_{\gamma(0)} & \longrightarrow & E \\
 \downarrow \iota_0 & \nearrow \Gamma & \downarrow \\
 I \times F_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\gamma} & B .
 \end{array}$$

I.16. Lemma. — Data una fibrazione $p : E \rightarrow B$, con punti base $e_0 \in E, b_0 \in B$ e $p(e_0) = b_0$, allora

$$p_* : \pi_*(E, F, e_0) \longrightarrow \pi_*(B, b_0)$$

è un isomorfismo.

FIBRAZIONI

Dimostrazione. Nella dimostrazione scriveremo htpfib per indicare la fibra omotopica, mentre fib è la semplice fibra (la controimmagine del punto base). Dato che $F(p) \rightarrow E$ è una fibrazione, sappiamo che $F \hookrightarrow F(p)$ è un'equivalenza omotopica. La Proposizione ci dice che

$$\text{htpfib}(F \subset E) \simeq \text{htpfib}(F(p) \rightarrow E).$$

Inoltre, per il Lemma si ha

$$\text{htpfib}(F(p) \rightarrow E) \simeq \text{fib}(F(p) \rightarrow E),$$

dove quest'ultima è lo spazio

$$\text{fib}(F(p) \rightarrow E) = \left\{ (e_0, \omega) \in E \times B^X \mid \omega(1) = p(e_0) = b_0 \right\} = \Omega B.$$

La tesi segue dunque dal seguente Esercizio. □

Esercizio. — L'isomorfismo ottenuto dalla composizione

$$\pi_n(E, F) \simeq \pi_{n-1}(\text{htpfib}(F \subset E), *) \rightarrow \pi_{n-1}(\Omega B, *) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$$

è la mappa indotta da p .

Esercizio. — Data la mappa puntata $f : \Sigma X \rightarrow Y$, sia $\hat{f} : X \rightarrow \Omega Y$ la mappa aggiunta. Costruire $g : CX \rightarrow PY = Y_*^I$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & CX & \longrightarrow & \Sigma Y \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow g & & \downarrow f \\ \Omega Y & \longrightarrow & PY & \longrightarrow & Y \end{array}$$

commuti.

CAPITOLO II.

Spazi di Eilenberg-MacLane

II

Torri di Postnikov

Ricordiamo il seguente teorema di **approssimazione CW**.

II.1. Teorema (di approssimazione CW). — *Sia A un CW complesso, $k \geq -1$ e Y uno spazio topologico qualsiasi. Sia $f : A \rightarrow Y$ tale che $f_* : \pi_i(A, *) \rightarrow \pi_i(Y, *)$ siano isomorfismi per $i < k$ e surgettiva per $i = k$. Allora per ogni $n > k$ (eventualmente anche $n = \infty$), esiste un CW complesso X tale che $A \subset X$ sottocomplesso, e esiste un'estensione $F : X \rightarrow Y$ tale che*

$$F_i : \pi_q(X, *) \longrightarrow \pi_q(Y, *)$$

è un isomorfismo per $q < n$ e surgettiva per $q = n$

Idea della dimostrazione. L'idea è di costruire X incollando su A celle di dimensione d , con $k \leq i \leq n$, sfruttando le informazioni contenute negli isomorfismi dei gruppi di omotopia. \square

Un procedimento analogo mi dà:

II.2. Teorema (Sezioni di Postnikov). — *Per ogni spazio topologico X e per ogni $n \geq 0$, esiste uno spazio $P_n(X)$ e una mappa $X \rightarrow P_n(X)$ tale che per ogni punto base $*$*

- (i) *la mappa indotta $\pi_q(X, *) \rightarrow \pi_q(P_n(X), *)$ è un isomorfismo per $q \leq n$;*
- (ii) *i gruppi di omotopia di grado $q > n$ si annullano: $\pi_q(P(X), *) = 0$;*

- (iii) la coppia $(P_n(X), X)$ è un CW complesso relativo con celle di dimensione almeno $n + 2$.¹

Dimostrazione. Possiamo assumere che X sia connesso, lavorando una componente connessa per volta. Il nostro scopo è quello di “uccidere” i gruppi di omotopia superiore di X andando a uccidere una successione di spazi

$$X = X(n) \longrightarrow X(n+1) \longrightarrow X(n+2) \longrightarrow \dots$$

con omotopia uguale a $\pi_q(X, *)$ per ogni $q \leq n$, ma l' m -esimo spazio avrà $\pi_q(X(m), *) = 0$ per $n < q \leq m$.

Poniamo $X(n) := X$ e supponiamo di aver costruito $X(m-1)$. Per ottenere $X(m)$ uccidendo $\pi_m(X(m-1), *)$ e senza ottenere nuove relazioni operiamo nel seguente modo: scegliamo dei generatori γ_i di $\pi_m(X(m-1), *)$ e dei loro rappresentanti $g_i : S^m \rightarrow X(m-1)$, che usiamo come mappe di incollamento di $(m+1)$ -celle su $X(m-1)$. In questo modo, la coppia $(X(m), X(m-1))$ così ottenuta è m -connessa², dunque considerando la successione esatta lunga in omotopia

$$\pi_{m+1}(X(m), X(m-1)) \xrightarrow{\partial} \pi_m(X(m-1)) \longrightarrow \pi_m(X(m)) \longrightarrow \pi_m(X(m), X(m-1)) = 0,$$

deduciamo che $\pi_m(X(m), *) = 0$ perché ∂ è surgettiva per costruzione. Si verifica infine che lo spazio $P_n(X) := \bigcup_{m \geq n} X(m)$ soddisfa le nostre richieste. \square

Definizione. — Chiamiamo lo spazio $P_n(X)$ l' **n -esima sezione di Postnikov**.

LEZIONE 3
6th mar., 2023

Esempio. — La sezione P_0 è uno spazio debolmente omotopicamente equivalente a $\pi_0(X)$.

Esempio. — Sia X uno spazio connesso per archi. La sezione $P_1(X)$ è uno spazio connesso per archi con

$$\pi_1(P_1(X), *) \simeq \pi_1(X)$$

e con rivestimento universale *debolmente contraibile*³.

¹Quindi capiamo che le celle sono nella “parte non relativa” $P_n(X) \setminus X$. Gli spazi P_n sono ottenuti incollando su X celle di dimensione $\geq n+2$, in modo tale che il loro bordo sia $(n+1)$ -dimensionale e si riesca a “uccidere” l’omotopia in grado $\geq n$.

²Ricordiamo che una coppia (X, Y) è **m -connessa** se l’inclusione $Y \subset X$ induce un isomorfismo di π_i per ogni $0 \leq i \leq m$.

³Uno spazio Y è **debolmente contraibile** se $\pi_k(Y, *) = 0$, per ogni $k > 0$.

Definizione. — Uno spazio topologico X si dice **asferico** se il suo rivestimento universale è contraibile.

Osservazione. — Per ogni gruppo π , esiste un CW complesso K connesso per archi e asferico tale che $\pi_1(K, *) = \pi$. Infatti, possiamo sempre considerare una presentazione

$$F_1 \xrightarrow{a} F_0 \longrightarrow \pi \longrightarrow 0,$$

con F_1 e F_0 gruppi liberi⁴; quindi, denotando con I_j un insieme libero di generatori per F_j , possiamo definire una mappa

$$\bigvee_{I_1} S^1 \xrightarrow{\varphi_a} \bigvee_{I_0} S^1.$$

Allora, grazie al **Teorema di Van Kampen** si può verificare che il mapping cone C_{φ_a} è un CW complesso che ha il gruppo fondamentale desiderato; dato che vogliamo uno spazio asferico, allora consideriamo la sua prima sezione di Postnikov $P_1(C_{\varphi_a})$.

Osservazione. — Se X è un CW complesso, posso ottenere $P_n(X)$ come CW complesso.

Ci chiediamo dunque se le sezioni di Postnikov siano *uniche* in qualche senso.

II.3. Proposizione. — *Sia $n \geq 0$ e Y uno spazio topologico tale che $\pi_q(Y, *) = 0$, per ogni $q > n$. Dato un CW complesso relativo (X, A) in cui tutte le celle in $X \setminus A$ hanno dimensione $\geq n + 2$, allora la mappa di restrizione*

$$[X, Y] \longrightarrow [A, Y]$$

è bigettiva. Se ci sono anche $(n + 1)$ -celle, allora è iniettiva.

Dimostrazione. Usiamo che l'ipotesi $\pi_q(Y, *) = 0$, per ogni $q > n$, è equivalente al fatto che le mappe $S^q \rightarrow Y$ con immagine nella componente connessa contenente $*$ si estendono a tutto D^{q+1} .

- **Surgettività:** data $f : A \rightarrow Y$, per ogni $q \geq n + 2$ la mappa di incollamento

$$S^{q-1} \longrightarrow X^{q-1} \longrightarrow Y$$

è omotopicamente banale per ipotesi, dunque si estende a una mappa $D^q \rightarrow Y$. Ripetendo questo procedimento per tutte le celle in $X \setminus A$, definiamo così un'estensione $\bar{f} : X \rightarrow Y$;

⁴Ricordiamo il **Teorema di Nielsen-Schreier**: un sottogruppo di un gruppo libero è a sua volta libero.

- **Iniettività:** consideriamo la coppia

$$(X \times I, (X \times \partial I) \cup (A \times I))$$

come un CW complesso relativo. Se $q \geq n + 1$, per ipotesi sull'omotopia ogni q -cella di $X \setminus A$ è bordo di una cella di dimensione $q + 1$, quindi ogni coppia di mappe $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ le cui restrizioni ad A sono omotope inducono un'omotopia

$$F : (X \times \partial I) \cup (A \times I) \longrightarrow Y.$$

Ripetendo il ragionamento del punto precedente, possiamo estendere F una cella alla volta, fino a ottenere un'omotopia $\tilde{F} : X \times I \rightarrow Y$ tra f_0 e f_1 .

□

II.4. Corollario. — *Sia X un CW complesso n -connesso e Y uno spazio con omotopia concentrata in grado al più n ⁵. Ogni mappa $f : X \rightarrow Y$ è omotopa a una costante.*

Dimostrazione. Per ipotesi, possiamo considerare X come un CW complesso senza celle di dimensione $0 < d < n + 1$. Poniamo $A = \{*\}$ il punto base di X . Siccome l' n -scheletro di X consiste del solo punto base, i.e. $X_n = \{*\}$, allora la coppia $(X, *)$ soddisfa le ipotesi della [Proposizione II.3](#) e abbiamo una bigezione $[X, Y] \rightarrow [*, Y]$. □

Sia $f : X \rightarrow Y$ e consideriamo le mappe $X \rightarrow P_m(X)$ e $Y \rightarrow P_n(Y)$. Se $m \geq n$, allora per la [Proposizione II.3](#) abbiamo una bigezione $[X, P_n(Y)] \simeq [P_m(X), P_n(Y)]$, quindi *esiste un'unica* mappa (a meno di omotopia) tra le sezioni di Postnikov che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_m(X) & \xrightarrow{\exists!} & P_n(Y). \end{array}$$

⁵Cioè tale che $\pi_q(Y, *) = 0$ per ogni $q > n$.

Se consideriamo il caso particolare in cui $X = Y$ e $f = \mathbf{1}_X$, allora per ogni $m \geq n$ abbiamo un'unica mappa

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \swarrow & & \searrow \\ P_m(X) & \overset{\exists!}{\dashrightarrow} & P_n(X), \end{array}$$

dunque ponendo $m = n$ si deduce che deve essere un'equivalenza omotopica *debole*: questo significa che tutte le costruzioni che soddisfino le condizioni del [Teorema II.2](#) producono spazi topologici debolmente equivalenti. Quindi le sezioni di Postnikov sono uniche in questo senso! Questo implica che se è possibile ottenere $P_n(X)$ come CW complessi (e.g. quando X è un CW complesso), allora le sezioni di Postnikov sono uniche a meno di equivalenza omotopica.

Osservazione. — La mappa $X \rightarrow P_m(X)$ è *iniziale* nella categoria **HoTop** degli spazi topologici e funzioni continue a meno di omotopia verso gli spazi con omotopia banale in grado $> n$: più esplicitamente, se Y è uno spazio con $\pi_q(Y, *) = 0$ per $q > n$, allora ogni mappa $X \rightarrow Y$ fattorizza in maniera unica (a meno di omotopia) attraverso l' n -esima sezione di Postnikov:

$$\begin{array}{ccc} & P_n(X) & \\ & \nearrow & \downarrow \exists! \\ X & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Partendo da $Y = P_0(X)$ e $n = 1$, reiterando la costruzione sopra otteniamo una sorta di diagramma limite chiamato **torre di Postnikov**.

$$\begin{array}{ccc} & \dots & \\ & \downarrow & \\ & P_2(X) & \\ & \downarrow & \\ & P_1(X) & \\ & \downarrow & \\ X & \longrightarrow & P_0(X). \end{array} \quad (\text{TP})$$

Spazi di Eilenberg-MacLane

II.5. Proposizione. — Dato $k \geq 1$ e A un gruppo abeliano, esiste un CW complesso X tale che

$$\widetilde{H}_k(X) = A, \quad \widetilde{H}_q(X) = 0 \text{ per } q \neq k.$$

Se $k > 1$, il complesso X può essere costruito semplicemente connesso.

Dimostrazione. Consideriamo una presentazione

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{a} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

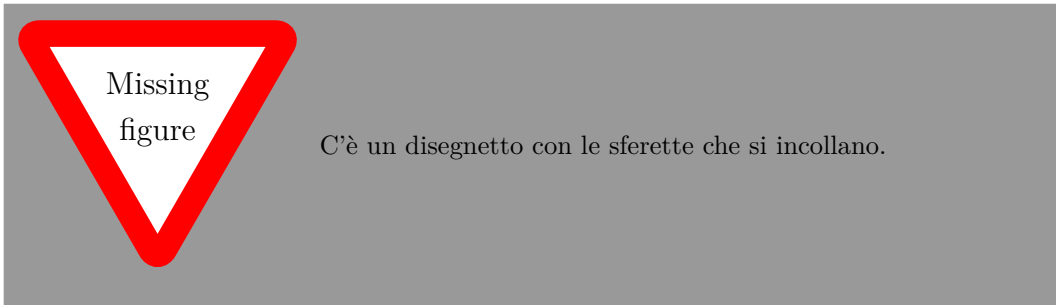
con F_1 e F_0 gruppi abeliani liberi, e sia G_i una base di generatori per F_i . Consideriamo allora il bouquet di circonferenze

$$X^{(k)} := \bigvee_{a \in G_0} S_a^k$$

e definiamo la mappa di incollamento

$$\alpha : \bigsqcup_{b \in G_1} S_b^k \longrightarrow X^{(k)}$$

indotta tramite l'omomorfismo $F_1 \longrightarrow F_0$ dato da $b \mapsto \sum_{a \in G_0} n_a a$, cioè: se $n_a \neq 0$, allora il disco b -esimo si incolla su S_a^k con una mappa $S_b^k \rightarrow S_a^k$ di grado n_a .



Per costruzione α realizza $F_1 \rightarrow F_0$ in omologia, quindi otteniamo

$$\widetilde{H}_q(X) = \begin{cases} A, & \text{se } q = k; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \square$$

Definizione. — Uno spazio X come nella [Proposition II.5](#) si chiama **spazio di Moore** e si indica con $M(A, k)$.

II.6. Fatto. — Una costruzione analoga permette di costruire anche CW complessi X di dimensione 2, il cui gruppo fondamentale è $\pi_1(X, *) = \pi$, per un qualsiasi gruppo π prefissato.

Il **Teorema di Hurewicz** ci dice che l'omotopia di uno spazio di Moore $M(\pi, n)$, con $n \geq 2$, coincide con l'omologia fino al grado n , ma in grado superiore non sappiamo nulla; possiamo “uccidere” la sua omotopia in grado superiore a n considerando il “troncato” n -esimo, ovvero la sezione di Postnikov

$$\tau_{\leq n} M := P_n(M),$$

così da ottenere uno spazio con omotopia $\pi_n(\tau_{\leq n} M, *) = \pi$ e $\pi_q(\tau_{\leq n} M, *) = 0$ se $q \neq n$.

Definizione. — Uno spazio X tale che $\pi_n(X, *) = \pi$ e

$$\pi_q(X, *) = 0, \quad \text{se } q \neq n$$

si chiama **spazio di Eilenberg-MacLane** di tipo $K(\pi, n)$.

Esempio. — Abbiamo già incontrato degli spazi di Eilenberg-MacLane nel corso di Elementi di Topologia Algebrica, come ad esempio:

- $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, il cui rivestimento universale è la retta \mathbb{R} ;
- $K(\mathbb{Z}/2, 1) = \mathbb{RP}^\infty$, il cui rivestimento universale è la sfera S^∞ ;
- $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{CP}^\infty$, il cui rivestimento universale è sempre la sfera S^∞ .

Esempio. — Se consideriamo la torre di Postnikov

$$\begin{array}{ccc} & \dots & \\ & \downarrow & \\ & \tau_{\leq 2} X & \\ & \downarrow t_2 & \\ & \tau_{\leq 1} X & \\ \nearrow & \downarrow & \\ X & \longrightarrow & \tau_{\leq 0} X, \end{array}$$

Fai questo esercizio.

la fibra omotopica di t_2 è lo⁶ spazio di Eilenberg-MacLane $F = K(\pi_2(X, *), 2)$.

⁶Nella prossima lezione dimostreremo, infatti, che gli spazi di Eilenberg-MacLane sono unici a meno di equivalenza omotopica.

Torri di Whitehead

LEZIONE 4
7th mar., 2023

Fissiamo un punto base $x \in X$ e consideriamo la fibra omotopica F dell' n -sezione di Postnikov $X \rightarrow \tau_{\leq n} X$. Dato che i due spazi hanno la stessa omotopia fino al grado n e per $q > n$ si ha $\pi_q(\tau_{\leq n} X, *) = 0$, allora la successione esatta lunga in omotopia è

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(F, *) \xrightarrow{\sim} \pi_{n+1}(X, x) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_n(F, *) \rightarrow \pi_n(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\tau_{\leq n} X, *) \rightarrow \dots$$

quindi deduciamo che la fibra ha omotopia

$$\pi_q(F, *) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \leq n; \\ \pi_q(X, x), & \text{se } q > n. \end{cases}$$

Siccome la situazione in omotopia è l'opposto di quello che succede con le sezioni di Postnikov, denotiamo la fibra $\tau_{\geq n} X := F$.

Esempio. — La fibra $\tau_{\geq 1} X$ è la componente connessa per archi del punto base $x \in X$, se $X \rightarrow \pi_0(X, x)$ è continua.

Che significa?

Esempio. — La sezione $\tau_{\geq 2} X$ è uno spazio semplicemente connesso, con la stessa omotopia superiore di X : deduciamo che è il rivestimento univale di X (nel caso in cui X sia connesso per archi e ammette rivestimento universale).

Esercizio. — La mappa $\tau_{\geq n+1} X \rightarrow X$ è unica a meno di omotopia *puntata* ed è la **mappa terminale** nella categoria **HoTop**_{*} delle mappe da spazi n -connessi in X , i.e. se Y è uno spazio con omotopia banale fino al grado n , allora ogni mappa continua $Y \rightarrow X$ fattorizza attraverso $\tau_{\geq n+1} X$.

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow \exists! & \searrow & \\ \tau_{\geq n} X & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Partendo da $Y = X$ e ripetendo la costruzione induttivamente, otteniamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \cdots & & \\
 \downarrow & & \\
 \tau_{\geq 2} X & & \\
 \downarrow t^2 & \searrow & \\
 \tau_{\geq 1} X & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 \tau_{\geq 0} X & \xlongequal{\quad} & X,
 \end{array} \tag{TW}$$

chiamato **torre di Whitehead**. In modo analogo a quanto accade per le torri di Postnikov, si verifica che la fibra di t^2 è uno spazio di Eilenberg-MacLane.

Esiste una costruzione più generale, che enunciamo nel seguente teorema (che non dimostriamo).

II.7. Teorema (Fattorizzazione di Moore-Postnikov). — *Data una mappa $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici connessi per archi, esiste una successione di spazi $T_0 f, T_1 f, \dots, T_\infty f$ e un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & & & Y \\
 \downarrow \iota_\infty & \searrow \iota_n & & \nearrow s_n & \uparrow s^0 \\
 T_\infty f & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & T_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & T_0 f
 \end{array}$$

tale che $\pi_q(\iota_n)$ sia un isomorfismo per ogni $q < n$ e $\pi_q(s_n)$ sia un isomorfismo per ogni $q \leq n$.

Dimostrazione. Vedi [Theorem~4.71]

□

Rappresentabilità della coomologia

Adesso che conosciamo la costruzione degli spazi $K(\pi, n)$, possiamo vedere che questi spazi hanno una natura “algebrica”, che ci permettono di studiare la coomologia di spazi topologici.

II.8. Lemma. — *Sia $n > 0$ intero e (Y, y) uno spazio puntato tale che $\pi_q(Y, y) = 0$ per $q \neq n$. Posto $G := \pi_n(Y, y)$, sia $M = K(\pi, n)$. La mappa indotta in omotopia*

$$\pi_n : [M, Y]_* \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi, G)$$

è un isomorfismo. In particolare, se $\pi = G$, segue che Y è omotopicamente equivalente a M .

Dimostrazione. Sia $F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \pi \rightarrow 0$ una risoluzione libera di gruppi abeliani, e consideriamo la corrispondente successione di cofibrazione

$$\bigvee_{I_1} S^n \longrightarrow \bigvee_{I_0} S^n \longrightarrow M.$$

Se denotiamo con X il cono della mappa di incollamento celle

$$X := C \left(\bigvee_{I_1} S^k \rightarrow \bigvee_{I_0} S^k \right),$$

Aiuto, è giusto?

allora per la dimostrazione della [Proposizione II.3](#) sappiamo che $\tau_{\leq n} X \simeq X$; dato che la sezione di Postnikov $X \rightarrow M$ è iniziale tra le mappe da X agli spazi Y con omotopia nulla sopra n , questo significa che $[M, Y]_* \rightarrow [X, Y]_*$ è un isomorfismo. Quindi ci basta mostrare che

$$\widetilde{\pi}_n : [X, Y]_* \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi, G)$$

è un isomorfismo. Siccome X è definito da una successione di cofibrazione, quindi una successione co-esatta, applicando $[-, Y]_*$ otteniamo la successione esatta di insiemi puntati

$$[V_{I_1} S^n, Y]_* \longleftarrow [V_{I_0} S^n, Y]_* \longleftarrow [M, Y]_* \longleftarrow [V_{I_1} S^{n+1}, Y]_*,$$

dove abbiamo usato che la sospensione commuta con fare il bouquet:

$$\Sigma \bigvee S^k \simeq \bigvee S^{k+1}.$$

Riscrivendo $[S^n, Y]_* = \pi_n(Y, y) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, si ha

$$\left[\bigvee_{I_i} S^n, Y \right]_* \simeq \text{Hom}(F_i, G),$$

quindi la successione esatta di sopra diventa quindi

$$\text{Hom}(F_1, G) \xleftarrow{f} \text{Hom}(F_0, G) \longleftarrow [X, Y]_* \longleftarrow 0,$$

dove $\ker f = \text{Hom}(\pi, G)$.

In particolare, se $\pi = G$ possiamo considerare l'unica classe in $[M, Y]_*$ corrispondente all'identità $\mathbf{1}_G \in \text{Hom}(G, G)$. Questa mappa è un'equivalenza omotopica debole, dunque se Y è un CW complesso deduciamo che è un'equivalenza omotopica. \square

Quindi due CW complessi $K(\pi, n)$ sono omotopicamente equivalenti tramite una mappa *unica (a meno di omotopia)* che induce l'identità su π_n .

II.9. Corollario. — Per $n > 0$ esiste un funtore

$$K(-, n) : \mathbf{Ab} \longmapsto \mathbf{HoCW}_*, \quad \pi \longmapsto K(\pi, n)$$

che è unico a meno di isomorfismo. Inoltre, per $n = 1$ questo funtore si estende a

$$K(-, 1) : \mathbf{Grp} \longmapsto \mathbf{HoCW}_*.$$

Osservazione. — Grazie ai funtori $K(-, n)$ possiamo definire, in maniera puramente *topologica*, dei nuovi invarianti per gruppi, rispettivamente l'**omologia** e la **coomologia di gruppi** a coefficienti in G :

$$\pi \longmapsto K(\pi, n) \longmapsto H_*(K(\pi, n); G), \quad \pi \longmapsto K(\pi, n) \longmapsto H^*(K(\pi, n); G).$$

Esempio. — La coomologia di $\mathbb{Z}/2$ a coefficienti in $\mathbb{Z}/2$ è

$$\mathbb{Z}/2 \longmapsto H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x].$$

Dato $n > 0$ e Y uno spazio $(n-1)$ -connesso, il **Teorema dei Coefficienti Universali** ci dice che, per un gruppo abeliano G , si ha la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(Y); G) \longrightarrow H^q(Y; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_q(Y); G) \longrightarrow 0$$

per ogni $q > 0$, e quindi la coomologia $H^q(Y; G) = 0$ per $q < n$. Quando $q = n$, si annulla il termine Ext e quindi la coomologia è proprio il duale

$$H^n(Y; G) \simeq \text{Hom}(H_n(Y), G).$$

Se $G = \pi_n(Y, y)$, allora l'inverso dell'isomorfismo di Hurewicz appartiene a $\text{Hom}(H_n(Y), G)$, dunque corrisponde a una classe $\iota_n \in H^n(Y; G)$.

Definizione. — Per $Y = K(\pi, n)$, otteniamo una classe canonica

$$\iota_n \in H^n(K(\pi, n); \pi)$$

chiamata **classe fondamentale**.

La classe ι_n ci fornisce una trasformazione naturale

$$\rho : [X, K(\pi, n)]_* \longrightarrow H^n(X; \pi) \quad [f] \longmapsto f^* \iota_n. \quad (\text{II.9.1})$$

che permette di dare una visione più *geometrica* ai gruppi di coomologia: infatti, nel corso di Elementi di Topologia Algebrica abbiamo ottenuto H^n tramite un processo *algebrico astratto*, dualizzando il complesso di catene singolari di uno spazio X ; invece, adesso possiamo interpretare le classi di coomologia come di uno spazio X come mappe (a meno di omotopia) a valori in un opportuno spazio di Eilenberg-MacLane.

II.10. Teorema. — *Se X ha il tipo di omotopia di un CW complesso, allora ρ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Fissato π , consideriamo degli spazi di Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$ per $n \geq 0$. Per prima cosa capiamo la struttura di gruppo che esiste su membro di sinistra: se $n = 0$, allora $K(\pi, 0) = \pi$ con la topologia discreta, dunque

$$[X, K(\pi, 0)]_* = \{ f : X \rightarrow \pi \mid f \text{ è localmente costante} \} = H^0(X; \pi).$$

C'è una mappa naturale $K(\pi, n) \rightarrow \Omega K(\pi, n+1)$ che è isomorfismo per π_n , quindi mi dà un nuovo modello per $K(\pi, n)$, così come anche $K(\pi, n) \rightarrow \Omega^2 K(\pi, n+2)$. Si deduce che $[-, K(\pi, n)]_*$ è un funtore a valori in **Ab** perché

$$[X, \Omega^2 K(\pi, n+2)]_* \simeq [\Sigma^2 X, K(\pi, n+2)]_*.$$

Mostriamo che la mappa $\rho : [X, K(\pi, n)]_* \rightarrow \widetilde{H}^n(X; \pi)$ è un omomorfismo di gruppi: usando lo “strozzamento” $\Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ per costruire la somma

$$\widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X; \pi) \times \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X; \pi) \longrightarrow \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X \vee \Sigma X; \pi) \longrightarrow \widetilde{H}^n(\Sigma X; \pi),$$

questo induce l'operazione di gruppo su $\widetilde{H}^n(\Sigma X; \pi)$. Analogamente, applicando $[-, K(\pi, n)]_*$ otteniamo un gruppo dato che

$$[X, K(\pi, n)]_* = [X, \Omega K(\pi, n+1)]_* = [\Sigma X, K(\pi, n+1)]_*$$

e lo strozzamento della sospensione di X induce la somma come prima.

Mostriamo che ρ induce un isomorfismo per induzione sullo scheletro di X . Se $X = X^{(0)}$, allora

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{HoTop}_*}(X^{(0)}, \pi) &= \widetilde{H}^0(X^{(0)}; \pi), \\ [X^{(0)}, K(\pi, n)] &= 0 = \widetilde{H}^n(X^{(0)}; \pi), \quad \text{per } n > 0. \end{aligned}$$

e questo conclude il passo base.

Se assumiamo X connesso di dimensione q finita, c'è una successione di cofibrazione

$$\bigvee S^{q-1} \longrightarrow X^{(q-1)} \longrightarrow X^{(q)}$$

che è co-esatta, quindi $[-, K(\pi, n)]_*$ induce una successione esatta in coomologia ridotta. Usando il passo induttivo, ρ è un isomorfismo per $\bigvee S^{q-1}$ e per $X^{(q-1)}$, che hanno dimensione al più $q-1$, quindi usando il **Lemma dei 5** scopriamo che è isomorfismo anche per $X^{(q)}$.

Se X ha dimensione infinita, sfruttiamo un argomento di limite e il fatto che, per ogni $N > q \geq 0$, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} [X^{(N)}, K(\pi, n)] & \xrightarrow[\rho]{\simeq} & \widetilde{H}^q(X^{(N)}; \pi) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ [X, K(\pi, n)] & \dashrightarrow & \widetilde{H}^q(X; \pi). \end{array}$$

□

Esempio. — Dato che $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, allora $H^1(X; \mathbb{Z}) = [X, S^1]_*$.

II.11. Esempio. — Dato X uno spazio topologico, vediamo che la sua coomologia

$$H^1(X; \mathbb{Z}/2) = [X; \mathbb{RP}^\infty]_*.$$

Vedremo più avanti che una mappa $X \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ induce un *fibrato in rette*, e mappe omotope inducono fibrati isomorfi; deduciamo quindi che $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ parametrizza le classi d'equivalenza di fibrati in rette su X .

Definizione. — Dato un oggetto X in una categoria \mathcal{C} , il funtore covariante

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

si dice **corappresentato** da X , mentre il funtore controvariante

$$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

è **rappresentato** da X . Diremo che un funtore covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ è **corappresentabile** se esiste un oggetto $X \in \mathcal{C}$ tale che $F \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$, e analogamente diremo che un funtore controvariante $G : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ è **rappresentabile** se $G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$, per qualche $X \in \mathcal{C}$.

LEZIONE 5 Dato un funtore $G : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, un elemento $x \in G(X)$ determina una
13th mar., 2023 trasformazione naturale

$$\theta_x : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \longrightarrow G, \quad \left(f : Y \rightarrow X \right) \longmapsto \theta_x f := G(f)(x) \in G(Y).$$

Questo ci permette di enunciare uno dei teoremi più importanti della teoria delle categorie:

II.12. Teorema (Lemma di Yoneda⁷). — *L'associazione $x \mapsto \theta_x$ definisce una bigezione di insiemi*

$$G(X) \longrightarrow \mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), G)$$

che è naturale sia in X , sia in G .

In particolare, se G è rappresentato da un oggetto Y , allora abbiamo una bigezione

$$\mathbf{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

che significa che ogni trasformazione naturale $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$ è indotta da un'unica mappa $X \rightarrow Y$. In particolare, ogni isomorfismo naturale di funtori è indotto da un isomorfismo di oggetti $X \simeq Y$.

II.13. Fatto. — *Si potrebbe utilizzare un approccio “inverso”, dimostrando prima che la coomologia $H^n(-, \pi)$ è un **funtores rappresentabile** sui CW complessi, e definire quindi gli spazi di Eilenberg-MacLane di tipo $K(\pi, n)$ come gli oggetti che lo rappresentano, cioè come quegli spazi topologici per cui vale*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{HoCW}_*}(X, K(\pi, n)) = [X, K(\pi, n)]_* = H^n(X; \pi).$$

*Questo risultato è espresso dal **Teorema di rappresentabilità di Brown**.*

Osservazione. — L'isomorfismo di sospensione in coomologia ridotta

$$\widetilde{H}^n(X; G) \simeq \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X; G)$$

è rappresentato da un'equivalenza omotopica debole $K(\pi, n) \rightarrow \Omega K(\pi, n+1)$ che induce la sospensione della classe fondamentale di $K(\pi, n)$, poiché usando l'aggiunzione tra sospensione e loop si ha

$$[X, K(\pi, n)]_* \simeq [X, \Omega K(\pi, n+1)]_* \simeq [\Sigma X, K(\pi, n+1)]_*.$$

⁷Solitamente con **Lemma di Yoneda** si fa riferimento alla versione per funtori controvarianti, come quella riportata qui; tuttavia, esiste un risultato analogo anche per funtori covarianti.

Nel caso della coomologia, abbiamo visto che

$$\Theta(m, n, A, B) := \mathbf{Nat}\left(H^m(-; A), H^n(-; B)\right) = [K(A, m), K(B, n)]_* = H^n(K(A, m); B),$$

quindi queste trasformazioni naturali non sono più troppo astratte, ma possiamo “toccarle con mano” nel caso in cui siamo in grado di calcolare la coomologia di questi spazi di Eilenberg-MacLane. Inoltre, questo procedimento ci suggerisce che potremmo arricchire la struttura della coomologia, ad esempio trovando nuove *operazioni* naturali che la classica struttura di anello non esprime.

Definizione. — Chiameremo i gruppi $\Theta(m, n, A, B)$ **operazioni coomologiche**.

Esempio. — Le trasformazioni naturali di $H^*(-, \mathbb{Z}/2)$ con l’operazione di composizione sono un’algebra (in generale *non* commutativa) su $\mathbb{Z}/2$, che ci porterà a studiare le **operazioni di Steenrod** per descrivere $H^*(K(\mathbb{Z}/2, n), \mathbb{Z}/2)$.

Osservazione. — Le operazioni coomologiche *non* possono diminuire di grado: infatti, siccome uno spazio di tipo $K(A, m)$ è $(m - 1)$ -connesso, allora $H^n(K(A, m); B) = 0$ per ogni $n < m$, per qualsiasi gruppo B . Deduciamo quindi che $\Theta(m, n, A, B)$ è banale se $n < m$.

Esempio. — Dato un primo p , consideriamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0.$$

Prendendo le cocatene singolari di uno spazio X , otteniamo una successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow C^\bullet(X; \mathbb{Z}/p) \longrightarrow C^\bullet(X; \mathbb{Z}/p^2) \longrightarrow C^\bullet(X; \mathbb{Z}/p) \longrightarrow 0,$$

la quale induce una successione esatta lunga in coomologia; l’omomorfismo di connessione $\beta : H^n(X; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbb{Z}/p)$ è detto **omomorfismo di Bockstein**.

Definizione. — Una successione di spazi \dots, E_0, E_1, \dots e mappe

$$E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1} \quad (\text{oppure } \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1})$$

si chiama **spettro topologico**; si dice **Ω -spettro** se inoltre le mappe sono equivalenze omotopiche deboli.

Quanto visto per gli spazi di Eilenberg-MacLane e la coomologia singolare si adattano per *teorie coomologiche* più generali.

II.14. Fatto. — Dato un' Ω -spettro $\{\dots, E_n, E_{n+1}, \dots\}$, i gruppi

$$h^n(X) := [X, E_n]_*$$

sono **gruppi di una teoria coomologica (ridotta) generalizzata**, cioè soddisfano i seguenti assiomi:

- **omotopia:** se $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sono mappe omotope, allora inducono la stessa mappa $h^n(f) = h^n(g)$;
- **esattezza:** una coppia (X, A) induce una successione esatta lunga di gruppi h^n ;
- **escissione:** dato un aperto $U \subset X$ tale che $\bar{U} \subset A \subset X$, allora c'è un isomorfismo

$$h^n(X, A) \simeq h^n(X \setminus U, A \setminus U);$$

Che è?

- **riduzione:** $\tilde{h}(X) : \ker h(* \rightarrow X)$.

Operazioni coomologiche stabili

Definizione. — Definiamo un'operazione coomologica stabile di tipo (r, π, G) una successione di trasformazioni naturali $\varphi_n \in \Theta(n, n+r, \pi, G)$, con $n > 0$, che commutano con l'isomorfismo di sospensione: esplicitamente, per ogni spazio X e per ogni n , il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; G) & \xrightarrow{\varphi_n} & H^{n+r}(X; \pi) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ H^{n+1}(\Sigma X; G) & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & H^{n+r+1}(\Sigma X; \pi). \end{array}$$

Indichiamo con $\mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G)$ l'insieme delle operazioni stabili.

II.15. Teorema. — Sia (X, A) una coppia CW (o più in generale $A \hookrightarrow X$ una cofibrazione). Un'operazione coomologica stabile è compatibile con la successione esatta lunga della coppia: per ogni $\varphi \in \mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G)$, abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X; \pi) & \xrightarrow{i^*} & H^n(A; \pi) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(X, A; \pi) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+1}(X; \pi) \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ H^{n+r}(X; G) & \xrightarrow{i^*} & H^{n+r}(A; G) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1+r}(X, A; G) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+1+r}(X; G), \end{array}$$

dove l'operazione φ è definita sulla coomologia relativa della coppia come $\varphi_{X/A}$ ⁸

Dimostrazione. Siccome l'operazione coomologica φ è una trasformazione naturale, sappiamo che i quadrati laterali commutano, pertanto resta da verificare la commutatività del quadrato centrale.

Si verifica che l'omomorfismo di connessione

$$\delta^* : H^n(A; \pi) \longrightarrow H^{n+1}(X, A; \pi) \simeq H^{n+1}(X/A; \pi)$$

coincide con la composizione

$$H^n(A; \pi) \xrightarrow{\Sigma} H^{n+1}(\Sigma A; \pi) \xrightarrow{p^*} H^{n+1}(X \cup CA; \pi) \Longrightarrow H^{n+1}(X/A; \pi),$$

dove p^* è indotta dalla mappa di proiezione $p : X \cup CA \rightarrow (X \cup CA)/X \simeq \Sigma A$, e l'ultima uguaglianza segue dall'equivalenza omotopica $X \cup CA \simeq X/A$. Siccome lo stesso ragionamento vale per la seconda riga, concludiamo che il quadrato commuta poiché φ commuta con p^* per naturalità, e con Σ per stabilità. \square

LEZIONE 6 14th mar., 2023 Se prendiamo un'operazione $\varphi \in \mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G)$, la pensiamo come una famiglia di trasformazioni naturali $\varphi_n \in \Theta(n, n+r, \pi, G) = H^{n+r}(K(\pi, n); G)$ che soddisfa la condizione di stabilità $\Sigma\varphi = \varphi\Sigma$, ovvero gli omomorfismi

$$f_n : H^{n+r}(K(\pi, n); G) \xrightarrow{i_{n+r}^*} H^{n+r}(\Sigma K(\pi, n-1); G) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} H^{n+r-1}(K(\pi, n-1); G),$$

soddisfano la condizione di stabilità $f_n(\varphi_n) = \varphi_{n-1}$, dove il primo omomorfismo è indotto da $\mathbf{1}_\pi$ attraverso la seguente identificazione:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\pi, \pi) & \Longrightarrow & H^{n-1}(K(\pi, n-1); \pi) \\ \parallel & & \simeq \downarrow \Sigma \\ H^n(K(\pi, n); \pi) & \xrightarrow{i_n^*} & H^n(\Sigma K(\pi, n-1); \pi); \end{array}$$

ricordiamo che tramite l'identificazione $H^{n-1}(K(\pi, n-1); \pi) \simeq [K(\pi, n-1), K(\pi, n)]_*$, questa classe in coomologia induce un'unica mappa $i_n : \Sigma K(\pi, n-1) \rightarrow K(\pi, n)$ a meno di omomotopia.

Osservazione. — La mappa i_n è l'aggiunta di $K(\pi, n-1) \rightarrow \Omega K(\pi, n)$, che ricordiamo essere un'equivalenza omotopica debole.

⁸Sappiamo che nel caso di una successione di cofibrazione la coomologia relativa è in realtà la coomologia del quoziente X/A .

Quindi le operazioni stabili si possono vedere come il limite inverso

$$\mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G) = \varprojlim_n \left(H^{n+r}(K(\pi, n); G), f_n \right),$$

e nel caso in cui G è un anello, $H^*(K(\pi, n); G)$ è un anello che *non* induce la moltiplicazione in $\mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G)$. Tuttavia, la composizione di mappe rende $\bigoplus_{r \geq 0} \mathbf{Stab}\Theta(r, \pi, G)$ un **anello graduato**, unitario e in generale *non* commutativo. La coomologia $H^*(X; G)$ è un modulo su tale anello e una qualsiasi funzione continua $f : X \rightarrow Y$ induce un omomorfismo di moduli. Inoltre, se $G = k$ è un campo, allora le operazioni coomologiche diventano una k -algebra, nel caso in cui $G = \mathbb{Z}/p$, con p primo, viene chiamata **algebra di Steenrod** \mathbb{A}_p .

CAPITOLO III.

Fibrati vettoriali

III

LEZIONE 7 20th mar., 2023 Data una varietà differenziabile M , lo *spazio tangente* al punto $p \in M$ è lo spazio vettoriale $T_p M$ delle derivazioni in p e “varia con continuità” al variare del punto. Si può descrivere intrinsecamente come l’insieme delle classi d’equivalenza di curve di curve lisce

$$\gamma : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (M, p), \quad \gamma(0) = p,$$

dove $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se e solo se $\gamma'_1(0) = \gamma'_2(0)$. La dimensione di ogni spazio vettoriale $T_p M$ è la stessa della dimensione (come varietà) di M . Tutti gli spazi tangenti sono incollati all’interno del *fibrato tangente* TM , che può essere pensato come una famiglia di spazi vettoriali parametrizzati *con continuità* dalla varietà M . La generalizzazione di questo concetto è espresso dalla nozione di **fibrato vettoriale**.

Definizione. — Dato uno spazio topologico B , definiamo la categoria **Top**/ B come la categoria i cui oggetti $\xi = (E, p)$ sono mappe continue $E \rightarrow B$ e i morfismi $\mu : \xi \rightarrow \xi'$ sono funzioni continue $\mu : E \rightarrow E'$ che rendono commutativi i triangoli del tipo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mu} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array} .$$

Esempio. — Dato uno spazio topologico F , il prodotto cartesiano $E = F \times B$ dotato della proiezione $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$ è un oggetto su B detto **fibrato banale**.

III.1. Teorema. — *Un fibrato vettoriale è una **fibrazione**.*

Dimostrazione. Vedi [Hat00, Proposition 4.48].

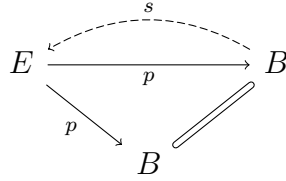
□

La categoria \mathbf{Top}/B ha prodotti finiti: dati due oggetti $\xi = (E, p)$ e $\xi' = (E', p')$, il loro prodotto $\xi \times \xi'$ in \mathbf{Top}/B è dato dal prodotto fibrato in \mathbf{Top} , cioè dallo spazio

$$E \times_B E' = \{ (e, e') \in E \times E' \mid p(e) = p'(e') \} .$$

Nella categoria \mathbf{Top}/B troviamo anche l'oggetto finale $u = (B, \mathbf{1}_B)$, infatti ogni $\xi = (E, p)$ ha un'unico morfismo $\xi \rightarrow u$ dato da $p : E \rightarrow B$.

Definizione. — Detta $u = (B, \mathbf{1}_B)$ l'identità della base, una **sezione** è un morfismo $s : u \rightarrow \xi$, cioè una mappa $s : B \rightarrow E$ tale che $p \circ s = \mathbf{1}_B$.



Esempio. — Dato un fibrato banale su B , è facile costruire delle sezioni: fissato un punto $x_0 \in F$, la mappa

$$\iota_{x_0} : B \longrightarrow B \times F, \quad \iota_{x_0}(b) := (b, x_0)$$

definisce una sezione.

Definizione. — Definiamo un **gruppo abeliano** su B come un oggetto gruppo nella categoria \mathbf{Top}/B , cioè $\xi = (E, p)$ dotato di una mappa

$$+ : E \times_B E \longrightarrow E, \quad (e, e') \longmapsto e + e',$$

e una sezione $s : u \rightarrow \xi$ che identifica ogni punto di B come l'**elemento neutro** sulla corrispondente fibra di p : più precisamente, per ogni $(e, e') \in E \times_B E$ vale

$$s(p(e)) + e' = e', \quad e + s(p(e')) = e.$$

Ogni volta che abbiamo un oggetto gruppo ξ , chiamiamo s la sua **zero sezione** e identifichiamo la base come un sottoinsieme dello spazio totale $B \subset E$.

Siamo interessati al caso in cui le fibre su B sono *spazi vettoriali*, in cui non ci siano “salti di dimensione” tra le fibre parametrizzate: non consideriamo oggetti del tipo

$$\text{pr}_1 : E := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definizione. — Un **fibrato vettoriale di rango n** su B è un oggetto $\xi = (E, p)$ *localmente banale* con fibra $F = \mathbb{R}^n$, cioè per ogni $b \in B$, esiste un intorno aperto U di b tale che $(p^{-1}(U), p|_{p^{-1}(U)})$ è isomorfo al fibrato banale:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{\Psi_i} & \\
 p^{-1}(U_i) & \xrightarrow[\Phi_i]{\cong} & U_i \times \mathbb{R}^n \\
 & \searrow p \quad \swarrow \text{pr}_1 & \\
 & U_i &
 \end{array} \tag{III.1.1}$$

Lo spazio E viene detto **spazio totale**, B è detto **spazio base** e un aperto U_i che soddisfa la condizione (III.1.1) è detto **aperto banalizzante**.

Gli isomorfismi Φ_i nel diagramma (III.1.1) si chiamano **banalizzazioni** e inducono isomorfismi *di spazi vettoriali* sulle fibre $p^{-1}(b)$, per tutti i $b \in B$. Indichiamo con

$$\Phi_{i,b} := \Phi_i|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \longrightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n, \quad \Phi_i(e) = (p(e), \varphi_{i,b}(e)).$$

Nell'intersezione di due aperti banalizzanti $U_i \cap U_j$ possiamo *cambiare banalizzazione*

$$\begin{array}{ccccc}
 (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\Psi_j]{\cong} & p^{-1}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow[\Phi_i]{\cong} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\
 & \searrow & \downarrow p & \swarrow & \\
 (b, v) & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & (b, g_{ij}(b) \cdot v)
 \end{array}$$

dove $g_{ij}(b) = \varphi_{i,b} \circ \varphi_{j,b}^{-1}$ è un isomorfismo lineare. Otteniamo così delle funzioni

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

dette **funzioni di transizione** del fibrato.

Osservazione. — Si può verificare che per ogni $b \in B$ valgono le seguenti **condizioni di cociclo**:

- nell'intersezione $U_i \cap U_j$ si ha $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$;

- per ogni tripla di indici i, j, h vale $g_{ij}g_{jh} = g_{ih}$.

Tutte le informazioni di un fibrato vettoriale possono essere lette in termine delle funzioni di transizione $\{g_{ij}\}$ su un ricoprimento banalizzante fissato. Ad esempio, dato un morfismo di fibrati vettoriali $f : \xi \rightarrow \xi'$ su una stessa base B , possiamo considerare un ricoprimento banalizzante $\{U_i\}$ comune per entrambi i fibrati e “leggere” f tramite le coordinate date dalle banalizzazioni

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Psi_j} p^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{f} p'^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\Phi'_i} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$$

$$(b, v) \longmapsto (b, \Phi'_{i,b} \circ f_b \circ \Phi_{j,b}^{-1}(v)) ,$$

dove $f_b = f|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_b$. Otteniamo quindi delle funzioni

$$\bar{f}_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \quad \bar{f}_{ij}(b) = \Phi'_{i,b} \circ f_b \circ \Phi_{j,b}^{-1}$$

che nell’intersezione di tre aperti $U_i \cap U_j \cap U_k$ soddisfano

$$\begin{cases} \bar{f}_{ij} \circ g_{jk} &= \bar{f}_{ik}, \\ g'_{ij} \circ \bar{f}_{jk} &= \bar{f}_{ik}. \end{cases} \quad (\text{III.1.2})$$

Viceversa, una famiglia di funzioni $\{f_{ij}\}$ che soddisfa le condizioni di cociclo (III.1.2) induce un morfismo di fibrati vettoriali $f : \xi \rightarrow \xi'$, definito su U_i da $f_i := (\Phi'_i)^{-1} \circ \bar{f}_{ii} \circ \Phi_i$.

III.2. Teorema. — *Dati due fibrati ξ, ξ' su B e un ricoprimento $\{U_i\}$ che banalizza entrambi, allora $\xi \simeq \xi'$ se e solo se esistono $\lambda_i : U_i \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ che “collegano” le funzioni di transizione nel seguente modo:*

$$g'_{ij}(b) = \lambda_i(b)^{-1} g_{ij}(b) \lambda_j(b), \quad \text{per ogni } b \in U_i \cap U_j.$$

Dimostrazione. Dato un isomorfismo $f : \xi \simeq \xi'$, otteniamo delle funzioni $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ che soddisfano (III.1.2). Se per ogni i poniamo $\lambda_i := f_{ii}^{-1}$, allora vale

$$g'_{ij} = f_{ii} \circ f_{ij}^{-1} = f_{ii} \circ g_{ij} \circ f_{ii}^{-1} = \lambda_i^{-1} g_{ij} \lambda_i.$$

Viceversa, date $\{\lambda_i\}$ come sopra, per ogni $b \in U_i \cap U_j$ definiamo $f_{ij}(b) := \lambda_i(b)^{-1} g_{ij}(b)$. Queste mappe soddisfano le condizioni (III.1.2), infatti

$$\begin{aligned} f_{ij} g_{jk} &= \lambda_i^{-1} g_{ij} g_{jk} = \lambda_i^{-1} g_{ik} = f_{ik}, \\ g'_{ij} f_{jk} &= g'_{ij} \lambda_j^{-1} g_{jk} = \lambda_i^{-1} g_{ij} \lambda_j \lambda_j^{-1} g_{jk} \\ &= \lambda_i^{-1} g_{ij} g_{jk} = \lambda_i^{-1} g_{ik} = f_{ik}. \end{aligned}$$

Questo significa che le f_{ij} definiscono una mappa $f : \xi \rightarrow \xi'$ che è un isomorfismo, la cui inversa è indotta dalla famiglia $h_{ij} := g'_{ij}\lambda_j$. \square

III.3. Teorema (di esistenza). — *Dato un ricoprimento $\{U_i\}$ di B e delle funzioni $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ che soddisfano le **condizioni di cociclo**, esiste un fibrato vettoriale di rango n su B che ha le g_{ij} come funzioni di transizione.*

Idea della dimostrazione. Partendo da $\coprod_i U_i \times \mathbb{R}^n$, si identificano le coppie con indici diversi tramite la relazione d'equivalenza

$$(b, v)_i \sim (b, g_{ij}(b) \cdot v)_j, \quad \text{se } b \in U_i \cap U_j. \quad \square$$

III.4. Esempio. — (i) Il **fibrato banale** di rango n su B è $\text{pr}_1 : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(ii) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Posto $V := \mathbb{K}^n$, la **Grassmaniana**

$$\text{Gr}_k(V) := \{ \text{sottospazi } k\text{-dimensionali di } V \}$$

si può topologizzare asserendo che ogni $W \in \text{Gr}_k(V)$ è individuato da un k -frame (w_1, \dots, w_k) di W a meno dell'azione di $\text{GL}(k, \mathbb{K})$ su di lui. Identificando le n -uple di vettori come matrici $n \times n$, le n -uple di rango k formano un aperto di $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ chiamato **varietà di Stiefel** $\mathcal{V}_{n,k}$. La grassmaniana $\text{Gr}_k(V)$ è il quoziente di $\mathcal{V}_{n,k}$ per l'azione di $\text{GL}(k, \mathbb{K})$, che è libera, quindi $\text{Gr}_k(V)$ è una varietà di dimensione

$$\dim \text{Gr}_k(V) = kn - k^2 = k(n - k).$$

Infatti, la grassmaniana $\text{Gr}_k(V)$ si può ricoprire con $\binom{n}{k}$ aperti che corrispondono alle matrici M in cui k colonne fissate sono indipendenti. Tramite $\text{GL}(k, \mathbb{K})$, si trasforma il minore corrispondente in un blocco I_k e i $k(n - k)$ parametri rimanenti parametrizzano i punti di un aperto di $\text{Gr}_k(V)$.

Fibrato $\xi_{n,k}$ - costruiamo un fibrato su $\text{Gr}_k(V)$ con spazio totale

$$E(\xi_{n,k}) = \{ (W, x) \in \text{Gr}_k(V) \times V \mid x \in W \}$$

e proiezione $p(W, x) = W$. In questo modo, la fibra su W si identifica con W stesso. Se $k = 1$, allora $\text{Gr}_1(V) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{K}\mathbb{P}^{n-1}$ e chiamiamo $\xi_{n,1}$ un **fibrato in rette**.

- (iii) Ponendo $n = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nell'esempio precedente, allora $Gr_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{RP}^1 \simeq S^1$. Conosciamo due fibrati in rette sulla circonferenza: il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e il nastro di Möebius. Vedremo che questi sono gli *unici* fibrati in rette su S^1 a meno di isomorfismo: come già anticipato nell'Esempio II.11, questo è legato al fatto che

$$[S^1, \mathbb{RP}^\infty] \simeq H^1(S^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$$

ha solo due classi d'equivalenza.

Chi è $\xi_{2,1}$? Consideriamo su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ i due aperti seguenti:

$$U_1 := \{ [x : 1] \mid x \in \mathbb{R} \}, \quad U_2 := \{ [1 : y] \mid y \in \mathbb{R} \}.$$

Su questi aperti abbiamo le banalizzazioni

$$\Phi_1 : (p_x, \lambda p_x) \longmapsto (p_x, \lambda) \in U_1 \times \mathbb{R}, \quad \Phi_2 : (q_y, \mu q_y) \longmapsto (q_y, \mu) \in U_2 \times \mathbb{R}.$$

Notiamo che l'intersezione degli aperti banalizzanti è sconnessa, dato che

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= \{ [x : 1] \mid x > 0 \} \cup \{ [x : 1] \mid x < 0 \} \\ &= \{ [1 : y] \mid y > 0 \} \cup \{ [1 : y] \mid y < 0 \} \end{aligned}$$

e su questo aperto vale $[1 : y] = [y^{-1} : 1]$, quindi la funzione di transizione g_{12} è data da

$$([1 : y], \mu) \xrightarrow{\Psi_2} ([1 : y], \mu[1 : y]) \Longleftrightarrow \left(\left[\frac{1}{y} : 1 \right], y\mu \left[\frac{1}{y} : 1 \right] \right) \xrightarrow{\Phi_1} \left(\left[\frac{1}{y} : 1 \right], y\mu \right).$$

Il determinante di $g_{12}(q_y)(v) = yv$ cambia segno nelle due componenti connesse, per cui deduciamo che $\xi_{2,1}$ **non** è banale: si tratta del nastro di Möebius.

Osservazione. — Un fibrato in rette banale ha sempre una sezione mai nulla, ad esempio

$$B \longrightarrow B \times \mathbb{R}, \quad b \longmapsto (b, 1).$$

In realtà, questo fatto è equivalente alla banalità del fibrato: più precisamente, un fibrato di rango n è banale se e solo se ammette n sezioni linearmente indipendenti. Infatti, dato $\xi : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow B$ possiamo definire le sezioni $s_i(b) := (b, e_i)$. Viceversa, se abbiamo $s_1(b), \dots, s_n(b)$ linearmente indipendenti per ogni $b \in B$, allora possiamo banalizzare il fibrato tramite l'isomorfismo

$$B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E, \quad (b, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i(b).$$

Esercizio. — Dimostrare che per ogni $n \geq 2$ il fibrato $\xi_{n,1}$ è non banale.

Una soluzione. Il ragionamento fatto per $\xi_{2,1}$ non è efficace, dato che le classi d'equivalenza dei fibrati in rette su \mathbb{RP}^{n-1} potrebbero essere più di due. Risulta più conveniente usare l'Osservazione sopra: consideriamo una sezione $s : \mathbb{RP}^{n-1} \rightarrow E(\xi_{n,1})$. Allora la composizione

$$S^{n-1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{RP}^{n-1} \xrightarrow{s} E(\xi_{n,1}), \quad x \longmapsto [x] \longmapsto ([x], \sigma(x) \cdot x)$$

induce una funzione continua $\sigma : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dispari, cioè $\sigma(-x) = -\sigma(x)$. Per continuità si deduce che σ deve avere uno zero, quindi la sezione s si annulla in un punto. Per arbitrarietà di s , concludiamo che ξ non è banale perché non ha sezioni mai nulle. \square

Esercizio. — L'oggetto $\xi_{n,k}$ definito sopra è un **fibrato vettoriale**.

Una soluzione. Si verifica che una banalizzazione $p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ è data da

$$\left(\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{ccc} a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \end{array} \right. , \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k \right) \mapsto \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} , (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \right).$$

\square

Esercizio. — Determinare un ricoprimento banalizzante per τ_n , il fibrato tangente di S^{n-1} .

A partire da fibrati vettoriali noti, possiamo ottenere nuovi fibrati vettoriali con costruzioni simili a operazioni che conosciamo sugli spazi vettoriali:

- **prodotto:** dati $\xi = (E, p)$ su B e $\xi' = (E', p')$ su B' , definiamo $\xi \times \xi'$ come il fibrato $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$;
- **somma di Whitney:** dati ξ, ξ' sulla stessa base B , il fibrato $\xi \oplus \xi'$ è dato dal pullback

$$\begin{array}{ccc} \Delta^*(\xi \times \xi') & \longrightarrow & E \times E' \\ \downarrow & & \downarrow p \times p' \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B, \end{array}$$

e si verifica che le fibre sono date da $(\xi \oplus \xi')_b = E_b \oplus E'_b$.

- a ogni operazione tra spazi vettoriali ne corrisponde una tra fibrati: il **prodotto tensore** $\xi \otimes \xi'$ si ottiene facendo $\otimes_{\mathbb{R}}$ fibra per fibra; se $\xi \subset B \times \mathbb{R}^n$, per qualche n sufficientemente grande, allora possiamo definire ξ^\perp localmente come

$$\{ (x, y) \in U \times \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \} .$$

Esercizio. — Verificare che $\tau Gr_k(\mathbb{R}^n) \simeq \text{Hom}(\xi_{n,k}, \xi_{n,k}^\perp)$.

LEZIONE 8
21st mar., 2023

Definizione. — Dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, p)$, una **metrica** su ξ è un prodotto scalare definito positivo sulle fibre E_b che *varia con continuità*: più precisamente, è una mappa continua $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ che ristretta a ogni fibra E_b è una forma quadratica definita positiva.

Osservazione. — Le metriche definite positive formano un insieme convesso.

III.5. Proposizione. — *Se B ammette una partizione dell'unità (e.g. B è paracompatto), ogni fibrato vettoriale su B ammette una metrica.*

Dimostrazione. Preso un ricoprimento banalizzante $\{U_i\}$ di B , prendiamo una metrica μ_i definita positiva su ciascun $\xi|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{R}^n$. Sia $\varphi_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ una partizione dell'unità, i.e. per ogni $b \in B$ si ha $\sum \varphi_i(b) = 1$. Allora $\mu := \sum_i \varphi_i \mu_i$ è una metrica definita positiva su ξ . \square

III.6. Corollario. — *Ogni successione esatta di fibrati¹ sulla stessa base B spezza:*

$$0 \longrightarrow \xi' \longrightarrow \xi \xrightarrow{\alpha} \xi'' \longrightarrow 0 .$$

Dimostrazione. Si costruisce $(\xi')^\perp \subset \xi$ utilizzando la metrica. Siccome l'ultima mappa è surgettiva, la composizione $(\xi')^\perp \subset \xi \rightarrow \xi''$ è un isomorfismo, perciò prendendo α come l'isomorfismo inverso concludiamo che la successione spezza. \square

Definizione. — Data una varietà differenziabile M , una metrica euclidea su τ_M si chiama **metrica riemanniana**.

¹Una successione di fibrati è **esatta** se, fibra per fibra, dà origine a una successione esatta di spazi vettoriali.

Dato B uno spazio topologico, definiamo

$$\text{Vect}(B) := \{ \text{fibrati vettoriali su } B \} / \simeq$$

e indichiamo con $\text{Vect}_n(B)$ le classi d'isomorfismo dei fibrati di rango n . Notiamo che due fibrati isomorfi $\xi \simeq \xi'$ su B inducono pullback isomorfi: infatti, data $h : E(\xi) \simeq E(\xi')$ e una mappa $f : B' \rightarrow B$, possiamo definire $f^*h : E(f^*\xi) \rightarrow E(f^*\xi')$ mandando $(b', e) \mapsto (b', h(e))$; questo mostra che $f^*\xi \simeq f^*\xi'$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & E(f^*\xi') & \xrightarrow{\quad} & E(\xi') & \\
 \nearrow \simeq & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \simeq \\
 E(f^*\xi) & \xrightarrow{\quad} & E(\xi) & & \\
 \searrow & \downarrow & \searrow & & \downarrow \\
 & B' & \xrightarrow{\quad f \quad} & B &
 \end{array}$$

Il pullback è una costruzione funtoriale poiché vale

$$(g \circ f)^*\xi = (f^* \circ g^*)\xi, \quad \mathbf{1}_B^* = \mathbf{1}_{\text{Vect}(B)}.$$

Deduciamo che Vect definisce un *funtore controvariante* $\text{Vect} : \mathbf{Top}^{op} \mapsto \mathbf{Set}$.

III.7. Teorema. — Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario chiuso. La proiezione $\text{pr}_1 : X \times I \rightarrow X$ induce un isomorfismo $\text{pr}_1^* : \text{Vect}(X) \simeq \text{Vect}(X \times I)$.

Posticipiamo la dimostrazione di questo teorema, ma ne deduciamo subito un'importante conseguenza.

III.8. Corollario. — Date $f_0, f_1 : B' \rightarrow B$ due funzioni omotope e $\xi = (E, p)$ fibrato su B , allora i pullback $f_0^*\xi$ e $f_1^*\xi$ sono isomorfi.

Dimostrazione. Consideriamo le inclusioni di B' in $B' \times I$ al tempo 0 e al tempo 1:

$$\begin{array}{ccccc}
 & B' & & & \\
 & \downarrow \iota_0 & \searrow f_0 & & \\
 B' & \xleftarrow{\quad} & B' \times I & \xrightarrow{\quad H \quad} & B \\
 & \uparrow \iota_1 & \nearrow f_1 & & \\
 & B' & & &
 \end{array}$$

Siccome per il [Teorema III.7](#) la funzione pr_1^* è surgettiva, dall'equazione $\iota_0^* \text{pr}_1^* = \mathbf{1}_{\text{Vect}(B')}$ deduciamo che $\iota_0^* = \iota_1^*$, da cui segue

$$f_0^* \xi = \iota_0^* \circ H^* \xi = \iota_1^* \circ H^* \xi = f_1^* \xi. \quad \square$$

III.9. Corollario. — *Se $f : B' \rightarrow B$ è un'equivalenza omotopica, allora f^* induce un isomorfismo $\text{Vect}(B) \simeq \text{Vect}(B')$.*

Dimostrazione. Data $g : B \rightarrow B'$ inversa in omotopia di f , allora $g^* \circ f^* = \mathbf{1}_{\text{Vect}(B')}$ e $f^* \circ g^* = \mathbf{1}_{\text{Vect}(B)}$. \square

Come conseguenza di questo fatto, il funtore dei fibrati vettoriali discende alla categoria omotopica $\text{Vect} : \mathbf{hTop}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Fibrati principali

Quanto appena visto per i fibrati vettoriali può essere studiato per fibrati topologici più generali, in cui la fibra $F = E_b$ può essere un *gruppo* qualsiasi.

Definizione. — Un **fibrato principale** su un gruppo topologico G è uno spazio topologico P dotato di un'azione *destra* di G tale che

- l'azione di G è libera;
- la proiezione sullo spazio delle orbite $p : P \rightarrow P/G$ è un fibrato topologico con fibre omeomorfe a G .

Detta $m : G \times G \rightarrow G$ l'operazione del gruppo, su un aperto banalizzante U di un fibrato principale il seguente quadrato commuta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) \times G & \xrightarrow{\Phi \times \mathbf{1}_G} & U \times G \times G \\ \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_U \times m \\ p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G. \end{array}$$

Definizione. — Un'azione $P \times G \rightarrow P$ ha **sezioni locali** se, per ogni $x \in P/G$, esiste un intorno U di x e una sezione $s : U \rightarrow P$.

III.10. Proposizione. — *Se uno spazio P ammette una G -azione destra libera con sezioni locali, allora $p : P \rightarrow P/G$ è un fibrato principale.*

Dimostrazione. Preso $x \in P/G$ e una sezione $s : U \rightarrow P$ definita su un intorno di x , allora possiamo ottenere una banalizzazione locale definendo

$$\Psi : U \times G \longrightarrow p^{-1}(U), \quad \Psi(y, g) = s(y) \cdot g. \quad \square$$

III.11. Teorema. — *Data una varietà differenziabile P con un'azione libera di un gruppo di Lie compatto G , allora la proiezione p ha sezioni locali e quindi $p : P \rightarrow P/G$ è un fibrato principale.*

Dimostrazione. Non lo dimostriamo. \square

Esempio. — Se G è un gruppo di Lie e $H \subset G$ un sottogruppo di Lie, allora $G \rightarrow G/H$ è un fibrato principale su H .

Esempio. — La proiezione $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ è un fibrato principale su $G = S^1$.

Esercizio. — L'azione di $GL(k, \mathbb{R})$ su $p : \mathcal{V}_{n,k} \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ ha sezioni locali, quindi p è un fibrato principale con fibra $GL(k, \mathbb{R})$.

Sia G un gruppo che agisce (a destra) transitivamente su uno spazio X . Se $x \in X$, considero la funzione $p(g) := x \cdot g$, che è surgettiva. Denotiamo con $H \subset G$ lo stabilizzatore di x . A $g' \in G$ fissato, l'insieme $\{g \in G \mid x \cdot g = x \cdot g'\}$ è una classe laterale destra di H in G , cioè

$$\{g \in G \mid x \cdot g = x \cdot g'\} = Hg',$$

quindi $p : G/H \rightarrow X$ è una bigezione continua. Se anche l'inversa è continua (e.g. G/H compatto, oppure p aperta), allora p è un omeomorfismo.

Esempio. — Detto $N \in S^{n-1}$ il polo nord, il gruppo ortogonale $O(n)$ agisce sulla sfera S^{n-1} e il suo stabilizzatore è dato da

$$\text{Stab}(N) \simeq \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| M \in O(n-1) \right\} \simeq O(n-1).$$

Allora $O(n)/O(n-1) \simeq S^{n-1}$, da cui deduciamo che $O(n) \rightarrow S^{n-1}$ è un fibrato principale su $O(n-1)$.

Esempio. — sia $V'_k(\mathbb{R}^n)$ lo spazio dei k -frame ortonormali in \mathbb{R}^n . Allora $O(n)$ agisce su $V'_k(\mathbb{R}^n)$ e lo stabilizzatore in ogni k -frame può essere identificato con $O(n - k)$. Quindi $O(n) \rightarrow V'_k(\mathbb{R}^n)$ è un fibrato principale con gruppo $O(n - k)$.

Esempio. — Il gruppo ortogonale $O(n)$ agisce sulle grassmaniane $Gr_k(\mathbb{R}^n)$, in cui lo stabilizzatore delle prime k colonne è formato da matrici a blocchi, pertanto può essere identificato con $O(k) \times O(n - k)$. La proiezione $O(n) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ è un fibrato principale con gruppo $O(k) \times O(n - k)$.

III.12. Proposizione. — *Un fibrato principale su G è banale se e solo se $P \rightarrow P/G$ ha una sezione globale.*

Dimostrazione. Ovviamente un fibrato banale ha sempre una sezione globale; viceversa, se abbiamo $s : P/G \rightarrow P$ una sezione, possiamo banalizzare P tramite la mappa

$$\psi : P/G \times G \longrightarrow P, \quad \psi(b, g) := s(b) \cdot g. \quad \square$$

Esempio. — Se G è un gruppo discreto, la proiezione $p : P \rightarrow P/G$ è semplicemente un rivestimento con gruppo G .

Supponiamo che B abbia rivestimento universale² $p : \tilde{B} \rightarrow B$. Allora il gruppo $G := \pi_1(B, *)$ agisce liberamente sulle fibre di p , quindi possiamo identificare $B = \tilde{B}/G$. In generale, $\pi_1(B, *)$ agisce sulle fibre $F \simeq p^{-1}(*)$ di un qualsiasi rivestimento di $p : E \rightarrow B$, quindi F diventa un G -insieme (con azione *sinistra*). Viceversa, dato un G -insieme F , si può costruire un rivestimento di B con fibra F tramite il prodotto

$$\tilde{B} \times_G F := \tilde{B} \times F / \sim,$$

dove la relazione d'equivalenza identifica le coppie $(b, g \cdot z) \sim (b \cdot g, z)$ al variare di $g \in G$. La classe di una coppia $(y, z) \in \tilde{B} \times F$ è data da

$$[(y, z)] = \left\{ (y \cdot g, g^{-1} \cdot z) \mid g \in G \right\},$$

e definendo la proiezione $\tilde{p} : \tilde{B} \times_G F \rightarrow B$ come $\tilde{p}(y, z) = p(y)$, la fibra su $b_0 \in B$ è data da $\tilde{p}^{-1}(b_0) = \{ [(y, z)] \mid p(y) = b_0 \}$. Dato che l'azione di G sulle fibre del rivestimento è libera, fissato $y_0 \in p^{-1}(b_0)$, ogni punto di $\tilde{p}^{-1}(b_0)$ ha un unico rappresentante del tipo (y_0, z) , quindi la fibra si identifica con

$$\tilde{p}^{-1}(b_0) = \{ (y_0, g \cdot z) \mid z \in F \} \simeq F.$$

Tutto questo discorso si riassume nel seguente

²È sufficiente B connesso e semi-localmente semplicemente connesso.

III.13. Teorema. — *C'è un'equivalenza di categorie tra*

$$\{ \pi_1(B, *)\text{-insiemi} \} / \{ \text{bigezioni } \pi_1(B, *)\text{-equivarianti} \}$$

e la categoria delle classi di isomorfismo di rivestimenti su B .

Vogliamo generalizzare queste costruzioni anche nel caso di gruppi *non* discreti. Se $\xi = (P, p)$ è un fibrato principale con gruppo G e F è un G -spazio (a *sinistra*), allora possiamo creare un fibrato principale associato a ξ con fibra F come prima: identificando le coppie $(y \cdot g, z) \sim (y, g \cdot z)$ al variare di $g \in G$, posto $P \times_G F := P \times F / \sim$ consideriamo la mappa

$$q : P \times_G F \longrightarrow B, \quad [(y, z)] \longmapsto p(y).$$

Come prima, le fibre si identificano con F : infatti, se $b_0 \in B$ e $y_0 \in p^{-1}(b_0)$, allora $q^{-1}(b_0)$ contiene tutte le coppie del tipo $(y_0 \cdot g, g^{-1} \cdot z)$, le quali hanno un unico rappresentante del tipo (y_0, z) . Questo definisce una mappa $q^{-1}(b_0) \rightarrow F$, con inversa $z \mapsto [(y_0, z)]$, che è un omeomorfismo.

Definizione. — Dato B uno spazio topologico paracompatto, indichiamo con $\text{Princ}_G(B)$ le classi di isomorfismo dei fibrati principali con gruppo G su base B . Questa associazione induce funtore controvariante $\text{Princ}_G : \mathbf{Top}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, che sulle mappe $f : B' \rightarrow B$ è definito dal pullback $\text{Princ}_G(f) : \xi \mapsto f^*\xi$.

Se F è uno spazio vettoriale e G che agisce liberamente su F (e.g. quando $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$), allora otteniamo un fibrato vettoriale

$$q : P \times_G F \longrightarrow B$$

che si dirà *associato* al fibrato principale $p : P \rightarrow B$. Notiamo che se p ha funzioni di transizione $\{g_{ij}\}$, allora la coppia

$$(y, g)_i \in (U_i \cap U_j) \times G \subset U_i \times G$$

si identifica con $(x, g_{ij}(x) \cdot g)_j \in U_j \times G$. Deduciamo così che la banalizzazione $p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times G$ dà una banalizzazione $q^{-1}(U_i) \simeq U_i \times (G \times_G F)$. Ora, identificando

$$G \times_G F \xrightarrow{\sim} F, \quad [(g, z)] = [(1, g \cdot z)] \longmapsto g \cdot z,$$

si vede che $q : P \times_G F \rightarrow B$ ha esattamente le stesse funzioni di transizione di P .³ Si noti che un isomorfismo di fibrati principali $P \simeq P'$ induce un

³Una costruzione alternativa del fibrato associato si può ottenere seguendo la tecnica del Teorema di esistenza: i fibrati banali $U_i \times F$ si incollano facendo agire G su F tramite le stesse funzioni di transizione di P ; questa costruzione soddisfa le condizioni di cociclo e quindi produce un fibrato.

isomorfismo sui fibrati vettoriali associati $P \times_G F \simeq P' \times_G F$ (sfruttando ad esempio il [Teorema III.2](#)).

Viceversa, dato un fibrato vettoriale $\xi = (E, p)$ su B di rango n , gli si può associare un fibrato principale $P(\xi)$ con gruppo $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ con la seguente costruzione: su ogni banalizzazione $p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{R}^n$ si sostituisce \mathbb{R}^n con G e si considerano le stesse funzioni di transizione

$$\Phi_j \circ \Psi_i : (U_i \cap U_j) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad (x, M)_i \longmapsto (x, g_{ij}(x) \cdot M)_j.$$

Questa costruzione produce un fibrato con fibra $F = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, che è principale tramite l'azione di G a destra. Anche in questo caso se abbiamo un isomorfismo $\xi \simeq \xi'$, questo induce $P(\xi) \simeq P(\xi')$ tra i fibrati principali associati.

Si verifica che per ogni fibrato vettoriale ξ si ha $P(\xi) \times_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n \simeq \xi$, e d'altra parte per ogni fibrato principale P sul gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, vale $P(P \times_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n) \simeq P$. Tutto il discorso precedente si riassume dunque nel seguente

III.14. Teorema. — *La corrispondenza $\xi \mapsto P(\xi)$ dà una bigezione di insiemi $\mathrm{Vect}_n(B) \simeq \mathrm{Princ}_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}(B)$ che è naturale in B . Questo significa che induce un isomorfismo di funtori $\mathrm{Vect}_n \simeq \mathrm{Princ}_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}$.*

Spazi classificanti

LEZIONE 9 Ricordiamo che il [Teorema III.7](#) ci dà importante risultato di classificazione dei
27th mar., 2023 fibrati vettoriali *a meno di omotopia*: infatti, esso afferma che mappe omotope producono pullback isomorfi. Avevamo lasciato la dimostrazione in sospeso, ma alla luce dell'isomorfismo $\mathrm{Vect}_n \simeq \mathrm{Princ}_{\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})}$ notiamo che l'enunciato segue come caso particolare del seguente

III.15. Teorema. — *Dato G un gruppo topologico qualsiasi, il funtore Princ_G è I -invariante nella categoria dei CW complessi, cioè per ogni CW complesso X si ha una bigezione naturale*

$$\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{Princ}_G(X) \simeq \mathrm{Princ}_G(X \times I).$$

Lo scopo di oggi è sviluppare gli strumenti adatti a dimostrare questo risultato.

III.16. Lemma. — *Se X è uno spazio contraibile, allora $\mathrm{Princ}_G(X) = \{ X \times G \}$. In altre parole, il fibrato banale è l'unico fibrato principale su uno spazio contraibile.*

Dimostrazione. È sufficiente costruire una sezione di $p : P \rightarrow X$. Dato $x_0 \in X$, sappiamo che $\mathbf{1}_X$ è omotopa alla mappa costante in x_0 ; preso un punto $q \in p^{-1}(x_0)$, solleviamo la costante a una mappa $c : X \rightarrow P$ tale che $p(q) = x_0$.

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow c & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{x_0} & X \end{array}$$

Preso $H : X \times I \rightarrow X$ un'omotopia di contrazione tale che $H_0 \equiv x_0$ e $H_1 = \mathbf{1}_X$, siccome p è una fibrazione, allora H si solleva a $\widetilde{H} : X \times I \rightarrow P$ tale che $\widetilde{H}_0 = c$ e \widetilde{H}_1 solleva l'identità di X . Questo significa che \widetilde{H}_1 è una sezione di p , perciò il fibrato è $P \simeq X \times G$. \square

Definizione. — Chiamiamo **G -CW-coppia** una coppia (X, A) di CW complessi con un'azione (destra) di G su X tale che esista una filtrazione G -invariante

$$A =: F^{-1}X \subset F^0X \subset F^1X \subset \cdots \subset F^nX \subset \cdots \subset \bigcup_{n \geq 0} F^nX = X$$

tale che F^nX è ottenuto da $F^{n-1}X$ attaccando delle “*celle equivarianti*” del tipo $D^n \times (H \backslash G)$, dove $H \subset G$ è sottogruppo, $H \backslash G = \{Hg | g \in G\}$ e con azione di G sulla destra: possiamo vedere questa costruzione come il pushout del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i \partial D_i^n \times (H_i \backslash G) & \longrightarrow & \coprod_i D_i^n \times (H_i \backslash G) \\ \coprod \varphi_i \downarrow & & \downarrow \coprod \psi_i \\ F^{n-1}X & \longrightarrow & F^nX, \end{array}$$

dove φ_i è la mappa di incollamento del disco D_i^n . Lo spazio X così ottenuto ha la topologia del limite diretto (o *topologia debole*). Se $A = \emptyset$, chiameremo X un **G -CW-complesso**.

Osservazione. — Se $\xi = (P, p)$ è un G -fibrato principale su un CW complesso X , allora lo scheletro di X si solleva a un G -CW-complesso su P , con sottogruppo $H = \{1\}$. Infatti, se $c : D^n \rightarrow X$ è la funzione caratteristica di una n -cella di X , allora $c^*\xi$ è un fibrato banale perché D^n è contraibile; quindi abbiamo il quadrato cartesiano

$$\begin{array}{ccc} D^n \times G = c^*\xi & \xrightarrow{\widetilde{c}} & P \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n & \xrightarrow{c} & X, \end{array}$$

che descrive P come G -CW-complesso.

Definizione. — Dati due fibrati $\xi = (E, p)$ su B e $\xi' = (E', p')$ su B' con stessa fibra F , chiamiamo **bundle map** di ξ su ξ' un'applicazione continua $h : E \rightarrow E'$ che manda ogni fibra E_b omeomorficamente in una fibra $E'_{b'}$. Come conseguenza, questa mappa induce $\bar{h} : B \rightarrow B'$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' . \end{array}$$

Se ξ e ξ' sono fibrati vettoriali, richiediamo che $h_b : E_b \rightarrow E'_{b'}$ sia un isomorfismo lineare. Se ξ e ξ' sono fibrati principali sullo stesso gruppo G , richiediamo che h_b sia G -equivariante, i.e. $h_b(e \cdot g) = h_b(e) \cdot g$.

III.17. Proposizione. — Se $h : \xi \rightarrow \xi'$ è una bundle map, allora c'è un isomorfismo di fibrati $g : \xi \simeq \bar{h}^* \xi'$ tale che $h = \text{pr}_2 \circ g$.

$$\begin{array}{ccccc} E(\xi) & \xrightarrow{\simeq} & E(\bar{h}^* \xi') & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E(\xi') \\ p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xleftarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' . \end{array}$$

Se inoltre ξ e ξ' sono fibrati principali su G , allora gli isomorfismi sono G -equivarianti.

Dimostrazione. Definiamo $g : E(\xi) \rightarrow E(\bar{h}^* \xi')$ come

$$g(e) = (p(e), h(e)) .$$

Si verifica che g è continua e manda ciascuna fibra E_b isomorficamente su $E(\bar{h}^* \xi')_b$, cioè è bigettiva con inversa continua (è sufficiente verificarlo localmente sulle banalizzazioni), e quindi concludiamo che è un isomorfismo. \square

In parole povere, avere una bundle map è equivalente a dire che il fibrato che stiamo considerando è in realtà un pullback. Finalmente siamo pronti per dimostrare il I -invarianza di Princ_G .

Dimostrazione del Teorema III.15. La parte facile consiste nel dimostrare l'**iniettività** di pr_1^* : dato che pr_1 ammette la sezione

$$\iota_0 : X \longrightarrow X \times I, \quad x \longmapsto (x, 0) ,$$

allora per funtorialità vediamo che $\iota_0^* \circ \text{pr}_1^* = \mathbf{1}_{\text{Vect}(X)}$, da cui segue l'iniettività.

La **surgettività** è più difficile, e la dividiamo in casi.

- **Caso semplice: sia X contraibile.** Siccome sia X , sia $X \times I$ sono contraibili, per il [Lemma III.16](#), sappiamo che su di essi esiste il solo fibrato banale, per cui concludiamo che la proiezione induce necessariamente una bigezione

$$\text{Princ}_G(X) \simeq \{*\} \simeq \text{Princ}_G(X \times I).$$

- **Caso generale: sia X CW complesso.** Vogliamo dimostrare che ogni G -fibrato principale $\xi = (P, p)$ su $X \times I$ è della forma $\text{pr}_1^*(\xi')$, cioè il pullback di qualche fibrato $\xi' = (E', p')$ su X , quindi

$$P \simeq \left\{ \left((x, t), e' \right) \mid x = p'(e') \right\}.$$

Identificando X con $X \times \{0\} \subset X \times I$, quello che vorremmo dimostrare è che

$$P = P|_{X \times \{0\}} \times I : (e, t) \rightarrow (p(e), t) \in X \times I,$$

cioè che a ogni tempo $t \in I$, la fetta $P|_{X \times \{t\}}$ è una copia di $P|_{X \times \{0\}}$. Quindi basta dimostrare che ogni fibrato ξ su $X \times I$ è il pullback lungo la restrizione a $X \times \{0\}$ tramite $\pi_0 : (x, t) \mapsto (x, 0)$.

Per la [Proposizione III.17](#), ci basta trovare una bundle map

$$h : P \rightarrow P_0 := p^{-1}(X \times \{0\}).$$

L'idea è quella di estendere l'identità $P_0 = P_0$ per passi successivi a una bundle map di

$$h_n := p^{-1}(Y_n) \longrightarrow P_0,$$

dove $Y_n := (X \times \{0\}) \cup (X_{n-1} \times I)$ si ottiene da Y_{n-1} attaccando delle celle $D^{n-1} \times I$, come descritto dalla costruzione pushout

$$\begin{array}{ccc} \amalg_i \left((D_i^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial D_i^{n-1} \times I) \right) & \longrightarrow & \amalg_i \left(\partial D_i^{n-1} \times I \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{n-1} & \longrightarrow & Y_n. \end{array}$$

Cella per cella, vogliamo estendere la mappa da Y_{n-1} a tutto Y_n : dette α e α' banalizzazioni sui sottocomplessi opportuni, supponendo di avere già costruito h_{n-1} abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 \left((D^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial D^{n-1} \times I) \right) \times G & \xrightarrow{\alpha} & \xi|_{(D^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)} & & \\
 \downarrow & & \swarrow & \searrow h_{n-1} & \\
 (D^{n-1} \times I) \times G & \xrightarrow{\alpha'} & \xi|_{D^{n-1} \times I} & \xrightarrow{h_n} & \xi|_{D^{n-1} \times \{0\}} \\
 & \searrow \tilde{h}_n & & &
 \end{array}$$

Devo trovare \tilde{h}_n che estende $h_{n-1} \circ \alpha$. Dato che esiste un'omeomorfismo di coppie

$$\beta : \left(D^{n-1} \times I, D^{n-1} \times \{0\} \right) \simeq \left(D^{n-1} \times I, (D^{n-1} \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I) \right),$$

allora per la (**HLP**) possiamo sollevare la seguente omotopia

$$\begin{array}{ccc}
 D^{n-1} \times \{0\} & \xrightarrow{h'_{n-1}} & P_0 \\
 \downarrow & \nearrow \bar{h}_{n-1} & \downarrow \\
 D^{n-1} \times I & \xrightarrow{\pi_0 \circ \beta} & X \times \{0\},
 \end{array}$$

dove $h'_{n-1}(x, 0) = (\beta(x, 0), 1_G)$. Facendo agire G , riusciamo dunque a costruire una bundle map

$$h_n : (D^{n-1} \times I) \times G \longrightarrow P_0, \quad ((x, t), g) \longmapsto \bar{h}_n(x, t) \cdot g. \quad \square$$

III.18. Corollario. — Se $f, g : X \rightarrow B$ sono mappe omotope, allora $f^*\xi \simeq g^*\xi$. Segue che la funzione $[X, B] \rightarrow \text{Princ}_G(X)$ è ben definita.

Definizione. — Un G -fibrato principale $\xi : E \xrightarrow{p} B$ si dice **universale** se per ogni G -fibrato principale $\xi' = (E', p')$ su un CW complesso X , per ogni $L \subset X$

sottocomplesso e per ogni bundle map $h : (p')^{-1}(L) \rightarrow E$, allora h si estende a una bundle map $h' : E' \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E' & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow h & \\
 (p')^{-1}(L) & \xrightarrow{\quad} & E & & \\
 \downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow p \\
 L & \xrightarrow{\quad} & X & \searrow \bar{h} & B. \\
 & \nearrow & & &
 \end{array}$$

Nel linguaggio dei G -CW-complessi, la definizione è equivalente a dare un fibrato principale su G tale che per ogni G -CW-coppia (E', A') , allora ogni mappa G -equivariante $A' \rightarrow E$ si estende a una mappa $h' : E' \rightarrow E$.

III.19. Teorema (di classificazione). — Sia $\xi = (E, p)$ un G -fibrato universale su B . Per ogni CW complesso X , si ha una **bigezione**

$$[X, B] \longrightarrow \text{Princ}_G(X), \quad [f] \longmapsto f^*\xi.$$

Dimostrazione. Siccome mappe omotope hanno pullback isomorfi, sappiamo che la mappa è ben definita.

Surgettività: sia $p' : E' \rightarrow X$ un fibrato principale su G . Prendendo il sottocomplesso $L = \emptyset$ nella definizione di ξ , per la [Proposizione III.17](#) si ha una bundle map $h : E' \rightarrow E$ tale che $\xi' = \bar{h}^*\xi$, dove $\bar{h} : X \rightarrow B$ è indotta da h .

Iniettività: siano $f_0, f_1 : X \rightarrow B$ tali che $f_0^*\xi \simeq f_1^*\xi$. Dato che il prodotto $X \times I$ è un CW complesso, consideriamo il suo sottocomplesso $L = X \times \{0, 1\}$ e notiamo che il fibrato

$$\xi' : f_0^*\xi \times I \xrightarrow{p''} X \times I$$

è isomorfo a $(f_0 \circ \text{pr}_1)^*\xi$, con $i = 0, 1$ (questo ci dice che a ogni tempo stiamo parametrizzando sempre lo stesso fibrato pullback). Poste $h_i : f_i^*\xi \rightarrow \xi$ le due bundle map, definiamo la bundle map $h : (p'')^{-1}(L) \rightarrow E$ tale che

$$h|_{(p'')^{-1}(X \times \{0\})} = h_0, \quad h|_{(p'')^{-1}(X \times \{1\})} = h_1 \circ \kappa,$$

dove $\kappa : E(f_0^*\xi) \rightarrow E(f_1^*\xi)$ deriva dall'ipotesi $f_0^*\xi \simeq f_1^*\xi$. Quindi h è una bundle map che su $X \times \{1\}$ induce la stessa mappa di h_1 , cioè f_1 .

Per universalità di ξ , sappiamo che h si estende a una bundle map $h' : E(\xi') \rightarrow E$, e l'applicazione indotta da h' dà un'omotopia

$$\bar{h}' : X \times I \longrightarrow B, \quad \bar{h}'_0 = f_0, \quad \bar{h}'_1 = f_1. \quad \square$$

LEZIONE 10
28th mar., 2023

Definizione. — Sia $xi = (E, p)$ un fibrato universale per G sulla base B . Dato un G -fibrato principale $\xi' = (E', p')$ su X , chiamiamo **mappa classificante** di ξ' la mappa $f : X \rightarrow B$ tale che $\xi' \simeq f^*\xi$.

Osservazione. — I fibrati universali sono *unici* nel seguente senso: dati ξ, ξ' due G -fibrati universali le cui basi sono CW complessi, allora B e B' sono omotopicamente equivalenti. Infatti, per universalità esistono due mappe $f : B \rightarrow B'$ e $g : B' \rightarrow B$ tali che $f^*\xi' \simeq \xi$ e $g^*\xi \simeq \xi'$. Per funtorialità del pullback segue che $(g \circ f)^*\xi = f^*(g^*\xi) = f^*\xi' = \xi$ e quindi per il [Teorema di classificazione](#) deduciamo che $g \circ f \simeq 1_B$; analogamente si vede che $f \circ g \simeq 1_{B'}$.

Vogliamo trovare una caratterizzazione dei fibrati universali.

III.20. Teorema. — *Un G -fibrato principale $\xi = (E, p)$ su B è universale se e solo se E è connesso per archi e debolmente contraibile.*

Dimostrazione. Sia ξ è universale. Per ogni $n \geq 0$, data una mappa $f : S^n \rightarrow B$ dove $S^n = \partial D^{n+1}$, vogliamo dimostrare che f si estende a tutto il disco. Definiamo la mappa

$$\tilde{f} : S^n \times G \longrightarrow E, \quad \tilde{f}(x, g) := f(x) \cdot g,$$

notando che è una bundle map che copre f . Per ipotesi, \tilde{f} si estende a una bundle map $\tilde{f}' : D^{n+1} \times G \rightarrow E$; componendo con la proiezione, consideriamo dunque $f' : D^{n+1} \rightarrow E$ l'applicazione indotta su D^{n+1} da \tilde{f}' . Per costruzione, si vede che f' estende f , quindi $\pi_i(E, *) = 0$ per ogni $i \geq 0$.

Viceversa, ora supponiamo che una qualsiasi bundle map $h : S^n \times G \rightarrow E$ si estende a tutto $D^{n+1} \times G \rightarrow E$. Data una mappa $h_1 : S^n \rightarrow E$ definita da $h_1(x) = h(x, 1)$, per ipotesi si estende a $\tilde{h}_1 : D^{n+1} \rightarrow E$. Ma allora possiamo estendere la mappa a $D^{n+1} \times G$ facendo agire il gruppo sulla destra, cioè

$$\tilde{h} : D^{n+1} \times G \longrightarrow E, \quad \tilde{h}(x, g) := \tilde{h}_1(x) \cdot g.$$

Per costruzione, questa mappa estende h a $S^n \times G$ poiché

$$h(x, g) = h(x, 1 \cdot g) = h(x, 1) \cdot g = \tilde{h}_1(x) \cdot g.$$

Sia ora X un CW complesso e $L \subset X$ un suo sottocomplesso. Consideriamo $\pi' : E' \rightarrow X$ un G -fibrato principale e supponiamo sia data una bundle map $h : (p')^{-1}(L) \rightarrow E$. Allora riusciamo a estenderla a tutto E' per induzione sullo scheletro di X : per prima cosa estendiamo h a $L \cup X^{(0)}$. Se $v \in X^{(0)} \setminus L$, allora mando E'_v su una qualunque fibra E_w , con $w \in L$. Questo estende h a una bundle map $h_0 : p^{-1}(L \cup X^{(0)}) \rightarrow E$. Per induzione, suppongo di aver esteso h a $p^{-1}(L \cup X^{(n-1)})$ e costruisco l'estensione su $p^{-1}(L \cup X^{(n)})$. Se $c : D^n \rightarrow X^{(n)}$ è la mappa caratteristica di una n -cella di $X^{(n)}$, con $c' : \partial D^n = S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ funzione di attaccamento, anche la restrizione a ∂D^n è banale. Siccome per induzione abbiamo già costruito la bundle map $h' : E(c^*\xi)|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \times G \rightarrow E$, allora per il passo precedente si estende a $D^n \times G$. \square

Ricordiamo che nella categoria dei CW complessi, l'equivalenza debole corrisponde all'equivalenza omotopica, quindi lo spazio totale di un G -fibrato principale è contraibile. Un G -CW-complesso libero e contraibile si indica con EG e il suo spazio delle orbite $BG := EG/G$. La mappa di proiezione $p : EG \rightarrow BG$ è un G -fibrato universale e la base BG si dice **spazio classificante** del gruppo G .

Il problema è come costruire BG . Quando G è discreto, notiamo che BG è uno spazio di Eilenberg-MacLane di tipo $K(G, 1)$: la fibra è discreta e ξ è un rivestimento con fibre omeomorfe a G . Ricordiamo che $p_* : \pi_i(E, *) \rightarrow \pi_i(B, *)$ è in *isomorfismo* per ogni $i \geq 2$, pertanto

$$\pi_i(B, *) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq 1; \\ G, & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

In breve, per CW complessi, BG ha $\pi_1(B, *) \simeq G$ e rivestimento universale contraibile.

Esempio. — (i) Se $G = \mathbb{Z}$, abbiamo visto che $K(\mathbb{Z}, 1) \simeq S^1$.

(ii) Identificando $G = \mathbb{Z}/2$ con S^0 , la filtrazione

$$\begin{array}{ccccccc} S^0 & \hookrightarrow & S^1 & \hookrightarrow & S^2 & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow S^\infty \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{RP}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{RP}^2 & \hookrightarrow & \dots \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty \end{array}$$

mostra che S^∞ è un CW complesso, dunque la mappa $S^\infty \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ è un fibrato universale su $\mathbb{Z}/2$, dato che S^∞ è contraibile.

III.21. Fatto. — Se G è un gruppo dotato di torsione, allora il suo spazio classificante è necessariamente un CW complesso di dimensione infinita. Questo fatto ha una motivazione profonda, ed è legato all'**omologia**

del gruppo G . Infatti, dato un gruppo, si può definire un invariante $H_*(G)$ in termini puramente algebrici: nel caso di gruppi di torsione, esistono infiniti gruppi di omologia $H_n(G)$ non banali. Ad esempio

$$H_{2n-1}(\mathbb{Z}/r) \simeq \mathbb{Z}/r \neq 0.$$

D'altra parte, ammesso di sapere che per ogni gruppo G esiste lo spazio classificante BG , allora potremmo definire $H_*(G) := H_*(BG; \mathbb{Z})$. Queste due nozioni coincidono, e questo permette di studiare i gruppi da un punto di vista topologico. Per un'introduzione, si veda .

(iii) Se $G = S^1 \subset \mathbb{C}$, considero la filtrazione

$$S^1 \subset S^3 \subset S^5 \subset \dots \subset S^{2n-1} \subset S^{2n+1} \subset \dots \subset S^\infty,$$

dove $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ è la sfera unitaria immersa in uno spazio vettoriale complesso. L'azione di G sulle sfere è per moltiplicazione, quindi deduciamo che per ogni $i \geq 1$ si ha $S^{2i-1}/S^1 \simeq \mathbb{CP}^i$. Dalla filtrazione sopra deduciamo che $S^1 \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$ è un fibrato principale con spazio totale contraibile, quindi è universale. Si noti che S^1 non è un gruppo discreto e quindi lo spazio classificante BG non è necessariamente di tipo $K(G, 1)$.

Osservazione. — Se G agisce liberamente su uno spazio contraibile E , e $H \subset G$ è un gruppo che agisce ancora liberamente su E , allora $E \rightarrow E/H = BH$ è un H -fibrato universale.

III.22. Teorema (Peter-Weyl). — Ogni gruppo di Lie compatto ha una rappresentazione fedele finito-dimensionale e unitaria (i.e. $U_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$).

Alla luce di questo teorema, per studiare gli spazi di classificazione di gruppi di Lie compatti è sufficiente studiare il caso delle matrici unitarie $U(n)$. Infatti, se $G \hookrightarrow U(n)$, allora $EG \simeq EU(n)$ e lo spazio classificante si otterrà come quoziente $BG \simeq EU(n)/G$. Vogliamo dunque trovare un modello conveniente per lo spazio classificante di $U(n)$.

III.23. Lemma. — Sia B compatto e di Hausdorff. Ogni fibrato vettoriale $\xi = (E, p)$ ha un morfismo iniettivo in un fibrato banale.

Dimostrazione. Consideriamo un ricoprimento banalizzante U_1, \dots, U_k e consideriamo $\{u_i\}$ una partizione dell'unità associata. Sia

$$\Phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n, \quad \Phi_i(e) = (p(e), \varphi_i(e)),$$

dove φ_i induce isomorfismi sulle fibre. Definiamo

$$\Phi : E \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \simeq \mathbb{R}^{nk}, \quad \Phi(e) = \left(u_1(p(e))\varphi_1(e), \dots, u_k(p(e))\varphi_k(e) \right)$$

e questa ci permette di trovare il seguente morfismo in un fibrato banale:

$$E \longrightarrow B \times \mathbb{R}^{nk}, \quad e \longmapsto \left(p(e), \Phi(e) \right).$$

□

III.24. Corollario. — Se B è uno spazio compatto, ogni fibrato vettoriale ξ ha un complemento ortogonale ξ^\perp e la somma di Whitney $\xi \oplus \xi^\perp$ è banale.

Dimostrazione. Dato un fibrato banale η in cui ξ si immerge, è sufficiente dotare η di una metrica Riemanniana e considerare l'ortogonale fibra per fibra. □

Osservazione. — Se ξ ha rango n , allora $\varphi(E_b)$ è un sottospazio di dimensione n in qualche \mathbb{R}^{nk} , quindi un elemento $\varphi^n(\mathbb{R}^{nk})$. Troviamo così una bundle map

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi'} & E(\gamma_{nk,n}) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi} & Gr_n(\mathbb{R}^{nk}), \end{array}$$

quindi $\xi = f^*\gamma_{nk,n}$.

Se vogliamo classificare tutti i fibrati vettoriali di rango n su B , dato che \mathbb{R}^{nk} ha dimensione arbitrariamente grande, allora è necessario passare alla grassmaniana su \mathbb{R}^∞ , dove ricordiamo che è dato dalla filtrazione

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \dots \subset \mathbb{R}^\infty,$$

e quindi possiamo vederlo come l'insieme delle successioni (x_1, x_2, \dots) definitivamente nulle. Indichiamo allora con $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ l'insieme dei sottospazi n -dimensionali in \mathbb{R}^∞ . Generalizzando la mappa di Gauss che abbiamo nel caso di varietà differenziabili, per fibrati vettoriali di rango n su una base B paracompatta si guarda $E(\gamma_n) \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ è un fibrato universale. Per una discussione dettagliata, vedi [MS74, §5].

Esempio. — Detta $\mathcal{V}_n(\mathbb{C}^{n+h})$ la varietà di Stiefel degli n -frames ortonormali in \mathbb{C}^{n+h} , la proiezione $p : \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^{n+h}) \rightarrow Gr_n(\mathbb{C}^{n+h})$ è un fibrato principale,

con fibre $U(n)$. Notiamo che $U(q)$ agisce su $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, con stabilizzatore $U(q-1)$, quindi $U(q)/U(q-1) \simeq S^{2q-1}$. Usando il fatto che, dati sottogruppi $H \subset K \subset G$, il quoziente $G/H \rightarrow G/K$ è un fibrato con fibre K/H , allora otteniamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 U(h+1)/U(h) \simeq S^{2h+1} & \hookrightarrow & U(n+h)/U(h) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^{n+h}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U(h+2)/U(h+1) \simeq S^{2h+3} & \hookrightarrow & U(n+h)/U(h+1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{C}^{n+h}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U(h+3)/U(h+2) \simeq S^{2h+5} & \hookrightarrow & U(n+h)/U(h+2) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{V}_{n-2}(\mathbb{C}^{n+h}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U(n+h)/U(n+h-1) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{V}_1(\mathbb{C}^{n+h}) \simeq S^{2(n+h)-1}.
 \end{array}$$

Usando la successione esatta dei fibrati, si deduce che $\mathcal{V}_n(\mathbb{C}^{n+h})$ è uno spazio $2n$ -connesso. Quindi, per trovare il fibrato universale facciamo il *limite* su n e si ottiene

$$\mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow Gr_n(\mathbb{C}^\infty).$$

Si può studiare analogamente il caso *reale* sostituendo alle matrici unitarie $U(n)$ i gruppi ortogonali $O(n)$.

LEZIONE 11
3rd apr., 2023

Abbiamo introdotto i *fibrati universali* come oggetti che permettono di estendere bundle map parziali. Se $\xi = (E, p)$ è un G -fibrato principale su un CW complesso B tale che $[X, B] \simeq \text{Princ}_G(X)$, allora ξ è universale: infatti, se $\tilde{f} : S^n \rightarrow E$, possiamo ottenere una bundle map $h : S^n \times G \rightarrow E$ facendo agire il gruppo a destra

$$h(x, g) := \tilde{f}(x) \cdot g.$$

Quindi il fibrato banale su S^n è il pullback $f^*\xi$. Chiaramente il fibrato banale è indotto dalla mappa costante $S^n \rightarrow \{b_0\} \subset B$, quindi per la corrispondenza bigettiva provata nel Teorema, deduciamo che $f \sim b_0$, cioè f si estende a tutto D^{n+1} . Questo significa che anche \tilde{f} si estende su tutto D^{n+1} . ????

III.25. Proposizione. — *Sia $p : EG \rightarrow BG$ un G -fibrato universale. Allora per ogni $n \geq 1$ si hanno gli isomorfismi*

$$\pi_n(BG, *) \simeq \pi_{n-1}(G, *).$$

Dimostrazione. È sufficiente considerare la successione in omotopia del fibrato; dato che EG è debolmente contraibile, si ha la tesi per $n \geq 2$. Se G è connesso per archi, allora $\pi_1(BG, *) = 0$. \square

Esempio. — (i) Per ogni $n \geq 1$, l'isomorfismo della Proposizione può essere visto come

$$\pi_n(BG, *) \simeq [S^n, BG] \simeq \text{Princ}_G(S^n) \simeq \pi_{n-1}(G),$$

e quindi si può studiare indipendentemente dal **Teorema di classificazione**, calcolando le classi di isomorfismo dei G -fibrati principali delle sfere. In molti testi, questa costruzione viene mostrata esplicitamente: l'idea è spezzare la sfera S^n in due calotte contraibili, sulle quali abbiamo i fibrati banali $S_-^n \times G$ e $S_+^n \times G$. Un fibrato principale si ottiene incollando le fibre lungo l'equatore $S^{n-1} \subset S^n$: questo incollamento è descritto da una mappa $S^{n-1} \rightarrow G$, cioè un rappresentante di un elemento di $\pi_{n-1}(G, *)$.

(ii) Lo spazio classicante $BS^1 = BU(1) = \mathbb{CP}^\infty$ dato che

$$\pi_n(BU(1), *) = \pi_{n-1}(S^1, *) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 2; \\ 0, & \text{se } n \neq 2. \end{cases}$$

Quindi lo spazio $BU(1) \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$.

III.26. Teorema. —

$$\text{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \simeq \text{Princ}_G(X) \simeq [X, BU(1)] \simeq \dots$$

finisci:classi
di chern

III.27. Teorema. — Abbiamo la seguente classificazione dei fibrati in rette reali:

$$\text{Vect}_1^{\mathbb{R}}(X) \simeq \text{Princ}_{O(1)}(X) \simeq [X, BO(1)] \simeq [X, \mathbb{RP}^\infty] \simeq [X, K(\mathbb{Z}/2, 1)] \simeq H^1(X; \mathbb{Z}/2),$$

dove $f: X \rightarrow \mathbb{RP}^\infty$ va nella classe

$$w_1 := f^*w \in H^1(X; \mathbb{Z}/2),$$

dove $w \in H^1(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2)$ è il generatore. La classe w_1 che corrisponde al fibrato $\xi \in \text{Vect}_1^{\mathbb{R}}(X)$ si chiama **prima classe di Stiefel-Whitney**.

Sta facendo nuovamente la fibrazione sulle varietà di Stiefel, ma scordando l'ultimo vettore del frame

Si è visto che nella fibrazione

$$F \hookrightarrow \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^{n+k}) \longrightarrow \mathcal{V}_{n-1}(\mathbb{C}^{n+k})$$

la fibra è $(2n - 1)$ -connessa. Boh.

Abbiamo visto quindi che lo spazio classificante di $U(n)$ è lo stesso di $GL(n, \mathbb{C})$. Considerando il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty) & \xrightarrow{p''} & \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty)/U(n) \longleftarrow BU(n) \\ p \downarrow & & \uparrow q \\ Gr_n(\mathbb{C}^\infty) & \longleftarrow & BGL(n, \mathbb{C}) \end{array},$$

notiamo quindi che

$$\mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty)/GL(n, \mathbb{C}) \simeq (\mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty)/U(n))/((GL(n, \mathbb{C})/U(n))).$$

Esiste un'equivalenza omotopica $\mathcal{V}_n \simeq \mathcal{V}'_n$ data essenzialmente dall'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, che induce un'equivalenza omotopica tra $\mathcal{V}_n/U(n)$ e $\mathcal{V}'_n/U(n)$. Consideriamo dunque un'inversa omotopica $q' : Gr_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \mathcal{V}_n(\mathbb{C}^\infty)$. Se λ è un... Siccome $f \sim q \circ q' \circ f$, allora

$$\lambda \simeq f^* \xi \simeq f^*((q')^*(q^* \xi)),$$

quindi troviamo $\tilde{f} : X \rightarrow BH$ un un sollevamento di f (a meno di omotopia) tale che il seguente diagramma in **hTop** commuti:

$$\begin{array}{ccccc} f^* \xi = Y & & E(q^* \xi) & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow p'' & \downarrow p \\ & & BH & \xleftarrow{q'} & E/G \\ \uparrow \tilde{f} & & \searrow q & & \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & BG = E/G & & \end{array}$$

III.28. Lemma. — *Il pullback tramite q è un G -fibrato principale su BH .*

Dimostrazione. Basta trovare una bundle map $l : E \times_H G \rightarrow E$ che induca $\bar{l} = q$. Per questo scopo basta considerare $[(e, g)] \mapsto e \cdot g$ e notare che passa al quoziente. \square

Definizione. — Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Un G -fibrato principale $\xi' = (E', p')$ su B si dice **indotto da un H -fibrato principale** $\xi'' = (E'', p'')$ su una base B'' se $\xi' \simeq (E'' \times G \rightarrow B)$. In altre parole, ξ è isomorfo a un G -fibrato con funzioni di transizione in H . Se un G -fibrato principale è indotto da un H -fibrato, si dirà allora che G si **riduce** a H .

Osservazione. — Si ha la catena di isomorfismi

$$f^*\xi \simeq \tilde{f}^*(q^*\xi) \simeq \tilde{f}^*(E \times_H G) \simeq E(\tilde{f}^*\xi) \times_H G,$$

dove l'ultimo isomorfismo è indotto da

$$E(f^*\xi) = B' \times_B E = \{ (b', e) \mid f(b') = p(e) \},$$

quindi

$$\tilde{f}^*(E \times_H G) = X \times_{BH} (E \times_H G) = (X \times_{BH} E) \times_H G = (\tilde{f}^*E) \times_H G.$$

Quindi se esiste \tilde{f} , allora $f^*\xi$ è indotta da $\tilde{f}^*(E)$. Viceversa, se $f^*\xi \simeq \tilde{f}^*(E) \times_H G = \tilde{f}^*(E \times_H G) = \tilde{f}^*(q^*\xi)$, allora il teorema di classificazione ci dà un'omotopia $\tilde{f} \sim f \circ q$.

III.29. Teorema. — *Sia $H \subset G$ un sottogruppo tale che $G \rightarrow G/H$ sia un fibrato localmente banale (equivalentemente ha sezioni locali). Allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) *il G -fibrato principale $\xi = (E, p)$ su B è indotto da un H -fibrato principale;*
- (ii) *la mappa classificante $f : B \rightarrow BG$ si solleva (a meno di omotopia) a una mappa $\tilde{f} : B \rightarrow BH$.*

Esempio. —

La fibrazione $BSO(n) \rightarrow BO(n)$ ha fibra $O(n)/SO(n) \simeq \mathbb{Z}/2$.

Una matrice su un fibrato classificato da $B \rightarrow BGL(n, \mathbb{R})$ è un sollevamento $\tilde{f} : B \rightarrow BO(n)$.

III.30. Proposizione. — *$s : BG \rightarrow BH$, allora ogni G -fibrato classificato da una $f : B \rightarrow BG$ ha riduzione del gruppo ad H , cioè esiste un sollevamento $\tilde{f} : B \rightarrow BH$.*

Dimostrazione. Basta considerare $\tilde{f} := s \circ f$. □

Costruzione di Milnor

Presentiamo una costruzione di BG molto *categoriale*. Definiamo la **categoria semplice** Δ come la categoria con oggetti gli insiemi

$$[n] := \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geq 0,$$

e come morfismi le funzioni *non decrescenti* $f : [n] \rightarrow [m]$.

Esempio. — i -codeg e cofacce

III.31. Lemma. — *Per ogni $i \leq$, le cofacce e le mappe codegeneri soddisfano le seguenti relazioni:*

$$d^i d^j = d^i \dots$$

III.32. Fatto. — *I morfismi d^i e s^i generano tutti i morfismi nella categoria Δ .*

La categoria opposta Δ^{op} ha gli stessi oggetti di Δ , e morfismi

$$\text{Hom}_{\Delta^{op}}([n], [m]) = \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]),$$

quindi vediamo che la cofaccia i -esima $d^i : [n-1] \rightarrow [n]$ corrisponde a un morfismo

$$d_i : [n] \longrightarrow [n-1],$$

e...

Ricordiamo che un complesso simpliciale X è un'unione di semplici. Se X_n è un insieme di indici che parametrizza gli n -semplici, allora

$$X = \left(\bigcup_{n \geq 0} \Delta^n \times X_n \right) / \sim,$$

dove Δ^n è l' n -simpleso standard in \mathbb{R}^{n+1} , e \sim è la relazione d'equivalenza che identifica le coppie allora ci descrive come non si capisce un cazzo.

Vogliamo generalizzare questa idea topologica a livello categoriale.

Definizione. — Un **simpliciale** X è una collezione di insiemi X_n , con $n \geq 0$, e applicazioni $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$, $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1}$ che soddisfano le relazioni sopra.

In modo più formale, si può dire che un insieme simpliciale è un funtore $F : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ tale che

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{F} & X_n \\ \uparrow s_j & & \uparrow F(s_j) \\ [n-1] & \xrightarrow{F} & X_{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \downarrow F(d_i) \end{array}$$

Nel caso più generale, al posto di \mathbf{Set} si può considerare una categoria \mathcal{C} qualsiasi e definire un insieme simpliciale come un funtore $F : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$.

Finora abbiamo parlato di spazi BG , ma non abbiamo mai assicurato la loro esistenza. Descriviamo una costruzione functoriale per associare a un gruppo G uno spazio topologico, che in effetti sarà lo spazio classificante BG .

Il **join** di due spazi X e Y è l'unione di tutti i segmenti da un punto di X e un punto di Y : più precisamente definiamo

$$X \star Y = X \times I \times Y / \sim$$

dove la relazione \sim identifica gli estremi dei segmenti che arrivano nello stesso punto, cioè

$$(x, 0, y) \sim (x, 0, y'), \quad (x, 1, y) \sim (x', 1, y).$$

Indichiamo un punto del join come una combinazione convessa $t_1x + t_2y := (x, t, y)$.

Esempio. — (i) Se $Y = \{y\}$, allora il join è il cono poichè $X \star Y \simeq X \times I / X \times \{1\} \simeq CX$, quindi è contraibile.

(ii) Se $Y = S^0$, allora il join è la sospensione:

$$X \star Y = \Sigma X.$$

In particolare notiamo che $S^n \star S^0 = S^{n+1}$ e in maniera simile vale che $S^n \star S^m = S^{n+m+1}$.

(iii) Se consideriamo x_0, x_1, \dots, x_n punti distinti, allora il loro join è l'involuppo convesso con vertici questi $n+1$ punti, quindi $x_0 \star x_1 \star \dots \star x_n \simeq \Delta^n$.

Esercizio. — La costruzione $X \star Y$ aumenta la connessione dello spazio: se X è $(m-1)$ -connesso e Y è $(n-1)$ -connesso, allora $X \star Y$ è $(m+n)$ -connesso.

Abbiamo delle inclusioni ovvie $i : X \subset X \star Y$ e $j : Y \subset X \star Y$.

III.33. Lemma. — *Le inclusioni i e j sono omotopicamente banali.*

Dimostrazione. Fissato $y_0 \in Y$, si ha

$$X \hookrightarrow X \star y_0 \subset X \star Y.$$

Siccome $X \star y_0$ è contraibile, allora deduciamo che $i \sim y_0$. Lo stesso ragionamento vale per j . \square

Sia G un gruppo topologico e consideriamo il join iterato

$$G^{\star(k+1)} = \underbrace{G \star G \star \cdots \star G}_{k+1 \text{ fattori}},$$

i cui elementi verranno indicati con combinazioni convesse, cioè $\sum_{i=0}^k t'_i g_i$ con $\sum_{i=0}^k t'_i = 1$ e tutti $t'_i \geq 0$.

Notiamo che c'è un'azione libera di G su $G^{\star(k+1)}$, data dall'azione diagonale

$$(g_0, t_1 g_1, t_2 g_2, \dots, t_k g_k) \cdot g = (g_0 \cdot g, t_1 g_1 \cdot g, t_2 g_2 \cdot g, \dots, t_k g_k \cdot g),$$

che con la notazione delle combinazioni convesse si scrive semplicemente $(\sum_{i=0}^k t'_i g_i) \cdot g = \sum_{i=0}^k t'_i (g_i \cdot g)$.

Esercizio. — C'è una mappa G -equivariante

$$\varphi : \Delta^k \times G^{\star(k+1)} \longrightarrow G^{\star(k+1)}, \quad \left((t_0, t_1, \dots, t_k), (g_0, g_1, \dots, g_k) \right) \longmapsto \sum_{i=0}^k t_i g_i,$$

che è un omeomorfismo su $(\Delta^k)^o \times G^{\star(k+1)}$ e G agisce banalmente sul semplice, mentre ha l'azione diagonale su $G^{\star(k+1)}$. In questo modo si ottiene un G -CW-complesso

$$G^{\star(k+1)} = \coprod_i \Delta_i^k \times G / \sim.$$

Definizione. — Dato un gruppo topologico G , definiamo lo spazio

$$J(G) := \lim_{k \rightarrow \infty} G^{\star(k+1)},$$

dove il limite è preso rispetto alle inclusioni $i : G^{\star(k+1)} \subset G^{\star(k+2)}$. Siccome tutte le inclusioni sono G -equivarianti, notiamo che G agisce su $J(G)$.

Siccome fare il join aumenta la connessione dello spazio, consideriamo questa costruzione limite per ottenere uno spazio contraibile.

III.34. Teorema. — Il quoziente $p : J(G) \rightarrow J(G)/G$ è un principale universale per G .

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente, $J(G)$ è uno spazio (debolmente) contraibile... \square

Definizione. — Un **insieme simpliciale** X_* in una categoria \mathcal{C} è una famiglia di oggetti X_n , con $n \in \mathbb{N}$, e applicazioni

$$d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1}, \quad s_j : X_n \longrightarrow X_{n-1},$$

tali che soddisfino le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i, & \text{se } i < j, \\ s_i s_j &= s_{j-1} s_i, & \text{se } i < j, \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ s_j d_{j-1}, & \text{se } i > j \end{cases} \end{aligned}$$

Sono le relazioni che si ottengono per i semplici standard Δ^n —

Un insieme simpliciale si può vedere come un funtore $F : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$, dove per ogni $n \geq 0$ si ha un quadrato commutativo

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{F} & X_n \\ s_j \uparrow & & \downarrow F(s_j) \\ [n-1] & \xrightarrow{F} & X_{n-1} \end{array}$$

Per capire come effettivamente si attaccano i complessi, realizzo le cofacce e le cogenerazioni in Δ paragonandolo al caso dei semplici standard $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$, con $\{e_i\}$ base canonica di \mathbb{R}^{n+1} . Allora

$$d^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n, \quad d^i(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n), & \text{se } i \geq 1; \\ (1 - \sum_{i=1}^n t_i, t_1, \dots, t_n), & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

mentre le codegenerazioni sono date da

$$s^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n, \quad s^i(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n), & \text{se } i \geq 1; \\ (t_2, t_3, \dots, t_n), & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

Definizione. — La **realizzazione geometrica** di un insieme simpliciale X_* è lo spazio

$$|X_*| = \coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim ,$$

dove la relazione \sim attacca i punti di un $(n-1)$ -simpleso con quelli di un n -simpleso tramite la cofaccia, cioè

$$(t, d_i(x)) \sim (d^i(t), x), \quad \text{con } (t, x) \in \Delta^{n-1} \times X_n ,$$

mentre i complessi “superflui” vengono eliminati dalle codegenerazioni

$$(t, s_j(x)) \sim (s^j(t), x), \quad \text{ce } (t, x) \in \Delta^{n+1} \times X_n ,$$

che incollano gli $(n+1)$ -simplessi degeneri come facce di n -simplessi. La topologia di X_n si assume discreta, quindi $\Delta_n \times X_n$ è un insieme di n -simplessi discreto. Ne segue che la realizzazione $|X_*|$ è un CW complesso con n -scheletro

$$|X_*|_n = \coprod_{k \geq n} (\Delta^n \times X_k) / \sim .$$

Vedi Peter May “Simplicial object” per una cosa dettagliata, oppure il paper carino “An elementary illustrated introduction to simplicial sets” di Greg Friedman.

III.35. Proposizione. — Se X_* è un insieme simpliciale, possiamo associargli il complesso di catene $C_\bullet(X_*)$, dove

$$C_n(X_*) = \bigoplus_{x \in X_n} \mathbb{Z}x$$

è il gruppo abeliano libero generato da X_n , le cui mappe di bordo sono

$$\partial_i : C_n(X_*) \longrightarrow C_{n-1}(X_*) , \quad \partial_i(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(x) .$$

Allora $H_*(X_*; \mathbb{Z})$ è l’omologia di $C_\bullet(X_*)$.

Sia G un gruppo topologico, e definiamo εG_* l’insieme simpliciale con

$$\varepsilon G_n = G^{\star(n+1)} ,$$

in cui le facce sono

$$d_i : G^{\star(n+1)} \longrightarrow G^{\star n} , \quad d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n) ,$$

mentre le degenerazioni sono date da

$$s_j : G^{\star(n+1)} \longrightarrow G^{\star n}, \quad s_j(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \widehat{g}_j, \dots, g_n),$$

...

Notiamo che G agisce (a destra) su $|\varepsilon G_*|$ tramite l'azione diagonale

$$\left(t, (g_0, \dots, g_n)\right) \cdot g = \left(t, (g_0 \cdot g, \dots, g_n \cdot g)\right).$$

Ponendo $E := |\varepsilon G_*|$, siccome è uno spazio asferico, allora

$$p : EG \longrightarrow EG/G = BG$$

è un G -fibrato universale. La base BG ha una struttura di insieme simpliciale indotta da εG_* , più precisamente si ha $BG_n = G^n$, con facce date da

$$d_i(g_0, \dots, g_n) =$$

e degenerazioni

$$s_j(g_0, \dots, g_n) = \begin{cases} (1, g_0, \dots, g_n), & \text{se } j = 0; \\ (g_0, \dots, g_j, 1, g_{j+1}, \dots, g_n), & \text{se } j > 0. \end{cases}$$

In questo modo, possiamo realizzare il fibrato $p_* : \varepsilon G_* \rightarrow BG_*$ come

$$p(g_0, g_1, \dots, g_n) = (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1}),$$

che induce $p : |\varepsilon G_*| \rightarrow |BG_*| \simeq BG$ tra le realizzazioni geometriche.

La costruzione appena descritta genera il **bar complex**.

Osservazione. — Siccome la costruzione di BG_* utilizza solamente la moltiplicazione del gruppo G e il suo elemento neutro, ma *non* elementi inversi, allora lo stesso ragionamento può essere generalizzato per realizzare lo **spazio classificante di un monoide**, e ancora più in generale di una **categoria \mathcal{C}** .

CAPITOLO IV.

Successioni spettrali

IV

La teoria delle successioni spettrali ha lo scopo di fornire uno strumento per calcolare H^* un R -modulo graduato, H^* una k -algebra graduata... Spesso l' H^* che vogliamo studiare è la coomologia di un complesso di cocatene: una *successione spettrale* ci permette di calcolare la coomologia del complesso “affettandolo” attraverso delle *filtrazioni*, le quali ci permetteranno di studiare il complesso come se fosse un *libro*: infatti, otterremo tanti bicompleksi chiamati *pagine* e ognuna di queste pagine produrrà un nuovo complesso, ciascuno dotato di un nuovo differenziale che ci sposta “in su” di una diagonale. Se la situazione è favorevole, i differenziali produrranno definitivamente (co)omologia banale, e la successione delle pagine si *stabilizza*.

Sia (C_\bullet, d) un complesso di catene. Ricordiamo che la sua omologia in grado i è il quoziente $H_i(C_\bullet) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$. In presenza di un complesso di cocatene (C^\bullet, d) usiamo invece la notazione *crescente*, e quindi la sua coomologia in grado i è $H^i(C^\bullet) = \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$.

Definizione. — Dato un R -modulo A , una famiglia di sottomoduli totalmente ordinata per inclusione si chiama

- una **filtrazione decrescente** se

$$F^\bullet A : \quad \dots \subset F^{p+1}A \subset F^p A \subset F^{p-1}A \subset \dots$$

- una **filtrazione crescente** se

$$F_\bullet A : \quad \dots \subset F_{p-1}A \subset F_p A \subset F_{p+1}A \subset \dots$$

Esempio. — Una filtrazione decrescente F^\bullet sul gruppo abeliano $A = \mathbb{Z}$ è data da $F^i A = \mathbb{Z}$ per $i \leq 0$ e $F^i A = 2^i \mathbb{Z}$ per $i > 0$, cioè:

$$0 \subset \dots \subset 16\mathbb{Z} \subset 8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}.$$

Definizione. — Diciamo che un **complesso** di catene (C_\bullet, d) è **filtrato** se è un R -modulo $C = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ filtrato F_\bullet tale che il differenziale sia compatibile rispetto alla filtrazione: nel caso di una filtrazione F^\bullet decrescente, richiediamo che per ogni $i \in \mathbb{Z}$ valga $d(F^i C) \subset F^i C$. In maniera analoga, possiamo definire un complesso di cocatene filtrato, dotato di una filtrazione crescente F_\bullet , oppure decrescente F^\bullet .

Notiamo che, se (C_\bullet, d) è un complesso filtrato da F_\bullet , allora i sottomoduli $F_p C_\bullet = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F_p C_j$ ereditano una naturale struttura di complesso di catene una volta che restringiamo il differenziale:

$$d|_{F_p C_\bullet} : F_p C_j \longrightarrow F_p C_{j-1}.$$

Definizione. — Dato (A, F) un R -modulo filtrato, il suo **modulo graduato associato** è

- l' R -modulo $E^0(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_p^0(A)$, dove

$$E_p^0(A) := F_p A / F_{p-1} A$$

se F_\bullet è crescente;

- l' R -modulo $E_0(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_0^p(A)$, dove

$$E_0^p(A) := F^p A / F^{p+1} A$$

se F^\bullet è decrescente.

Esempio. — Consideriamo la filtrazione $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ sul gruppo abeliano \mathbb{Z} . Lo \mathbb{Z} -modulo graduato associato alla filtrazione è $E^0(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$; si osservi che non è isomorfo a \mathbb{Z} .

Osservazione. — In generale, anche se la filtrazione F^\bullet è *limitata*, cioè

$$0 = F^{m+n+1} A \subsetneq F^{m+n} A \subset \cdots \subset F^m A = A,$$

il modulo $E_0^p(A)$ non determina il modulo A : questo fatto è conosciuto come il **problema di estensione**. Infatti, si potrebbe pensare di ricostruire A “*grado per grado*” a partire da $F^{n+m} A \simeq E_0^{n+m}(A)$ e poi considerando le successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow F^{i+1} A \longrightarrow F^i A \longrightarrow E_0^i(A) \longrightarrow 0.$$

CAPITOLO IV. SUCCESSIONI SPETTRALI

Il problema è che in generale il termine $F^i A$ *non* è univocamente determinato: si pensi ad esempio

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

dove A può essere $\mathbb{Z}/4$ oppure $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Esempio. — Sia X un CW complesso e indichiamo con $X^{(p)}$ il suo p -scheletro. Il complesso $C_\bullet(X)$ delle catene singolari di X ammette la filtrazione crescente $F_p C_\bullet := C_\bullet(X^{(p)})$. Passando alle cocatene, invece, il complesso $C^\bullet(X) = \text{Hom}_R(C_\bullet(X), R)$ ammette la filtrazione decrescente

$$F^p C^\bullet := \{ \varphi \in C^\bullet(X) \mid F_{p-1} C_\bullet \subset \ker \varphi \} = \text{Ann}(F_{p-1} C_\bullet).$$

I moduli graduati associati corrispondono alle (co)catene relative agli scheletri di dimensioni successive: più precisamente, dalla filtrazione crescente $F_p C_\bullet$ sulle catene singolari si ottiene il **complesso delle catene cellulari**, infatti in grado p si ha

$$E_p^0(C_\bullet) = C_\bullet(X^p) / C_\bullet(X^{p-1}) = C_\bullet(X^{(p)}, X^{(p-1)}),$$

mentre sulle cocatene si ha

$$\begin{aligned} E_0^p(C^\bullet) &= \text{Ann}(F_{p-1} C_\bullet) / \text{Ann}(F_p C_\bullet) \\ &= \{ \varphi \in C^\bullet(X^{(p)}) \mid C_\bullet(X^{(p-1)}) \subset \ker \varphi \} = C^\bullet(X^{(p)}, X^{(p-1)}). \end{aligned}$$

Definizione. — Data una mappa di complessi $f : D_\bullet \rightarrow C_\bullet$ e una filtrazione F_\bullet su C_\bullet , allora definiamo una **filtrazione G_\bullet indotta** sul modulo D_\bullet da

$$G_p D_\bullet = f^{-1}(F_p C_\bullet).$$

Osservazione. — Se (C_\bullet, d) è un complesso di catene con una filtrazione crescente F_\bullet , allora anche l'omologia $H_*(C_\bullet)$ è un modulo filtrato, dove

$$F_p H_*(C_\bullet) := \text{im}(H_*(F_p C_\bullet) \rightarrow H_*(C_\bullet))$$

determina una filtrazione crescente su H_* . In maniera duale, dato un complesso di cocatene (C^\bullet, d) con una filtrazione F decrescente, allora anche la sua coomologia $H^*(C^\bullet)$ è un modulo filtrato in maniera naturale, dove la filtrazione decrescente è data da

$$F^p H^*(C^\bullet) := \ker(H^*(C^\bullet) \rightarrow H^*(F^{p-1} C^\bullet)).$$

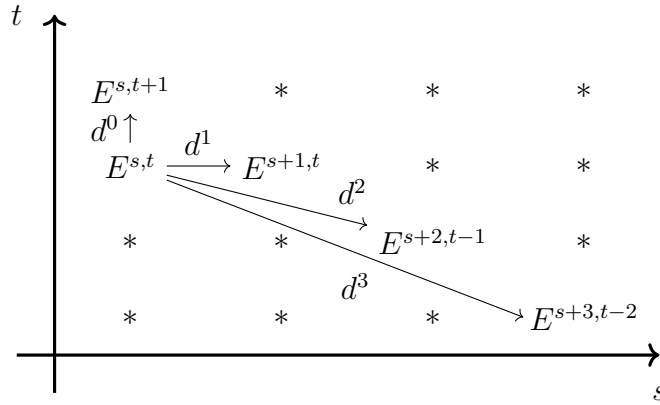


Figura IV.1.: I primi differenziali di bigrado $(r, 1 - r)$ in un bimodulo con notazione coomologica.

Definizione. — Un **modulo bigraduato** $E_{\bullet,\bullet}$ (indicato con $E^{\bullet,\bullet}$ se usiamo la notazione coomologica) è una somma diretta di R -moduli, i cui gradi sono definiti da due interi $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$. Un tale modulo E si dice **differenziale** se c'è una mappa $d : E \rightarrow E$, tale che $d^2 = 0$ e abbia:

- **bigrado** $(-r, r - 1)$, cioè il differenziale in grado (s, t) è

$$d_{s,t} : E_{s,t} \rightarrow E_{s-r,t+r-1} ;$$

- oppure **bigrado** $(r, -r + 1)$, cioè il differenziale in grado (s, t) è

$$d^{s,t} : E^{s,t} \rightarrow E^{s+r,t-r+1} .$$

Nel primo caso il differenziale ci fa “scendere” di diagonale nel bimodulo, nel secondo caso “saliamo” sulla diagonale superiore, come rappresentato in Figura IV.1.

Osservazione. — Un modulo bigraduato $E_{\bullet,\bullet}$ dà origine ad un complesso di catene

$$K_n := \bigoplus_{s+t=n} E_{s,t} ,$$

e in maniera duale, se il modulo ha la convenzione coomologica $E^{\bullet,\bullet}$, allora dà origine a un complesso di cocatene K^\bullet .

Dato un modulo bigraduato $(E_{\bullet,\bullet}, d)$, dato che $d^2 = 0$, possiamo calcolare la sua omologia (p, q) -esima come il quoziente

$$H_{p,q}(E_{\bullet,\bullet}, d) := \frac{\ker(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1})}{\operatorname{im}(d : E_{p+r,q-r+1} \rightarrow E_{p,q})} ,$$

e la stessa cosa accade per la coomologia di $E^{\bullet,\bullet}$.

Definizione. — Una **successione spettrale** di tipo **omologico** è una collezione di R -moduli differenziali bigraduati $\{ (E_{\bullet,\bullet}^r, d^r) \}_{r \geq k}$, con d^r di bigrado $(-r, r-1)$ tale che

$$E_{p,q}^{r+1} \simeq H_{p,q}(E_{\bullet,\bullet}^r, d^r) .$$

Analogamente, una **successione spettrale** di tipo **coomologico** è una collezione di R -moduli differenziali bigraduati $\{ (E_r^{\bullet,\bullet}, d_r) \}_{r \geq k}$, con d_r di bigrado $(r, -r+1)$ tale che

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r) .$$

D'ora in avanti enunceremo definizioni e teoremi per uno solo dei due tipi (per lo più il caso coomologico), ma è bene tenere a mente che le costruzioni valgono in maniera analoga per entrambe le situazioni.

Osservazione. — Per definizione, la pagina r -esima $(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$ determina $E_{r+1}^{p,q}$, ma in generale *non* determina il differenziale d_{r+1} della pagina successiva.

Una successione spettrale va pensata come una successione di pagine, proprio come in un libro; in quanto tale, vorremmo conoscere il suo comportamento “alla fine”, ovvero studiare il suo *limite*. Per ogni $r \geq k$, indichiamo con $Z_r = \ker d_r$ i **cocicli** e con $B_r = \operatorname{im} d_r$ i **cobordi** del differenziale; dato che $E_{r+1} = Z_r/B_r$, possiamo vedere il differenziale $(r+1)$ -esimo come un omomorfismo $d_{r+1} : Z_r/B_r \rightarrow Z_r/B_r$ e quindi considerare i suoi cocicli Z_{r+1} come un (*quoziente di un*) sottomodulo di Z_r che contiene i cobordi r -esimi, e lo stesso vale per B_{r+1} , quindi

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r .$$

Reiterando questo ragionamento per tutte le pagine, si ottiene la catena di inclusioni

$$B_k \subset B_{k+1} \subset B_{k+2} \subset \cdots \subset Z_{k+2} \subset Z_{k+1} \subset Z_k .$$

Definizione. — Usando la convenzione sopra, poniamo $B_\infty := \cup_i B_i$ e $Z_\infty := \cap_i Z_i$. Definiamo il **limite della successione spettrale** come il quoziente

$$E_\infty := Z_\infty / B_\infty .$$

Dalla definizione schietta è pressoché impossibile calcolare il limite di una successione spettrale: di solito speriamo che le cose vadano particolarmente bene e quindi riuscire a aggirare questo problema di calcolo. Introduciamo così una nozione di *convergenza*.

Definizione. — Sia H^* un R -modulo graduato. Una successione spettrale $\{(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)\}_{r \geq k}$ si dice **convergente a H^*** se esiste una filtrazione F^\bullet su H^* tale che

$$E_\infty^{p,q} \simeq E_0^p(H^{p+q}).$$

Osservazione. — L'idea di *convergenza* di una successione spettrale è che la *digaonale* $p + q = n$ dell'elemento limite vada a “approssimare” il sottomodulo H^n tramite un modulo graduato associato.

Sotto opportune ipotesi, possiamo trovare delle situazioni dove il limite è più “addomesticabile”, ad esempio quando ogni bicomplesso $E_r^{\bullet,\bullet}$ vive nel primo quadrante, cioè $E_r^{p,q} \neq 0$ solo per $p, q \geq 0$. Allora i differenziali d_r sono *definitivamente nulli*, quindi la successione spettrale converge in un senso più forte: si dice che la successione **stabilizza** se, per ogni (p, q) , esiste un intero $r(p, q)$ tale che, i differenziali $d_r^{p,q} = 0$ e $d_r^{p-r, q+r-1} = 0$ per ogni $r \geq r(p, q)$. Da questo segue che $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}$, da cui deduciamo che se la successione in (p, q) stabilizza, allora

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = E_{r+2}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}.$$

Definizione. — Diremo che una successione spettrale **collassa** alla pagina N se $d_r = 0$ per ogni $r \geq N$.

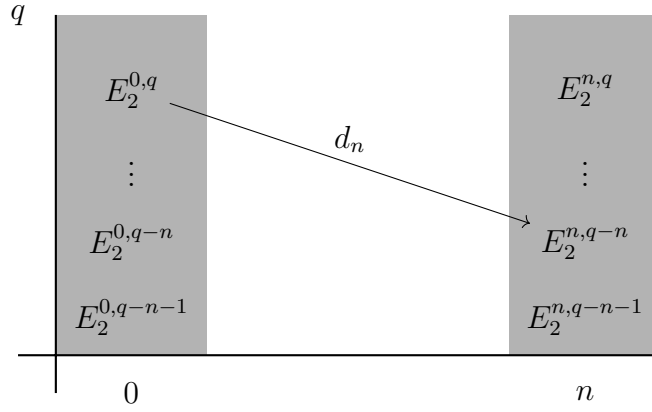
Definizione. — Una filtrazione si dice **convergente** se $\cup_s F_s A = A$ e $\cap_s F_s A = \{0\}$. Una filtrazione su un R -modulo graduato A si dice

- **limitata dall'alto** se per ogni grado $t \in \mathbb{Z}$, esiste un termine della filtrazione $s(t) \in \mathbb{Z}$ tale che $F_{s(t)} A_t = A_t$;
- **limitata dal basso** se per ogni $t \in \mathbb{Z}$, esiste $u(t) \in \mathbb{Z}$ tale che $F_{u(t)} A_t = 0$.

Esempio. — Prima di approfondire ulteriormente la teoria dietro alle successioni spettrali, possiamo cominciare a acquisire familiarità con queste tecniche dimostrando il seguente

IV.1. Teorema (Successione di Wang). — Sia $\{(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)\}_{r \geq 2}$ una successione spettrale nel primo quadrante, tale che per ogni $p \neq 0, n$ si abbia $E_2^{p,q} = 0$. Se la successione converge a H^* , allora esiste una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H^k \longrightarrow E_2^{0,k} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,k-n+1} \longrightarrow H^{k+1} \longrightarrow \dots$$


 Figura IV.2.: Pagina $E_2^{\bullet, \bullet}$ come nelle ipotesi del Teorema IV.1.

Dimostrazione. La pagina $E_2^{\bullet, \bullet}$ è concentrata nella 0-esima e nella n -esima colonna, come mostrato in Figura IV.2. Si deduce immediatamente che i differenziali della successione sono tutti nulli, fatta eccezione di d_n .

La successione spettrale collassa alla pagina $n+1$ e si può dedurre che il limite è

$$E_\infty^{0,q} \simeq \ker \left(d_n : E_2^{0,q} \rightarrow E_2^{n,q-n+1} \right), \quad E_\infty^{n,q} \simeq \operatorname{coker} \left(d_n : E_2^{0,n+q-1} \rightarrow E_2^{n,q} \right),$$

quindi per ogni $q \in \mathbb{Z}$ abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow E_\infty^{0,q} \longrightarrow E_2^{0,q} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,q-n+1} \longrightarrow E_\infty^{n,q-n+1} \longrightarrow 0. \quad (\text{A})$$

D'altra parte, l'ipotesi che $E_r^{\bullet, \bullet}$ converge a H^* ci permette di dedurre informazioni sulla filtrazione F che c'è su questo modulo: infatti, dato che per $p \neq 0, n$ si ha

$$0 \simeq E_\infty^{p,q} \simeq \frac{F^p H^{p+q}}{F^{p+1} H^{p+q}},$$

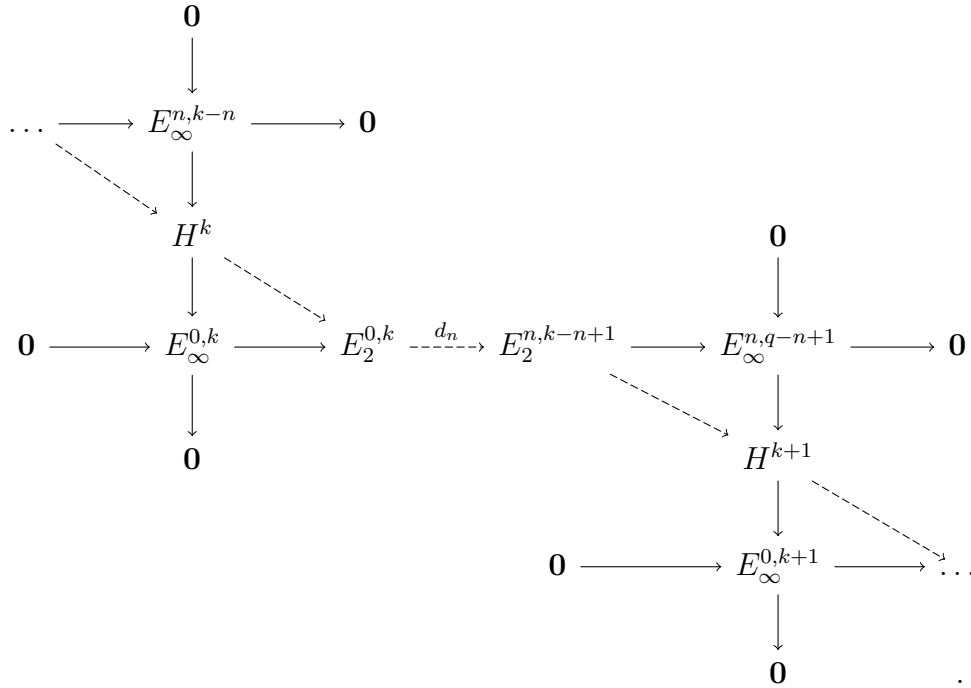
deduciamo che la filtrazione su H^* ha al più due termini: per ogni $k \in \mathbb{Z}$, studiando gli elementi della forma $E_\infty^{p,k-p}$ si vede che

$$H^k = F^0 H^k \supset F^1 H^k = F^2 H^k = \dots = F^n H^k \supset F^{n+1} H^k = 0.$$

Da questo si deduce che $E_\infty^{0,k} \simeq F^0 H^k / F^n H^k \simeq H^k / E_\infty^{n,k-n}$ e quindi esiste una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow E_\infty^{n,k-n} \longrightarrow H^k \longrightarrow E_\infty^{0,k} \longrightarrow 0. \quad (\text{B})$$

“Incollando” le (A) con le (B), otteniamo la **successione di Wang**, tratteggiata nel diagramma sottostante:



□

LEZIONE 13
17th apr., 2023

Dato un complesso di catene *filtrato* e *graduato* (A, d, f) , questo determina in maniera naturale una successione spettrale: una volta capito il “modo giusto” per mettere d’accordo il grado (co)omologico e il grado della filtrazione, il seguente **Teorema** fornisce un macchinario per costruire successioni spettrali.

IV.2. Teorema. — *Un complesso di catene graduato e filtrato (A, d, F) determina una successione spettrale $\{ (E_{\bullet, \bullet}^r, d^r) \mid r = 1, 2, \dots \}$, con d^r di bigrado $(-r, r - 1)$, tale che*

$$E_{s,t}^1 = H_{s+t}(F_s A / F_{s-1} A)$$

e il differenziale d^1 è l’omomorfismo di connessione della tripla $(F_s A, F_{s-1} A, F_{s-2} A)$. Se la filtrazione F è convergente e limitata sia dal basso, sia dall’alto, allora la successione spettrale stabilizza. Inoltre, il limite è

$$E_{p,q}^\infty \simeq \frac{F_p H_{p+q}(A, d)}{F_{p-1} H_{p+q}(A, d)}.$$

Osservazione. — Ricordiamo che cosa si intende con **omomorfismo di connessione** della tripla $(F_s A, F_{s-1} A, F_{s-2} A)$: dato che i moduli graduati $F_s A$ sono dotati di un differenziale, possono essere considerati come complessi di catene, quindi la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \frac{F_{s-1} A}{F_{s-2} A} \longrightarrow \frac{F_s A}{F_{s-2} A} \longrightarrow \frac{F_s A}{F_{s-1} A} \longrightarrow 0$$

induce la successione esatta lunga in omologia

$$\dots \longrightarrow H_i \left(\frac{F_s A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow H_i \left(\frac{F_s A}{F_{s-1} A} \right) \xrightarrow{\partial} H_{i-1} \left(\frac{F_{s-1} A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow H_{i-1} \left(\frac{F_s A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow \dots$$

per il **Lemma del Serpente**. La mappa $\partial : H_i(F_s A/F_{s-1} A) \rightarrow H_{i-1}(F_{s-1} A/F_{s-2} A)$ nella successione sopra è detto **omomorfismo di connessione**.

Osservazione. — L'enunciato del [Teorema IV.2](#) può essere adattato a *complessi di cocatene*, i quali determinano una successione spettrale in **coomologia**.

Dimostrazione del Teorema IV.2. Partendo dal differenziale d del complesso A , che ha grado -1 , l'idea della costruzione consiste nel definire opportuni sottomoduli $Z_{s,t}^r$ di A in modo tale che, restringendo il differenziale d a $Z_{s,t}^r$, questo sia obbligato ad avere immagine in $Z_{s-r,t+r-1}^r$. Dopodiché si verifica che queste definizioni producono una successione spettrale in cui valgono gli isomorfismi enunciati.

Ricordiamo che su A abbiamo una filtrazione crescente

$$\dots \subset F_{s-1} A \subset F_s A \subset F_{s+1} A \subset \dots$$

Poniamo

$$Z_{s,t}^r = \{ c \in F_s A_{s+t} \mid dc \in F_{s-r} A_{s+t-1} \} = F_s A_{s+t} \cap d^{-1}(F_{s-r} A_{s+t-1}),$$

il modulo degli elementi di $F_s A_{s+t}$ che hanno bordo in $F_{s-r} A_{s+t-1}$ (si noti che è l'apice in alto a farci capire di quanto shifta il grado della filtrazione). Invece, gli elementi di $F_s A_{s+t}$ che non hanno bordo saranno denotati con

$$Z_{s,t}^\infty := \{ c \in F_s A_{s+t} \mid dc = 0 \} = \ker d \cap F_s A_{s+t}.$$

Per definire l'elemento $E_{s,t}^r$ della successione spettrale, in $Z_{s,t}^r$ eliminiamo sia gli elementi che sono bordi di qualche modulo $(r-1)$ -esimo, sia quegli elementi di Z^{r-1} che vengono mandati in $F_{s-r} A_{s+t-1}$ dal differenziale: più precisamente, notiamo che

$$c \in Z_{s+r-1,t-r+2}^{r-1} \implies dc \in F_s A_{s+t}$$

CAPITOLO IV. SUCCESSIONI SPETTRALI

e in particolare $dc \in Z_{s,t}^r$ dato che $d^2 = 0$, e anche

$$c \in Z_{s-1,t+1}^{r-1} \implies c \in F_{s-1}A_{s+t} \subset F_sA_{s+t} \text{ e inoltre } dc \in F_{s-r}A_{s+t-1}.$$

Si definisce quindi

$$E_{s,t}^r := Z_{s,t}^r / (Z_{s-1,t+1}^{r-1} + dZ_{s+r-1,t-r+2}^{r-1})$$

e analogamente il termine “*limite*”

$$E_{s,t}^\infty := Z_{s,t}^\infty / (Z_{s-1,t+1}^\infty + (dA_{s+t+1} \cap F_sA_{s+t})) .$$

In questo modo il differenziale $d : Z_{s,t}^r \rightarrow Z_{s-r,t+r-1}^r$ ha bigrado $(-r, r-1)$ e per costruzione induce

$$d^r : E_{s,t}^r \longrightarrow E_{s-r,t+r-1}^r .$$

Calcoliamo i primi passaggi per capire cosa succede: per ogni $r \geq 0$, dato che F è una filtrazione crescente, si ha

$$Z_{s,t}^{-r} = \{ c \in F_sA_{s+t} \mid dc \in F_{s+r}A_{s+t-1} \} = F_sA_{s+t} ,$$

dunque la 0-esima pagina della successione spettrale è data da

$$E_{s,t}^0 = F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t} , \quad d^0 : F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t} \longrightarrow F_sA_{s+t-1}/F_{s-1}A_{s+t-1} ,$$

dove il differenziale è indotto da d . La prima pagina è stata definita come

$$E_{s,t}^1 = Z_{s,t}^1 / (Z_{s-1,t+1}^0 + dZ_{s,t+1}^0) = Z_{s,t}^1 / (F_{s-1}A_{s+t} + dF_sA_{s+t+1}) ;$$

notiamo che $Z_{s,t}^1/Z_{s-1,t+1}^0$ sono i *cicli* di $F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t}$, mentre $(Z_{s-1,t+1}^0 + dZ_{s,t+1}^0)/Z_{s-1,t+1}^0$ sono i *bordi* di $F_sA_{s+t}/F_{s-1}A_{s+t}$. Ne segue che l'inclusione $Z_{s,t}^1 \rightarrow F_sA_{s+t}$ induce un isomorfismo

$$E_{s,t}^1 \simeq H_{s+t}(F_sA/F_{s-1}A) ,$$

e il differenziale indotto da d è l'omomorfismo di connessione della tripla $(F_sA, F_{s-1}A, F_{s-2}A)$: infatti, le due righe centrali del diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z_{s,t}^1 & \hookrightarrow & F_sA_{s+t} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_{s-1}A_{s+t}}{F_{s-2}A_{s+t}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t}}{F_{s-2}A_{s+t}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t}}{F_{s-1}A_{s+t}} \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow d & & & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_{s-1}A_{s+t-1}}{F_{s-2}A_{s+t-1}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t-1}}{F_{s-2}A_{s+t-1}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t-1}}{F_{s-1}A_{s+t-1}} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & F_{s-1}A_{s+t} & \longleftarrow & Z_{s-1,t}^1 & &
 \end{array}$$

inducono l'omomorfismo di connessione, il quale commuta con gli isomorfismi che collegano il diagramma con $d : Z_{s,t}^1 \rightarrow Z_{s-1,t}^1$.

Ora verifichiamo che $H_*(E^r) = E^{r+1}$: per non appesantire la notazione, sopprimiamo il grado omologico t . I *cicli* sono dati da

$$\begin{aligned} \ker(d^r : E_s^r \longrightarrow E_{s-r}^r) &= \frac{\left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in Z_{s-r-1}^{r-1} + dZ_{s-1}^{r-1} \right\}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{\left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in Z_{s-r-1}^{r-1} \right\} + \left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in dZ_{s-1}^{r-1} \right\}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}}, \end{aligned}$$

mentre i *bordi* sono

$$\operatorname{im}(d^r : E_{s+r}^r \longrightarrow E_s^r) = \frac{dZ_{s+r}^r}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} = \frac{dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}},$$

dove al numeratore abbiamo aggiunto il termine Z_{s-1}^{r-1} , che non cambia nulla; allora il loro quoziente dà

$$\begin{aligned} H_*(E_s^r) &= \frac{\ker d^r}{\operatorname{im} d^r} = \frac{dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{Z_s^{r+1}}{Z_s^{r+1} \cap (Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r}^r)} \\ &= \frac{Z_s^{r+1}}{Z_{s-1}^r + dZ_{s+r}^r} = E_s^{r+1}. \end{aligned}$$

Infine, per studiare il limite, vediamo che

$$E_s^r = \frac{Z_s^r}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} = \frac{Z_s^r + F_{s-1}A}{F_{s-1}A + dZ_{s+r-1}^{r-1}}$$

ha numeratore che *decresce con r* , mentre al contrario il sottomodulo per cui quozientiamo *cresce con r* : questo significa che possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\bigcap_r (Z_s^r + F_{s-1}A)}{\bigcup_r (F_{s-1}A + dZ_{s+r-1}^{r-1})} &= \frac{Z_s^\infty + F_{s-1}A}{F_{s-1}A + (dA \cap F_sA)} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{F_{s-1}A + (dA \cap F_sA)} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{Z_{s-1}^\infty + (dA \cap F_sA)} = E_s^\infty. \end{aligned}$$

L'ipotesi che F sia limitata ci dice che per ogni coppia di indici (s, t) esiste un intero $r = r(s, t)$ tale che $E_{s,t}^\infty = E_{s,t}^r$. Pertanto il limite è

$$F_s H_{s+t}(A) = \text{im} (H_{s+t}(F_s A) \longrightarrow H_{s+t}(A)) ,$$

quindi $F_s H_*(A) = Z_s^\infty / (dA \cap F_s A)$ e inoltre

$$\begin{aligned} \frac{F_s H_*(A)}{F_{s-1} H_*(A)} &= \frac{(Z_s^\infty / (dA \cap F_s A))}{(Z_{s-1}^\infty / (dA \cap F_{s-1} A))} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{(Z_{s-1}^\infty + (dA \cap F_{s-1} A))} = E_s^\infty . \end{aligned} \quad \square$$

Applicazioni delle successioni spettrali

Nella dimostrazione del [Teorema IV.2](#) non c'è nulla di particolarmente illuminante, ma possiamo usare questo fatto per provare risultati interessanti e cercare di capire il meccanismo delle successioni spettrali. In particolare, questo risultato si rivela molto utile per comparare due diverse costruzioni omologiche.

IV.3. Proposizione (Omologia singolare e cellulare). — *Dato un CW complesso X , esiste un isomorfismo tra l'omologia cellulare $H_*^{\text{cell}}(X)$ e l'omologia singolare $H_*(X)$.*

Dimostrazione. Posto $A = C_\bullet(X)$, consideriamo la filtrazione F sulle catene singolari di X data da

$$F_p C_\bullet(X) := C_\bullet(X^{(p)}) ,$$

e definiamo la pagina numero 0 tramite

$$E_{p,q}^0 := C_{p+q}(X^{(p)}) / C_{p+q}(X^{(p-1)}) = C_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) ,$$

su cui è definito il differenziale d^0 naturale. Possiamo così mettere in moto il meccanismo del [Teorema IV.2](#) e ottenere

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \begin{cases} C_p^{\text{cell}}(X) , & \text{se } q = 0 ; \\ 0 , & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

la cui mappa di bordo d^1 è data dall'omomorfismo di connessione

$$\partial : C_p^{\text{cell}}(X) \rightarrow C_{p-1}^{\text{cell}}(X)$$

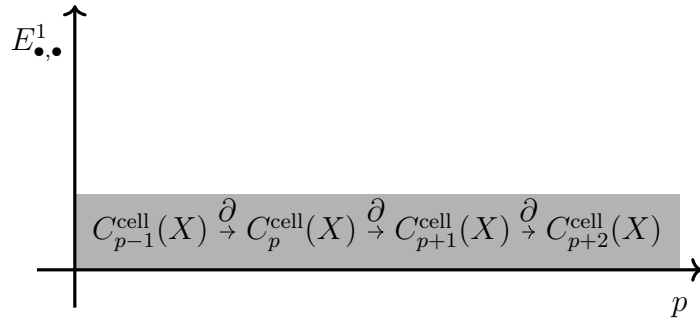


Figura IV.3.: La prima pagina della successione spettrale nella [Proposizione IV.3](#).

della tripla CW $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$, quindi segue che

$$E_{p,q}^2 \simeq \begin{cases} H_p^{\text{cell}}(X), & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che la pagina $E_{\bullet, \bullet}^2$ è concentrata nella 0-esima riga, la successione collassa e quindi $E_{\bullet, \bullet}^2 = E_{\bullet, \bullet}^\infty$. Per il [Teorema IV.2](#), il limite determina la filtrazione su $H^*(X)$, che è banale dal momento che $E_{\bullet, \bullet}^\infty$ è concentrato in una riga, quindi concludiamo che

$$H_k(X) \simeq E_{0,k}^\infty = E_{0,k}^2 \simeq H_k^{\text{cell}}(X). \quad \square$$

IV.4. Esempio (Bicomplexi). — Alcuni oggetti che permettono di generare successioni spettrali come spiegato nel [Teorema IV.2](#) sono i *bicomplexi*.

Definizione. — Un **bicomplesso** (M, d^h, d^v) (o **complesso doppio**) è un R -modulo bigraduato $M_{\bullet, \bullet}$ dotato di due differenziali

$$d_{p,q}^h : M_{p,q} \longrightarrow M_{p-1,q}, \quad d_{p,q}^v : M_{p,q} \longrightarrow M_{p,q-1},$$

di bigrado $(0, -1)$ e $(-1, 0)$ rispettivamente¹, tali che $d^h d^v + d^v d^h = 0$, ovvero ogni quadrato della griglia è *anticommutativo*.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \dots & & \dots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \dots & \longleftarrow & M_{p-1,q} & \xleftarrow{d^h} & M_{p,q} & \longrightarrow \dots \\
 & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & \\
 \dots & \longleftarrow & M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d^h} & M_{p,q-1} & \longrightarrow \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \dots & & \dots &
 \end{array}$$

Dato un bicomplesso M , il suo **complesso totale** $\text{tot}(M)$ è l' R -modulo graduato dato da

$$\text{tot}(M)_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M_{s,n-s},$$

dotato del **differenziale totale** $d = d^v + d^h$.

Quando ci viene dato un bicomplesso M , possiamo calcolare la sua omologia lungo due diverse direzioni: infatti, abbiamo l'omologia *orizzontale* $H_{*,*}^I(M) := H(M_{\bullet,\bullet}, d^h)$ e l'omologia *verticale* $H_{*,*}^{II}(M) := H(M_{\bullet,\bullet}, d^v)$. La condizione $d^h d^v + d^v d^h = 0$ che definisce il bicomplesso garantisce che il differenziale d^v induce un differenziale verticale \bar{d}^v su $H_{*,*}^I(M)$; analogamente, anche $H_{*,*}^{II}(M)$ ottiene un differenziale \bar{d}^h . Possiamo dunque calcolare nuovamente l'omologia di questi due complessi e ottenere così

$$H_{*,*}^{II} H^I(M) := H(H_{*,*}^I(M), \bar{d}^v), \quad H_{*,*}^I H^{II}(M) := H(H_{*,*}^{II}(M), \bar{d}^h).$$

Questi due procedimenti danno due diverse successioni spettrali, le quali sono legate a $H_*(\text{tot}(M))$ come spiegato nel seguente

IV.5. Teorema. — *Dato un bicomplesso (M, d^h, d^v) , esistono due successioni spettrali $\{^I E_{\bullet,\bullet}^r, ^I d^r\}$ e $\{^{II} E_{\bullet,\bullet}^r, ^{II} d^r\}$, tali che*

$$^I E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^I H^{II}(M), \quad ^{II} E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^{II} H^I(M).$$

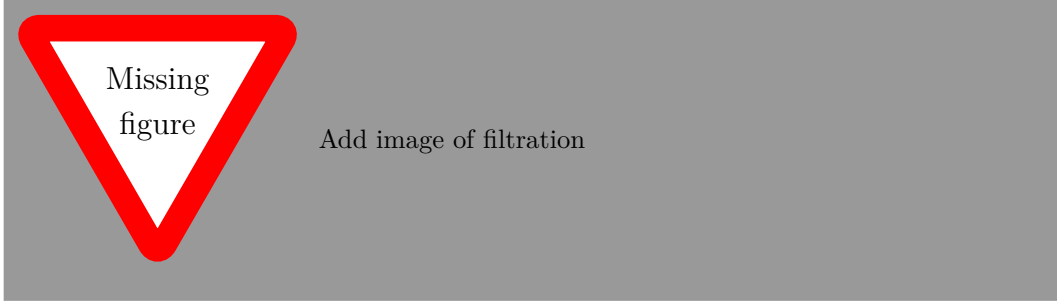
Se M è concentrato nel primo quadrante, allora entrambe le successioni sopra convergono a $H_(\text{tot}(M))$.*

¹Quello definito è un bicomplesso con notazione omologica; è facile adattare la definizione al caso coomologico considerando differenziali di bigrado $(0, 1)$ e $(1, 0)$ rispettivamente.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il Teorema per $\{^I E_{\bullet,\bullet}^r, ^I d^r\}$, dato che l'altro caso è simmetrico. L'idea è quella di sfruttare il [Teorema IV.2](#) con $A = \mathbf{tot}(M)$ e d il suo differenziale totale. Definiamo quindi le filtrazioni sul complesso totale

$$F_p^I(\mathbf{tot}(M))_q := \bigoplus_{r \leq p} M_{r,q-r}, \quad F_p^{II}(\mathbf{tot}(M))_q := \bigoplus_{r \leq p} M_{q-r,r},$$

dove F^I viene detta **filtrazione per colonne**, mentre F^{II} viene detta **filtrazione per righe**.



Per prima cosa identifichiamo la prima pagina della successione: notiamo che per ogni $p, q \in \mathbb{Z}$ la filtrazione dà il quoziente

$$\left(\frac{F_p^I(\mathbf{tot}(M))}{F_{p-1}^I(\mathbf{tot}(M))} \right)_{p+q} = \frac{\bigoplus_{r \leq p} M_{r,p+q-r}}{\bigoplus_{r \leq p-1} M_{r,p+q-r}} \simeq M_{p,q},$$

quindi la tripla $(F_p^I(\mathbf{tot}(M)), F_{p-1}^I(\mathbf{tot}(M)), F_{p-2}^I(\mathbf{tot}(M)))$ dà la successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow M_{p-1,\bullet} \longrightarrow M_{p-1,\bullet} \oplus M_{p,\bullet} \longrightarrow M_{p,\bullet} \longrightarrow 0,$$

ognuno dei quali è dotato del *differenziale verticale* d^v , quindi grazie al **Lemma del Serpente** si ottiene

$$\dots \longrightarrow H_{p+q}(M_{p,\bullet}, d^v) = H_{p,q}^{II}(M) \xrightarrow{\delta} H_{p+q-1}(M_{p-1,\bullet}, d^v) = H_{p-1,q}^{II}(M) \longrightarrow \dots$$

dove si verifica che $\delta = \overline{d^h}$. Si deduce quindi che $^I E_{\bullet,\bullet}^1 \simeq H_{*,*}^{II}(M)$, da cui si conclude che

$$^I E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^I H^{II}(M).$$

Infine, se M è concentrato nel primo quadrante, la filtrazione F^I è limitata sia dal basso, sia dall'alto, dato che per ogni $t \in \mathbb{Z}$ vale

$$\mathbf{tot}(M)_t = F_t^I \mathbf{tot}(M)_t \supset F_{t-1}^I \mathbf{tot}(M)_t \supset \dots \supset F_0^I \mathbf{tot}(M)_t = M_{0,t} \supset F_{-1}^I \mathbf{tot}(M)_t = 0,$$

quindi per il [Teorema IV.2](#) la successione converge a $H(\mathbf{tot}(M))$. \square

IV.6. Esempio (Formula di Künneth). — Dati (C_\bullet, d) e (D_\bullet, ∂) due complessi di catene su un campo \mathbb{K} , consideriamo il bicomplesso $C_\bullet \otimes D_\bullet$ avente i differenziali

$$d^h(x \otimes y) := dx \otimes y, \quad d^v(x \otimes y) := (-1)^{|x|} x \otimes \partial y.$$

Il suo complesso totale $T_\bullet := \text{tot}(C_\bullet \otimes D_\bullet)$ è quindi dotato del differenziale

$$D(x \otimes y) := dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y,$$

e se si considera la filtrazione per colonne su T_\bullet , data da

$$F_p^I(T_q) := \bigoplus_{r \leq p} C_i \otimes_{\mathbb{K}} D_{q-r},$$

allora per il [Teorema IV.5](#) sappiamo che la successione spettrale associata converge a $H_*(T_\bullet)$. Studiamo dunque le prime pagine della successione: la 0-esima pagina è definita da $E_{p,q}^0 := C_p \otimes_{\mathbb{K}} D_q$, con differenziale $d^0 := (-1)^p \mathbf{1}_C \otimes \partial$, quindi si ottiene $E_{p,q}^1 = C_p \otimes_{\mathbb{K}} H_q(D_\bullet)$. Segue dal [Teorema IV.2](#) che il differenziale $d^1 = d \otimes \mathbf{1}_{H_*(D)}$, quindi la seconda pagina sarà $E_{p,q}^2 = H_p(C_\bullet) \otimes H_q(D_\bullet)$ con differenziali tutti nulli. Dato che $E_{\bullet,\bullet}^2 = E_{\bullet,\bullet}^\infty$, allora si ottiene la **Formula di Künneth**

$$H_n(C_\bullet \otimes D_\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{K}} H_q(D_\bullet) = \left(H_*(C_\bullet) \otimes H_*(D_\bullet) \right)_n. \quad (\text{IV.6.1})$$

IV.7. Esempio (Complesso di Čech-de Rham). — Dimostriamo che esiste un isomorfismo tra la **coomologia di Čech** e la **coomologia di de Rham** di una varietà differenziabile reale. Ricordiamo prima alcune nozioni:

Definizione. — Data M una varietà differenziabile reale, denotiamo con $\Omega^k(M)$ lo spazio delle k -forme C^∞ su M , cioè lo spazio delle sezioni C^∞ del fibrato $\wedge^k T^*M$.

Ricordiamo che un elemento $\alpha \in \Omega^k(M)$ su un aperto coordinato è della forma

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I(x) dx_I,$$

con I il k -multiindice che rappresenta $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Localmente definiamo il **differenziale esterno** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ con la formula

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{|I|=k} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_I$$

e otteniamo il **complesso di de Rham** $(\Omega^\bullet(M), d)$, la cui coomologia sarà indicata con $H_{\text{dR}}^*(M)$.

Lemma (Poincarè). — *Ogni forma chiusa su un aperto contraibile $A \subset \mathbb{R}^n$ è esatta. In altri termini, se A è contraibile allora vale*

$$H_{\text{dR}}^k(A) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0; \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Sia M una varietà differenziabile e \mathcal{U} un ricoprimento di M . Per una k -upla $U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{U}$, indichiamo con $U_{i_1, \dots, i_k} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

Definizione. — Il **complesso di Čech a coefficienti reali** per (M, \mathcal{U}) è dato dagli \mathbb{R} -spazi vettoriali

$$\check{C}_{\mathcal{U}}^k(M) := \bigoplus_{i_0 \leq \dots \leq i_k} \mathbb{R}(U_{i_0, \dots, i_k}),$$

dove \mathbb{R} è il fascio delle funzioni reali localmente costanti, sui quali definiamo i differenziali

$$\delta^k : \check{C}_{\mathcal{U}}^k(M) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^{k+1}(M), \quad (\delta^k \alpha)_{i_0, \dots, i_{k+1}} := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+1}}.$$

Definiamo la **coomologia di Čech** subordinata al ricoprimento \mathcal{U} come

$$\check{H}^*(M, \mathcal{U}) := H^*(\check{C}_{\mathcal{U}}^{\bullet}(M), \delta).$$

Chiamiamo \mathcal{U} un **buon ricoprimento** di M se ogni aperto $U_i \in \mathcal{U}$ è contraibile e ogni intersezione finita di aperti di \mathcal{U} è vuota oppure contraibile.

IV.8. Teorema. — *Sia M una n -varietà reale C^{∞} e \mathcal{U} un buon ricoprimento per M . Allora la coomologia di Čech su \mathcal{U} coincide con quella di De Rham, cioè esiste un isomorfismo naturale*

$$\check{H}^*(M; \mathcal{U}) \simeq H_{\text{dR}}^*(M).$$

Dimostrazione. Definiamo il *complesso doppio di Čech-de Rham* come

$$C^{p,q} := \prod_{i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p} \Omega^q(U_{i_0 \dots i_p});$$

la pagina $E_0^{\bullet,\bullet}$ appare così:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dots & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^2(U_{i_0}) & \longrightarrow & \dots & & & & \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^1(U_{i_0}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi_{i_0 \leq i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \longrightarrow & \dots & & \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^0(U_{i_0}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi_{i_0 \leq i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \longrightarrow & \Pi_{i_0 \leq i_1 \leq i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Prendiamo dunque il complesso totale T^\bullet associato al bicomplesso, cioè

$$T^n := (\mathbf{tot} C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q},$$

con differenziale $D = \delta + (-1)^p d$, sul quale consideriamo due diverse filtrazioni:

- la filtrazione per colonne $F_I^p T^n := \bigoplus_{r \geq p} T^{r, n-r}$ induce su $E_0^{p,q} = C^{p,q}$ il differenziale $d_0 = (-1)^p d$, quindi per il [Teorema IV.5](#) la prima pagina è data da

$$E_1^{p,q} = H_{II}^{p,q}(C) = \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_p} H_{\text{dR}}^q(U_{i_0 \dots i_p}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi di \mathcal{U} buon ricoprimento. Si noti in particolare che

$$H_{\text{dR}}^0(U_{i_0 \dots i_p}) = \mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(U_{i_0 \dots i_p})$$

è dotato del differenziale $d_1 = \delta$. Dato che la successione collassa alla seconda pagina, il limite è $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, quindi si conclude che

$$H^*(T^{\text{bullet}}) = \check{H}^*(M; \mathcal{U}).$$

- Dalla filtrazione per righe $F_{II}^p C^n = \bigoplus_{r \geq p} C^{n-r, r}$ si ottiene $E_0^{p,q} = C^{p,q}$ con il differenziale $d_0 = \delta$.

IV.9. Lemma. — *C'è un'omotopia di catene*

$$\kappa : \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_p} \Omega^\bullet(U_{i_0 \dots i_p}) \longrightarrow \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_{p-1}} \Omega^\bullet(U_{i_0 \dots i_{p-1}})$$

tra l'identità e la mappa nulla in grado $p > 0$.

Dimostrazione. Data $\{\rho_i\}_i$ una partizione dell'unità sbordinata a \mathcal{U} , è sufficiente porre

$$(\kappa\omega)_{i_0\dots i_{p-1}} := \sum_i \rho_i \omega_{i i_0\dots i_{p-1}}.$$

Infatti si verifica che per ogni $p > 0$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta\kappa\omega)_{i_0\dots i_p} &= \sum_{j=0}^p \sum_i (-1)^j \rho_i \omega_{i i_0\dots \hat{i}_j\dots i_p}, \\ (\kappa\delta\omega)_{i_0\dots i_p} &= \omega_{i_0\dots i_p} + \sum_i \sum_{j=0}^p (-1)^{j+1} \rho_i \omega_{i i_0\dots \hat{i}_j\dots i_p}, \end{aligned}$$

quindi $\delta\kappa + \kappa\delta = \mathbf{1}$. □

Come conseguenza di questo **Lemma**, segue che in $E_1^{p,q}$ sopravvive solo la colonna $p = 0$. Dato che $\ker \delta$ è costituito dalle k -forme *globali*, allora

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \Omega^q(M), & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e si verifica che il differenziale verticale è $d_1 = d$ qdi de Rham. La successione collassa alla seconda pagina, per cui si ha

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} H_{\text{dR}}^q(M), & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

quindi concludiamo che $H^*(T^\bullet) = H_{\text{dR}}^*(M)$.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che $\check{H}^*(M; \mathcal{U}) = H^*(T^\bullet) = H_{\text{dR}}^*(M)$. □

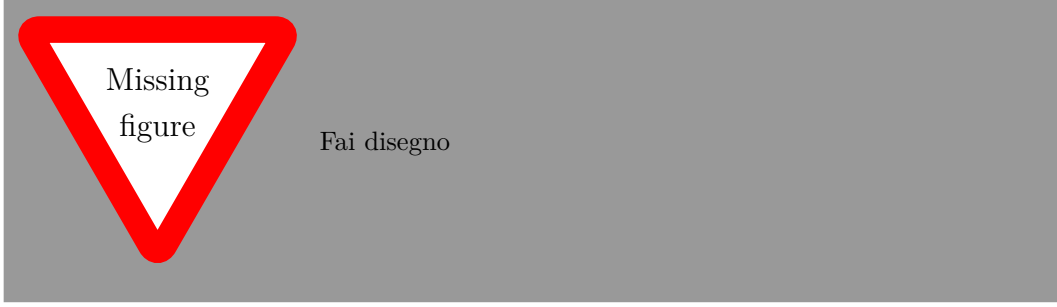
LEZIONE 14
18th apr., 2023

Esempio (Successione di una coppia). — Data una coppia di spazi (X, Y) , possiamo considerare l'inclusione $i : Y \subset X$ come una filtrazione

$$X_{-1} \subset X_0 \subset X_1,$$

dove $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = Y$ e $X_1 = X$. Questa determina la filtrazione $C_*(Y) \subset C_*(X)$ sulle catene singolari di X , dalla quale otteniamo la successione spettrale

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} H_q(Y), & \text{se } p = 0; \\ H_{q+1}(X, Y), & \text{se } p = 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{IV.9.1})$$



Si può verificare che la mappa di bordo sulla prima pagina

$$d^1 : E_{1,q}^1 \longrightarrow E_{0,q}^1 ,$$

coincide con l'omomorfismo di connessione della coppia

$$\partial : H_{q+1}(X, Y) \longrightarrow H_q(Y) .$$

Viceversa, supponiamo di avere il dato della successione spettrale $(E_{\bullet,\bullet}^1, d^1)$; vogliamo ricostruire la successione della coppia. Dato che la prima pagina si concentra in due colonne adiacenti, è chiaro che la successione collassa alla seconda pagina, quindi il termine limite è $E_{\bullet,\bullet}^\infty = E_{\bullet,\bullet}^2$. Per il [Teorema IV.2](#), calcoliamo il limite per $p = 0$ come

$$E_{0,q}^\infty = \frac{F_0 H_*}{F_{-1} H_*} = \frac{\text{im}(H_q(Y) \rightarrow H_q(X))}{\text{im}(H_q(\emptyset) \rightarrow H_q(X))} = \text{im}\left(H_q(Y) \xrightarrow{i^*} H_q(X)\right) ,$$

mentre sulla prima colonna è dato da

$$E_{1,q}^\infty = \frac{H_{q+1}(X)}{\text{im}(i_* : H_{q+1}(Y) \rightarrow H_{q+1}(X))} .$$

D'altra parte la seconda pagina è data da

$$E_{1,q}^2 = \ker\left(H_{q+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_q(Y)\right) , \quad E_{0,q}^2 = \frac{H_q(Y)}{\text{im } \partial} .$$

Confrontando E^∞ con la pagina E^2 si hanno le identità

$$\begin{aligned} E_{1,q}^2 &= \ker\left(H_{q+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_q(Y)\right) = \frac{H_{q+1}(X)}{\text{im}(H_{q+1}(Y) \rightarrow H_{q+1}(X))} = E_{1,q}^\infty , \\ E_{0,q}^2 &= \frac{H_q(Y)}{\text{im } \partial} = \text{im}\left(H_q(Y) \xrightarrow{i^*} H_q(X)\right) = E_{0,q}^\infty . \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene la successione esatta

$$\mathbf{0} \longrightarrow \frac{H_q(Y)}{\text{im}(H_{q+1}(X,Y) \rightarrow H_q(Y))} \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow \ker \left(H_q(X,Y) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y) \right) \longrightarrow \mathbf{0},$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$, ovvero la successione della coppia (X, Y) . Ne segue che la successione della coppia è equivalente alla successione spettrale (IV.9.1).

Successioni spettrali di Serre

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione. — Una mappa $\pi : E \rightarrow B$ è una **fibrazione di Serre** se vale la (HLP) sui cubi:

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \iota_0 & \nearrow & \downarrow \pi \\ I^{n+1} & \longrightarrow & B. \end{array} \quad (\text{HLP}') \quad (1)$$

Se B è uno spazio connesso per archi che ammette un rivestimento universale \tilde{B} , allora per il **Teorema di approssimazione** possiamo trovare un'equivalenza omotopica debole $f : B' \rightarrow B$, con B' un CW complesso. Siccome le fibrazioni sono una classe chiusa per pullback (vedi [Esercizio I.8](#)), allora anche $f^*E \rightarrow B'$ è una fibrazione di Serre, pertanto assumeremo senza perdita di generalità che la *base B sia un CW complesso*.

Fissato $x \in B$, consideriamo $E_x = \pi^{-1}(x)$ e a questa fibra associamo $H_*(E_x)$. Adesso vorremmo associare un omomorfismo $\gamma_* : H_*(E_x) \rightarrow H_*(E_{x'})$ per ogni cammino $\gamma : x \rightarrow x'$ in B . Presa $\alpha_0 : A_x \rightarrow E_x$ un'approssimazione CW della fibra su x , possiamo usare la (HLP') induttivamente sullo scheletro di A_x per poter sollevare l'omotopia

$$\Gamma : A_x \times I \longrightarrow B, \quad \Gamma(z, t) := \gamma(t),$$

per ottenere così una mappa diagonale

$$\begin{array}{ccc} A_x \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha_0} & E \\ \downarrow \iota_0 & \nearrow \alpha & \downarrow \pi \\ A_x \times I & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Allora $\alpha_1 : A_x \rightarrow E_{x'}$ induce in omotopia un omomorfismo $\gamma_* : H_*(E_x) \rightarrow H_*(E_{x'})$. Notiamo inoltre che se $\gamma \sim \gamma'$ sono omotopi *a estremi fissati*, allora producono lo stesso omomorfismo in omologia; in particolare, se $x = x'$, notiamo allora che $\pi_1(B, x)$ agisce su $H_*(E_x)$ e si verifica che γ è costante induce $\gamma_* = \mathbf{1}_{H_*(E_x)}$. Questo appena descritto è un esempio di *sistema locale*.

Definizione. — Un **sistema locale di gruppi** $\mathcal{G} = \{ G_x, \tau_\gamma \}$ su uno spazio topologico X è un funtore che associa a ogni punto $x \in X$ un gruppo G_x e a ogni cammino $\gamma : I \rightarrow X$ da x_0 a x_1 associa un omomorfismo

$$\tau_\gamma : G_{x_0} \longrightarrow G_{x_1}$$

che dipende solamente dalla classe

$$[\gamma] \in [(I, \partial I); (X, \{x_0, x_1\})],$$

con la condizione che se γ è costante in x , allora l'omomorfismo associato è $\tau_\gamma = \mathbf{1}_{G_x}$.

Osservazione. — Il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x)$ agisce (da *sinistra*) sul gruppo G_x .

Osservazione. — Siccome ogni cammino γ può essere ripercorso in senso contrario e produrre il cammino opposto $\bar{\gamma}$ in modo che la composizione $\gamma\bar{\gamma}$ sia omotopo a una costante, deduciamo che ogni τ_γ è un isomorfismo. In particolare, se X è connesso per archi, allora tutti i G_x di un sistema locale sono isomorfi.

Definizione. — Se l'azione di $\pi_1(B, x)$ su G_x è banale, allora diremo che il sistema locale \mathcal{G} è **banale**.

Esempio. — Ogni sistema locale su uno spazio semplicemente connesso è banale.

Supponiamo ora che X sia uno spazio connesso per archi che ammette rivestimento universale \widetilde{X} . Allora $\pi_1(X, x_0)$ agisce (da *destra*) su \widetilde{X} per **traslazione**, ovvero

$$\widetilde{X} \times \pi_1(X, x_0), \quad (x, \gamma) \longmapsto x'$$

noccapito

dove x' è

In particolare questo induce un'azione *destra* di $\pi_1(X, x_0)$ sulle catene singolari $C_*(\widetilde{X})$ per traslazione, e si verifica che questa azione commuta con il differenziale d .

Definizione. — Dato x_0 in X connesso per archi, il complesso

$$C_*(X; \mathcal{G}) := C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]} G_{x_0}$$

viene chiamato **complesso delle catene singolari a coefficienti in \mathcal{G}** , il cui bordo è indotto da $d : C_*(\widetilde{X}) \rightarrow C_*(\widetilde{X})$. Passando al duale, definiamo le **cocatene singolari a coefficienti in \mathcal{G}** come

$$C^*(X; \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]} (C_*(\widetilde{X}; G_{x_0}) \,).$$

L'**omologia**, risp. la **coomologia**, a coefficienti in un sistema locale \mathcal{G} sarà indicata con

$$H_*(X; \mathcal{G}) := H_*(C_*(X; \mathcal{G})), \quad \text{resp.} \quad H^*(X; \mathcal{G}) := H^*(C^*(X; \mathcal{G})).$$

IV.10. Teorema (Successione spettrale di Serre). — *Sia M uno \mathbb{Z} -modulo. Data una fibrazione di Serre $\pi : E \rightarrow B$, esiste una successione spettrale $\{ (E_{p,q}^r, d^r) \}_{r \geq 2}$ concentrata nel primo quadrante data da*

$$E_{p,q}^r = H_p(B; \{ H_q(E_x; M) \} \,),$$

convergente a $E_{p,q}^\infty = F_p H_{p+q}(E; M)$, per una qualche filtrazione F dell'omologia $H_(E; M)$.*

Osservazione. — Si noti che nel [Teorema IV.10](#) non vengono nemmeno citati i differenziali della successione spettrale!

Prima di dimostrare questo risultato, vediamo alcuni esempi per capirne il funzionamento.

Esempio. — Sia $SU(n)$ il gruppo delle matrici complesse unitarie con determinante 1. Ad esempio, per $n = 2$ abbiamo

$$SU(2) : \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \simeq S^3.$$

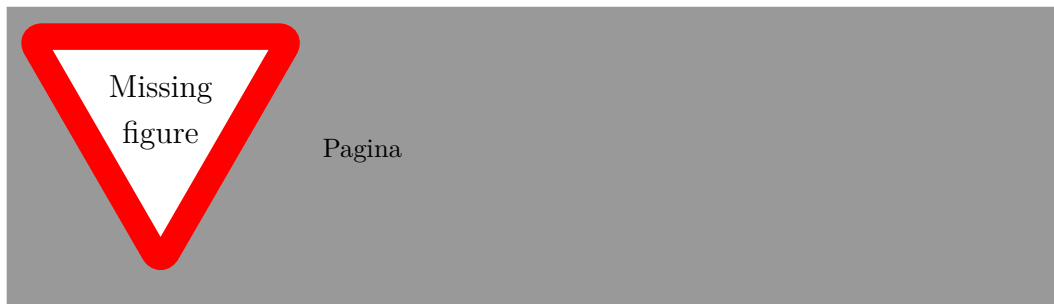
La topologia di $SU(3)$ invece è più complicata e usiamo il [Teorema IV.10](#) per studiarne l'omologia. La mappa

In maniera analoga possiamo studiare l'omologia di $SU(4)$, infatti presa la fibrazione

$$SU(3) \hookrightarrow SU(4) \longrightarrow S^7,$$

Oppure modulo su un qualunque anello?

otteniamo la successione spettrale la cui pagina $E_{\bullet,\bullet}^2$ è data da



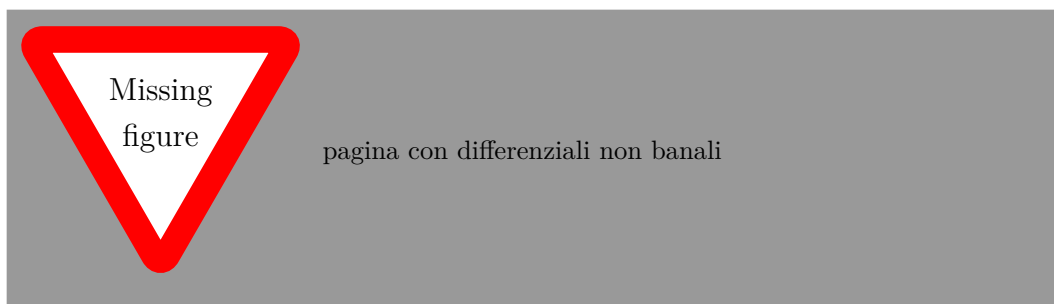
e quindi concludiamo che

$$H_p(SU(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0, 3, 5, 7, 8, 10, 12; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infine, vorremmo studiare anche l'omologia di $SU(5)$ utilizzando la fibrazione

$$SU(4) \hookrightarrow SU(5) \longrightarrow S^9.$$

A questo punto $E_{\bullet,\bullet}^2$ è data da



e notiamo che potrebbero esserci due differenziali non banali. Purtroppo non conosciamo la struttura di d^9 , quindi (per ora) non sappiamo come calcolare $H_*(SU(5))$.

Dato uno spazio topologico X , ricordiamo che possiamo costruire la fibrazione

$$\Omega X \longrightarrow PX \xrightarrow{ev_1} X,$$

dove lo spazio dei cammini PX è contraibile. Se supponiamo che X sia n -connesso, preso il sistema locale $\{H_q(P_{x_0}^x X)\}$, per il [Teorema IV.10](#) si ha

$$E_{p,q}^2 = H_q(X; \{H_q(P_{x_0}^x X)\}),$$

Finire che
 lezione 15
 recupera

e

Abbiamo ricavato nuovamente il teorema di Hurewicz per gruppi di omotopia superiore, assumendo il risultato vero solo per π_1 .

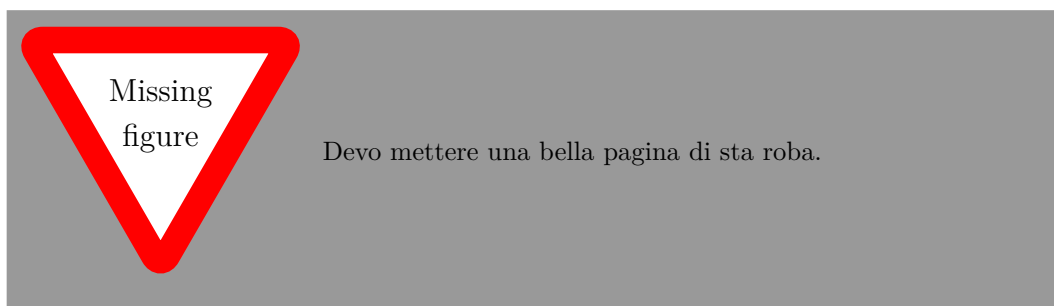
Esempio. — Studiamo i loop sulla sfera S^n . Supponiamo che $n > 1$ così da avere la base semplicemente connessa. Dalla fibrazione

$$\Omega S^n \longrightarrow PS^n \longrightarrow S^n$$

otteniamo la successione spettrale

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^n, H_q(\Omega S^n)).$$

La colonna $p = 0$ è lo 0-esimo gruppo di omologia di uno spazio connesso a coefficienti in $H_q(\Omega S^n)$, quindi la prima colonna è in realtà l'omologia della fibra $H_q(\Omega S^n)$. Tutte le altre colonne hanno gruppi banali, fino a quando $p = n$, in cui ritroviamo l'omologia in grado n di S^n a coefficienti in $H_q(\Omega S^n)$, che è isomorfa a \mathbb{Z} per $q = n - 1$.



Procedendo per induzione, questo dimostra che per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'omologia di ΩS^n è

$$H_{k(n-1)}(\Omega S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

ed è banale in tutti gli altri gradi.

non ho capito
 la roba della
 formula di
 Künneth e il
 limite...

Confronto di successioni spettrali

La costruzione del [Teorema IV.2](#) che associa ad un complesso filtrato graduato (C, d, F) una successione spettrale è *functoriale*, nel senso che un morfismo tra complessi filtrati e graduati induce in maniera naturale un morfismo di successioni spettrali.

IV.11. Teorema. — Sia $\tau : C \rightarrow C'$ una mappa di complessi differenziali graduati e filtrati. Supponiamo che le filtrazioni in omologia

$$\bigcup_s F_s H_n = H_n$$

siano convergenti e limitate dal basso. Se per qualche $r \geq 1$ la mappa $\tau^r : E^r \rightarrow (E')^r$ è un isomorfismo, allora per tutte le pagine $t \geq r$ si ha $E^t \simeq (E')^t$ e la mappa in omologia

$$\tau_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(C')$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. È chiaro che se le successioni spettrali coincidono alla pagina r , siccome le pagine successive sono determinate da quelle precedenti, allora τ^t è un isomorfismo per ogni $t \geq r$. In particolare, anche il limite

$$\tau^\infty : E^\infty \longrightarrow (E')^\infty$$

è un isomorfismo.

Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{s-1}H_n(C) & \longrightarrow & F_s H_n(C) & \longrightarrow & E_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_{s-1}H_n(C') & \longrightarrow & F_s H_n(C') & \longrightarrow & (E')_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0. \end{array}$$

Fissato n , per valori abbastanza piccoli di s si ha $F_{s-1}H_n(C) = 0$ e $F_{s-1}H_n(C')$ perché la filtrazione è limitata dal basso; di conseguenza, per induzione su s otteniamo

$$\tau_* : F_s H_n(C) \simeq F_s H_n(C'), \quad \text{per ogni } s.$$

Siccome la filtrazione dà tutta l'omologia, si conclude che

$$H_*(C) = \bigcup_s F_s H_*(C) \simeq \bigcup_s F_s H_*(C') = H_*(C'). \quad \square$$

Dimostrazione della successione spettrale di Serre [IV.10](#). A meno di approssimazione CW, possiamo assumere che la base B sia un CW complesso. Detto $B^{(n)}$ l' n -scheletro di B , consideriamo la filtrazione data dagli scheletri

$$\emptyset = B^{(-1)} \subset B^{(0)} \subset B^{(1)} \subset \dots \subset B^{(n)} \subset B^{(n+1)} \subset \dots \subset B.$$

Tramite $\pi : E \rightarrow B$, ponendo $E^i := \pi^{-1}(B^{(i)})$ otteniamo una filtrazione su E e di conseguenza questa induce una filtrazione sulle sue catene singolari $C_*(E)$. Definiamo $E_{p,q}^0 := C_{p+1}(E^p, E^{p-1})$ e consideriamo d^0 come il differenziale indotto da $C_*(E)$. Mettendo in moto la macchina del [Teorema IV.2](#), si ottiene

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \simeq H_{p+q}(E^p, \pi^{-1}(B^{(p)} \setminus \cup_i \{c_i\}))$$

dove l'isomorfismo di destra è dato per *escissione*, rimuovendo i centri c_i dei dischi D^p nel p -scheletro. Segue quindi che

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &\simeq H_{p+q}(E^p, \pi^{-1}(B^{(p)} \setminus \cup_i \{c_i\})) \\ &\simeq H_{p+q}(\cup_i \pi^{-1}(D^p), \cup_i \pi^{-1}(D^p \setminus \{c_i\})) \\ &\simeq \bigoplus_i H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(D^p \setminus \{c_i\})) \\ &\simeq \bigoplus_i H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(\partial D^p)) . \end{aligned}$$

A meno di approssimazione cellulare, possiamo supporre che π sia banale sul disco D_i^p con fibra $F_i := \pi^{-1}(c_i)$; in questo modo, la **formula di Künneth** ci dà

$$\begin{aligned} H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(\partial D^p)) &\simeq H_{p+q}(D_i^p \times F_i, \partial D^p \times F_i) \\ &\simeq H_{p+q}(D_i^p, \partial D^p) \otimes H_{p+q}(F_i) \\ &\simeq H_{p+q}(F_i) , \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che l'omologia del disco D^p relativa al suo bordo è banale, tranne in grado p dove è un modulo libero di rango 1. Segue dunque che

$$E_{p,q}^1 \simeq \bigoplus_i H_q(F_i) ,$$

dove i indicizza le celle di B .

Nel caso in cui B è semplicemente connesso, allora posso trovare una trivializzazione globale, cioè definire una mappa CW da F a F' ... Abbiamo quindi che $E_{p,q}^1 = C_p^{\text{cell}}(B) \otimes H_q(F)$ e il differenziale d^1 corrisponde al morfismo di connessione indotto dalla tripla $(B^{(p)}, B^{(p-1)}, B^{(p-2)})$, cioè il differenziale di $C_*^{\text{cell}}(B)$. Questo produce la seconda pagina

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) .$$

Se B non è semplicemente connesso, allora considero \tilde{B} il rivestimento universale. Dal procedimento di prima si ottiene così... □

Non ho capito

finire

Dimostrazione alternativa (Dress). Mostriamo quest'altra dimostrazione che non fa uso della struttura CW. Data $\pi : E \rightarrow B$, costruiamo un “arricchimento” del complesso delle catene singolari: infatti, definiamo i **bisimplessi singolari** di π come

$$\text{Sin}_{s,t}(\pi) := \left\{ (f, \sigma) \mid f : \Delta^s \times \Delta^t \rightarrow E, \sigma : \Delta^s \rightarrow B \text{ tale che soddisfino } (*) \right\},$$

dove la condizione $(*)$ è che il seguente quadrato commuti

$$\begin{array}{ccc} \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} & B. \end{array} \quad (\text{IV.11.1})$$

Possiamo così definire un funtore

$$\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi) : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

e indichiamo con $R\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi)$ l' R -modulo libero generato dai bisimplessi singolari. Possiamo definire due differenziali ∂' e ∂'' su questo modulo: Come nell'Esempio di Cech-deRham, poniamo $d = \partial' + (-1)^q \partial''$ su $R\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi)$ e consideriamo due filtrazioni:

1. per “diagonali sinistre” data da

$$F_p(\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi))_n := \bigoplus_{s+t=n, t \leq p} \text{Sin}_{s,t}(\pi),$$

su cui consideriamo il differenziale $d^0 = \partial$. Dato un bisimplesso $(f, \sigma) \in \text{Sin}_{s,t}(\pi)$, considero \tilde{f} tramite aggiunzione e considero il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^s & & \xrightarrow{\tilde{f}} & & E^{\Delta^t} \\ & \searrow \text{dashed} & & \searrow & \downarrow \pi \\ & & c^{-1}(E^{\Delta^t}) & \longrightarrow & E^{\Delta^t} \\ & \searrow \sigma & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & B & \xrightarrow{c} & B^{\Delta^t}, \end{array}$$

dove c manda $b \in B$ nel t -simplesso singolare costante in b . Per aggiunzione, i dati (f, σ) e (\tilde{f}, σ) sono equivalenti e quindi, posto $E'_t := c^{-1}(E^{\Delta^t})$, notiamo che

$$R\text{Sin}_{s,t}(\pi) \simeq C_s(E'_t).$$

Dato che i semplici singolari sono contraibili, allora $c : B \rightarrow B^{\Delta^t}$ è un'equivalenza omotopica e quindi E'_t è omotopicamente equivalente a E^{Δ^t} tramite la mappa $c : E \rightarrow E^{\Delta^t}$ che manda tutto in un semplice costante. Ne deduciamo che le catene singolari sono $C_s(E'_t) \simeq C_s(E)$ e quindi la prima pagina della successione spettrale è

$$E'_{s,t} = H_s(E), \quad s, t, \geq 0.$$

Dato che $d^1 = \pm \partial''$, allora concludiamo che

$$E_{p,q}^2 \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0; \\ H_s(E), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

2. Fissato un s -simpleso σ , considero il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^s \times \Delta^t & & & & \\ & \searrow f & & & \\ & & \sigma^{-1}(E) & \longrightarrow & E \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \pi_\sigma & \nearrow \sigma & \downarrow \pi \\ & & \Delta^s & \longrightarrow & B, \end{array}$$

e per aggiunzione questo corrisponde a

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^t & & & & \\ & \searrow f & & & \\ & & j^{-1}(*) & \longrightarrow & E^{\Delta^s} \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow & \nearrow j: * \mapsto \sigma & \downarrow \pi \\ & & * & \longrightarrow & B^{\Delta^s}. \end{array}$$

Notiamo che $j^{-1}(*) = \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E))$ sono le sezioni da Δ^s in $\sigma^{-1}(E)$ e quindi poniamo

$$E_{s,t}^0 = \bigoplus_{\sigma: \Delta^s \rightarrow B} C_t \left(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \right).$$

La prima pagina che otteniamo è

$$E_{s,t}^1 = \bigoplus_{\sigma: \Delta^s \rightarrow B} H_t \left(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \right),$$

con il differenziale d^1 dato dalla somma a segni alterni delle facce del modulo simpliciale $E_{s,t}^1$.

Un morfismo $\varphi : [s'] \rightarrow [s]$ nella categoria simpliciale induce una mappa continua

$$\varphi^* : \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \longrightarrow \Gamma(\Delta^{s'}, (\sigma \circ \varphi)^{-1}(E))$$

e quindi $\varphi^* : E_{s,t}^1 \rightarrow E_{s',t}^1$. Usando il fatto che π è una fibrazione e che Δ^s è contraibile, deduciamo che $\sigma^{-1}(E) \rightarrow \Delta^s$ è banale e quindi abbiamo un'equivalenza omotopica

$$\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \simeq F_\sigma.$$

finire

...

□

Recupera

LEZIONE 17

Devo scrivere bene

NON C'ERO!

Come al solito, consideriamo una fibrazione $F \rightarrow E \rightarrow B$, con B e F spazi connessi per archi. Consideriamo una sistema locale $H_*(\pi^{-1})$ banale

Definizione. — Chiamiamo **trasgressione** l'omomorfismo $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$. Un elemento $x \in E_{n,0}^2$ si dice **trasgressivo**.

Quindi gli elementi trasgressivi sono quelli che sopravvivono sino alla pagina $E_{n,0}^n$.

Remark. — Consideriamo il caso $n = 2$. In questo caso abbiamo

$$d^2 : H_2(B) \simeq E_{2,0}^2 \rightarrow E_{0,1}^2 \simeq H_1(F).$$

In generale abbiamo $E_{n,0}^n \subset E_{n,0}^2 \simeq H_{n-1}(F)$. Consideriamo la successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_m(F) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_m(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F) \longrightarrow \dots$$

e la proiezione $\pi_* : H_*(E, F) \rightarrow H_*(B, b_0)$.

Il seguente risultato ci permette di dare un'interpretazione a queste trasgressioni. In particolare, ci permettono di trovare una costruzione funtoriale.

IV.12. Teorema. — *La trasgressione nella successione di Serre in omologia coincide con la composizione*

$$H_m(B) \longrightarrow H_m(B, b_0) \xrightarrow{\pi_*^{-1}} H_m(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F).$$

In maniera duale, la trasgressione nella successione di Serre in coomologia coincide con la composizione

$$H^{m-1}(F) \xrightarrow{\delta^*} H_m(E, F) \xrightarrow{(\pi_*)^{-1}} H_m(B, b_0) \longrightarrow H_m(B).$$

Dimostrazione. Dimostriamo solamente il caso dell'omologia. A meno di approssimazione cellulare, supponiamo che B sia un CW complesso; inoltre, siccome B è connesso per archi, possiamo supporre che abbia una soa 0-cella. Un elemento $x \in E_{n,0}^n$ è rappresentato da una xatena

$$c \in C_n(\pi^{-1}(B^{(n)})) \subset C_n(E),$$

con bordo

$$\partial c \in C_{n-1}(\pi^{-1}(B^{(0)})) = C_{n-1}(F).$$

In altre parole, c è un ciclo relativo in

$$C_\bullet(\pi^{-1}(B^{(n)}), F).$$

L'identificazione di $E_{n,0}^n$ con $H_n(B)$ si ha tramite la mappa

$$E_{n,0}^n \longrightarrow H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F) \xrightarrow{\pi_*} H_*(B), \quad [c] \longmapsto [\pi_\# c],$$

e inoltre $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ manda

$$H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F) \longrightarrow H_{n-1}(F), \quad [c] \longmapsto [\partial c].$$

□

Classi di Serre

Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso. Per i teoremi di Hurewicz, se conosciamo $\overline{H}_*(X; \mathbb{Z})$, allora conosciamo anche l'omotopia $\pi_*(X, *)$. In particolare, i coefficienti in \mathbb{Z} ci danno il vantaggio di conoscere bene i gruppi in questione, dato che abbiamo a disposizione il **Teorema di struttura per gruppi abeliani**. Ma se invece considerassimo i coefficienti in un campo, ad esempio $\overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$, che cosa possiamo concludere per $\pi_*(X, *) \otimes \mathbb{Q}$? Se l'omologia è un gruppo finito, allora possiamo dedurre qualcosa sui gruppi di omotopia?

Definizione. — Una **classe di Serre** \mathcal{C} di gruppi abeliani è una sottocategoria piena di \mathbf{Ab} che contiene il gruppo banale $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$, e per ogni successione esatta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0},$$

allora A e C appartengono a \mathcal{C} se e solo se $B \in \mathcal{C}$.

Osservazione. — Una classe di Serre è chiusa per le seguenti operazioni:

- (i) isomorfismo;
- (ii) sottogruppi;
- (iii) quozienti;
- (iv) estensioni.

Inoltre, l'intersezione di classi di Serre è a sua volta una classe di Serre.

Esempio. — Alcune classi di Serre interessanti sono:

- (i) i gruppi abeliani finiti \mathbf{Ab}_{fin} ;
- (ii) i gruppi abeliani finitamente generati \mathbf{Ab}_{fg} ;
- (iii) i gruppi abeliani di torsione \mathbf{Ab}_{tor} .
- (iv) i gruppi abeliani di p -torsione \mathbf{Ab}_{p-tor} , cioè quei gruppi A tali che, per ogni $a \in A$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p^n a = 0$.

Definizione. — Sia \mathcal{P} un insieme di primi in \mathbb{Z} . Indichiamo con $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ la classe dei gruppi abeliani di torsione tali che, se esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p \mid \text{ord}(a)$ per qualche $a \in A$, allora $A = \mathbf{0}$. Nel caso $\mathcal{P} = \{p\}$, allora scriviamo $\mathcal{C}_p := \mathcal{C}_{\{p\}}$.

Si verifica che $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ è una classe di Serre. Sia $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ la localizzazione di \mathbb{Z} al complementare dell'unione degli ideali (p) , al variare di $p \in \mathcal{P}$, cioè

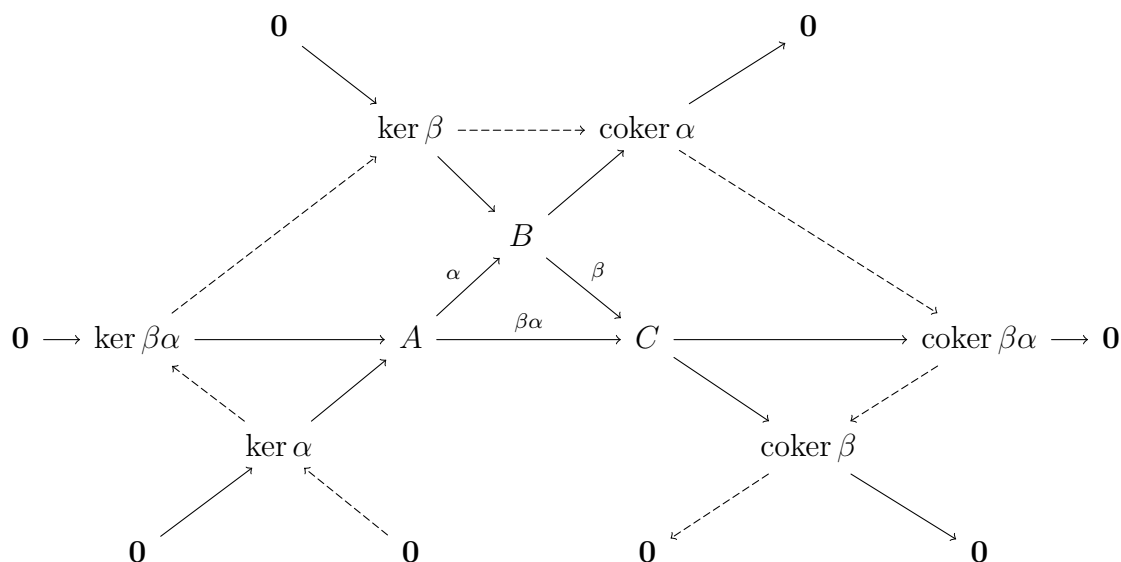
$$\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = \left(\mathbb{Z} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} (p) \right)^{-1} \mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \notin (p) \text{ per ogni } p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Remark. — Si ha $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ se e solo se $A \otimes \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = 0$.

Definizione. — Diciamo che $A = \mathbf{0} \bmod \mathcal{C}$ se $A \in \mathcal{C}$. In maniera simile, diciamo che un omomorfismo di gruppi $f : A \rightarrow B$ è un **monomorfismo** $\bmod \mathcal{C}$ se $\ker f \in \mathcal{C}$, e invece è un **epimorfismo** $\bmod \mathcal{C}$ se $\text{coker } f \in \mathcal{C}$. In particolare, f è un isomorfismo $\bmod \mathcal{C}$ se $\ker f, \text{coker } f \in \mathcal{C}$.

IV.13. Proposizione. — *Sia \mathcal{C} una classe di Serre, allora le classi di monomorfismi, epimorfismi e isomorfismi $\text{mod } \mathcal{C}$ sono chiuse per composizione. Più precisamente, dati $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : B \rightarrow C$, se due mappe tra $\alpha, \beta, \beta\alpha$ sono mono/epi/iso $\text{mod } \mathcal{C}$, allora anche il terzo lo è.*

Dimostrazione. Tutte le affermazioni seguono dall'esattezza della successione di mappe tratteggiate nel diagrammone pazzo sgravato qui sotto:



□

Esercizio. — Possiamo parlare di successioni esatte corte $\text{mod } \mathcal{C}$ e vale il **Lemma dei 5** $\text{mod } \mathcal{C}$.

Remark. — Se C_\bullet è un complesso di catene con tutti i termini C_n in una classe di Serre \mathcal{C} , allora $H_n(C_\bullet) \in \mathcal{C}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Inoltre, se F è una filtrazione di un gruppo abeliano $A \in \mathcal{C}$, allora per ogni $s \in \mathbb{Z}$ anche $\text{gr}_s A \in \mathcal{C}$. Viceversa, se la filtrazione F è finita e ogni $\text{gr}_s A \in \mathcal{C}$, allora tutto il gruppo A sta in \mathcal{C} .

In particolare, sia $\{E_{s,t}^r\}$ una successione spettrale. Se $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per ogni s, t , allora tutte le pagine $E_{s,t}^r$ appartengono alla classe \mathcal{C} per $r \geq 2$. Se la successione è concentrata nel primo quadrante, allora anche il limite $E_{s,t}^\infty$ è in \mathcal{C} . Se $\{E_{s,t}^r\}$ è indotta da una filtrazione su un complesso C_\bullet e $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per ogni $s + t = n$, allora anche l'omologia $H_*(C_\bullet) \in \mathcal{C}$.

Esempio. — Se $A \subset X$ e due tra $\overline{H}_n(X), \overline{H}_n(A), H_n(X, A)$ sono in \mathcal{C} , allora anche il terzo appartiene alla classe \mathcal{C} .

Definizione. — Una classe di Serre \mathcal{C} è un **anello di Serre** se per ogni coppia di gruppi $A, B \in \mathcal{C}$, allora anche $A \otimes B$ e $A * B := \text{Tor}(A, B)$ sono in \mathcal{C} .

Definizione. — Una classe di Serre \mathcal{C} si dice **ideale di Serre** se, dato $A \in \mathcal{C}$, per ogni gruppo abeliano B allora $A \otimes B, A * B \in \mathcal{C}$.

Esempio. — Gli esempi di classi di Serre presentati in precedenza sono tutti anelli di Serre. Senza l'ipotesi “finitamente generati” in realtà sono ideali di Serre.

Sia \mathcal{C} una classe di Serre. Preso un gruppo $A \in \mathcal{C}$, sappiamo che lo spazio classificante

$$BA = K(A, 1)$$

ha omologia in grado 1 data da $H_1(K(A, 1)) = A \in \mathcal{C}$. Motivati da questo esempio, diamo la seguente

Definizione. — Un anello di Serre \mathcal{C} si dice **aciclico** se, per ogni $A \in \mathcal{C}$, lo spazio classificante di A è aciclico mod \mathcal{C} , cioè

$$\overline{H}_n(K(A, 1)) \in \mathcal{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esempio. — Verifichiamo che la classe \mathbf{Ab}_{fin} dei gruppi abeliani finiti è un anello di Serre aciclico. Ricordiamo che la formula di Künneth ci dà

$$K(A * B, 1) = K(A, 1) \times K(B, 1).$$

Dato C_n un gruppo ciclico di ordine n , allora possiamo immergerlo $C_n \subset S^1$, che agisce a sinistra su $S^\infty \subset \mathbb{CP}^\infty$. Dunque deduciamo che

$$BC_n = C_n \backslash S^\infty = (C_n \backslash S^1) \times_{S^1} S^\infty,$$

e quindi la fibrazione

$$S^1 \simeq C_n \backslash S^1 \hookrightarrow S^1 \backslash S^\infty \simeq \mathbb{CP}^\infty$$

ci dà una successione spettrale di Serre dalla quale leggiamo che $H_1(BC_n) = C_n$ e $H^2(BC_n) = C_n$. Questo implica che $d_2(e) = \pm nx$ e deduciamo che l'anello di coomologia di BC_n è

$$H^*(BC_n) = \mathbb{Z}[x]/(nx), \quad \text{con } |x| = 2.$$

Questo mostra che l'omologia e la coomologia di BC_n sono in \mathbf{Ab}_{fin} , e quindi \mathbf{Ab}_{fin} è aciclico.

Esempio. — Se $A \in \mathbf{Ab}_{tor}$, allora A è un limite diretto di gruppi finiti. Siccome tutti i suoi sottogruppi sono di torsione, scrivendo anche $K(A, 1)$ come limite diretto possiamo vedere che $\overline{H}_q(K(A, 1))$ è di torsione, quindi \mathbf{Ab}_{tor} è un anello di Serre aciclico. Per un ragionamento analogo, anche $\mathbf{Ab}_{p-tor} \cap \mathbf{Ab}_{fin}$ e \mathcal{C}_p sono aciclici.

Esempio. — Dato che $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, allora usando il **Teorema di struttura** e gli esempi precedenti notiamo che anche \mathbf{Ab}_{fg} è aciclico.

Remark. — Sia \mathcal{C} un ideale di Serre. Se X è uno spazio topologico con

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbf{0} = H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \pmod{\mathcal{C}},$$

allora per ogni $M \in \mathbf{Ab}$ si ha $H_n(X; M) = \mathbf{0} \pmod{\mathcal{C}}$. Se \mathcal{C} è solamente un anello, questa conclusione segue se $M \in \mathcal{C}$.

IV.14. Proposizione. — Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, con B, F connessi per archi e $\pi_1(B, b_0)$ agisce banalmente su $H_*(F)$. Sia \mathcal{C} un ideale di Serre. Se per ogni $t > 0$ si ha $H_t(F) \in \mathcal{C}$, allora

$$\pi_* : H_*(F) \longrightarrow H_*(B)$$

è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione. Per il **Teorema dei Coefficienti Universali** si ha

$$E_{s,t}^r = H_s(B; H_t(F)) \in \mathcal{C}, \quad \text{per } t > 0.$$

Allora anche $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per $t > 0$ e anche il limite $E_{s,t}^\infty \in \mathcal{C}$. Questo implica che π_* è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$. \square

IV.15. Proposizione. — Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, con B, F connessi per archi e base semplicemente connessa $H_1(B) = \mathbf{0}$. Se \mathcal{C} è una classe di Serre tale che $H_s(B) \in \mathcal{C}$ per ogni $0 < s < n$ e $H_t(F) \in \mathcal{C}$ per $0 < t < n - 1$. Allora per ogni $i \leq n$, la proiezione

$$\pi_* : H_i(E, F) \longrightarrow H_i(B, b_0) \in \mathcal{C},$$

è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$.

copia dim.

Dimostrazione. Usiamo la **versione relativa** della successione di Serre. \square

Prima di vedere la dimostrazione di questo fatto, deduciamo qualche conseguenza interessante: otteniamo una nuova versione del Teorema di Hurewicz.

IV.16. Corollario. — *Sia \mathcal{C} un anello di Serre aciclico e X uno spazio semplicemente connesso. Per ogni $n \geq 2$, si ha*

$$\pi_q(X, *) \in \mathcal{C} \iff H_q(X) \in \mathcal{C}$$

per ogni $q < n$. In tal caso, la mappa di Hurewicz

$$h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} .

Ad esempio, se $\pi_1(X, *) = 0$, allora vale

1. ...
2. ...
3. per ogni $q < n$ vale

$$\overline{H}_q(X; \mathbb{Q}) = \mathbf{0} \iff \pi_q(X; *) \otimes \mathbb{Q} = \mathbf{0}$$

e la mappa $\pi_n(X; *) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_n(X; \mathbb{Q})$ è un isomorfismo.

Esempio. — L'ipotesi che X sia semplicemente connesso è necessaria. Se consideriamo $X = S^1 \vee S^2$, allora $H_q(X)$ è un gruppo finitamente generato per ogni $q \in \mathbb{N}$, ma invece $\pi_2(X; *)$ non è finitamente generato: basti pensare che il rivestimento universale \widetilde{X} è una retta con infinite sfere attaccate nei punti interi.

IV.17. Proposizione. — *Data una fibrazione di Serre $\pi : E \rightarrow B$, con B, F connessi per archi e base $\pi_1(B, b_0) = \mathbf{0}$. Allora $\pi_* : H_i(E, F) \rightarrow H_i(B, b_0)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} per ogni $i \geq n$.*

Dimostrazione del Teorema IV.15. Consideriamo la fibrazione dei loop

$$\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X$$

e mostriamo che se $\pi_q(X, *) \in \mathcal{C}$ per ogni $q < n$, allora $\pi_n(X, *) \rightarrow H_n(X)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} . Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 2$, allora

$\pi_2(X; *) \simeq H_2(X)$ per il classico **Teorema di Hurewicz**. Supponiamo quindi $n > 2$ e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_q(X, *) & \xleftarrow{\sim} & \pi_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{q-1}(\Omega X, *) \\ \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \overline{H}_q(X) & \xleftarrow[\psi]{} & H_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\sim} & H_{q-1}(\Omega X). \end{array}$$

Se mostriamo che φ e ψ sono isomorfismi mod \mathcal{C} , allora concludiamo che anche h lo è, da cui segue la tesi.

Se $\pi_2(X, *) = 0$, allora si ha $\pi_1(\Omega X, *) = 0$ e possiamo applicare il Teorema di Hurewicz per ipotesi induttiva, da cui deduciamo che φ e ψ sono iso. Per ψ usiamo la [Proposizione IV.17](#). Il problema è che in generale **non** vale $\pi_2(X, *) = 0$, quindi non abbiamo a disposizione l'ipotesi $\pi_1(\Omega X, *) = 0$. Per ovviare a questo problema, ricorriamo alle **Torri di Whitehead**: consideriamo la fibrazione

$$K := K(\pi_2(X, *), 1) \longrightarrow Y \xrightarrow{t} X,$$

dove t induce isomorfismi tra i gruppi di omotopia π_q , per $q > 2$. Questo “uccide” il π_2 di X , ma in compenso questo gruppo appare come gruppo fondamentale della fibra K . Dato che $\pi_2(X, *) \in \mathcal{C}$ e per ipotesi \mathcal{C} è un anello aciclico, allora $H_i(K) \in \mathcal{C}$ per ogni $i > 0$. Quindi $\overline{H}_i(Y) \rightarrow H_i(Y, K)$ è isomorfismo mod \mathcal{C} . Usando la [Proposizione IV.17](#), deduciamo che per ogni $i \leq n$ anche

$$H_i(Y, y_0) \longrightarrow H_i(X, *)$$

è isomorfismo mod \mathcal{C} . Siccome $\pi_i(Y, y_0) \simeq \pi_i(X, *)$ per $i \geq 3$, applichiamo l'ipotesi induttiva. \square

IV.18. Corollario. — *Sia X è semplicemente connesso, p primo e $n \geq 2$. Vale*

$$\forall_{i < n} \pi_i(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbf{0} \iff \forall_{i < n} \overline{H}_i(X; \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbf{0}$$

e si ha un isomorfismo $\pi_n(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq \overline{H}_n(X; \mathbb{Z}_{(p)})$.

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Hurewicz modulo la classe di Serre \mathcal{C}_p , ovvero i gruppi abeliani A tali che $A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbf{0}$. \square

IV.19. Teorema (Hurewicz mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico e (X, A) una coppia di spazi semplicemente connessi. Per $n \geq 1$ si ha che*

$$\forall_{2 \leq i < n} \pi_i(X, A) \in \mathcal{C} \iff \forall_{2 \leq i < n} H_i(X, A) \in \mathcal{C}$$

e in tal caso la mappa $\pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} .

recupera!

Idea di dimostrazione. Boh sono rimasto indietro.

$$E_{s,t}^2 = H_s(X, A; H_t(\Omega X))$$

Non abbiamo ipotesi sull'omologia di ΩX , ma la condizione che \mathcal{C} sia un ideale ci serve per poter fare a meno di ipotesi sull'omologia della fibra, in quanto sia \otimes , sia $*$, sono operazioni che fanno rimanere in \mathcal{C} . Dal fatto che $H_s(X, A) \in \mathcal{C}$, per Künneth e il fatto che \mathcal{C} è ideale segue che $H_s(X, A; H_t(\Omega X)) \in \mathcal{C}$, quindi p_* è un isomorfismo mod \mathcal{C} . \square

IV.20. Teorema (Whitehead mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico e $f : X \rightarrow Y$ una mappa continua. Per $n \geq 2$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) *per ogni $i \leq n - 1$, la mappa $f_{\#} : \pi_i(X, *) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} , ed è epi per $i = n$;*
- (ii) *per ogni $i \leq n - 1$, la mappa $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} , ed è epi per $i = n$.*

Dimostrazione. A meno di sostituire Y con il mapping cylinder di f , possiamo supporre che $f : X \subset Y$ sia un'inclusione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\pi_{n+1}(Y, X)$$

La condizione i) è equivalente alla condizione

$$\pi_i(Y, X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i \leq n,$$

ma allora per il [Teorema di Hurewicz mod \$\mathcal{C}\$](#) IV.19 notiamo che equivale a

$$H_i(Y, X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i \leq n,$$

ovvero la condizione ii). \square

IV.21. Lemma. — *Siano X, Y spazi tali che la loro omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_{(p)}$ sia finitamente generata in ogni grado. Se $f : X \rightarrow Y$ induce un isomorfismo in $H_q(-; \mathbb{Z}_{(p)})$ per ogni q , allora f induce isomorfismi mod \mathcal{C}_p in ogni grado dell'omologia singolare a coefficienti in \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Notiamo che un omomorfismo di gruppi $\alpha : A \rightarrow B$ è un isomorfismo mod \mathcal{C}_p se e solo se

$$\alpha \otimes \mathbf{1} : A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo di gruppi. Dato che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è piatto, allora tensorizzando la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow 0,$$

otteniamo una nuova successione esatta di gruppi abeliani.

Uno $\mathbb{Z}_{(p)}$ -modulo finitamente generato è banale se e solo se è banale modulo p , quindi se mostriamo che il nucleo e il conucleo della mappa

$$f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

sono banali se tensorizziamo con $-\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, allora abbiamo la tesi.

Detto Z il mapping cone di f , ricordiamo che vale

$$\overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq H_*(C_f, X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Siccome $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un anello nœtheriano e per ogni q i moduli $H_q(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ e $H_q(Y; \mathbb{Z}_{(p)})$ sono finitamente generati, allora anche $H_q(Z; \mathbb{Z}_{(p)})$ è finitamente generato. Dal Teorema dei Coefficienti Universali ricordiamo che

$$\overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

quindi se $H_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, segue che $\overline{H}_*(Z) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$. Concludiamo così che la mappa

$$f_* \otimes 1 : \overline{H}_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \overline{H}_*(Y) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo. □

IV.22. Corollario. — *Se X e Y sono spazi semplicemente connessi, con omologia $H_q(-; \mathbb{Z}_{(p)})$ finitamente generata per ogni $q \in \mathbb{N}$. Se $f : X \rightarrow Y$ è una mappa continua che induce un isomorfismo in $H_*(-; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, allora*

$$f_* : \pi_q(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \pi_q(Y, y_0) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Segue applicando il Lemma + Whitehead mod C. □

Prima di enunciare il **Teorema di Serre**, facciamo alcuni calcoli dell'omologia di spazi classificanti.

Esempio. — Il **Teorema di Whitehead** mod \mathcal{C} applicato a un gruppo $A \in \mathbf{Ab}_{tor}$ ci dice che

$$\overline{H}_*(K(A, n); \mathbb{Q}) = 0.$$

Questo è chiaro per $n = 1$. Se $n > 1$, allora consideriamo la fibrazione

$$K(A, n-1) \longrightarrow PK(A, n) \longrightarrow K(A, n).$$

Calcoliamo gli anelli di coomologia, per esempio, nel caso di $A = \mathbb{Z}$. Per $n = 1$, sappiamo che $K(\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{S}^1$ ha coomologia

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Q}) \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_1],$$

con ι_1 in grado 1. Se $n = 2$, allora $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$ e il suo anello di coomologia è

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\iota_2], \quad |\iota_2| = 2.$$

Copiare e
capire

Tutto il calcolo con SS

Ripetendo questo procedimento per ogni n , si dimostra che

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_n], & \text{se } n \text{ è dispari;} \\ \mathbb{Q}[\iota_n], & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

dove ι_n è un generatore in grado $|\iota_n| = n$.

IV.23. Teorema (Serre). — *I gruppi di omotopia della sfera S^n sono **finiti**, eccetto $\pi_0(S^n, *) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_n(S^n, *)$. Se n è pari, allora $\pi_{2n-1}(S^n, *)$ è finitamente generato di rango 1.*

Dimostrazione. Conosciamo già l'omotopia di S^1 . Se $n \geq 2$, allora consideriamo la mappa

$$f : S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n).$$

Se n è dispari, allora f_* induce un isomorfismo in omologia razionale, per cui applicando il Teorema di Whitehead mod \mathcal{C} segue che f induce un isomorfismo $\pi_q(-) \otimes \mathbb{Q}$.

Se n è pari, allora indichiamo la fibra omotopica

$$F \hookrightarrow S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n).$$

Sappiamo che l'anello di coomologia di $K(\mathbb{Z}, n)$ è un'algebra di polinomi generata in grado n da una classe ι_n . Dato che F ha omotopia banale in grado

$n - 1$ e n , allora sulla colonna 0 della SS, dopo l'unità 1 in grado 0, troviamo una classe ι_{2n-1} che deve uccidere ι_n^2 , cioè

$$d_{2n-1}(\iota_{2n-1}) = \iota_n^2.$$

Da questo deduciamo che $d_{2n-1}(\iota_{2n-1}\iota_n^k) = \iota_n^{(k-1)2}$. Questo ci dice che

$$H^*(F; \mathbb{Q}) = H^*(K(\mathbb{Z}, 2n-1); \mathbb{Q}) \implies H^*(F) \otimes \mathbb{Q} = H^*(K(\mathbb{Z}, 2n-1)) \otimes \mathbb{Q},$$

da cui concludiamo

$$\pi_q(S^n, *) \otimes \mathbb{Q} \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } q = n, 2n-1; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

□

Osservazione. — La dimostrazione del [Teorema di Serre IV.23](#) ci fornisce una tecnica interessante per il calcolo dell'omotopia, che possiamo sfruttare anche per lo studio dei gruppi finiti delle sfere. Consideriamo ad esempio il caso $n = 3$ e proviamo a calcolare $\pi_4(S^3, *)$. Dall'approssimazione di Whitehead

$$F := \tau_{\geq 4} S^3 \longrightarrow S^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 3),$$

tramite la successione di Barret-Puppe otteniamo la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}, 2) \hookrightarrow F \longrightarrow S^3.$$

LA SS Guardando la successione spettrale in \mathbb{Z} in coomologia, otteniamo

$$E_2^{\bullet, \bullet} \simeq \Lambda[\sigma] \otimes \mathbb{Z}[\iota_2], \quad |\sigma| = 3, |\iota_2| = 2.$$

Per ogni k si ha dunque

$$H^{2k+1}(\tau_{\geq 4} S^3) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \implies H_{2k}(\tau_{\geq 4} S^3) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

La prima p -torsione si ritrova in

$$H_{2k}(\tau_{\geq 4} S^3) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

quindi l'omotopia $\pi_i(S^3, *) = 0 \bmod \mathcal{C}_p$ per $i < 2p$. Siccome $\pi_{2p}(\pi_i(S^3, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, per $p = 2$ concludiamo

$$\pi_4(S^3, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \pi_4(S^2, *),$$

dove abbiamo sfruttato la fibrazione di Hopf $S^1 \subset S^3 \rightarrow S^2$.

Sospensione

Più volte durante il corso abbiamo usato la classica fibrazione

$$\Omega X \hookrightarrow PX \longrightarrow X.$$

Infatti, questa nasce considerando i funtori tra spazi topologici puntati

$$\mathbf{Top}_* \xleftarrow[\Omega]{\Sigma} \mathbf{Top}_*$$

che sono tra loro aggiunti: più precisamente, dotando gli spazi di funzioni della topologia compatto-aperta, per ogni coppia di spazi topologici X, Y abbiamo degli *omeomorfismi* naturali

$$\text{hom}(\Sigma X, Y) \simeq \text{hom}(X, \Omega Y),$$

dove i morfismi di aggiunzione sono dati esplicitamente da

$$\begin{aligned} \sigma_X : X &\longrightarrow \Omega \Sigma X, & ev_Y : \Sigma \Omega Y &\longrightarrow Y, \\ \sigma_X(x)(t) &:= [x, t] \in \Sigma X, & ev_Y(\omega, t) &:= \omega(t). \end{aligned}$$

IV.24. Proposizione. — *Dato uno spazio X connesso per archi e semplicemente connesso, sia $\{E_{*,*}^n\}_{n \geq 2}$ la successione spettrale associata alla fibrazione $\Omega X \hookrightarrow PX \xrightarrow{\pi} X$. L'omomorfismo di trasgressione*

$$H_n(X) = E_{n,0}^2 \supset E_{n,0}^n \xrightarrow{d^n} E_{0,n-1}^n \longleftarrow E_{0,n-1}^2 = H_{n-1}(\Omega X)$$

è indotto dall'inversa della composizione

$$\overline{H}_{n-1}(\Omega X) \simeq \overline{H}_n(\Sigma \Omega X) \longrightarrow H_n(X).$$

specificare
che C indica
i cammini
liberi

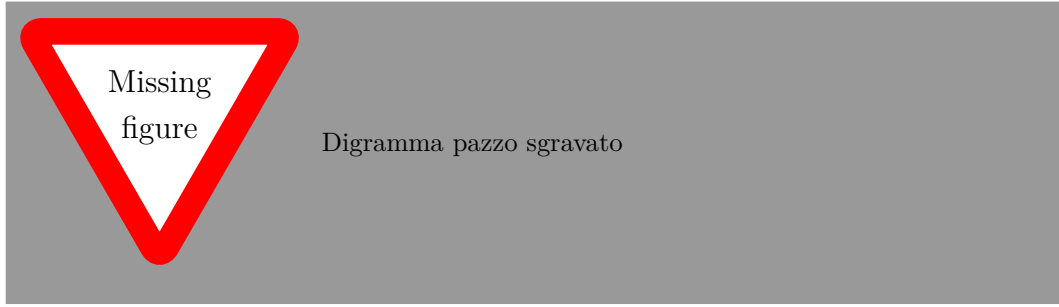
Dimostrazione. Considero la mappa

$$\varphi : C\Omega X \longrightarrow PX, \quad \omega_t(u) := \omega(tu),$$

cioè ΩX è contraibile in PX . Considero allora la valutazione

$$ev' : C\Omega X \longrightarrow X, \quad ev'(t, \omega) := \omega(t).$$

Abbiamo quindi il diagramma:



che mostra che $ev_* \circ \Sigma$ è l'inversa della trasgressione $\partial_* \circ \pi_*^{-1} : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(\Omega X)$. \square

Osservazione. — Possiamo interpretare la valutazione $ev : \Sigma\Omega X \rightarrow X$ in coomologia in un gruppo abeliano A attraverso il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{H}^n(X; A) & \longrightarrow & \overline{H}^{n-1}(\Omega X; A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & [\Omega X, K(A, n-1)]_* \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \\
 & & [\Omega X, \Omega K(A, n)]_* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [X, K(A, n)]_* & \xrightarrow{ev^*} & [\Sigma\Omega X, K(A, n)]_*
 \end{array}$$

IV.25. Proposizione. — Sia \mathcal{C} un anello di Serre. Siano $n > 1$ e X semplicemente connesso tale che $H_i(X) \in \mathcal{C}$ per ogni $i < n$. Allora

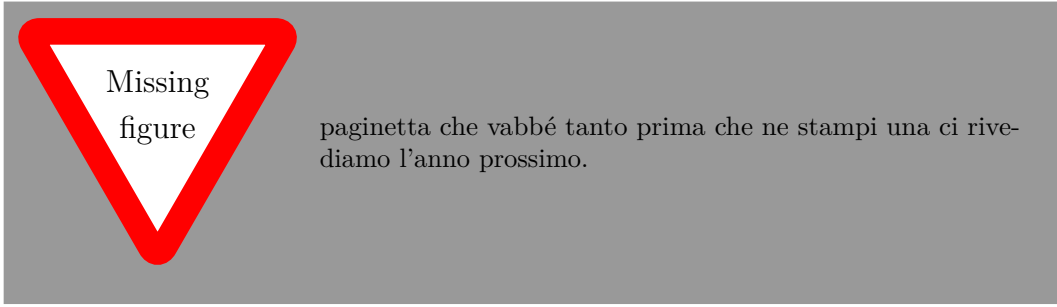
$$ev_* : \overline{H}_{i-1}(\Omega X) \longrightarrow \overline{H}_i(X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} , per ogni $i < 2n-1$, e epimorfismo mod \mathcal{C} per $i = 2n-1$.

Dimostrazione. Per quello che abbiamo visto

$$\overline{H}_i(\Omega X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i < n-1,$$

quindi analizzando la sequenza spettrale della fibrazione $\Omega X \subset PX \rightarrow X$ notiamo che



Solito discorso: in grado $(2n-1, 0)$ parte un differenziale che tocca un quadrante non banale in posizione $(n, n-1)$, e quindi possiamo trovare un epi su un quoziente; più in basso invece abbiamo via libera e i differenziali partono dalla riga zero-esima per arrivare, come isomorfismi, alla colonna zero-esima. Si ottiene così il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{2n-1}(X) & \xrightarrow{\simeq} & \frac{H_{2n-2}(\Omega X)}{\text{im } d^n} \\ & \nwarrow \text{ev}_* \quad \nearrow & \\ & H_{2n-2}(\Omega X) & \end{array} .$$

□

Se applichiamo il funtore di sospensione alla mappa σ_X di aggiunzione, allora otteniamo il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma \sigma_X} & \Sigma \Omega \Sigma X \\ & \searrow \text{1}_{\Sigma X} & \swarrow \text{ev}_{\Sigma X} \\ & \Sigma X & \end{array}$$

che in omologia risolta induce lo spezzamento

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_i(X) & \xrightarrow{(\simeq_X)_*} & H_i(\Omega \Sigma X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \overline{H}_{i+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\Sigma(\sigma_X)_*} & H_{i+1}(\Sigma \Omega \Sigma X) \\ & \searrow \simeq \quad \swarrow (ev_X)_* & \\ & H_{i+1}(\Sigma X) & \end{array}$$

Per la [Proposizione ??](#), se X è $(n-1)$ -connesso oppure $H_i(X) \in \mathcal{C}$ per ogni $i < n$, allora la mappa

$$(ev_{\Sigma X})_* : H_i(\Omega \Sigma X) \longrightarrow H_{i+1}(\Sigma X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} per ogni $i < 2n$, come pure $(\sigma_X)_*$. Applicando il Teorema di Whitehead mod \mathcal{C} si ottiene quindi

IV.26. Teorema (Sospensione di Freudenthal mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico, $n \geq 1$ e X uno spazio topologico semplicemente connesso, tale che $\overline{H}_i(X) \in \mathcal{C}$, per ogni $i < n$. Allora l'omomorfismo di sospensione*

$$\pi_i(X, *) \longrightarrow \dots$$

finire di copiare.

Devo recuperare

Operazioni di Steenrod

Per il resto della sezione lavoreremo sempre in coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e per semplicità scriveremo solamente $H^*(X)$. Che operazioni modulo 2 conosciamo in coomologia?

Esempio. — Un esempio banale potrebbe essere semplicemente $x \mapsto x^m$, e se $m = 2^n$ allora è una mappa additiva.

Esempio. — Ricordiamo che abbiamo già parlato dell'omomorfismo di Bockstein

$$\beta_2 : H^i(X) \longrightarrow H^{i+1}(X),$$

dato dall'omomorfismo di connessione della successione in coomologia, ottenuta applicando il funtore $\text{Hom}(C_*(X), -)$ alla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Esercizio. — Provare a calcolare l'omomorfismo di Bockstein per $X = \mathbb{RP}^2$ e dimostrare che

$$\beta_2 : H^1(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow H^2(\mathbb{RP}^2)$$

è un isomorfismo.

IV.27. Teorema. — *Esiste un'unica famiglia di trasformazioni naturali additive*

$$Sq^k : H^n(X) \longrightarrow H^{n+k}(X), \quad \text{con } n, k \geq 0,$$

tali che soddisfino:

- $Sq^0 x = x$;
- $Sq^k x = x^2$ se $|x| = k$;
- $Sq^k x = 0$ se $k > |x|$;
- vale la **formula di Cartan**

$$Sq^k(x \cup y) = \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \cup Sq^j(y). \quad (\text{IV.27.1})$$

Chiameremo queste trasformazioni naturali le **operazioni di Steenrod**.

Se mettiamo insieme tutti quadrati di Steenrod, possiamo vedere Sq come un morfismo che si “spalma” su tutto l’anello di coomologia

$$Sq : H^*(X) \longrightarrow H^*(X), \quad Sq(x) = Sq^0(x) + Sq^1(x) + Sq^2(x) + \dots$$

Allora la formula di Cartan (IV.27.1) in questo caso diventa la condizione di moltiplicatività

$$Sq(x \cup y) = Sq(x) \cup Sq(y).$$

Per il **Lemma di Yoneda**, le trasformazioni naturali Sq^k possono essere rappresentate dalla coomologia dello spazio classificante, o meglio

$$H^n(K_n) \longrightarrow H^{n+k}(K_n), \quad K_n := K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n).$$

IV.28. Proposizione. — *Le operazioni di Steenrod sono **stabili** e, per ogni n e q , il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q(X) & \xrightarrow{Sq^n} & \overline{H}^{q+n}(X) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ \overline{H}^{q+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{Sq^n} & \overline{H}^{q+n+1}(\Sigma X). \end{array}$$

Dimostrazione. La sospensione Σ è indotta dal cross product definito dal **Teorema di Künneth**

$$\overline{H}(S^1, *) \otimes \overline{H}^*(X, x_0) \longrightarrow H^*(S^1 \times X, S^1 \vee X) \simeq \overline{H}^*(S^1 \wedge X), \quad \omega_1 \otimes \alpha \longmapsto \pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha),$$

dove ω_1 è il generatore della coomologia ridotta di S^1 in grado 1.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & \pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha) \\ \downarrow Sq^n & & \downarrow Sq^n \\ Sq^n \alpha & \longmapsto & Sq^n(\pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha)), \end{array}$$

dove il termine in basso a destra per la formula di Cartan è proprio

$$Sq^n(\pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha)) = \sum_{i+j=n} Sq^i(\pi_1^*(\omega_1) \cup Sq^j(\pi_2^*(\alpha))) = \pi_1^*(\omega_1) \cup Sq^n \pi_2^*(\alpha),$$

dove abbiamo usato che $Sq^n(\pi_1^*(\omega_1)) = 0$ per ogni $n > 0$. \square

Conosciamo già un'operazione di Steenrod:

IV.29. Proposizione. — *La prima operazione di Steenrod è l'omomorfismo di Bockstein, i.e. $Sq^1 = \beta_2$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su n . Facciamo vedere che Sq^1 è non banale e alza di 1 il grado della coomologia. Siccome soddisfa tutte le proprietà descritte dal teorema e anche β_2 soddisfa le condizioni del teorema, allora per unicità devono essere uguali. Ma lo devo copiare perché non so come scriverlo, c'è la solita paginetta della SS della fibrazione dei loop. \square

IV.30. Lemma. — *Il prodotto cup in $H^*(\Sigma X)$ è banale in grado > 0 .*

Dimostrazione. Segue perché la sospensione ΣX si può scrivere come l'unione di due coni $\Sigma X = C_+ X \cup C_- X$, che sono due sottospazi contraibili. Ma allora

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Sigma X, *) \otimes H^*(\Sigma X, *) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\Sigma X, *) \\ & & \uparrow \\ H^*(\Sigma X, C_+ X) \otimes H^*(\Sigma X, C_- X) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\Sigma X, \Sigma X) = 0. \end{array}$$

\square

LEZIONE 19
16th mag., 2023

Dimostrazione del Teorema IV.27. Dimostriamo l'enunciato per induzione su n , il grado della coomologia. Chiamo $iota_n \in H^n(K_n)$ la classe fondamentale.

Per naturalità, è sufficiente definire $Sq^i \iota_n$, per ogni i e per ogni n . Il caso $n = 1$ è determinato: siccome sappiamo che $K_1 = \mathbb{RP}^\infty$, allora $Sq^0 \iota_1 = \iota_1$, $Sq^1 \iota_1 = \iota_1^2$ e per $n > 1$ abbiamo $Sq^i \iota_1 = 0$.

Supponiamo ora $n > 1$. Supponiamo di aver definito ι_{n-1}^i per ogni i e definiamo $Sq^i \iota_n$ tramite le trasgressioni studiate in precedenza: consideriamo la fibrazione

$$K_{n-1} = \Omega K_n \hookrightarrow PK_n \longrightarrow K_n.$$

La trasgressione è un isomorfismo tra

$$H^{n-1}(K_{n-1}) \longrightarrow H^n(K_n), \quad \iota_{n-1} \longmapsto d_n(\iota_{n-1}) = \iota_n.$$

Per $i < n - 1$, allora abbiamo

$$d_{n+1}^{0,n+i-1} : H^{n+i-1}(K_{n-1}) \longrightarrow H^{n+i}(K_n), \quad Sq^i(\iota_{n-1}) \longmapsto Sq^i(\iota_n),$$

disegnettooooo

dato che per questi indici non incontriamo il quadrante non banale “in alto a destra”. Per ogni $i < n - 1$ definiamo quindi $Sq^i(\iota_n) := d_{n+i}Sq^i(\iota_{n-1})$. A priori, il caso $i = n - 1$ potrebbe creare dei problemi: tuttavia, sappiamo che $Sq^{n-1}(\iota_{n-1}) = \iota_{n-1}^2$, quindi calcolandone il differenziale n -esimo otteniamo

$$d_n Sq^{n-1}(\iota_{n-1}) = d_n \iota_{n-1}^2 = 2\iota_{n-1}\iota_n = 0$$

perché siamo a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dunque il differenziale è nullo, da cui deduciamo che ι_{n-1}^2 è una classe trasgressiva. Questo ci permette di definire

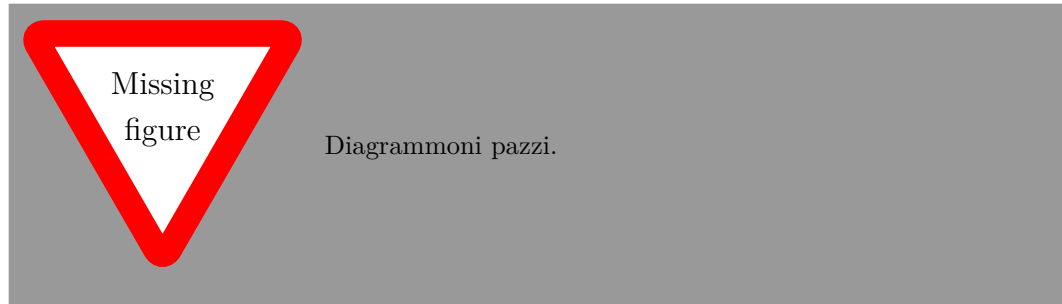
$$Sq^{n-1}(\iota_n) := d_{2n-1}(Sq^{n-1}(\iota_{n-1})) = d_{2n-1}\iota_{n-1}^2, \quad Sq^n(\iota_n) := \iota_n^2.$$

Questo dimostra l'esistenza delle operazioni di Steenrod.

Ora dimostriamo che queste operazioni hanno la proprietà di stabilità. Sia f_n l'omomorfismo

$$f_n : H^{n+i}(K_n) \longrightarrow H^{n+i-1}(K_{n-1}), \quad Sq^i(\iota_n) \longmapsto Sq^i(\iota_{n-1}).$$

Per $i > n$ non c'è nulla da dimostrare, mentre per $i < n$ la proprietà vale per costruzione, quindi rimane da studiare il caso $i = n$.



Definiamo la mappa i_n più esplicitamente: una classe $\alpha \in [K(\pi, n), K(\pi, n)]$ tramite Ω viene mandata nella classe di

$$\Omega\alpha : \Omega K(\pi, n) \longrightarrow \Omega K(\pi, n), \quad \gamma \mapsto \alpha \circ \gamma.$$

Ma allora applicando la sospensione Σ , tramite la proprietà di aggiunzione deduciamo che

$$\Sigma\Omega\alpha : \Sigma\Omega K(\pi, n) \longrightarrow K(\pi, n), \quad (t, \gamma) \longmapsto \Sigma\Omega\alpha(t, \gamma) = \alpha \circ ev(t, \gamma) = \alpha(\gamma(t)).$$

Questo mostra che $i_n^*(\alpha) = \alpha \circ ev$, cioè $i_n^* = ev^*$, ma l'omomorfismo di trasgressione in $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ è l'inverso di

$$\overline{H}^{n-1}(\Omega X) = \overline{H}^n(\Sigma\Omega X) \xleftarrow{ev^*} \overline{H}^n(X).$$

Segue che f_n è l'inverso della trasgressione per $i < n$ e quindi per definizione $f_n(Sq^i \iota_n) = Sq^i \iota_{n-1}$. Per $i = n$, ricordiamo che $Sq^n(\iota_n) = \iota_n^2$ e $Sq^n(\iota_{n-1}) = 0$, quindi consideriamo il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(K_n) & \xrightarrow{f_n} & H^{2n-1}(K_{n-1}) \\ & \searrow i_n^* & \nearrow \Sigma^{-1} \\ & H^{2n}(\Sigma K_{n-1}) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \iota_n^2 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & i_n^*(\iota_n)^2 = 0 & \end{array},$$

dove abbiamo usato che ogni quadrato in una sospensione è zero.

Resta da mostrare che vale la formula di Cartan IV.27.1. Siano $\alpha \in H^m(X), \beta \in H^n(X)$. Se $m = 0$ oppure $n = 0$, allora non ci sono problemi. Se $k > m + n$, allora $Sq^k(\alpha\beta) = 0$ e $\sum_{i+j=k} Sq^i(\alpha)Sq^j(\beta) = 0$, quindi va bene. Se $k = m + n$, allora $Sq^k(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2$, mentre dall'altra parte

$$\sum_{i+j=m+n} Sq^i(\alpha)Sq^j(\beta) = Sq^m(\alpha)Sq^n(\beta) = \alpha^2\beta^2,$$

quindi i due termini sono uguali, dato che i coefficienti sono in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Adesso supponiamo di aver mostrato che la formula vale per $k > m + n - s$, con $s > 0$. Dimostriamo che allora vale anche per $k = m + n - s$; questo dimostra la formula per induzione. Consideriamo le proiezioni

$$X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y,$$

e per ogni $\alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(Y)$ definiamo il prodotto $\alpha \cdot \beta := \pi_1^*(\alpha) \smile \pi_2^*(\beta)$. La formula di Cartan equivale a

$$Sq^{m+n-s}(\alpha \cdot \beta) = \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\alpha) \cdot Sq^j(\beta). \quad (\text{IV.30.1})$$

Se dimostriamo l'identità per X, Y due qualsiasi CW complessi, allora abbiamo la tesi. Poiché $m, n > 0$, prendo $\alpha \in H^m(X, x_0), \beta \in H^n(Y, y_0)$ e ottengo

$\alpha \cdot \beta \in H^{m+n}(X \times Y, X \vee Y) = H^{m+n}(X \wedge Y, *)$. Per naturalità, posso limitarmi a considerare due classi fondamentali

$$\alpha = \iota_m \in H^m(K_m, *), \quad \beta = \iota_n \in H^n(K_n, *).$$

Allora il prodotto smash degli spazi classificanti può essere vista come

$$\begin{array}{ccc} & (\Sigma K_{m-1}) \wedge K_n \Longleftarrow \Sigma(K_{m-1} \wedge K_n) & \\ & \swarrow i_m \wedge \mathbf{1}_{K_n} & \\ K_m \wedge K_n & & \\ & \nwarrow \mathbf{1}_{K_m} \wedge i_n & \\ & K_m \wedge (\Sigma K_{n-1}) \Longleftarrow \Sigma(K_m \wedge K_{n-1}), & \end{array}$$

e quindi passando in coomologia si ottiene

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(1)} & \\ & H^k((\Sigma K_{m-1}) \wedge K_n) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} H^{k-1}(K_{m-1} \wedge K_n) & \\ & \uparrow (i_m \wedge \mathbf{1}_{K_n})^* & \\ H^k(K_m \wedge K_n) & & \\ & \downarrow (\mathbf{1}_{K_m} \wedge i_n)^* & \\ & H^k(K_m \wedge (\Sigma K_{n-1})) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} H^{k-1}(K_m \wedge K_{n-1}). & \\ & \xrightarrow{(2)} & \end{array}$$

Gli omomorfismi nel diagramma commutano con le operazioni di Steenrod. Dimostriamo ora che se $\gamma \in H^*(K_m \wedge K_n)$ è annullata sia da (1), sia da (2), allora necessariamente $\gamma = 0$. Per mostrarlo, assumo $\gamma = \sum_i \alpha_i \cdot \beta_i$, con $\alpha_i \in H^*(K_m)$ e $\beta_i \in H^*(K_n)$ e numero di termini nella somma più piccolo possibile. Con α_i linearmente indipendenti in $H^*(K_m)$ e β_i linearmente indipendenti in $H^*(K_n)$, le mappe (1) e (2) mandano rispettivamente

$$\sum_i \alpha_i \cdot \beta_i \mapsto \sum_i f_m^m(\alpha_i) \cdot \beta_i, \quad \sum_i \alpha_i \cdot \beta_i \mapsto \sum_i \alpha_i \cdot f_n(\beta_i),$$

e se sono entrambi nulli allora deduciamo che ogni $f_m(\alpha_i) = 0$ e $f_n(\beta_i) = 0$. Ma se $f_m(\alpha) = 0$, questo implica che $\alpha \in H^r(K_m)$ per qualche $r > 2m$, e il risultato analogo vale per i β . Se dunque consideriamo

$$\Delta = Sq^{m+n-s}(\iota_m \cdot \iota_n) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_m) \cdot Sq^j(\iota_n),$$

la sua immagine attraverso (1) è

$$Sq^{m+n-s}(\iota_{m-1} \cdot \iota_n) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_{m-1}) \cdot Sq^j(\iota_n),$$

mentre invece (2) ci dà

$$Sq^{m+n-s}(\iota_m \cdot \iota_{n-1}) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_m) \cdot Sq^j(\iota_{n-1}).$$

Dato che (1) $\Delta = 0$ e (2) $\Delta = 0$ per ipotesi induttiva, allora concludiamo che $\Delta = 0$. \square

Definizione. — Indichiamo con \mathcal{A}_2 l'algebra delle operazioni coomologiche generata dalle operazioni di Steenrod Sq^n , in cui il prodotto è dato dalla composizione.

L'algebra \mathcal{A}_2 è tutta l'algebra di operazioni coomologiche stabili di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Inoltre, si può dimostrare che \mathcal{A}_2 **non** è libera:

IV.31. Teorema (Adams). — Per $a < 2b$, vale la relazione

$$Sq^a Sq^b = \sum_c \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c,$$

dove c varia tra $\max(a-b+1, 0)$ e $\lfloor a/2 \rfloor$. Questo sistema di relazioni è **completo**.

Esempio. — Alcune relazioni in \mathcal{A}_2 sono $Sq^1 Sq^{2n} = Sq^{2n+1}$, $Sq^1 Sq^{2n+1} = 0$, $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$, $Sq^3 Sq^2 = 0$.

Definizione. — Posto il multiindice $I = (i_1, \dots, i_n)$, definiamo l'operazione

$$Sq^I := Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_n}.$$

Se vale $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \dots, i_{n-1} \geq 2i_n$, allora I si dice **ammissibile** e Sq^I è un'operazione **ammissibile**. Chiamo **eccesso** di I il valore

$$e(I) := \sum_{j=1}^{n-1} (i_j - 2i_{j+1}) = 2i_1 - \sum_{j=1}^n i_j.$$

IV.32. Proposizione. — Una **base** additiva di \mathcal{A}_2 è data dalle operazioni Sq^I ammissibili.

Dimostrazione. Mostriamo che iterando le relazioni di Adam è possibile riscrivere ogni Sq^I non ammissibile come somma di ammissibili. Infatti, possiamo ordinare i multiindici I tramite l'ordinamento lessicografico (ricordiamo che è un buon ordinamento), e di conseguenza possiamo ordinare i Sq^I . Posso applicare le relazioni di Adam solo se I non è ammissibile, quindi applicando le relazioni a Sq^I ottengo Sq^{J_i} minori rispetto all'ordine lex. Siccome basta un numero finito di iterazioni per ricondursi a Sq^{J_i} , allora deduciamo che le relazioni di Adam sono un sistema completo. \square

IV.33. Teorema (Serre). — *L'anello di coomologia $H^*(K_n)$ è un'algebra polinomiale generata dalle classi $Sq^I \iota_n$, per tutte le sequenze ammissibili I con eccesso $e(I) < n$.*

scrivi

IV.34. Teorema. — *Se i non è una potenza di 2... Vedi Lemma di Kummer...*

IV.35. Corollario. — *L'algebra \mathbb{A}_2 è generata (come algebra) dagli Sq^{2^i} .*

Osservazione. — Trovare delle relazioni “abbastanza semplici” in \mathbb{A}_2 come algebra è ancora un problema aperto. Più precisamente, sappiamo che relazioni *additive* ci sono, grazie a Adam, tuttavia prendendo questi generatori Sq^{2^i} ad oggi non si conoscono delle relazioni *moltiplicative* che diano una descrizione soddisfacente.

IV.36. Teorema. — *Se n non è una potenza di 2, allora non esistono in $\pi_{2n-1}(S^n)$ elementi con invariante di Hopf dispari.*

Dimostrazione. Dato $\alpha \in \pi_{2n-1}(S^n)$, consideriamo un rappresentante $f \in \alpha$ e costruiamo lo spazio $Y := D^{2n} \cup_f S^n$. La sua coomologia sarà

$$H^q(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } q = 0, n, 2n; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ma allora

$$H^n(Y) \longrightarrow H^{2n}(Y), \quad \alpha \longmapsto \alpha^2 = Sq^n(\alpha),$$

quindi se n non è una potenza di 2, possiamo scomporre l'operazione di Steenrod come somma

$$Sq^n = \sum_{i+j=n} a_i Sq^i Sq^j(\alpha) \in H^{n+j}(Y) = 0,$$

e quindi abbiamo la tesi. \square

IV.37. Teorema (Borel). — Sia $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ una fibrazione, con base B semplicemente connessa e tale che

- $\overline{H}^*(E) = 0$;
- $\overline{H}^*(F)$ è un anello generato dalle classi di trasgressione $a_i \in H^{m_i}(F)$, con $m_1 \leq m_2 \leq \dots$.
- i monomi $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, con $i_1 < \dots < i_k$, sono una base di $\overline{H}^*(F)$.

Allora $H^*(B)$ è un'algebra polinomiale con generatori $b_i \in H^{m_i+1}(B)$, ciascuno dei quali è ottenuto come immagine di a_i tramite la trasgressione.

Osservazione. — La seconda ipotesi del teorema si ritrova in molti casi, ad esempio quando $H^*(F)$ è un prodotto tensoriale di anelli della forma

- potenza esterna $\Lambda_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[x_1, \dots, x_n]$, con $a_i = x_i$;
- algebra polinomiale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, con $a_i = x_{j_i}^{2^{k_i}}$;
- $\Lambda_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[x]/(x^{2^k})$, con $a_i = x^{2^i}$, per qualche $1 \leq i \leq n-1$.

Osservazione. — Le operazioni di Steenrod mandano elementi trasgressivi in elementi trasgressivi.

IV.38. Teorema. — Per $n \geq 2$, l'anello di coomologia $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è l'anello di polinomi con generatori $Sq^I e_n$, dove $e_n \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è la classe fondamentale dello spazio di Eilenberg-MacLane, e I è un multiindice ammissibile con $e(I) < n$.

Calcoli di alcuni gruppi di omotopia stabile

Ricordando che l'isomorfismo di Freudenthal stabilizza all'aumentare della dimensione delle sfere, ha senso definire i **gruppi di omotopia stabile**

$$\pi_m^s(S^n) := \lim_k \pi_{m+k}(S^{n+k}).$$

Sia n abbastanza grande, in modo tale che $\pi_k(S^n)$ sia stabile per k fissato. Allora consideriamo la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \hookrightarrow \tau_{\geq n+1} S^n \longrightarrow S^n,$$

dove $\tau_{\geq n+1} S^n$ è la sezione di Whitehead che uccide tutti i gruppi di omotopia di grado $\geq n$. Ora che conosciamo la coomologia di $K(\mathbb{Z}, n-1)$, possiamo

considerare la successione spettrale associata alla fibrazione. Vediamo che nella colonna zeresima, tra $n - 1$ e $2n + 1$ troviamo oggetti di rango 1, e in particolare vediamo che e viene mandato in s , il generatore di $H^n(S^n; \mathbb{Z})$. Questo ci permette di calcolare la coomologia $H^{n+k}(K(\mathbb{Z}, n - 1); \mathbb{Z})$, per k abbastanza piccolo (diciamo $k \ll n$). Per studiarlo ulteriormente, possiamo dunque passare alla sezione di Whitehead successiva:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n) & \hookrightarrow & \tau_{\geq n+2}S^n \\ & & \downarrow \\ K(\mathbb{Z}, n - 1) & \hookrightarrow & \tau_{\geq n+1}S^n \\ & & \downarrow \\ & & S^n, \end{array}$$

dove la fibra è $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$ è dovuta al fatto che sappiamo $\pi_4(S^3, *) \simeq \mathbb{Z}/2$, quindi $\pi_4^s(S^3) = \mathbb{Z}/2$. Analizzando la magica successione spettrale, si osserva che i primi gruppi di coomologia non banali sono

$$H^{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H^{n+3}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Queste informazioni non ci permettono di ricavare completamente l'omologia a coefficienti in \mathbb{Z} , ma possiamo dedurre che

$$H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus T, \quad \text{oppure} \quad H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z} \oplus T,$$

dove T è un gruppo con ordine coprimo rispetto a 2. Siccome \mathbb{Z} non è un termine *stabile* nell'omotopia delle sfere, deduciamo che la prima situazione non può accadere. Ci chiediamo quindi chi possa essere s nella potenza del secondo gruppo. Il generatore $w \in H^{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ determina una mappa

$$f : \tau_{\geq n+2}S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2),$$

che possiamo usare per fabbricare una fibrazione

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 1) & \Longleftarrow & K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & PK(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\geq n+2}S^n & \xrightarrow{f} & K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2). \end{array}$$

Dalla successione di omotopia della colonna di sinistra, otteniamo

$$\dots \longrightarrow \pi_q(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1), *) \longrightarrow \pi_q(E, *) \longrightarrow \pi_q(\tau_{\geq n+2}S^n, *) \xrightarrow{\varphi} \pi_{q-1}(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1), *) \longrightarrow$$

dove φ è suriettiva per $q = n+2$ ed è la mappa nulla altrimenti. Ne segue che

$$\pi_q(\tau_{\geq n+2}S^n, *) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } q < n+2; \\ \pi_q(S^n, *), & \text{se } q > n+2; \\ \ker \varphi, & \text{se } q = n+2. \end{cases}$$

Dalla successione spettrale di $E \rightarrow \tau_{\geq n+2}S^n$ si calcola $H_{n+2}(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, e quindi l'omotopia $\pi_{n+2}(E, *)$ deve essere zero oppure un gruppo di ordine dispari. Da questo si conclude che

$$\pi_{n+2}(S^n, *) = H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Con calcoli analoghi si possono ricavare anche i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \pi_5(S^2) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \pi_6(S^3) &= \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \\ \pi_7(S^4) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \\ \pi_{n+3}(S^n) &= \mathbb{Z}/22\mathbb{Z}, \quad \text{per } n \geq 5. \end{aligned}$$

Portare avanti questi calcoli con tecniche elementari diventa sempre più difficile all'aumentare della dimensione delle sfere, e quindi non è molto pratico per attaccare il problema più in generale. Tuttavia, possiamo sviluppare nuove tecniche per il calcolo dell'omotopia stabile.

Successione spettrale di Adams

Sia \mathcal{A} un'algebra associativa, non necessariamente commutativa, su un campo \mathbb{K} . Idealmente, vorremo usare $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ l'algebra di Steenrod. Se M è un \mathcal{A} -modulo destro, riusciamo sempre a fabbricare una risoluzione

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

di \mathcal{A} -moduli destri proiettivi. Dato N un \mathcal{A} -modulo sinistro (risp. destro), possiamo applicare il funtore $-\otimes_{\mathcal{A}} N$ (risp. $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)$) e ottenere così una successione

$$\dots \longrightarrow P_2 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow P_1 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow 0,$$

che in generale *non* è esatta (similmente con Hom). Questo ci permette di definire i funtori

$$\text{Tor}_n^{\mathcal{A}} :=$$

Fissato p primo, poniamo $\mathcal{A} = \mathbb{A}_p$ l'algebra delle operazioni coomologiche modulo p . Per semplicità, consideriamo l'algebra $\mathcal{A} = \mathbb{A}_2$ delle operazioni di Steenrod.

Dato uno spazio Y , l'insieme

$$\pi_n^Y(X) := [\Sigma^n Y, X]_*$$

ha tutta la dignità di essere un gruppo vero e proprio. Il **Teorema di Freudenthal** fornisce anche in questo caso degli isomorfismi di sospensione che stabilizzano, e possiamo dunque definire l'**omotopia stabile**

$$(\pi_k^Y)^s(X) := \lim_n \pi_{k+n}^Y(\Sigma^n X) = [\Sigma^{k+n} Y, \Sigma^n X]_*.$$

Si osservi che per $Y = S^0$ si ottiene la nozione di omotopia stabile vista prima.

Costruiremo una successione spettrale

$$E_r^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s+t}(\overline{H}^*(X), \overline{H}^*(Y)).$$

Sia X uno spazio topologico e consideriamo una risoluzione libera di \mathcal{A} -moduli

$$0 \longleftarrow \overline{H}^*(X) \longleftarrow B_0 \longleftarrow B_1 \longleftarrow \dots$$

Per N abbastanza grande, mostriamo adesso come approssimare il modulo B_i , che è un modulo graduato, con la coomologia di uno spazio topologico *fino al grado* n , cioè

$$\overline{H}^*(X) \simeq \overline{H}^*(\Sigma^N X),$$

a meno di shift di dimensione. Cominciamo prendendo i generatori liberi di B_0 come \mathcal{A} -modulo e siano $\alpha_i \in H^{q_i}(X)$ le loro immagini; ogni generatore ι_{q_i} induce delle mappe

$$\alpha_i : X \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, q_i), \quad \Sigma^n \alpha_i : \Sigma^n X \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, N + q_i).$$

Il vantaggio di aver sospeso N volte è che otteniamo una mappa

$$\Sigma^N X \longrightarrow Y_0 := \prod_i K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, N + q_i),$$

c'è stato un commento sul fatto che la coomologia di questi spazi, purtroppo, non sarà mai libera. Qui trattiamo un po' con le mani una teoria più generale, che è quella degli spettri topologici

dove l' \mathcal{A} -modulo $\overline{H}^*(Y_0)$ adesso è libero nei gradi compresi tra N e $2N$, e inoltre $\overline{H}^q(Y_0) = B_0^q$ per ogni $q < N$. Quindi $X(0) := \Sigma^N X \rightarrow Y_0$ induce una mappa di \mathcal{A} -moduli

$$H^*(Y_0) \longrightarrow H^*(\Sigma^N X)$$

che “coincide” con $B_0 \rightarrow H^*(X)$ in grado $< N$. A meno di passare ai mapping cones, possiamo vedere $X(0) \rightarrow Y_0$ come una fibrazione con fibra $X(1)$, e quindi ne possiamo studiare la successione spettrale.

AAAAA

L'ho perso completamente...

Le mappe verticali della colonna a sinistra

$$\begin{array}{ccc} & \cdots & \\ & \downarrow & \\ & X(2) \longrightarrow Y_2 & \\ & \downarrow & \\ & X(1) \longrightarrow Y_1 & \\ & \downarrow & \\ \Sigma^N X \hookrightarrow X(0) & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

sono inclusioni e possiamo quindi vederle come *fibrazioni*: quindi possiamo sostituire la fibra dell'inclusione $X(n+1) \hookrightarrow X(n)$ con $Z_n := \Omega Y_n$.

Siccome $\overline{H}^* \simeq B_i$ come \mathcal{A} -moduli (a meno di uno shift di $N - i + 1$), fino al grado n , deduciamo allora che anche

$$\overline{H}^*(Z_i) \simeq B_i$$

Non sto capendo bene questi gradi, devo ricontrollare

in dimensione $N - i < q < N - i + n$

Osservazione. — La mappa della risoluzione libera ci dà

$$\overline{H}^*(X(i)) \simeq \ker (B_{i-1} \longrightarrow B_{i-2}) .$$

Analizziamola, ad esempio, per $i = 1$:

$$\overline{H}^*(X(0)) \simeq \ker (B_0 \longrightarrow \overline{H}^*(X))$$

manda i generatori liberi in grado 0 nei generatori di $\overline{H}^*(X)$ in grado 0, quindi il nucleo di questa mappa è *banale in grado 0*: se ne deduce che $X(1)$ è uno spazio

1-connesso. Ripetendo lo stesso ragionamento nei gradi più alti, si deduce che in realtà $X(1)$ è $(N - 1)$ -connesso. Analogamente anche

$$\overline{H}^*(X(i)) \simeq \ker (B_{i-1} \longrightarrow B_{i-2}) .$$

ha $\ker^j = 0$ per $j \leq i - 1$, e shiftando la dimensione opportunamente si vede che $H^{N-1}(X(i)) = 0$.

Coppie esatte

Supponiamo di avere D, E due R -moduli (in particolare ci interesseranno *bigraduali*), e un triangolo commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow k & \nearrow j \\ & E & \end{array}$$

che è esatto in ogni punto.

Definizione. — Definiamo il dato $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ una **coppia esatta**.

Osservazione. — Se definiamo $d = j \circ k$ (attenzione, *non* $j \circ i \circ k$), allora otteniamo un differenziale in E poiché

$$d^2 = j \circ k \circ j \circ k = 0 .$$

Definizione. — Data una coppia esatta $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$, pongo $d = j \circ k$, $D' := i(D) = \ker j$ e di conseguenza

$$\begin{aligned} E' &= H(E, d), \quad j' : D' \rightarrow E', \\ i' &= i|_{D'} : D' \rightarrow D, \quad \dots \end{aligned}$$

Allora il dato $\mathcal{C}' = (D', E', i', j', k')$ si chiama **coppia derivata** di \mathcal{C} .

IV.39. Proposizione. — *La coppia derivata di una coppia esatta è a sua volta una coppia esatta.*

Le coppie esatte ci permettono di produrre successioni spettrali, proprio come succedeva nella situazione dei moduli graduati filtrati.

IV.40. Teorema. — *Dati due R -moduli bigraduati $D^{*,*} = \{D^{p,q}\}$ e $E^{*,*} = \{E^{p,q}\}$, con morfismi²*

$$\begin{aligned} i : D &\longrightarrow D, & \text{di grado } (-1, -1), \\ j : D &\longrightarrow E, & \text{di grado } (0, 0), \\ k : E &\longrightarrow D, & \text{di grado } (0, 1), \end{aligned}$$

allora $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ è una coppia esatta.

IV.41. Teorema. — *I dati $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ di una coppia esatta come nel Teorema precedente determinano una successione spettrale di tipo coomologico $\{E_r, d_r\}_{r \geq 1}$, con*

$$E_r = (E^{*,*})^{r-1}, \quad d_r = j^{r-1} \circ k^{r-1}.$$

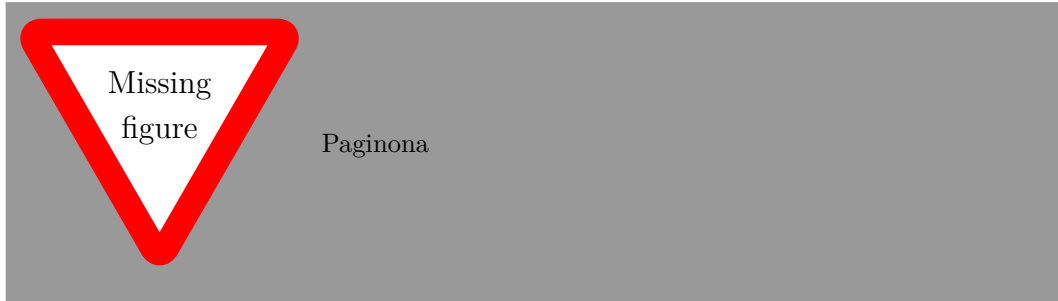
copiali

IV.42. Proposizione. — *Descrizione della ss, con mille indici.*

$$\begin{aligned} Z_r^{p,*} &= k^{-1} \left(\text{im } i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*} \right), \\ B_r^{p,*} &= j \left(\text{ker } \left(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*} \right) \right), \\ E_r^{p,*} &= Z_r^{p,*} / B_r^{p,*}. \end{aligned}$$

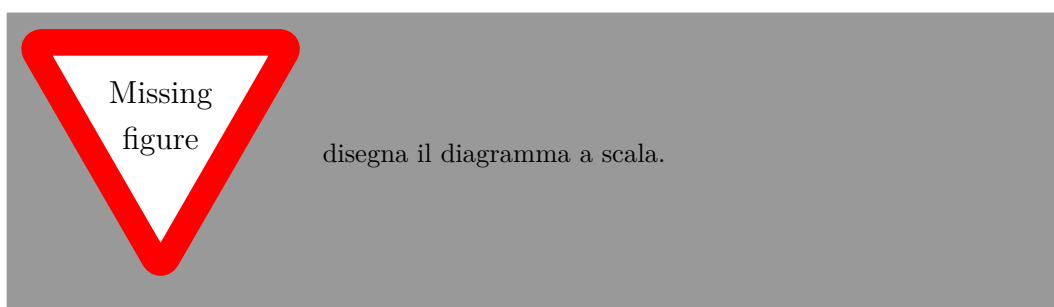
...

Quindi “srotolando” le definizioni otteniamo un diagramma

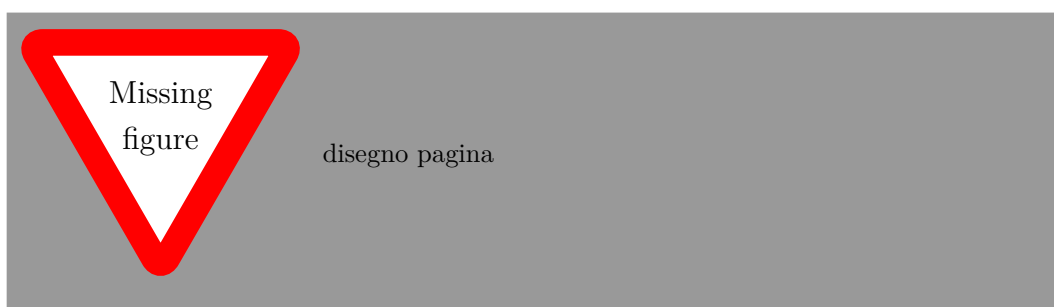


dove la successione

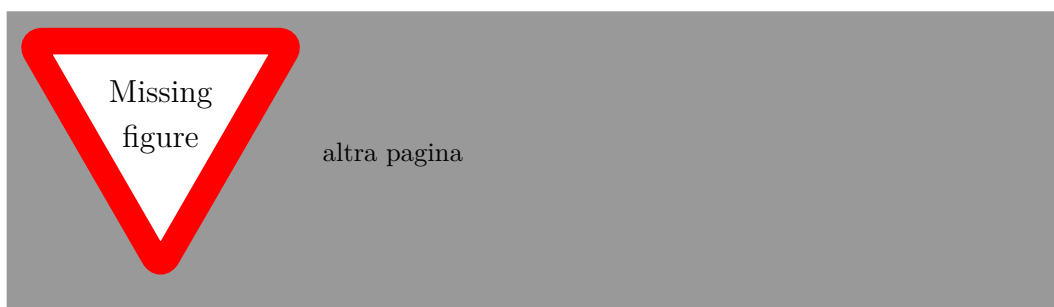
²In letteratura si trovano tante convenzioni diverse per i gradi di questi morfismi: la differenza fondamentale sta nel segno ± 1 .



è una successione **esatta**. Chiamiamo questa sequenza **diagramma a scala**.
 Notiamo che derivando la coppia, otteniamo una mappa j' che sale in diagonale:



Ma possiamo continuare a derivare: infatti, derivando una seconda volta otteniamo una mappa j'' che sale in diagonale con questa pendenza:



Applichiamo quindi questa costruzione ai moduli

$$D^{t,s} = \pi_{N+t-s}(X(s)) \ , \quad E^{t,s} = \pi_{N+t-s}(Y_s) \ ,$$

e otteniamo la successione esatta di omotopia della **torre di Adams**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{N+t-s+1}(X(s)) & & \dots & & \pi_{N+t-s}(X(s)) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s}(Y_{s+1}) \rightarrow \pi_{N+t-s-1}(X(s+1)) \\
 \downarrow & & & & \vdots & & \vdots \\
 \pi_{N+t-s+1}(X(s-1)) \rightarrow \pi_{N+t-s+1}(Y_{s-1}) & \longrightarrow & \pi_{N+t-s}(X(s)) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s}(Y_s) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s-1}(X(s+1)) \\
 \vdots & & \vdots & & \downarrow & & \vdots \\
 & & \pi_{N+t-s}(X(s-1)) \rightarrow \pi_{N+t-s}(Y_{s-1}) & \longrightarrow & \pi_{N+t-s-1}(X(s)) & &
 \end{array}$$

dove le frecce continue sono un pezzo della successione esatta descritta dal teorema.

IV.43. Proposizione. — *Consideriamo le seguenti condizioni:*

- (i) *se per ogni n , la mappa $i : D^{n+p,p} \rightarrow D^{n+p-1,p-1}$ è un isomorfismo, tranne al più per un numero finito di p (equivalentemente, $E^{n+p,p} \neq 0$ solo per una quantità finita di p), allora $D^{n+p,p}$ stabilizza per $p \rightarrow +\infty$ a un modulo $D^{n+\infty,+\infty}$ e per $n \rightarrow -\infty$ stabilizza a $D^{n-\infty,-\infty}$;*
- (ii) *per ogni n , $D^{n+p,p}$ è definitivamente nullo per $p \rightarrow +\infty$;*
- (iii) *per ogni n , $D^{n+p,p}$ è definitivamente nullo per $p \rightarrow -\infty$.*

Allora:

1. *se valgono (i) e (ii), $E_{\infty}^{n+p,p}$ è isomorfo a*

$$F_n^p / F_n^{p-1},$$

con $F_n^p := \text{im}(D^{n+p,p} \rightarrow D^{n-\infty,-\infty})$, per cui si ha una filtrazione $\dots \subset F_n^p \subset F_n^{p-1} \subset \dots \subset D^{n-\infty,-\infty}$.

2. *Se valgono (i) e (iii), abbiamo una filtrazione*

$$\dots \subset G_{n-1}^p \subset G_{n-1}^{p-1} \subset \dots \subset D^{n-1+\infty,+\infty},$$

data da $G_{n-1}^p = \ker(D^{n-1+\infty,+\infty} \rightarrow D^{n-1+p,p})$, e allora vale

$$E_{\infty}^{n+p,p} \simeq G_{n-1}^p / G_{n-1}^{p-1}.$$

Osservazione. — ...

References

- [Bro10] Kenneth Brown. «Lectures on the Cohomology of Groups». In: Adv. Lect. Math. (ALM) (set. 2010). URL: <https://pi.math.cornell.edu/~kbrown/publications.html>.
- [Die08] T. Dieck. *Algebraic Topology*. EMS textbooks in mathematics. European Mathematical Society, 2008. ISBN: 9783037190487. URL: <https://books.google.it/books?id=ruSqmb7LW0cC>.
- [Fri21] Greg Friedman. *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*. 2021.
- [Hat00] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Hat03] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. Algebraic Topology. 2003. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>.
- [May75] J.P. May. *Classifying Spaces and Fibrations*. American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1975. URL: <http://www.math.uchicago.edu/~may/BOOKSMaster.html>.
- [McC00] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. 2^a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2000. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/papers.html>.
- [MS74] J.W. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/milnstas.pdf>.
- [Spa89] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics. Springer, 1989. ISBN: 9780387944265. URL: <https://books.google.it/books?id=h-wc3TnZMCcC>.

REFERENCES

- [Ste51] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles. (PMS-14)*. Princeton University Press, 1951. ISBN: 9780691005485. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpm9t5>.