

Appunti del corso di

Topologia Algebrica A

Docente
Filippo Gianluca Callegaro

Appunti scritti da
Filippo Papallo

Semestre estivo 2022/23
Università di Pisa

Questo documento contiene le note delle lezioni di *Topologia Algebrica A*, corso tenuto dai professori **Filippo Gianluca Callegaro** e **Mario Salvetti** nel secondo semestre dell'a.a. 2022/23.

Spero di riuscire ad aggiornare continuamente i file delle lezioni, che potete trovare sulla [mia pagina GitHub](#); eventuali correzioni o suggerimenti sono ben accetti e potete intervenire direttamente su GitHub, oppure scrivermi alla mail universitaria f.papallo@studenti.unipi.it.

Ultimo aggiornamento: 5 novembre 2025

Indice

Lista delle Lezioni	iv
I. Successioni spettrali	1
Applicazioni delle successioni spettrali	12
Successioni spettrali di Serre	21
Confronto di successioni spettrali	27
Classi di Serre	33
Sospensione	44
Operazioni di Steenrod	47
Calcoli di alcuni gruppi di omotopia stabile	55
Successione spettrale di Adams	57
Coppie esatte	60
References	64

Lista delle Lezioni

Lezione 1 (17th aprile, 2023)	8
Dimostrazione del teorema sull'esistenza della successione spettrale associata ad un complesso filtrato. Applicazione delle successioni spettrali.	
Lezione 2 (18th aprile, 2023)	19
Successione spettrale e successione della coppia. Fibrati di Serre e teorema sulla successione spettrale di omologia associata ad un fibrato di Serre. Applicazione al calcolo dell'omologia di alcuni gruppi $SU(n)$. Applicazione al calcolo di alcuni gruppi di omologia dello spazio dei loop su uno spazio X n -connesso.	
Lezione 3 (24th aprile, 2023)	25
Omologia dello spazio dei loop su una sfera. Successione spettrale come funtore e teorema di confronto di successioni spettrali. Due dimostrazioni del teorema di successione spettrale di Serre.	
Lezione 4 (2nd maggio, 2023)	31
Successione spettrale di Serre di coomologia e proprietà moltiplicative. Applicazione al calcolo degli anelli di coomologia di $SU(n)$, \mathbb{CP}^n e ΩS^n . Descrizione della riga 0 e della colonna 0 della pagina E_2 della successione spettrale di Serre: identificazione con l'omologia della base e della fibra.	
Lezione 5 (8th maggio, 2023)	31
Descrizione della mappa di trasgressione nella successione spettrale di Serre. Classi di Serre di gruppi abeliani, anelli e ideali di Serre, anelli aciclici. Esempi. Verifica dell'aciclicità di alcune classi. Classi di Serre e successione spettrale di Serre. Enunciato del teorema di Hurewicz modulo classi di Serre.	
Lezione 6 (15th maggio, 2023)	43
Lez.19.	

LISTA DELLE LEZIONI

Lezione 7 (16th maggio, 2023)

49

Lez.20.

CAPITOLO I.

Successioni spettrali

I

La teoria delle successioni spettrali ha lo scopo di fornire uno strumento per calcolare H^* un R -modulo graduato, H^* una k -algebra graduata... Spesso l' H^* che vogliamo studiare è la coomologia di un complesso di cocatene: una *successione spettrale* ci permette di calcolare la coomologia del complesso “affettandolo” attraverso delle *filtrazioni*, le quali ci permetteranno di studiare il complesso come se fosse un *libro*: infatti, otterremo tanti bicompleksi chiamati *pagine* e ognuna di queste pagine produrrà un nuovo complesso, ciascuno dotato di un nuovo differenziale che ci sposta “in su” di una diagonale. Se la situazione è favorevole, i differenziali produrranno definitivamente (co)omologia banale, e la successione delle pagine si *stabilizza*.

Sia (C_\bullet, d) un complesso di catene. Ricordiamo che la sua omologia in grado i è il quoziente $H_i(C_\bullet) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$. In presenza di un complesso di cocatene (C^\bullet, d) usiamo invece la notazione *crescente*, e quindi la sua coomologia in grado i è $H^i(C^\bullet) = \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$.

Definizione. — Dato un R -modulo A , una famiglia di sottomoduli totalmente ordinata per inclusione si chiama

- una **filtrazione decrescente** se

$$F^\bullet A : \quad \dots \subset F^{p+1}A \subset F^p A \subset F^{p-1}A \subset \dots$$

- una **filtrazione crescente** se

$$F_\bullet A : \quad \dots \subset F_{p-1}A \subset F_p A \subset F_{p+1}A \subset \dots$$

Esempio. — Una filtrazione decrescente F^\bullet sul gruppo abeliano $A = \mathbb{Z}$ è data da $F^i A = \mathbb{Z}$ per $i \leq 0$ e $F^i A = 2^i \mathbb{Z}$ per $i > 0$, cioè:

$$0 \subset \dots \subset 16\mathbb{Z} \subset 8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}.$$

Definizione. — Diciamo che un **complesso** di catene (C_\bullet, d) è **filtrato** se è un R -modulo $C = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ filtrato F_\bullet tale che il differenziale sia compatibile rispetto alla filtrazione: nel caso di una filtrazione F^\bullet decrescente, richiediamo che per ogni $i \in \mathbb{Z}$ valga $d(F^i C) \subset F^i C$. In maniera analoga, possiamo definire un complesso di cocatene filtrato, dotato di una filtrazione crescente F_\bullet , oppure decrescente F^\bullet .

Notiamo che, se (C_\bullet, d) è un complesso filtrato da F_\bullet , allora i sottomoduli $F_p C_\bullet = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F_p C_j$ ereditano una naturale struttura di complesso di catene una volta che restringiamo il differenziale:

$$d|_{F_p C_\bullet} : F_p C_j \longrightarrow F_p C_{j-1}.$$

Definizione. — Dato (A, F) un R -modulo filtrato, il suo **modulo graduato associato** è

- l' R -modulo $E^0(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_p^0(A)$, dove

$$E_p^0(A) := F_p A / F_{p-1} A$$

se F_\bullet è crescente;

- l' R -modulo $E_0(A) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} E_0^p(A)$, dove

$$E_0^p(A) := F^p A / F^{p+1} A$$

se F^\bullet è decrescente.

Esempio. — Consideriamo la filtrazione $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ sul gruppo abeliano \mathbb{Z} . Lo \mathbb{Z} -modulo graduato associato alla filtrazione è $E^0(\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$; si osservi che non è isomorfo a \mathbb{Z} .

Osservazione. — In generale, anche se la filtrazione F^\bullet è *limitata*, cioè

$$0 = F^{m+n+1} A \subsetneq F^{m+n} A \subset \cdots \subset F^m A = A,$$

il modulo $E_0^p(A)$ non determina il modulo A : questo fatto è conosciuto come il **problema di estensione**. Infatti, si potrebbe pensare di ricostruire A “*grado per grado*” a partire da $F^{n+m} A \simeq E_0^{n+m}(A)$ e poi considerando le successioni esatte corte

$$0 \longrightarrow F^{i+1} A \longrightarrow F^i A \longrightarrow E_0^i(A) \longrightarrow 0.$$

CAPITOLO I. SUCCESSIONI SPETTRALI

Il problema è che in generale il termine $F^i A$ *non* è univocamente determinato: si pensi ad esempio

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

dove A può essere $\mathbb{Z}/4$ oppure $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Esempio. — Sia X un CW complesso e indichiamo con $X^{(p)}$ il suo p -scheletro. Il complesso $C_\bullet(X)$ delle catene singolari di X ammette la filtrazione crescente $F_p C_\bullet := C_\bullet(X^{(p)})$. Passando alle cocatene, invece, il complesso $C^\bullet(X) = \text{Hom}_R(C_\bullet(X), R)$ ammette la filtrazione decrescente

$$F^p C^\bullet := \{ \varphi \in C^\bullet(X) \mid F_{p-1} C_\bullet \subset \ker \varphi \} = \text{Ann}(F_{p-1} C_\bullet).$$

I moduli graduati associati corrispondono alle (co)catene relative agli scheletri di dimensioni successive: più precisamente, dalla filtrazione crescente $F_p C_\bullet$ sulle catene singolari si ottiene il **complesso delle catene cellulari**, infatti in grado p si ha

$$E_p^0(C_\bullet) = C_\bullet(X^{(p)}) / C_\bullet(X^{(p-1)}) = C_\bullet(X^{(p)}, X^{(p-1)}),$$

mentre sulle cocatene si ha

$$\begin{aligned} E_0^p(C^\bullet) &= \text{Ann}(F_{p-1} C_\bullet) / \text{Ann}(F_p C_\bullet) \\ &= \{ \varphi \in C^\bullet(X^{(p)}) \mid C_\bullet(X^{(p-1)}) \subset \ker \varphi \} = C^\bullet(X^{(p)}, X^{(p-1)}). \end{aligned}$$

Definizione. — Data una mappa di complessi $f : D_\bullet \rightarrow C_\bullet$ e una filtrazione F_\bullet su C_\bullet , allora definiamo una **filtrazione G_\bullet indotta** sul modulo D_\bullet da

$$G_p D_\bullet = f^{-1}(F_p C_\bullet).$$

Osservazione. — Se (C_\bullet, d) è un complesso di catene con una filtrazione crescente F_\bullet , allora anche l'omologia $H_*(C_\bullet)$ è un modulo filtrato, dove

$$F_p H_*(C_\bullet) := \text{im}(H_*(F_p C_\bullet) \rightarrow H_*(C_\bullet))$$

determina una filtrazione crescente su H_* . In maniera duale, dato un complesso di cocatene (C^\bullet, d) con una filtrazione F decrescente, allora anche la sua coomologia $H^*(C^\bullet)$ è un modulo filtrato in maniera naturale, dove la filtrazione decrescente è data da

$$F^p H^*(C^\bullet) := \ker(H^*(C^\bullet) \rightarrow H^*(F^{p-1} C^\bullet)).$$

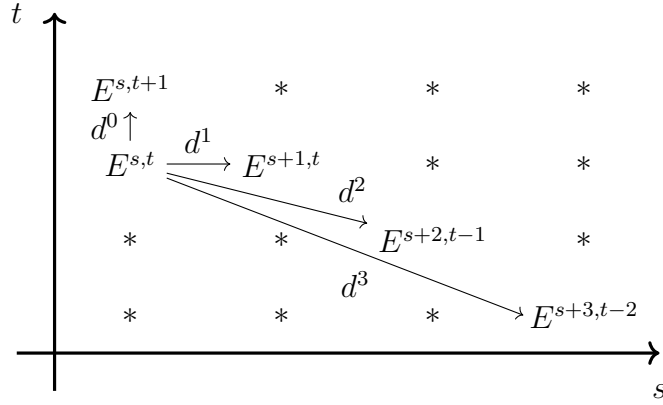


Figura I.1.: I primi differenziali di bigrado $(r, 1 - r)$ in un bimodulo con notazione coomologica.

Definizione. — Un **modulo bigraduato** $E_{\bullet,\bullet}$ (indicato con $E^{\bullet,\bullet}$ se usiamo la notazione coomologica) è una somma diretta di R -moduli, i cui gradi sono definiti da due interi $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$. Un tale modulo E si dice **differenziale** se c'è una mappa $d : E \rightarrow E$, tale che $d^2 = 0$ e abbia:

- **bigrado** $(-r, r - 1)$, cioè il differenziale in grado (s, t) è

$$d_{s,t} : E_{s,t} \rightarrow E_{s-r,t+r-1} ;$$

- oppure **bigrado** $(r, -r + 1)$, cioè il differenziale in grado (s, t) è

$$d^{s,t} : E^{s,t} \rightarrow E^{s+r,t-r+1} .$$

Nel primo caso il differenziale ci fa “scendere” di diagonale nel bimodulo, nel secondo caso “saliamo” sulla diagonale superiore, come rappresentato in Figura I.1.

Osservazione. — Un modulo bigraduato $E_{\bullet,\bullet}$ dà origine ad un complesso di catene

$$K_n := \bigoplus_{s+t=n} E_{s,t} ,$$

e in maniera duale, se il modulo ha la convenzione coomologica $E^{\bullet,\bullet}$, allora dà origine a un complesso di cocatene K^\bullet .

Dato un modulo bigraduato $(E_{\bullet,\bullet}, d)$, dato che $d^2 = 0$, possiamo calcolare la sua omologia (p, q) -esima come il quoziente

$$H_{p,q}(E_{\bullet,\bullet}, d) := \frac{\ker(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1})}{\operatorname{im}(d : E_{p+r,q-r+1} \rightarrow E_{p,q})} ,$$

e la stessa cosa accade per la coomologia di $E^{\bullet,\bullet}$.

Definizione. — Una **successione spettrale** di tipo **omologico** è una collezione di R -moduli differenziali bigraduati $\{ (E_{\bullet,\bullet}^r, d^r) \}_{r \geq k}$, con d^r di bigrado $(-r, r-1)$ tale che

$$E_{p,q}^{r+1} \simeq H_{p,q}(E_{\bullet,\bullet}^r, d^r) .$$

Analogamente, una **successione spettrale** di tipo **coomologico** è una collezione di R -moduli differenziali bigraduati $\{ (E_r^{\bullet,\bullet}, d_r) \}_{r \geq k}$, con d_r di bigrado $(r, -r+1)$ tale che

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r) .$$

D'ora in avanti enunceremo definizioni e teoremi per uno solo dei due tipi (per lo più il caso coomologico), ma è bene tenere a mente che le costruzioni valgono in maniera analoga per entrambe le situazioni.

Osservazione. — Per definizione, la pagina r -esima $(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$ determina $E_{r+1}^{p,q}$, ma in generale *non* determina il differenziale d_{r+1} della pagina successiva.

Una successione spettrale va pensata come una successione di pagine, proprio come in un libro; in quanto tale, vorremmo conoscere il suo comportamento “alla fine”, ovvero studiare il suo *limite*. Per ogni $r \geq k$, indichiamo con $Z_r = \ker d_r$ i **cocicli** e con $B_r = \operatorname{im} d_r$ i **cobordi** del differenziale; dato che $E_{r+1} = Z_r/B_r$, possiamo vedere il differenziale $(r+1)$ -esimo come un omomorfismo $d_{r+1} : Z_r/B_r \rightarrow Z_r/B_r$ e quindi considerare i suoi cocicli Z_{r+1} come un (*quoziente di un*) sottomodulo di Z_r che contiene i cobordi r -esimi, e lo stesso vale per B_{r+1} , quindi

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r .$$

Reiterando questo ragionamento per tutte le pagine, si ottiene la catena di inclusioni

$$B_k \subset B_{k+1} \subset B_{k+2} \subset \cdots \subset Z_{k+2} \subset Z_{k+1} \subset Z_k .$$

Definizione. — Usando la convenzione sopra, poniamo $B_\infty := \cup_i B_i$ e $Z_\infty := \cap_i Z_i$. Definiamo il **limite della successione spettrale** come il quoziente

$$E_\infty := Z_\infty / B_\infty .$$

Dalla definizione schietta è pressoché impossibile calcolare il limite di una successione spettrale: di solito speriamo che le cose vadano particolarmente bene e quindi riuscire a aggirare questo problema di calcolo. Introduciamo così una nozione di *convergenza*.

Definizione. — Sia H^* un R -modulo graduato. Una successione spettrale $\{(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)\}_{r \geq k}$ si dice **convergente a H^*** se esiste una filtrazione F^\bullet su H^* tale che

$$E_\infty^{p,q} \simeq E_0^p(H^{p+q}).$$

Osservazione. — L'idea di *convergenza* di una successione spettrale è che la *digaonale* $p + q = n$ dell'elemento limite vada a “approssimare” il sottomodulo H^n tramite un modulo graduato associato.

Sotto opportune ipotesi, possiamo trovare delle situazioni dove il limite è più “addomesticabile”, ad esempio quando ogni bicomplesso $E_r^{\bullet,\bullet}$ vive nel primo quadrante, cioè $E_r^{p,q} \neq 0$ solo per $p, q \geq 0$. Allora i differenziali d_r sono *definitivamente nulli*, quindi la successione spettrale converge in un senso più forte: si dice che la successione **stabilizza** se, per ogni (p, q) , esiste un intero $r(p, q)$ tale che, i differenziali $d_r^{p,q} = 0$ e $d_r^{p-r, q+r-1} = 0$ per ogni $r \geq r(p, q)$. Da questo segue che $E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}$, da cui deduciamo che se la successione in (p, q) stabilizza, allora

$$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = E_{r+2}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}.$$

Definizione. — Diremo che una successione spettrale **collassa** alla pagina N se $d_r = 0$ per ogni $r \geq N$.

Definizione. — Una filtrazione si dice **convergente** se $\cup_s F_s A = A$ e $\cap_s F_s A = \{0\}$. Una filtrazione su un R -modulo graduato A si dice

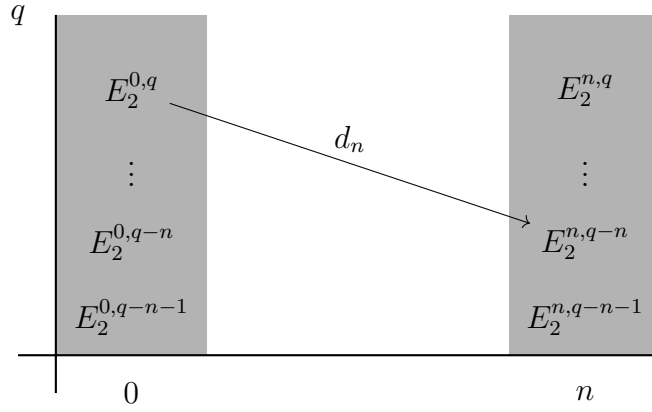
- **limitata dall'alto** se per ogni grado $t \in \mathbb{Z}$, esiste un termine della filtrazione $s(t) \in \mathbb{Z}$ tale che $F_{s(t)} A_t = A_t$;
- **limitata dal basso** se per ogni $t \in \mathbb{Z}$, esiste $u(t) \in \mathbb{Z}$ tale che $F_{u(t)} A_t = 0$.

Esempio. — Prima di approfondire ulteriormente la teoria dietro alle successioni spettrali, possiamo cominciare a acquisire familiarità con queste tecniche dimostrando il seguente

I.1. Teorema (Successione di Wang). — Sia $\{(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)\}_{r \geq 2}$ una successione spettrale nel primo quadrante, tale che per ogni $p \neq 0, n$ si abbia $E_2^{p,q} = 0$. Se la successione converge a H^* , allora esiste una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H^k \longrightarrow E_2^{0,k} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,k-n+1} \longrightarrow H^{k+1} \longrightarrow \dots$$

Dimostrazione. La pagina $E_2^{\bullet,\bullet}$ è concentrata nella 0-esima e nella n -esima colonna, come mostrato in [Figura I.2](#). Si deduce immediatamente che i differenziali della successione sono tutti nulli, fatta eccezione di d_n .


 Figura I.2.: Pagina $E_2^{\bullet,\bullet}$ come nelle ipotesi del [Teorema I.1](#).

La successione spettrale collassa alla pagina $n + 1$ e si può dedurre che il limite è

$$E_\infty^{0,q} \simeq \ker \left(d_n : E_2^{0,q} \rightarrow E_2^{n,q-n+1} \right), \quad E_\infty^{n,q} \simeq \operatorname{coker} \left(d_n : E_2^{0,n+q-1} \rightarrow E_2^{n,q} \right),$$

quindi per ogni $q \in \mathbb{Z}$ abbiamo la successione esatta

$$\mathbf{0} \longrightarrow E_\infty^{0,q} \longrightarrow E_2^{0,q} \xrightarrow{d_n} E_2^{n,q-n+1} \longrightarrow E_\infty^{n,q-n+1} \longrightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{A})$$

D'altra parte, l'ipotesi che $E_r^{\bullet,\bullet}$ converge a H^* ci permette di dedurre informazioni sulla filtrazione F che c'è su questo modulo: infatti, dato che per $p \neq 0, n$ si ha

$$\mathbf{0} \simeq E_\infty^{p,q} \simeq \frac{F^p H^{p+q}}{F^{p+1} H^{p+q}},$$

deduciamo che la filtrazione su H^* ha al più due termini: per ogni $k \in \mathbb{Z}$, studiando gli elementi della forma $E_\infty^{p,k-p}$ si vede che

$$H^k = F^0 H^k \supset F^1 H^k = F^2 H^k = \dots = F^n H^k \supset F^{n+1} H^k = \mathbf{0}.$$

Da questo si deduce che $E_\infty^{0,k} \simeq F^0 H^k / F^n H^k \simeq H^k / E_\infty^{n,k-n}$ e quindi esiste una successione esatta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow E_\infty^{n,k-n} \longrightarrow H^k \longrightarrow E_\infty^{0,k} \longrightarrow \mathbf{0}. \quad (\text{B})$$

“Incollando” le (A) con le (B), otteniamo la **successione di Wang**, tratteggiata nel diagramma sottostante:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & E_{\infty}^{n,k-n} & \longrightarrow & \mathbf{0} & & \\
 & \searrow & \downarrow & & & & \\
 & & H^k & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & E_{\infty}^{0,k} & \longrightarrow & E_2^{0,k} & \xrightarrow{d_n} & E_2^{n,k-n+1} \longrightarrow E_{\infty}^{n,q-n+1} \longrightarrow \mathbf{0} \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \mathbf{0} & & & & H^{k+1} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathbf{0} \longrightarrow E_{\infty}^{0,k+1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \mathbf{0}
 \end{array}$$

□

LEZIONE 1
17th apr., 2023

Dato un complesso di catene *filtrato* e *graduato* (A, d, f) , questo determina in maniera naturale una successione spettrale: una volta capito il “modo giusto” per mettere d’accordo il grado (co)omologico e il grado della filtrazione, il seguente **Teorema** fornisce un macchinario per costruire successioni spettrali.

I.2. Teorema. — *Un complesso di catene graduato e filtrato (A, d, F) determina una successione spettrale $\{ (E_{\bullet, \bullet}^r, d^r) \mid r = 1, 2, \dots \}$, con d^r di bigrado $(-r, r-1)$, tale che*

$$E_{s,t}^1 = H_{s+t}(F_s A / F_{s-1} A)$$

e il differenziale d^1 è l’**omomorfismo di connessione** della tripla $(F_s A, F_{s-1} A, F_{s-2} A)$. Se la filtrazione F è convergente e limitata sia dal basso, sia dall’alto, allora la successione spettrale stabilizza. Inoltre, il limite è

$$E_{p,q}^{\infty} \simeq \frac{F_p H_{p+q}(A, d)}{F_{p-1} H_{p+q}(A, d)}.$$

Osservazione. — Ricordiamo che cosa si intende con **omomorfismo di connessione** della tripla $(F_s A, F_{s-1} A, F_{s-2} A)$: dato che i moduli graduati $F_s A$ sono dotati di un differenziale, possono essere considerati come complessi di catene, quindi la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \frac{F_{s-1} A}{F_{s-2} A} \longrightarrow \frac{F_s A}{F_{s-2} A} \longrightarrow \frac{F_s A}{F_{s-1} A} \longrightarrow 0$$

induce la successione esatta lunga in omologia

$$\dots \longrightarrow H_i \left(\frac{F_s A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow H_i \left(\frac{F_s A}{F_{s-1} A} \right) \xrightarrow{\partial} H_{i-1} \left(\frac{F_{s-1} A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow H_{i-1} \left(\frac{F_s A}{F_{s-2} A} \right) \longrightarrow \dots$$

per il **Lemma del Serpente**. La mappa $\partial : H_i(F_s A/F_{s-1} A) \rightarrow H_{i-1}(F_{s-1} A/F_{s-2} A)$ nella successione sopra è detto **omomorfismo di connessione**.

Osservazione. — L'enunciato del [Teorema I.2](#) può essere adattato a *complessi di cocatene*, i quali determinano una successione spettrale in **coomologia**.

Dimostrazione del Teorema I.2. Partendo dal differenziale d del complesso A , che ha grado -1 , l'idea della costruzione consiste nel definire opportuni sotto-moduli $Z_{s,t}^r$ di A in modo tale che, restringendo il differenziale d a $Z_{s,t}^r$, questo sia obbligato ad avere immagine in $Z_{s-r,t+r-1}^r$. Dopodiché si verifica che queste definizioni producono una successione spettrale in cui valgono gli isomorfismi enunciati.

Ricordiamo che su A abbiamo una filtrazione crescente

$$\dots \subset F_{s-1} A \subset F_s A \subset F_{s+1} A \subset \dots$$

Poniamo

$$Z_{s,t}^r = \{ c \in F_s A_{s+t} \mid dc \in F_{s-r} A_{s+t-1} \} = F_s A_{s+t} \cap d^{-1}(F_{s-r} A_{s+t-1}),$$

il modulo degli elementi di $F_s A_{s+t}$ che hanno bordo in $F_{s-r} A_{s+t-1}$ (si noti che è l'apice in alto a farci capire di quanto shifta il grado della filtrazione). Invece, gli elementi di $F_s A_{s+t}$ che non hanno bordo saranno denotati con

$$Z_{s,t}^\infty := \{ c \in F_s A_{s+t} \mid dc = 0 \} = \ker d \cap F_s A_{s+t}.$$

Per definire l'elemento $E_{s,t}^r$ della successione spettrale, in $Z_{s,t}^r$ eliminiamo sia gli elementi che sono bordi di qualche modulo $(r-1)$ -esimo, sia quegli elementi di Z^{r-1} che vengono mandati in $F_{s-r} A_{s+t-1}$ dal differenziale: più precisamente, notiamo che

$$c \in Z_{s+r-1,t-r+2}^{r-1} \implies dc \in F_s A_{s+t}$$

CAPITOLO I. SUCCESSIONI SPETTRALI

e in particolare $dc \in Z_{s,t}^r$ dato che $d^2 = 0$, e anche

$$c \in Z_{s-1,t+1}^{r-1} \implies c \in F_{s-1}A_{s+t} \subset F_sA_{s+t} \text{ e inoltre } dc \in F_{s-r}A_{s+t-1}.$$

Si definisce quindi

$$E_{s,t}^r := Z_{s,t}^r / (Z_{s-1,t+1}^{r-1} + dZ_{s+r-1,t-r+2}^{r-1})$$

e analogamente il termine “*limite*”

$$E_{s,t}^\infty := Z_{s,t}^\infty / (Z_{s-1,t+1}^\infty + (dA_{s+t+1} \cap F_sA_{s+t})) .$$

In questo modo il differenziale $d : Z_{s,t}^r \rightarrow Z_{s-r,t+r-1}^r$ ha bigrado $(-r, r-1)$ e per costruzione induce

$$d^r : E_{s,t}^r \longrightarrow E_{s-r,t+r-1}^r .$$

Calcoliamo i primi passaggi per capire cosa succede: per ogni $r \geq 0$, dato che F è una filtrazione crescente, si ha

$$Z_{s,t}^{-r} = \{ c \in F_sA_{s+t} \mid dc \in F_{s+r}A_{s+t-1} \} = F_sA_{s+t} ,$$

dunque la 0-esima pagina della successione spettrale è data da

$$E_{s,t}^0 = F_sA_{s+t} / F_{s-1}A_{s+t} , \quad d^0 : F_sA_{s+t} / F_{s-1}A_{s+t} \longrightarrow F_sA_{s+t-1} / F_{s-1}A_{s+t-1} ,$$

dove il differenziale è indotto da d . La prima pagina è stata definita come

$$E_{s,t}^1 = Z_{s,t}^1 / (Z_{s-1,t+1}^0 + dZ_{s,t+1}^0) = Z_{s,t}^1 / (F_{s-1}A_{s+t} + dF_sA_{s+t+1}) ;$$

notiamo che $Z_{s,t}^1 / Z_{s-1,t+1}^0$ sono i *cicli* di $F_sA_{s+t} / F_{s-1}A_{s+t}$, mentre $(Z_{s-1,t+1}^0 + dZ_{s,t+1}^0) / Z_{s-1,t+1}^0$ sono i *bordi* di $F_sA_{s+t} / F_{s-1}A_{s+t}$. Ne segue che l'inclusione $Z_{s,t}^1 \rightarrow F_sA_{s+t}$ induce un isomorfismo

$$E_{s,t}^1 \simeq H_{s+t}(F_sA / F_{s-1}A) ,$$

e il differenziale indotto da d è l'omomorfismo di connessione della tripla $(F_sA, F_{s-1}A, F_{s-2}A)$: infatti, le due righe centrali del diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z_{s,t}^1 & \hookrightarrow & F_sA_{s+t} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_{s-1}A_{s+t}}{F_{s-2}A_{s+t}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t}}{F_{s-2}A_{s+t}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t}}{F_{s-1}A_{s+t}} \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow d & & & \\
 0 & \longrightarrow & \frac{F_{s-1}A_{s+t-1}}{F_{s-2}A_{s+t-1}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t-1}}{F_{s-2}A_{s+t-1}} & \longrightarrow & \frac{F_sA_{s+t-1}}{F_{s-1}A_{s+t-1}} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & F_{s-1}A_{s+t} & \longleftarrow & Z_{s-1,t}^1 & &
 \end{array}$$

inducono l'omomorfismo di connessione, il quale commuta con gli isomorfismi che collegano il diagramma con $d : Z_{s,t}^1 \rightarrow Z_{s-1,t}^1$.

Ora verifichiamo che $H_*(E^r) = E^{r+1}$: per non appesantire la notazione, sopprimiamo il grado omologico t . I *cicli* sono dati da

$$\begin{aligned} \ker(d^r : E_s^r \longrightarrow E_{s-r}^r) &= \frac{\left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in Z_{s-r-1}^{r-1} + dZ_{s-1}^{r-1} \right\}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{\left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in Z_{s-r-1}^{r-1} \right\} + \left\{ c \in Z_s^r \mid dc \in dZ_{s-1}^{r-1} \right\}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}}, \end{aligned}$$

mentre i *bordi* sono

$$\operatorname{im}(d^r : E_{s+r}^r \longrightarrow E_s^r) = \frac{dZ_{s+r}^r}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} = \frac{dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}},$$

dove al numeratore abbiamo aggiunto il termine Z_{s-1}^{r-1} , che non cambia nulla; allora il loro quoziente dà

$$\begin{aligned} H_*(E_s^r) &= \frac{\ker d^r}{\operatorname{im} d^r} = \frac{dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} \\ &= \frac{Z_s^{r+1}}{Z_s^{r+1} \cap (Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r}^r)} \\ &= \frac{Z_s^{r+1}}{Z_{s-1}^r + dZ_{s+r}^r} = E_s^{r+1}. \end{aligned}$$

Infine, per studiare il limite, vediamo che

$$E_s^r = \frac{Z_s^r}{Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}} = \frac{Z_s^r + F_{s-1}A}{F_{s-1}A + dZ_{s+r-1}^{r-1}}$$

ha numeratore che *decresce con r* , mentre al contrario il sottomodulo per cui quozientiamo *cresce con r* : questo significa che possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \frac{\bigcap_r (Z_s^r + F_{s-1}A)}{\bigcup_r (F_{s-1}A + dZ_{s+r-1}^{r-1})} &= \frac{Z_s^\infty + F_{s-1}A}{F_{s-1}A + (dA \cap F_sA)} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{F_{s-1}A + (dA \cap F_sA)} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{Z_{s-1}^\infty + (dA \cap F_sA)} = E_s^\infty. \end{aligned}$$

L'ipotesi che F sia limitata ci dice che per ogni coppia di indici (s, t) esiste un intero $r = r(s, t)$ tale che $E_{s,t}^\infty = E_{s,t}^r$. Pertanto il limite è

$$F_s H_{s+t}(A) = \text{im} (H_{s+t}(F_s A) \longrightarrow H_{s+t}(A)) ,$$

quindi $F_s H_*(A) = Z_s^\infty / (dA \cap F_s A)$ e inoltre

$$\begin{aligned} \frac{F_s H_*(A)}{F_{s-1} H_*(A)} &= \frac{(Z_s^\infty / (dA \cap F_s A))}{(Z_{s-1}^\infty / (dA \cap F_{s-1} A))} \\ &= \frac{Z_s^\infty}{(Z_{s-1}^\infty + (dA \cap F_{s-1} A))} = E_s^\infty . \end{aligned} \quad \square$$

Applicazioni delle successioni spettrali

Nella dimostrazione del [Teorema I.2](#) non c'è nulla di particolarmente illuminante, ma possiamo usare questo fatto per provare risultati interessanti e cercare di capire il meccanismo delle successioni spettrali. In particolare, questo risultato si rivela molto utile per comparare due diverse costruzioni omologiche.

I.3. Proposizione (Omologia singolare e cellulare). — *Dato un CW complesso X , esiste un isomorfismo tra l'omologia cellulare $H_*^{\text{cell}}(X)$ e l'omologia singolare $H_*(X)$.*

Dimostrazione. Posto $A = C_\bullet(X)$, consideriamo la filtrazione F sulle catene singolari di X data da

$$F_p C_\bullet(X) := C_\bullet(X^{(p)}) ,$$

e definiamo la pagina numero 0 tramite

$$E_{p,q}^0 := C_{p+q}(X^{(p)}) / C_{p+q}(X^{(p-1)}) = C_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) ,$$

su cui è definito il differenziale d^0 naturale. Possiamo così mettere in moto il meccanismo del [Teorema I.2](#) e ottenere

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) = \begin{cases} C_p^{\text{cell}}(X) , & \text{se } q = 0 ; \\ 0 , & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

la cui mappa di bordo d^1 è data dall'omomorfismo di connessione

$$\partial : C_p^{\text{cell}}(X) \rightarrow C_{p-1}^{\text{cell}}(X)$$

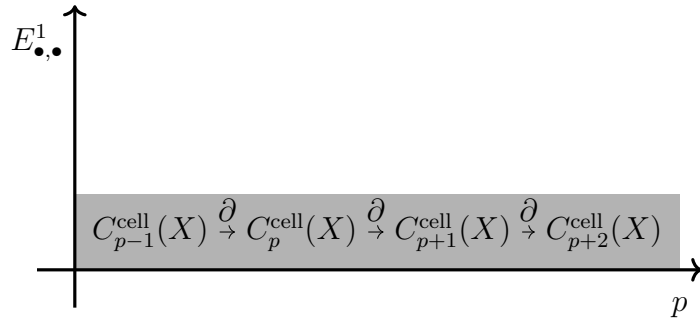


Figura I.3.: La prima pagina della successione spettrale nella [Proposizione I.3](#).

della tripla CW $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$, quindi segue che

$$E^2_{p,q} \simeq \begin{cases} H^{\text{cell}}_p(X), & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che la pagina $E^2_{\bullet, \bullet}$ è concentrata nella 0-esima riga, la successione collassa e quindi $E^2_{\bullet, \bullet} = E^\infty_{\bullet, \bullet}$. Per il [Teorema I.2](#), il limite determina la filtrazione su $H^*(X)$, che è banale dal momento che $E^\infty_{\bullet, \bullet}$ è concentrato in una riga, quindi concludiamo che

$$H_k(X) \simeq E^\infty_{0,k} = E^2_{0,k} \simeq H^{\text{cell}}_k(X). \quad \square$$

I.4. Esempio (Bicomplexi). — Alcuni oggetti che permettono di generare successioni spettrali come spiegato nel [Teorema I.2](#) sono i *bicomplexi*.

Definizione. — Un **bicomplesso** (M, d^h, d^v) (o **complesso doppio**) è un R -modulo bigraduato $M_{\bullet, \bullet}$ dotato di due differenziali

$$d^h_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p-1,q}, \quad d^v_{p,q} : M_{p,q} \longrightarrow M_{p,q-1},$$

di bigrado $(0, -1)$ e $(-1, 0)$ rispettivamente¹, tali che $d^h d^v + d^v d^h = 0$, ovvero ogni quadrato della griglia è *anticommutativo*.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots & \longleftarrow & M_{p-1,q} & \xleftarrow{d^h} & M_{p,q} & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & \\
 \cdots & \longleftarrow & M_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d^h} & M_{p,q-1} & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \cdots & & \cdots &
 \end{array}$$

Dato un bicomplesso M , il suo **complesso totale** $\text{tot}(M)$ è l' R -modulo graduato dato da

$$\text{tot}(M)_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} M_{s,n-s},$$

dotato del **differenziale totale** $d = d^v + d^h$.

Quando ci viene dato un bicomplesso M , possiamo calcolare la sua omologia lungo due diverse direzioni: infatti, abbiamo l'omologia *orizzontale* $H_{*,*}^I(M) := H(M_{\bullet,\bullet}, d^h)$ e l'omologia *verticale* $H_{*,*}^{II}(M) := H(M_{\bullet,\bullet}, d^v)$. La condizione $d^h d^v + d^v d^h = 0$ che definisce il bicomplesso garantisce che il differenziale d^v induce un differenziale verticale \bar{d}^v su $H_{*,*}^I(M)$; analogamente, anche $H_{*,*}^{II}(M)$ ottiene un differenziale \bar{d}^h . Possiamo dunque calcolare nuovamente l'omologia di questi due complessi e ottenere così

$$H_{*,*}^{II} H^I(M) := H(H_{*,*}^I(M), \bar{d}^v), \quad H_{*,*}^I H^{II}(M) := H(H_{*,*}^{II}(M), \bar{d}^h).$$

Questi due procedimenti danno due diverse successioni spettrali, le quali sono legate a $H_*(\text{tot}(M))$ come spiegato nel seguente

I.5. Teorema. — *Dato un bicomplesso (M, d^h, d^v) , esistono due successioni spettrali $\{^I E_{\bullet,\bullet}^r, ^I d^r\}$ e $\{^{II} E_{\bullet,\bullet}^r, ^{II} d^r\}$, tali che*

$$^I E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^I H^{II}(M), \quad ^{II} E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^{II} H^I(M).$$

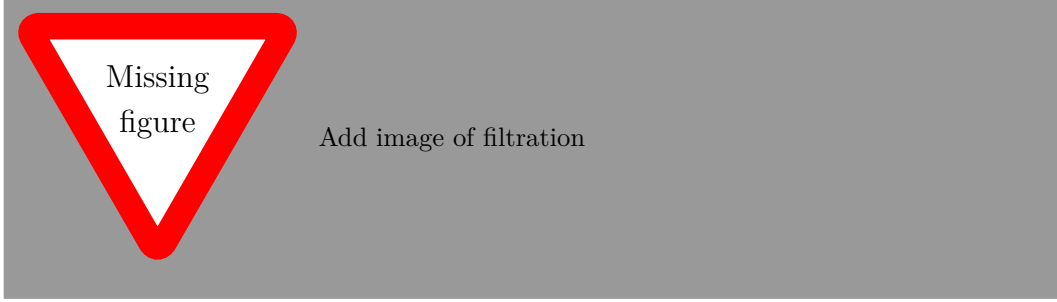
Se M è concentrato nel primo quadrante, allora entrambe le successioni sopra convergono a $H_(\text{tot}(M))$.*

¹Quello definito è un bicomplesso con notazione omologica; è facile adattare la definizione al caso coomologico considerando differenziali di bigrado $(0, 1)$ e $(1, 0)$ rispettivamente.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il Teorema per $\{^I E_{\bullet,\bullet}^r, ^I d^r\}$, dato che l'altro caso è simmetrico. L'idea è quella di sfruttare il [Teorema 1.2](#) con $A = \mathbf{tot}(M)$ e d il suo differenziale totale. Definiamo quindi le filtrazioni sul complesso totale

$$F_p^I(\mathbf{tot}(M))_q := \bigoplus_{r \leq p} M_{r,q-r}, \quad F_p^{II}(\mathbf{tot}(M))_q := \bigoplus_{r \leq p} M_{q-r,r},$$

dove F^I viene detta **filtrazione per colonne**, mentre F^{II} viene detta **filtrazione per righe**.



Per prima cosa identifichiamo la prima pagina della successione: notiamo che per ogni $p, q \in \mathbb{Z}$ la filtrazione dà il quoziente

$$\left(\frac{F_p^I(\mathbf{tot}(M))}{F_{p-1}^I(\mathbf{tot}(M))} \right)_{p+q} = \frac{\bigoplus_{r \leq p} M_{r,p+q-r}}{\bigoplus_{r \leq p-1} M_{r,p+q-r}} \simeq M_{p,q},$$

quindi la tripla $(F_p^I(\mathbf{tot}(M)), F_{p-1}^I(\mathbf{tot}(M)), F_{p-2}^I(\mathbf{tot}(M)))$ dà la successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow M_{p-1,\bullet} \longrightarrow M_{p-1,\bullet} \oplus M_{p,\bullet} \longrightarrow M_{p,\bullet} \longrightarrow 0,$$

ognuno dei quali è dotato del *differenziale verticale* d^v , quindi grazie al **Lemma del Serpente** si ottiene

$$\dots \longrightarrow H_{p+q}(M_{p,\bullet}, d^v) = H_{p,q}^{II}(M) \xrightarrow{\delta} H_{p+q-1}(M_{p-1,\bullet}, d^v) = H_{p-1,q}^{II}(M) \longrightarrow \dots$$

dove si verifica che $\delta = \overline{d^h}$. Si deduce quindi che $^I E_{\bullet,\bullet}^1 \simeq H_{*,*}^{II}(M)$, da cui si conclude che

$$^I E_{\bullet,\bullet}^2 \simeq H_{*,*}^I H^{II}(M).$$

Infine, se M è concentrato nel primo quadrante, la filtrazione F^I è limitata sia dal basso, sia dall'alto, dato che per ogni $t \in \mathbb{Z}$ vale

$$\mathbf{tot}(M)_t = F_t^I \mathbf{tot}(M)_t \supset F_{t-1}^I \mathbf{tot}(M)_t \supset \dots \supset F_0^I \mathbf{tot}(M)_t = M_{0,t} \supset F_{-1}^I \mathbf{tot}(M)_t = 0,$$

quindi per il [Teorema 1.2](#) la successione converge a $H(\mathbf{tot}(M))$. \square

I.6. Esempio (Formula di Künneth). — Dati (C_\bullet, d) e (D_\bullet, ∂) due complessi di catene su un campo \mathbb{K} , consideriamo il bicomplesso $C_\bullet \otimes D_\bullet$ avente i differenziali

$$d^h(x \otimes y) := dx \otimes y, \quad d^v(x \otimes y) := (-1)^{|x|} x \otimes \partial y.$$

Il suo complesso totale $T_\bullet := \text{tot}(C_\bullet \otimes D_\bullet)$ è quindi dotato del differenziale

$$D(x \otimes y) := dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes \partial y,$$

e se si considera la filtrazione per colonne su T_\bullet , data da

$$F_p^I(T_q) := \bigoplus_{r \leq p} C_i \otimes_{\mathbb{K}} D_{q-r},$$

allora per il [Teorema I.5](#) sappiamo che la successione spettrale associata converge a $H_*(T_\bullet)$. Studiamo dunque le prime pagine della successione: la 0-esima pagina è definita da $E_{p,q}^0 := C_p \otimes_{\mathbb{K}} D_q$, con differenziale $d^0 := (-1)^p \mathbf{1}_C \otimes \partial$, quindi si ottiene $E_{p,q}^1 = C_p \otimes_{\mathbb{K}} H_q(D_\bullet)$. Segue dal [Teorema I.2](#) che il differenziale $d^1 = d \otimes \mathbf{1}_{H_*(D)}$, quindi la seconda pagina sarà $E_{p,q}^2 = H_p(C_\bullet) \otimes H_q(D_\bullet)$ con differenziali tutti nulli. Dato che $E_{\bullet,\bullet}^2 = E_{\bullet,\bullet}^\infty$, allora si ottiene la **Formula di Künneth**

$$H_n(C_\bullet \otimes D_\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_\bullet) \otimes_{\mathbb{K}} H_q(D_\bullet) = \left(H_*(C_\bullet) \otimes H_*(D_\bullet) \right)_n. \quad (\text{I.6.1})$$

I.7. Esempio (Complesso di Čech-de Rham). — Dimostriamo che esiste un isomorfismo tra la **coomologia di Čech** e la **coomologia di de Rham** di una varietà differenziabile reale. Ricordiamo prima alcune nozioni:

Definizione. — Data M una varietà differenziabile reale, denotiamo con $\Omega^k(M)$ lo spazio delle k -forme C^∞ su M , cioè lo spazio delle sezioni C^∞ del fibrato $\wedge^k T^*M$.

Ricordiamo che un elemento $\alpha \in \Omega^k(M)$ su un aperto coordinato è della forma

$$\alpha = \sum_{|I|=k} \alpha_I(x) dx_I,$$

con I il k -multiindice che rappresenta $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Localmente definiamo il **differenziale esterno** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ con la formula

$$d\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{|I|=k} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_I$$

e otteniamo il **complesso di de Rham** $(\Omega^\bullet(M), d)$, la cui coomologia sarà indicata con $H_{\text{dR}}^*(M)$.

Lemma (Poincaré). — *Ogni forma chiusa su un aperto contraibile $A \subset \mathbb{R}^n$ è esatta. In altri termini, se A è contraibile allora vale*

$$H_{\text{dR}}^k(A) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } k = 0; \\ 0, & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Sia M una varietà differenziabile e \mathcal{U} un ricoprimento di M . Per una k -upla $U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{U}$, indichiamo con $U_{i_1, \dots, i_k} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$.

Definizione. — Il **complesso di Čech a coefficienti reali** per (M, \mathcal{U}) è dato dagli \mathbb{R} -spazi vettoriali

$$\check{C}_{\mathcal{U}}^k(M) := \bigoplus_{i_0 \leq \dots \leq i_k} \mathbb{R}(U_{i_0, \dots, i_k}),$$

dove \mathbb{R} è il fascio delle funzioni reali localmente costanti, sui quali definiamo i differenziali

$$\delta^k : \check{C}_{\mathcal{U}}^k(M) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^{k+1}(M), \quad (\delta^k \alpha)_{i_0, \dots, i_{k+1}} := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{k+1}}.$$

Definiamo la **coomologia di Čech** subordinata al ricoprimento \mathcal{U} come

$$\check{H}^*(M, \mathcal{U}) := H^*(\check{C}_{\mathcal{U}}^{\bullet}(M), \delta).$$

Chiamiamo \mathcal{U} un **buon ricoprimento** di M se ogni aperto $U_i \in \mathcal{U}$ è contraibile e ogni intersezione finita di aperti di \mathcal{U} è vuota oppure contraibile.

I.8. Teorema. — *Sia M una n -varietà reale C^∞ e \mathcal{U} un buon ricoprimento per M . Allora la coomologia di Čech su \mathcal{U} coincide con quella di De Rham, cioè esiste un isomorfismo naturale*

$$\check{H}^*(M; \mathcal{U}) \simeq H_{\text{dR}}^*(M).$$

Dimostrazione. Definiamo il *complesso doppio di Čech-de Rham* come

$$C^{p,q} := \prod_{i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p} \Omega^q(U_{i_0 \dots i_p});$$

la pagina $E_0^{\bullet,\bullet}$ appare così:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dots & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^2(U_{i_0}) & \longrightarrow & \dots & & & & \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^1(U_{i_0}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi_{i_0 \leq i_1} \Omega^1(U_{i_0 i_1}) & \longrightarrow & \dots & & \\
 \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow & & \\
 \Pi_{i_0} \Omega^0(U_{i_0}) & \xrightarrow{\delta} & \Pi_{i_0 \leq i_1} \Omega^0(U_{i_0 i_1}) & \longrightarrow & \Pi_{i_0 \leq i_1 \leq i_2} \Omega^0(U_{i_0 i_1 i_2}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Prendiamo dunque il complesso totale T^\bullet associato al bicomplesso, cioè

$$T^n := (\mathbf{tot} C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q},$$

con differenziale $D = \delta + (-1)^p d$, sul quale consideriamo due diverse filtrazioni:

- la filtrazione per colonne $F_I^p T^n := \bigoplus_{r \geq p} T^{r, n-r}$ induce su $E_0^{p,q} = C^{p,q}$ il differenziale $d_0 = (-1)^p d$, quindi per il [Teorema I.5](#) la prima pagina è data da

$$E_1^{p,q} = H_{II}^{p,q}(C) = \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_p} H_{\text{dR}}^q(U_{i_0 \dots i_p}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } q = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi di \mathcal{U} buon ricoprimento. Si noti in particolare che

$$H_{\text{dR}}^0(U_{i_0 \dots i_p}) = \mathbb{R} = \underline{\mathbb{R}}(U_{i_0 \dots i_p})$$

è dotato del differenziale $d_1 = \delta$. Dato che la successione collassa alla seconda pagina, il limite è $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, quindi si conclude che

$$H^*(T^{\text{bullet}}) = \check{H}^*(M; \mathcal{U}).$$

- Dalla filtrazione per righe $F_{II}^p C^n = \bigoplus_{r \geq p} C^{n-r, r}$ si ottiene $E_0^{p,q} = C^{p,q}$ con il differenziale $d_0 = \delta$.

I.9. Lemma. — *C'è un'omotopia di catene*

$$\kappa : \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_p} \Omega^\bullet(U_{i_0 \dots i_p}) \longrightarrow \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_{p-1}} \Omega^\bullet(U_{i_0 \dots i_{p-1}})$$

tra l'identità e la mappa nulla in grado $p > 0$.

Dimostrazione. Data $\{\rho_i\}_i$ una partizione dell'unità sbordinata a \mathcal{U} , è sufficiente porre

$$(\kappa\omega)_{i_0\dots i_{p-1}} := \sum_i \rho_i \omega_{i i_0\dots i_{p-1}}.$$

Infatti si verifica che per ogni $p > 0$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta\kappa\omega)_{i_0\dots i_p} &= \sum_{j=0}^p \sum_i (-1)^j \rho_i \omega_{i i_0\dots \hat{i}_j\dots i_p}, \\ (\kappa\delta\omega)_{i_0\dots i_p} &= \omega_{i_0\dots i_p} + \sum_i \sum_{j=0}^p (-1)^{j+1} \rho_i \omega_{i i_0\dots \hat{i}_j\dots i_p}, \end{aligned}$$

quindi $\delta\kappa + \kappa\delta = \mathbf{1}$. □

Come conseguenza di questo **Lemma**, segue che in $E_1^{p,q}$ sopravvive solo la colonna $p = 0$. Dato che $\ker \delta$ è costituito dalle k -forme *globali*, allora

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \Omega^q(M), & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e si verifica che il differenziale verticale è $d_1 = d$ qdi de Rham. La successione collassa alla seconda pagina, per cui si ha

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} H_{\text{dR}}^q(M), & \text{se } p = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

quindi concludiamo che $H^*(T^\bullet) = H_{\text{dR}}^*(M)$.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che $\check{H}^*(M; \mathcal{U}) = H^*(T^\bullet) = H_{\text{dR}}^*(M)$. □

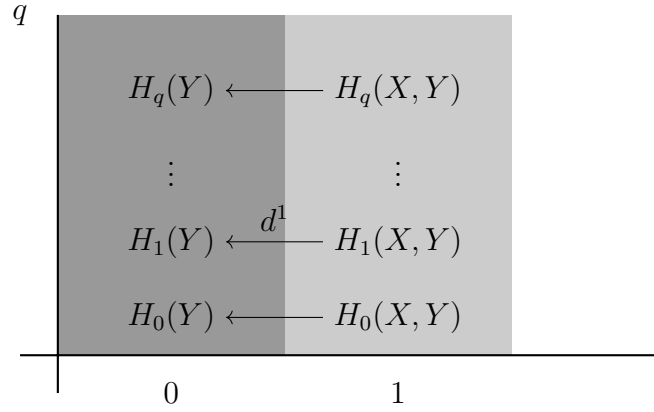
LEZIONE 2
18th apr., 2023

Esempio (Successione di una coppia). — Data una coppia di spazi (X, Y) , possiamo considerare l'inclusione $i : Y \subset X$ come una filtrazione

$$X_{-1} \subset X_0 \subset X_1,$$

dove $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = Y$ e $X_1 = X$. Questa determina la filtrazione $C_*(Y) \subset C_*(X)$ sulle catene singolari di X , dalla quale otteniamo la successione spettrale

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} H_q(Y), & \text{se } p = 0; \\ H_{q+1}(X, Y), & \text{se } p = 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{I.9.1})$$


 Figura I.4.: Successione spettrale della coppia (X, Y) .

Si può verificare che la mappa di bordo sulla prima pagina

$$d^1 : E_{1,q}^1 \longrightarrow E_{0,q}^1 ,$$

coincide con l'omomorfismo di connessione della coppia

$$\partial : H_{q+1}(X, Y) \longrightarrow H_q(Y) .$$

Viceversa, supponiamo di avere il dato della successione spettrale $(E_{\bullet,\bullet}^1, d^1)$; vogliamo ricostruire la successione della coppia. Dato che la prima pagina si concentra in due colonne adiacenti, è chiaro che la successione collassa alla seconda pagina, quindi il termine limite è $E_{\bullet,\bullet}^\infty = E_{\bullet,\bullet}^2$. Per il [Teorema I.2](#), calcoliamo il limite per $p = 0$ come

$$E_{0,q}^\infty = \frac{F_0 H_*}{F_{-1} H_*} = \frac{\text{im}(H_q(Y) \rightarrow H_q(X))}{\text{im}(H_q(\emptyset) \rightarrow H_q(X))} = \text{im}\left(H_q(Y) \xrightarrow{i^*} H_q(X)\right) ,$$

mentre sulla prima colonna è dato da

$$E_{1,q}^\infty = \frac{H_{q+1}(X)}{\text{im}(i_* : H_{q+1}(Y) \rightarrow H_{q+1}(X))} .$$

D'altra parte la seconda pagina è data da

$$E_{1,q}^2 = \ker\left(H_{q+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_q(Y)\right) , \quad E_{0,q}^2 = \frac{H_q(Y)}{\text{im } \partial} .$$

Confrontando E^∞ con la pagina E^2 si hanno le identità

$$E_{1,q}^2 = \ker \left(H_{q+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_q(Y) \right) = \frac{H_{q+1}(X)}{\text{im}(H_{q+1}(Y) \rightarrow H_{q+1}(X))} = E_{1,q}^\infty,$$

$$E_{0,q}^2 = \frac{H_q(Y)}{\text{im } \partial} = \text{im} \left(H_q(Y) \xrightarrow{i^*} H_q(X) \right) = E_{0,q}^\infty.$$

dalle quali si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \frac{H_q(Y)}{\text{im}(H_{q+1}(X, Y) \rightarrow H_q(Y))} \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow \ker \left(H_q(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y) \right) \longrightarrow 0,$$

per ogni $q \in \mathbb{Z}$, ovvero la successione della coppia (X, Y) . Ne segue che la successione della coppia è equivalente alla successione spettrale (I.9.1).

Successioni spettrali di Serre

Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione. — Una mappa $\pi : E \rightarrow B$ è una **fibrazione di Serre** se vale la (??) sui cubi:

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \wr_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow \pi \\ I^{n+1} & \longrightarrow & B. \end{array} \quad (\text{HLP'})$$

Se B è uno spazio connesso per archi che ammette un rivestimento universale \tilde{B} , allora per il **Teorema di approssimazione** possiamo trovare un'equivalenza omotopica debole $f : B' \rightarrow B$, con B' un CW complesso. Siccome le fibrazioni sono una classe chiusa per pullback (vedi Esercizio ??), allora anche $f^*E \rightarrow B'$ è una fibrazione di Serre, pertanto assumeremo senza perdita di generalità che la *base B sia un CW complesso*.

Fissato $x \in B$, consideriamo la fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ e la sua omologia $H_*(E_x)$. A ogni cammino $\gamma : x \mapsto x'$ in B vorremmo associare un omomorfismo $\gamma_* : H_*(E_x) \rightarrow H_*(E_{x'})$. Presa $\alpha_0 : A_x \rightarrow E_x$ un'approssimazione CW della fibra su x , possiamo usare la (HLP') induttivamente sullo scheletro di A_x per poter sollevare l'omotopia

$$\Gamma : A_x \times I \longrightarrow B, \quad \Gamma(z, t) := \gamma(t),$$

per ottenere così una mappa diagonale

$$\begin{array}{ccc} A_x \times \{0\} & \xrightarrow{\alpha_0} & E \\ \downarrow \iota_0 & \searrow \alpha & \downarrow \pi \\ A_x \times I & \longrightarrow & B. \end{array}$$

Allora $\alpha_1 : A_x \rightarrow E_{x'}$ induce in omotopia un omomorfismo $\gamma_* : H_*(E_x) \rightarrow H_*(E_{x'})$. Notiamo inoltre che se $\gamma \sim \gamma'$ sono omotopi a estremi fissati, allora producono lo stesso omomorfismo in omologia; in particolare, se $x = x'$, notiamo che $\pi_1(B, x)$ agisce su $H_*(E_x)$ e si verifica che se γ è costante, allora induce $\gamma_* = \mathbf{1}_{H_*(E_x)}$. Questo appena descritto è un esempio di *sistema locale*.

Definizione. — Un **sistema locale di gruppi** $\mathcal{G} = \{G_x, \tau_\gamma\}$ su uno spazio topologico X è un funtore che associa a ogni punto $x \in X$ un gruppo G_x e a ogni cammino $\gamma : I \rightarrow X$ da x_0 a x_1 associa un omomorfismo

$$\tau_\gamma : G_{x_0} \longrightarrow G_{x_1}$$

che dipende solamente dalla classe

$$[\gamma] \in [(I, \partial I); (X, \{x_0, x_1\})],$$

con la condizione che se γ è costante in x , allora l'omomorfismo associato è $\tau_\gamma = \mathbf{1}_{G_x}$.

Osservazione. — Il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x)$ agisce (da *sinistra*) sul gruppo G_x .

Osservazione. — Siccome ogni cammino γ può essere ripercorso in senso contrario e produrre il cammino opposto $\bar{\gamma}$ in modo che la composizione $\gamma\bar{\gamma}$ sia omotopo a una costante, deduciamo che ogni τ_γ è un isomorfismo. In particolare, se X è connesso per archi, allora tutti i G_x di un sistema locale sono isomorfi.

Definizione. — Se l'azione di $\pi_1(B, x)$ su G_x è banale, allora diremo che il sistema locale \mathcal{G} è **banale**.

Esempio. — Ogni sistema locale su uno spazio semplicemente connesso è banale.

Supponiamo ora che X sia uno spazio connesso per archi che ammette rivestimento universale \widetilde{X} . Allora $\pi_1(X, x_0)$ agisce (da *destra*) su \widetilde{X} per **traslazione**, ovvero

$$\widetilde{X} \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \widetilde{X}, \quad (x, \gamma) \longmapsto x',$$

dove x' è il punto di arrivo del sollevamento di γ . In particolare questo induce un'azione *destra* di $\pi_1(X, x_0)$ sulle catene singolari $C_*\left(\widetilde{X}\right)$ per traslazione, e si verifica che questa azione commuta con il differenziale d .

Definizione. — Sia X connesso per archi e \mathcal{G} un sistema locale su X . Fissato $x_0 \in X$, il complesso

$$C_*(X; \mathcal{G}) := C_*\left(\widetilde{X}\right) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]} G_{x_0}$$

viene chiamato **complesso delle catene singolari a coefficienti in \mathcal{G}** , il cui bordo è indotto da $d : C_*(\widetilde{X}) \rightarrow C_*(\widetilde{X})$. Passando al duale, definiamo le **cocatene singolari a coefficienti in \mathcal{G}** come

$$C^*(X; \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]}\left(C_*\left(\widetilde{X}\right); G_{x_0}\right).$$

L'**omologia**, risp. la **coomologia**, a coefficienti in un sistema locale \mathcal{G} sarà indicata con

$$H_*(X; \mathcal{G}) := H_*(C_*(X; \mathcal{G})), \quad \text{resp.} \quad H^*(X; \mathcal{G}) := H^*(C^*(X; \mathcal{G})).$$

I.10. Teorema (Successione spettrale di Serre). — *Sia M un gruppo abeliano. Data una fibrazione di Serre $\pi : E \rightarrow B$, con B connesso per archi, esiste una successione spettrale $\left\{ (E_{p,q}^r, d^r) \right\}_{r \geq 2}$ concentrata nel primo quadrante data da*

$$E_{p,q}^2 = H_p\left(B; \left\{ H_q(E_x; M) \right\}\right),$$

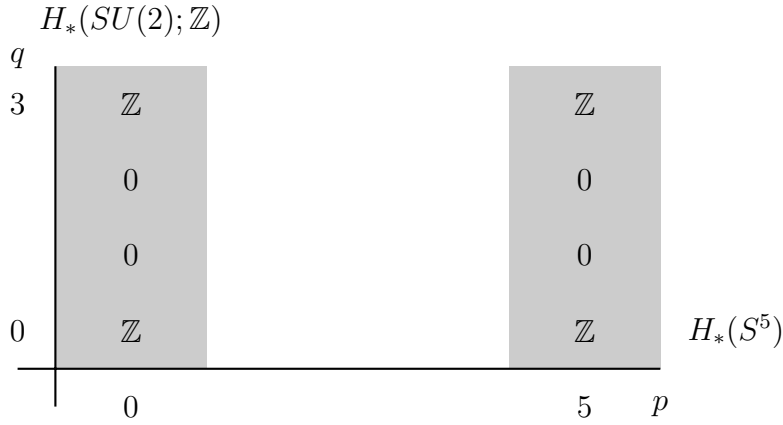
convergente a $E_{p,q}^\infty = F_p H_{p+q}(E; M)$, per una qualche filtrazione F dell'omologia $H_(E; M)$.*

Osservazione. — Si noti che nel [Teorema I.10](#) non vengono nemmeno citati i differenziali della successione spettrale!

Prima di dimostrare questo risultato, vediamo alcuni esempi per capirne il funzionamento.

Esempio. — Sia $SU(n)$ il gruppo delle matrici complesse unitarie con determinante 1. Ad esempio, per $n = 2$ abbiamo

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} z & \zeta \\ \bar{\zeta} & \bar{z} \end{bmatrix} \middle| |z|^2 + |\zeta|^2 = 1 \right\} \simeq S^3.$$


 Figura I.5.: Pagina $E_2^{\bullet, \bullet}$ della successione di Serre di $SU(3)$.

La topologia di $SU(3)$ invece è più complicata e usiamo il [Teorema I.10](#) per studiarne l'omologia. La mappa che considera la prima colonna

$$SU(3) \longrightarrow S^5, \quad A \longmapsto A \cdot e_1$$

dà luogo a una fibrazione $SU(2) \hookrightarrow SU(3) \rightarrow S^5$. La pagina

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^5; H_q(SU(2)))$$

della successione spettrale di Serre associata si concentra solo nelle colonne $p = 0, 5$ e nelle righe $q = 0, 3$, come rappresentato in [Figura I.5](#). Questo implica che la successione collassa alla seconda pagina, e siccome $E_{\bullet, \bullet}^\infty = E_{\bullet, \bullet}^2$, si conclude che

$$H_p(SU(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0, 3, 5, 8; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo studiare l'omologia di $SU(4)$ in maniera analoga: infatti, presa la fibrazione

$$SU(3) \hookrightarrow SU(4) \longrightarrow S^7,$$

otteniamo la successione spettrale la cui pagina $E_{\bullet, \bullet}^2$ ha soli \mathbb{Z} concentrati nelle colonne $p = 0, 7$ e nelle righe $q = 0, 3, 5, 8$. Si verifica che la successione collassa a questa pagina, quindi concludiamo che

$$H_p(SU(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = 0, 3, 5, 7, 8, 10, 12; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infine, vorremmo studiare anche l'omologia di $SU(5)$ utilizzando la fibrazione

$$SU(4) \hookrightarrow SU(5) \longrightarrow S^9.$$

A questo punto $E_{\bullet,\bullet}^2$ è come in Figura ?? e notiamo che potrebbero esserci due differenziali non banali. Purtroppo non conosciamo la struttura di d^9 , quindi (per ora) non sappiamo come calcolare $H_*(SU(5))$.

LEZIONE 3
24th apr., 2023

Dato uno spazio topologico X , ricordiamo che possiamo costruire la fibrazione

$$\Omega X \hookrightarrow PX \xrightarrow{ev_1} X, \quad ev_1 : \gamma \longmapsto \gamma(1),$$

dove lo spazio dei cammini $PX = \{ \gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(0) = x_0 \}$ è contraibile.

I.11. Proposizione. — *Sia X uno spazio $(n-1)$ -connesso, cioè*

$$\pi_0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) = \cdots = \pi_{n-1}(X, x_0) = 0.$$

Allora vale

$$H_0(X) = H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$$

e per ogni $r \leq 2n-2$ si hanno isomorfismi $H_r(X) = H_{r-1}(\Omega X)$.

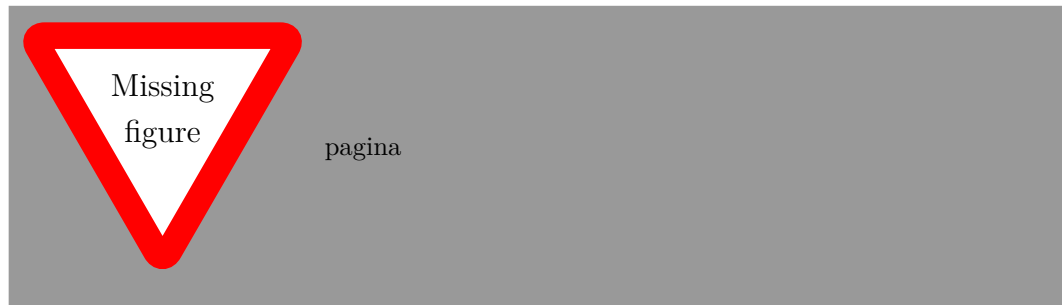
Dimostrazione. Considerato il sistema locale $\{ H_q(P_{x_0}^x X) \}_{x \in X}$, per il [Teorema I.10](#) si ha

$$E_{p,q}^2 = H_p(X; H_q(\Omega X)) \implies E_{p,q}^\infty = F_p H_{p+q}(PX) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p = q = 0; \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dato che PX è contraibile. Dall'ipotesi di $(n-1)$ -connessione si deduce che

$$d_{r,0}^r : E_{r,0}^r = H_r(X) \longrightarrow E_{0,r-1}^r = H_{r-1}(\Omega X)$$

deve essere un isomorfismo per ogni $r \leq 2n-2$.



□

Come corollario di questo fatto, possiamo ottenere il teorema di Hurewicz per gruppi di omotopia superiore, assumendo il risultato vero solo per il gruppo fondamentale:

I.12. Corollario (Teorema di Hurewicz). — *Dato $n \geq 2$, se X è $(n-1)$ -connesso, allora $H_n(X) \simeq \pi_n(X, x_0)$.*

Dimostrazione. Ricordando che $H_1(Y) \simeq \pi_1(Y, *)^{\text{ab}}$ per ogni spazio Y , è sufficiente notare che

$$H_n(X) \simeq H_1(\Omega^{n-1}X) \simeq \pi_1(\Omega^{n-1}X, *) \simeq \pi_n(X, x_0).$$

□

Esempio. — Studiamo i loop sulla sfera S^n . Supponiamo che $n > 1$ così da avere la base semplicemente connessa. Dalla fibrazione

$$\Omega S^n \hookrightarrow PS^n \longrightarrow S^n$$

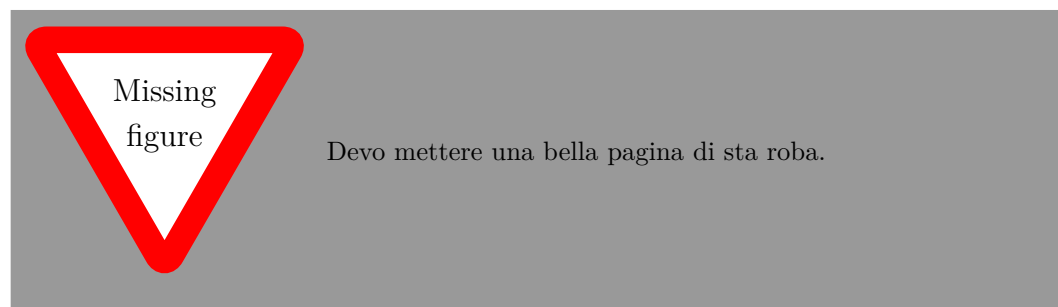
otteniamo la successione spettrale

$$E_{p,q}^2 = H_p(S^n, H_q(\Omega S^n)).$$

La colonna $p = 0$ è lo 0-esimo gruppo di omologia di uno spazio connesso a coefficienti in $H_*(\Omega S^n)$, quindi in realtà la prima colonna è $H_*(\Omega S^n)$. Tutte le altre colonne hanno gruppi banali, fino a quando $p = n$, in cui ritroviamo l'omologia in grado n di S^n a coefficienti in $H_q(\Omega S^n)$. Sappiamo che per $q = n-1$ vale $H_n(S^n, H_{n-1}(\Omega S^n)) \simeq \mathbb{Z}$, ma dal momento che la successione converge all'omologia di uno spazio contraibile se ne deduce che

$$d_{n,0}^n : \mathbb{Z} \longrightarrow E_{0,n-1}^n = H_{n-1}(\Omega S^n)$$

è un isomorfismo. Questo implica che $E_{n,n-1}^n = H_n(S^n; H_{n-1}(\Omega S^n)) \simeq \mathbb{Z}$; con la stessa argomentazione di prima segue che $H_{2n-2}(\Omega S^n) \simeq \mathbb{Z}$.



Procedendo per induzione, questo dimostra che l'omologia di ΩS^n è

$$H_q(\Omega S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } (n-1)|q; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Confronto di successioni spettrali

La costruzione del [Teorema I.2](#) che associa ad un complesso filtrato graduato (C, d, F) una successione spettrale è *functoriale*, nel senso che un morfismo tra complessi filtrati e graduati induce in maniera naturale un morfismo di successioni spettrali.

I.13. Teorema. — *Sia $\tau : C \rightarrow C'$ una mappa di complessi differenziali graduati e filtrati. Supponiamo che le filtrazioni in omologia*

$$\bigcup_s F_s H_n = H_n$$

siano convergenti e limitate dal basso. Se per qualche $r \geq 1$ la mappa $\tau^r : E^r \rightarrow (E')^r$ è un isomorfismo, allora per tutte le pagine $t \geq r$ si ha $E^t \simeq (E')^t$ e la mappa in omologia

$$\tau_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(C')$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. È chiaro che se le successioni spettrali coincidono alla pagina r , siccome le pagine successive sono determinate da quelle precedenti, allora τ^t è un isomorfismo per ogni $t \geq r$. In particolare, anche il limite

$$\tau^\infty : E^\infty \longrightarrow (E')^\infty$$

è un isomorfismo.

Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{s-1}H_n(C) & \longrightarrow & F_s H_n(C) & \longrightarrow & E_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_{s-1}H_n(C') & \longrightarrow & F_s H_n(C') & \longrightarrow & (E')_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0. \end{array}$$

Fissato n , per valori abbastanza piccoli di s si ha $F_{s-1}H_n(C) = 0$ e $F_{s-1}H_n(C')$ perché la filtrazione è limitata dal basso; di conseguenza, per induzione su s otteniamo

$$\tau_* : F_s H_n(C) \simeq F_s H_n(C'), \quad \text{per ogni } s.$$

Siccome la filtrazione dà tutta l'omologia, si conclude che

$$H_*(C) = \bigcup_s F_s H_*(C) \simeq \bigcup_s F_s H_*(C') = H_*(C'). \quad \square$$

Dimostrazione della successione spettrale di Serre I.10. A meno di approssimazione CW, possiamo assumere che la base B sia un CW complesso. Detto $B^{(n)}$ l' n -scheletro di B , consideriamo la filtrazione data dagli scheletri

$$\emptyset = B^{(-1)} \subset B^{(0)} \subset B^{(1)} \subset \dots \subset B^{(n)} \subset B^{(n+1)} \subset \dots \subset B.$$

Tramite $\pi : E \rightarrow B$, ponendo $E^i := \pi^{-1}(B^{(i)})$ otteniamo una filtrazione su E e di conseguenza questa induce una filtrazione sulle sue catene singolari $C_*(E)$. Definiamo $E_{p,q}^0 := C_{p+1}(E^p, E^{p-1})$ e consideriamo d^0 come il differenziale indotto da $C_*(E)$. Mettendo in moto la macchina del [Teorema I.2](#), si ottiene

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \simeq H_{p+q}(E^p, \pi^{-1}(B^{(p)} \setminus \cup_i \{c_i\}))$$

dove l'isomorfismo di destra è dato per *escissione*, rimuovendo i centri c_i dei dischi D^p nel p -scheletro. Segue quindi che

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &\simeq H_{p+q}(E^p, \pi^{-1}(B^{(p)} \setminus \cup_i \{c_i\})) \\ &\simeq H_{p+q}(\cup_i \pi^{-1}(D^p), \cup_i \pi^{-1}(D^p \setminus \{c_i\})) \\ &\simeq \bigoplus_i H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(D^p \setminus \{c_i\})) \\ &\simeq \bigoplus_i H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(\partial D^p)) . \end{aligned}$$

A meno di approssimazione cellulare, possiamo supporre che π sia banale sul disco D_i^p con fibra $F_i := \pi^{-1}(c_i)$; in questo modo, la **formula di Künneth** ci dà

$$\begin{aligned} H_{p+q}(\pi^{-1}(D^p), \pi^{-1}(\partial D^p)) &\simeq H_{p+q}(D_i^p \times F_i, \partial D^p \times F_i) \\ &\simeq H_{p+q}(D_i^p, \partial D^p) \otimes H_{p+q}(F_i) \\ &\simeq H_{p+q}(F_i), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che l'omologia del disco D^p relativa al suo bordo è banale, tranne in grado p dove è un modulo libero di rango 1. Segue dunque che

$$E_{p,q}^1 \simeq \bigoplus_i H_q(F_i),$$

dove i indicizza le celle di B .

Non ho capito

Nel caso in cui B è semplicemente connesso, allora posso trovare una trivializzazione globale, cioè definire una mappa CW da F a F' ... Abbiamo quindi che $E_{p,q}^1 = C_p^{\text{cell}}(B) \otimes H_q(F)$ e il differenziale d^1 corrisponde al morfismo di connessione indotto dalla tripla $(B^{(p)}, B^{(p-1)}, B^{(p-2)})$, cioè il differenziale di $C_*^{\text{cell}}(B)$. Questo produce la seconda pagina

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)).$$

finire

Se B non è semplicemente connesso, allora considero \tilde{B} il rivestimento universale. Dal procedimento di prima si ottiene così... \square

Dimostrazione alternativa (Dress). Mostriamo quest'altra dimostrazione che non fa uso della struttura CW. Data $\pi : E \rightarrow B$, costruiamo un "arricchimento" del complesso delle catene singolari: infatti, definiamo i **bisimplessi singolari** di π come

$$\text{Sin}_{s,t}(\pi) := \left\{ (f, \sigma) \mid f : \Delta^s \times \Delta^t \rightarrow E, \sigma : \Delta^s \rightarrow B \text{ tale che soddisfino } (*) \right\},$$

dove la condizione $(*)$ è che il seguente quadrato commuti

$$\begin{array}{ccc} \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} & B. \end{array} \quad (\text{I.13.1})$$

Possiamo così definire un funtore

$$\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi) : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

copia formule

e indichiamo con $R\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi)$ l' R -modulo libero generato dai bisimplessi singolari. Possiamo definire due differenziali ∂' e ∂'' su questo modulo: Come nell'Esempio di Cech-deRham, poniamo $d = \partial' + (-1)^q \partial''$ su $R\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi)$ e consideriamo due filtrazioni:

1. per "diagonali sinistre" data da

$$F_p(\text{Sin}_{\bullet,\bullet}(\pi))_n := \bigoplus_{s+t=n, t \leq p} \text{Sin}_{s,t}(\pi),$$

su cui consideriamo il differenziale $d^0 = \partial$. Dato un bisimplesso $(f, \sigma) \in \text{Sin}_{s,t}(\pi)$, considero \tilde{f} tramite aggiunzione e considero il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^s & \xrightarrow{\tilde{f}} & E^{\Delta^t} \\
 \searrow \sigma & \nearrow c^{-1}(E^{\Delta^t}) & \downarrow \pi \\
 & B & \xrightarrow{c} B^{\Delta^t}
 \end{array}$$

dove c manda $b \in B$ nel t -simplesso singolare costante in b . Per aggiunzione, i dati (f, σ) e (\tilde{f}, σ) sono equivalenti e quindi, posto $E'_t := c^{-1}(E^{\Delta^t})$, notiamo che

$$R\text{Sin}_{s,t}(\pi) \simeq C_s(E'_t).$$

Dato che i semplici singolari sono contraibili, allora $c : B \rightarrow B^{\Delta^t}$ è un'equivalenza omotopica e quindi E'_t è omotopicamente equivalente a E^{Δ^t} tramite la mappa $c : E \rightarrow E^{\Delta^t}$ che manda tutto in un semplice costante. Ne deduciamo che le catene singolari sono $C_s(E'_t) \simeq C_s(E)$ e quindi la prima pagina della successione spettrale è

$$E'_{s,t} = H_s(E), \quad s, t, \geq 0.$$

Dato che $d^1 = \pm \partial''$, allora concludiamo che

$$E_{p,q}^2 \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq 0; \\ H_s(E), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

2. Fissato un s -simplesso σ , considero il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{f} & E \\
 \searrow \text{pr}_1 & \nearrow \sigma^{-1}(E) & \downarrow \pi \\
 & \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} B
 \end{array}$$

e per aggiunzione questo corrisponde a

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^t & \xrightarrow{f} & E^{\Delta^s} \\
 \text{pr}_1 \searrow & \swarrow j^{-1}(\ast) & \downarrow \pi \\
 & \ast & \xrightarrow{j:\ast \mapsto \sigma} B^{\Delta^s}
 \end{array}$$

Notiamo che $j^{-1}(\ast) = \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E))$ sono le sezioni da Δ^s in $\sigma^{-1}(E)$ e quindi poniamo

$$E_{s,t}^0 = \bigoplus_{\sigma: \Delta_s \rightarrow B} C_t \left(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \right).$$

La prima pagina che otteniamo è

$$E_{s,t}^1 = \bigoplus_{\sigma: \Delta_s \rightarrow B} H_t \left(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \right),$$

con il differenziale d^1 dato dalla somma a segni alterni delle facce del modulo simpliciale $E_{s,t}^1$.

Un morfismo $\varphi: [s'] \rightarrow [s]$ nella categoria simpliciale induce una mappa continua

$$\varphi^*: \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \longrightarrow \Gamma(\Delta^{s'}, (\sigma \circ \varphi)^{-1}(E))$$

e quindi $\varphi^*: E_{s,t}^1 \rightarrow E_{s',t}^1$. Usando il fatto che π è una fibrazione e che Δ^s è contraibile, deduciamo che $\sigma^{-1}(E) \rightarrow \Delta^s$ è banale e quindi abbiamo un'equivalenza omotopica

$$\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \simeq F_\sigma.$$

finire ...

□

Recupera
lezione
LEZIONE 5
Devo scrivere
bene

NON C'ERO!

Come al solito, consideriamo una fibrazione $F \rightarrow E \rightarrow B$, con B e F spazi connessi per archi. Consideriamo una sistema locale $H_*(\pi^{-1})$ banale

Definizione. — Chiamiamo **trasgressione** l'omomorfismo $d^n: E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$. Un elemento $x \in E_{n,0}^2$ si dice **trasgressivo**.

Quindi gli elementi trasgressivi sono quelli che sopravvivono sino alla pagina $E_{n,0}^n$.

Remark. — Consideriamo il caso $n = 2$. In questo caso abbiamo

$$d^2 : H_2(B) \simeq E_{2,0}^2 \rightarrow E_{0,1}^2 \simeq H_1(F).$$

In generale abbiamo $E_{n,0}^n \subset E_{n,0}^2 \simeq H_{n-1}(F)$. Consideriamo la successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_m(F) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_m(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F) \longrightarrow \dots$$

e la proiezione $\pi_* : H_*(E, F) \rightarrow H_*(B, b_0)$.

Il seguente risultato ci permette di dare un'interpretazione a queste trasgressioni. In particolare, ci permettono di trovare una costruzione funtoriale.

I.14. Teorema. — *La trasgressione nella successione di Serre in omologia coincide con la composizione*

$$H_m(B) \longrightarrow H_m(B, b_0) \xrightarrow{\pi_*^{-1}} H_m(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F).$$

In maniera duale, la trasgressione nella successione di Serre in coomologia coincide con la composizione

$$H^{m-1}(F) \xrightarrow{\delta^*} H^m(E, F) \xrightarrow{(\pi_*)^{-1}} H^m(B, b_0) \longrightarrow H^m(B).$$

Dimostrazione. Dimostriamo solamente il caso dell'omologia. A meno di approssimazione cellulare, supponiamo che B sia un CW complesso; inoltre, siccome B è connesso per archi, possiamo supporre che abbia una soa 0-cella. Un elemento $x \in E_{n,0}^n$ è rappresentato da una xatena

$$c \in C_n \left(\pi^{-1}(B^{(n)}) \right) \subset C_n(E),$$

con bordo

$$\partial c \in C_{n-1} \left(\pi^{-1}(B^{(0)}) \right) = C_{n-1}(F).$$

In altre parole, c è un ciclo relativo in

$$C_\bullet \left(\pi^{-1}(B^{(n)}), F \right).$$

L'identificazione di $E_{n,0}^n$ con $H_n(B)$ si ha tramite la mappa

$$E_{n,0}^n \longrightarrow H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F) \xrightarrow{\pi_*} H_*(B), \quad [c] \longmapsto [\pi_{\#}c],$$

e inoltre $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ manda

$$H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F) \longrightarrow H_{n-1}(F), \quad [c] \longmapsto [\partial c].$$

□

Classi di Serre

Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso. Per i teoremi di Hurewicz, se conosciamo $\overline{H}_*(X; \mathbb{Z})$, allora conosciamo anche l'omotopia $\pi_*(X, *)$. In particolare, i coefficienti in \mathbb{Z} ci danno il vantaggio di conoscere bene i gruppi in questione, dato che abbiamo a disposizione il **Teorema di struttura per gruppi abeliani**. Ma se invece considerassimo i coefficienti in un campo, ad esempio $\overline{H}_*(X; \mathbb{Q})$, che cosa possiamo concludere per $\pi_*(X, *) \otimes \mathbb{Q}$? Se l'omologia è un gruppo finito, allora possiamo dedurre qualcosa sui gruppi di omotopia?

Definizione. — Una **classe di Serre** \mathcal{C} di gruppi abeliani è una sottocategoria piena di **Ab** che contiene il gruppo banale $\mathbf{0} \in \mathcal{C}$, e per ogni successione esatta corta

$$\mathbf{0} \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \mathbf{0},$$

allora A e C appartengono a \mathcal{C} se e solo se $B \in \mathcal{C}$.

Osservazione. — Una classe di Serre è chiusa per le seguenti operazioni:

- (i) isomorfismo;
- (ii) sottogruppi;
- (iii) quozienti;
- (iv) estensioni.

Inoltre, l'intersezione di classi di Serre è a sua volta una classe di Serre.

Esempio. — Alcune classi di Serre interessanti sono:

- (i) i gruppi abeliani finiti \mathbf{Ab}_{fin} ;

- (ii) i gruppi abeliani finitamente generati \mathbf{Ab}_{fg} ;
- (iii) i gruppi abeliani di torsione \mathbf{Ab}_{tor} .
- (iv) i gruppi abeliani di p -torsione \mathbf{Ab}_{p-tor} , cioè quei gruppi A tali che, per ogni $a \in A$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p^n a = 0$.

Definizione. — Sia \mathcal{P} un insieme di primi in \mathbb{Z} . Indichiamo con $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ la classe dei gruppi abeliani di torsione tali che, se esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p \mid \text{ord}(a)$ per qualche $a \in A$, allora $A = \mathbf{0}$. Nel caso $\mathcal{P} = \{p\}$, allora scriviamo $\mathcal{C}_p := \mathcal{C}_{\{p\}}$.

Si verifica che $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ è una classe di Serre. Sia $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ la localizzazione di \mathbb{Z} al complementare dell'unione degli ideali (p) , al variare di $p \in \mathcal{P}$, cioè

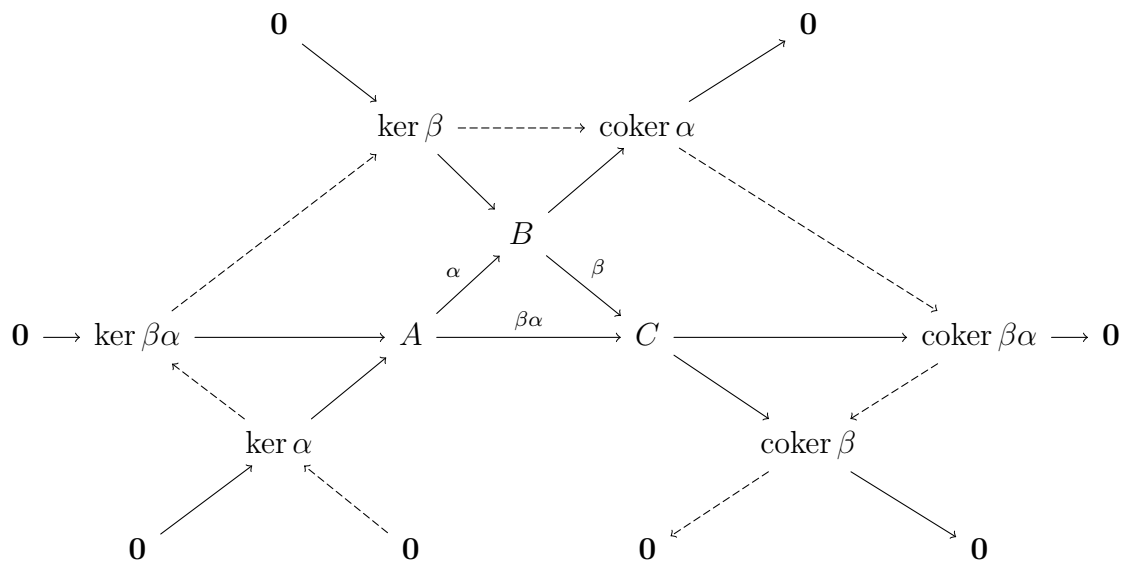
$$\mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = \left(\mathbb{Z} \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} (p) \right)^{-1} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \notin (p) \text{ per ogni } p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Remark. — Si ha $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ se e solo se $A \otimes \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = 0$.

Definizione. — Diciamo che $A = \mathbf{0} \bmod \mathcal{C}$ se $A \in \mathcal{C}$. In maniera simile, diciamo che un omomorfismo di gruppi $f : A \rightarrow B$ è un **monomorfismo** $\bmod \mathcal{C}$ se $\ker f \in \mathcal{C}$, e invece è un **epimorfismo** $\bmod \mathcal{C}$ se $\text{coker } f \in \mathcal{C}$. In particolare, f è un isomorfismo $\bmod \mathcal{C}$ se $\ker f, \text{coker } f \in \mathcal{C}$.

I.15. Proposizione. — *Sia \mathcal{C} una classe di Serre, allora le classi di monomorfismi, epimorfismi e isomorfismi $\bmod \mathcal{C}$ sono chiuse per composizione. Più precisamente, dati $\alpha : A \rightarrow B$ e $\beta : B \rightarrow C$, se due mappe tra $\alpha, \beta, \beta\alpha$ sono mono/epi/iso $\bmod \mathcal{C}$, allora anche il terzo lo è.*

Dimostrazione. Tutte le affermazioni seguono dall'esattezza della successione di mappe tratteggiate nel diagrammone pazzo sgravato qui sotto:



□

Esercizio. — Possiamo parlare di successioni esatte corte mod \mathcal{C} e vale il **Lemma dei 5** mod \mathcal{C} .

Remark. — Se C_\bullet è un complesso di catene con tutti i termini C_n in una classe di Serre \mathcal{C} , allora $H_n(C_\bullet) \in \mathcal{C}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Inoltre, se F è una filtrazione di un gruppo abeliano $A \in \mathcal{C}$, allora per ogni $s \in \mathbb{Z}$ anche $\text{gr}_s A \in \mathcal{C}$. Viceversa, se la filtrazione F è finita e ogni $\text{gr}_s A \in \mathcal{C}$, allora tutto il gruppo A sta in \mathcal{C} .

In particolare, sia $\{E_{s,t}^r\}$ una successione spettrale. Se $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per ogni s, t , allora tutte le pagine $E_{s,t}^r$ appartengono alla classe \mathcal{C} per $r \geq 2$. Se la successione è concentrata nel primo quadrante, allora anche il limite $E_{s,t}^\infty$ è in \mathcal{C} . Se $\{E_{s,t}^r\}$ è indotta da una filtrazione su un complesso C_\bullet e $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per ogni $s + t = n$, allora anche l'omologia $H_*(C_\bullet) \in \mathcal{C}$.

Esempio. — Se $A \subset X$ e due tra $\overline{H}_n(X), \overline{H}_n(A), H_n(X, A)$ sono in \mathcal{C} , allora anche il terzo appartiene alla classe \mathcal{C} .

Definizione. — Una classe di Serre \mathcal{C} è un **anello di Serre** se per ogni coppia di gruppi $A, B \in \mathcal{C}$, allora anche $A \otimes B$ e $A * B := \text{Tor}(A, B)$ sono in \mathcal{C} .

Definizione. — Una classe di Serre \mathcal{C} si dice **ideale di Serre** se, dato $A \in \mathcal{C}$, per ogni gruppo abeliano B allora $A \otimes B, A * B \in \mathcal{C}$.

Esempio. — Gli esempi di classi di Serre presentati in precedenza sono tutti anelli di Serre. Senza l'ipotesi “finitamente generati” in realtà sono ideali di Serre.

Sia \mathcal{C} una classe di Serre. Preso un gruppo $A \in \mathcal{C}$, sappiamo che lo spazio classificante

$$BA = K(A, 1)$$

ha omologia in grado 1 data da $H_1(K(A, 1)) = A \in \mathcal{C}$. Motivati da questo esempio, diamo la seguente

Definizione. — Un anello di Serre \mathcal{C} si dice **aciclico** se, per ogni $A \in \mathcal{C}$, lo spazio classificante di A è aciclico mod \mathcal{C} , cioè

$$\overline{H}_n(K(A, 1)) \in \mathcal{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esempio. — Verifichiamo che la classe \mathbf{Ab}_{fin} dei gruppi abeliani finiti è un anello di Serre aciclico. Ricordiamo che la formula di Künneth ci dà

$$K(A * B, 1) = K(A, 1) \times K(B, 1).$$

Dato C_n un gruppo ciclico di ordine n , allora possiamo immergerlo $C_n \subset S^1$, che agisce a sinistra su $S^\infty \subset \mathbb{CP}^\infty$. Dunque deduciamo che

$$BC_n = C_n \backslash S^\infty = (C_n \backslash S^1) \times_{S^1} S^\infty,$$

e quindi la fibrazione

$$S^1 \simeq C_n \backslash S^1 \hookrightarrow S^1 \backslash S^\infty \simeq \mathbb{CP}^\infty$$

ci dà una successione spettrale di Serre dalla quale leggiamo che $H_1(BC_n) = C_n$ e $H^2(BC_n) = C_n$. Questo implica che $d_2(e) = \pm nx$ e deduciamo che l'anello di coomologia di BC_n è

$$H^*(BC_n) = \mathbb{Z}[x]/(nx), \quad \text{con } |x| = 2.$$

Questo mostra che l'omologia e la coomologia di BC_n sono in \mathbf{Ab}_{fin} , e quindi \mathbf{Ab}_{fin} è aciclico.

Esempio. — Se $A \in \mathbf{Ab}_{tor}$, allora A è un limite diretto di gruppi finiti. Siccome tutti i suoi sottogruppi sono di torsione, scrivendo anche $K(A, 1)$ come limite diretto possiamo vedere che $\overline{H}_q(K(A, 1))$ è di torsione, quindi \mathbf{Ab}_{tor} è un anello di Serre aciclico. Per un ragionamento analogo, anche $\mathbf{Ab}_{p-tor} \cap \mathbf{Ab}_{fin}$ e \mathcal{C}_p sono aciclici.

Esempio. — Dato che $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$, allora usando il **Teorema di struttura** e gli esempi precedenti notiamo che anche \mathbf{Ab}_{fg} è aciclico.

Remark. — Sia \mathcal{C} un ideale di Serre. Se X è uno spazio topologico con

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbf{0} = H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \pmod{\mathcal{C}},$$

allora per ogni $M \in \mathbf{Ab}$ si ha $H_n(X; M) = \mathbf{0} \pmod{\mathcal{C}}$. Se \mathcal{C} è solamente un anello, questa conclusione segue se $M \in \mathcal{C}$.

I.16. Proposizione. — Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, con B, F connessi per archi e $\pi_1(B, b_0)$ agisce banalmente su $H_*(F)$. Sia \mathcal{C} un ideale di Serre. Se per ogni $t > 0$ si ha $H_t(F) \in \mathcal{C}$, allora

$$\pi_* : H_*(F) \longrightarrow H_*(B)$$

è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione. Per il **Teorema dei Coefficienti Universali** si ha

$$E_{s,t}^r = H_s(B; H_t(F)) \in \mathcal{C}, \quad \text{per } t > 0.$$

Allora anche $E_{s,t}^r \in \mathcal{C}$ per $t > 0$ e anche il limite $E_{s,t}^\infty \in \mathcal{C}$. Questo implica che π_* è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$. \square

I.17. Proposizione. — Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, con B, F connessi per archi e base semplicemente connessa $H_1(B) = \mathbf{0}$. Se \mathcal{C} è una classe di Serre tale che $H_s(B) \in \mathcal{C}$ per ogni $0 < s < n$ e $H_t(F) \in \mathcal{C}$ per $0 < t < n - 1$. Allora per ogni $i \leq n$, la proiezione

$$\pi_* : H_i(E, F) \longrightarrow H_i(B, b_0) \in \mathcal{C},$$

è un isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$.

copia dim.

Dimostrazione. Usiamo la **versione relativa** della successione di Serre. \square

Prima di vedere la dimostrazione di questo fatto, deduciamo qualche conseguenza interessante: otteniamo una nuova versione del Teorema di Hurewicz.

I.18. Corollario. — *Sia \mathcal{C} un anello di Serre aciclico e X uno spazio semplicemente connesso. Per ogni $n \geq 2$, si ha*

$$\pi_q(X, *) \in \mathcal{C} \iff H_q(X) \in \mathcal{C}$$

per ogni $q < n$. In tal caso, la mappa di Hurewicz

$$h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} .

Ad esempio, se $\pi_1(X, *) = 0$, allora vale

1. ...
2. ...
3. per ogni $q < n$ vale

$$\overline{H}_q(X; \mathbb{Q}) = \mathbf{0} \iff \pi_q(X; *) \otimes \mathbb{Q} = \mathbf{0}$$

e la mappa $\pi_n(X; *) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_n(X; \mathbb{Q})$ è un isomorfismo.

Esempio. — L'ipotesi che X sia semplicemente connesso è necessaria. Se consideriamo $X = S^1 \vee S^2$, allora $H_q(X)$ è un gruppo finitamente generato per ogni $q \in \mathbb{N}$, ma invece $\pi_2(X; *)$ non è finitamente generato: basti pensare che il rivestimento universale \widetilde{X} è una retta con infinite sfere attaccate nei punti interi.

I.19. Proposizione. — *Data una fibrazione di Serre $\pi : E \rightarrow B$, con B, F connessi per archi e base $\pi_1(B, b_0) = \mathbf{0}$. Allora $\pi_* : H_i(E, F) \rightarrow H_i(B, b_0)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} per ogni $i \geq n$.*

Dimostrazione del Teorema I.17. Consideriamo la fibrazione dei loop

$$\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X$$

e mostriamo che se $\pi_q(X, *) \in \mathcal{C}$ per ogni $q < n$, allora $\pi_n(X, *) \rightarrow H_n(X)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} . Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 2$, allora

$\pi_2(X; *) \simeq H_2(X)$ per il classico **Teorema di Hurewicz**. Supponiamo quindi $n > 2$ e consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_q(X, *) & \xleftarrow{\sim} & \pi_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_{q-1}(\Omega X, *) \\ \downarrow h & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \overline{H}_q(X) & \xleftarrow[\psi]{} & H_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\sim} & H_{q-1}(\Omega X). \end{array}$$

Se mostriamo che φ e ψ sono isomorfismi mod \mathcal{C} , allora concludiamo che anche h lo è, da cui segue la tesi.

Se $\pi_2(X, *) = 0$, allora si ha $\pi_1(\Omega X, *) = 0$ e possiamo applicare il Teorema di Hurewicz per ipotesi induttiva, da cui deduciamo che φ e ψ sono iso. Per ψ usiamo la [Proposizione I.19](#). Il problema è che in generale **non** vale $\pi_2(X, *) = 0$, quindi non abbiamo a disposizione l'ipotesi $\pi_1(\Omega X, *) = 0$. Per ovviare a questo problema, ricorriamo alle **Torri di Whitehead**: consideriamo la fibrazione

$$K := K(\pi_2(X, *), 1) \longrightarrow Y \xrightarrow{t} X,$$

dove t induce isomorfismi tra i gruppi di omotopia π_q , per $q > 2$. Questo “uccide” il π_2 di X , ma in compenso questo gruppo appare come gruppo fondamentale della fibra K . Dato che $\pi_2(X, *) \in \mathcal{C}$ e per ipotesi \mathcal{C} è un anello aciclico, allora $H_i(K) \in \mathcal{C}$ per ogni $i > 0$. Quindi $\overline{H}_i(Y) \rightarrow H_i(Y, K)$ è isomorfismo mod \mathcal{C} . Usando la [Proposizione I.19](#), deduciamo che per ogni $i \leq n$ anche

$$H_i(Y, y_0) \longrightarrow H_i(X, *)$$

è isomorfismo mod \mathcal{C} . Siccome $\pi_i(Y, y_0) \simeq \pi_i(X, *)$ per $i \geq 3$, applichiamo l'ipotesi induttiva. \square

I.20. Corollario. — *Sia X è semplicemente connesso, p primo e $n \geq 2$. Vale*

$$\forall_{i < n} \pi_i(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbf{0} \iff \forall_{i < n} \overline{H}_i(X; \mathbb{Z}_{(p)}) = \mathbf{0}$$

*e si ha un isomorfismo $\pi_n(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \simeq \overline{H}_n(X; \mathbb{Z}_{(p)})$.*

Dimostrazione. Usiamo il Teorema di Hurewicz modulo la classe di Serre \mathcal{C}_p , ovvero i gruppi abeliani A tali che $A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbf{0}$. \square

I.21. Teorema (Hurewicz mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico e (X, A) una coppia di spazi semplicemente connessi. Per $n \geq 1$ si ha che*

$$\forall_{2 \leq i < n} \pi_i(X, A) \in \mathcal{C} \iff \forall_{2 \leq i < n} H_i(X, A) \in \mathcal{C}$$

e in tal caso la mappa $\pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} .

recupera!

Idea di dimostrazione. Boh sono rimasto indietro.

$$E_{s,t}^2 = H_s(X, A; H_t(\Omega X))$$

Non abbiamo ipotesi sull'omologia di ΩX , ma la condizione che \mathcal{C} sia un ideale ci serve per poter fare a meno di ipotesi sull'omologia della fibra, in quanto sia \otimes , sia $*$, sono operazioni che fanno rimanere in \mathcal{C} . Dal fatto che $H_s(X, A) \in \mathcal{C}$, per Künneth e il fatto che \mathcal{C} è ideale segue che $H_s(X, A; H_t(\Omega X)) \in \mathcal{C}$, quindi p_* è un isomorfismo mod \mathcal{C} . \square

I.22. Teorema (Whitehead mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico e $f : X \rightarrow Y$ una mappa continua. Per $n \geq 2$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

- (i) *per ogni $i \leq n - 1$, la mappa $f_{\#} : \pi_i(X, *) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} , ed è epi per $i = n$;*
- (ii) *per ogni $i \leq n - 1$, la mappa $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} , ed è epi per $i = n$.*

Dimostrazione. A meno di sostituire Y con il mapping cylinder di f , possiamo supporre che $f : X \subset Y$ sia un'inclusione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\pi_{n+1}(Y, X)$$

La condizione i) è equivalente alla condizione

$$\pi_i(Y, X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i \leq n,$$

ma allora per il [Teorema di Hurewicz mod \$\mathcal{C}\$ I.21](#) notiamo che equivale a

$$H_i(Y, X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i \leq n,$$

ovvero la condizione ii). \square

I.23. Lemma. — *Siano X, Y spazi tali che la loro omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_{(p)}$ sia finitamente generata in ogni grado. Se $f : X \rightarrow Y$ induce un isomorfismo in $H_q(-; \mathbb{Z}_{(p)})$ per ogni q , allora f induce isomorfismi mod \mathcal{C}_p in ogni grado dell'omologia singolare a coefficienti in \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Notiamo che un omomorfismo di gruppi $\alpha : A \rightarrow B$ è un isomorfismo mod \mathcal{C}_p se e solo se

$$\alpha \otimes \mathbf{1} : A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo di gruppi. Dato che $\mathbb{Z}_{(p)}$ è piatto, allora tensorizzando la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow 0,$$

otteniamo una nuova successione esatta di gruppi abeliani.

Uno $\mathbb{Z}_{(p)}$ -modulo finitamente generato è banale se e solo se è banale modulo p , quindi se mostriamo che il nucleo e il conucleo della mappa

$$f_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$$

sono banali se tensorizziamo con $-\otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, allora abbiamo la tesi.

Detto Z il mapping cone di f , ricordiamo che vale

$$\overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq H_*(C_f, X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Siccome $\mathbb{Z}_{(p)}$ è un anello nœtheriano e per ogni q i moduli $H_q(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ e $H_q(Y; \mathbb{Z}_{(p)})$ sono finitamente generati, allora anche $H_q(Z; \mathbb{Z}_{(p)})$ è finitamente generato. Dal Teorema dei Coefficienti Universali ricordiamo che

$$\overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

quindi se $H_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, segue che $\overline{H}_*(Z) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \overline{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$. Concludiamo così che la mappa

$$f_* \otimes 1 : \overline{H}_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \overline{H}_*(Y) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo. □

I.24. Corollario. — *Se X e Y sono spazi semplicemente connessi, con omologia $H_q(-; \mathbb{Z}_{(p)})$ finitamente generata per ogni $q \in \mathbb{N}$. Se $f : X \rightarrow Y$ è una mappa continua che induce un isomorfismo in $H_*(-; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, allora*

$$f_* : \pi_q(X, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \pi_q(Y, y_0) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Segue applicando il Lemma + Whitehead mod C. □

Prima di enunciare il **Teorema di Serre**, facciamo alcuni calcoli dell'omologia di spazi classificanti.

Esempio. — Il **Teorema di Whitehead** mod \mathcal{C} applicato a un gruppo $A \in \mathbf{Ab}_{tor}$ ci dice che

$$\overline{H}_*(K(A, n); \mathbb{Q}) = 0.$$

Questo è chiaro per $n = 1$. Se $n > 1$, allora consideriamo la fibrazione

$$K(A, n-1) \longrightarrow PK(A, n) \longrightarrow K(A, n).$$

Calcoliamo gli anelli di coomologia, per esempio, nel caso di $A = \mathbb{Z}$. Per $n = 1$, sappiamo che $K(\mathbb{Z}, 1) = \mathbb{S}^1$ ha coomologia

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Q}) \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_1],$$

con ι_1 in grado 1. Se $n = 2$, allora $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{CP}^\infty$ e il suo anello di coomologia è

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[\iota_2], \quad |\iota_2| = 2.$$

Copiare e
capire

Tutto il calcolo con SS

Ripetendo questo procedimento per ogni n , si dimostra che

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \simeq \begin{cases} \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_n], & \text{se } n \text{ è dispari;} \\ \mathbb{Q}[\iota_n], & \text{se } n \text{ è pari,} \end{cases}$$

dove ι_n è un generatore in grado $|\iota_n| = n$.

I.25. Teorema (Serre). — *I gruppi di omotopia della sfera S^n sono **finiti**, eccetto $\pi_0(S^n, *) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_n(S^n, *)$. Se n è pari, allora $\pi_{2n-1}(S^n, *)$ è finitamente generato di rango 1.*

Dimostrazione. Conosciamo già l'omotopia di S^1 . Se $n \geq 2$, allora consideriamo la mappa

$$f : S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n).$$

Se n è dispari, allora f_* induce un isomorfismo in omologia razionale, per cui applicando il Teorema di Whitehead mod \mathcal{C} segue che f induce un isomorfismo $\pi_q(-) \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Se n è pari, allora indichiamo la fibra omotopica

$$F \hookrightarrow S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n).$$

Sappiamo che l'anello di coomologia di $K(\mathbb{Z}, n)$ è un'algebra di polinomi generata in grado n da una classe ι_n . Dato che F ha omotopia banale in grado

$n - 1$ e n , allora sulla colonna 0 della SS, dopo l'unità 1 in grado 0, troviamo una classe ι_{2n-1} che deve uccidere ι_n^2 , cioè

$$d_{2n-1}(\iota_{2n-1}) = \iota_n^2.$$

Da questo deduciamo che $d_{2n-1}(\iota_{2n-1}\iota_n^k) = \iota_n^{(k-1)2}$. Questo ci dice che

$$H^*(F; \mathbb{Q}) = H^*(K(\mathbb{Z}, 2n-1); \mathbb{Q}) \implies H^*(F) \otimes \mathbb{Q} = H^*(K(\mathbb{Z}, 2n-1)) \otimes \mathbb{Q},$$

da cui concludiamo

$$\pi_q(S^n, *) \otimes \mathbb{Q} \simeq \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } q = n, 2n-1; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

□

Osservazione. — La dimostrazione del [Teorema di Serre I.25](#) ci fornisce una tecnica interessante per il calcolo dell'omotopia, che possiamo sfruttare anche per lo studio dei gruppi finiti delle sfere. Consideriamo ad esempio il caso $n = 3$ e proviamo a calcolare $\pi_4(S^3, *)$. Dall'approssimazione di Whitehead

$$F := \tau_{\geq 4} S^3 \longrightarrow S^3 \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 3),$$

tramite la successione di Barret-Puppe otteniamo la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}, 2) \hookrightarrow F \longrightarrow S^3.$$

LA SS Guardando la successione spettrale in \mathbb{Z} in coomologia, otteniamo

$$E_2^{\bullet, \bullet} \simeq \Lambda[\sigma] \otimes \mathbb{Z}[\iota_2], \quad |\sigma| = 3, |\iota_2| = 2.$$

Per ogni k si ha dunque

$$H^{2k+1}(\tau_{\geq 4} S^3) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \implies H_{2k}(\tau_{\geq 4} S^3) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$$

La prima p -torsione si ritrova in

$$H_{2k}(\tau_{\geq 4} S^3) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

quindi l'omotopia $\pi_i(S^3, *) = 0 \bmod \mathcal{C}_p$ per $i < 2p$. Siccome $\pi_{2p}(\pi_i(S^3, *) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, per $p = 2$ concludiamo

$$\pi_4(S^3, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \pi_4(S^2, *),$$

dove abbiamo sfruttato la fibrazione di Hopf $S^1 \subset S^3 \rightarrow S^2$.

Sospensione

Più volte durante il corso abbiamo usato la classica fibrazione

$$\Omega X \hookrightarrow PX \longrightarrow X.$$

Infatti, questa nasce considerando i funtori tra spazi topologici puntati

$$\mathbf{Top}_* \xleftarrow[\Omega]{\Sigma} \mathbf{Top}_*$$

che sono tra loro aggiunti: più precisamente, dotando gli spazi di funzioni della topologia compatto-aperta, per ogni coppia di spazi topologici X, Y abbiamo degli *omeomorfismi* naturali

$$\text{hom}(\Sigma X, Y) \simeq \text{hom}(X, \Omega Y),$$

dove i morfismi di aggiunzione sono dati esplicitamente da

$$\begin{aligned} \sigma_X : X &\longrightarrow \Omega \Sigma X, & ev_Y : \Sigma \Omega Y &\longrightarrow Y, \\ \sigma_X(x)(t) &:= [x, t] \in \Sigma X, & ev_Y(\omega, t) &:= \omega(t). \end{aligned}$$

I.26. Proposizione. — *Dato uno spazio X connesso per archi e semplicemente connesso, sia $\{E_{*,*}^n\}_{n \geq 2}$ la successione spettrale associata alla fibrazione $\Omega X \hookrightarrow PX \xrightarrow{\pi} X$. L'omomorfismo di trasgressione*

$$H_n(X) = E_{n,0}^2 \supset E_{n,0}^n \xrightarrow{d^n} E_{0,n-1}^n \longleftarrow E_{0,n-1}^2 = H_{n-1}(\Omega X)$$

è indotto dall'inversa della composizione

$$\overline{H}_{n-1}(\Omega X) \simeq \overline{H}_n(\Sigma \Omega X) \longrightarrow H_n(X).$$

specificare
che C indica
i cammini
liberi

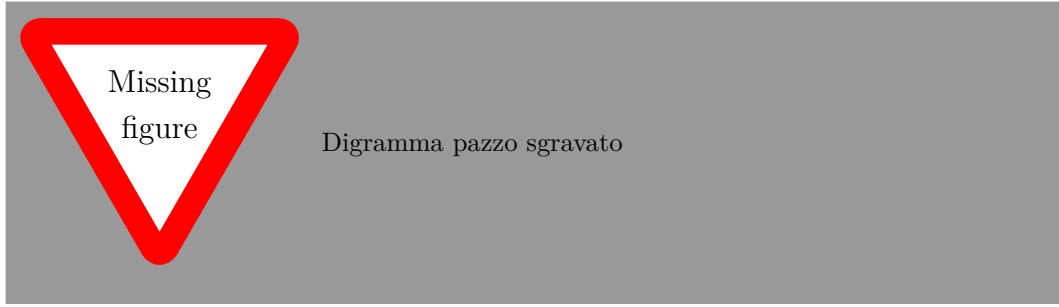
Dimostrazione. Considero la mappa

$$\varphi : C\Omega X \longrightarrow PX, \quad \omega_t(u) := \omega(tu),$$

cioè ΩX è contraibile in PX . Considero allora la valutazione

$$ev' : C\Omega X \longrightarrow X, \quad ev'(t, \omega) := \omega(t).$$

Abbiamo quindi il diagramma:



che mostra che $ev_* \circ \Sigma$ è l'inversa della trasgressione $\partial_* \circ \pi_*^{-1} : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(\Omega X)$. \square

Osservazione. — Possiamo interpretare la valutazione $ev : \Sigma\Omega X \rightarrow X$ in coomologia in un gruppo abeliano A attraverso il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{H}^n(X; A) & \longrightarrow & \overline{H}^{n-1}(\Omega X; A) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & & [\Omega X, K(A, n-1)]_* \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \\
 & & [\Omega X, \Omega K(A, n)]_* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [X, K(A, n)]_* & \xrightarrow{ev^*} & [\Sigma\Omega X, K(A, n)]_*
 \end{array}$$

I.27. Proposizione. — Sia \mathcal{C} un anello di Serre. Siano $n > 1$ e X semplicemente connesso tale che $H_i(X) \in \mathcal{C}$ per ogni $i < n$. Allora

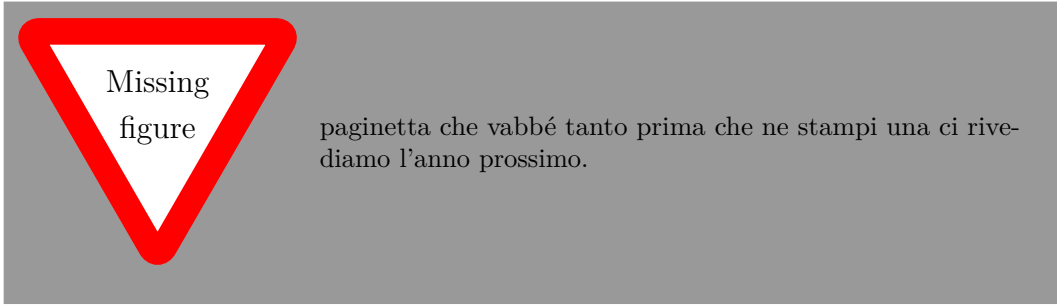
$$ev_* : \overline{H}_{i-1}(\Omega X) \longrightarrow \overline{H}_i(X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} , per ogni $i < 2n-1$, e epimorfismo mod \mathcal{C} per $i = 2n-1$.

Dimostrazione. Per quello che abbiamo visto

$$\overline{H}_i(\Omega X) \in \mathcal{C}, \quad \text{per ogni } i < n-1,$$

quindi analizzando la sequenza spettrale della fibrazione $\Omega X \subset PX \rightarrow X$ notiamo che



Solito discorso: in grado $(2n-1, 0)$ parte un differenziale che tocca un quadrante non banale in posizione $(n, n-1)$, e quindi possiamo trovare un epi su un quoziente; più in basso invece abbiamo via libera e i differenziali partono dalla riga zero-esima per arrivare, come isomorfismi, alla colonna zero-esima. Si ottiene così il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{2n-1}(X) & \xrightarrow{\simeq} & \frac{H_{2n-2}(\Omega X)}{\text{im } d^n} \\ & \swarrow \text{ev}_* & \nearrow \\ & H_{2n-2}(\Omega X) & \end{array} .$$

□

Se applichiamo il funtore di sospensione alla mappa σ_X di aggiunzione, allora otteniamo il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma \sigma_X} & \Sigma \Omega \Sigma X \\ & \searrow \mathbf{1}_{\Sigma X} & \swarrow \text{ev}_{\Sigma X} \\ & \Sigma X & \end{array}$$

che in omologia risolta induce lo spezzamento

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_i(X) & \xrightarrow{(\simeq_X)_*} & H_i(\Omega \Sigma X) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \overline{H}_{i+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\Sigma(\sigma_X)_*} & H_{i+1}(\Sigma \Omega \Sigma X) \\ & \searrow \simeq & \swarrow (ev_X)_* \\ & H_{i+1}(\Sigma X) & \end{array}$$

Per la [Proposizione ??](#), se X è $(n-1)$ -connesso oppure $H_i(X) \in \mathcal{C}$ per ogni $i < n$, allora la mappa

$$(ev_{\Sigma X})_* : H_i(\Omega \Sigma X) \longrightarrow H_{i+1}(\Sigma X)$$

è un isomorfismo mod \mathcal{C} per ogni $i < 2n$, come pure $(\sigma_X)_*$. Applicando il Teorema di Whitehead mod \mathcal{C} si ottiene quindi

I.28. Teorema (Sospensione di Freudenthal mod \mathcal{C}). — *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre aciclico, $n \geq 1$ e X uno spazio topologico semplicemente connesso, tale che $\overline{H}_i(X) \in \mathcal{C}$, per ogni $i < n$. Allora l'omomorfismo di sospensione*

$$\pi_i(X, *) \longrightarrow \dots$$

finire di copiare.

Devo recuperare

Operazioni di Steenrod

Per il resto della sezione lavoreremo sempre in coomologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e per semplicità scriveremo solamente $H^*(X)$. Che operazioni modulo 2 conosciamo in coomologia?

Esempio. — Un esempio banale potrebbe essere semplicemente $x \mapsto x^m$, e se $m = 2^n$ allora è una mappa additiva.

Esempio. — Ricordiamo che abbiamo già parlato dell'**omomorfismo di Bockstein**

$$\beta_2 : H^i(X) \longrightarrow H^{i+1}(X),$$

dato dall'omomorfismo di connessione della successione in coomologia, ottenuta applicando il funtore $\text{Hom}(C_*(X), -)$ alla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Esercizio. — Provare a calcolare l'omomorfismo di Bockstein per $X = \mathbb{RP}^2$ e dimostrare che

$$\beta_2 : H^1(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow H^2(\mathbb{RP}^2)$$

è un isomorfismo.

I.29. Teorema. — *Esiste un'unica famiglia di trasformazioni naturali additive*

$$Sq^k : H^n(X) \longrightarrow H^{n+k}(X), \quad \text{con } n, k \geq 0,$$

tali che soddisfino:

- $Sq^0 x = x$;
- $Sq^k x = x^2$ se $|x| = k$;
- $Sq^k x = 0$ se $k > |x|$;
- vale la **formula di Cartan**

$$Sq^k(x \cup y) = \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \cup Sq^j(y). \quad (\text{I.29.1})$$

Chiameremo queste trasformazioni naturali le **operazioni di Steenrod**.

Se mettiamo insieme tutti i quadrati di Steenrod, possiamo vedere Sq come un morfismo che si “spalma” su tutto l’anello di coomologia

$$Sq : H^*(X) \longrightarrow H^*(X), \quad Sq(x) = Sq^0(x) + Sq^1(x) + Sq^2(x) + \dots$$

Allora la formula di Cartan (I.29.1) in questo caso diventa la condizione di moltiplicatività

$$Sq(x \cup y) = Sq(x) \cup Sq(y).$$

Per il **Lemma di Yoneda**, le trasformazioni naturali Sq^k possono essere rappresentate dalla coomologia dello spazio classificante, o meglio

$$H^n(K_n) \longrightarrow H^{n+k}(K_n), \quad K_n := K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n).$$

I.30. Proposizione. — *Le operazioni di Steenrod sono **stabili** e, per ogni n e q , il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q(X) & \xrightarrow{Sq^n} & \overline{H}^{q+n}(X) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ \overline{H}^{q+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{Sq^n} & \overline{H}^{q+n+1}(\Sigma X). \end{array}$$

Dimostrazione. La sospensione Σ è indotta dal cross product definito dal **Teorema di Künneth**

$$\overline{H}(S^1, *) \otimes \overline{H}^*(X, x_0) \longrightarrow H^*(S^1 \times X, S^1 \vee X) \simeq \overline{H}^*(S^1 \wedge X), \quad \omega_1 \otimes \alpha \longmapsto \pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha),$$

dove ω_1 è il generatore della coomologia ridotta di S^1 in grado 1.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longmapsto & \pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha) \\ \downarrow Sq^n & & \downarrow Sq^n \\ Sq^n \alpha & \longmapsto & Sq^n(\pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha)), \end{array}$$

dove il termine in basso a destra per la formula di Cartan è proprio

$$Sq^n(\pi_1^*(\omega_1) \cup \pi_2^*(\alpha)) = \sum_{i+j=n} Sq^i(\pi_1^*(\omega_1) \cup Sq^j(\pi_2^*(\alpha))) = \pi_1^*(\omega_1) \cup Sq^n \pi_2^*(\alpha),$$

dove abbiamo usato che $Sq^n(\pi_1^*(\omega_1)) = 0$ per ogni $n > 0$. \square

Conosciamo già un'operazione di Steenrod:

I.31. Proposizione. — *La prima operazione di Steenrod è l'omomorfismo di Bockstein, i.e. $Sq^1 = \beta_2$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su n . Facciamo vedere che Sq^1 è non banale e alza di 1 il grado della coomologia. Siccome soddisfa tutte le proprietà descritte dal teorema e anche β_2 soddisfa le condizioni del teorema, allora per unicità devono essere uguali. Ma lo devo copiare perché non so come scriverlo, c'è la solita paginetta della SS della fibrazione dei loop. \square

I.32. Lemma. — *Il prodotto cup in $H^*(\Sigma X)$ è banale in grado > 0 .*

Dimostrazione. Segue perché la sospensione ΣX si può scrivere come l'unione di due coni $\Sigma X = C_+X \cup C_-X$, che sono due sottospazi contraibili. Ma allora

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Sigma X, *) \otimes H^*(\Sigma X, *) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\Sigma X, *) \\ & & \uparrow \\ H^*(\Sigma X, C_+X) \otimes H^*(\Sigma X, C_-X) & \xrightarrow{\smile} & H^*(\Sigma X, \Sigma X) = 0. \end{array}$$

\square

LEZIONE 7
16th mag., 2023

Dimostrazione del Teorema I.29. Dimostriamo l'enunciato per induzione su n , il grado della coomologia. Chiamo $iota_n \in H^n(K_n)$ la classe fondamentale.

Per naturalità, è sufficiente definire $Sq^i \iota_n$, per ogni i e per ogni n . Il caso $n = 1$ è determinato: siccome sappiamo che $K_1 = \mathbb{RP}^\infty$, allora $Sq^0 \iota_1 = \iota_1$, $Sq^1 \iota_1 = \iota_1^2$ e per $n > 1$ abbiamo $Sq^i \iota_1 = 0$.

Supponiamo ora $n > 1$. Supponiamo di aver definito ι_{n-1}^i per ogni i e definiamo $Sq^i \iota_n$ tramite le trasgressioni studiate in precedenza: consideriamo la fibrazione

$$K_{n-1} = \Omega K_n \hookrightarrow PK_n \longrightarrow K_n.$$

La trasgressione è un isomorfismo tra

$$H^{n-1}(K_{n-1}) \longrightarrow H^n(K_n), \quad \iota_{n-1} \longmapsto d_n(\iota_{n-1}) = \iota_n.$$

Per $i < n - 1$, allora abbiamo

$$d_{n+1}^{0,n+i-1} : H^{n+i-1}(K_{n-1}) \longrightarrow H^{n+i}(K_n), \quad Sq^i(\iota_{n-1}) \longmapsto Sq^i(\iota_n),$$

disegnettoooooo

dato che per questi indici non incontriamo il quadrante non banale “in alto a destra”. Per ogni $i < n - 1$ definiamo quindi $Sq^i(\iota_n) := d_{n+i}Sq^i(\iota_{n-1})$. A priori, il caso $i = n - 1$ potrebbe creare dei problemi: tuttavia, sappiamo che $Sq^{n-1}(\iota_{n-1}) = \iota_{n-1}^2$, quindi calcolandone il differenziale n -esimo otteniamo

$$d_n Sq^{n-1}(\iota_{n-1}) = d_n \iota_{n-1}^2 = 2\iota_{n-1}\iota_n = 0$$

perché siamo a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dunque il differenziale è nullo, da cui deduciamo che ι_{n-1}^2 è una classe trasgressiva. Questo ci permette di definire

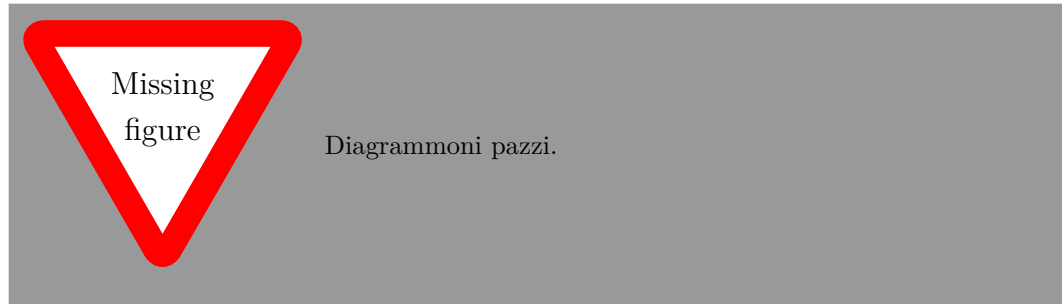
$$Sq^{n-1}(\iota_n) := d_{2n-1}(Sq^{n-1}(\iota_{n-1})) = d_{2n-1}\iota_{n-1}^2, \quad Sq^n(\iota_n) := \iota_n^2.$$

Questo dimostra l'esistenza delle operazioni di Steenrod.

Ora dimostriamo che queste operazioni hanno la proprietà di stabilità. Sia f_n l'omomorfismo

$$f_n : H^{n+i}(K_n) \longrightarrow H^{n+i-1}(K_{n-1}), \quad Sq^i(\iota_n) \longmapsto Sq^i(\iota_{n-1}).$$

Per $i > n$ non c'è nulla da dimostrare, mentre per $i < n$ la proprietà vale per costruzione, quindi rimane da studiare il caso $i = n$.



Definiamo la mappa i_n più esplicitamente: una classe $\alpha \in [K(\pi, n), K(\pi, n)]$ tramite Ω viene mandata nella classe di

$$\Omega\alpha : \Omega K(\pi, n) \longrightarrow \Omega K(\pi, n), \quad \gamma \mapsto \alpha \circ \gamma.$$

Ma allora applicando la sospensione Σ , tramite la proprietà di aggiunzione deduciamo che

$$\Sigma\Omega\alpha : \Sigma\Omega K(\pi, n) \longrightarrow K(\pi, n), \quad (t, \gamma) \longmapsto \Sigma\Omega\alpha(t, \gamma) = \alpha \circ ev(t, \gamma) = \alpha(\gamma(t)).$$

Questo mostra che $i_n^*(\alpha) = \alpha \circ ev$, cioè $i_n^* = ev^*$, ma l'omomorfismo di trasgressione in $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ è l'inverso di

$$\overline{H}^{n-1}(\Omega X) = \overline{H}^n(\Sigma\Omega X) \xleftarrow{ev^*} \overline{H}^n(X).$$

Segue che f_n è l'inverso della trasgressione per $i < n$ e quindi per definizione $f_n(Sq^i \iota_n) = Sq^i \iota_{n-1}$. Per $i = n$, ricordiamo che $Sq^n(\iota_n) = \iota_n^2$ e $Sq^n(\iota_{n-1}) = 0$, quindi consideriamo il triangolo commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(K_n) & \xrightarrow{f_n} & H^{2n-1}(K_{n-1}) \\ & \searrow i_n^* & \nearrow \Sigma^{-1} \\ & H^{2n}(\Sigma K_{n-1}) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \iota_n^2 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & i_n^*(\iota_n)^2 = 0 & \end{array},$$

dove abbiamo usato che ogni quadrato in una sospensione è zero.

Resta da mostrare che vale la formula di Cartan [I.29.1](#). Siano $\alpha \in H^m(X), \beta \in H^n(X)$. Se $m = 0$ oppure $n = 0$, allora non ci sono problemi. Se $k > m + n$, allora $Sq^k(\alpha\beta) = 0$ e $\sum_{i+j=k} Sq^i(\alpha)Sq^j(\beta) = 0$, quindi va bene. Se $k = m + n$, allora $Sq^k(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^2$, mentre dall'altra parte

$$\sum_{i+j=m+n} Sq^i(\alpha)Sq^j(\beta) = Sq^m(\alpha)Sq^n(\beta) = \alpha^2\beta^2,$$

quindi i due termini sono uguali, dato che i coefficienti sono in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Adesso supponiamo di aver mostrato che la formula vale per $k > m + n - s$, con $s > 0$. Dimostriamo che allora vale anche per $k = m + n - s$; questo dimostra la formula per induzione. Consideriamo le proiezioni

$$X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y,$$

e per ogni $\alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(Y)$ definiamo il prodotto $\alpha \cdot \beta := \pi_1^*(\alpha) \smile \pi_2^*(\beta)$. La formula di Cartan equivale a

$$Sq^{m+n-s}(\alpha \cdot \beta) = \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\alpha) \cdot Sq^j(\beta). \quad (\text{I.32.1})$$

Se dimostriamo l'identità per X, Y due qualsiasi CW complessi, allora abbiamo la tesi. Poiché $m, n > 0$, prendo $\alpha \in H^m(X, x_0), \beta \in H^n(Y, y_0)$ e ottengo

$\alpha \cdot \beta \in H^{m+n}(X \times Y, X \vee Y) = H^{m+n}(X \wedge Y, *)$. Per naturalità, posso limitarmi a considerare due classi fondamentali

$$\alpha = \iota_m \in H^m(K_m, *), \quad \beta = \iota_n \in H^n(K_n, *).$$

Allora il prodotto smash degli spazi classificanti può essere vista come

$$\begin{array}{ccc} & (\Sigma K_{m-1}) \wedge K_n \Longleftarrow \Sigma(K_{m-1} \wedge K_n) & \\ & \swarrow i_m \wedge \mathbf{1}_{K_n} & \\ K_m \wedge K_n & & \\ & \nwarrow \mathbf{1}_{K_m} \wedge i_n & \\ & K_m \wedge (\Sigma K_{n-1}) \Longleftarrow \Sigma(K_m \wedge K_{n-1}), & \end{array}$$

e quindi passando in coomologia si ottiene

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(1)} & \\ & H^k((\Sigma K_{m-1}) \wedge K_n) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} H^{k-1}(K_{m-1} \wedge K_n) & \\ & \uparrow (i_m \wedge \mathbf{1}_{K_n})^* & \\ H^k(K_m \wedge K_n) & & \\ & \downarrow (\mathbf{1}_{K_m} \wedge i_n)^* & \\ & H^k(K_m \wedge (\Sigma K_{n-1})) \xrightarrow{\Sigma^{-1}} H^{k-1}(K_m \wedge K_{n-1}). & \\ & \xrightarrow{(2)} & \end{array}$$

Gli omomorfismi nel diagramma commutano con le operazioni di Steenrod. Dimostriamo ora che se $\gamma \in H^*(K_m \wedge K_n)$ è annullata sia da (1), sia da (2), allora necessariamente $\gamma = 0$. Per mostrarlo, assumo $\gamma = \sum_i \alpha_i \cdot \beta_i$, con $\alpha_i \in H^*(K_m)$ e $\beta_i \in H^*(K_n)$ e numero di termini nella somma più piccolo possibile. Con α_i linearmente indipendenti in $H^*(K_m)$ e β_i linearmente indipendenti in $H^*(K_n)$, le mappe (1) e (2) mandano rispettivamente

$$\sum_i \alpha_i \cdot \beta_i \mapsto \sum_i f^m(\alpha_i) \cdot \beta_i, \quad \sum_i \alpha_i \cdot \beta_i \mapsto \sum_i \alpha_i \cdot f_n(\beta_i),$$

e se sono entrambi nulli allora deduciamo che ogni $f_m(\alpha_i) = 0$ e $f_n(\beta_i) = 0$. Ma se $f_m(\alpha) = 0$, questo implica che $\alpha \in H^r(K_m)$ per qualche $r > 2m$, e il risultato analogo vale per i β . Se dunque consideriamo

$$\Delta = Sq^{m+n-s}(\iota_m \cdot \iota_n) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_m) \cdot Sq^j(\iota_n),$$

la sua immagine attraverso (1) è

$$Sq^{m+n-s}(\iota_{m-1} \cdot \iota_n) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_{m-1}) \cdot Sq^j(\iota_n),$$

mentre invece (2) ci dà

$$Sq^{m+n-s}(\iota_m \cdot \iota_{n-1}) - \sum_{i+j=m+n-s} Sq^i(\iota_m) \cdot Sq^j(\iota_{n-1}).$$

Dato che (1) $\Delta = 0$ e (2) $\Delta = 0$ per ipotesi induttiva, allora concludiamo che $\Delta = 0$. \square

Definizione. — Indichiamo con \mathcal{A}_2 l'algebra delle operazioni coomologiche generata dalle operazioni di Steenrod Sq^n , in cui il prodotto è dato dalla composizione.

L'algebra \mathcal{A}_2 è *tutta* l'algebra di operazioni coomologiche stabili di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Inoltre, si può dimostrare che \mathcal{A}_2 **non** è libera:

I.33. Teorema (Adams). — *Per $a < 2b$, vale la relazione*

$$Sq^a Sq^b = \sum_c \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c,$$

dove c varia tra $\max(a-b+1, 0)$ e $\lfloor a/2 \rfloor$. Questo sistema di relazioni è **completo**.

Esempio. — Alcune relazioni in \mathcal{A}_2 sono $Sq^1 Sq^{2n} = Sq^{2n+1}$, $Sq^1 Sq^{2n+1} = 0$, $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$, $Sq^3 Sq^2 = 0$.

Definizione. — Posto il multiindice $I = (i_1, \dots, i_n)$, definiamo l'operazione

$$Sq^I := Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_n}.$$

Se vale $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \dots, i_{n-1} \geq 2i_n$, allora I si dice **ammissibile** e Sq^I è un'operazione **ammissibile**. Chiamo **eccesso** di I il valore

$$e(I) := \sum_{j=1}^{n-1} (i_j - 2i_{j+1}) = 2i_1 - \sum_{j=1}^n i_j.$$

I.34. Proposizione. — Una **base** additiva di \mathcal{A}_2 è data dalle operazioni Sq^I ammissibili.

Dimostrazione. Mostriamo che iterando le relazioni di Adam è possibile riscrivere ogni Sq^I non ammissibile come somma di ammissibili. Infatti, possiamo ordinare i multiindici I tramite l'ordinamento lessicografico (ricordiamo che è un buon ordinamento), e di conseguenza possiamo ordinare i Sq^I . Posso applicare le relazioni di Adam solo se I non è ammissibile, quindi applicando le relazioni a Sq^I ottengo Sq^{J_i} minori rispetto all'ordine lex. Siccome basta un numero finito di iterazioni per ricondursi a Sq^{J_i} , allora deduciamo che le relazioni di Adam sono un sistema completo. \square

I.35. Teorema (Serre). — *L'anello di coomologia $H^*(K_n)$ è un'algebra polinomiale generata dalle classi $Sq^I \iota_n$, per tutte le sequenze ammissibili I con eccesso $e(I) < n$.*

scrivi

I.36. Teorema. — *Se i non è una potenza di 2... Vedi Lemma di Kummer...*

I.37. Corollario. — *L'algebra \mathbb{A}_2 è generata (come algebra) dagli Sq^{2^i} .*

Osservazione. — Trovare delle relazioni “abbastanza semplici” in \mathbb{A}_2 come algebra è ancora un problema aperto. Più precisamente, sappiamo che relazioni *additive* ci sono, grazie a Adam, tuttavia prendendo questi generatori Sq^{2^i} ad oggi non si conoscono delle relazioni *moltiplicative* che diano una descrizione soddisfacente.

I.38. Teorema. — *Se n non è una potenza di 2, allora non esistono in $\pi_{2n-1}(S^n)$ elementi con invariante di Hopf dispari.*

Dimostrazione. Dato $\alpha \in \pi_{2n-1}(S^n)$, consideriamo un rappresentante $f \in \alpha$ e costruiamo lo spazio $Y := D^{2n} \cup_f S^n$. La sua coomologia sarà

$$H^q(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{se } q = 0, n, 2n; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ma allora

$$H^n(Y) \longrightarrow H^{2n}(Y), \quad \alpha \longmapsto \alpha^2 = Sq^n(\alpha),$$

quindi se n non è una potenza di 2, possiamo scomporre l'operazione di Steenrod come somma

$$Sq^n = \sum_{i+j=n} a_i Sq^i Sq^j(\alpha) \in H^{n+j}(Y) = 0,$$

e quindi abbiamo la tesi. \square

I.39. Teorema (Borel). — Sia $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ una fibrazione, con base B semplicemente connessa e tale che

- $\overline{H}^*(E) = 0$;
- $\overline{H}^*(F)$ è un anello generato dalle classi di trasgressione $a_i \in H^{m_i}(F)$, con $m_1 \leq m_2 \leq \dots$.
- i monomi $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, con $i_1 < \dots < i_k$, sono una base di $\overline{H}^*(F)$.

Allora $H^*(B)$ è un'algebra polinomiale con generatori $b_i \in H^{m_i+1}(B)$, ciascuno dei quali è ottenuto come immagine di a_i tramite la trasgressione.

Osservazione. — La seconda ipotesi del teorema si ritrova in molti casi, ad esempio quando $H^*(F)$ è un prodotto tensoriale di anelli della forma

- potenza esterna $\Lambda_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[x_1, \dots, x_n]$, con $a_i = x_i$;
- algebra polinomiale $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, con $a_i = x_{j_i}^{2^{k_i}}$;
- $\Lambda_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}[x]/(x^{2^k})$, con $a_i = x^{2^i}$, per qualche $1 \leq i \leq n-1$.

Osservazione. — Le operazioni di Steenrod mandano elementi trasgressivi in elementi trasgressivi.

I.40. Teorema. — Per $n \geq 2$, l'anello di coomologia $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è l'anello di polinomi con generatori $Sq^I e_n$, dove $e_n \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ è la classe fondamentale dello spazio di Eilenberg-MacLane, e I è un multiindice ammissibile con $e(I) < n$.

Calcoli di alcuni gruppi di omotopia stabile

Ricordando che l'isomorfismo di Freudenthal stabilizza all'aumentare della dimensione delle sfere, ha senso definire i **gruppi di omotopia stabile**

$$\pi_m^s(S^n) := \lim_k \pi_{m+k}(S^{n+k}).$$

Sia n abbastanza grande, in modo tale che $\pi_k(S^n)$ sia stabile per k fissato. Allora consideriamo la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \hookrightarrow \tau_{\geq n+1} S^n \longrightarrow S^n,$$

dove $\tau_{\geq n+1} S^n$ è la sezione di Whitehead che uccide tutti i gruppi di omotopia di grado $\geq n$. Ora che conosciamo la coomologia di $K(\mathbb{Z}, n-1)$, possiamo

considerare la successione spettrale associata alla fibrazione. Vediamo che nella colonna zeresima, tra $n - 1$ e $2n + 1$ troviamo oggetti di rango 1, e in particolare vediamo che e viene mandato in s , il generatore di $H^n(S^n; \mathbb{Z})$. Questo ci permette di calcolare la coomologia $H^{n+k}(K(\mathbb{Z}, n - 1); \mathbb{Z})$, per k abbastanza piccolo (diciamo $k \ll n$). Per studiarlo ulteriormente, possiamo dunque passare alla sezione di Whitehead successiva:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n) & \hookrightarrow & \tau_{\geq n+2}S^n \\ & & \downarrow \\ K(\mathbb{Z}, n - 1) & \hookrightarrow & \tau_{\geq n+1}S^n \\ & & \downarrow \\ & & S^n, \end{array}$$

dove la fibra è $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$ è dovuta al fatto che sappiamo $\pi_4(S^3, *) \simeq \mathbb{Z}/2$, quindi $\pi_4^s(S^3) = \mathbb{Z}/2$. Analizzando la magica successione spettrale, si osserva che i primi gruppi di coomologia non banali sono

$$H^{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H^{n+3}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Queste informazioni non ci permettono di ricavare completamente l'omologia a coefficienti in \mathbb{Z} , ma possiamo dedurre che

$$H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus T, \quad \text{oppure} \quad H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z} \oplus T,$$

dove T è un gruppo con ordine coprimo rispetto a 2. Siccome \mathbb{Z} non è un termine *stabile* nell'omotopia delle sfere, deduciamo che la prima situazione non può accadere. Ci chiediamo quindi chi possa essere s nella potenza del secondo gruppo. Il generatore $w \in H^{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ determina una mappa

$$f : \tau_{\geq n+2}S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2),$$

che possiamo usare per fabbricare una fibrazione

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 1) & \Longleftarrow & K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & PK(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\geq n+2}S^n & \xrightarrow{f} & K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n + 2). \end{array}$$

Dalla successione di omotopia della colonna di sinistra, otteniamo

$$\dots \longrightarrow \pi_q(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1), *) \longrightarrow \pi_q(E, *) \longrightarrow \pi_q(\tau_{\geq n+2}S^n, *) \xrightarrow{\varphi} \pi_{q-1}(K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n+1), *) \longrightarrow$$

dove φ è suriettiva per $q = n+2$ ed è la mappa nulla altrimenti. Ne segue che

$$\pi_q(\tau_{\geq n+2}S^n, *) \simeq \begin{cases} 0, & \text{se } q < n+2; \\ \pi_q(S^n, *), & \text{se } q > n+2; \\ \ker \varphi, & \text{se } q = n+2. \end{cases}$$

Dalla successione spettrale di $E \rightarrow \tau_{\geq n+2}S^n$ si calcola $H_{n+2}(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, e quindi l'omotopia $\pi_{n+2}(E, *)$ deve essere zero oppure un gruppo di ordine dispari. Da questo si conclude che

$$\pi_{n+2}(S^n, *) = H_{n+2}(\tau_{\geq n+2}S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Con calcoli analoghi si possono ricavare anche i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \pi_5(S^2) &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \pi_6(S^3) &= \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \\ \pi_7(S^4) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \\ \pi_{n+3}(S^n) &= \mathbb{Z}/22\mathbb{Z}, \quad \text{per } n \geq 5. \end{aligned}$$

Portare avanti questi calcoli con tecniche elementari diventa sempre più difficile all'aumentare della dimensione delle sfere, e quindi non è molto pratico per attaccare il problema più in generale. Tuttavia, possiamo sviluppare nuove tecniche per il calcolo dell'omotopia stabile.

Successione spettrale di Adams

Sia \mathcal{A} un'algebra associativa, non necessariamente commutativa, su un campo \mathbb{K} . Idealmente, vorremo usare $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ l'algebra di Steenrod. Se M è un \mathcal{A} -modulo destro, riusciamo sempre a fabbricare una risoluzione

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

di \mathcal{A} -moduli destri proiettivi. Dato N un \mathcal{A} -modulo sinistro (risp. destro), possiamo applicare il funtore $-\otimes_{\mathcal{A}} N$ (risp. $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)$) e ottenere così una successione

$$\dots \longrightarrow P_2 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow P_1 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathcal{A}} N \longrightarrow 0,$$

che in generale *non* è esatta (similmente con Hom). Questo ci permette di definire i funtori

$$\text{Tor}_n^{\mathcal{A}} :=$$

Fissato p primo, poniamo $\mathcal{A} = \mathbb{A}_p$ l'algebra delle operazioni coomologiche modulo p . Per semplicità, consideriamo l'algebra $\mathcal{A} = \mathbb{A}_2$ delle operazioni di Steenrod.

Dato uno spazio Y , l'insieme

$$\pi_n^Y(X) := [\Sigma^n Y, X]_*$$

ha tutta la dignità di essere un gruppo vero e proprio. Il **Teorema di Freudenthal** fornisce anche in questo caso degli isomorfismi di sospensione che stabilizzano, e possiamo dunque definire l'**omotopia stabile**

$$(\pi_k^Y)^s(X) := \lim_n \pi_{k+n}^Y(\Sigma^n X) = [\Sigma^{k+n} Y, \Sigma^n X]_*.$$

Si osservi che per $Y = S^0$ si ottiene la nozione di omotopia stabile vista prima.

Costruiremo una successione spettrale

$$E_r^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{s+t}(\overline{H}^*(X), \overline{H}^*(Y)).$$

Sia X uno spazio topologico e consideriamo una risoluzione libera di \mathcal{A} -moduli

$$0 \longleftarrow \overline{H}^*(X) \longleftarrow B_0 \longleftarrow B_1 \longleftarrow \dots$$

Per N abbastanza grande, mostriamo adesso come approssimare il modulo B_i , che è un modulo graduato, con la coomologia di uno spazio topologico *fino al grado* n , cioè

$$\overline{H}^*(X) \simeq \overline{H}^*(\Sigma^N X),$$

a meno di shift di dimensione. Cominciamo prendendo i generatori liberi di B_0 come \mathcal{A} -modulo e siano $\alpha_i \in H^{q_i}(X)$ le loro immagini; ogni generatore ι_{q_i} induce delle mappe

$$\alpha_i : X \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, q_i), \quad \Sigma^n \alpha_i : \Sigma^n X \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, N + q_i).$$

Il vantaggio di aver sospeso N volte è che otteniamo una mappa

$$\Sigma^N X \longrightarrow Y_0 := \prod_i K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, N + q_i),$$

c'è stato un commento sul fatto che la coomologia di questi spazi, purtroppo, non sarà mai libera. Qui trattiamo un po' con le mani una teoria più generale, che è quella degli spettri topologici

dove l' \mathcal{A} -modulo $\overline{H}^*(Y_0)$ adesso è libero nei gradi compresi tra N e $2N$, e inoltre $\overline{H}^q(Y_0) = B_0^q$ per ogni $q < N$. Quindi $X(0) := \Sigma^N X \rightarrow Y_0$ induce una mappa di \mathcal{A} -moduli

$$H^*(Y_0) \longrightarrow H^*(\Sigma^N X)$$

che “coincide” con $B_0 \rightarrow H^*(X)$ in grado $< N$. A meno di passare ai mapping cones, possiamo vedere $X(0) \rightarrow Y_0$ come una fibrazione con fibra $X(1)$, e quindi ne possiamo studiare la successione spettrale.

AAAAA

L'ho perso completamente...

Le mappe verticali della colonna a sinistra

$$\begin{array}{ccc} & \cdots & \\ & \downarrow & \\ & X(2) \longrightarrow Y_2 & \\ & \downarrow & \\ & X(1) \longrightarrow Y_1 & \\ & \downarrow & \\ \Sigma^N X \hookrightarrow X(0) & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

sono inclusioni e possiamo quindi vederle come *fibrazioni*: quindi possiamo sostituire la fibra dell'inclusione $X(n+1) \hookrightarrow X(n)$ con $Z_n := \Omega Y_n$.

Siccome $\overline{H}^* \simeq B_i$ come \mathcal{A} -moduli (a meno di uno shift di $N - i + 1$), fino al grado n , deduciamo allora che anche

$$\overline{H}^*(Z_i) \simeq B_i$$

Non sto capendo bene questi gradi, devo ricontrollare

in dimensione $N - i < q < N - i + n$

Osservazione. — La mappa della risoluzione libera ci dà

$$\overline{H}^*(X(i)) \simeq \ker (B_{i-1} \longrightarrow B_{i-2}) .$$

Analizziamola, ad esempio, per $i = 1$:

$$\overline{H}^*(X(0)) \simeq \ker (B_0 \longrightarrow \overline{H}^*(X))$$

manda i generatori liberi in grado 0 nei generatori di $\overline{H}^*(X)$ in grado 0, quindi il nucleo di questa mappa è *banale in grado 0*: se ne deduce che $X(1)$ è uno spazio

1-connesso. Ripetendo lo stesso ragionamento nei gradi più alti, si deduce che in realtà $X(1)$ è $(N - 1)$ -connesso. Analogamente anche

$$\overline{H}^*(X(i)) \simeq \ker (B_{i-1} \longrightarrow B_{i-2}) .$$

ha $\ker^j = 0$ per $j \leq i - 1$, e shiftando la dimensione opportunamente si vede che $H^{N-1}(X(i)) = 0$.

Coppie esatte

Supponiamo di avere D, E due R -moduli (in particolare ci interesseranno *bigradati*), e un triangolo commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & \searrow k & \nearrow j \\ & E & \end{array}$$

che è esatto in ogni punto.

Definizione. — Definiamo il dato $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ una **coppia esatta**.

Osservazione. — Se definiamo $d = j \circ k$ (attenzione, *non* $j \circ i \circ k$), allora otteniamo un differenziale in E poiché

$$d^2 = j \circ k \circ j \circ k = 0 .$$

Definizione. — Data una coppia esatta $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$, pongo $d = j \circ k$, $D' := i(D) = \ker j$ e di conseguenza

$$\begin{aligned} E' &= H(E, d), \quad j' : D' \rightarrow E', \\ i' &= i|_{D'} : D' \rightarrow D', \quad \dots \end{aligned}$$

Allora il dato $\mathcal{C}' = (D', E', i', j', k')$ si chiama **coppia derivata** di \mathcal{C} .

I.41. Proposizione. — *La coppia derivata di una coppia esatta è a sua volta una coppia esatta.*

Le coppie esatte ci permettono di produrre successioni spettrali, proprio come succedeva nella situazione dei moduli graduati filtrati.

I.42. Teorema. — *Dati due R -moduli bigraduati $D^{*,*} = \{D^{p,q}\}$ e $E^{*,*} = \{E^{p,q}\}$, con morfismi²*

$$\begin{aligned} i : D &\longrightarrow D, & \text{di grado } (-1, -1), \\ j : D &\longrightarrow E, & \text{di grado } (0, 0), \\ k : E &\longrightarrow D, & \text{di grado } (0, 1), \end{aligned}$$

allora $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ è una coppia esatta.

I.43. Teorema. — *I dati $\mathcal{C} = (D, E, i, j, k)$ di una coppia esatta come nel Teorema precedente determinano una successione spettrale di tipo coomologico $\{E_r, d_r\}_{r \geq 1}$, con*

$$E_r = (E^{*,*})^{r-1}, \quad d_r = j^{r-1} \circ k^{r-1}.$$

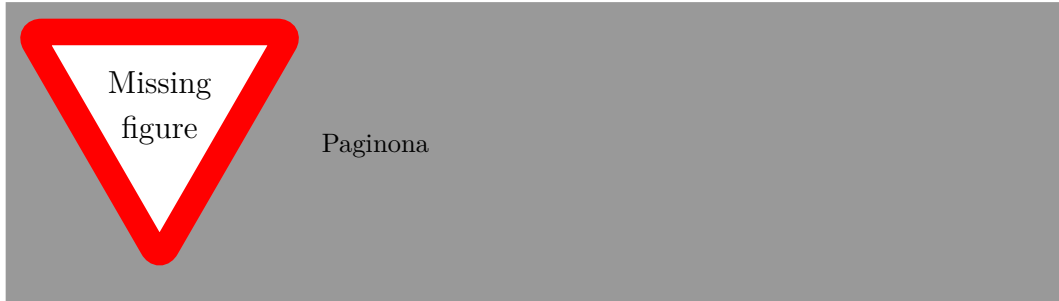
copiali

I.44. Proposizione. — *Descrizione della ss, con mille indici.*

$$\begin{aligned} Z_r^{p,*} &= k^{-1} \left(\text{im } i^{r-1} : D^{p+r,*} \longrightarrow D^{p+1,*} \right), \\ B_r^{p,*} &= j \left(\text{ker } \left(i^{r-1} : D^{p,*} \longrightarrow D^{p-r+1,*} \right) \right), \\ E_r^{p,*} &= Z_r^{p,*} / B_r^{p,*}. \end{aligned}$$

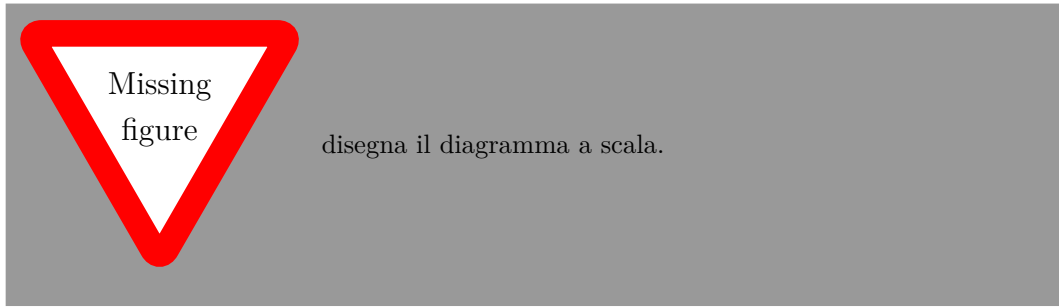
...

Quindi “srotolando” le definizioni otteniamo un diagramma

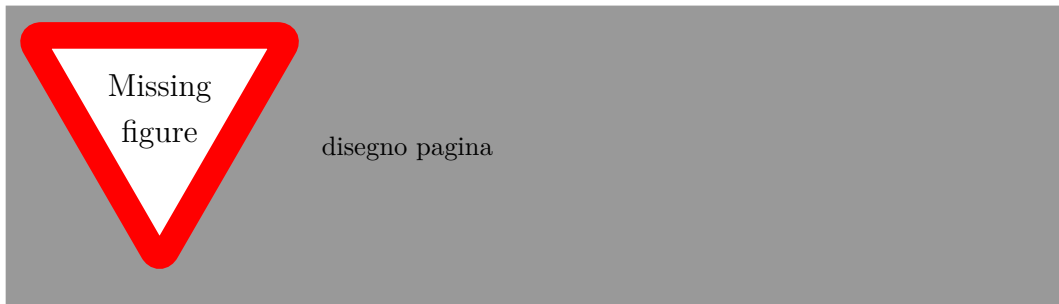


dove la successione

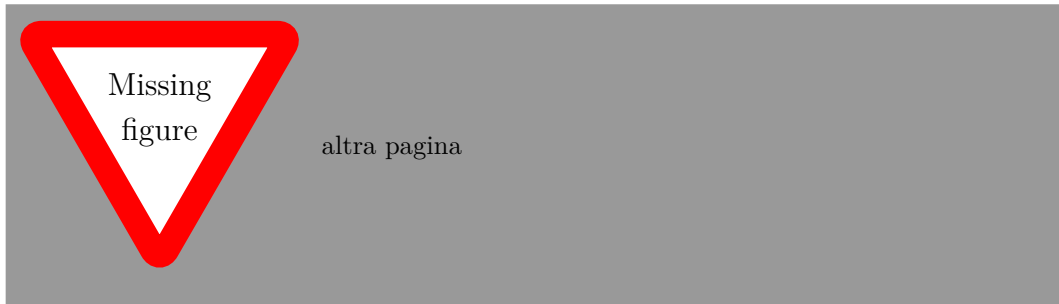
²In letteratura si trovano tante convenzioni diverse per i gradi di questi morfismi: la differenza fondamentale sta nel segno ± 1 .



è una successione **esatta**. Chiamiamo questa sequenza **diagramma a scala**.
 Notiamo che derivando la coppia, otteniamo una mappa j' che sale in diagonale:



Ma possiamo continuare a derivare: infatti, derivando una seconda volta otteniamo una mappa j'' che sale in diagonale con questa pendenza:



Applichiamo quindi questa costruzione ai moduli

$$D^{t,s} = \pi_{N+t-s}(X(s)) , \quad E^{t,s} = \pi_{N+t-s}(Y_s) ,$$

e otteniamo la successione esatta di omotopia della **torre di Adams**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_{N+t-s+1}(X(s)) & & \dots & & \pi_{N+t-s}(X(s)) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s}(Y_{s+1}) \rightarrow \pi_{N+t-s-1}(X(s+1)) \\
 \downarrow & & & & \vdots & & \vdots \\
 \pi_{N+t-s+1}(X(s-1)) \rightarrow \pi_{N+t-s+1}(Y_{s-1}) & \longrightarrow & \pi_{N+t-s}(X(s)) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s}(Y_s) & \cdots \rightarrow & \pi_{N+t-s-1}(X(s+1)) \\
 \vdots & & \vdots & & \downarrow & & \vdots \\
 & & \pi_{N+t-s}(X(s-1)) \rightarrow \pi_{N+t-s}(Y_{s-1}) & \longrightarrow & \pi_{N+t-s-1}(X(s)) & &
 \end{array}$$

dove le frecce continue sono un pezzo della successione esatta descritta dal teorema.

I.45. Proposizione. — *Consideriamo le seguenti condizioni:*

- (i) *se per ogni n , la mappa $i : D^{n+p,p} \rightarrow D^{n+p-1,p-1}$ è un isomorfismo, tranne al più per un numero finito di p (equivalentemente, $E^{n+p,p} \neq 0$ solo per una quantità finita di p), allora $D^{n+p,p}$ stabilizza per $p \rightarrow +\infty$ a un modulo $D^{n+\infty,+\infty}$ e per $n \rightarrow -\infty$ stabilizza a $D^{n-\infty,-\infty}$;*
- (ii) *per ogni n , $D^{n+p,p}$ è definitivamente nullo per $p \rightarrow +\infty$;*
- (iii) *per ogni n , $D^{n+p,p}$ è definitivamente nullo per $p \rightarrow -\infty$.*

Allora:

1. *se valgono (i) e (ii), $E_\infty^{n+p,p}$ è isomorfo a*

$$F_n^p / F_n^{p-1},$$

con $F_n^p := \text{im}(D^{n+p,p} \rightarrow D^{n-\infty,-\infty})$, per cui si ha una filtrazione $\dots \subset F_n^p \subset F_n^{p-1} \subset \dots \subset D^{n-\infty,-\infty}$.

2. *Se valgono (i) e (iii), abbiamo una filtrazione*

$$\dots \subset G_{n-1}^p \subset G_{n-1}^{p-1} \subset \dots \subset D^{n-1+\infty,+\infty},$$

data da $G_{n-1}^p = \ker(D^{n-1+\infty,+\infty} \rightarrow D^{n-1+p,p})$, e allora vale

$$E_\infty^{n+p,p} \simeq G_{n-1}^p / G_{n-1}^{p-1}.$$

Osservazione. — ...

References

- [Bro10] Kenneth Brown. «Lectures on the Cohomology of Groups». In: Adv. Lect. Math. (ALM) (set. 2010). URL: <https://pi.math.cornell.edu/~kbrown/publications.html>.
- [Die08] T. Dieck. *Algebraic Topology*. EMS textbooks in mathematics. European Mathematical Society, 2008. ISBN: 9783037190487. URL: <https://books.google.it/books?id=ruSqMB7LW0cC>.
- [Fri21] Greg Friedman. *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*. 2021.
- [Hat00] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Hat03] A. Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. Algebraic Topology. 2003. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>.
- [May75] J.P. May. *Classifying Spaces and Fibrations*. American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1975. URL: <http://www.math.uchicago.edu/~may/BOOKSMaster.html>.
- [McC00] John McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. 2^a ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2000. URL: <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/papers.html>.
- [MS74] J.W. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974. URL: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/milnstas.pdf>.
- [Spa89] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics. Springer, 1989. ISBN: 9780387944265. URL: <https://books.google.it/books?id=h-wc3TnZMCcC>.

REFERENCES

- [Ste51] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles. (PMS-14)*. Princeton University Press, 1951. ISBN: 9780691005485. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpm9t5>.