Chapter 1

Transformation de laplace

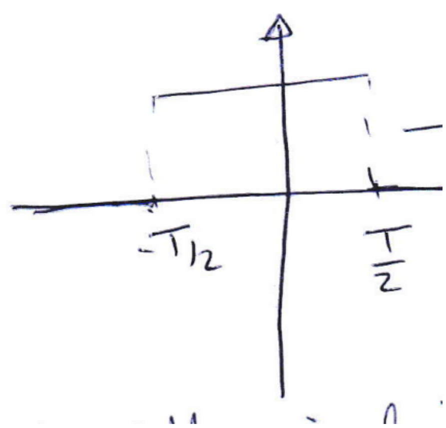
1.1 Definition

La transformation de laplace est une technique mathematique utilise pour transferer une fonction $f(t)$ du domain temporel au domain frequenciel complex $F(s)$
$f(t) \implies F(s)$,t en seconds (s) , s en radiant par second (rd/s) , $s = a + ib$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt}$$

1.2 Fonction unite $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



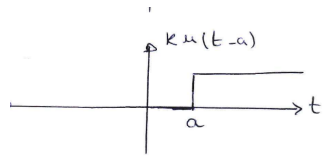
<u>propriete</u>

- pour une fonction $f(t)$ soit transformer en domain complex elle va etre une multiple de $u(t)$

$$f(t)u(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

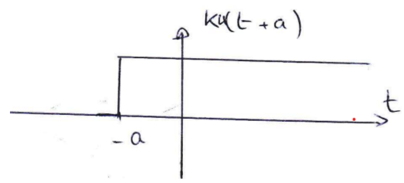
- si $u(t)$ est multiplie par une constante $k \implies ku(t) \begin{cases} k & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
- Decalage en temp
  - decalage vers la droite

$$ku(t-a) = \begin{cases} k, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$



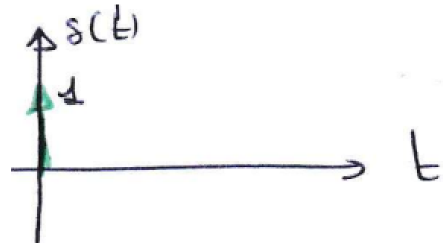
  - decalage vers la gauche

$$ku(t+a) = \begin{cases} k, & t \geq -a \\ 0, & t < -a \end{cases}$$



1.3 fonction implusion (delta de dirac) $\delta(t)$

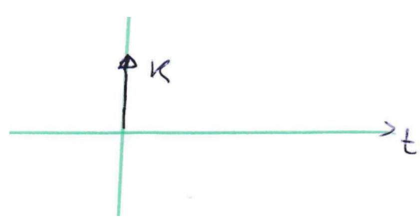
$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, & t = 0 \end{cases}$$



propriete

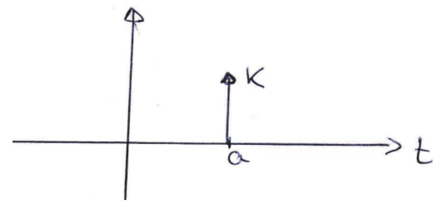
- multiplication par une constante k

$$\begin{cases} k\delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)dt = k, & t = 0 \end{cases}$$



- decalage

$$\begin{cases} k\delta(t-a) = 0, & t \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t-a)dt = k, & t = a \end{cases}$$



- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(t-a) = f(a)$ car $f(t)\delta(t-a)$ pour tout $t \neq a$ est 0
- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$
- $\delta(t) = \delta(-t)$ (fonction pair)
- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

1.4 Propriete de la transformation de lapalce

- Leniarite $af(t) + bf(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} aF(s) + bG(s)$
- Decalage dans le domain frequenciel $e^{-at}f(t)u(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} F(s+a)$
- Decalage dans le domain temps $f(t-a)u(t-a) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} e^{-as}F(s)$
- Differentielle
  $\mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = sF(s) - f(0)$
  $\mathcal{L}\{f^{''}(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f^{'}(0)$
  $\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{'}(0)\ldots sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$
- Integration $\mathcal{L}\{\int_0^t f(x)dx\} = \frac{F(s)}{s}$
- Multiplication par t $f(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} F(s) \implies \mathcal{L}\{tf(t)\} = \frac{-dF(s)}{ds}$
- Theorem de valeur initiale $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
- theorem de valeur finale $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{x\to 0} sF(s)$
- Transformation temporelle $f(at-b)u(at-b) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} \frac{e^{-s\frac{b}{a}}}{a}F(\frac{s}{a})$
- Theoreme de convolution
  la convolution de 2 fonction $x(t)$ et $h(t)$ est
  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\varphi)h(t-\varphi)d\varphi$
  $Y(s) = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = X(s).H(s)$

1.5 Transformation de laplace inverse

1.5.1 Methode de decomposition

on a : $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

- chaque valeur de (p) qui anule le numerateur est apple un pole
- chaque valeur de (p) qui anulle le denominateur est apple un pole

Cas 1 : tout les poles sont des racine simple (distinctes)

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\dots(p-p_k)\dots(p-p_n)}$$

avec $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_k \dots \neq p_n$
dans ce cas la forme decompose de $F(p)$ sera :

$$F(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \frac{A_3}{(p-p_3)} + \dots + \frac{A_k}{(p-p_k)} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)}$$

avec $A_k = \lim_{p \to p_k} (p-p_k)F(p)$
Cas 2 : il existe un pole p_k qui une racine de multiplicite m

$$F(p) = \frac{N(p)}{\dots(p-p_k)^m \dots}$$

dans ce cas la forme decompose de $F(p)$ sera

$$F(p) = \dots + \frac{A_1}{(p-p_k)} + \frac{A_2}{(p-p_k)^2} + \dots + \frac{A_i}{(p-p_k)^i} + \dots \frac{A_m}{(p-p_k)^m} + \dots$$

avec $A_i = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{m-i}}{dp^{m-i}} \left[(p-p_k)^m F(p)\right]$
Note dans le cas ou la degre de $N(p) >$ degre de $D(p)$ en peut ecrire $F(p)$ sous la form $\underbrace{X(p)}_{entier} + \frac{N^{'}(p)}{D(p)}$ ou $N^{'}(p) < D(p)$

1.6 Tableau de transformation

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$t^n_{n=1,2,...}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a_{a>0}$	$\frac{T(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

1.7 Application

1.7.1 Equation differentiell ordinair avec condition initial

Equation 1

$$\frac{2dy}{dt} + 5y = e^{-2t}u(t)\ ,\ y(0) = 2$$

$\mathcal{L}\{\frac{2dy}{dt} + 5y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$
$\Longrightarrow\ \mathcal{L}\{\frac{2dy}{dt}\} + \mathcal{L}\{5y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$ (lineairite)
$2[sY - y(0)] + 5Y = \frac{1}{s+2} \implies Y = \frac{4s+9}{(s+2)(2s+5)} = \frac{2s+\frac{9}{2}}{(s+2)(s+\frac{5}{2})}$
en peut decomposer Y sous la form $Y = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{s+\frac{5}{2}}$
avec

- $A = \lim_{s\to -2}(s+2)Y = \frac{-4+\frac{9}{2}}{-2+\frac{5}{2}} = 1$

- $B = \lim_{s\to \frac{-5}{2}}(s+\frac{5}{2})Y = \frac{-5+\frac{9}{2}}{\frac{-5}{2}+2} = 1$

$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+\frac{5}{2}} \implies \boxed{y = (e^{-2t} + e^{-\frac{5}{2}t})u(t)}$

Equation 2

$$y^{''}(t) + 3y^{'} + 2y(t) = e^{-t}u(t) \ , \ y(0) = y^{'}(0) = 0$$

appliquee laplace $\implies s^2Y + sy(0) - y^{'} + 3y(0) + 2Y = \frac{1}{s+1}$
$\implies Y - \frac{1}{(s+1)(s^2+3s+3)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$
en peut decompose Y sous la form : $Y = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}$

- $A = \lim_{s\to-2}(s+2)Y = \frac{1}{(s+2+1)^2} = 1$
- $B = \lim_{s\to-1}(s+1)Y = 1$
- $V = \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}(s+1)^2Y = \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\frac{1}{s+2} = \lim_{s\to-1}\frac{-1}{(s+2)^2} = -1$

$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} \implies y = (e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t})u(t)$

1.7.2 Mecanique (oscillateur harmonique simple)

Une mass (m) conecte a un ressort de constant (k) ,x est la distance que le ressort est tire de sa position d'equilibre
L equation de mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Dans le cas d amortissement , une force de frottement $\vec{f} = -b\vec{v}$ avec b est la coefficient d amortisment , lequation de mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$b = 2\delta\sqrt{mk} \ , \ \delta \text{ est le rapport d amortissement}$$

Dans le cas ou loscillateu harmonique est soumis a une force exterieur $F(t)$ l equation devient

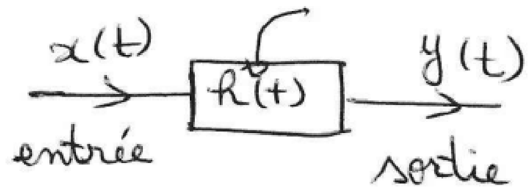
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta w_0\frac{dx}{dt} + w_0^2x = \frac{F(t)}{m}$$

avec $w_0^2 = \frac{k}{m}$

1.7.3 Systeme lineaire invariant avex le temp (LTI)

Considerons un systeme (LTI) caracterise par :

- $x(t)$: fonction d entre
- $h(t)$: impulsion reponse
- $y(t)$: fonction de sortie



<u>Lineaire</u> $\Longrightarrow$ $ax_1(t) + bx_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} ay_1(t) + by_2(t)$

<u>Invariant avex le temp</u> $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x(t) \Longrightarrow y(t) \\ x(t-t_0) \Longrightarrow y(t-t_0) \end{cases}$

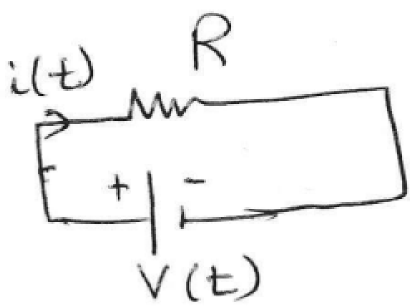
<u>Relation</u> :

- $y(t) = h(t) * x(t)$
- $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ (fonction de transfert)

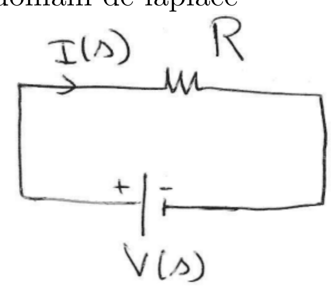
1.7.4 Circuits electriques

<u>Resistance :</u>

domain de temp



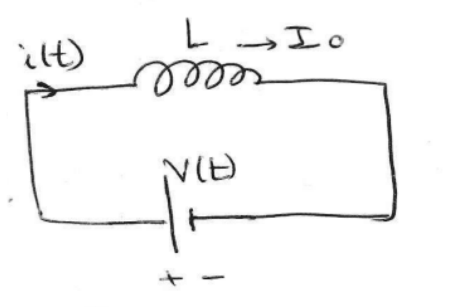
domain de laplace



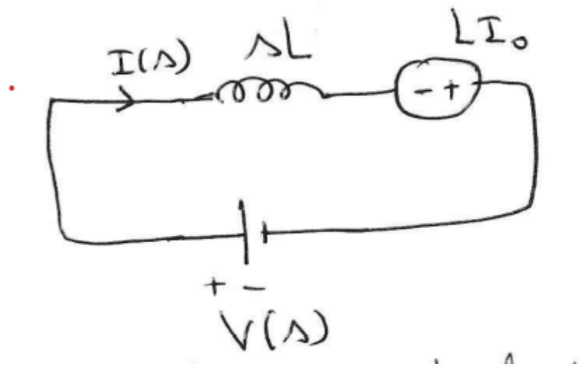
$$v(t) = Ri(t) \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} V(s) = RI(s)$$

Bobine :

domain de temp



domain de laplace



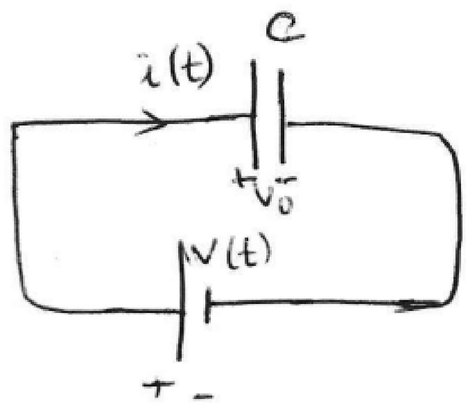
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} V(s) = L[sI(s) - I_0]$$

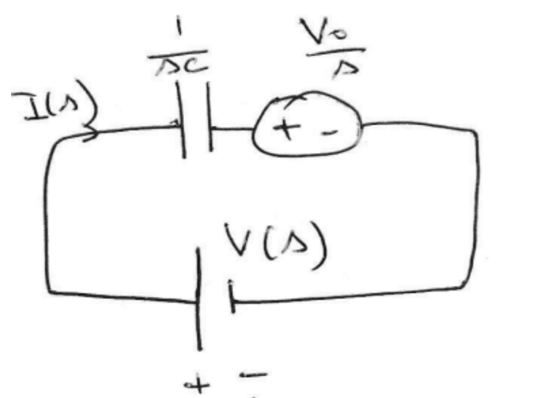
avec I_0 est lenergie initiale emagazine

Condensateur :

domain de temp

domain de laplace





$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows} I(s) = C[sV(s)] - CV_0$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_0}{s}$$

Chapter 2

Series et transformation de fourier

Fonctoin periodique

Soit $f(t)$ est dite periodique si elle est definie pour toutes les valeur de t et si elle possede une nombre positif T avex $f(t) = f(t+T)$, Tperiode de $f(t)$ si T est la plus petit periode , elle est nomme la periode fondamentale de $f(t)$

propriete

- si T periode fondamental de $f(t) \implies f(t) = f(t+nT)$, n: entier
- si $f(t)$ et $g(t)$ ont une periode T ,et $h(t) = af(t) + bg(t)$ avec a et b sont des cte ,alors $h(t)$ a la meme periode
- fonction paires : on appelle une fonction f pair si $f(t) = f(-t)$
- fonction impaires : on apelle un fonction f impaire si $-f(t) = f(-t)$

2.1 Serie trigonometrique de Fourier

Une fonctoin periodique $f(t)$ avec une periode fondamentale T , develope en serie trigonometrique comme suit : $\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt) + b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nt))}$

a_0, a_net b_n sont nommes les coefficient de fourier

- En General
  - $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$
  - $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$

- si $f(t)$ est pair
  - $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$
  - $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $b_n = 0$
  - $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nt))$
- si $f(t)$ est inpair
  - $a_0 = 0$
  - $a_n = 0$
  - $b_n = \frac{t}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt$
  - $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin(\frac{2\pi}{T}nt))$

Note :si T est periode fondamental de $f(T)$

- $f = \frac{1}{T}$ est frequence fondamental en (Hz) hertz
- $w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ est vitesse angulair en $(\frac{rd}{s})$ radiant par second

2.1.1 Serie de Fourier sous form complexe

- $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n|\cos(nw_0t + \theta_n)$
- $C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt$
- $C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-inw_0t}dt$

Relation avec la serie reel : $C_0 = a_0$ et $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$

2.2 Integral de Fourier

Une fonction peut etre represente par un integral appelle integral de fourier

$$\boxed{f(t) = \int_0^{\infty}[A(w)\cos(wt) + B(w)\sin(wt)]dw}$$

- General
  - $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(wt)dt$
  - $B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(wt)dt$
- si $f(t)$ est pair

  - $A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(wt)dt$
  - $B(w) = 0$
  - $f(t) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wt)]dw$

- si $f(t)$ est impair
  - $A(w) = 0$
  - $B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t)\sin(wt)dt$
  - $f(t) = \int_0^{\infty} [B(w)\sin(wt)]dw$

2.3 Transformees de Fourier

2.3.1 Transforme cosinus de fourier

Transforme cosinus de fourier de la fonction pair $f(t)$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$$

Transforme Inverse de cosinus de fourier

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(w)\cos(wt)dw$$

2.3.2 Transforme sinus de fourier

Transforme sinus de fourier de la fonction pair $f(t)$

$$F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\sin(wt)dt$$

Transforme Inverse de sinus de fourier

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(w)\sin(wt)dw$$

2.3.3 Propriete de transforme cosinus et sinus de Fourier

- <u>Linearite</u> : $F_{c/s}(af(t) + bg(t)) = aF_{c/s}(w) + bG_{c/s}$

- <u>derive</u> :
  - $F_c\{f^{'}(t)\} = wF_s(w) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$

- $F_c\{f^{''}(t)\} = -w^2 F_s(w) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f^{'}(0)$
- $F_s\{f^{'}(t)\} = wF_c(w)$
- $F_s\{f^{''}(t)\} = -w^2 F_s(w) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} w f^{'}(0)$

2.3.4 Transformee de Fourier

la transformee de fourier est une technique mathematique utilisee pour transformer une fonction du domain temps (t, s) au domai frequence angulair $(w, rd/s)$ ou de domain position (x, m)au domain frequence spatiale $(\beta, rd/m)$

la transformation : $\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt}$

la transformation inverse : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{iwt}dw}$

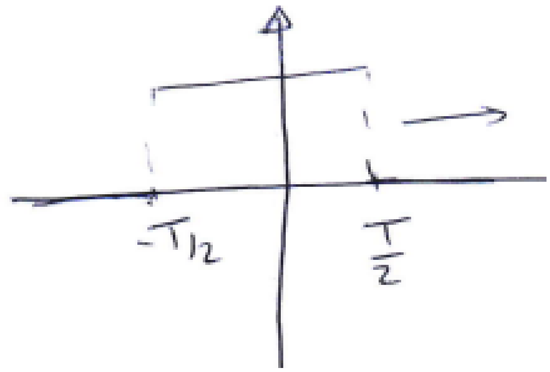
2.3.5 Propriete de Transfome de Fourier

- <u>Linearite</u> $\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(w) + bF_2(w)$
- <u>Echelle de temp</u> $f(at) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$
- <u>Decalage</u> $f(t + t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w_0)e^{iwt_0}$
- <u>Transformation de temp</u> $f(at - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})e^{it_0\frac{w}{a}}$
- <u>dualite</u> $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w) \implies F(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} 2\pi f(-w)$
- <u>Convolution</u> $\begin{cases} y(t) = x(t) * h(t) \implies Y(w) = X(w).H(w) \\ \mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}F_1(w) * F_2(w) \end{cases}$
- <u>decalage de frequence</u> $f(t)e^{\pm iw_0t} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} F(w \pm w_0)$
- <u>derive</u> $\frac{d^nf}{dt^n} \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} (iw)^nF(w)$, $-itf(t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} \frac{dF(w)}{dw}$
- <u>integral</u> $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\varphi)d\varphi \implies G(w) = \frac{F(w)}{iw} + \pi F(0)\delta(w)$ avec $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

2.3.6 fonction rectengulair

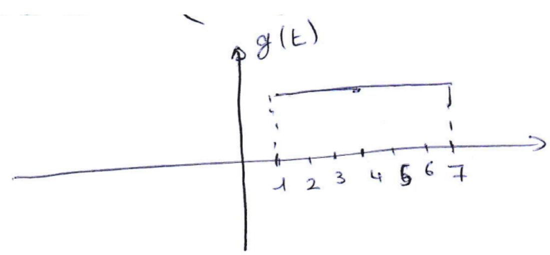
consideron l implusion rectangulaire rect$\left(\frac{t}{T}\right)$

$$\begin{cases} 1 & \frac{-T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$



Decalage :

$g(t) = rect(\frac{t-4}{6}) \implies T = 6$ et le centre d implusion a $t = 4$



Transforme de fourier de fonction rectangulair

$\boxed{Arect(\dfrac{t}{T}) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows} AT\sin_c(\dfrac{wt}{2})}$ avec $\sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$(sinus cardinal)

2.4 Theorem de Parseval

Chapter 3

Les polyonme orthogonaux classique

3.1 Introduction

Dans des nombreux problemes physique , on arrive a l'equation differentiell de second ordre , de type hypergeometrique :

$$\boxed{\sigma(z)y^{''} + \varphi(z)y^{'} + \lambda y(z) = 0} \ (1)$$

avec

- $\sigma(z)$: polynome de degre ≤ 2
- $\varphi(z)$: polynome de degre ≤ 1
- $\lambda(z)$: cte

3.2 Solution polynomial de l'equation hypergeometrique

Soit $Y(z)$ est une solution de l equation hypergeometrique , la derive d'ordre (n) de $Y(z)$ est aussi une solution de la meme equation
Preuve:
Ona : $\sigma(z)y^{''}(z) + \varphi(z)y^{'}(z) + \lambda y(z) = 0$
$\Longrightarrow$ la Derive : $\sigma^{'}y^{''} + \sigma y^{'''} + \varphi^{'}y^{'} + \varphi y^{''} + \lambda y^{'} = 0$ ($y^{'} = v_1$)
$\Longrightarrow$ $\sigma v_1^{''} + \varphi_1 v_1^{'} + \mu_1 v_1 = 0$ (aussi une equation hypergeometrique)
avec φ_1 une polynome de premier degre ou moin et d'equation $\varphi_1 = \sigma^{'} + \varphi$
et μ_1 est un constant et d'equation $\mu_1 = \lambda + \varphi^{'}$
$\Longrightarrow$ la Derive second : $\sigma v_2^{''} + \varphi_2 v_2^{'} + \mu_2 v_2 = 0$ ($y^{''} = v_2$)
avec φ_2 une polynome de premier degre ou moin et d'equation $\varphi_2 = \sigma^{'} + \varphi_1 = \varphi + 2\sigma^{'}$
et μ_2 est un constant et d'equation $\mu_2 = \lambda_1 + \varphi_1^{'} = \lambda + 2\varphi^{'} + \sigma^{''}$

$\Longrightarrow$ La Deriver d'ordre (n): $\boxed{\sigma v_n^{''} + \varphi_n v_n^{'} + \mu_n v_n = 0}$ (2)
avec

- $v_n(z) = y^{(n)}(z)$
- $\varphi_n = \varphi + n\sigma^{'}$
- $\mu_n = \lambda + n\varphi^{'} + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''}$

Solution particuliere de l'equation hypergeometrique pour $\mu_n = 0$
$\mu_n = 0 \implies \sigma v_n^{''} + \varphi_n v_n^{'} = 0$ admet une solution particuliere $v_n(z) = cte \neq 0$
$\Longrightarrow \lambda = \lambda_n = -n\varphi^{'} - \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''}$

3.3 Formule de Rodrigues

L'equation de rodrigues est une solution de lequation hypergeometrique , elle contien $\rho_n(z)$ une fonction caractersiant de l'equation hypergeometrique
$\left[\sigma(z)y^{''} + \varphi(z)y^{'} + \lambda y(z) = 0\right] \times \rho \implies \sigma(z)y^{''}\rho + \varphi(z)y^{'}\rho + \lambda y(z)\rho = 0$ en peut ecrire cette equation sous la from $(\rho\sigma y^{'})^{'} + \lambda\rho y = 0 \implies \boxed{(\rho\sigma)^{'} = \rho\varphi}$ (3)

L equation de rodrigues : $\boxed{y_n(z) = \dfrac{B_n}{\rho(z)}\dfrac{d^n}{dz^n}\left[\rho(z)\sigma^n(z)\right]}$
avec B_n : le constant de normalisation

3.4 Polynomes orthogonaux classiques

Formule de Rodrigues de polynomes de Jacobi ,Legendre , Laguerre , Hermite .
Ces polynomes sont des solution d'equation hypergeometrique

Polynome de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1 - z^2$
- $\varphi = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha$ avec α et β sont des constant

Dans ce cas ρ est d'equation :$\rho(z) = (1 - z)^{\alpha}(1 + z)^{\beta}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = B_n(1 - z)^{-\alpha}(1 + z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1 - z)^{\alpha+n}(1 + z)^{\beta+n}\right]$
avec $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi^{'} - \frac{n(n-1)}{2}\sigma^{''} \\ \varphi = -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha \end{cases} \implies \lambda_n = n(\alpha + \beta + n + 1)$

Polynome de legendre $P_n(z)$

Le Polynome de legendre est un cas particuliere de polynome de Jacobi avec $\alpha = \beta = 0$
Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1 - z^2$
- $\varphi = -2z$

Dans ce cas ρ est constant
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = P_n(z) = \frac{B_n}{\rho}\frac{d^n}{dz^n}\left[\rho\sigma^n(z)\right]$
avec $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -2z \end{cases} \implies \lambda_n = n(n+1)$

Polynome de laguerre $L_n^{(a)}(z)$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = z$
- $\varphi = -z + \alpha + 1$ avec $\alpha > 0$

Dans ce cas ρ est d'equation $\rho = z^\alpha e^{-z}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = L_n(z) = B_n e^z z^{-\alpha}\frac{d^n}{dz^z}(z^{\alpha+n}e^{-z})$
avec $B_n = \frac{1}{n!}$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -z + \alpha + 1 \end{cases} \implies \lambda_n = n$

Polynome d'Hermite $H_n(z)$

Ce polynome est la solution de lequation hypergeometrique dans le cas ou

- $\sigma = 1$
- $\varphi = -2z$

Dans ce cas ρ est d'equation $\rho = e^{-z^2}$
Donc la formule de rodrigues qui est la solution devien :
$Y_n(z) = H_n(z) = \frac{B_n}{e^{-z^2}}\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2}\right]$
avec $B_n = (-1)^n$
Ona$\begin{cases} \lambda_n = -n\varphi' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \\ \varphi = -2z \end{cases} \implies \lambda_n = 2n$

3.5 Orthogonalite des polynomes de type hypergeometrique

ρ verfie la condition $\sigma(z)\rho(z)z^n|_{z=a,b} = 0 \implies$ Les polynome de type hypergeometrique seront orthogonaux sur l'intervval (a,b) par rapport a ρ , ces polynome correspondent aux different valeur de λ_n
$\implies \int_a^b y_n(z)y_m(z)\rho(z)dz = 0$ Si $\lambda_n \neq \lambda_m$

Polynome de Jacobi

$(1-z)^{\alpha+1}(1+z)^{\beta+1}z^k|_a^b = 0$ Cette equation est verifier pour $a = -1$ et $b = 1$
Alors le domain est $(a, b) = [-1, 1]$

Polynome de Legendre

meme que polyne de jacobi, le domain est $(a, b) = [-1, 1]$

Polynome de Laguerre

$z.z^\alpha e^{-z}z^k|_a^b = z^(\alpha + k + 1)e^{-z} = 0$ Cette equation est verifier pour $a = 0$ et $b = +\infty$
Le domain $(a, b) = [0, +\infty[$

Polynome d'Hermite

$e^{-z^2}z^k|_a^b = 0$ Cette equation est verifier pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$
Le domain $(a, b) =] - \infty, +\infty[$

Chapter 4

Equation aux Derivees partielles

4.1 Defintion

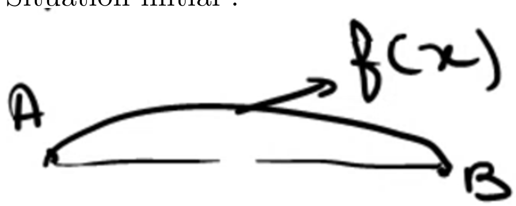
Relation entre variables independantes et leur derive partielles .
Pour chercher la solution des ces equation on va les transformee en equation de derive ordinair .
Pour le transform en va utilise la methode de separation des variables puis en utilisant les condition aux limits et les condition initial on cherche les constants obtien de cette separation

4.2 Problem de Cord vibrant

On a l'equation des corde vibrant :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Situation initial :



Les Condition initial : $\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ pour tout } x \text{ a } t = 0 \\ U(x,t) = f(x)\text{at} = 0 \end{cases}$

Les Condition aux limit : $\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(l,t) = 0 \end{cases}$

Par methode de separation , la solution doit etre sous la form : $U(x,t) = X(x)T(t)$

On a $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dX}{dx}T = TX' \implies \frac{\partial^2 U^2}{\partial x^2} = TX'' \\ \frac{\partial U}{\partial t} = X.\frac{dT}{dt} = T'X \implies \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T''X \end{cases}$

Remplacent dans l'equation : $TX'' = \frac{1}{v^2}XT'' \implies \frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{T''}{T} = b \implies \begin{cases} X'' - bX = 0 \\ T'' - bv^2T = 0 \end{cases}$

$U(x,t)$ a une limite physique (x doit avoir une maximal different que infinie)
$\implies U(x,t)$ est une fonction convergent $\implies$ pour $X'' - bX = 0$ est convergent ,
b doit etre un constant negative $b = -k^2 \implies \begin{cases} X'' + k^2X = 0 & (1) \\ T'' + k^2v^2T = 0 & (2) \end{cases}$
La solution d'equation (1) peut s'ecrire sous la form $X(x) = C_1\cos(kx + \varphi_1)$
La solution d'equation (2) peut s'ecrire sous la form $T(t) = C_2\cos(kvx + \varphi_2)$
Alors

$$U(x,t) = C_1\cos(kx + \varphi_1)C_2\cos(kvt + \varphi_2)$$

$$\boxed{U(x,t) = C\cos(kx + \varphi_1)\cos(kvt + \varphi_2)}$$

avec C, φ_1, φ_2 seront determines par les condition initial et les condition aux limit
La condition aux limit $U(0,t) = 0$
$\implies C\cos(k.0 + \varphi_1)\cos(kvt + \varphi_2) = 0 \implies \cos(\varphi_1) = 0 \implies \varphi_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$
$\implies U(x,t) = C\cos(kx + \varphi_1)\cos(kvt + \varphi_2) = C\sin(kx)\cos(kvt + \varphi_2)$
La condition aux limit $U(l,t) = 0$
$\implies C\sin(kl)\cos(kvt + \varphi_2) = 0 \implies \sin(kl) = 0 \implies k = \frac{n\pi}{l}$
$\implies \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{l}} = \frac{2l}{n}$

$$\boxed{U_n(x,t) = C_n\sin(k_nx)\cos(k_nvt + \varphi_n)}$$

Une solution particuliere $U_n(x,t)$ represente un mode normal de vibration suivant lequel tous les points de la corde vibrent avec la meme frequence , mais avec des amplitudes differents

- Mode 1 $\implies n = 1 \implies \lambda_1 = 2l$

- Mode 2 $\implies n = 2 \implies \lambda_2 = \frac{2l}{2} = l$

- Mode 2 $\implies n = 3 \implies \lambda_3 = \frac{2l}{3} = l$

La solution generale est une combination lineaire des solutions particulieres des modes normaux :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \cos(k_n v t + \varphi_n)$$

avec C_n, φ_n sont determine par les condition initial : $\begin{cases} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ pour tout } x \text{ a } t = 0 \\ U(x,t) = f(x) \text{ a } t = 0 \end{cases}$

- $\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)(-v k_n) \sin(k_n v t + \varphi_n) = 0$ a $t = 0$
  $\implies \sin(\varphi_n) = 0 \implies \varphi_n = 0$
  $\implies U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \cos(k_n v t)$

- $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x) \cos(k_n v t) = f(x)$ a $t = 0$
  $\implies C_n \sin(k_n x) = f(x)$, C'est une serie de Fourier
  $C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(k_n x) dx$

4.3 Problem de file mince

Considerons un fil mince de longueur l , ce fil est oriente le long de l'axe de x et il est parfaitement isole laterallement , le flux de chaleur se propage selement suivant x . Les extremites du fil sont maintenus a la temperature 0 . La temperature initiale dans le fil est $f(x)$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Trouver $U(x,t)$

- Les condition aux limits et les condition initial

  - Condition aux limits : $\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(l,t) = 0 \end{cases}$
  - Condition Initiale : $U(x,0) = f(x)$

- $U(x,t) = F(x)G(t)$ $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = G'F \\ \frac{\partial U}{\partial x} = F'G \implies \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F''G \end{cases}$
  Remplacent dans l'equation $FG' = a^2 F''G \implies \frac{F''}{F} = \frac{G'}{a^2 G} = k$
  Comme $U(x,t)$ est une fonction borne donc F est borne , et par suit k doit etre negative $\implies k = -p^2$
  Alors $\begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \\ G' + p^2 a^2 G = 0 \end{cases}$

- Trouver la solution de l'equation F et appliquee les Condition aux limit pour trouver les constant
  $F(x) = A\cos(px) + B\sin(px)$
  $U(0,t) = 0 \implies F(0) = 0 \implies A\cos(p.0) + B\sin(p.0) = 0 \implies A = 0$
  $F(x) = B\sin(px)$ $U(l,t) = 0 \implies F(l) = 0 \implies B\sin(pl) = 0 \implies p = \frac{n\pi}{l}$
  $F(x) = B\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

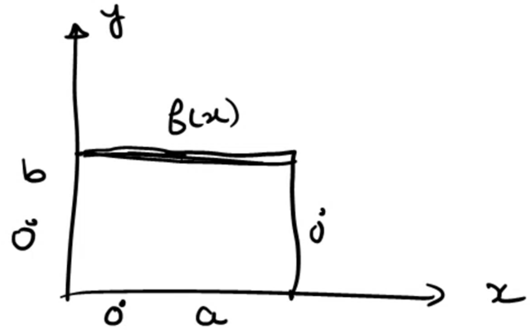
- Trouver la solution de l'equation G
  $G' + a^2p^2G = 0 \implies G' + a^2(\frac{n\pi}{l})G = 0$
  posons $\alpha = \frac{n\pi}{l}a \implies G' + \alpha^2 G = 0 \implies \frac{G'}{G} = -\alpha^2$
  $\implies \ln(G) = -\alpha^2 t + cte \implies G_n = C_n e^{-\alpha_n^2 t}$

- Trouver la solution particuliere $U_n(x,t)$
  $U_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) \times C_n e^{-\alpha_n^2 t}$
  $U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\alpha_n^2 t} \sin(\frac{n\pi}{l}x)$

- Appliquons la derniere condition pour trouver la constante
  $U(x,0) = f(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\alpha_n^2 \times 0} \sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x)$
  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) = f(x) \implies$ Seriee de Fourier
  $D_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$

4.4 Problem de propagation stationaire de la chaleur a la surface

La Situation initial :



Stationaire $\implies \frac{\partial U}{\partial t} = 0$
A la Surface $\implies$ 2 dimension
l'equation de propagation devient : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

- Condition aux limit :
  - $U(0,y) = U(a,y) = 0$
  - $U(x,0) = 0$
  - $U(x,b) = f(x)$

- Soit $U(x,y) = F(x)G(y) \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F''G \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G''F \end{cases}$
  Remplacent dans l'equation $F''G + G''F = 0$
  $\frac{F''}{F} = -\frac{-G''}{G} = k$, $F(x)$ doit etre bornee (pour $x = a$ et $x = 0$ la temperature est 0) alors k doit etre negative $\implies k = -p^2 \implies \begin{cases} F'' + p^2 G = 0 \\ G'' - p^2 G = 0 \end{cases}$

- Appliquer les condition aux limits pour trouvers $F(x)$ et $G(y)$
  $F'' + p^2 F = 0 \implies F(x) = A\cos(px) + B\sin(px)$
  on a $F(0) = F(a) = 0 \implies A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \implies A = 0$
  on a $F(a) = B\sin(pa) = 0 \implies p = \frac{-n\pi}{a}$
  Alors $F_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)$ $G'' - p^2 2G = 0 \implies G_n'' - (\frac{n\pi}{a})^2 G_n = 0$
  $G_n(y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} + D_n e^{\frac{n\pi}{a}y}$ ($G(y)$ n'est pas bornee)
  on a $G_n(0) = 0 \implies C_n + D_n = 0 \implies D_n = -C_n$
  Alors $G_n(y) = D_n(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{\frac{-n\pi}{a}y}) = 2D_n \sinh(\frac{n\pi}{a}y)$

- Trouver la solution particuliere $U_n(x, y)$
  $U_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = B_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) \times 2D_n \sinh(\frac{n\pi}{a}y) = E_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) \sinh(\frac{n\pi}{a}b)$
  On a $U_n(x, b) = f(x) \implies E_n \sin(\frac{n\pi}{a}x) \sinh(\frac{n\pi}{a}b) = f(x)$
  Utilisant les Serie de fourier $\implies E_n \sinh(\frac{n\pi}{a}b) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(\frac{n\pi}{a}x) dx$
  $E_n = \frac{2}{a \sinh(\frac{n\pi}{a}b)} \int_0^a f(x) \sin(\frac{n\pi}{a}x) dx$