# Programação Linear

Trabalho Teórico / Prático número 1

Lucas Mateus Fernandes

***Abstract*—This work intends to explore a mathematical model that aims to maximize the profit of a joiner having as main tool the linear programming and the resolution through the simplex, simplex 2 phases and graphical method**

***Keywords—graphical, 2 phases, linear, simplex***

## I. Resumo

Este trabalho pretende explorar um modelo matemático que visa maximizar o lucro de um marceneiro, tendo como principal ferramenta a programação linear e a resolução por meio do simplex, simplex 2 fases e método gráfico.

## II. Introdução

Devido à pandemia, um marceneiro resolve reestruturar sua métrica de produção, a fim de conseguir extrair o maior lucro possível com as limitações decorrentes da própria pandemia.

## III. Restrições da Pandemia

Em decorrência da pandemia e uma possível crise econômica, o marceneiro optou por tomar uma atitude mais conservadora em seus gastos, como: não ter mais do que 1 funcionário; não ter mais do que R$5000 de material em estoque; não trabalhar mais de 8 horas por dia por um prazo de 30 dias.

## IV. Restrições de Maquinário

Cada funcionário agiliza o processo de produção em 20% porém, devido a quantidade de maquinário, os funcionários nem sempre trabalham em paralelo, ou seja, há um limite de 50% no que os funcionários podem agilizar, pois, caso tenha muitos funcionários, ocorre a geração de um gargalo no processo devido a limitação de maquinário, ocasionando funcionários ociosos.

## V. Design

Os móveis são separados em módulos e para a construção de um móvel, algumas regras devem ser seguidas: Obrigatoriamente um móvel precisa ter 1 módulo de gaveta e 1 módulo de porta; cada módulo de gaveta precisa ser composto por X Gavetas, sendo 2<=X<=4; obrigatoriamente um módulo deve ser classificado somente como um tipo, ou módulo de gaveta ou módulo de porta.

## VI. Custo

Os materiais e o custo por funcionário são fixos, cada funcionário tem um custo de R$ 1.345 mensais, cada peça de Mdf tem um custo de R$230, o custo de transporte do móvel até a casa do cliente é de R$50, o puxador da porta possui custo fixo de R$30 e o puxador da gaveta possui custo fixo de R$15.

Para a construção de cada gaveta, é necessário:1 hora de trabalho; 1 puxador de gaveta; 1/12 de uma peça de Mdf.

O custo de uma gaveta é dada pela função custoGaveta, definida como:

*custoGaveta( c1, c2, c3) : c1 + c2 * c3*

- *c1 = Custo do puxador da gaveta*
- *c2 = Custo do Mdf*
- *c3 = Porcentagem de um Mdf usado para confecção de uma gaveta*

Para a construção de uma porta, é necessário: 1 hora de trabalho; 1 puxador de porta; 1/3 de uma peça de Mdf.

O custo de uma porta é dada pela função custoPorta, definida como:

*custoPorta( c1, c2, c3) : c1 + c2 * c3*

- *c1 = Custo do puxador da porta*
- *c2 = Custo do Mdf*
- *c3 = Porcentagem de um Mdf usado para confecção de uma porta*

Portanto, o custo de um módulo é proporcional a quantidade de gavetas e portas, que pode ser calculado pela fórmula:

*custoModulo(c1,c2,c3,c4): c1 * c2 + c3 * c4*

- *c1 = quantidade de gavetas em um módulo*
- *c2 = custo por gaveta*
- *c3 = quantidade de portas em um módulo*
- *c4 = custo por porta*

A constante que define o custo de uma gaveta é 34,17 que equivale a *custoGaveta(15,230,1/12)* e o custo de uma porta é 106,67 que equivale a *custaPorta(30,230,1/3)*

Uma porta rende um lucro equivalente a 80% do material gasto e a gaveta rende 90% do material gasto, portanto, o custo de uma gaveta ou porta pode ser dado pela função:

lucroUnitario(c1,c2): c1 * c2

- *c1 = Custo de uma gaveta ou porta*
- *c2 = Porcentagem de lucro em cima do material gasto*

A constante que define o lucro de uma gaveta é 27,34 que equivale a *lucroUnitario(34.17, 0.8)* e o lucro de uma porta é 96,01 que equivale a *lucroUnitario(106,67, 0.9).*

## VII. Variáveis Básicas

As variáveis básicas são:

- x1 = quantidade de módulo com 2 Gavetas;
- x2 = quantidade de módulo com 3 Gavetas;
- x3 = quantidade de módulo com 4 Gavetas;

- x4 = quantidade de módulo com 1 porta;
- x5 = quantidade de funcionários;

Devido à natureza do problema, que é incoerente com algumas restrições e o *range* de quantidade de funcionários ser extremamente limitante, será feito o uso de uma constante, ou seja, em cada instância será rodada 4 vezes com x5 recebendo um valor fixo, que pode ser um inteiro dentro do *range* [0,3].

## VIII. Modelagem

A função objetiva é a maximização do lucro, que consiste na relação de um módulo e a quantidade de gavetas ou portas associado ao lucro de cada unidade, menos o custo de cada funcionário e o custo gasto em transporte dos móveis, que pode ser definida como:

*(29,68*x1)+(57,02*x2)+(84,36*x3)+(71,01*x4)-(1345*x5)*

A restrição de tempo é a associação de quanto uma determinada quantidade de funcionários pode agilizar o processo, que pode ser definida como:

0.2*x5 <= 0.50

A restrição de material é o somatório do valor gasto pela construção de cada módulo, definida como:

*68,34*x1+102,51*x2+136,68*x3+106,67*x4 <=5000*

A restrição de construção de um móvel é a bijeção de módulos de gaveta para com módulos de porta, que pode ser definida como:

x1+x2+x3-x4 = 0

Há outra restrição de tempo associada ao limite de produção mensal, definida como:

*(x1+x2+x3+x4)*(1+(0.2*x5))<= 240*

## IX. Instâncias

O que aconteceria, se:

- O salário do funcionário fosse R$250;
- Não houvesse custo de transporte;
- Não houvesse a possibilidade de ter funcionários, qual seria a menor porcentagem de lucro que uma porta precisa, para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de móveis;
- Não houvesse limite de estoque;
- O marceneiro fizesse um empréstimo de R$500000 e comprasse um maquinário que possibilitasse gastar metade do tempo na produção de cada móvel e consequentemente, o limite de estoque seria R$450000, o marceneiro conseguiria quitar o financiamento em um prazo de 1 ano ?
- O marceneiro não trabalhasse mais com módulos e sim com móveis, em que cada móvel teria um custo de R$150 e um lucro de R$250, com um tempo de construção de 1 hora e 30 minutos, e terceirizasse o processo, a ponto de não pagar um salário mensal para o funcionário e sim terceirizar a produção, de modo que tenha como custo 30% do lucro unitário, porém, cada produto terceirizado possui um custo temporal de 2 horas e 15 minutos, que é o tempo de fazer o pedido, buscar até na distribuidora, fazer o acabamento e remontar o móvel. Por não ter possuído muito trabalho, ele vendeu algumas máquinas, a ponto de conseguir R$15000 reais de caixa no primeiro mês;
- Pensando na última instância, no próximo mês, o marceneiro não terá os R$15000 proveniente da venda das máquinas inutilizadas, o que aconteceria se o valor de caixa estivesse limitado a R$10000;

## X. Resultados

A instância original e as instâncias de 1 a 5 estão resolvidas no arquivo em anexo do jupyter notebook denominado de Anexo III.

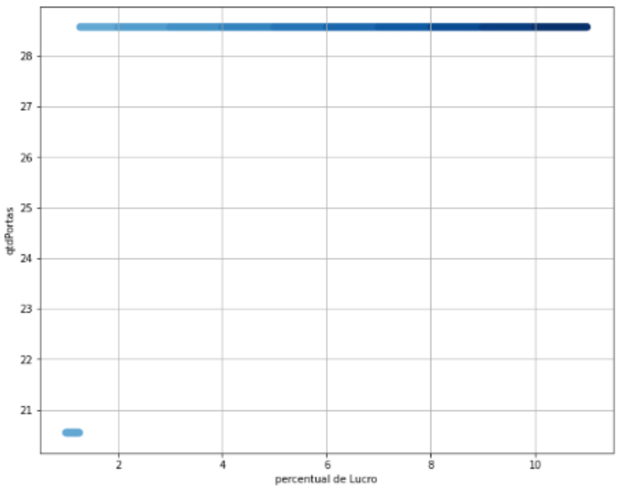
Devido à natureza do problema, após a solução, os valores são truncados e há um recalculado da função objetiva com os novos valores truncados.

Instância original: teve como lucro máximo R$3107.4, levando em consideração a construção de 20 módulos de 3 gavetas, 20 módulos de porta e nenhum funcionário.

1º instância adaptada: teve como lucro máximo R$3107.4, levando em consideração a construção de 20 módulos de 3 gavetas e 20 módulos de porta, ou seja, a quantidade de funcionários não interfere no problema, pois, não é uma restrição ativa.

2º instância adaptada: teve como lucro máximo R$4219.32, levando em consideração a construção de 28 módulos de 1 gaveta e 28 módulos de porta, ou seja, o valor do frete interfere no problema, mesmo não sendo uma restrição ativa.

3º instância adaptada: mostrou que a menor porcentagem de lucro que uma porta precisa ter para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de móveis, é quando o lucro de uma porta equivale a 127% de seu custo.




4º instância adaptada: teve como lucro máximo R$26157.00 levando em consideração a construção de 300 módulos de 1 gaveta e 300 módulos de portas e 3 funcionários.

5º instância adaptada: teve como lucro ao longo de um ano R$284579.13, levando em consideração a construção de 1849 módulos de 3 gavetas e 1849 módulos de portas e 2 funcionários.

6º instância adaptada: teve uma mudança significativa na modelagem ficando da seguinte forma:

x1 = quantidade de móveis feitos

x2 = quantidade de móveis terceirizados

*max z = 250*x1+175x2 - 50*(x1+x2)*

*sujeito a:*

*Restrição de tempo disponível mensalmente em minutos*

*90*x1+135*x2 <= 14400*

*Restrição de dinheiro disponível mensalmente*

*150*x1 + 75*x2 <= 15000*

6º instância adaptada: foi resolvida por método gráfico manualmente, que pode ser visto no ‘Anexo I’ tendo como valor de x1=70 x2 = 60 e lucro máximo de R$21500.

7º instância adaptada: foi resolvida por método simplex manualmente, que pode ser visto no ‘Anexo II’ onde x1=20 x2=93 já com os valores truncados e recalculando a função objetiva com os valores truncados, chegamos no valor do lucro máximo igual a R$15625,00.

## XI. Conclusões

1º instância adaptada interferiu no problema, porém, não interferiu na solução ótima, ou seja, não era uma restrição ativa, pois, de acordo com os benefícios que um funcionário oferece e suas despesas, não é viável ter um funcionário.

2º instância adaptada interferiu diretamente no problema, mesmo não sendo aplicada na restrição e sim na função objetiva, pois, o custo do frete penalizava a construção de módulos de 1 gaveta, ou seja, quanto menos gavetas mais o módulo era penalizado pelo frete.

4º instância adaptada interferiu diretamente no problema e fez com que a restrição de funcionário associada com o tempo se tornasse uma restrição ativa.

5º instância adaptada mostrou que o empréstimo não seria uma opção factível, pois, ele não conseguiria pagar o financiamento ao longo de um ano, porém, foi possível perceber que no caso da instância, ocorreu um padrão diferente das demais instâncias, em que o módulo de portas não esteve tendencioso a apenas um tipo de módulo, tal instância com 1 funcionário obteve como lucro máximo R$283384.76, fazendo 224 módulos de 1 gaveta, 1687 módulos de 3 portas e 1912 módulos de 1 porta.

6º instância adaptada obteve uma mudança significativa na modelagem, que permitiu que o problema fosse resolvido via método gráfico, devido a limitação de apenas duas variáveis básicas.

7º instância adaptada foi uma continuação da 6º de modo que, facilitasse o desenvolvimento do método simplex, mas podemos ressaltar que a quantidade de variáveis não é um limitante de tal método, porém, utilizar tal método só foi possível pois todas restrições eram de ‘<=’.

## ANEXO I

Resolução da 6º instância foi feita pelo método gráfico seguindo os seguintes passos:

1º passo: converter as restrições de desigualdade em restrições de igualdade:

$90*x1+135*x2 = 14400$

$150*x1 + 75*x2 =15000$

2º passo: determinar os pontos A, A’ referentes a primeira restrição e os pontos C, C’ referentes a segunda restrição:

Ponto A:

x1 = 0

$90*0+135*x2 = 14400$

$135*x2 = 14400$

$x2 = 14400/135$

$x2 = 106,66666666...$

$x2 =$ 960/9

A = (0, 960/9)

Ponto A”:

x2 = 0

$90*x1+135*0 = 14400$

$90*x1= 14400$

$x1= 14400/90$

$x1= 14400/90$

$x1 = 160$

A = (160,0)

Ponto C:

x1 = 0

$150*0 + 75*x2 = 15000$

$75*x2 = 15000$

$x2 = 15000/75$

$x2 = 200$

$C = (0,200)$

Ponto C’:

x2 = 0

$150*x1 + 75*0 = 15000$

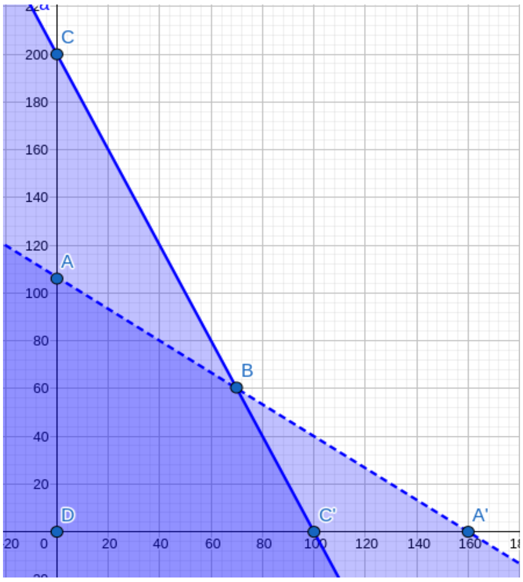
$150*x1 = 15000$

$x1 = 15000/150$

$x1 = 100$

*C’=(100,0)*

3º passo: determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano:




4º passo: determinar o ponto ‘B’ que é a interseção entre as duas retas que representam as restrições:

$90*x1+135*x2 = 14400$
$150*x1 + 75*x2 =15000 *(-1,8)$

$90*x1 \quad +135*x2 = 14400$
$-270*x1 -135*x2 = -27000$

$-180*x1 = -12600$
$x1 = 70$

$90*70+135*x2 = 14400$
$x2 =8100/135$
$x2=60$

$B = (70,60)$

5º passo: determinar a solução ótima do modelo:

| Label | Ponto | Função Objetiva |
|---|---|---|
| D | (0,0) | 0 |
| C’ | (100,0) | 20000 |
| B | (70,60) | 21500 |
| A | (0, 960/9) | 13333.33... |

A melhor solução para o sistema é x1=70 e x2=60 que resulta num lucro de R$28000,00.

## ANEXO II

Resolução da 7º instância foi feita pelo método Simplex Tableau seguindo os seguintes passos:

1º passo: converter o problema na forma padrão:

*max z = 250*x1+175x2 – 50*(x1+x2)*

*90*x1+135*x2 +x3 = 14400*

150*x1 + 75*x2 +x4 = 15000

2º passo: representar o problema em um quadro (tableau) Simplex, cabe ressaltar que os coeficientes da função objetiva são invertidos quando se insere na tabela, para se adequar ao método:

| | | x1 | x2 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 |

3º passo: identificar a coluna pivô que é a coluna que possui a célula com o menor valor negativo na primeira linha da tabela:

| | | x1 | x2 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 |

4º passo: identificar a linha pivô, ou seja, a linha que possui o menor coeficiente positivo da primeira coluna, dividido pelo valor da mesma linha, porém, na coluna pivô:

| | | x1 | x2 | x3 | x4 | Razão |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0 | -200 | -125 | 0 | 0 | |
| x3 | *14400* | 90 | 135 | 1 | 0 | 160 |
| x4 | 10000 | 150 | 75 | 0 | 1 | 66,66 |

5º passo: fazer o escalonamento por Gauss-Jordan, tendo como referência a linha pivô com o valor da célula da interseção linha e coluna pivô com valor igual a 1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x4 | 66,66... | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

Tendo a linha de referência basta escalonar a tabela e alterar a variável da coluna pivô pela variável da linha pivô:

| | | x4 | x2 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|---|---|
| z | 13333,33 | 0 | -25 | 0 | 1,33 |
| x3 | 8400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 |
| x1 | 66,67 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

6º passo: verificar se ainda há um valor negativo na primeira linha e repetir os passos 3 a 6:

2 iteração

| | | x4 | x2 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|---|---|
| z | 13333,33 | 0 | -25 | 0 | 1,33 |
| x3 | 8400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 |
| x1 | 66,67 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 |

| | | x4 | x2 | x3 | x4 | Razão |
|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 20000 | 0 | -25 | 0 | 1,33 | |
| x3 | 5400 | 0 | 90 | 1 | -0,6 | 93,33 |
| x1 | 100 | 1 | 0,5 | 0 | 0,01 | 133,3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x3 | 93,33 | 0 | 1 | 0,01 | -0,01 |

| | | x4 | x3 | x3 | x4 |
|---|---|---|---|---|---|
| z | 15666,67 | 0 | 0 | 0,28 | 1,17 |
| x2 | 93,33 | 0 | 1 | 0,01 | -0,01 |
| x1 | 20 | 1 | 0 | -0,01 | 0,01 |

Antes de começar a 3° iteração verifica-se que não existe nenhum número negativo da primeira linha da tabela, portanto, chegamos ao resultado ótimo.