

Bacharelado em Ciência da Computação

Inteligência Artificial

Prof. Diego Mello da Silva

Instituto Federal de Minas Gerais - Campus Formiga

29 de julho de 2014

Sumário

- 1 Conceitos
- 2 Conjuntos Nebulosos: Operações
- 3 Lógica Nebulosa
- 4 Inferência Nebulosa
- 5 Regras e Lógica Nebulosa
- 6 Referências Bibliográficas

Conceitos

Lógica Nebulosa e Conjuntos Nebulosos

- Conjuntos **nítidos** (crisp)

- Ou elemento pertence ao conjunto A , ou não pertence ao conjunto A

- Pertinência: $P_A(x) : U \rightarrow \{0, 1\}$ onde $P_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$

- Conjuntos **nebulosos** (fuzzy)

- Mapeia o 'grau de pertinência' de um objeto ao conjunto nebuloso A

- Pertinência: $P_A(x) : U \rightarrow [0, 1]$, onde $0 \leq P_A(x) \leq 1$

- Lógica nebulosa (ou **lógica fuzzy** ou **lógica difusa**) (Zadeh, 1965)

- Utiliza vários valores na faixa $[0 \dots 1]$

- Variação entre a **completa falsidade** e a **verdade absoluta**

- Lógica nebulosa é usada para raciocinar sobre **conjuntos nebulosos**

- Permite que estados indeterminados sejam tratados por 'mecanismos'. Ex:

- Sistemas neurais nebulosos (neuro-fuzzy)

- Sistemas especialistas nebulosos

Conceitos Importantes

- **Variáveis linguísticas:** conceito que pode ter um valor em uma faixa de valores nebulosos. Seus valores são os 'nomes' dos conjuntos nebulosos. Exemplo:
 - Variável linguística: altura
 - Universo do Discurso: 0.6m a 2.4m
 - Valores: alto, médio e baixo
 - Alto, médio e baixo são subconjuntos do universo de discurso
- **Funções de Pertinência:** representa as propriedades semânticas do conceito. Para cada conjunto ela indica o grau de pertinência de seus elementos.
- Exemplo:¹

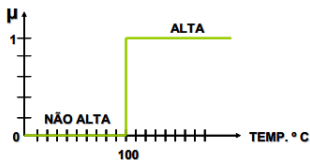


Figura: Boole

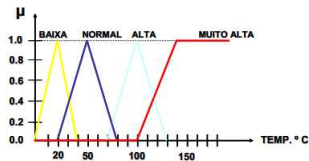
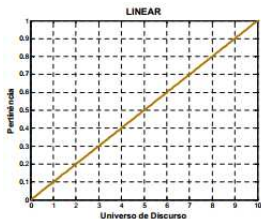


Figura: Fuzzy

¹<http://www.uff.br/decisao/SBPO%20Fuzy.pdf>

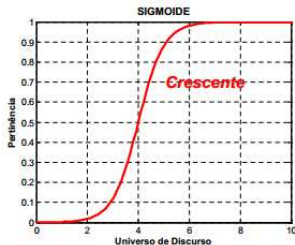
Funções de Pertinência Comuns

- Linear



$$f(x) = ax + b$$

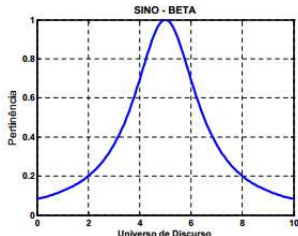
- Sigmóide



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{se } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{se } x \geq c \end{cases}$$

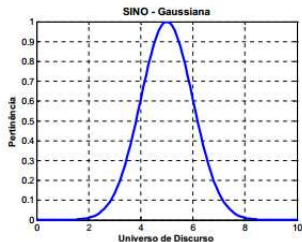
Funções de Pertinência Comuns

■ Beta



$$f(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-b}{c}\right)^2}$$

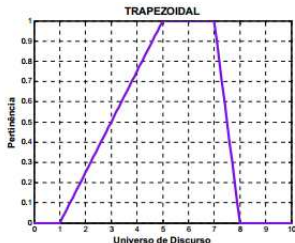
■ Gaussiana



$$f(x) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

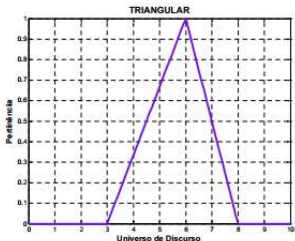
Funções de Pertinência Comuns

■ Trapezóide



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{se } d \leq x \end{cases}$$

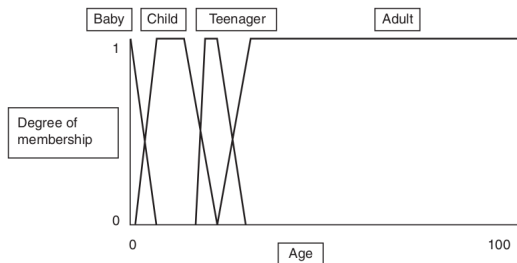
■ Triangular



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{se } c \leq x \end{cases}$$

Conjuntos Nebulosos: Exemplo 01

- Variável linguística: Age
- Conjuntos nebulosos: Baby (P_B), Child (P_C), Teenager (P_T), Adult (P_A)



$$P_C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{6} & \text{se } x \leq 7 \\ 1 & \text{se } x > 7 \text{ e } x \leq 8 \\ \frac{14-x}{6} & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

$$C = \left\{ (x_1, P_C(x_1)), (x_2, P_C(x_2)), \dots, (x_n, P_C(x_n)) \right\}$$

$$C = \left\{ (1, 0), (7, 1), (8, 1), (14, 0) \right\}$$

Conjuntos Nebulosos: Exemplo 02

- Variável linguística: Conforto Térmico
- Fonte: OLIVEIRA, H. L.; AMENDOLA, M.; NÄÄS, I. A. **Estimativa das condições de conforto térmico para avicultura de postura usando a teoria dos conjuntos Fuzzy**. Eng. Agríc. vol.25 no.2 Jaboticabal Mai/Ago. 2005

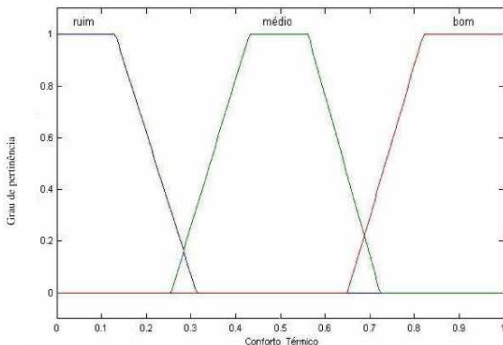


FIGURA 3. Funções de pertinência dos Conjuntos *Fuzzy* assumidos pela variável lingüística conforto térmico, para aves de postura.

Conjuntos Nebulosos: Exemplo 03

- Variáveis linguísticas: Benefício (Social e Ambiental); Custo do Projeto
- Variável linguística: Custo do Projeto
- Fonte: GARCIA, K. C.; TEIXEIRA, M. G.; ALVES, C. C.; ALVES, R. N. **Concepção de um modelo matemático de avaliação de projetos de responsabilidade social empresarial (RSE).** Gest. Prod. vol. 14 no.3 São Carlos Set./Dez. 2007.

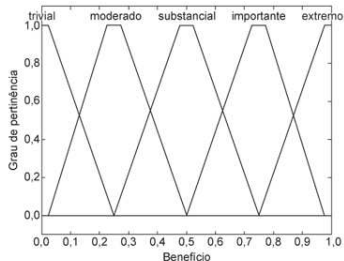


Figura 4. Funções de pertinências dos conjuntos fuzzy trivial, moderado, substancial, importante e extremo da variável benefício (social e ambiental).

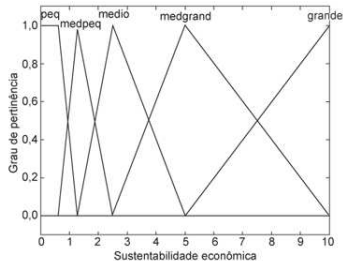


Figura 6. Relação entre as variáveis de entrada e de saída resultante da base de regras para a sustentabilidade econômica.

Conjuntos Nebulosos: Exemplo 04

- Variáveis linguísticas: Potência Ativa; Desvio de Tensão; Estímulo à Tensão
- Fonte: SPATTI, D. H.; SILVA, I. N.; USIDA, W. F.; FLAUSINO, R. A. **Regulação automática de tensão em transformadores de subestação de distribuição usando implementação fuzzy**. Sba Controle & Automação vol. 22 no. 2 Campinas Mar./Abr. 2011

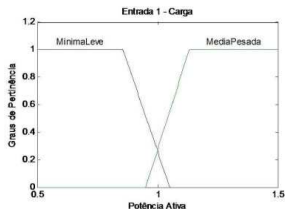


Figura 2: Entrada 1 – Parâmetro *carga* do sistema fuzzy.

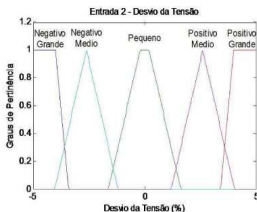


Figura 3: Entrada 2 – Parâmetro desvio de tensão do sistema fuzzy.

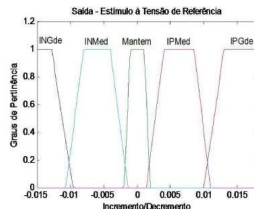


Figura 4: Saída - Parâmetro estímulo de tensão ao $V_{referencia}$ do sistema fuzzy.

Modificadores Linguísticos

- Transformações realizadas sobre os conjuntos nebulosos que modificam sua função de pertinência
- **Qualificam** o conjunto nebuloso, representando conceitos como:
 - Muito: $(P_A(x))^2$
 - Razoavelmente: $(P_A(x))^{1.3}$ ([Coppin]), $(P_A(x))^{1/3}$ ([Artero])
 - Extremamente: $(P_A(x))^4$ ([Coppin]), $(P_A(x))^3$ ([Artero])
 - Pouco: $\sqrt{P_A(x)}$
- Produzem novos conjuntos quando aplicados sobre conjuntos nebulosos existentes
- Exemplo:

Qualificador	Original	Modificado
Muito	0.6	0.36
Pouco	0.6	0.775
Razoavelmente	0.6	0.515
Extremamente	0.6	0.1296

Exercícios (Para Casa)

- 1 Desenhe funções de pertinência para pelo menos 4 (quatro) conjuntos nebulosos criados de acordo com seus próprios critérios para as seguintes variáveis linguísticas:
 - (a) Temperatura de uma Sala
 - (b) Preço de um Automóvel
 - (c) Rendimento de um Investimento
 - (d) Velocidade de um Automóvel
 - (e) Comprimento de uma Rodovia
- 2 Tente descrever as funções de pertinência desenhadas matematicamente, usando como modelo as definições apresentadas para as funções de pertinência mais comuns.

Conjuntos Nebulosos: Operações

Operações sobre Conjuntos Nebulosos

1 Vazio

$$A = \emptyset \leftrightarrow \forall x \in U, P_A(x) = 0$$

2 Igualdade

$$A = B \leftrightarrow \forall x \in U, P_A(x) = P_B(x)$$

3 Subconjunto

$$A \subset B \text{ se } \forall x \in U, P_A(x) \leq P_B(x)$$

4 Complemento

$$P_{\neg A}(x) = 1 - P_A(x)$$

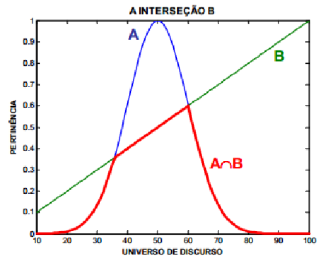
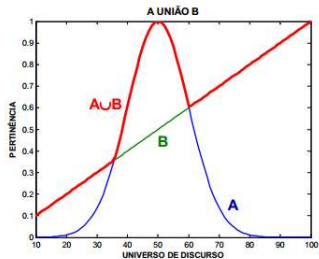
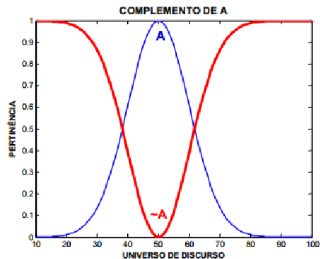
5 União

$$P_{A \cup B}(x) = \max \{P_A(x), P_B(x)\}$$

6 Intersecção

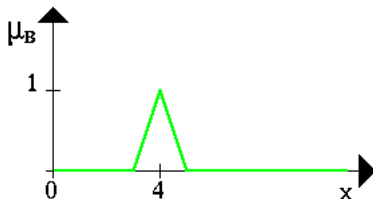
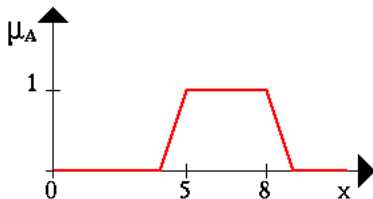
$$P_{A \cap B}(x) = \min \{P_A(x), P_B(x)\}$$

Operações sobre Conjuntos Nebulosos: Exemplos



Exercícios (Para Casa)

- 1 Sejam os seguintes conjuntos nebulosos A e B cujas funções de pertinência são dadas as seguir:



Mostre graficamente o resultado de:

- (a) $P_{\neg A}(x)$
- (b) $P_{\neg B}(x)$
- (c) $P_{A \cup B}(x)$
- (d) $P_{A \cap B}(x)$

Lógica Nebulosa

Lógica Nebulosa

■ Conjunção: $A \wedge B \equiv \min \{A, B\}$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	0.5	0
0	1	0
0.5	0	0
0.5	0.5	0.5
0.5	1	0.5
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

■ Disjunção: $A \vee B \equiv \max \{A, B\}$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	0.5	0.5
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	1
1	0.5	1
1	1	1

■ Negação: $\neg A \equiv 1 - A$

A	$\neg A$
0	1
0.5	0.5
1	0

Lógica Nebulosa

■ Implicação: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

■ Imp. Gödel: $A \rightarrow B \equiv (A \leq B) \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0
0.5	0.5	1
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Lógica Nebulosa

■ *Modus Ponens*

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

■ *Modus Ponens* usando implicação de Gödel $\left(A \rightarrow B \equiv (A \leq B) \vee B \right)$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge (A \rightarrow B)$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
0	0	1	0	1
0	0.5	1	0	1
0	1	1	0	1
0.5	0	0	0	1
0.5	0.5	1	0.5	1
0.5	1	1	0.5	1
1	0	0	0	1
1	0.5	0.5	0.5	1
1	1	1	1	1

Inferência Nebulosa

Regras Nebulosas

■ Regras Sistemas Especialistas

SE A ENTÃO B

■ Regras Nebulosas:

SE A operador x ENTÃO B = y

■ Nas regras, *operador* pode ser qualquer operador matemático: =, >, <, ≤, ≥

■ Nas regras de produção nebulosas, **antecedentes** e **consequentes** são **conjuntos nebulosos**

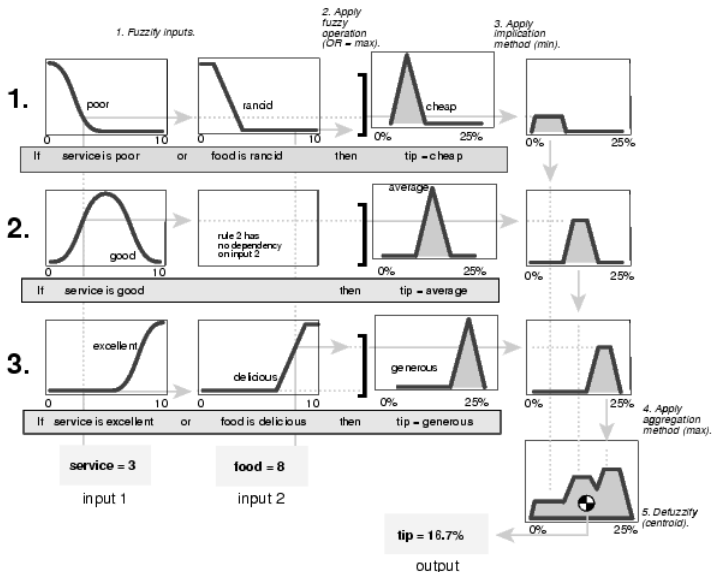
■ Exemplo:

R_1 **SE** temperatura > 50 **ENTÃO** velocidade ventilador = rápida

R_2 **SE** altura = alta **ENTÃO** comprimento calça = longo

R_3 **SE** tempo estudo = curto **ENTÃO** nota = baixa

Inferência Nebulosa: Diagrama de Exemplo²



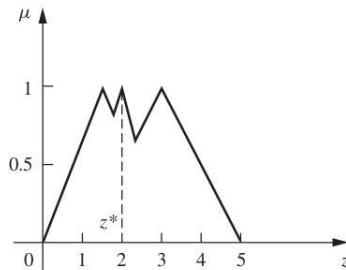
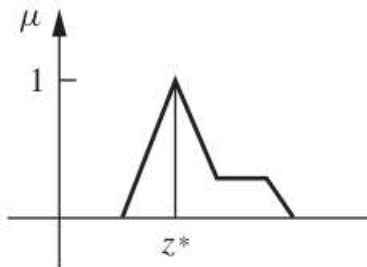
Métodos de Desnebulização

1 Método do Critério Máximo:

- Limitado a funções de saída com 'picos'

$$z^*, \text{ onde } P_A(z^*) \geq P_A(z), \forall z \in Z$$

- Exemplos



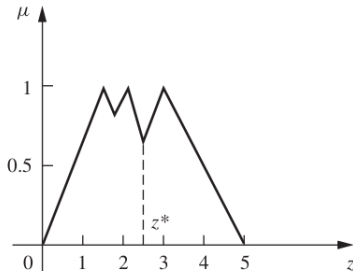
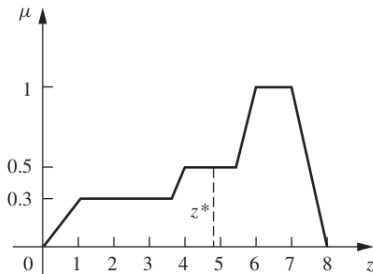
Métodos de Desnebulização

2 Método do Centróide (Center of Gravity - COG)

- Soma discreta com uma seleção 'razoável' de valores aproxima da integral contínua

$$z^* = \frac{\sum z \cdot P_A(z)}{\sum P_A(z)}$$

- Exemplos:



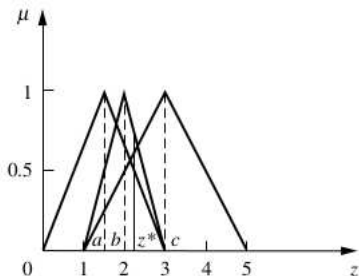
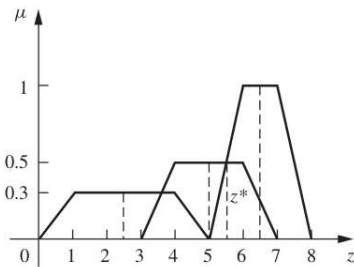
Métodos de Desnebulização

3 Média dos Máximos (Mean of Maxima - MOM)

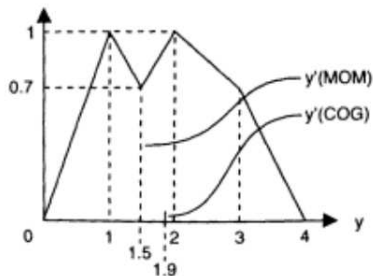
- Média dos maiores valores de cada conjunto nebuloso

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^n \max_{A_i}(z) \cdot P_{A_i}(z)}{P_{A_i}(z)}$$

- Exemplos:



Métodos de Desnebulização: COG *versus* MOM



$$y'(\text{COG}) = \frac{(0 \times 0) + (1 \times 1) + (1 \times 2) + (0.7 \times 3)}{1 + 1 + 0.7} = 1.9$$

$$y'(\text{MOM}) = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

Regras e Lógica Nebulosa

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

■ Regras de Produção Nebulosas

R_1 **se** pressão pedal freio = média
então aplicar freio

R_2 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = alta
então aplicar freio

R_3 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = baixa
então liberar freio

R_4 **se** pressão pedal freio = baixa
então liberar freio

■ Variáveis Linguísticas e Conjuntos Nebulosos

■ **Entrada 1:** Pressão pedal: baixa, média, alta

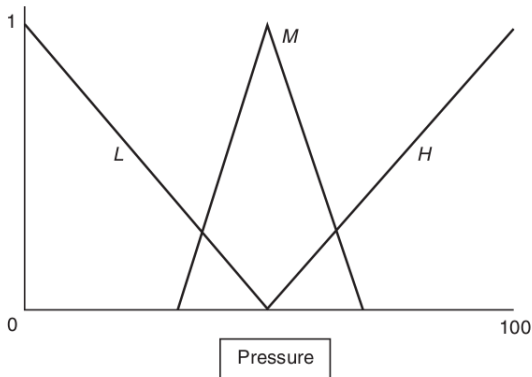
■ **Entrada 2:** Velocidade carro: devagar, médio, rápido

■ **Entrada 3:** Velocidade roda: devagar, médio, rápido

■ **Saída:** Pressão freio: aplicar, liberar

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

- Função de Pertinência: **Pressão Pedal** (universo do discurso 0 . . . 100)
 - $A = \{(50, 0), (100, 1)\}$
 - $M = \{(30, 0), (50, 1), (70, 0)\}$
 - $B = \{(0, 1), (50, 0)\}$
- Gráfico:



Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

- Função de Pertinência: **Velocidade Carro** (universo do discurso $0 \dots 100$)

- $D = \{(0, 1), (60, 0)\}$

- $M = \{(20, 0), (50, 1), (80, 0)\}$

- $R = \{(40, 0), (100, 1)\}$

- Função de Pertinência: **Velocidade Roda** (universo do discurso $0 \dots 100$)

- $D = \{(0, 1), (60, 0)\}$

- $M = \{(20, 0), (50, 1), (80, 0)\}$

- $R = \{(40, 0), (100, 1)\}$

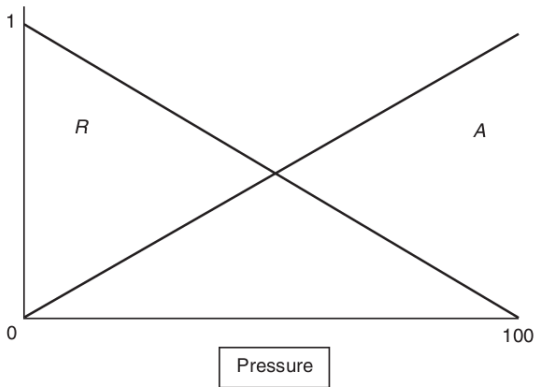
- **Observação:** desenhe a função de pertinência dos conjuntos nebulosos das variáveis 'velocidade carro' e 'velocidade roda'

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

■ Função de Pertinência: **Pressão Freio** (universo do discurso 0 ... 100)

■ $A = \{(0, 0), (100, 1)\}$

■ $L = \{(0, 1), (100, 0)\}$



Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

- Entrada nítida: pressão pedal freio = 60

- $P_B(60) = 0$

- $P_M(60) = 0.5$

- $P_A(60) = 0.2$

- Entrada nítida: velocidade do carro = 80

- $P_D(80) = 0$

- $P_M(80) = 0$

- $P_R(80) = 0.667$

- Entrada nítida: velocidade da roda = 55

- $P_D(55) = 0.083$

- $P_M(55) = 0.833$

- $P_R(55) = 0.25$

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

■ Regra 1:

R_1 **se** pressão pedal freio = média
então aplicar freio

Antec. $P_M(60) = 0.5$

Conseq. Aperte o freio: 0.5

■ Regra 2:

R_2 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = alta
então aplicar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2$, $P_R(55) = 0.25$, $P_R(80) = 0.667$

Conseq. Aperte o freio: 0.2

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

■ Regra 3:

R_3 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = baixa
então liberar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2$, $P_D(55) = 0.083$, $P_R(80) = 0.667$

Conseq. Libere o freio: 0.083

■ Regra 4:

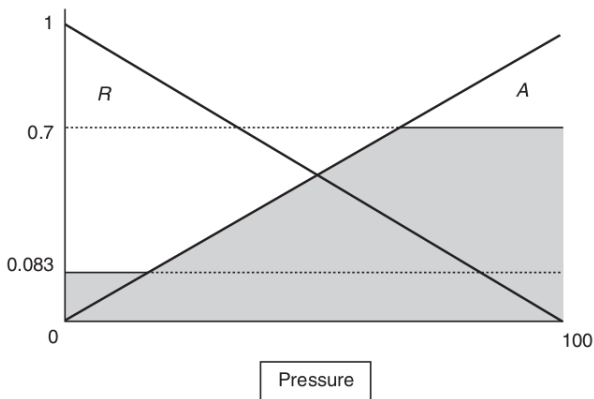
R_4 **se** pressão pedal freio = baixa
então liberar freio

Antec. $P_B(60) = 0$

Conseq. Libere o freio: 0

Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

- Combinando os resultados (soma)
 - Aperte o freio: $0.2 + 0.5 = 0.7$
 - Libere o freio: $0.083 + 0 = 0.083$
- Cortando as funções de pertinência



Exemplo 01: Sistema de Freio para Carro

- Calculando o centróide (desnebulização)

$$C = \frac{(5 \times 0.083) + (10 \times 0.1) + (15 \times 0.15) + (20 \times 0.2) + \dots + (100 \times 1)}{0.083 + 0.1 + 0.15 + 0.2 + \dots + 1}$$

$$C = \frac{717.666}{10.533} = 68.13$$

- Logo, valor de saída nítido é 68.13
- Pressão aplicada pelo freio às rodas do carro: 68.13

Exercícios (Em Sala / Em Laboratório)

- 1 Utilizando o exemplo de sistema especialista nebuloso da seção 18.9 de [Coppin], calcule a dose de quinino recomendada para os viajantes 2 e 5.
- 2 Leituras recomendadas / documentação do ambiente FuzzyCLIPS
<http://mma.perso.eisti.fr/HTML-SE/Programme/fzdocs.pdf>
<http://www.csee.usf.edu/~hall/papers/fuzzes.pdf>
- 3 Veja os exemplos de código no shell FuzzyCLIPS, disponíveis em
<http://www.csis.yzu.edu/~john/824/examples.html>
- 4 Em laboratório, execute as seguintes atividades:
 - (a) Baixe o código fonte do shell FuzzyCLIPS, recompile e instale.
 - (b) Leia o exemplo de sistema difuso 'Pole Balance Control System'
<http://athena.ecs.csus.edu/~gordonvs/180/FuzzyLogic.pdf>
 - (c) Implemente as regras, conjuntos nebulosos, fuzzificação e defuzzificação do exemplo apresentado segundo material complementar
<http://athena.ecs.csus.edu/~gordonvs/180/FuzzyCLIPS.pdf>
 - (e) Crie novas regras de defuzzificação usando MOM. Compare os resultados.
- 5 Escolha um dos exemplos estudados e implemente-o no FuzzyCLIPS. ▶

Exercícios (Para Casa)

- 1 Seja um sistema especialista nebuloso que determina a faixa de preços a ser cobrado de um cliente de plano de saúde.
 - (a) Proponha conjuntos nebulosos para variáveis linguísticas de entrada e saída de um sistema
 - (b) Proponha 4 regras para auxiliar a decisão


- 2 Seja um sistema de *credit scoring* de uma instituição financeira que realiza empréstimos.
 - (a) Proponha conjuntos nebulosos para variáveis linguísticas de entrada e saída
 - (b) Defina matematicamente funções de pertinência para cada conjunto nebuloso
 - (c) Proponha 5 regras para recomendar ou negar empréstimos
 - (d) Execute suas regras para um cliente hipotético, informando o resultado da defuzzificação pelo método do centróide.

Leituras Adicionais Recomendadas

- 1 NETO, L. B.; COELHO, P. H. G.; AMARAL, J. L. M.; MELLO, M. H. C. S. **Minicurso de Sistema Especialista Nebuloso**. Disponível em <http://www.uff.br/decisao/SBPO%20Fuzy.pdf>.
- 2 SPATTI, D. H.; SILVA, I. N.; USIDA, W. F.; FLAUSINO, R. A. **Regulação automática de tensão em transformadores de subestação de distribuição usando implementação fuzzy**. Sba Controle & Automação vol. 22 no. 2 Campinas Mar./Abr. 2011
- 3 OLIVEIRA, H. L.; AMENDOLA, M.; NÄÄS, I. A. **Estimativa das condições de conforto térmico para avicultura de postura usando a teoria dos conjuntos Fuzzy**. Eng. Agríc. vol.25 no.2 Jaboticabal Mai/Ago. 2005
- 4 GARCIA, K. C.; TEIXEIRA, M. G.; ALVES, C. C; ALVES, R. N. **Concepção de um modelo matemático de avaliação de projetos de responsabilidade social empresarial (RSE)**. Gest. Prod. vol. 14 no.3 São Carlos Set./Dez. 2007.


Referências Bibliográficas


Referências Bibliográficas

 Russel, S., Norvig, P.
Inteligência Artificial, 2a. Edição.
Editora Elsevier, 2004. ISBN: 978-85-352-1177-1

 Coppin, B.
Inteligência Artificial
Editora LTC, 2012. ISBN: 978-85-216-1729-7

 Artero, A. O.
Inteligência Artificial - Teórica e Prática
Editora Livraria da Física, 2009. ISBN: 978-85-7861-029-6

 Faceli, K., Lorena, A. C., Gama, J., Carvalho, A. C. P. L. F.
Inteligência Artificial - Uma abordagem de Aprendizado de Máquina
Editora LTC, 2011. ISBN: 978-85-216-1880-5

 Flausino, R. A., Spatti, D. H., Silva, I. N.
Redes Neurais para Engenharia e Ciências Aplicadas - Curso Prático
Editora Artliber, 2010. ISBN: 978-85-88098-53-4