Programação Linear

Trabalho Teórico / Prático número 1

Lucas Mateus Fernandes

***Abstract*—This work intends to explore a mathematical model that aims to maximize the profit of a joiner having as main tool the linear programming and the resolution through the simplex, simplex 2 phases and graphical method**

***Keywords*—graphical, 2 phases, linear, simplex**

I. Resumo

Este trabalho pretende explorar um modelo matematico que viza maximizar o lucro de um marceneiro tendo como principal ferramenta a programação linear e a resolução por meio do simplex, simplex 2 fases e método grafico.

II. Introdução

Devido a pandemia um marceneiro resolver restruturar sua metrica de produção afim de conseguir extrar o maior lucro possível com as limitações decorrentes da própria pandemia.

III. Restrições da Pandemia

Com decorrencia da pandemia e uma possível crise economica o marceneiro optou por tomar uma atitude mais conservadora em seus gastos, não ter mais do que 1 funcionários, não ter mais do que R$5000 de material em estoque, não trabalhar mais do que 8 horas por dia por um prazo de 30 dias

IV. Restrições de Maquinario

Cada funcionario agiliza o processo de produção em 20% porem devido a quantidade de maquinário os funcionário nem sempre trabalham em paralelo ou seja há um limite de 50% no que os funcionarios podem agilizar pois caso tenha muito funcionários gera um gargalo no processo devido a limitação de maquinario o que acaba gerando funcionarios ociosos.

V. Design

Os moveis são separados em modulos e para a construção de um movel algumas regras devem ser seguidas: Obrigatoriamente um movel tem que ter 1 modulo de gaveta e 1 modulo de porta; Cada modulo de gaveta tem que ser composto por X Gavetas sendo 2<=X<=4.Obrigatoriamente um modulo deve ser classificado somente como um tipo, ou modulo de gaveta ou modulo de porta.

VI. Custo

Os materiais e o custo por funcionário são fixos, cada funcionário tem um custo de R$ 1.345 mensais; cada peça de mdf tem um custo de R$230; o custo de transporte do movel até a casa do cliente é de R$50; o puxador da porta tem um custo fixo de R$30; o puxador da gaveta tem um custo fixo de R$15.

Para a construção de cada gaveta é necessário:1 hora de trabalho; 1 puxador de gaveta; 1/12 de uma peça de mdf;

O custo de uma gaveta é dada pela função custoGaveta definida como:

*custoGaveta(c1, c2, c3) : c1 + c2 * c3*

- *c1 = Custo do puxador da gaveta*
- *c2 = Custo do Mdf*
- *c3 = Porcentagem de um mdf usado para confecção de uma gaveta*

Para a construção de uma porta é necessário: 1 hora de trabalho; 1 puxador de porta; 1/3 de uma peça de mdf;

O custo de uma porta é dada pela função custoPorta definida como:

*custoPorta(c1, c2, c3) : c1 + c2 * c3*

- *c1 = Custo do puxador da porta*
- *c2 = Custo do Mdf*
- *c3 = Porcentagem de um mdf usado para confecção de uma porta*

Portanto o custo de um modulo é proporcional a quantidade de gavetas e portas que pode ser calculado pela formula:

*custoModulo(c1,c2,c3,c4): c1 * c2 + c3 * c4*

- *c1 = quantidade de gavetas em um modulo*
- *c2 = custo por gaveta*
- *c3 = quantidade de portas em um modulo*
- *c4 = custo por porta*

A constante que define o custo de uma gaveta é 34,17 que equivale a *custoGaveta(15,230,1/12)* e o custo de uma porta é 106,67 que equivale a *custaPorta(30,230,1/3)*

Uma porta rende um lucro equivalente a 80% do material gasto e a gaveta rende 90% do material gasto, portanto o custo de uma gaveta ou porta pode ser dado pela pela função:

lucroUnitario(c1,c2): c1 * c2

- *c1 = Custo de uma gaveta ou porta*
- *c2 = Porcentagem de lucro em cima do material gasto*

A constante que define o lucro de uma gaveta é 27,34 que equivale a *lucroUnitario(34.17, 0.8)* e o lucro de uma porta é 96,01 que equivale a *lucroUnitario(106,67, 0.9)*

VII. Variaveis Basicas

As variaveis basicas são:

- x1 = quantidade de modulo com 2 Gavetas
- x2 = quantidade de modulo com 3 Gavetas

- x3 = quantidade de modulo com 4 Gavetas
- x4 = quantidade de modulo com 1 porta
- x5 = quantidade de funcionarios

Devido a natureza do problema que é incoerente com algumas restrições e o range de quantidade de funcionários é extremamente limitante será feito o uso de uma constante,ou seja, em cada instância será rodada 4 vezes com x5 recebendo um valor fixo que pode ser um inteiro dentro do range [0,3]

VIII. Modelagem

A função objetiva é a maximização do lucro que é a relação de um modulo e a quantidade de gavetas ou portas associado ao lucro de cada unidade menos o custo de cada funcionario e o custo gasto em transporte dos moveis, que pode ser definida como:

$$(29{,}68*x1)+(57{,}02*x2)+(84{,}36*x3)+(71{,}01*x4)-(1345*x5)$$

A restriçã de tempo é associação de quanto uma determinada quantidade de funcionario pode agilizar o processo, que pode ser definida como:

$$0.2*x5 <= 0.50$$

A restrição de material é o somatorio do valor gasto pela construção de cada modulo definida como:

$$68{,}34*x1+102{,}51*x2+136{,}68*x3+106{,}67*x4 <=5000$$

A restrição de construção de um movel é a bijeção de modulos de gaveta para com modulos de porta que pode ser definida como:

$$x1+x2+x3-x4 = 0$$

Há outra restrição de tempo associada ao limite de produção mensal definida como:

$$(x1+x2+x3+x4)*(1+(0.2*x5))<= 240$$

IX. Instancias

O que aconteceria se:

- O salario do funcionário fosse R$250
- Não houvesse custo de transporte
- Não houvesse a possibilidade de ter funcionarios qual seria a menor porcentagem de lucro que uma porta tem que ter para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de moveis.
- Não houvesse limite de estoque
- O marceneiro fizesse um emprestimo de R$500000 e comprasse um maquinario que possibilitasse gastar metade do tempo na produção de cada movel e consequentemente o limite de estoque seria R$450000 o marceneiro conseguiria quitar o financiamento em um prazo de 1 ano ?
- O marceneiro não trabalhasse mais com modulos e sim com moveis onde cada movel teria um custo de R$150 e um lucro de R$250 com um tempo de construção de 1hora e 30minutos, e tercerizasse o processo a ponto de não pagar um salario mensal para o funcionário e sim tercerizar a produção de modo que tenha como custo 30% do lucro unitário, porem cada produto tercerizado tem um custo temporal de 2 horas e 15 minutos, que é o tempo de fazer o pedido, Buscar até na distribuidora, fazer o acabamento, e remontar o movel. Por não ter tanto trabalho vendeu algumas maquinas a ponto de conseguir ter R$15000 reais de caixa no primeiro mês.
- Pensando na ultima instância, no próximo mês o marceneiro não terá os R$15000 proveniente da venda das maquinas inutilizadas, o que aconteceria se o valor de caixa estivesse limitado a R$10000

X. Resultados

A instância original e as isntancias de 1 a 5 estão resolvidas no arquivo em anexo do jupyter notebook denominado de Anexo III.

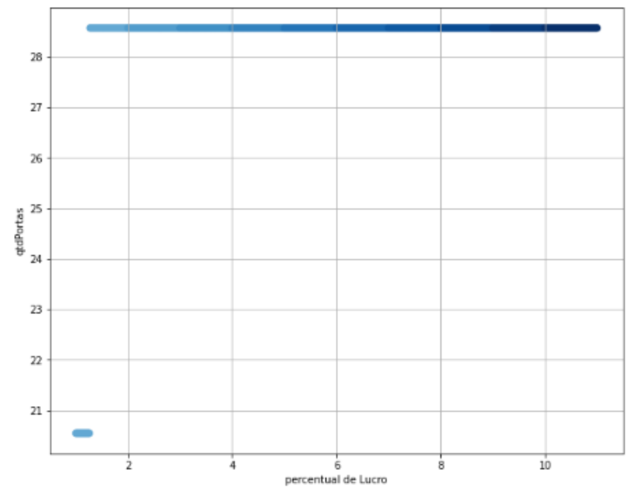
Devido a natureça do problema, após a solução os valores são truncados e há um recalculado da função objetiva com os novos valores truncados

Instancia original: teve como lucro máximo R$3107.4 levando em consideração a construção de 20 modulos de 3 gavetas e 20 modulos de porta e nenhuma funcionário.

1º instância adaptada:teve como lucro máximo R$3107.4 levando em consideração a cosntrução de 20 modulos de 3 gavetas e 20 modulos de porta, ou seja, a quantidade de funcionários não intefere no problema pois não é uma restrição ativa.

2º instância adaptada:teve como lucro máximo R$4219.32 levando em consideração a construção de 28 modulos de 1 gavetas e 28 modulos de porta, ou seja, a o valor do frete intefere no problema mesmo não sendo uma restrição ativa.

3º instância adaptada mostrou que a menor porcentagem de lucro que uma porta tem que ter para que seja mais lucrativo ter uma maior quantidade de moveis, é quando o lucro de uma porta equivale a 127% de seu custo.



4º instância adaptada teve como lucro maximo R$26157.00 levando em consideração a construção de 300 modulos de 1 gavetas e 300 modulos de porta e 3 funcionários.

5º instância adaptada teve como lucro ao longo de um ano R$284579.13 levando em consideração a construção de 1849 modulos de 3 gavetas e 1849 modulos de porta e 2 funcionários.

6º instância adaptada teve uma mudança significativa na modelagem ficando da seguinte forma:

x1 = quantidade de moveis feitos

x2 = quantidade de moveis tercerizados

$$max\ z = 250*x1+175x2 - 50*(x1+x2)$$

sujeito a:

Restrição de tempo dispoinivel mensalmente em minutos

$$90*x1+135*x2 <= 14400$$

Retrição de dinheiro disponivel mensalmente

*150*x1 + 75*x2 <= 15000*

6º instância adaptada foi resolvida por metodo gráfico manualmente que pode ser visto no ‘Anexo I’ tendo como valor de x1=70 x2 = 60 e lucro maximo de R$21500

7º instância adaptada foi resolvida por metodo simplex manualmente que pode ser visto no ‘Anexo II’ onde x1=20 x2=93 já com os valores truncados e recalculando a função objetiva com os valores truncados chegamos no valor do lucro máximo igual a R$15625,00 .

XI. Conclusões

1º instância adaptada interferiu no problema porem não interferiu na solução otima ou seja não era uma restrição ativa pois de acordo com os benefícios que um funcionário oferece e suas despesas, não é viavel ter um funcionário.

2º instância adaptada interferiu diretamente no problema mesmo não sendo aplicada na restrição e sim na função objetiva pois o custo do frete penalizava a construção de modulos de 1 gaveta ou seja quanto menos gavetas mais o modulo era penalizado pelo frete.

4º instância adaptada interferiu diretamente no problema e fez com que a restrição de funcionário associada com o tempo se tornasse uma restrição ativa.

5º instância adaptada mostrou que o emprestimo não seria uma opção factivel pois não conseguiria pagar o financiamento ao longo de um ano, porem foi possível perceber que no caso da isntancia teve um padrão diferente das demais isntância onde o modulo de portas não esteve tendencioso a apena um tipo de modulo, tal instância com 1 funcionário teve como lucro máximo R$283384.76 fazendo 224 modulos de 1 gaveta 1687 modulos de 3 porta e 1912 modulos de 1 porta.

6º instância adaptada teve uma mudança significativa na modelagem que permitiu que o problema fosse resolvido via metodo gráfico devido a limitação de apenas duas variaveis básicas.

7º instância adaptada foi uma continuação da 6º de modo que facilitasse o desenvolvimento do método simplex, mas cabe ressaltar que a quantidade de variaveis não é um limitade de tal metodo porem utilizar tal método só foi possível pois todas restrições eram de ‘<=’.

ANEXO I

Resolução da 6º instância foi feita pelo método grafico seguindos os seguintes passos:

1º passo é converter as restrições de desigualdade em restrições de igualdade:

*90*x1+135*x2 = 14400*

*150*x1 + 75*x2 =15000*

2º passo é determinar os pontos A, A’ referentes a primeira restrição e os pontosC, C’ referentes a segudna restrição:

Ponto A:

x1 = 0

*90*0+135*x2 = 14400*

*135*x2 = 14400*

x2 = 14400/135

x2 = 106,66666666...

x2 = 960/9

A = (0, 960/9)

Ponto A”:

x2 = 0

*90*x1+135*0 = 14400*

*90*x1= 14400*

x1= 14400/90

x1= 14400/90

x1 = 160

A = (160,0)

Ponto C:

x1 = 0

*150*0 + 75*x2 = 15000*

*75*x2 = 15000*

x2 = 15000/75

x2 = 200

C = (0,200)

Ponto C’:

x2 = 0

*150*x1 + 75*0 = 15000*

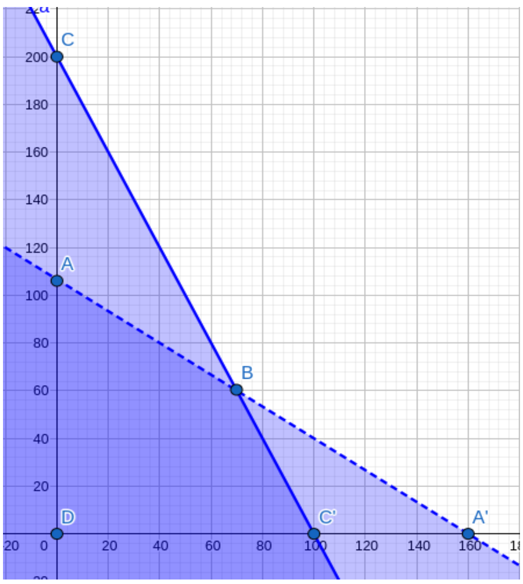
*150*x1 = 15000*

x1 = 15000/150

x1 = 100

C’=(100,0)

3º passo é determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano



4º passo é determinar o ponto ‘B’ que é a interseção entre as duas retas que representão as restrições:

*90*x1+135*x2 = 14400*
*150*x1 + 75*x2 =15000 *(-1,8)*

*90*x1 +135*x2 = 14400*
*-270*x1 -135*x2 = -27000*

*-180*x1 = -12600*
x1 = 70

*90*70+135*x2 = 14400*
x2 =8100/135
x2=60

B = (70,60)

5º passo é determinar a solução ótima do modelo

Label	Ponto	Função Objetiva
D	(0,0)	0
C’	(100,0)	20000
B	(70,60)	21500
A	(0, 960/9)	13333.33...

A melhor solução para o sistema é x1=70 e x2=60 que resulta num lucro de R$28000,00

ANEXO II

Resolução da 7º instância foi feita pelo método Simplex Tableau seguindos os seguintes passos:

1º passo é converte o problema na forma padrão:

*max z = 250*x1+175x2 – 50*(x1+x2)*

*90*x1+135*x2 +x3 = 14400*

150*x1 + 75*x2 +x4 = 15000

2º passo é representar o problema em um quadro

(tableau) Simplex, cabe ressaltar que os coeficientes da função objetiva são invertidos ququando se insere na tabela para se adequar ao método

		x1	x2	x3	x4
z	0	-200	-125	0	0
x3	*14400*	90	135	1	0
x4	10000	150	75	0	1

3º passo é identificar a coluna pivo que é a coluna que possui a celula com o menor valor negativo na primeira linha da tabela:

		x1	x2	x3	x4
z	0	-200	-125	0	0
x3	*14400*	90	135	1	0
x4	10000	150	75	0	1

4º passo é identificar a linha pivo,ou seja, a linha que possui o menor cofiente positivo da primeira coluna dividido pelo valor da mesma linha porem na coluna pivo

		x1	x2	x3	x4	razão
z	0	-200	-125	0	0	
x3	*14400*	90	135	1	0	160
x4	10000	150	75	0	1	66,66

5º passo é fazer o escalonamento por Gauss-Jordan tendo como referencia a linha pivo com o valor da celula da interseção linha e coluna pivo com valor igual a 1.

x4	66,66...	1	0,5	0	0,01

Tendo a linha de referência basta escalonar a tabela e alterar a variavel da coluna pivo pela a variavel da linha pivo.

		x4	x2	x3	x4
z	13333,33	0	-25	0	1,33
x3	8400	0	90	1	-0,6
x1	66,67	1	0,5	0	0,01

6º Verificar se ainda há um valor negativo na primeira linha e repetir os passos 3 a 6:

2 iteração

		x4	x2	x3	x4
z	13333,33	0	-25	0	1,33
x3	8400	0	90	1	-0,6
x1	66,67	1	0,5	0	0,01

		x4	x2	x3	x4	Razão
z	20000	0	-25	0	1,33	
x3	5400	0	90	1	-0,6	93,33
x1	100	1	0,5	0	0,01	133,3

x3	93,33	0	1	0,01	-0,01

		x4	x3	x3	x4
z	15666,67	0	0	0,28	1,17
x2	93,33	0	1	0,01	-0,01
x1	20	1	0	-0,01	0,01

Antes de começar a 3° iteração verificasse que não existe nenhum número negativo da primeira linha da tabela portanto chegou ao resultado otimo .