JOÃO NUNES de SOUZA

ATENÇÃO. Versão preliminar de solução de exercícios preparada por alunos do mestrado em Ciência da Computação, turma 02/2009

LÓGICA para CIÊNCIA da COMPUTAÇÃO

Uma introdução concisa

22 de fevereiro de 2010

Sumário

Parte I

LÓGICA PROPOSICIONAL

1

A linguagem da Lógica Proposicional

Exercício 1:

a)

Não é uma fórmula da Lógica Proposicional. Não é possível obtê-la a partir da definição 1.2.

b)

É uma fórmula da Lógica Proposicional. Não é possível obtê-la a partir da definição 1.2.

c)

É uma fórmula da Lógica Proposicional. Não é possível obtê-la a partir da definição 1.2.

d)

Não é uma fórmula da Lógica Proposicional. Não é possível obtê-la a partir da definição 1.2.

e)

É uma fórmula da Lógica Proposicional. Não é possível obtê-la a partir da definição 1.2.

Exercício 2:

a)

Sim. Somente quando a fórmula for composta de um único símbolo verdade ou um símbolo proposicional, caso contrário sempre existirá, mesmo que omitido.

b)

São 4. Símbolos de Pontuação, símbolos proposicionais, símbolos de verdade e conectivos proposicionais.

c)

Não. Toda fórmula com conectivo possui símbolo de pontuação.

Exercício 3:

a) $((\neg\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)) \land true$

Comprimento igual a 11.

b)$P \to ((Q \to R) \to ((P \to R) \to (P \to R)))$

Comprimento igual a 13.

c) $((P \to \neg P) \leftrightarrow \neg P) \lor Q$

Comprimento igual a 9.

d) $\neg(P \to \neg P)$

Comprimento igual a 5.

Exercício 4:

a) $((\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \lor Q))) \to R)) \land \mathbf{P}\ ))$

$\neg\neg P \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \lor Q) \to R) \land P$

b) $(\neg P \to (Q \lor R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \lor \neg P))$

Nada a retirar

c) $((\ \mathbf{P} \lor Q) \to (P \to (\neg Q)))$

$(\mathrm{P} \lor Q) \to (P \to \neg Q)$

Exercício 5:

a)

$P \vee \neg Q \rightarrow R \rightarrow \neg R$
$(P \vee \neg Q) \rightarrow R \rightarrow \neg R$
$(P \vee \neg Q) \rightarrow (R \rightarrow \neg R)$
$(P \vee (\neg Q \rightarrow R)) \rightarrow \neg R$
$P \vee (\neg Q \rightarrow (R \rightarrow \neg R))$
$P \vee \neg(Q \rightarrow R \rightarrow \neg R)$

b)

$Q \rightarrow \neg P \wedge Q$
$Q \rightarrow (\neg P \wedge Q)$
$Q \rightarrow \neg(P \wedge Q)$

c)

$\neg P \vee Q \leftrightarrow Q$
$(\neg P \vee Q) \leftrightarrow Q$
$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow Q$
$\neg(P \vee Q \leftrightarrow Q)$

d)

$\neg\neg P \rightarrow Q \equiv P \wedge P \neg\neg R$
Esta não é uma fórmula válida

Exercício 6:

a)

Exercício 3
a) ∧ ↔ ∨¬¬PQ→PQtrue
b) →P→→QR→→PR→PR
c) ∨ ↔→P¬P¬PQ
d) ¬ →P¬P
Exercício 4
a) ↔ ∧¬ → ¬¬∨PQRP¬¬P
b) ↔→ ¬P∨QR↔ ∧PQ∨¬¬R¬P
c) → ∨PQ→P¬Q

Exercício 7:

Exercício 8:

Exercício 9:

A paridade é par, pois por definição o símbolo de pontuação sempre abre "("e fecha ")".

Exercício 10: Seja H uma fórmula que não contém o conectivo ¬.

a) Qual a paridade de *comp*[H]?

comp[H] é um número ímpar.

b) Qual a relação entre *comp*[H] e o número de conectivos de *H*?

comp[H] é o dobro do número de conectivos de H, mais um.

2

A semântica da Lógica Proposicional

Exercício 1:

a)

True é um símbolo sintático e T é um símbolo semântico.

b)

False é um símbolo sintático e F é um símbolo semântico.

c)

$\longrightarrow$ é um símbolo sintático e $\Rightarrow$ é um símbolo semântico.

d)

$\leftrightarrow$ é um símbolo sintático e $\Leftrightarrow$ é um símbolo semântico.

Exercício 2:

Sintaxe é uma unificação da linguagem, diz respeito aos símbolos. Semântica é o significado ou interpretação dos objetos sintáticos.

Exercício 3:

Não. Na lógica, para que uma disjunção seja verdadeira, não é necessário nenhuma relação entre suas alternativas.

Exercício 4:

a)

Não. Existe a possibilidade onde, I[P] = T e I[Q] = T.

b)

I[Q] = T.

c)

I[H] = T.

d)

Nada se pode concluir sobre I[Q].

e)

I[H] = F.

Exercício 5:

a) $(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

P	Q	$\neg P$	$(\neg P \lor Q)$	$(P \rightarrow Q)$	$(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". Não é possível precisar o valor verdade de J[Q].

b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". Não é possível precisar o valor verdade de J[Q] e J[R].

P	Q	R	$(Q \to R)$	$(P \to R)$	$(P \to R) \to (P \to R)$	$(\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \to ((\mathrm{P} \to \mathrm{R}) \to (\mathrm{P} \to \mathrm{R}))$	$P \to ((Q \to R) \to ((P \to R) \to (P \to R)))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \to \neg Q)$	$(\mathrm{P} \to \neg \mathrm{Q}) \leftrightarrow \neg \mathrm{P}$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

c) $(\mathbf{P} \to \neg \mathbf{Q}) \leftrightarrow \neg \mathbf{P}$

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "F". J[Q]=T.

d) $(\mathbf{Q} \to \neg \mathbf{P})$

P	Q	$\neg P$	$Q \to \neg P$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". J[Q]=F.

e) $(\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \to \mathbf{R})) \leftrightarrow ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R})$

P	Q	R	$(Q \to R)$	$(P \to (Q \to R))$	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \to R)$	$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". Não é possível precisar o valor verdade de J[Q] e J[R].

f) $(\mathbf{R} \wedge \neg \mathbf{P}) \leftrightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{R})$

P	R	$\neg P$	$(R \wedge \neg P)$	$(P \wedge R)$	$(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". J[R]=F.

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge Q)$	$(P \vee Q)$	$((P \wedge Q) \leftrightarrow P)$	$((P \vee Q) \leftrightarrow Q)$	$(((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

g) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". J[Q]=T.

h) $(\text{false} \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

Q	R	$false \rightarrow Q$	$(false \rightarrow Q) \leftrightarrow R$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	T	F

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "F". Não é possível precisar o valor verdade de J[Q] e J[R].

i) $\text{true} \rightarrow Q$

Q	$true \rightarrow Q$
T	T
F	F

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". J[Q]=T.

j)$(P \rightarrow \text{false}) \leftrightarrow R$

P	R	$(P \rightarrow false)$	$(P \rightarrow false) \leftrightarrow R$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T". J[R]=F.

k) $P \rightarrow \text{true}$

P	$P \rightarrow true$
T	T
F	T

No caso da interpretação I, o valor verdade para esta fórmula é "T".

Exercício 6:

a)

T.

b)

T.

c)

Nada.
Repita supondo I[P→Q] = F.

a)

Nada.

b)

Nada.

c)

F.

Exercício 7:

Seja I uma interpretação tal que: $I[P \leftrightarrow Q] = T$. O que podemos deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

a)

$I[\neg P \wedge Q] = F$

b)

$I[P \vee \neg Q] = T$

c)

$I[P \rightarrow Q] = T$

d)

$I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)] = T$ e nada podemos concluir de $I[R]$

e)

$I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)] = T$ e nada podemos concluir de $I[R]$

Repita este exercício supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$

a)

Nada se pode concluir nada a respeito de $I[\neg P \wedge Q]$

b)

Nada se pode concluir nada a respeito de $I[P \vee \neg Q]$

c)

Nada se pode concluir nada a respeito de $I[P \rightarrow Q]$

d)

Nada se pode concluir nada a respeito de $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)]$ e de $I[R]$

e)

Nada se pode concluir nada a respeito de $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)]$ e de $I[R]$

Exercício 8:

H = ((P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q))) → P

a)

Se I[P] = F, temos que I[H] = F, pois,
I[(P ∧ Q) ↔ P] = T, I[(P ∨ Q) ↔ Q] = T, I[P → Q] = T e I[(P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q))] = T, logo:
I[((P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q))) → P] = F

b)

Se I[P] = T, temos que I[H] = T, pois, I[P̌ → F] = T, não importando o valor de P̌

Exercício 9:

Cada linha da tabela verdade de H é diferente uma das outras, correspondem à interpretações diferentes, pois a cada linha, cada conjunto de proposições possuirá combinações de interpretações diferentes das outras linhas.

Exercício 10:

a)Considere as associações: P = "Eu sou feliz", Q = "Você é feliz".

Nesse caso, a representação é dada por $(P \to \neg Q) \wedge (\neg Q \to \neg P)$

b)Considere as associações: P = "José virá a festa", Q = "Maria gostará da festa".

Nesse caso, a representação é dada por $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

c)Considere as associações: P = "A novela será exibida", Q = "O programa político será exibido"

Nesse caso, a interpretação é dada por: $(Q \to \neg P) \wedge (P \to \neg Q)$

d)

(P $\to Q) \wedge (\neg P \to R)$
P = "chover"
Q = "Irei para casa"
R = "Ficarei no escritório"

e)

(P $\wedge Q) \rightarrow R$
P = "Maria é bonita, inteligente e sensível"
Q = "Rodrigo ama Maria"
R = "Rodrigo é feliz"

f)

(P $\rightarrow \neg Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$
P = "Sr. Oscar é feliz"
Q = "Sra. Oscar é feliz"

g) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá à festa e Kátia ficará infeliz.

p = Maurício virá à festa
q = Kátia virá à festa
r = Kátia ficará feliz
$H = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r$

h) Irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

p = Irei ao teatro
q = For uma peça de comédia
$H = p \leftrightarrow q$

i) Se minha namorada vier, irei ao teatro somente se for uma peça de comédia.

p = Minha namorada vier
q = Irei ao teatro
r = For uma peça de comedia
$H = p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$

Exercício 11

a)

O quantificador *para todo*, é considerado apenas na Lógica de Predicados.

b)

O termo *Possivelmente* é considerado na Lógica Modal.

c)

O *tempo* é considerado na Lógica Temporal.

d)

e)

f)

g)

h)

i)

j)

k)

O quantificador "Toda", que é considerado na lógica predicados.

l)

"quase todo"é Considerado em Lógicas não Clássicas.

m)

"poucos"é considerado em Lógicas não Clássicas.

n)

A sentença acima pode ser representada na Lógica Proposicional pela fórmula P.

3

Propriedades Semânticas da Lógica Proposicional

Exercício 1: Demonstre se as afirmações são verdadeiras.

a) Se *($E \leftrightarrow G$)* e *($G \leftrightarrow H$)* são tautologias, então *($E \leftrightarrow H$)* é tautologia.

Suponha que (E $\leftrightarrow$ G) e (G $\leftrightarrow$ H) são tautologias.
Mas, (E $\leftrightarrow$ G) é tautologia se e somente se $\forall$ interpretação I, I[E] = I[G].
(G $\leftrightarrow$ H) é tautologia se e somente se $\forall$ interpretação I, I[G] = I[H].
Como, para toda interpretação, I[E]=I[G] e I[G]=I[H], então, para toda interpretação, I[E]=I[H].
Portanto, $\forall$ interpretação I, I[E] = I[H], o que significa que (E $\leftrightarrow$ H) é tautologia.

b) $(E \leftrightarrow G)$ é tautologia, se, e somente se, $(E \wedge G)$ são tautologias, então $(E \leftrightarrow H)$ é tautologia.

Esta afirmação não é verdadeira.
Considere o contra-exemplo $E = P$ e $G = \neg\neg P$.
Nesse caso, $(P \leftrightarrow \neg\neg P)$ é tautologia, mas nenhuma das fórmulas $(P \wedge \neg\neg P)$ e $(\neg P \wedge \neg\neg\neg P)$ são tautologias.

c) Se $I[E \leftrightarrow G] = T$, então $I[E \wedge G] = T$ ou $I[\neg E \wedge G] = T$ ou $I[\neg E \wedge \neg G] = T$.

Seja uma interpretação I, $I[E \leftrightarrow G] = T \Leftrightarrow I[E] = I[G]$, então
$I[E \wedge G] = T \Leftrightarrow I[E] = T$ e $I[G] = T$ ou
$I[\neg E \wedge \neg G] = T \Leftrightarrow I[\neg E] = T$ e $I[\neg G] = T$
$\Leftrightarrow I[E] = F$ e $I[G] = F$

d) $\neg(E \leftrightarrow G)$ é tautologia, se, e somente se, E e $\neg G$ são tautologias.

Se E e $\neg G$ são tautologias, então para toda interpretação I, $I[E] = T$ e $I[G] = F$.
Logo $I[\neg(E \leftrightarrow G)] = T \Leftrightarrow I[E \leftrightarrow G] = F$
$\Leftrightarrow I[E] \neq I[G]$

e) Se $\boldsymbol{I[\neg(E \rightarrow G)] = T}$, então $\boldsymbol{I[E] = I[\neg G] = T}$

Seja uma interpretação I, $I[\neg(E \rightarrow G)] = T \Leftrightarrow I[(E \rightarrow G)] = F$
$\Leftrightarrow I[E] = T$ e $I[G] = F$
Logo se $I[E] = T$ e $I[G] = F$, então, $I[E] = I[\neg G] = T$

Exercício 2:

a)H=P ∧ Q, G=P

P	Q	H	G
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

H ⊨ G
Pois, ∀ Int I; I[H]=T⇒ I[G]=T

b)H= P ∨ Q, G=P

P	Q	H	G
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

H ⊭ G
∃ Int I; I[H]=T então I[G]=F

c)H= P ∨ ¬ Q, G=*False*

P	Q	¬ Q	H	G
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F

H ⊭ G
∀ Int I; I[H]=F.

d)H=*False*, G=P

H ⊭ G
∀ Int I; I[H]=F.

e)H=P, G=*True*

H $\models$ G
Pois, $\forall$ Int I; I[H]=T$\Rightarrow$ I[G]=T

Exercício 3:

a)

i = 10.

b)

i = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

c)

i = 10, $\forall$j, k=1.
i = 6, j = 3, k = 1.

d)

Não existem. As colunas devem ser equivalentes.

e)

$H_7 \models H_5, H_5 \not\models H_7$.

f)

Não. As colunas devem ser equivalentes.

g)

Não.

h)

6: $\{H_1, H_2, H_3, H_4, H_6, H_9\}$

i)

Tautologia: H_1 Satisfatíveis: $H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9$ Contraditória: H_{10}

j)

$H_1 = ((P \lor Q) \lor (\neg P \lor \neg Q))$ $H_2 = (P \lor Q)$ $H_3 = (P \lor \neg Q)$ $H_4 = (P \to Q)$ $H_5 = (P \to \neg Q)$ $H_6 = ((Q \lor \neg Q) \to P)$ $H_7 = \neg((Q \lor \neg Q) \to P)$ $H_8 = (P \leftrightarrow Q)$ $H_9 = (P \leftrightarrow \neg Q)$ $H_{10} = ((P \land Q) \land (\neg P \land \neg Q))$

Exercício 4:

Exercício 5: Considere as fórmulas: A, B, C e D. Demonstre que A, B, C, D é satisfatível, se e somente se, ¬(A ∧ (B ∧ (C ∧ D))) é tautologia.

Se A, B, C, D é insatisfatível, se e somente se, I[A] = F ou I[B] = F ou I[C]= F ou I[D] = F.
Se I[A] = F ou I[B] = F ou I[C] = F ou I[D] = F, se e somente se, I[¬A] = T ou I[¬B] = T ou I[¬C] = T ou I[¬D] = T.
Se I[¬A] = T ou I[¬B] = T ou I[¬C] = T ou I[¬D] = T, se e somente se, I[¬A ∨ ¬B ∨ ¬C ∨ ¬D] = T.
Se I[¬A ∨ ¬B ∨ ¬C ∨ ¬D] = T, se e somente se, pela lei de Morgan ¬ I[A ∧ B ∧ C ∧ D] = T.
Se ¬I[A ∧ B ∧ C ∧ D] = T, se e somente se ¬(A ∧ (B ∧ (C ∧ D))) é tautologia.

Exercício 6:

a) H não é satisfatível, se, e somente se, H é contraditória.

H não é satisfatível ⇔ não existe interpretação I; I[H]=T
⇔ ∀ interpretação I, I[H]=F
⇔ H é contraditória.
Afirmação verdadeira.

b) H é satisfatível, se, e somente se, H não é contraditória.

H é satisfatível ⇔ existe interpretação I; I[H]=T
⇔ H não é contraditória.
Afirmação verdadeira.

c) ¬ H é tautologia, se, e somente se, H é contraditória.

¬ H é tautologia ⇔ não existe interpretação I; I[¬ H]=F
⇔ ∀ interpretação I, I[¬ H]=T
⇔ ∀ interpretação I, I[H]=F
⇔ H é contraditória.
Afirmação verdadeira.

d) H não é tautologia, se, e somente se, H é contraditória.

H não é tautologia ⇔ existe interpretação I; I[H]=F
Afirmação falsa pois não necessariamente H é contraditória.

Exercício 7:

a)

Não, H $\neq$ G e P $\neq$ G.

b)

Sim, pois I[H] = I[P] e I[G] = I[P], logo I[H] = I[G].

c)

Não. Exemplo: I[P] = T, I[Q] =T, T[R] = T e I[S]= F.

d)

Sim.

e)

Sim.

f)

Sim.

g)

Sim.

h)

Sim.

i)

Não.

Exercício 8: Demonstre se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) *H* é satisfatível, se e somente se, ¬*H* é satisfatível

Demonstração. A ida: H é satisfatível $\Rightarrow \neg H$ é satisfatível.
Por definição, H é satisfatível $\Leftrightarrow \exists$ uma interpretação $I;I[H] = T$

$$\begin{aligned} \text{Logo se } \; I[H] = T \; &\Leftrightarrow I[\neg H] = F \\ &\Leftrightarrow \forall \; int \; I; I[\neg H] = F \\ &\Leftrightarrow I[\neg H] \text{ é contraditória} \end{aligned}$$

Logo a afirmação: H é satisfatível $\Rightarrow \neg H$ é satisfatível **é falsa**.

Demonstração. A volta: $\neg H$ é satisfatível $\Rightarrow H$ é satisfatível.
Por definição, $\neg H$ é satisfatível $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I;I[\neg H] = F$

$$\begin{aligned} \text{Logo se } \; I[\neg H] = F \; &\Leftrightarrow I[H] = T \\ &\Leftrightarrow \exists \text{ uma interpretação } I; I[H] = T \\ &\Leftrightarrow I[H] \text{ é satisfatível} \end{aligned}$$

Logo a afirmação: $\neg H$ é satisfatível $\Rightarrow H$ é satisfatível **é verdadeira**.

CONCLUSÃO: A afirmação é **FALSA**, pois os resultados das interpretações da IDA e da VOLTA demonstrados acima são diferentes. **cqd.**

b) *H* é contraditória, se e somente se, ¬*H* é satisfatível

Demonstração A ida: H é contraditória $\Rightarrow \neg H$ é satisfatível.
Por definição, H é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I;I[H] = F$

$$\begin{aligned}\text{Logo se } \ I[H]=F \ &\Leftrightarrow I[\neg H]=T\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I; I[\neg H]=T\\ &\Leftrightarrow I[\neg H] \text{ é tautologia}\\ &\Leftrightarrow I[\neg H] \text{ é satisfatível}\end{aligned}$$

Logo a afirmação: H é contraditória $\Rightarrow \neg H$ é satisfatível **é verdadeira**

Demonstração A volta: $\neg H$ é satisfatível $\Rightarrow H$ é contraditória.
Por definição, $\neg H$ é satisfatível $\Leftrightarrow \exists$ uma interpretação I;$I[\neg H] = T$

$$\begin{aligned}\text{Logo se } \ I[\neg H]=T \ &\Leftrightarrow I[H]=F\\ &\Leftrightarrow \exists \text{ uma interpretação } I; I[H]=F\\ &\Leftrightarrow I[H] \text{ não é contraditória}\end{aligned}$$

Logo a afirmação: $\neg H$ é satisfatível $\Rightarrow H$ é contraditória **é falsa**

CONCLUSÃO: A afirmação é **FALSA**, pois os resultados das interpretações da IDA e da VOLTA demonstrados acima são diferentes. **cqd.**

c) H é tautologia, se e somente se, $\neg H$ é contraditória

Demonstração A ida: H é tautologia $\Rightarrow \neg H$ é contraditória.
Por definição, H é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I;$I[H] = T$

$$\begin{aligned}\text{Logo se } \ I[H]=T \ &\Leftrightarrow I[\neg H]=F\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I; I[\neg H]=F\\ &\Leftrightarrow I[\neg H] \text{ é contraditória}\end{aligned}$$

Logo a afirmação: H é tautologia $\Rightarrow \neg H$ é contraditória **é verdadeira**

Demonstração A volta: $\neg H$ é contraditória $\Rightarrow H$ é tautologia.
Por definição, $\neg H$ é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I;$I[\neg H] = F$

$$\begin{aligned}\text{Logo se } \ I[\neg H]=F \ &\Leftrightarrow I[H]=T\\ &\Leftrightarrow \forall \text{ interpretação } I; I[H]=T\\ &\Leftrightarrow I[H] \text{ é tautologia}\end{aligned}$$

Logo a afirmação: $\neg H$ é contraditória $\Rightarrow H$ é tautologia **é verdadeira**

CONCLUSÃO: A afirmação é **VERDADEIRA**, pois os resultados das interpretações da IDA e da VOLTA demonstrados acima são iguais. **cqd.**

d) H é tautologia se, e somente se, H é satisfatível.

$$\begin{aligned}\text{H é tautologia} &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[H]} = \text{T}\\ &\Rightarrow \text{existe uma interpretação I, I[H]} = \text{T}\\ &\Leftrightarrow \text{H é satisfatível}\end{aligned}$$

Não podemos afirmar que se H é satisfatível, então H é tautologia. Portanto, é falso afirmar que H é tautologia se, e somente se, H é satisfatível.

e) Se H é contraditória, então ¬H é satisfatível.

$$\begin{aligned} \text{H é contraditória} &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[H]} = \text{F} \\ &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[}\neg\text{H]} = \text{T} \\ &\Rightarrow \text{existe uma interpretação I, I[}\neg\text{H]} = \text{T} \\ &\Leftrightarrow \neg\text{H é satisfatível} \end{aligned}$$

Portanto é verdade afirmar que se H é contraditória, então ¬H é satisfatível

f) Se H é tautologia, então H ∧ G equivale a G

$$\begin{aligned} \text{H é tautologia} &\Leftrightarrow \text{para toda interpretação I, I[H]} = \text{T} \\ &\Rightarrow \text{para toda interpretação I, I[H} \wedge \text{G]} = \text{I[G]} \\ &\Leftrightarrow \text{H} \wedge \text{G equivale a G} \end{aligned}$$

Portanto é verdade afirmar que se H é tautologia, então H ∧ G equivale a G

g) H é uma tautologia se, e somente se H ∧ G equivale a G

ida: H é uma tautologia ⇒ (H ∧ G) equivale a G

$$\begin{array}{ll} \Updownarrow & \Updownarrow \\ \forall \text{I, I[H]=T} & \forall \text{I; I(H} \wedge \text{G)} = \text{I[G]} \\ & \forall \text{I, I[H]} \wedge \text{I[G]} = \text{I[G]} \\ & \forall \text{T} \wedge \text{I[G]} = \text{I[G]} \end{array}$$

volta: (H ∧ G) equivale a G ⇒ H é uma tautologia

$$\begin{array}{ll} \Updownarrow & \Updownarrow \\ \forall \text{I; I[H} \wedge \text{G]} = \text{I[G]} & \forall \text{I, I[H]=T} \end{array}$$

Contra Exemplo H=P e G=P

(P∧P) equivale a P, porém não é tautologia

h) H é uma tautologia ⇒ (H ∨ G) equivale a G

$$\begin{array}{ll} \Updownarrow & \Updownarrow \\ \forall \text{I, I[H]=T} & \forall \text{I; I[H} \vee \text{G]} = \text{I[G]} \\ & \forall \text{I, I[H]} \vee \text{I[G]} = \text{I[G]} \\ & \forall \text{T} \vee \text{I[G]} = \text{T e não a I[G]} \end{array}$$

i) (H $\vee$ G) equivale a G $\Rightarrow$ H é uma tautologia

$$\begin{array}{ll} \Updownarrow & \Updownarrow \\ \forall I,\ I[H \vee G] = I[G] & \forall I; I[H]=T \\ \forall I,\ I[H] \vee I[G] = I[G] & \end{array}$$

Contra Exemplo H=P e G=P
(P$\vee$P) = P, porém não é tautologia

j) Se H é satisfatível, então ($H \vee G$) equivale a G.

H	G	H $\vee$ G
T	T	T
T	**F**	**T**
F	T	T
F	F	F

Como podemos observar, ($H \vee G$) não equivale a G.

k) $H \models G$, se e somente se, para toda interpretação I, se I[H] = T, então I[G] = T.

Suponha que $H = P \wedge Q$ e $G = P \vee \neg P$, temos então a tabela-verdade abaixo:

P	Q	$\neg$ P	H	G
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Como podemos observar, temos que H implica semanticamente G e G é tautologia mas H não. Logo a afirmação é falsa.

l) Se $H \models G$ e H é tautologia, então G é tautologia.

$H \models G$, se e somente se, para toda interpretação I, se I[H] = T, então I[G] = T.

Sendo H uma tautologia, temos que para toda interpretação I, I[H] = T, logo I[G] = T para todo I. Portanto concluímos que a afirmação é verdadeira.

m) H é insatisfatível então H $\wedge$ G equivale a G

Contra-exemplo H= P e G = Q P é satisfatível porém P $\wedge$ Q não equivale a G. Logo a afirmção é falsa.

n) H é uma tautologia ou G é uma tautologia então ¬H é contraditória.

¬ H e contradição ⇔ ∀I; I[¬H]= F
⇔ ∀I; I[H]=T
Não há absurdo, logo a afirmação é falsa.

o) H = G ⟶ $(H \rightarrow E) \models (G \rightarrow E)$

H = false
G = P
E = false

false $\models P \rightarrow T \models F$
I[T → F] = F : Logo a afirmação é falsa

p) Se $\models H$ e $\models (\neg G \rightarrow \neg H)$, então $\models G$.

A afirmação é verdadeira.

Demonstração:
Se $(\neg G \rightarrow \neg H)$ é tautologia então para toda interpretação I, $I[\neg G \rightarrow \neg H] = T$. Mas como H também é tautologia, $I[\neg H] = F$ para todo I. Logo, para que $(\neg G \rightarrow \neg H)$ seja verdadeiro para todo I, $\neg G$ deve ser falso para todo I, ou seja, $I[\neg G] = F$ para todo I. Logo $I[G] = T$ para todo I, e portanto, $modelsG$. Sendo assim, a afirmação é verdadeira.

q) Se H é satisfatível e $(H \rightarrow G)$ é satisfatível, então G é satisfatível.

A afirmação é falsa.

Demonstração:
H e $(H \rightarrow G)$ são satisfatíveis, logo existe interpretação I e J tal que $I[H] = T$ e $J[H \rightarrow G] = T$. Porém $J[H \rightarrow G] = T$ não implica que $J[G] = T$, pois se $J[H] = F$, então $J[H \rightarrow G] = T$ independentemente do valor de $J[G]$. E como H é somente satisfatível, $J[H] = F$ é um valor possível. Portanto não podemos afirmar que G é satisfatível, e portanto a afirmação é falsa.

r) Se H é satisfatível e $\models (H \rightarrow G)$, então G é satisfatível.

A afirmação é verdadeira.

Demonstração:
Como $(H \rightarrow G)$ é tautologia, então para toda interpretação I, $I[H \rightarrow G] = T$. Temos ainda que H é satisfatível, logo existe interpretação I tal que $I[H] = T$. Para todo I, tal que $I[H] = T$, $I[H \rightarrow G] = T$, pois $(H \rightarrow G)$ é tautologia. Mas se $I[H] = T$ e $I[H \rightarrow G] = T$, então $I[G] = T$. Logo G é satisfatível, e portanto a afirmação é verdadeira.

Exercício 9:

a)

Falsa.
R: H é satisfatível $\Leftrightarrow$ existe uma interpretação I, I[H] = T, ou seja, não existe garantia de que H seja uma tautologia.

b)

Verdadeiro.
R: H equivale a g $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H $\leftrightarrow$ G] = T
$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, I[H $\rightarrow$ G] = T e I[H $\leftarrow$ G] = T

Logo, H $\rightarrow$ G e H $\leftarrow$ G são tautologias, cqd.

c)

Falsa.
R: H implica G $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se I[H] = T então I[G]=T

d)

Se $H \vDash G$ então $(H \vee E) \vDash (G \vee E)$

Logo, $H \vDash G$ implica $(H \vee E) \vDash (G \vee E)$

Mas, por definição, $H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int. I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$

Portanto,
$H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int. I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$
$\Rightarrow \forall$ int. I, se $I[H \vee E] = T$ então $I[G \vee E] = T$
$\Leftrightarrow (H \vee E) \vDash (G \vee E)$

Ou seja, se $H \vDash G$ implica $(H \vee E) \vDash (G \vee E)$, então a afirmação é verdadeira.

e)

Se $H \vDash G$ então $(H \wedge E) \vDash (G \wedge E)$

Logo, $H \vDash G$ implica $(H \wedge E) \vDash (G \wedge E)$

Mas, por definição, $H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int. I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$ e, pela proposição 3.4,

$(H \wedge E) \vDash (G \wedge E)$ se, e somente se, $(H \wedge E) \rightarrow (G \wedge E)$ é tautologia

Portanto,
$H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int. I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$
$\Rightarrow \exists$ int. I, se $I[H \wedge E] = T$ então $I[G \wedge E] = T$
$\Leftrightarrow \exists$ int. I, $I[(H \wedge E) \rightarrow (G \wedge E)] = T$
$\Leftrightarrow (H \wedge E) \rightarrow (G \wedge E)$ é satisfatível

Ou seja, se $(H \wedge E) \nvDash (G \wedge E)$, $H \vDash G$ não implica $(H \wedge E) \vDash (G \wedge E)$, então a afirmação é falsa.

f)

Se $H \vDash G$ então $(G \rightarrow E) \vDash (H \rightarrow E)$

Logo, $H \vDash G$ implica $(G \rightarrow E) \vDash (H \rightarrow E)$

Mas, por definição, $H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$ e, pela proposição 3.4, $(G \rightarrow E) \vDash (H \rightarrow E)$ se, e somente se, $(H \rightarrow E) \rightarrow (G \rightarrow E)$ é tautologia

Portanto,
$H \vDash G \Leftrightarrow \forall$ int I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$
$\Rightarrow \exists$ int. I, se $I[H \rightarrow E] = T$ então $I[G \rightarrow E] = T$
$\Leftrightarrow \exists$ int. I, $I[(H \rightarrow E) \rightarrow (G \rightarrow E)] = T$
$\Leftrightarrow (H \rightarrow E) \rightarrow (G \rightarrow E)$ é satisfatível

Ou seja, se $(G \rightarrow E) \nvDash (H \rightarrow E)$, $H \vDash G$ implica $(G \rightarrow E) \vDash (H \rightarrow E)$, então a afirmação é falsa.

g)

h)

i)

j)

Por definição temos que H é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ int I,$I[H] = F$
logo $\nexists I[H] = T$, portanto $H \not\models E$ e afirmação é falsa

k)

Por definição temos que o conjunto $\beta \models E \Leftrightarrow \forall$ int $I, I[\beta] = T$, então $I[E] = T$
Como β é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ int $I, I[\beta] = T$
sendo $I[\beta] = T$ logo $I[E] = T$,
portanto a Afirmação é verdadeira

l)

$(H_1 \wedge H_2 ... \wedge H_n)$ é tautologia $\Leftrightarrow \forall$ int $I, I[H_1 \wedge H_2 ... \wedge H_n] = T$
$\Longrightarrow \exists$ int $I; I[H_1 \wedge H_2 ... \wedge H_n] = T$
Portanto $H_1 \wedge H_2 ... \wedge H_n$ é satisfatível
Afirmação verdadeira

m)

Se $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível, então $\{H_1 \wedge H_2 \wedge .... \wedge H_n\}$ é tautologia.

n)

Se $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível, então $\{H_1 \wedge H_2 \wedge .... \wedge H_n\}$ é satisfatível.

o)

$\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é insatisfatível, se e somente se, $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge .... \wedge H_n)$ é tautologia.

p) Se $\beta = \{H_1, H_2, ... H_n\}$ é satisfatível,então H_1, H_2,...,H_n são equivalentes entre si.

FALSO, pois: $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$ é satisfatível $\Leftrightarrow \exists$ *Int. I*, I[H_1, H_2,...,H_n]=T. Entretanto, I[H_1, H_2,...,H_n]=T $\Leftrightarrow \exists$ *Int. I*,I[$H_1 \wedge H_2 \wedge$,...$\wedge$ H_n]=T, ou seja, I[H_1]=I[H_2]=...= I[H_n]=T,

Mas a definição de equivalência nos diz que I[H_1]=I[H_2]=...= I[H_n], podendo o conjunto β = T, ou β = F.

Se β = F, então o conjunto $\beta = \{H_1, H_2, ... H_n\}$ não é satisfatível, contrariando a afirmação inicial.

q) Se H é satisfatível,então existem infinitas interpretações *I*, tais que I[H]=T.

FALSO, pois pode existir uma ou mais, mas não infinitas.

r) As fórmulas contraditórias são equivalentes entre si.

VERDADEIRO, pois:

O conjunto $\beta = \{H_1,\ H_2,...H_n\}$ é contraditório $\Leftrightarrow$ I[H_1]=I[H_2]=...= I[H_n]=F, o que é a definição de ser equivalente.

s)

Verdadeiro. Para que duas fórmulas sejam equivalentes é necessário que para toda interpretação I, a interpretação da primeira fórmula seja igual a interpretação da segunda. Como toda interpretação I das fórmulas que são tautologias é sempre verdadeira, pode-se concluir que as fórmulas que são tautologias são equivalentes, pois a interpretação das mesmas será sempre igual.

t)

Não se pode dizer que fórmulas satisfatíveis são equivalentes entre si. Sejam duas fórmulas satisfatíveis H e G. Pode ocorrer que uma interpretação I interprete H como sendo falsa e G como verdadeira e uma interpretação J que interprete H como verdadeira e G como falsa. A definição de equivalência diz que as interpretações das fórmulas devem ser iguais para que elas sejam equivalentes, portanto, não de pode garantir que fórmulas satisfatíveis são equivalentes entre si.

u)

Não. Pois se H for uma tautologia, $\neg$H é contraditória.

v)

Verdadeiro. Pois para que uma fórmula seja satisfatível é necessário que exista pelo menos uma interpretação que a interprete como verdadeira. Se uma fórmula é tautologia todas as interpretações a interpretam como verdadeira, portanto, satisfazendo a condição de satisfatibilidade.

Exercício 10:

a) H é contraditória $\Rightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é tautologia.

Utilizando as definições de contraditória e implicação temos que:
H é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H] $=$ F
$\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H $\rightarrow$ G] $=$ T
$\Rightarrow$(H $\rightarrow$ G) é tautologia.

b) H é tautologia e G é contraditória $\Rightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é contraditória.

Utilizando as definições de tautologia, contraditória e implicação temos que:
H é tautologia e G é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H] = T e $\forall$ interpretação I, I[G] = F
$\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H $\rightarrow$ G] = F
$\Rightarrow$ (H $\rightarrow G$) é contraditória.

c)

{H é satisfatível, (H $\rightarrow$ G) é satisfatível } $\Rightarrow$ {G é satisfatível }
H é satisfatível $\Rightarrow$ existe uma int. I, I[H] = T.
(H $\rightarrow$ G) é satisfatível $\Rightarrow$ existe uma int. I, se I[H] = T, então I[G]= T.
Logo G é satisfatível, pois existe uma int. I, I[G] = T. Cqd.

d)

{H é tautologia, ($\neg$G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia} $\Rightarrow$ {G é tautologia }
H é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, I[H] = T.
($\neg$ G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, se I[$\neg$ G] = T, então I[$\neg$ H]= T.
($\neg$ G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, se I[G] = F, então I[H]= F.
Porém H é tautologia, logo I[G] = T.
Dessa forma temos que G é tautologia. Cqd.

e)

{G é tautologia} $\Rightarrow$ {H é tautologia, ($\neg$ G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia }
G é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, I[G] = T.
H é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, I[H] = T.
($\neg$ G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, se I[$\neg$ G] = T, então I[$\neg$ H]= T.
($\neg$ G $\rightarrow \neg$ H) é tautologia $\Rightarrow$ para toda int. I, se I[G] = F, então I[H]= F.

Exercício 11:

a) Se I[H]=T e I[H $\rightarrow$ G]=T, então I[G]=T.

I[H $\rightarrow$ G] = T $\Leftrightarrow$ Se I[H]=T, I[G]=T ou I[H]=F.
Como I[H]=T, necessariamente I[G]=T.
A afirmação é verdadeira.

b) Se I[H $\rightarrow$ G]=T, então não necessariamente I[G]=T.

I[H $\rightarrow$ G] = T $\Leftrightarrow$ Se I[H]=T, I[G]=T ou I[H]=F.
Caso I[H]=F, independentemente do valor de I[G], o valor verdade da fórmula I[H $\rightarrow$ G] é "T".
A afirmação é verdadeira.

Exercício 12:

a)

H $\models$ G $\Leftrightarrow$ não existe int. I, I[H] = T e I[G] = F.
H $\models$ G $\Leftrightarrow$ para toda int. I, se I[H] = T, então I[G] = T.
$\Leftrightarrow$ para toda int. I, I[H $\rightarrow$ G] = T.
$\Leftrightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é tautologia.
Para I[H] = T e I[G] = F, I[H $\rightarrow$ G] = F e portanto (H $\rightarrow$ G) não é tautologia, logo não existe int. I, I[H] = T e I[G] = F. Cqd.

b)

H $\not\models$ G $\Leftrightarrow$ existe int. I, I[H] = T e I[G] = F.
H $\not\models$ G $\Leftrightarrow$ não existe int. I, se I[H] = T então I[G] = T.
$\Leftrightarrow$ existe int I, se I[H] = T, então I[G] = F. Cqd.

c)

H $\models$ G $\Leftrightarrow$ para toda int. I, I[H] = F ou I[G] = T.
H $\models$ G $\Leftrightarrow$ para toda int. I, se I[H] = T, então I[G] = T.
Dessa forma existe uma int. I[G] = T e com isso podemos concluir que I[G] = T. Cqd.

Exercício 13: Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

a) Dada uma fórmula contraditória H, é possível encontrar uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

Falsa. Pois se a fórmula é contraditória $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I, I[H] = F$. Portanto $\nexists$ interpretação $I; I[H] = T$. **cqd.**

b) Se H é uma tautologia, então não existe interpretação I tal que $I[/negH] = T$

Verdadeira. Se H é uma tautologia $\Leftrightarrow \forall$ interpretação $I, I[H] = T$, logo $I[\neg H] = F$. Então, $\nexists$ interpretação $I, I[\neg H] = T$ **cqd.**

c) se $H_1, H_2, ...H_n$ é um conjunto satisfatível de fórmulas, então para toda interpretação $I, I[H_i] = T$.

Falsa. Se $H_1, H_2, ...H_n$ é um conjunto satisfatível $\Leftrightarrow \exists$ interpretação $I; I[H_i] = T$. Isto não quer dizer que sejam todas as interpretações. **cqd.**

Exercício 14:

Não. H $\vDash$ G nos diz que, se I[H] = T, então I[G] = T. Respeitando esta condição, podemos ter I[H] = F, e, quando esta interpretação ocorre, nada podemos concluir sobre I[G].

Exercício 15:

a)

P, ¬ P não é

b)

$\{S \rightarrow, P \vee \neg(S \wedge P), S\}$
I[P]=T, I[Q]=T, I[S]=T : Satisfatível

c)

$\{\neg(\neg Q \vee P), P \vee \neg P, Q \rightarrow \neg R\}$
I[P]=F, I[Q]=T, I[R]=F : Satisfatível

d)

$\{(\neg Q \wedge R) \rightarrow P, Q \rightarrow (\neg P \rightarrow R), P \leftrightarrow \neg R\}$
I[P]=T, I[Q]=T, I[R]=F : Satisfatível

e)

$\{\mathrm{P} \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S, S \rightarrow P\}$
I[P]=T, I[Q]=T, I[R]= T, I[S]=T : Satisfatível

f)

$\{\mathrm{P} \rightarrow Q, (P \vee R) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R), (Q \vee R \vee S))\}$
I[P]=T, I[Q]=T, I[R]=T, I[S]=T : Satisfatível

g)

$\{\mathrm{P} \rightarrow Q, \neg(Q \wedge \neg R), R \rightarrow S, \neg(S \wedge P)\}$
I[P]=F, I[Q]=F, I[R]=T, I[S]=T : Satisfatível

Exercício 16:

a) Utilizando as definições de equivalência, bi-implicação e tautologia temos que:

H equivale a G $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H] = I[G]
Logo, temos que se H é tautologia, G também deve ser uma tautologia, não sendo possível contradizer a afirmação.

b) Utilizando as definições de equivalência, bi-implicação e tautologia temos que:

H equivale a G $\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow \forall$ interpretação I, $I[H \leftrightarrow G] = T$
$\Rightarrow (H \leftrightarrow G)$ é tautologia.
Se tivéssemos uma interpretação I, $I[H \leftrightarrow G] = F$, H não seria equivalente a G. Portanto não é possível contradizer a afirmação.

Exercício 17:

H $\models$ G e H eq $\neg$ E
$\forall$ I; se I[H]=T então I[G]=T
$\{\neg, E \rightarrow \neg H, H\}$
I[G]= T, I[H]=T e I[E$\rightarrow \neg$ H]= T : Insatisfatível.

4

Métodos para determinação de Propriedades Semânticas de Fórmulas da Lógica Proposicional

Exercício 1:

H	$(\neg(\neg H))$	$(\neg(\neg H)) \leftrightarrow H$
T	T	T
F	F	T

H	G	$\neg(H \rightarrow G)$	$(H \wedge \neg(G))$	$\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \wedge \neg(G))$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

H	G	$\neg(H \leftrightarrow G)$	$(\neg H \leftrightarrow G)$	$\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (\neg H \leftrightarrow G)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

H	G	$\neg(H \leftrightarrow G)$	$(H \leftrightarrow \neg G)$	$\neg(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow \neg G)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

Exercício 2:

1. $(H \vee G) \leftrightarrow (\neg H \rightarrow G)$

$$\begin{array}{ccccccc} (H & \vee & G) & \rightarrow & (\neg H & \rightarrow & G) \\ F & T & F & F & T & F & F \\ & \uparrow & & & & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccccccc} (\neg H & \rightarrow & G) & \rightarrow & (H & \vee & G) \\ T & T & F & F & F & F & F \\ & \uparrow & & & & & \end{array}$$

Abs. Abs.

2. $(H \vee G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$

$(H \vee G) \rightarrow ((H \rightarrow G) \rightarrow G)$ e $((H \rightarrow G) \rightarrow G) \rightarrow (H \vee G)$

T T F F T T F F F   F T F T F F F F F

↑ ↑

Abs. Abs.

3. $(H \wedge G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$

$(H \wedge G) \rightarrow (H \leftrightarrow (H \rightarrow G))$ e $(H \leftrightarrow (H \rightarrow G)) \rightarrow (H \wedge G)$

T T T F T F T T T   T T T F F F T F F

↑ ↑

Abs. Abs.

Exercício 3:

Exercício 4:

Para provar que $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$ é tautologia utilizaremos o método de tabela verdade conforme abaixo:

H	G	$(H \rightarrow G)$	$(H \wedge G)$	$(H \leftrightarrow (H \wedge G))$	$(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	T	T

Portanto (H → G) ↔ (H ↔ (H ∧ G)) é tautologia,
pois ∀ int I,I[(H → G) ↔ (H ↔ (H ∧ G))]=T
cqd.

Para provar que (H → G) ↔ (¬G → ¬H) é tautologia utilizaremos o método de tabela verdade conforme abaixo:

H	G	$(H \rightarrow G)$	$(\neg\, G \rightarrow \neg\, H)$	$(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (H \wedge G))$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Portanto $(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg\, G \rightarrow \neg\, H)$ é tautologia,
pois $\forall$ int $I, I[(H \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg\, G \rightarrow \neg\, H)] = T$
cqd.

Exercício 5: Demonstre, utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

$(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$.

Suponha que $I[(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))] = F$, como indicado na figura a seguir, há um absurdo, pois não podemos interpretar H como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, isto é, não existe interpretação I tal que $I[(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))] = F$. Logo, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H))$ é uma tautologia.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(& H & \leftrightarrow & G &) & \leftrightarrow & ((& H & \rightarrow & G &) & \wedge & (& G & \rightarrow & H &)) \\
 & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & & \mathrm{F} & & \mathrm{T} & & \mathrm{T} & & \mathrm{F} & & \mathrm{T} & & \mathrm{F} & \\
 & \uparrow & & & & & & & & & & & & & & \uparrow &
\end{array}$$

Suponha que $I[(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))] = F$, como indicado na figura a seguir, há um absurdo, pois não podemos interpretar G como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, isto é, não existe interpretação I tal que $I[(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))] = F$. Logo, $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((\neg H \vee G) \wedge (H \vee \neg G))$ é uma tautologia.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& H & \leftrightarrow & G &) & \leftrightarrow & ((& \neg & H & \vee & G &) & \wedge & (& H & \vee & \neg & G &)) \\
 & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & & \mathrm{F} & & \mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{T} & & \mathrm{F} & & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{F} & \\
 & & & & & & & & & & \uparrow & & & & & & & \uparrow &
\end{array}$$

Exercício 6: $(H \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (\neg\, H \wedge \neg G))$.

H	G	H ↔ G	H ∧ G	¬H ∧ ¬G	(H ∧ G) ∨ (¬H ∧ ¬G)	H
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T

Conlusão: Analisando a tabela verdade, qualquer combinação de valores de verdade para os símbolos H e G, a fórmula (H $\leftrightarrow$ G) $\leftrightarrow$ ((H $\wedge$ G) $\vee$ ($\neg$H $\wedge$ $\neg$G)) é interpretada como verdadeira, então é tautologia.Cqd.

Exercício 7:

H	G	E	$(H \wedge (G \vee E))$	$((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$	$(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

$(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$ é tautologia, pois para toda interpretação I, a fórmula é interpretada como verdadeira, como pode ser observado na última coluna da tabela.

H	G	E	$((H \vee (G \wedge E))$	$((H \vee G) \wedge (H \vee E))$	$((H \vee (G \wedge E)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee E))$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

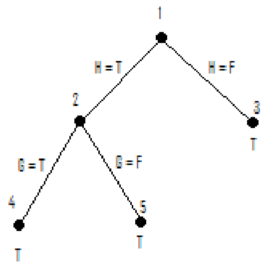
$((H \vee (G \wedge E)) \leftrightarrow ((H \vee G) \wedge (H \vee E))$ é tautologia, pois para toda interpretação I, a fórmula é interpretada como verdadeira, como pode ser observado na última coluna da tabela.

Exercício 8:

Exercício 9:

$((H \wedge G) \wedge H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H)), ((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee h)), ((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$. Suponha que B seja um conjunto de fórmulas, tal que, $\beta = \{$A, B, C$\}$. Suponha que $A = ((H \wedge G) \wedge$

$H) \leftrightarrow (H \wedge (G \wedge H))$, $B = ((H \vee G) \vee H) \leftrightarrow (H \vee (G \vee h))$ e $C = ((H \leftrightarrow G) \leftrightarrow H) \leftrightarrow (H \leftrightarrow (G \leftrightarrow H))$. Para demonstrar que $\beta = \{$A, B, C$\}$ é tautologia. Basta demonstrar que A, B e C são tautologias.



Demonstração que A é tautologia:

Semântica nó 3:

((H ∧ G) ∧ H) ↔ (H ∧ (G ∧ H))
F F F F T F F

Logo, se I[H] = F independente de I[G], a fórmula é verdadeira.

Semântica nó 4:

((H ∧ G) ∧ H) ↔ (H ∧ (G ∧ H))
T

Logo a fórmula é verdadeira para I[H] = T e I[G] = T.

Semântica nó 5:

((H ∧ G) ∧ H) ↔ (H ∧ (G ∧ H))
F F F T F F F

Logo I[G] = T independente de I[H] a fórmula é verdadeira.

Logo a fórmula é tautologia.

Exercício 10:

$((H \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$

$((H \leftrightarrow G) \wedge (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$

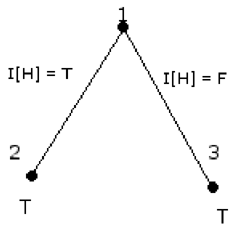
H	G	$H \rightarrow G$	$G \rightarrow H$	$H \rightarrow H$	$(H \rightarrow G) \land (G \rightarrow H)$	$(((H \rightarrow G) \land (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

H	G	$H \leftrightarrow G$	$G \leftrightarrow H$	$H \leftrightarrow H$	$(H \leftrightarrow G) \land (G \leftrightarrow H)$	$(H \leftrightarrow G) \land (G \leftrightarrow H)) \rightarrow (H \leftrightarrow H)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Exercício 11:

$(H \lor (H \land G)) \leftrightarrow H, (H \land (H \lor G) \leftrightarrow H$
Supondo um conjunto de fórmulas β = {A, B}, tal que $\beta = \{A, B\}$ é tautologia para $A = (H \lor (H \land G)) \leftrightarrow H$ e $B = (H \land (H \lor G) \leftrightarrow H)$. Para demonstrar tal afirmação, basta demonstra que $I[\beta(A, B)] = T$. Porém devemos demonstra que $I[A] = T$ e $I[B] = T$. Para tal demonstração, utilizaremos o método de árvore semântica.

Demonstração que A é tautologia.



Semântica nó 2:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& H & \lor & (& H & \land & G &) &) & \leftrightarrow & H \\ & T & & & T & & & & & T & T \end{array}$$

Apenas com a interpretação de H conclui-se que a fórmula é verdadeira, independente de G.

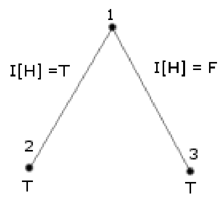
Semântica nó 3:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& H & \lor & (& H & \land & G &) &) & \leftrightarrow & H \\ & F & & & F & & & & & T & F \end{array}$$

Apenas com a interpretação de H, conclui-se que a fórmula é verdadeira, independente de G.

Conclui-se então que $I[A] = T$. Logo A é tautologia.

Demonstração que B é tautologia.



$$(H \wedge (H \vee G)) \leftrightarrow H$$

Semântica nó 2:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& H & \wedge & (& H & \vee & G &) &) & \leftrightarrow & H \\ & T & & & T & & & & & T & T \end{array}$$

Apenas com a interpretação de H como verdadeira, conclui-se que a fórmula é verdadeira para $I[H] = T$, independente de G.

Semântica nó 3:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& H & \wedge & (& H & \vee & G &) &) & \leftrightarrow & H \\ & F & & & F & & & & & T & F \end{array}$$

Logo a fórmula é verdadeira para $I[H] = F$ independente de G.
Conclui-se então que $\forall$ *int.* $I[B] = T$, logo B é tautologia.
Se A e B são tautologias, logo $I[\beta(A, B)] = T$.

Exercício 12: Demonstre utilizando qualquer um dos métodos estudados neste capítulo, que as fórmulas a seguir são tautologias.

$(\neg H) \vee H, H \rightarrow H, H \leftrightarrow H, H \leftrightarrow (H \wedge H), H \leftrightarrow (H \vee H), H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G)), H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$

Considere a seguinte demonstração utilizando o método da tabela verdade, associada a fórmula H:

H	$\neg H$	$H \wedge H$	$H \vee H$	$H \rightarrow H$	$H \leftrightarrow H$
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T

- $(\neg H) \vee H$ é tautologia.

- $H \rightarrow H$ é tautologia.
- $H \leftrightarrow H$ é tautologia.
- $H \leftrightarrow (H \wedge H)$ é tautologia.
- $H \leftrightarrow (H \vee H)$ é tautologia.

Considere ainda a demostração utilizando o método de tabela verdade associada as fórmulas H e G.

H	G	$H \wedge G$	$H \vee G$	$H \wedge (H \vee G)$	$H \vee (H \wedge G)$	$H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$	$H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	T

- $H \leftrightarrow (H \wedge (H \vee G))$ é tautologia.
- $H \leftrightarrow (H \vee (H \wedge G))$ é tautologia.

Portanto o conjunto de fórmulas é tautologia. **cqd.**

Exercício 13:

H	G	¬H	¬G	H ↔ G	(¬H) ↔ (¬G)	(H ↔ G) ↔ ((¬H) ↔ (¬G))
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

H	G	H ∧ G	G → H	(H ∧ G) → H	H → (G → H)	((H ∧ G) → H) ↔ (H → (G → H))
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

H	G	H → H	G → (H → H)	H → (G → (H → H))
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Exercício 14:

H $\rightarrow (H \wedge G), (H \wedge G) \rightarrow H$
Fazendo I[H]=T e I[G]= F temos uma interpretação que interpreta a primeira fórmula como falsa,

portanto não é uma tautologia. Porém tentando uma interpretação falsa na segunda fórmula, chegamos em I[G]=T e I[H]=T e I[H]=F o que é um absurdo, portanto a segunda fórmula é uma tautologia.

Exercício 15:

$(((H \rightarrow G) \rightarrow H) \rightarrow H)$

Utilizando o método da negação ou absurdo, tem-se que:

$(((H \rightarrow G) \rightarrow H) \rightarrow H)$

$F\ T \quad\quad T\ \ F \quad F\ F$

F (Absurdo!)

Portanto a fórmula é tautologia

$(\neg H \rightarrow (H \rightarrow G))$

Utilizando o método da neação ou absurdo, temos que:

$(\neg H \rightarrow (H \rightarrow G))$

$TF\ F \quad T\ F$

F (Absurdo!)

Portanto, a fórmula é tautologia.

Exercício 16:

H	G	E	((H ∧ G)	→ E)	((H ∧¬ E)	→ ¬ G	↔
T	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T

Exercício 17:

$H = (\neg true) \leftrightarrow false$
Utilizando o método da negação, temos:
$$\begin{array}{l} H = (\neg true) \leftrightarrow false \\ \qquad\qquad\quad F \end{array}$$
Como $I[H] = F$, então
$I[\neg true] = F$ e $I[false] = T$, ou $I[\neg true] = T$ e $I[false] = F$.
Em ambos os casos temos um absurdo, pois por definição $I[\neg true] = F$ e $I[false] = F$.
Logo H é tautologia.

$H = (\neg false) \leftrightarrow true$
Utilizando o método da negação, temos:
$$\begin{array}{l} H = (\neg false) \leftrightarrow true \\ \qquad\qquad\quad F \end{array}$$
Como $I[H] = F$, então
$I[\neg false] = T$ e $I[true] = F$, ou $I[\neg false] = F$ e $I[true] = T$.
Novamente, em ambos os casos temos um absurdo, pois por definição $I[\neg false] = T$ e $I[true] = T$.
Portanto H é tautologia.

$G = (H \wedge true) \leftrightarrow H$
Utilizando o método da negação, temos:
$G = (H \wedge true) \leftrightarrow H \qquad\qquad F$
Como $I[G] = F$, temos duas possibilidades:

Primeira possibilidade:
$$\begin{array}{l} G = (H \wedge true) \leftrightarrow H \\ \qquad\quad F \qquad\quad F \;\; T \end{array}$$
Como $I[H \wedge true] = F$, então
$I[H] = F$ ou $I[true] = F$.
Temos aqui um absurdo, pois por definição $I[true] = T$ e $I[H]$ já havia sido definido com T anteriormente.

Segunda possibilidade:
$$\begin{array}{l} G = (H \wedge true) \leftrightarrow H \\ \qquad\quad T \qquad\quad F \;\; F \end{array}$$
Como $I[H \wedge true] = T$, então
$I[H] = T$ e $I[true] = F$.
Novamente temos um absurdo, pois $I[H]$ já havia sido definido como F.
Portanto, G é tautologia.

$G = (H \wedge false) \leftrightarrow false$
Utilizando o método da negação, temos:
$$\begin{array}{l} G = (H \wedge false) \leftrightarrow false \\ \qquad\qquad\qquad\quad F \end{array}$$

Como $I[G] = F$, temos duas possibilidades:

Primeira possibilidade:
$G = (H \wedge false) \leftrightarrow false$
$\quad\quad F \quad\quad F \quad T$
Temos aqui um absurdo, pois por definição $I[false] = F$.

Segunda possibilidade:
$G = (H \wedge false) \leftrightarrow false$
$\quad\quad T \quad\quad F \quad F$
Como $I[H \wedge true] = T$, então
$I[H] = T$ e $I[false] = T$.
Novamente temos um absurdo, pois $I[false] = F$ por definição.
Portanto, G é tautologia.

$G = (H \vee true) \leftrightarrow true$
Utilizando o método da negação, temos:
$G = (H \vee true) \leftrightarrow true$
$\quad\quad\quad\quad F$
Como $I[G] = F$, temos duas possibilidades:

Primeira possibilidade:
$G = (H \vee true) \leftrightarrow true \quad\quad F \quad\quad F \quad T$
Como $I[H \vee true] = F$, então
$I[H] = F$ e $I[true] = F$.
Temos aqui um absurdo, pois por definição $I[true] = T$. Além disso $I[H]$ havia sido definido anteriormente como T.

Segunda possibilidade:
$G = (H \vee true) \leftrightarrow true$
$\quad\quad T \quad\quad F \quad F$
Novamente temos um absurdo, pois $I[true] = T$ por definição.
Portanto, G é tautologia.

Exercício 18:

Para provar que $(H \vee false) \leftrightarrow H$ é tautologia utilizaremos o método de tabela verdade conforme abaixo:

H	$(H \vee false) \leftrightarrow H$	$(H \rightarrow false) \leftrightarrow (\neg H)$	$(H \rightarrow true) \leftrightarrow true$	$(true \rightarrow H) \leftrightarrow H$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T

Portanto todas as fórmulas acima são tautologias, pois todas as interpretações são verdadeiras. cqd.

Exercício 19:

H	true	false	false → H	(false → H) ↔ true
T	T	F	T	T
F	T	F	T	T

H	true	(true ↔ H)	H ↔ (true ↔ H)
T	T	T	T
F	T	F	T

H	false	(false ↔ ¬H)	H ↔ (false ↔ ¬H)
T	F	T	T
F	F	F	T

Exercício 20:

i $(P \wedge Q) \vDash G$

a) $(P \wedge Q) \vDash (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to (\neg P \vee Q)$ é tautologia

(P∧Q)→(¬P∨Q)
 TTF F   F FF

Não existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \nvDash (\neg P \vee Q)$

b) $(P \wedge Q) \vDash (\neg Q \to P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to (\neg Q \to P)$ é tautologia

(P∧Q)→(¬Q→P)
 FTF F   T F F
   ↑
   Abs.

Existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \vDash (\neg Q \to P)$

c) $(P \wedge Q) \vDash (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to (P \leftrightarrow Q)$ é tautologia

(P∧Q)→(P↔Q)
 TTF F T F F
   ↑
   Abs.

Existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

d) $(P \wedge Q) \vDash (P \to Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to (P \to Q)$ é tautologia

(P∧Q)→(P→Q)
TTF F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \vDash (P \rightarrow Q)$

e) $(P \wedge Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ é tautologia

(P∧Q)→(¬P→ ¬Q)
FTF F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q)$

f) $(P \wedge Q) \vDash (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$ é tautologia

(P∧Q)→(P∧¬Q)
TTT F TF F

Não existe absurdo, logo $(P \wedge Q) \nvDash (P \wedge \neg Q)$

ii $(P \rightarrow Q) \vDash G$

a) $(P \rightarrow Q) \vDash (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$ é tautologia

(P→Q)→(¬P∨Q)
T T F F F FF
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \rightarrow Q) \vDash (\neg P \vee Q)$

b) $(P \rightarrow Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ é tautologia

(P→Q)→(¬Q→P)
F T F F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \rightarrow Q) \nvDash (\neg Q \rightarrow P)$

c) $(P \rightarrow Q) \vDash (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ é tautologia

(P→Q)→(P↔Q)
T F F

Possibilidade 1
(P→Q)→(P↔Q)
T T F F T F F
↑
Abs.

Posibilidade 2
(P→Q)→(P↔Q)
F T T F F F T

Como existe apenas um absurdo, logo $(P \to Q) \nvDash (P \leftrightarrow Q)$

d) $(P \to Q) \vDash (P \to Q) \Leftrightarrow (P \to Q) \to (P \to Q)$ é tautologia

(P→Q)→(P→Q)
T T F F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \to Q) \vDash (P \to Q)$

e) $(P \to Q) \vDash (\neg P \to \neg Q) \Leftrightarrow (P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$ é tautologia

(P→Q)→(¬P→ ¬Q)
F T T F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \to Q) \nvDash (\neg P \to \neg Q)$

f) $(P \to Q) \vDash (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$ é tautologia

(P→Q)→(P∧¬Q)
T F F

Possibilidade 1
(P→Q)→(P∧¬Q)
T T T F TF F

Possibilidade 2
(P→Q)→(P∧¬Q)
F T F FF

Não existe absurdo, logo $(P \to Q) \nvDash (P \wedge \neg Q)$

iii $(P \vee Q) \vDash G$

a) $(P \vee Q) \vDash (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \to (\neg P \vee Q)$ é tautologia

(P∨Q)→(¬P∨Q)
TTF F F FF

Não existe absurdo, logo $(P \vee Q) \nvDash (\neg P \vee Q)$

b) $(P \vee Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ é tautologia

(P∨Q)→(¬Q→P)
F T F F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \vee Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P)$

c) $(P \vee Q) \vDash (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ é tautologia

(P∨Q)→(P↔Q)
T F F

Possibilidade 1
(P∨Q)→(P↔Q)
TTF F T F F

Possibilidade 2
(P∨Q)→(P↔Q)
TTF F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \vee Q) \nvDash (P \leftrightarrow Q)$

d) $(P \vee Q) \vDash (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ é tautologia

(P∨Q)→(P→Q)
TTF F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \vee Q) \nvDash (P \rightarrow Q)$

e) $(P \vee Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ é tautologia

(P∨Q)→(¬P→ ¬Q)
FTT F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \vee Q) \nvDash (\neg P \rightarrow \neg Q)$

f) $(P \vee Q) \vDash (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$ é tautologia

(P∨Q)→(P∧¬Q)
T F T

Possibilidade 1
(P∨Q)→(P∧¬Q)
TTT T TF F

Possibilidade 2
(P∨Q)→(P∧¬Q)
FTF F FF T

Não existe absurdo, logo $(P \vee Q) \nvDash (P \wedge \neg Q)$

iv $(P \leftrightarrow Q) \vDash G$

a) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$
T T F F F F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \vee Q)$

b) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$
F T F F T F F

Não existe absurdo, logo $(P \leftrightarrow Q) \nvDash (\neg Q \rightarrow P)$

c) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T F F

Possibilidade 1
$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T T T F T F T
↑
Abs.

Possibilidade 2
$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
F T F F F F F
↑
Abs.

Existe absurdo em ambas possibilidades, logo $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

d) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
T T F F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \rightarrow Q)$

e) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$
F T T F T F F
↑
Abs.

Existe absurdo, logo $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q)$

f) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$ é tautologia

$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$
T F F

Possibilidade 1
$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$
T T T T T F F

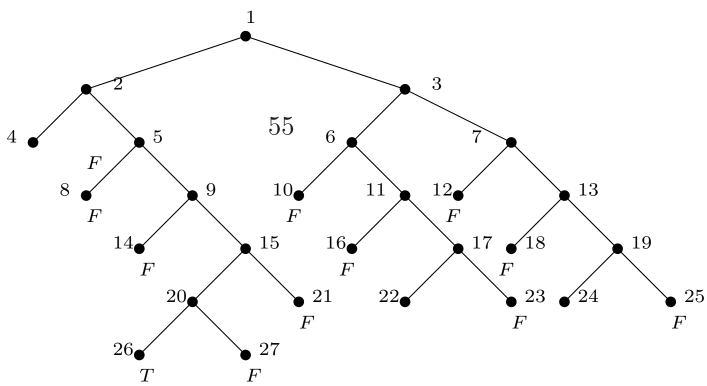
Possibilidade 2
$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$
F T F F F F T

Não existe absurdo, logo $(P \leftrightarrow Q) \nvDash (P \wedge \neg Q)$

Exercício 21:

Exercício 22:

a)



Portanto como no nó 26 existe uma interpretação $I[H] = T$ e nos outros $I[H] = F$, logo concluimos que H é satisfatível.

b)

Como na fórmula existem 6 variáveis(P,Q,R,S,P1,Q1) logo o número de linhas da tabela verdade é 2^6=64.

Exercício 23:

a) Demonstre, utilizando o método da negação, ou redução ao absurdo, se as fórmulas a seguir tautologias ou não.

$$G = (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \vee R))$$

Suponha que $I[G] = F$, como indicado na figura a seguir, há um absurdo, pois não podemos interpretar P como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, isto é, não existe interpretação I tal que $I[G] = F$. Logo, G é uma tautologia.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
(& \neg & P & \rightarrow & Q &) & \rightarrow & ((& \neg & Q & \rightarrow & P &) & \wedge & (& P & \vee & R &)) \\
 & T & T & T & F & & F & & T & F & F & F & & F & & F & F & F & \\
 & \uparrow & & & & & & & & & & \uparrow & & & & & & &
\end{array}$$

$$H = (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$$

Suponha que $I[H] = F$, como indicado na figura a seguir, há um absurdo, pois não podemos interpretar Q como verdadeiro e falso ao mesmo tempo, isto é, não existe interpretação I tal que $I[H] = F$. Logo, H é uma tautologia.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
(& P & \rightarrow & (& Q & \rightarrow & R &)) & \rightarrow & ((& P & \wedge & Q &) & \rightarrow & R &) \\
 & & T & & F & T & F & & F & & T & T & T & & F & F & \\
 & & & & \uparrow & & & & & & & & \uparrow & & & &
\end{array}$$

$$G_1 = H_1 \leftrightarrow (H_1 \vee G_2)$$

Suponha que $I[G_1] = T$, como indicado na figura a seguir, não há um absurdo, isto é, existe interpretação I tal que $I[G_1] = F$. Logo, G_1 não é uma tautologia.

$$\begin{array}{l} H_1 \leftrightarrow (\ H_1 \vee G_2\ ) \\ \ \mathrm{T}\ \ \mathrm{T}\quad\ \mathrm{T} \end{array}$$

Exercício 24: (P $\rightarrow P_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow Q_1$) $\vDash$ (P $\rightarrow Q_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow P_1$)

(P $\rightarrow P_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow Q_1$) $\vDash$ (P $\rightarrow Q_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow P_1$) é tautologia $\Leftrightarrow$ ((P $\rightarrow P_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow Q_1$)) $\rightarrow$ ((P $\rightarrow Q_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow P_1$)) é tautologia
Supondo que H não é tautologia, então:

((P $\rightarrow P_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow Q_1$)) $\rightarrow$ ((P $\rightarrow Q_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow P_1$))
T T F T F F T F F F T F F

Chegamos em um absurdo em Q, mas por outro lado, temos:

((P $\rightarrow P_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow Q_1$)) $\rightarrow$ ((P $\rightarrow Q_1$) $\wedge$ (Q $\rightarrow P_1$))
F T F T T T T F F T T F T F F

Neste segundo caso não existe um absurdo, logo não podemos afirmar que H é tautologia.Cqd.

Exercício 25:

a) Seja $H_1 = (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$

Nó	P	Q	R	S	H_1
1					
2	T				
3	F				T
4	T	T			
5	T	F			
6	T	T	T		
7	T	T	F		F
8	T	T	T	T	T
9	T	T	T	F	F

Seja $H_2 = \neg((P \wedge Q) \vee R \vee S) \wedge (P_1 \wedge Q_1)$

Nó	P	Q	R	S	P_1	Q_1	H_2
1							
2					T		
3					F		F
4					T	T	
5					T	F	F
6			T		T	T	F
7			F		T	T	
8			F	T	T	T	F
9			F	F	T	T	
10	T		F	F	T	T	
11	F		F	F	T	T	T
12	T	T	F	F	T	T	F
13	T	F	F	F	T	T	T

b) **Para I[H_1] = F:** I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = T e I[S] = F.

Para J[H_1] = T: J[P] = T, J[Q] = T, J[R] = T e J[S] = T.

Para I[H_2] = F: I[P_1] = T, I[Q_1] = T, I[R] = F, I[S] = F, I[P] = T e I[Q] = T.

Para J[H_2] = T: J[Q_1] = T, J[P_1] = T, J[S] = F, J[R] = F, J[Q] = F e J[P] = T.

Exercício 26:

Exercício 27:

$P \vDash Q$, se e somente se, $\neg Q \vDash \neg P$
A ida $\Rightarrow$:
Temos $P \vDash Q$ e devemos demonstrar que $\neg Q \vDash \neg P$. Mas, $P \vDash Q \Leftrightarrow \forall\ int\ I,\ I[P] = T$, então $I[Q] = T$.
Por outro lado
$\neg Q \vDash \neg P \Leftrightarrow \forall\ int\ I$, se $I[\neg Q] = T$, então $I[\neg P] = T$
Portanto devemos supor:
$I[\neg Q] = T$ e $P \vDash Q$
e demonstrar $I[\neg P] = T$. Se $I[\neg Q] = T$, então $I[Q] = F$, logo pela fórmula $P \vDash Q$ temos que $I[P] = F$ e portanto $I[\neg P] = T$. Cqd.

Exercício 28:

P1 = "Alírio toma vinho"
P2 = "Alírio fica com ressaca"
P3 = "Alírio fica triste"
P4 = "Alírio vai para casa"

P5 = "Alírio vai ao seu encontro romântico com Virgínia"
Q1 = "Vinho está ruim"

H1: $(P1 \wedge Q1) \rightarrow P2$
H2: $P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)$
H3: $P5 \vee (P3 \wedge P4)$

G1: $(P1 \wedge Q1) \rightarrow (\neg\ P5)$
G2: $(P2 \wedge P4) \rightarrow P5$
G3: $Q1 \rightarrow (\neg\ P1 \vee \neg\ P2)$
G4: $(Q1 \vee P2) \rightarrow P3$
G5: $(P1 \wedge P4) \rightarrow (Q1 \rightarrow \neg\ P3)$

H1, H2, H3 $\models$ G1
$(((P1 \wedge Q1) \rightarrow P2) \wedge (P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)) \wedge (P5 \vee (P3 \wedge P4))) \rightarrow ((P1 \wedge Q1) \rightarrow (\neg\ P5))$

T T T T T T T T T T T T T T T T T F T T T F F T

Como não há absurdo, então a afirmação G1 é falsa.

H1, H2, H3 $\models$ G2
$(((P1 \wedge Q1) \rightarrow P2) \wedge (P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)) \wedge (P5 \vee (P3 \wedge P4))) \rightarrow ((P2 \wedge P4) \rightarrow P5)$

T T T T T T T T T T T T F T T T T F T T T F F

Como não há absurdo, então a afirmação G2 é falsa.

H1, H2, H3 $\models$ G3
$(((P1 \wedge Q1) \rightarrow P2) \wedge (P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)) \wedge (P5 \vee (P3 \wedge P4))) \rightarrow (Q1 \rightarrow (\neg\ P1 \vee \neg\ P2))$

T T T T T T T T T T T T T T T T T F T F F T F F T

Como não há absurdo, então a afirmação G3 é falsa.

H1, H2, H3 $\models$ G4
$(((P1 \wedge Q1) \rightarrow P2) \wedge (P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)) \wedge (P5 \vee (P3 \wedge P4))) \rightarrow ((Q1 \vee P2) \rightarrow P3)$

F F T T F T F T F F T T T F F F T T F F F

Como não há absurdo, então a afirmação G4 é falsa.

H1, H2, H3 $\models$ G5
$(((P1 \wedge Q1) \rightarrow P2) \wedge (P2 \rightarrow (P3 \wedge P4)) \wedge (P5 \vee (P3 \wedge P4))) \rightarrow ((P1 \wedge P4) \rightarrow (Q1 \rightarrow \neg\ P3))$

T T T T T T T T T T T T T T T T F T T T F T F F T

Como não há absurdo, então a afirmação G5 é falsa.

Exercício 29:

i)
P = Ricardo ama Lúcia
Q = Ricardo ama Elaine
a) $P \vee Q$
b) $P \rightarrow Q$

$H = (\ (\ P\ V\ Q\ )\ E\ (\ P\ SE\ Q\ )\ )\ SE\ P \rightsquigarrow$ Não encontramos absurdo.
F T T T F T T F F

Como H não é tautologia, então não necessariamente Ricardo ama Lúcia.

```
G = (  ( P V Q  ) E  ( P SE Q )  ) SE Q
        T T F     T     T T    F       F    F
                           ×
```

Como G é tautologia, então necessariamente Ricardo ama Elaine.

ii) Perg.: $P \rightarrow Q$?
Resp.: $(P \rightarrow Q) \rightarrow P$
Como H é tautologia, então Ricardo ama Lúcia.

```
H= ( ( P → Q ) → P ) → P
        F  T        T F    F F
                    F             Absurdo
```

```
G= ( ( P → Q ) → P ) → Q
        F  F F    T T    F F
```

Não há absurdo nessa possibilidade I[P] = T. Logo G não é tautologia, portanto não necessariamente Ricardo ama Elaine.

iii) Perg.: $P \rightarrow Q$?
Resp.: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P$

```
H = ( ( P → Q ) ↔ P ) → P
         F  F        T F    F F
            T                      Absurdo
```

Portanto H é tautologia, logo Ricardo necessariamente ama Lúcia.

```
       G = ( ( P → Q ) ↔ P ) → Q
                         F     T       F F
Poss.1           T  F        F T          Absurdo
Poss.2           F  T        F F          Absurdo
```

Há absurdo em todas as possibilidades, Log G é tautologia. Portanto necessariamente Ricardo ama Elaine.

Prova por absurdo:
H H H
poss. 1 poss2 poss. 1 poss. 2 poss. 1 poss. 2
H é tautologia H é tautologia H não é tautologia

iv) $(P \land Q) \to (P \leftrightarrow (P \to Q))$

v) Logo, como não encontramos absurdo, $\exists$ int I, tal que $I[H] = F$

$(P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)$
T T T F T F F $\rightsquigarrow$ Não encontramos absurdo.

$(P \lor Q) \leftrightarrow (P \to Q)$
F F T F F T T $\rightsquigarrow$ Não encontramos absurdo.

vi) P = Ricardo ama Lúcia, Q = Ricardo ama Elaine, R = Ricardo ama Patrícia
Portanto, Ricaro necessariamente ama Lúcia.

$((P \lor Q \lor R) \land ((P \land \neg R) \to Q) \land ((R \land Q \lor (\neg R \land \neg Q)) \land (R \to P)) \to P$
F T F T F F T F T T T F F T T F F T F T F T F F F
× ×

Portanto, Ricardo necessariamente ama Elaine.

$((P \lor Q \lor R) \land ((P \land \neg R) \to Q) \land ((R \land Q \lor (\neg R \land \neg Q)) \land (R \to P)) \to Q$
T F F F T F F F F F T T F T T F F T F
× ×

Portanto, Ricardo ama Patrícia.

$((P \lor Q \lor R) \land ((P \land \neg R) \to Q) \land ((R \land Q \lor (\neg R \land \neg Q)) \land (R \to P)) \to R$
F T F F F T T T F F T T F F F
× ×

Exercício 30: Considere as sentenças a seguir:

H_1: Se Adriane não é inteligente, então Joyce é linda.

H_2: Se Joyce não é loura, então Érica é interesante.

H_3: Se Érica é linda ou interessante, então Adriane é inteligente.

H_4: Se Luciana não é inteligente, então Érica é interessante.

H_5: Se Luciana é linda, então Érica é interessante.

Suponha que essas sentenças são verdadeiras. Apartir desse fato, deduza o atributo de cada uma das meninas. Considere na solução as restrições a seguir.

a) Há uma correspondência biunívoca entre pessoas e atributos.

b) Na solução, conclui-se que Joyce é loura.

Supondo as seguintes asserções:

- $P =$ Adriene é inteligente.
- $Q =$ Joyce é linda.
- $R =$ Joyce é loura.
- $S =$ Érica é interessante.
- $P_1 =$ Érica é linda.
- $P_2 =$ Luciana é inteligente.=
- $P_3 =$ Luciana é Linda.

Considerando que as sentenças são verdadeiras e as restrições impostas no exercício, conclui-se então que:

- Como $I[R] = T$ então $I[Q] = F$ e $I[S] = F$.
- Como $I[S] = F$ então $I[P_1] = T$.
- Como $I[Q] = F$ então $I[P] = T$.
- Como $I[S] = F$ então $I[P_2] = T$.
- Como $I[P_2] = T$ então $I[P_3] = F$.

Conclusão os atributos são:

- Adriane é inteligente.
- Joyce é loura.
- Érica é linda.
- Luciano é Inteligente. **cqd.**

Exercício 31:

P = Júlio ama Simone
Q = Júlio é sortudo
H = (¬P ∨ Q) → (P ∨ Q)?

P	Q	¬P	¬P ∨ Q	P ∨ Q	(¬P ∨ Q) → (P ∨ Q)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

H é satisfatível.

Exercício 32:

P = Há pouco sangue na cena do crime
Q = O matador é profissional
R = Houve poucos ruídos no momento do crime
S = A vítima estava toda ensaguentada

Ana: P → Q
Tereza: R ∨¬ Q
Cynthia: S ∨¬ R
Melo: P

β = {P → Q, R ∨¬ Q, S ∨¬ R, P}

I[P]=T, I[Q]=T, I[R]=F, I[S]=T : Com estas interpretações verificamos que o β (conjunto de conclusões) é satisfatível

Exercício 33:

Considere as associações:
P = "Há sangue na cena do crime"
Q = "O matador é um profissional"

Logo, as opiniões dos detetives são representadas por:
Ana: $P \rightarrow Q$
Teresa: $\neg(P \wedge \neg Q)$
Cynthia: $\neg Q \wedge P$
Melo: P

a)

$P \rightarrow Q, \neg(P \wedge \neg Q), \neg Q \wedge P$

P	Q	P → Q	¬(P ∧ ¬Q)	¬Q ∧ P
T	T	T	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

Conforme mostrado na tabela, não existe interpretação I, I[$P \rightarrow Q$] = I[$\neg(P \wedge \neg Q)$] = I[$\neg Q \wedge P$] = T. Logo o conjunto de conclusões não é satisfatível.

b)

Basta determinar se $(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge P) \rightarrow Q$ é uma tautologia.

$(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge P) \rightarrow Q$

$T\,\mathbf{F}\;\; F\,TF\;\; T\,T \quad F\,F$

Absurdo. Logo podemos concluir que o matador é profissional, a partir das conclusõs de Teresa e Melo.

c)

Basta determinar $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q))$ é uma tautologia.

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	(P → Q)	¬(P ∧ ¬Q)	(P → Q) ↔ ¬(P ∧ ¬Q)
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Conforme mostrado na tabela, $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$ é tautologia, logo as conclusões de Ana e Teresa são equivalentes.

Exercício 34:

i)

P = Irani me beija
Q = Fico louco(a)

(P $\rightarrow Q) \models (\neg P \rightarrow \neg Q)$
Fazendo I[P]=F, I[Q]=T, não encontramos absurdo, logo a afirmação é falsa.

ii)

P = Irani me beija
Q = Fico louco(a)

(P $\rightarrow Q) \models (\neg Q \rightarrow \neg P)$
Fazendo I[P]=T, I[Q]=F, encontramos um absurdo, logo a afirmação e uma tautologia.

Exercício 35:

Exercício 36:

Considere o seguinte conjunto de argumentos:

Se Godofredo ama Gripilina,
então é possível concluir que:

Se Gripilina é bonita, inteligente e sensível,
então Godofredo é feliz.

Demonstre, utilizando conceitos da Lógica Proposicional, se, a partir desse argumento, podemos concluir que:
Godofredo não ama Gripilina ou

Gripilina não é bonita, não é inteligente e nem sensível ou
Godofredo é feliz.

Exercício 37:

Exercício 38:

A afirmação que ocorre é a letra b).

A observação de Janio pode ser traduzida como: A $\rightarrow$ B (ou ainda $\neg$A $\vee$ B).
E a observação de Nicanor pode ser escrita como: A $\wedge$ $\neg$B.

Utilizando o teorema de DeMorgan podemos constatar que a primeira situação é a negação da segunda, e vice-versa.

Exercício 39:

P = "O ricardão existe"
Q = "ela pode evitar o ricardão"
R = "ela quer evitar o ricardão"
S = "ela tem personalidade"
P1 = "ela é sincera"

$P \rightarrow (((\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg S) \wedge (\neg\, R \rightarrow \neg P1)) \rightarrow (\neg S \vee \neg P1))$
T F F T F T F T F T F T F F F F F
↑
Abs.

Exercício 40:

5

Relações semânticas entre os conectivos da Lógica Proposicional

Exercício 1: Demontre que H e G são equivalentes: H=(P $\leftrightarrow$ Q) $\vee$ (R $\rightarrow$ S) G= $\neg(\neg(\neg$P $\vee$ Q) $\vee$ $\neg(\neg$Q $\vee$ P)) $\vee$ ($\neg$R $\vee$ S)

Demonstrar que H equivale G $\Rightarrow$ $\exists$ int I, tal que I[H]=I[G], ou pela regra da substituição a partir de H conseguirmos chegar em G.

Então temos que:

P $\leftrightarrow$ Q $\Rightarrow$ (P $\rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\rightarrow$ P), mas

P $\rightarrow$ Q $\Rightarrow$ ($\neg$P $\vee$ Q), então:

(P $\rightarrow$ Q) $\wedge$ (Q $\rightarrow$ P) $\Rightarrow$ ($\neg$P $\vee$ Q) $\wedge$ ($\neg$Q $\vee$ P), mas

I[P $\wedge$ Q]=I[$\neg$($\neg$P $\vee$ $\neg$Q)] $\Rightarrow$ $\neg$($\neg$($\neg$P $\vee$ Q) $\vee$ $\neg$($\neg$Q $\vee$ P))

Então temos que:

H= $\neg$($\neg$($\neg$P $\vee$ Q) $\vee$ $\neg$($\neg$Q $\vee$ P)) $\vee$ ($\neg$R $\vee$ S),

Logo I[H]=I[G].Cqd.

Exercício 2:

a)

$(P \vee Q)$ equivale a $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$, como pode demonstrado na tabela verdade abaixo.

P	Q	$(P \vee Q)$	$((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

b)

$(P \wedge Q)$ não pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q, pois é preciso utilizar a negação para representar o conectivo $\wedge$.

c)

$(P \leftrightarrow Q)$ não pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q, pois é preciso utilizar a negação para representar o conectivo $\leftrightarrow$, sendo este formado pela conjunção de duas implicações.

d)

Se I[P] = T, então I[¬P] = F. Mas se I[P] = T, então para qualquer fórmula H escrita com P e $\vee$, I[H] = T.
Logo não é possivel expressar (¬P) utilizando apenas P e $\vee$.

e)

Análoga à resposta do item d).

f)

Análoga à resposta do item a), trocando $\rightarrow$ por $\leftrightarrow$.

g)

Não é possível expressar $(P \wedge Q)$ equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.

h)

Não é possível expressar $(P \rightarrow Q)$ equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$, P e Q.

i)

Não é possível expressar $(\neg P)$ equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\leftrightarrow$ e P.

Exercício 3:

a)

- $\{\vee, \wedge\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\vee, \wedge\}$.

- $\{\neg, \wedge\}$
  É completo pois é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\neg, \wedge\}$.
  $P \vee Q$: $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
  $P \rightarrow Q$: $\neg(P \wedge \neg Q)$
  $P \leftrightarrow Q$: $(\neg(P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg(Q \wedge \neg P))$

- $\{\rightarrow, \vee\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \wedge, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\rightarrow, \vee\}$.

- $\{\vee, \neg\}$
  É completo pois é possível expressar equivalentemente os conectivos $\{\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\neg, \wedge\}$.
  $P \wedge Q$: $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
  $P \rightarrow Q$: $\neg P \vee Q$
  $P \leftrightarrow Q$: $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

- $\{\rightarrow, \neg\}$
  É completo pois é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\rightarrow, \neg\}$.
  $P \wedge Q$: $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
  $P \vee Q$: $\neg P \rightarrow Q$
  $P \leftrightarrow Q$: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

- $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$ usando somente $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$

- $\{\neg\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\neg\}$

- $\{\leftrightarrow\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ usando somente $\{\leftrightarrow\}$

- $\{\rightarrow, \wedge\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \vee, \leftrightarrow\}$ usando somente $\{\rightarrow, \wedge\}$

- $\{\leftrightarrow, \wedge\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$ usando somente $\{\leftrightarrow, \wedge\}$

- $\{\leftrightarrow, \vee\}$
  Não é completo pois não é possível expressar equivalentemente todos os conectivos $\{\neg, \wedge, \rightarrow\}$ usando somente $\{\leftrightarrow, \vee\}$

b)

Utiliza princípio da indução.

Exercício 4:

a) *P nor Q* = ¬(*P* ∨ *Q*)

P	Q	P nor Q
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

b) Demostre a proposição 5.13. O conjunto {nor} é completo?

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	P nor Q
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	T

¬P equivale a P nor P

(P ∧ Q) ⇔ ¬(¬P ∨ ¬Q)
⇔ ¬((P nor Q) ∨ (Q nor Q))
⇔ (P nor P) nor (Q nor Q)

(P ∨ Q) ⇔ ¬(¬(P ∨ Q))
⇔ ¬(P nor Q)
⇔ (P nor Q) nor (P nor Q)

P → Q ⇔ ¬P ∨ Q
⇔ ¬(¬(¬P ∨ Q))
⇔ ¬((P nor P) nor Q)
⇔ (((P nor P) nor Q) nor ((P nor P) nor Q))

P ↔ Q ⇔ P → Q ∧ Q → P

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\text{P} \rightarrow \text{Q}) \vee \neg(\text{Q} \rightarrow \text{P}))$
$\Leftrightarrow \neg(\text{P} \rightarrow \text{Q}) \text{ nor } \neg(\text{Q} \rightarrow \text{P})$
$\Leftrightarrow \neg(\neg\text{P} \vee \text{Q}) \text{ nor } \neg(\neg\, \text{Q} \vee \text{P})$
$\Leftrightarrow \neg\text{P} \text{ nor Q nor } \neg\text{Q} \text{ nor P}$
$\Leftrightarrow ((\text{P nor P}) \text{ nor Q}) \text{ nor } ((\text{Q nor Q}) \text{ nor P})$

c)

Conforme provamos na letra b que o conectivo nor é completo, então seja E uma fórmula qualquer da Lógica Proposicional, E pode ser expressa, equivalentemente, utilizando apenas o conectivo nor e os símbolos proposicionais e de verdade presente em E.

d)

$\text{P nnse Q} = \neg(\neg\text{P} \rightarrow \text{Q})$
$\neg\text{P} \Leftrightarrow \neg(\text{P} \vee \text{P})$
$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg\text{P} \vee \text{P}))$
$\Leftrightarrow \neg(\neg\text{P} \rightarrow \text{P})$
$\Leftrightarrow \text{P nnse P}$

$\text{P} \vee \text{Q} \Leftrightarrow \neg(\neg\text{P} \vee \text{Q})$
$\Leftrightarrow \neg\text{P} \rightarrow \text{Q}$
$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg\text{P} \rightarrow \text{Q}))$
$\Leftrightarrow \neg(\text{P nnse Q})$
$\Leftrightarrow (\text{P nnse Q}) \text{ nnse } (\text{P nnse Q})$

$\text{P} \vee \text{Q} \Leftrightarrow \neg(\neg\text{P} \vee \neg\text{Q})$
$\Leftrightarrow \neg\text{P nnse } \neg\, \text{Q}$
$\Leftrightarrow (\text{P nnse P}) \text{ nnse } (\text{Q nnse Q})$

$\text{P} \rightarrow \text{Q} \Leftrightarrow \neg\text{P} \vee \text{Q}$
$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg\text{P} \vee \text{Q}))$
$\Leftrightarrow \neg(\neg\, \text{P nnse Q})$
$\Leftrightarrow (\neg\text{P nnse Q}) \text{ nnse } (\neg\text{P nnse Q})$
$\Leftrightarrow ((\text{P nnse P}) \text{ nnse Q}) \text{ nnse } ((\text{P nnse P}) \text{ nnse Q})$

$\text{P} \leftrightarrow \text{Q} \Leftrightarrow \text{P} \rightarrow \text{Q} \wedge \text{Q} \rightarrow \text{P}$
$\Leftrightarrow ((\text{P} \rightarrow \text{Q}) \text{ nnse } (\text{P} \rightarrow \text{Q})) \text{ nnse } ((\text{Q} \rightarrow \text{P}) \text{ nnse } (\text{Q} \rightarrow \text{P}))$
$(\text{P} \rightarrow \text{Q}) \rightsquigarrow$ Passo anterior
$(\text{Q} \rightarrow \text{P}) \rightsquigarrow$ Passo anterior

$\therefore$ {nnse} é completo.

e)

$(P \ nsen \ Q) = \neg(P \rightarrow \neg Q)$
{nsen} não é completo, pois não consegue-se representar $\neg Q$ somente com o conectivo nsen.

f)

$(P\ nnse\ Q)\ equivale\ a\ (P\ nor\ Q)$
$\therefore$ (P nnse Q) equivale a (P nor Q)

	$\Rightarrow$	$\neg$	(	$\neg$	P	$\rightarrow$	Q	)	$\leftrightarrow$	$\neg$	(	P	$\vee$	Q	)	
Passo 1				F	T	T	F		F			F	F	F		
					$\times$							$\times$				
Passo 2				T	F	F	F		F			F	T	F		
													$\times$			Absurdo

$\neg(P \rightarrow \neg Q)\ equivale\ a(P \wedge Q)$ $\therefore$ (P nnse Q) equivale a (P $\wedge$ Q)

	$\Rightarrow$	$\neg$	(	P	$\rightarrow$	$\neg$	Q	)	$\leftrightarrow$	(	P	$\wedge$	Q	)	
Passo 1		T		T	F	F	T				T	F	T		
												T			Absurdo
Passo 2		F		T	T	F			F		T	T	T		
					F										Absurdo

Exercício 05: Demonstre que as fórmulas a seguir são tautologias.

a) $\neg P \leftrightarrow (P\ nand\ P)$

Conforme a proposição 5.9, o conectivo $\neg$ pode ser expresso semanticamente pelo conectivo *nand*.
Logo se $\neg P \Leftrightarrow (P\ nand\ P)$
$\Leftrightarrow \neg(P \wedge P)$
$\Leftrightarrow \neg(P)$
Portanto a fórmula é tautologia **cqd.**

b) $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P\ nand\ \neg Q)$

Supondo $H = (P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P\ nand\ \neg Q)$
Considere a tabela verdade abaixo associado a fórmula H.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \vee Q)$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$	H
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	T

Logo a fórmula é tautologia **cqd**.

Exercício 06:

Exercício 07:

Exercício 08:

FND:
H = $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
G = $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
E = $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$
FNC:
H = $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
G = $(P \vee Q)$
E = $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

Exercício 09:

Exercício 10:

a)

h1 = $P \vee \neg P$
h2 = P
h4 = $P \wedge \neg P$

b)

h1(X,Y) $\Leftrightarrow$ h1(T,T)=T, h1(T,F)=F, h1(F,T)=F, h1(F,F)=F
h2(X,Y) $\Leftrightarrow$ h2(T,T)=T, h2(T,F)=T, h2(F,T)=T, h2(F,F)=F
h3(X,Y) $\Leftrightarrow$ h3(T,T)=T, h3(T,F)=F, h3(F,T)=T, h3(F,F)=T
h4(X,Y) $\Leftrightarrow$ h4(T,T)=T, h4(T,F)=F, h4(F,T)=F, h4(F,F)=T

c)

h1(X,Y) = $X \wedge Y$
h2(X,Y) = $X \vee Y$
h3(X,Y) = $X \rightarrow Y$
h4(X,Y) = $X \leftrightarrow Y$

d)

P $\wedge$ Q $= \neg(\neg P \vee \neg Q)$
P $\vee$ Q
P $\rightarrow$ Q $= \neg P \vee Q$
P $\leftrightarrow$ Q $= (\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)))$

e)

Sim. NOR e NAND.

f)

2 elevado a 2 elevado a n. Prova por indução do comprimento.

6

Um sistema axiomático e um sistema de dedução natural na Lógica Proposicional

Exercício 1:

É necessário demonstrar que se H e $H \rightarrow G$ são tautologia, então G é tautologia:
Utilizando a definição de tautologia, temos que:
H é tautologia e H $\rightarrow$ G é tautologia $\Leftrightarrow$ $\forall$ interpretação I, I[H] $=$ T e $\forall$ interpretação I, I[$H \rightarrow G$] $=$ T.

$\Leftrightarrow$ $\forall$ interpretação I, se I[H] $=$ T, então I[G] $=$ T.

Sendo assim, conclui-se que G é tautologia.

Exercício 2:

a)

Por que não levamos em consideração o significado das fórmulas.

b)

Não, pois β pode conter uma fórmula que não seja tautologia.

c)

Todas as fórmulas de β devem ser tautologias.

d)

Sim. Se $\models$ H então qualquer que for o β H continua sendo tautologia. Isto é assegurado pelo teorema da completude.

Exercício 3:

a)

b)

c)

d)

Utilizando o teorema da dedução este problema é escrito na forma:
Se $\beta \vdash$ H $\rightarrow$ H então $\beta \vdash$ H $\rightarrow G$, o que é falso. Observe que H $\rightarrow$ H pode ser consequencia lógica de β sem que H $\rightarrow G$ seja consequencia lógica de β.

e)

Se $\beta \vdash$ H e $\varphi \vdash$ H $\rightarrow$ G, então $\beta \cup \varphi \vdash$ H e $\beta \cup \varphi \vdash$ H $\rightarrow$ G. Utilizando Modus Ponens, conclui-se que $\beta \cup \varphi \vdash$ G.

f)

Se $\beta \vdash$ (P $\wedge\neg$P), então podemos concluir que β não é satisfatível. Assim, a partir de β é possível deduzir qualquer fórmula. Logo, $\beta \vdash$ H.

g)

h)

i)

j)

Exercício 4:

Exercício 5:

Exercício 6:

Exercício 7:

Exercício 8:

Exercício 9:

Exercício 10:

Exercício 11:

Supondo $\neg G$ é tautologia $\iff \forall$ int $I, I[\neg G] = T$
logo $\forall int I, I[G] = F$
Supondo $I[H \to G] = T$ é tautologia $\iff \forall$ int $I, I[H \to G] = T$,
sendo $I[G] = F$ logo deduzimos que $I[H] = F$,
portanto $\forall$ int,$I[\neg H] = T$ então $\neg H$ é tautologia cqd.

Exercício 12:

Exercício 13:

Exercício 14:

Repita passo a passo, a demonstração do teorema da completude em P_a no caso particular em que H contém apenas símbolos proposicionais P_1, P_2,P_3,P_4,P_5

A demonstração do teorema da completude utiliza o resultado do Lema 6.2. Para demonstrar um tipo de tautologia particular H, que contém apenas os símbolos proposicionais P_1, P_2,P_3,P_4,P_5, basta considerar uma fórmula H que poderia ser, H=$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_3 \vee \neg P_3) \wedge (P_4 \vee \neg P_4) \wedge (P_5 \vee \neg P_5)$

A tabela verdade a seguir, indica as possibilidades de interpretação desses símbolos:

Interpretação	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	B[H,I_i]
I_1	T	T	T	T	T	B[H,I_1]=$\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$
I_2	T	T	T	T	F	B[H,I_2]=$\{P_1,P_2,P_3,P_4,\neg P_5\}$
I_3	T	T	T	F	T	B[H,I_3]=$\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4,P_5\}$
I_4	T	T	T	F	F	B[H,I_4]=$\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4,\neg P_5\}$
I_5	T	T	F	T	T	B[H,I_5]=$\{P_1,P_2,\neg P_3,P_4,P_5\}$
I_6	T	T	F	T	F	B[H,I_6]=$\{P_1,P_2,\neg P_3,P_4,\neg P_5\}$
I_7	T	T	F	F	T	B[H,I_7]=$\{P_1,P_2,\neg P_3,\neg P_4,P_5\}$
I_8	T	T	F	F	F	B[H,I_8]=$\{P_1,P_2,\neg P_3,\neg P_4,\neg P_5\}$
I_9	T	F	T	T	T	B[H,I_9]=$\{P_1,\neg P_2,P_3,P_4,P_5\}$
I_{10}	T	F	T	T	F	B[H,I_{10}]=$\{P_1,\neg P_2,P_3,P_4,\neg P_5\}$
...	...	...	...	...	...	...
I_{32}	F	F	F	F	F	B[H,I_{32}]$\{\neg P_1,\neg P_2,\neg P_3,\neg P_4,\neg P_5\}$

Como H é uma tautologia, então para qualquer interpretação I_i, temos I[H_i]=T. Logo, utilizando o Lema 6.2, concluimos que B[H,I_i]⊢H para toda interpretação I_i. Temos, por exemplo, que:

$B[I_1] \vdash H$, ou seja,$\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$⊢H

$B[I_2] \vdash H$, ou seja,$\{P_1,P_2,P_3,P_4,\neg P_5\} \vdash H$

As interpretações I_1 e I_2 se diferem apenas no símbolo P_5 e coincidem nos demais símbolos. Quando isso ocorre, tais interpretações são ditas complementares em P_5.

Os literais complementares P_5 e $\neg P_5$ são eliminados do conjuntos de hipóteses iniciais. Portanto, temos que:

- A partir de $\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\} \vdash H$ e de $\{P_1,P_2,P_3,P_4,\neg P_5\} \vdash H$, Concluimos que $\{P_1,P_2,P_3,P_4\} \vdash H$.
- Analogamente, considerando outras duas interpretações seguintes, I_3 e I_4, temos que P_5 e $\neg P_5$ são também complementares, e P_5 e $\neg P_5$ também podem ser eliminados dos conjuntos de hipóteses iniciais.

  B[H,I_3]⊢H, ou seja,$\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4,P_5\}$⊢H B[H,$I_4$]⊢H, ou seja, $\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4,\neg P_5\}$⊢H

  Então, concluimos que $\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_5 e I_6, obteremos $\{P_1, P_2, \neg P_3, P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_7 e I_8, obteremos $\{P_1, P_2, \neg P_3, \neg P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_9 e I_{10}, obteremos $\{P_1, \neg P_2, P_3, P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_{11} e I_{12}, obteremos $\{P_1, \neg P_2, P_3, \neg P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_{13} e I_{14}, obteremos $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_4\}$⊢H
- Das interpretações I_{15} e I_{16}, obteremos $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, \neg P_4\}$⊢H

Continuando a eliminação dos elementos que são complementares, temos, que:

- A partir de $\{P_1,P_2,P_3,P_4\}\vdash H$ e $\{P_1,P_2,P_3,\neg P_4\}\vdash$H, concluimos que $\{P_1,P_2,P_3\}\vdash$H.
- A partir de $\{P_1,P_2,\neg P_3,P_4\}\vdash$H e de $\{P_1, P_2, \neg P_3, \neg P_4\}\vdash$H, concluimos $\{P_1,P_2,\neg P_3\}\vdash$H.
- A partir de $\{P_1, \neg P_2, P_3, P_4\}\vdash$H e de $\{P_1, \neg P_2, P_3, \neg P_4\}\vdash$H, concluimos $\{P_1, \neg P_2, P_3\}\vdash$H
- A partir de $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_4\}\vdash$H e de $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, \neg P_4\}\vdash$H obtém-se $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3\}\vdash$H

Continuando a eliminação dos elementos que são complementares:

A partir de $\{P_1,P_2,P_3\}\vdash$H e $\{P_1,P_2,\neg P_3\}\vdash$H, é possível concluir que $\{P_1,P_2\}\vdash$H

E apartir de $\{P_1, \neg P_2, P_3\}\vdash$H e$\{P_1, \neg P_2, \neg P_3\}\vdash$H, é possível concluir $\{P_1, \neg P_2\}\vdash$H

Como P_2 e $\neg P_2$ são complementares, temos no final que $\{P_1\}\vdash$H

Completando a tabela e fazendo o mesmo que foi feito aqui para a metade da outra tabela obteremos $\{\neg P_1\}\vdash$H.

Como P_1 e $\neg P_1$ são complementares, temos o resultado final:$\{\}\vdash$H, ou seja $\vdash$H. Portanto considerando que H é uma tautologia, concluímos que $\vdash$ H, ou seja, H é um teorema.

Exercício 15:

Exercício 16:

a)

Não é possivel demonstrar $\vDash (\neg \mathit{false} \vee P)$ devido a presença do símbolo de verdade na fórmula.

b)

Essa demonstração somente é válida se H não contém símbolos de verdade. Portanto, as idéias da demonstração do teorema da completude não podem ser utilizadas neste caso.

c)

Esta prova não pode ser considerada, pois o sistema se torna incompleto, ou seja, com a adição do símbolo de verdade, não há prova de sua completude.

7

Tableaux semânticos e resolução na Lógica Proposicional

Exercício 1:

Exercício 2:

a)

$(P \wedge (Q \vee p)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge P))$
1. $\neg(P \wedge (Q \vee p)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge P))$
2. $A = (P \wedge (Q \vee P)) \wedge \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge P))$ ou $B = \neg(P \wedge (Q \vee O)) \wedge ((P \wedge Q) \vee (P \wedge P))$ $R9, 1.$
3. P $R1, 2$ $(em\ A)$
4. Q $R1, 2$ $(em\ A)$
5. P $R1, 2$ $(em\ A)$
6. $\neg(P \wedge Q \vee (P \wedge P))$ $R1, 2$ $(em\ A)$
7. $\neg(P \wedge Q)$ $R7, 6$ $(em\ A)$
8. $(P \wedge P)$ $R7, 6$ $(em\ A)$
9. P $R1, 8$ $(em\ A)$
10. P $R1, 8$ $(em\ A)$
11. $\neg P(ramo\ fechado)$ ou $\neg Q(ramo\ fechado)$
12. $\neg(P \wedge (Q \vee P))$ $R1, 2$ $(em\ B)$
13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge P)$ $R1, 2$ $(em\ B)$
14. $(P \wedge Q)$ ou $(P \wedge P)$ $R2, 13$
15. $PR1, 14$ $(em\ A)$
16. $QR1, 14$ $(em\ A)$
17. $PR1, 14$ $(em\ B)$
18. $PR1, 14$ $(em\ B)$
19. $\neg P$ $(ramo\ fechado)$ ou $\neg(Q \vee P)$ $R6, 12$
20. $\neg Q$ $(ramo\ fechado)$ ou $\neg P$ $(ramo\ fechado)$ $R2, 19$

Resp.: Tableaux fechado, portanto a fórmula é uma tautologia.

b)

$(P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee P))$
1. $\neg((P \vee (Q \wedge P)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \vee P)))$

2. $A = (P \lor (Q \land P)) \land \neg((P \lor Q) \lor (P \lor P))$ *ou* $B = \neg(P \lor (Q \land P)) \land ((P \lor Q) \lor (P \lor P))$ $R9, 1$
3. $P \lor (Q \land P)$ $R1, 2$ $(em\ A)$
4. $\neg((P \lor Q) \lor (P \lor P))$ $R1, 2$ $(em\ A)$
5. $\neg(P \lor Q)$ $R7, 4$
6. $\neg(P \lor P)$ $R7, 4$
7. $\neg P$ $R7, 5$
8. $\neg Q$ $R7, 5$
9. $\neg P$ $R7, 6$
10. $\neg P$ $R7, 6$
11. P $(ramo\ fechado)$ *ou* $(Q \land P)$ $R2, 3$
12. Q $(ramo\ fechado)$ $R1, 11$
13. P $(ramo\ fechado)$ $R1, 11$
14. $\neg(P \lor (Q \land P))$ $R1, 2$ $(em\ B)$
15. $(P \lor Q) \lor (P \lor P))$ $R1, 2$ $(em\ B)$
16. $\neg P$ $R7, 14$
17. $\neg Q \land P$ $R7, 14$
18. $\neg Q$ $R1, 17$
19. P $R1, 17$
20. $(P \lor Q)$ *ou* $(P \lor P)$ $R2, 15$
21. P $(ramo\ fechado)$ *ou* Q $(ramo\ fechado)$ $R2, 20$
22. P $(ramo\ fechado)$ *ou* P $(ramo\ fechado)$ $R2, 20$

Resp.: Tableaux fechado, portanto a fórmula é tautologia.

c)

$(\neg(\neg P)) \leftrightarrow P$
1. $\neg((\neg(\neg P)) \leftrightarrow P)$
2. $(\neg(\neg P)) \land \neg P$ *ou* $\neg(\neg(\neg P)) \land P$ $R9, 1$
3. $(\neg(\neg P))$ $R1, 2$
4. $\neg P$ $R1, 2$
5. P $(ramo\ fechado)$ $R5, 3$
6. $\neg(\neg(\neg P))$ $R1, 2$
7. P $R1, 2$
8. $\neg P$ $(ramo\ fechado)$ $R5, 6$

Resp.: Tableaux fechada, portanto a fórmula é tautologia.

d)

{¬(P → Q) ↔ (P ∧ (¬ Q))}
1. ¬(P → Q) ↔ (P ∧ (¬ Q))

.	↙	↘	
2.	¬(P → Q) ∧ (P ∧ (¬ Q))	(P → Q) ∧ ¬ (P ∧ (¬ Q))	R4,1.
3.	¬(P → Q)	¬(P → Q)	R1,2.
4.	(P ∧ (¬ Q))	(P ∧ (¬ Q))	R1,2.
5.	(P → Q)	(P → Q)	R1,2.
6.	¬(P ∧ (¬ Q))	¬(P ∧ (¬ Q))	R1,2.
7.	P	P	R8,3.
8.	¬ Q	¬ Q	R8,3.

9. P P R1,4.
10. ¬ Q ¬ Q R1,4.
. $\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
11. ¬ **P** **Q** ¬ **P** **Q** R6,6.

e)

f)

g)

$(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
1. $\neg((P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q))$
2. $(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \rightarrow Q)$ *ou* $\neg(P \vee Q) \vee (\neg P \rightarrow Q)$ $R9, 1$
3. $(P \vee Q)$ $R1, 2$
4. $\neg(\neg P \rightarrow Q)$ $R1, 2$
5. $\neg P$ $R8, 4$
6. $\neg Q$ $R8, 4$
7. P $(ramo\ fechado)$*ou* Q $(ramo\ fechado)$ $R2, 3$
8. $\neg(P \vee Q)$ $R1, 2$
9. $(\neg P \rightarrow Q)$ $R1, 2$
10. $\neg P$ $R7, 8$
11. $\neg Q$ $R7, 8$
12. $\neg(\neg P)$ *ou* Q $(ramo\ fechado)$ $R3, 9$
13. P $(ramo\ fechado)$ $R5, 12$

Resp.: Tableaux fechado, portanto a fórmula é uma tautologia.

h)

$(P \vee Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$
1. $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$
2. $(P \vee Q) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ *ou* $\neg(P \vee Q) \wedge ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ $R9, 1$
3. $(P \vee Q)$ $R1, 2$
4. $\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ $R1, 2$
5. $(P \rightarrow Q)$ $R8, 4$
6. $\neg Q$ $R8, 4$
7. $\neg P$ *ouQ* $(ramo\ fechado)$ $R3, 5$
8. P $(ramo\ fechado)$ *ou* Q $(ramo\ fechado)$ $R2, 3$
9. $\neg(P \vee Q)$ $R1, 2$
10. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ $R1, 2$
11. $\neg P$ $R7, 9$
12. $\neg Q$ $R7, 9$
13. $\neg(P \rightarrow Q)$ *ouQ* $(ramo\ fechado)$ $R3, 10$
14. P $(ramo\ fechado)$ $R1, 13$
15. $\neg Q$ $R1, 13$

Resp.: Tableaux fechado, portanto a fórmula é uma tautologia.

i)

$(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$
1. $\neg((P \wedge Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)))$
2. $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$ *ou* $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$ $R9, 1$
3. $(P \wedge Q)$ $R1, 2$
4. $\neg(P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$ $R1, 2$
5. P $R1, 3$
6. Q $R1, 3$
7. $P \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ *ou* $\neg P \wedge (P \rightarrow Q)$ $R9, 4$
8. P $R1, 7$
9. $\neg(P \rightarrow Q)$ $R1, 7$
10. P (*ramo fechado*) $R8, 9$
11. $\neg Q$ (*ramo fechado*) $R8, 9$
12. $\neg P$ $R1, 7$
13. $(P \rightarrow Q)$ $R1, 7$
14. $\neg P$ (*ramo fechado*) *ou* Q (*ramo fechado*) $R3, 13$
15. $\neg(P \wedge Q)$ $R1, 2$
16. $(P \leftrightarrow (P \rightarrow Q))$ $R1, 2$
17. $\neg P$ *ou* $\neg Q$ $R6, 15$
18. $P \wedge (P \rightarrow Q)$ *ou* $\neg P \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ $R4, 16$
19. P $R1, 18$
20. $P \rightarrow Q$ $R1.18$
21. $\neg P$ *ou* Q $R3, 20$
22. $\neg P$ $R1, 18$
23. $\neg(P \rightarrow Q)$ $R1, 18$
24. P (*ramo fechado*) $R8, 23$
25. $\neg Q$ $R8, 23$

Resp.: Tableaux fechado, portanto a fórmula é uma tautologia.

j) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Demostração por *tableaux* semântico.

$$
\begin{array}{lcccccr}
1. & & & \neg((P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)) & & & \\
 & & & \swarrow \quad \searrow & & & \\
2. & \multicolumn{2}{c}{\neg(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \vee Q)} & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg(p \vee Q)} & R_{9\cdot 1} \\
3. & \multicolumn{2}{c}{\neg(P \rightarrow Q)} & & \multicolumn{2}{c}{(P \rightarrow Q)} & R_{1\cdot 2} \\
4. & \multicolumn{2}{c}{(\neg P \vee Q)} & & \multicolumn{2}{c}{\neg(\neg P \vee Q)} & R_{1\cdot 2} \\
5. & \multicolumn{2}{c}{P} & & \multicolumn{2}{c}{\swarrow \quad \searrow} & R_{8\cdot 3} \\
6. & \multicolumn{2}{c}{\neg Q} & & \neg P & Q & R_{8\cdot 3}, R_{3\cdot 3} \\
7. & \multicolumn{2}{c}{\swarrow \quad \searrow} & & \neg\neg P & \neg\neg P & R_{2\cdot 4}, R_{7\cdot 4} \\
8. & \neg P & Q & & \neg Q & \neg Q & \\
 & \mathit{Fechado} & \mathit{Fechado} & & \mathit{Fechado} & \mathit{Fechado} &
\end{array}
$$

Como o *tableaux* é fechado em todos os seus ramos, logo pelo Teorema da Correção, temos que $\vdash$ e pelo Teorema da Completude, temos que $\models$. **cqd.**

Demostração por resolução.
Suponha $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
Analisando a tabela verdade abaixo referente a fórmula H temos:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	H	$\neg H$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F
F	F	T	F	T	F

A partir da última coluna da tabela verdade acima, obtemos a forma clausal $\neg H_c = \neg(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.
Logo:

$$\begin{gathered}\neg H_c = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \\ \{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{P, Q\}\end{gathered}$$

1.$\{\neg P, \neg Q\}$
2.$\{\neg P, Q\}$
3.$\{P, \neg Q\}$
4.$\{P, Q\}$
5.$\{\neg P\}$ $Res._{1,2}$
6.$\{P\}$ $Res._{3,4}$
7.$\{\}$ $Res._{5,6}$

Como a resolução é fechada, logo pelo Teorema da Correção temos que $\vdash$ então pelo Teorema da Completude temos que $\vDash$. **cqd.**

k) $(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

Demostração por *tableaux* semântico.

$$\begin{array}{lcccl}
1. & & \neg((P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)) & & \neg H \\
 & & \swarrow \quad \searrow & & \\
2. & \neg(P \to Q) \wedge (P \wedge Q) & & (P \to Q) \wedge \neg(P \wedge \neg Q) & R_{9,1} \\
3. & \neg(P \to Q) & & (P \to Q) & R_{2,1} \\
4. & (P \wedge \neg Q) & & \neg(P \wedge \neg Q) & R_{2,1} \\
5. & P & & \swarrow \quad \searrow & R_{2,4}\,,R_{6,4} \\
6. & \neg Q & & \neg P \qquad Q & R_{2,4}\,,R_{6,4} \\
7. & P & & \neg P \qquad \neg P & R_{8,3}\,,R_{3,3} \\
8. & \neg Q & & Q \qquad Q & R_{8,3}\,,R_{3,3} \\
 & \mathit{Aberto} & & \mathit{Aberto} \qquad \mathit{Aberto} &
\end{array}$$

Como o *tableaux* é aberto em todos os seus ramos, logo pelo Teorema da Correção, temos que $\nvdash$ e pelo Teorema da Completude, temos que $\nvDash$. **cqd.**

Demostração por resolução.
Suponha $H = (P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
Analisando a tabela verdade abaixo referente a fórmula H temos:

Tabela 7.1.

P	Q	$P \to Q$	$P \wedge \neg Q$	H	$\neg H$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T

Como a tabela verdade em sua última coluna apresenta somente valores verdadeiros a partir de $\neg H$ logo, não é possível extrair a forma clausal da fórmula $\neg H_c$. Portanto, a fórmula é uma contradição. **cqd.**

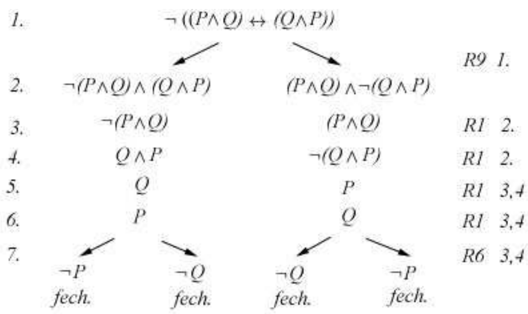
l)

m)

n)

o)

p) $(\mathbf{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})$



Resolução

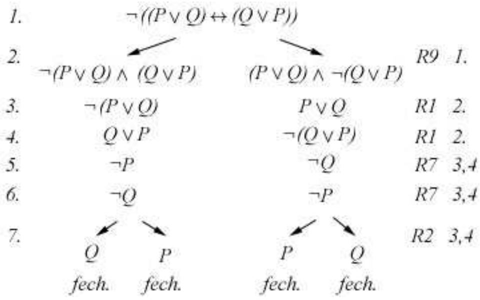
P	Q	P $\wedge$ Q	$\leftrightarrow$	Q *wedge* P	$\neg$ H
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	F	F

$\neg H_C = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
$\neg H_C = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{(P, Q\}$

1 {$\neg$ P, $\neg$ Q}
2 $\{\neg P, Q\}$
3 $\{P, \neg Q\}$
4 $\{P, Q\}$

5 {P} Res 3,4
6 {¬ P} Res 1,2
7 {} Res 5,6

q) $(\mathbf{P} \vee \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$



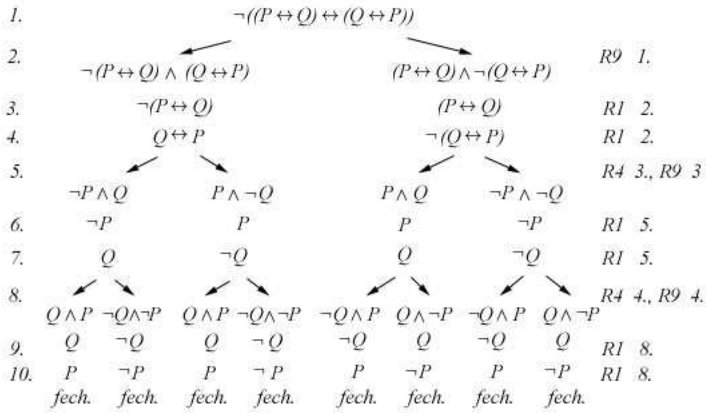
Resolução

P	Q	P ∨ Q	↔	Q ∨ P	¬ H
T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F

$$\neg H_C = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$
$\neg H_C = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{(P, Q\}$

1 {¬ P, ¬ Q}
2 $\{\neg P, Q\}$
3 $\{P, \neg Q\}$
4 $\{P, Q\}$
5 {P} Res 3,4
6 {¬ P} Res 1,2
7 {} Res 5,6

r) $(\mathbf{P} \vee \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$



Resolução

P	Q	P ↔ Q	↔	Q ↔ P	¬ H
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F

$$\neg H_C = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$$
$\neg H_C = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{(P, Q\}$

1 {¬ P, ¬ Q}
2 $\{\neg P, Q\}$
3 $\{P, \neg Q\}$
4 $\{P, Q\}$
5 {P} Res 3,4
6 {¬ P} Res 1,2
7 {} Res 5,6

s)

H = ((P ∧ Q) ∧ P) ↔ (P ∧ (Q ∧ P))

1.	¬(((P ∧ Q) ∧ P) ↔ (P ∧ (Q ∧ P))		¬ H
	↙	↘	
2.	¬((P ∧ Q) ∧ P) ∧ (P ∧ (Q ∧ P))	((P ∧ Q) ∧ P) ∧ ¬(P ∧ (Q ∧ P))	r9,1
3.	¬((P ∧ Q) ∧ P)	((P ∧ Q) ∧ P)	r1,2
4.	(P ∧ (Q ∧ P))	¬ (P ∧ (Q ∧ P)	r1,2
	Fechado	Fechado	

t)

$H = ((P \vee Q) \vee P) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee P))$

1.	$\neg(((P \vee Q) \vee P) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee P)))$		$\neg H$
	↙	↘	
2.	$\neg((P \vee Q) \vee P) \wedge (P \vee (Q \vee P))$	$((P \vee Q) \vee P) \wedge \neg(P \vee (Q \vee P))$	r9,1
3.	$\neg((P \vee Q) \vee P)$	$((P \vee Q) \vee P)$	r1,2
4.	$(P \vee (Q \vee P))$	$\neg(P \vee (Q \vee P))$	r1,2
	Fechado	Fechado	

u)

$((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)) = H$

1.	$\neg(((P \Leftrightarrow Q) \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)))$		$\neg H$
	↙	↘	
2.	$\neg((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P) \wedge (P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P))$	$((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P) \wedge \neg(P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P))$	r9,1
3.	$\neg((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P)$	$((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P)$	r1,2
4.	$(P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P))$	$\neg(P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P))$	r1,2
	Fechado	Fechado	

v) $((\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P})) \rightarrow (\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P})$

1.	$\neg(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))\rightarrow(P\rightarrow P))$		
2.	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$	R8	1.
3.	$\neg(P\rightarrow P)$	R8	1.
4.	$P\rightarrow Q$	R1	2.
5.	$Q\rightarrow P$	R1	2.
6.	P	R8	3.
7.	$\neg P$	R8	3.
	fech.		

Resolução

P	Q	P → Q	∧	Q → P	→	P → P	¬ H
T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	F

$\neg H_C = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$
$\neg H_C = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{(P, Q\}$
1 { ¬ P, ¬ Q}
2 $\{\neg P, Q\}$
3 $\{P, \neg Q\}$
4 $\{P, Q\}$
5 {P} Res 3,4
6 {¬ P} Res 1,2
7 {} Res 5,6

w)

x) $\neg(\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{P}$

1.	$\neg((\neg P) \vee P$		
2.	P	R7	1
3.	$\neg P$	R7	1.
	fech.		

Resolução
$\neg H_C = \{\{P\}, \{\neg P\}\}$

1 {P}
2 {¬ P}
3 {} Res 1,2

y) $\neg(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}) = \neg(\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{P}$

Resolução
$\neg H_C = \{\{P\}, \{\neg P\}\}$

1.	$\neg(P \to P)$	
2.	P	R8 1
3.	$\neg P$	R8 1.
	fech.	

1 {P}
2 {¬ P}
3 {} Res 1,2

z)

aa)

bb)

cc)

dd)

ee)

ff) $((P \wedge Q) \to P) \leftrightarrow (P \to (Q \to P))$

Por tableaux

$\neg H = \neg(((P \wedge Q) \to P) \leftrightarrow (P \to (Q \to P)))$

1.	$\neg(((P \wedge Q) \to P) \leftrightarrow (P \to (Q \to P)))$					$\neg H$
2.	$\neg((P \wedge Q) \to P) \wedge (P \to (Q \to P))$			$((P \wedge Q) \to P) \wedge \neg(P \to (Q \to P))$		R_9 1.
3.	$\neg((P \wedge Q) \to P)$			$(P \to Q) \to P$		R_1 2.
4.	$P \to (Q \to P)$			$\neg(P \to (Q \to P))$		R_1 2.
5.	$(P \wedge Q)$			$\neg(P \wedge Q)$	P	R_8 3. | R_3 3.
6.	$\neg P$			P	P	R_8 3. | R_8 4.
7.	$\neg P$ aberto	$(Q \to P)$		$\neg(Q \to P)$	$\neg(Q \to P)$	R_3 4. | R_8 4.
8.		$\neg Q$ aberto	P fechado	Q	Q	R_3 7. | R_8 7.
9.				$\neg P$ fechado	$\neg P$ fechado	R_8 7.

Contra exemplo:
Utilizando o ramo aberto mais à esquerda, define-se uma interpretação I, tal que $I[P] = F$, logo $I[((P \wedge Q) \to P) \leftrightarrow (P \to (Q \to P))] = T$

Por resolução

Construindo-se a tabela verdade

P	Q	$((P \land Q) \rightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow P))$	$\neg(((P \land Q) \rightarrow P) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow P)))$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	T	F

Logo $\neg H_c = (\neg P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q) \land (P \lor \neg Q) \land (P \lor Q)$
$\neg H_c = \{\{\neg P, \neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{P, Q\}\}$

1. $\{\neg P, \neg Q\}$
2. $\{\neg P, Q\}$
3. $\{P, \neg Q\}$
4. $\{P, Q\}$
5. $\{\neg P, P\}$ Res(1.,4.)
6. $\{Q, \neg Q\}$ Res(2.,3.)
7. $\{P, \neg Q\}$ Res(5.,4.)

gg) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow P))$

Por tableaux

$\neg H = \neg(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow P)))$

1. $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow P)))$ $\neg H$
2. P R_8 1.
3. $\neg(Q \rightarrow (P \rightarrow P))$ R_8 1.
4. Q R_8 3.
5. $\neg(P \rightarrow P)$ R_8 3.
6. P R_8 5.
7. $\neg P$ R_8 5.
fechado

Por resolução

$\neg H_c = \neg(\neg P \lor (\neg Q \lor (\neg P \lor P)))$
$= P \land Q \land P \land \neg P$

$\neg H_c = \{\{P\}, \{Q\}, \{\neg P\}\}$

1. $\{P\}$
2. $\{Q\}$

3. $\{\neg P\}$
4. $\{\}$ Res(1.,3.)

hh) $\boldsymbol{P \rightarrow (P \vee Q),\ (P \vee Q) \rightarrow P}$

<u>Por tableaux</u>

$H = \neg((P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P))$

$\neg H = (P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P)$

$$
\begin{array}{llcccccl}
1. & & & & (P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P) & & & \neg H \\
2. & & & & P \rightarrow (P \vee Q) & & & R_1\ 1. \\
3. & & & & (P \vee Q) \rightarrow P & & & R_1\ 1. \\
 & & & & \swarrow \quad \searrow & & & \\
4. & & \neg P & & & & (P \vee Q) & R_3\ 2. \\
 & & \swarrow \quad \searrow & & & & \swarrow \quad \searrow & \\
5. & \neg(P \vee Q) & & P & & \neg(P \vee Q) & P & R_3\ 3. \\
 & & & & & \text{fechado} & \text{aberto} & \\
6. & \neg P & & \neg P & & & & R_7\ 5. \\
7. & \neg Q & & \neg Q & & & & R_7\ 5. \\
 & \text{aberto} & & \text{fechado} & & & &
\end{array}
$$

Contra-exemplo:
Utilizando o ramo aberto mais à esquerda, pode-se definir uma interpretação I, tal que $I[G] = F$ e $I[P] = F$. Logo, $I[\neg((P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P))] = F$

<u>Por resolução</u>

$H = \neg((P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P))$

$\neg H = (P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \rightarrow P)$

$$
\begin{aligned}
\neg H_c &= (\neg P \vee (P \vee Q)) \wedge (\neg(P \vee Q) \vee P) \\
&= (\neg P \vee P \vee Q) \wedge (\neg P) \wedge (\neg Q \vee P)
\end{aligned}
$$

$\neg H_c = \{\{\neg P, P, Q\}, \{\neg P\}, \{\neg Q, P\}\}$

1. $\{\neg P, P, Q\}$
2. $\{\neg P\}$
3. $\{\neg Q, P\}$
4. $\{\neg Q\}$ Res(2.,3.)
5. $\{\neg P, P\}$ Res(4.,1.)
6. $\{\neg P\}$ Res(5.,2.)

ii)

jj)

kk)

ll)

textbfPor tableau:
$H = (P \land (P \land \neg P)) \leftrightarrow (P \land \neg P)$

1.	$\neg((P \land (P \land \neg P)) \leftrightarrow (P \land \neg P))$			$\neg H$
	$\swarrow$	$\searrow$		
2.	$\neg(P \land (P \land \neg P)) \land (P \land \neg P)$	$(P \land (P \land \neg P)) \land \neg(P \land \neg P)$		R9,1
3.	$\neg(P \land (P \land \neg P))$	$(P \land (P \land \neg P))$		R1,2
4.	$(P \land \neg P)$	$\neg(P \land \neg P)$		R1,2
5.	P			R1,4
6.	$\neg P$			R1,4
	fechado	$\swarrow$	$\searrow$	
7.		P	$\neg\neg P$	R6,4
8.		$(P \land \neg P)$	$(P \land \neg P)$	R1,3
9.		P	P	R1,3
		fechado		
10.			P	R1,8
11.			$\neg P$	R1,8
			fechado	

Como o tableau é fechado logo pelo teorema da correção temos que $\vdash H$, então pelo teorema da completude temos que $\models H$

Por resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	$(P \land (P \land \neg P)) \leftrightarrow (P \land \neg P)$	$\neg(P \land (P \land \neg P)) \leftrightarrow (P \land \neg P)$
T	T	F
F	T	F

A partir da terceira coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = \neg P \land P$ entao $\neg H_c = \{ \{ P \},\{\neg P \} \}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{ P \}$
2.$\{ \neg P \}$
3. $\{\}$ Res(1,2).

Como a resolução é fechada logo pelo teorema da correção temos que $\vdash H$, então pelo teorema da completude temos que $\models H$.

mm)

textbfPor resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	$(P \lor (P \lor \neg P)) \leftrightarrow (P \lor \neg P)$	$\neg((P \lor (P \lor \neg P)) \leftrightarrow (P \lor \neg P))$
T	T	F
F	T	F

A partir da terceira coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = \neg P \land P$ entao $\neg H_c = \{ \{ P \},\{\neg P \} \}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{ P \}$
2.$\{ \neg P \}$
3. $\{\}$ Res(1,2).

Como a resolução por expansão é vazia logo pelo teorema da correção temos que $\vdash H$, então pelo teorema da completude temos que $\models H$.

nn)

textbfPor resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	$(P \lor (P \land \neg P)) \leftrightarrow P$	$\neg((P \lor (P \land \neg P)) \leftrightarrow P)$
T	T	F
F	T	F

A partir da terceira coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = \neg P \land P$ entao $\neg H_c = \{ \{ P \},\{\neg P \} \}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{ P \}$
2.$\{ \neg P \}$
3. $\{\}$ Res(1,2).

Como a resolução é fechada logo pelo teorema da correção temos que $\vdash H$, então pelo teorema da completude temos que $\models H$

oo)

pp)

qq)

rr)

((P∧¬ P)→ P)↔(P∨¬ P)

1. $(((P \land \neg P) \rightarrow (P \lor \neg P)) \land ((P \lor \neg P) \rightarrow ((P \land \neg P) \rightarrow P))$ Reescrevendo

2. $((P \wedge \neg P) \rightarrow (P \vee \neg P))$ R_1, Linha 1

3. $((P \vee \neg P) \rightarrow ((P \wedge \neg P) \rightarrow \text{P}))$ R_1,Linha 1

$\swarrow \quad \searrow$

4. $\neg((P \wedge \neg P) \rightarrow P)$ $(P \vee \neg P)$ R_3,Linha 2

5. $(P \wedge \neg P)$ $\swarrow \searrow$ R_8,Linha 4

6. ¬ P P ¬P R_8,R_2,Linha 4

7. P R_1,Linha 5

8. ¬ P R_1,Linha 5

$\swarrow \quad \searrow$

9. $\neg(P \vee \neg P)$ $((P \wedge \neg P) \rightarrow P)$ R_3,Linha 3

$\swarrow \quad \searrow$

10. ¬ P $\neg(P \wedge \neg P)$ P R_7, R_3, Linha 9

11. $\neg\neg P$ $\swarrow \quad \searrow$ R_7,Linha 9

12. P $\neg P$ $\neg\neg P$ R_6,Linha 9

13. fechado fechado P R_5,Linha 12

fechado

Método da resolução:

H=$((P \wedge \neg P) \rightarrow P) \leftrightarrow (P \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (((P \wedge \neg P) \rightarrow P) \rightarrow (P \vee \neg P)) \wedge ((P \vee \neg P) \rightarrow ((P \wedge \neg P) \rightarrow P))$

$\Leftrightarrow ((\neg(P \wedge \neg P) \vee P) \rightarrow (P \vee \neg P)) \wedge (\neg(P \vee \neg P) \vee (\neg(P \wedge \neg P) \vee P))$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg(P \wedge \neg P) \vee P) \vee (P \vee \neg P)) \wedge (\neg(P \vee \neg P) \vee (\neg(P \wedge \neg P) \vee P))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee P \vee P) \vee (P \vee \neg P)) \wedge (\neg(P \vee \neg P) \vee (\neg(P \wedge \neg P) \vee P))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee P \vee P) \wedge \neg(P \vee \neg P) \wedge (\neg(P \vee \neg P) \vee (\neg P \vee P \vee P))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee P \vee P) \wedge \neg(P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg P) \wedge \neg(\neg P \vee P \vee P)$

$\neg H_c = \{\{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}\}$

1. $\{\neg P, P\}$

2.$\{\neg P, P\}$

3.$\{\neg P, P\}$

4.$\{\neg P, P\}$

5. { } Res 1.,2.

Como foi demonstrado, tanto pelo método de resolução, quanto pelo método de tablaux semântico a fórmula provou ser uma tautologia.Cqd.

ss)

$P \leftrightarrow ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)$

1. $((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \wedge (((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \rightarrow P)$

2.P$\rightarrow ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)$ R_1 Linha 1

3. $((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \rightarrow P$ R_1 Linha 1

$\swarrow \quad \searrow$

4. $\neg((P \vee \neg) \leftrightarrow P) \quad P$ R_3 Linha 3

$\swarrow \quad \searrow$

5.$(\neg(P \vee \neg P) \wedge P) \quad (P \vee \neg P) \wedge \neg P$ R_9 Linha 4

6. $(\neg(P \vee \neg P)) \quad (P \vee \neg P)$ R_1 Linha 5

7. $P \quad \neg P$ R_1 Linha 5

$\swarrow \quad \searrow$

8. ¬ P P $\neg P$ R_7,R_2 Linha 6

9. ¬ ¬ P $\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$

10. $\swarrow \quad \searrow \neg P \quad ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \quad \neg P \quad ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)$

13.$\neg P \quad ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$

$\swarrow \quad \searrow$

14.$((P \vee \neg P) \wedge P) \quad (\neg(P \vee \neg P) \wedge \neg P) \quad ((P \vee \neg P) \wedge P) \; (\neg(P \vee \neg P) \wedge \neg P) \; ((P \vee \neg P) \wedge P)$ $(\neg(P \vee \neg P) \wedge \neg P)$

Completando a arvore, chegaremos a todos os ramos fechados, o que nós possibilita concluir que é uma tautologia.

Método da Resolução:

$P \leftrightarrow ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)$

$\Leftrightarrow (P \rightarrow ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)) \wedge (((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee ((P \vee \neg P) \leftrightarrow P)) \wedge (\neg((P \vee \neg P) \leftrightarrow P) \vee P)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee ((((P \vee \neg P) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \vee \neg P))) \wedge (\neg(P \vee \neg P) \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow (P \vee \neg P))$

$(\neg P \vee (\neg(P \vee \neg P) \vee P) \wedge (\neg P \vee (P \vee \neg P)) \wedge (((P \vee \neg P) \wedge \neg P) \wedge (\neg P \vee (P \vee \neg P))$

$\neg H_c = \{\{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}, \{\neg P, P\}\}$

1. $\{\neg P, P\}$

2.$\{\neg P, P\}$

3.$\{\neg P, P\}$

4.$\{\neg P, P\}$

5. { } Res 1.,2.

Como foi demonstrado, tanto pelo método de resolução, quanto pelo método de tablaux semântico a fórmula provou ser uma tautologia.Cqd.

tt)

Exercício 3:

a)

1. $\neg(P \to Q)$ *Reescrita*

2. $\neg P \vee Q$ *Reescrita*

3. P R_8,1.

4. $\neg Q$ R_8,1.

$\swarrow \quad \searrow$

5. $\neg P$ Q R_2,2.

fechado *fechado*

Como existe ramo fechado no *tableau*, o conjunto é satisfatível.

b)

1. $P \wedge Q$ *Reescrita*

2. $\neg P \wedge Q$ *Reescrita*

3. P R_1,1.

4. Q R_1,1.

5. $\neg P$ R_1,2.

6. Q R_1,2.

fechado

Como existe ramo fechado no *tableau*, o conjunto é satisfatível.

c)

1. $P \wedge Q$ *Reescrita*

2. $\neg P \vee Q$ *Reescrita*

3. P R_1,1.

4. Q R_1,1.

$\swarrow \quad \searrow$

5. $\neg P$ Q R_2,2.

fechado aberto

Como existe ramo fechado no *tableau*, o conjunto é satisfatível.

d)

e)

f)

g)

$\{P_1 \rightarrow P_2,\ P_2 \leftrightarrow P_3,\ P_3 \leftrightarrow P_4,\ P_4 \rightarrow P_1\}$
Resolução
$\{\neg P_1 \vee P_2,\ \neg P_2 \vee P_3,\ \neg P_3 \vee P_2,\ \neg P_3 \vee P_4,\ \neg P_4 \vee P_3,\ \neg P_4 \vee P_1\}$
$\{\{\neg P_1,\ P_2\},\ \{\neg P_2,\ P_3\},\ \{\neg P_3,\ P_2\},\ \{\neg P_3,\ P_4\},\ \{\neg P_4,\ P_3\},\ \{\neg P_4,\ P_1\}\}$
1.$\{\neg P_1,\ P_2\}$
2.$\{\neg P_2,\ P_3\}$
3.$\{\neg P_3,\ P_2\}$
4.$\{\neg P_3,\ P_4\}$
5.$\{\neg P_4,\ P_3\}$
6.$\{\neg P_4,\ P_1\}$
7.$\{\neg P_4,\ P_2\}\ res.(1,6)$
8.$\{\neg P_1,\ P_3\}\ res.(1,2)$
9.$\{\neg P_1,\ P_4\}\ res.(7,8)$
10.$\{\neg P_1,\ P_2\}\ res.(7,9)$
Resp.: Não há expansão fechada, então H não é satisfatível.

h)

$\{P_1 \rightarrow P_2,\ P2 \leftrightarrow P_3,\ P_3 \rightarrow P_4,\ P_1 \wedge \neg P_4\}$
$\{\{P_1,\ P_2\},\ \{P2,\ P_3\},\ \{\neg P_3,\ P_2\},\ \{\ P_3,\ P_4\},\ \{P_1\},\ \{\neg P_4\}\}$
1.$\{\neg P_1,\ P_2\}$
2.$\{\neg P_2,\ P_3\}$
3.$\{\neg P_3,\ P_2\}$
4.$\{\neg P_3,\ P_4\}$
5.$\{P_1\}$
6.$\{\neg P_4\}$
7.$\{\neg P_1,\ P_3\}\ res.(1,2)$
8.$\{P_3\}\ res.(5,7)$
9.$\{P_4\}\ res.(4,8)$
10.$\{\}\ Clusula\ vazia$
Resp.: Como a expansão por resolução é fechada, pois chegamos em uma cláusula vazia, o conjunto das fórmulas é satisfatível.

i)

$\{P_1 \to P_2,\ P_2 \to P_3,\ P_3 \to P_4,\ P_1 \vee \neg P_4\}$
$\{\{\neg P_1,\ P_2\},\ \{\neg P_2,\ P_3\},\ \{\neg P_3,\ P_4\},\ \{P_1,\ \neg P_4\}\}$
$1.\{\neg P_1,\ P_2\}$
$2.\{\neg P_2,\ P_3\}$
$3.\{\neg P_3,\ P_4\}$
$4.\{P_1,\ \neg P_4\}$
$5.\{P_2,\ \neg P_4\}\ res.(1,4)$
$6.\{P_1,\ \neg P_4\}\ res.(2,5)$
$7.\{P_3,\ \neg P_3\}\ res.(3,6)$
Resp.: Não há expansão fechada, então H não é satisfatível.

j)

{(P1 ∧ P2) → P3,¬ P1 → P4, P2 ∧ ¬ P3 ∧ ¬ P4 }

1. (P1 ∧ P2) → P3
2. ¬ P1 → P4
3. P2 ∧ ¬ P3 ∧ ¬ P4
4. P2 R1,3.
5. ¬ P3 R1,3.
6. ¬ P4 R1,3.
. ↙ ↘
7. P1 **P4** R1,2.
. ↙ ↘
8. ¬(P1 ∧ P2) **P3** R3,1.
. ↙ ↘
9. ¬**P1** ¬**P2** R6,8.
A fórmula é satisfatível.

k)

{ P1 ∨ P2,P1 ∨ (P2 ∧ P3), P1 → P3 }

1. P1 ∨ P2
2. P1 ∨ (P2 ∧ P3)
3. P1 → P3
. ↙ ↘
4. P1 P2 R2,1
. ↙ ↘. ↙ ↘
5. ¬ **P1** P3 ¬ **P1** P3 R3,3.
. ↙ ↘. ↙ ↘
6. P1 (P2 ∧ P3) P1 (P2 ∧ P3) R2,2.
.
7. P2 P2 R1,6.
8. P3 P3 R1,6.
A fórmula é satisfatível.

l)

$\{\neg P1 \lor P2,\ P2 \land \neg P3,\ P3 \rightarrow P4,\ P5 \lor \neg P4,\ P1 \land \neg P5\}$

1. $\neg P1 \lor P2$
2. $P2 \land \neg P3$
3. $P3 \rightarrow P4$
4. $P5 \lor \neg P4$
5. $P1 \land \neg P5$
6. $P2$ R1,2.
7. $P3$ R1,2.
8. $P1$ R1,5.
9. $\neg P5$ R1,5.

. $\swarrow \quad \searrow$

10. $\neg$ **P3** $\quad P4$ R3,3.

. $\swarrow \quad \searrow$

11. $\neg$ **P1** $\quad P2$ R2,1.

. $\swarrow \quad \searrow$

12. **P5** $\quad \neg$ **P4** R2,5.

A fórmula é satisfatível.

m)

$\{\neg P_2 \rightarrow \neg P_1,\ P_2 \leftrightarrow P_3,\ \neg P_3,\ \neg P_1\}$
$\{\{P_2,\ \neg P_1\},\ \{\neg P_2,\ P_3\},\ \{\neg P_3,\ P_2\},\ \{\neg P_3\},\ \{\neg P_1\}\}$
1.$\{P_2,\ \neg P_1\}$
2.$\{\neg P_2,\ P_3\}$
3.$\{\neg P_3,\ P_2\}$
4.$\{\neg P_3\}$
5.$\{\neg P_1\}$
6.$\{\neg P_1,\ P_3\}\ res.(1,2)$
7.$\{\neg P_2,\ P_2\}\ res.(2,3)$
8.$\{\neg P_2\}\ res.(4,2)$
Resp.: Não há expansão fechada, então H não é satisfatível.

n)

$\{P_1 \leftrightarrow P_2,\ P_2 \leftrightarrow P_3, \neg P_3,\ \neg P_1\}$
$\{\{\neg P_1,\ P_2\},\ \{\neg P_2,\ P_1\},\ \{\neg P_2,\ P_3\},\ \{\neg P_3,\ P_2\}, \{\neg P_3\},\ \{\neg P_1\}\}$
1.$\{\neg P_1,\ P_2\}$
2.$\{\neg P_2,\ P_1\}$
3.$\{\neg P_2,\ P_3\}$
4.$\{\neg P_3,\ P_2\}$
5.$\{\neg P_3\}$
6.$\{\neg P_1\}$
7.$\{\neg P_2\}\ res.(2,6)$
8.$\{P_3, \neg P_3\}\ res.(3,4)$

9.$\{\neg P_3\}$ $res.(4,7)$
Resp.: Não há expansão fechada, então H não é satisfatível.

o)

$\{P_2 \rightarrow P_1,\ \neg P_2 \rightarrow P_1,\ P_1\}$
$\{\{\neg P_2,\ P_1\},\ \{P_2,\ P_1\},\ \{P_1\}\}$
1.$\{\neg P_2,\ P_1\}$
2.$\{P_2,\ P_1\}$
3.$\{P_1\}$
4.$\{P_1\}$ $res.(1,2)$
Resp.: Não há expansão fechada, então H não é satisfatível.

p)

q)

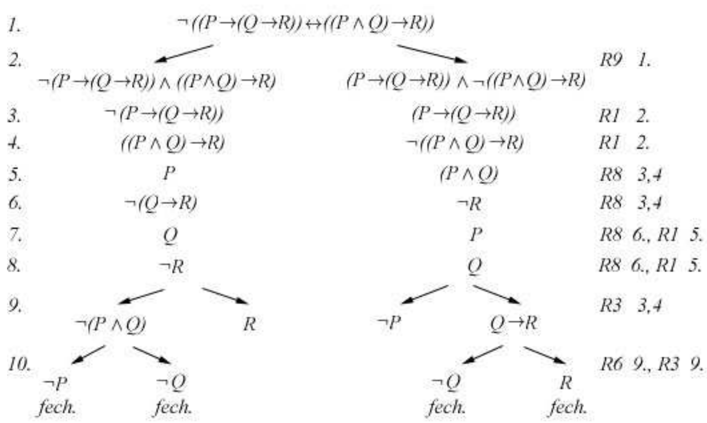
r)

s)

t)

u)

v)



(P $\rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

P	Q	R	Q $\rightarrow$ R	P $\rightarrow$ (Q $\rightarrow$ R)	P $\wedge$ Q	(P $\wedge$ Q) $\rightarrow$ R	H	$\neg$ H
T	T	T	T	T	T	T	T	F
T	T	F	F	F	T	F	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F	T	T	F

$\neg Hc = (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

$\neg Hc = \{\{\neg P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg P, Q, \neg R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{P, \neg Q, \neg R\},$
$\{P, \neg Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, Q, R\}\}$

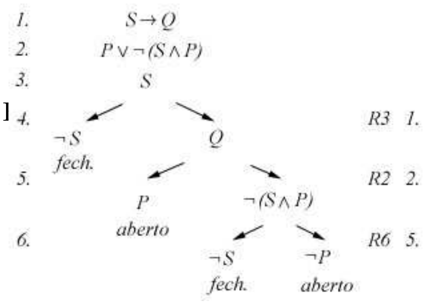
1 $\{\neg P, \neg Q, \neg R\}$
2 $\{\neg P, \neg Q, R\}$
3 $\{\neg P, Q, \neg R\}$
4 $\{\neg P, Q, R\}$
5 $\{P, \neg Q, \neg R\}$
6 $\{P, \neg Q, R\}$
7 $\{P, Q, \neg R\}$
8 $\{P, Q, R\}$
9 {P, Q} Res 7,8
10 {P,¬ Q} Res 5,6
11 {P} Res 9,10
12 { ¬ P, ¬ Q} Res 1,2
13 { ¬ P,Q} Res 3,4
14 {¬P} Res 12,13
15 {} Res 11,14

w)

x)

(S $\rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg(S \wedge P)) \wedge S$
$(\neg S \vee Q) \wedge (P \vee \neg S \vee \neg P) \wedge S$
Hc = $\{\{\neg S, Q\}, \{P, \neg S, \neg P\}, \{S\}\}$
1 $\{\neg S, Q\}$
2 $\{P, \neg S, \neg P\}$
3 $\{S\}$
4 $\{P, \neg P\}$ Res 2,3
5 $\{Q\}$ Res 1,3

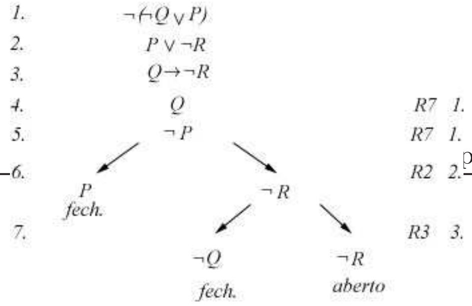
Resposta: Não é possível encontrar {}, logo I



É satisfatível, pois possui ramo fechado

y)

É satisfatível, pois possui ramo fechado



$(Q \land P) \land (P \lor \neg R) \land (\neg Q \lor R)$
$Q \land P \land (P \lor \neg R) \land (\neg Q \lor R)$
Hc $= \{\{Q\}, \{P\}, \{P, \neg R\}, \{\neg Q, R\}\}$
1 $\{Q\}$
2 $\{P\}$
3 $\{P, \neg R\}$
4 $\{\neg Q, R\}$
5 $\{\neg R\}$ Res 1,4

Resposta: Não é possível encontrar {}, logo H e satisfatível.

z)

aa)

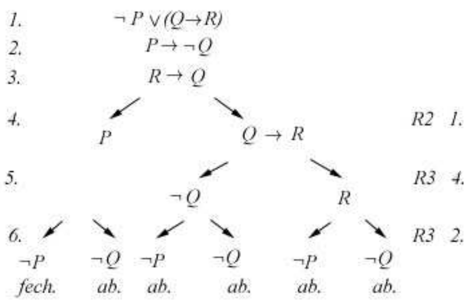
bb)

Exercício 4:

a)

P = "José foi intimado"
Q = "Flávia faltou ao serviço"
R = "Um bilhete foi encontrado"

$\neg P \lor (Q \to R), P \to \neg Q, R \to Q$
É satisfatível, pois possui ramo fechado



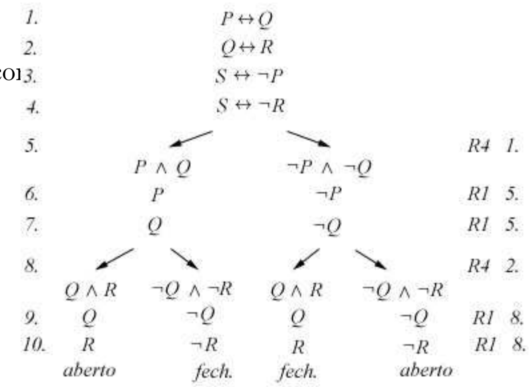
$(\neg P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q) \land (\neg R \lor Q)$
Hc $= \{\{\neg P, \neg Q \lor R\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{\neg R, Q\}\}$
1 $\{\neg P, \neg Q \lor R\}$
2 $\{\neg P, \neg Q\}$
3 $\{\neg R, Q\}$
4 $\{\neg P, \neg R\}$ Res 2,3
5 $\{\neg P, \neg Q\}$ Res 1,4

Resposta: Não é possível encontrar {}, logo H e satisfatível.

b)

P = "Casamento feliz"
Q = "Noivos tem objetivos comuns"
R = "Noivos cursam disciplinas em áreas co
S = "Há divórcio"

P $\leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R, S \leftrightarrow \neg P, S \leftrightarrow \neg R$



É satisfatível, pois possui ramo fechado

$((\mathrm{P} \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \wedge (S \leftrightarrow \neg P) \wedge (S \leftrightarrow \neg R))$
$(((\mathrm{P} \rightarrow Q)\wedge(Q \rightarrow P))\wedge((Q \rightarrow R)\wedge(R \rightarrow Q))\wedge((S \rightarrow \neg P)\wedge(\neg P \rightarrow S))\wedge((S \rightarrow \neg R)\wedge(\neg R \rightarrow S)))$

$(((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))\wedge((\neg Q\vee R)\wedge(\neg R\vee Q))\wedge((\neg S\vee\neg P)\wedge(P\vee S))\wedge((\neg S\vee\neg R)\wedge(R\vee S)))$

Hc = $\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, P\}, \{\neg Q, R\}, \{\neg R, Q\}, \{\neg S, \neg P\}, \{P, S\}, \{\neg S, \neg R\}, \{R, S\}\}$

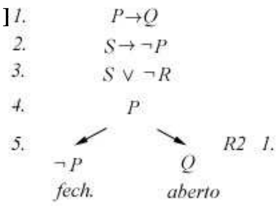
1 $\{\neg P, Q\}$
2 $\{\neg Q, P\}$ 3 $\{\neg Q, R\}$ 4 $\{\neg R, Q\}$ 5 $\{\neg S, \neg P\}$ 6 $\{P, S\}$ 7 $\{\neg S, \neg R\}$ 8 $\{R, S\}$ 9 $\{S, Q\}$ Res 4,8
10 $\{S, R\}$ Res 9,3
Resposta: Não é possível encontrar {}, logo H e satisfatível.

c)

P = "Há pouco sangue na cena do crime"
Q = "O matador é profissional"
R = "Houve poucos ruídos no momento do crime"
S = "A vítima estava toda ensaguentada"

P $\rightarrow Q, R \rightarrow \neg P, S \vee \neg R, P$
$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg P) \wedge (S \vee \neg R) \wedge P$
Hc = $\{\{\neg P, Q\}, \{\neg R, \neg P\}, \{S, \neg R\}, \{P\}\}$
1 $\{\neg P, Q\}$
2 $\{\neg R, \neg P\}$
3 $\{S, \neg R\}$
4 $\{P\}$
5 $\{Q\}$ Res 1,4
6 $\{\neg R\}$ Res 2,4

Resposta: Não é possível encontrar {}, logo I



É satisfatível, pois possui ramo fechado

d)

Exercício 5:

a)

b)

c)

P = Sr. Machado mora em Coromandel
Q = Sr. Machado vive em minas

Prova:
H = ((P → Q) ∧ P) → Q = ¬((P → Q) ∧ P) ∨ Q
¬H = ((P → Q) ∧ P) ∧ ¬Q
¬H = ((¬P ∨ Q) ∧ P) ∧ ¬Q

1. {¬P, Q}
2. {P}
3. {¬Q}
4. {Q} Res. 1 e 2
5. {} Res. 3 e 4

Logo, o argumento é válido.

d)

P = Sr. Machado mora em Coromandel
Q = Sr. Machado vive em minas

Prova:
H = ((P → Q) ∧ P) → Q = ¬((P → Q) ∧ P) ∨ Q
¬H = ((P → Q) ∧ P) ∧ ¬Q
¬H = ((¬P ∨ Q) ∧ P) ∧ ¬Q

1. {¬P, Q}
2. {P}
3. {¬Q}
4. {Q} Res. 1 e 2
5. {} Res. 3 e 4

Logo, o argumento é válido.

e)

O argumento não é válido.

f)

g)

h)

i)

j)

k)

l)

P = "Lênin é comunista"
Q = "Lênin é ateu"
$H = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
Por tableau:

1	$\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$		$\neg H$
2	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg(Q \rightarrow P)$	R6,1
	$\swarrow$	$\searrow$	
3	P	Q	R8,2
4	$\neg Q$	$\neg P$	R8,2
	aberto	aberto	

Como o Tableau é aberto logo argumento não é válido,ou seja, pelo teorema da correção $\nvdash$H, logo $\nvDash$H.

Por resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

A partir da quarta coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ entao $\neg H_c = \{ \{ \neg P, \neg Q \},\{P, Q \} \}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{ \neg P, \neg Q \}$
2.$\{ P, Q \}$
3.$\{ Q, \neg Q\}$ Res(1,2).

Como a expansão não foi vazia logo o argumento não é válido, ou seja, pelo teorema da correção $\nvdash$H, logo $\nvDash$H.

m)

$P =$"Houver economia de energia"
$Q =$"Houver investimentos"
$R =$"Haverá Apagão"
$(((P \wedge Q) \rightarrow \neg R) \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q))$

Por tableau:

1.$\neg(((P \wedge Q) \rightarrow \neg R) \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q))$ $\neg H$
2. $((P \wedge Q) \rightarrow \neg R) \wedge \neg P)$ R8,1
3. $\neg(R \rightarrow \neg Q)$ R8,1
4. R R8,3
5. $\neg Q$ R8,3
6. $(P \wedge Q) \rightarrow \neg R$ R1,2
7. $\neg P$ R1,2
$\swarrow \quad \searrow$
8. $\neg(P \wedge Q)$ $\neg R$ R3,6
$\swarrow \quad \searrow$ fechado
9. $\neg P$ $\neg Q$ R6,8
aberto aberto R6,8

Como o Tableau é aberto logo argumento não é válido,ou seja, pelo teorema da correção $\nvdash$H, logo $\nvDash$H.

Por resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	Q	R	$(((P \wedge Q) \rightarrow \neg R) \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q))$	$\neg((((P \wedge Q) \rightarrow \neg R) \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)))$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

A partir da quinta coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
entao $\neg H_c = \{\{\neg P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, \neg Q, R\}, \{\neg P, Q, \neg R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, Q, R\}\}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{\neg P, \neg Q, \neg R\}$
2.$\{\neg P, \neg Q, R\}$
3.$\{\neg P, Q, \neg R\}$
4.$\{\neg P, Q, R\}$
5.$\{P, \neg Q, R\}$
6.$\{P, Q, \neg R\}$
7.$\{P, \neg Q, R\}$
8.$\{\neg P, \neg Q\}$ Res(1,2)
9.$\{\neg P, Q\}$ Res(3,4)
10.$\{P, \neg Q\}$ Res(5,6)
11.$\{\neg P\}$ Res(8,9)
12.$\{P, Q, R\}$ Res(7,10)
13.$\{Q, R\}$ Res(11,12)

Como a expansão não é vazia logo o argumento não é válido,ou seja, pelo teorema da correção $\nvdash$H, logo $\nvDash$H.

n)

$P =$"Fernandinho Ganhar as eleições"
$Q =$"A corrupção aumentará"
$S =$"Impunidade permanecer alta"
$(P \rightarrow (R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
Por Tableau:

1 $\neg((P \rightarrow (R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$ $\neg H$
2 $(P \rightarrow (R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$ R8,1
3 $\neg(P \rightarrow Q)$ R8,1
4 P R8,3
5 $\neg Q$ R8,3
6 $P \rightarrow (R \rightarrow Q)$ R1,2
7 $P \rightarrow R$ R1,2
$\swarrow \quad \searrow$

8 $\neg P$ R R3,7
fechado $\swarrow$ $\searrow$
9 $\neg P$ $R \rightarrow Q$ R3,6
fechado $\swarrow$ $\searrow$
10 $\neg R$ Q R3,9
11 fechado fechado

Como o tableau é fechado o argumento é válido, pois pelo teorema da correção $\vdash$H, logo $\models$H.

Por resolução:
Construindo a tabela verdade da fórmula temos abaixo:

P	Q	R	$((P \rightarrow (R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$	$\neg((P \rightarrow (R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q))$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

A partir da quinta coluna da tabela verdade vamos obter a fórmula clausal $\neg H_c$, logo temos:
$\neg H_c = (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
entao $\neg H_c = \{\{\neg P, \neg Q, \neg R\ \},\{\neg P, \neg Q, R\ \},\{\neg P, Q, \neg R\ \},\{\neg P, Q, R\ \},\{P, \neg Q, \neg R\ \},\{P, \neg Q, R\ \},\{P, Q, \neg R\ \},\{P,\ Q, R\ \}\ \}$
Desenvolvendo a expansão por resolução temos:
1.$\{\ \neg P, \neg Q, \neg R\ \}$
2.$\{\ \neg P, \neg Q, R\ \}$
3.$\{\ \neg P, Q, \neg R\ \}$
4.$\{\ \neg P, Q, R\ \}$
5.$\{\ P, \neg Q, \neg R\ \}$
6.$\{\ P, \neg Q, R\ \}$
7.$\{\ P, Q, \neg R\ \}$
8.$\{\ P, \neg Q, R\ \}$
9.$\{\ \neg P, \neg Q\ \}$ Res(1,2)
10.$\{\ \neg P, Q\ \}$ Res(3,4)
11.$\{\ P, \neg Q\ \}$ Res(5,6)
12.$\{\ P, \neg Q\ \}$ Res(7,8)
13.$\{\ \neg P R\ \}$ Res(9,10)
14.$\{\ P\}$ Res(11,12)
15.$\{\ \}$ Res(13,14)

Como a expansão é vazia logo o argumento é válido,ou seja, pelo teorema da correção $\vdash$H, logo $\models$H.

o)

p)

q)

Exercício 6:

Exercício 7:

Suponha que existe uma prova de H por resolução. Logo, existe uma expansão por resolução fechada, a partir de $\neg H_c$ onde $\neg H_c$ é a forma clausal de $\neg H$. Neste caso,$\neg H$ equivale a $\neg H_c$ Portanto, H é tautologia $\Leftrightarrow$ H_c é tautologia ou equivalentemente, $\neg H$ é contraditória $\Leftrightarrow$ H_c é contraditória.

Devemos demonstrar que se a expansão por resolução a partir de $\neg H_c$ é fechada, então $\neg H_c$ é contraditória.

Logo, concluímos que $\neg H$ é contraditória e H é tautologia.

Considere então que a expansão por resolução a partir de $\neg H_C$ é fechada. Suponha por absurdo $\exists$ interpretação I tal que I[$\neg H_c$]=T.

Como a regra da resolução mantém a validade, então o resultado de sua aplicação sobre $\neg H_c$ deve ser também uma fórmula cuja interpretação é igual a T.

Como a expansão é fechada, a última cláusula é vazia. Mas a cláusula vazia somente é obtida aplicando a resolução a um conjunto do tipo {A,$\neg A$}.

Isto significa que $I[A \wedge \neg A] = T$, ou seja, I[A]=T e $I[\neg A] = T$ o que é um aburdo.

Portanto, se I[$\neg H_c$]=t, então obtemos um absurdo.

Logo, não existe interpretação I, tal que I[$\neg H_c$]=T, isto é $\forall$ I, I[$\neg$ H_c]=F. Conclui-se que $\neg H_c$ é tautologia e portanto que H é tautologia.

Nota. Uma demonstração mais rigorosa do teorema da correção deve usar indução finita.

Exercício 8:

a)

Verdadeira, pois a partir de um ramo aberto do *tableau* é possível determinar uma interpretação I tal que $I[H] = F$.

b)

Verdadeira. Se não existe *tableau* associado a $\neg H$ com ramo fechado, então todo *tableau* tem ramo aberto, logo, pelo item a), H não é tautologia.

c)

Verdadeira. A justificativa é a mesma do item a).

d)

Falsa. Se existe tableau associado a $\neg H$ com ramo fechado, isto não significa que não haja ramo aberto. Caso haja ramo aberto, então H não é tautologia.

e)

Verdadeira. Se existe tableau associado a $\neg H$ com todos os ramos fechados, então tem-se uma prova de H utilizando tableau. Logo, pelo teorema da correção, $\neg H$ é tautologia.

f)

Falsa. Como todo tableau associado a $\neg H$ possui ramo aberto, então, H não é tautologia.

g)

Falsa. Se todo tableau associado a ¬H possui ramo aberto, então H não é tautologia. Mas isto não significa que H não é contraditória.

h)

Falsa. se não existe tableau associado a ¬H com ramo fechado, então todos os ramos de todos os tableaux são abertos, Neste caso, sempre existe ramo aberto, logo H não é tautologia, podendo ser satisfatível ou contraditória.

i)

Verdadeira. Se existe tableau associado ¬H com todos os ramos abertos, então a partir de ¬H, utilizando o método do tableau para prova, não se chega a nenhuma contradição (o ramo fechado é quem determina a contradição). Isto significa que ∀ int. I, I[¬H] = T não é uma afirmação contraditória. Portanto ∀ int. I, I[¬H] = T, logo H é contraditória.

j)

Falsa. Se existe tableau associado a H com ramo fechado, pode ocorrer o caso em que todos os ramos são fechados. Nesse caso, H é tautologia.

k)

Falsa. Se existe tableau associado a H com todos os ramos fechados, então, pela mesma justificativa do item e), H é tautologia.

l)

Falsa. Se todo tableau associado a H possui ramo fechado e aberto, então, devido à presença de ramo aberto, H não é tautologia, podendo ser satisfatível, contraditória ou contigência.

m)

Verdadeira. Se toda expansão por resolução associada a $\neg H_c$ é aberta, significa que não existe expansão associada a $\neg H_c$ fechada. Logo, não é possível obter uma contradição de $I[\neg H_c] = T$ sendo $I[H_c] = F$ isto é, H_c e H não são tautologias.

n)

Verdadeira. Se não existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, significa que todas são abertas. Logo, pelo item m), H não é tautologia.

o)

Falsa. Se existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, então existe uma prova por resolução de H. Logo, pelo teorema da correção H é tautologia.

p)

Se existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, então H é tautologia.

$$\begin{aligned} \text{Se } \exists \text{ exp. res.associada } \neg H_c \text{ é fechada} &\Leftrightarrow \vdash \text{H} \\ &\Leftrightarrow \vDash H (T.Compl.) e (T.Corr.) \\ &\Leftrightarrow I[H] \text{ é tautologia} \end{aligned}$$

Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a $\neg H_c$ fechada, existe uma prova de H por resolução. Logo, H é tautologia. (cqd.)

q)

Se existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então H é contraditória

$$\begin{aligned} \text{Se } \exists \text{ exp. res. associada } \neg H_c \text{ é fechada} &\Leftrightarrow \vdash H \\ \exists \text{ exp. res. associada } H_c &\Leftrightarrow \vdash \neg H \\ &\Leftrightarrow \vDash \neg H (T.Compl.) e (T.Corr.) \end{aligned}$$

Verdadeira. Se existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então, conforme item p) $\neg H$ é tautologia. Logo, H é contraditória. (cqd.)

r)

Se toda expansão por resolução associada a H_c é aberta, então H é tautologia.

Se $\forall$ exp. res. associada H_c é aberta $\Rightarrow \neg H$ não é tautologia

Falsa. Se toda expansão por resolução associada a H_c é aberta, então, $\neg[H]$ não é tautologia. Isto não significa que H seja tautologia. (cqd.)

s)

Se não existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então H é contraditória.

Se $\nexists$ exp. res. associada H_c é fechada $\Rightarrow \forall$ exp res. associada a H_c é aberta

Falsa. Se não existe expansão por resolução associada a H_c fechada, então todas são abertas. Logo, pelo item r), $\neg H$ não é tautologia. Isto não significa que H seja contraditória. (cqd.)

Exercício 9:

Suponhamos que exista um processo de expansão que não termina, ou seja, é obtida uma árvore infinita. Como cada ramo da árvore é obtido utilizando alguma regra do sistema Tb_a em alguma fórmula anterior não expandida, precisaríamos de alguma regra que mantivesse o tamanho da fórmula ou mesmo a aumtentasse. Com as regras R1, R2, R3, R5, R6, R7 e R8, diminuimos sempre o tamanho da fórmula. As fórmulas R4 e R9 nos dão fórmulas que serão reduzidas no próximo passo pela regra R1. Como as fórmulas da expansão sempre diminuem, não podemos obter uma árvore infinita a partir de H. Concluímos assim que a árvore obtida pela expansão no sistema Tb_a é finita.

Parte II

LÓGICA DE PREDICADOS

8

A linguagem da Lógica de Predicados

Exercício 1:

a) Todo termo é uma fórmula?

Não. De acordo com a definição 8.4, uma fórmula da lógica de predicados é formada por átomos. Átomos, por sua vez, são formados pelo símbolo de verdade false e de símbolos de predicados e um termo não é um átomo.

b) Todo literal é uma expressão?

Sim. Os literais são formados por átomos e de acordo com as definiçães 8.4 e 8.5, fórmulas são expressões e todo átomo é uma fórmula.

c) Toda expressão é um literal?

Não. Uma expressão pode ser um termo ou uma fórmula. As expressões formadas por termos não são literais, pois, de acordo com a definição 8.7, literais são átomos e um termo não é um átomo.

Exercício 2:

a)

$\star$ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z1))$
$\star$ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z)$
$\star$ $(\forall x)p(x, y, w, z)$
$\star$ p(x,y,w,z)
$\star$ $(\forall y)q(z, y, x, z1))$
$\star$ q(z,y,x,z1)
$\star$ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)q(z, y, x, z1)$

b)

⋆ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x,y,w,z) \rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$
⋆ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x,y,w,z)$
⋆ $(\forall x)p(x,y,w,z)$
⋆ p(x,y,w,z)
⋆ $(\forall y)q(z,y,x,z1))$
⋆ q(z,y,x,z1)
⋆ $(\forall w)(\forall z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)q(z,y,x,z1)$
⋆ x
⋆ y
⋆ w
⋆ z
⋆ z1

Exercício 3:

a)

$(\forall x)p(x) \vee (\neg(\forall x)q(x) \rightarrow r(y))$

b)

$(\exists z)(p(z) \leftrightarrow \neg q(y))$

c)

$(\exists x)(\forall x)(\neg p(x))$

Exercício 4:

a)

$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

b)

$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall z)q(z)$

c)

$((\exists y)(\forall z)p(z) \wedge r(z)) \vee (\forall x)q(x)$

Exercício 5:

Exercício 6:

Exercício 7:

a)

Uma variável x ocorre ligada em E se x está no escopo de um quantificador (ex. $E = (\forall x)p(x)$) e x ocorre livre se não for ligada (ex. $E = p(x)$).

b)

Uma variável x pode ocorrer livre e ligada ao mesmo tempo em uma fórmula E (ex. $E = (\forall x)p(x) \rightarrow q(x)$).

Exercício 8:

Exercício 9:

a)

Sim, as fórmulas fechadas não possuem símbolos livres.

b)

Não possui símbolos livres.

c)

Não, pois as variáveis ligadas e as variáveis dos quantificadores não são símbolos livres.

Exercício 10:

a)

b)

c)

8.1 Exercício 11:

a) $H(\forall x)p(x)$

b) p(a)

c) $(\exists x)(\exists y)p(x, y)$, ou qualquer fórmula fechada.

9

A semântica da Lógica de Predicados

Exercício 1:

a)

$I[p(x,a)] = F$ e $J[p(x,a)] = T$

b)

$I[p(x,a) \wedge p(x,f(x))] = F$ e $J[p(x,a) \wedge p(x,f(x))] = T$

c)

$I[(\exists y)p(y,x)] = T$ e $J[(\exists y)p(y,x)] = F$

d)

$I[(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))] = T$ e $J[(\forall y)(p(y,a) \vee p(f(y),y))] = F$

e)

$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T$ e $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y)] = T$

f)

$I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T$ e $J[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T$

g)

$I[(\forall x)(\exists x)q(x)] = T$ e não é possível determinar a interpretação J.

h)

$I[(\exists x)(\forall x)q(x)] = F$ e não é possível determinar a interpretação J.

Exercício 2:

Exercício 3:

Observe que H implica G $\Leftrightarrow$ (H $\rightarrow$ G) é tautologia.
Vamos supor pro absurdo que H $\rightarrow$ G não é tautologia.

$I[H \rightarrow G] = F \Leftrightarrow I[H] = T\ e\ T[G] = F$

$para I[H] = T\ temos:$
$I[(\exists x_1)H_1 \rightarrow ((\exists x_2)H_2 \rightarrow (...))] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists x_1)Hx_1] = T\ e\ I[(\exists x_2)Hx_2 \rightarrow (...)] = T$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x_1 \leftarrow d > I[H_1] = T\ e\ \exists\ c \in U, < x_2 \leftarrow c > I[H_2] = T$

$para\ I[G] = F\ temos:$
$I[(\forall x_1)...(\forall x_8)((H_1 \wedge ... \wedge H_4) \rightarrow H_8)] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x_1)...(\forall x_7)(H_1 \wedge ... \wedge H_7)] = T\ e\ I[(\forall x_8)H_8] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in U, < x_1 \leftarrow d > I[H_1] = T\ e\ ...\forall\ c \in U, < x_2 \leftarrow c > I[H_8] = T\ e\ \exists\ e \in U, < x_8 \leftarrow e > I[H_8] = F$
$\therefore ABSURDO!$

Resposta: Comparando as afirmações podemos concluir que I[H $\rightarrow$ G] é tautologia.

Exercício 4:

a)

J[($\forall$ x)($\exists$ y) p(x,y,z,w) $\rightarrow$ ($\forall$ z) p(z,b,y,x)]=F
$\Leftrightarrow$ J[($\forall$ x)($\exists$ y) p(x,y,z,w)]=T e J[($\forall$ z) p(z,b,y,x)]=F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ N; <x $\leftrightarrow$ d> J[($\exists$ y) p(x,y,z,w)]=T e $\exists$ c $\in$ N; <z $\leftrightarrow$ c> J[p(z,b,y,x)]=F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ N; $\exists$ e $\in$ N;<y $\leftrightarrow$ e><x $\leftrightarrow$ d> J[p(x,y,z,w)]=T e $\exists$ c $\in$ N; <z $\leftrightarrow$ c> J[p(z,b,y,x)]=F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ N; $\exists$ e $\in$ N; $p_j(d,e,z_j,w_j)$=T e $\exists$ c $\in$ N; $p_j(c,b_j,y_j,x_j)$]=F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ N; (d+e $<$ z_j+w_j) é verdadeira e $\exists$ c $\in$ N; (c+b_j $<$ y_j+x_j) é falsa.

b)

I[E]=F $\Leftrightarrow$ $\forall$ $d_1 \in$ N, $\exists$ $d_3 \in$ N; <y $\leftrightarrow$ d_3><x $\leftrightarrow$ d_1> I[p(x,y,z,w)]=T e $\exists$ $d_2 \in$ N, $\forall$ $d_4 \in$ N; <y $\leftrightarrow$ d_4><z $\leftrightarrow$ d_2> I[p(z,b,y,x)]=F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ $d_1 \in$ N, $\exists$ $d_3 \in$ N; ($d_1+d_3 > 14$) é verdadeira e $\exists$ $d_2 \in$ N, $\forall$ $d_4 \in$ N; ($d_2+7 < d_4+9$) é falsa.

I[($\forall$ x)($\exists$ y) p(x,y,z,w)]=T e I[($\forall$ z) p(z,b,y,x)]=F, logo I[E]=F.

Exercício 5:

a)

Seja i e J duas interpretações sobre os naturais tais que
$I[p(x,y,z)] = T \Leftrightarrow (x_I + y_I) > z_I I[z] = 5, I[x] = 5.$
$J[p(x,y,z)] = T \Leftrightarrow (y_I + y_I) \leq x_I I[z] = 0, I[x] = 5.$

Neste caso, $I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)] = T$ e $I[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)] = F$. Logo,
$I[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \to (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)] = F$.
Por outro lado, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z)] = T$ e $J[(\exists y)(\forall z)p(x,y,z)] = F$.

Logo, $J[(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \to (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)] = F$. Demonstre, utilizando as definições, cada uma das igualdades.

b)

$(\forall x)\ p(x) \leftrightarrow (\exists y)\ q(y)$
Seja I uma int. sobre os N.
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow\ x_I$ é par.
$I[q(y)] = T \Leftrightarrow\ y_I$ é ímpar.

Neste caso, $I[H] = F$ pois
$I[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ afirmativa verdadeira e
$I[(\exists y)q(y)] = T \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$ afirmativa verdadeira.

Seja J uma int. sobre os N.
$J[p(x)] = T \Leftrightarrow x_J \geqslant 0$
$J[q(y)] = T \Leftrightarrow y_J$ é ímpar

Neste caso $J[H] = T$.

c)

Exercício 6:

a) Quais os resultados informais das interprestações de H_1, H_2 e H_3, onde I é uma interprestação sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, tal que:

$I[a] = 0$, $I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$, $I[p(x) = T \Leftrightarrow x_I]$ é um número primo, $I[r] =$ ”=” (r é interpretado como igualdade) e $I[f] = *$ (f é interpretada como o produto).

$H_1 = (\forall x)(\exists y)(q(x,y) \wedge p(y))$
Os conjuntos dos números primos é infinito.

$H_2 = (\forall x)(q(a, x \rightarrow (\exists z)r(f(z,z), x))$
Todo número positivo tem raiz quadrada.

$H_3 = (\forall x)(\forall y)(\neg r(x,a) \rightarrow (\exists z)r(f(x,z), y))$
Dados dois números reais x e y, se $x \neq 0$, entãoé possível dividir y por x.

b)

c)

d)

Exercício 7:

a)

I[(∀ x)(∀ y) H] = T
= ⇔ ∀ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = T > ⇔ ∀ d ∈ U, ∀ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = T

b)

I[(∀x)(∀y)H] = F
= ⇔ ∃ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = F > ⇔ ∃ d ∈ U, ∃ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = F

c)

I[(∀x)(∃y)H] = T = ⇔ ∀ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = T > ⇔ ∀ d ∈ U, ∃ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = T

d)

I[(∀x)(∃y)H] = F = ⇔ ∃ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = F > ⇔ ∃ d ∈ U, ∀ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = F

e)

I[(∃x)(∀y)H] = T = ⇔ ∃ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = T > ⇔ ∃ d ∈ U, ∀ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = T

f)

I[(∃x)(∀y)H] = F = ⇔ ∀ d ∈ U, <x ← d> I[(∀y)H] = F > ⇔ ∀ d ∈ U, ∃ e ∈ U, <y ← e><x ← d> I[H] = F

Exercício 8:

a)

I[p(x,y)]$= 0 \leq 4$;
J[p(x,y)]$= 9 \leq 4$;

$0 \leq 4 \neq 9 \leq 4$, que é uma afirmação verdadeira.

b)

I$[(\forall x)p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall d \in N; < x \leftarrow d > I[p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall d \in N; d \leq 4$

J$[(\forall x)p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall c \in N; < x \leftarrow c > J[p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall c \in N; c \leq 4$

$\forall d \in N; d \leq 4 = \forall c \in N; c \leq 4$
É uma afirmação verdade

c)

I$[(\forall y)p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall d \in N; < y \leftarrow d > I[p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall d \in N; 0 \leq d$

J$[(\forall y)p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall c \in N; < y \leftarrow c > J[p(x,y)]$
$\Leftrightarrow \forall c \in N; 9 \leq c$

$\forall d \in N; 0 \leq d \neq \forall c \in N; 9 \leq c$
É uma afirmação verdade

Exercício 9:

a)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos indivíduos.

I$[p(x)]$ = T $\Leftrightarrow$ xI é esforçado.

I$[q(x)]$ = T $\Leftrightarrow$ xI trabalha muito.

I$[r(x)]$ = T $\Leftrightarrow$ xI tem inspiração.

I[$s(x)$] = T ⇔ xI é produtivo.

$(\forall x)(s(x) \rightarrow p(x) \wedge q(x) \wedge r(x))$

b)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas.

I[p(x)] = T ⇔ xI é homem

I[q(x)] = T ⇔ xI é mulher

I[r(x)] = T ⇔ xI é bonita, inteligente e sensível

I[s(x)] = T ⇔ xI prefere yI

$(\forall x)(\forall y)(s(x, y) \rightarrow (p(x) \wedge q(y) \wedge r(y))$

c)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas.

I[a] = Pedro

I[p(x,y)] = T ⇔ xI é filho de yI

I[q(x)] = T ⇔ xI é linda e meiga

I[r(x)] = T ⇔ xI é mulher

$(\forall x)(\forall y)((p(x, a) \wedge r(x)) \rightarrow q(x))$

d)

Seja I uma int sobre o conj das pessoas
I[a]=Ilmerio
I[p(x,y)]=T ⇔ xi é filha de yi
I[q(x)]=T ⇔ xi é aluno de CC
I[r(x)]=T ⇔ xi é lindo(a) e inteligente
I[s(x,y)]=T ⇔ xi quer namorar yi

(∀x) (p(x,a) → r(x)) ∧ (∀x)(∀y)((p(x,a) ∧ q(y)) → s(y,x))

e)

Seja I uma int sobre o conj dos animais
I[p(x)]=T ⇔ xi é pássaro
I[q(x)]=T ⇔ xi voa

(∃x) (p(x) → ¬ q(x))

f)

Seja I uma int sobre o conj das pessoas
$I[p(x)]=T \Leftrightarrow$ xi é político
$I[q(x)]=T \Leftrightarrow$ xi é honesto

$(\forall x)\ (p(x) \rightarrow \neg\ q(x))$

g)

h)

i)

j)

Seja U = conjunto dos conjuntos e I $[p(x,y)] = T \Leftrightarrow$ x contém y

$\neg(\exists x)\ p(x, x)$

k)

Seja U = conjunto dos macacos e I $[p(x)] = T \Leftrightarrow$ x tem seu galho

$(\forall x)\ p(x)$

l)

Seja U = conjunto das pessoas e I $[p(x,y)] = T \Leftrightarrow$ x fere y com ferro

$(\forall x)(\exists y)\ p(x, y) \rightarrow (\exists y)\ p(y, y)$

m)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de todas as pessoas. $I[x]$ = "homem", $I[y]$ = "mulher da vida", $I[f]$ = "vida", $I[q]$ = "viver envolvido" e $I[p]$ = "ter valor". A sentença pode ser pode ser escrita como:

$$(\forall x)(\forall y)(q(x,y) \rightarrow \neg p(f(x)))$$

n)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de todas as pessoas. $I[p]$ = "amar"; $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow$ $I[x]$ = "pessoa" e $I[y]$ = "pessoa". A sentença pode ser escrita como:

$$(\forall x)(\forall y)(\neg q(x,x) \rightarrow \neg p(x,y))$$

o)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de todas as patricinhas de Uberlândia. $I[a]$ = "celular", $I[b]$ = "pele lisa", $I[c]$ = "cheiro de alface", $I[p]$ = "ir ao shopping"; $I[p(x)] = T \Leftrightarrow I[x]$ = "patricinha" e $I[q]$ = "ter"; $I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow I[x]$ = "patricinha". A sentença pode ser escrita como:

$$(\forall x)(p(x) \rightarrow (q(x,a) \wedge q(x,b) \wedge q(x,c))$$

p)

q)

r)

s)

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow X_I$ é tio do pedro
$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ é mais novo que Y_I
$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ é irmão de Y_I
$I[s(x)] = T \Leftrightarrow X_I$ mora em israel

$(\exists y)(\exists x)(p(x) \wedge q(x,y) \wedge r(x,y) \wedge s(x))$

t)

$I[a]$=Jamil
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ admira Y_I
$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ é irmã Y_I
$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ cunhado Y_I
$I[s(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ tio Y_I
$I[p_1(x,y)] = T \Leftrightarrow X_I$ mora no líbano

$(\exists x)(p(a,x) \wedge (\exists y)(q(x,y) \wedge (\exists z)(r(y,z) \wedge s(z,a))) \wedge p_1(x))$

u)

v)

Os irmãos de Cláudio são amigos. Mas nem todo amigo de Faina é amigo de Cláudio e vice-versa.

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas,
$I[a]$ = Cláudio
$I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é irmão de y_I.
$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é gaúcho.
$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ torce pelo Grêmio.

$(\exists x)(p(x,a) \wedge q(x) \wedge r(x) \wedge r(a))$

w)

x)

Autran é um bom pai e ama todos os seus filhos.

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas,
$I[a]$ = Autran
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um bom pai.
$I[q(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filho de y_I.
$I[r(x,y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é amado por y_I

$(\forall x)(p(a) \wedge q(x,a) \wedge r(x,a))$

y)

Os filhos de Ana são os filhos de Nicolau. Ana ama seus filhos. Márcio é filho de Nicolau. Portanto, Ana ama Márcio.

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas,
$I[a] =$ Ana
$I[b] =$ Nicolau
$I[c] =$ Márcio
$I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filho de y_I.
$I[q(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I

$(\forall x)((p(x, a) \rightarrow p(x, b)) \wedge (p(x, a) \rightarrow q(x, a)) \wedge (p(c, b) \rightarrow q(c, a))$

z)

Os gatos e cachorros são animais domésticos

Seja I uma interpretação sobre um Conjunto de Animais

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é gato

$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é cachorro

$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é um animal doméstico

$(\forall x)(p(x) \rightarrow r(x)) \vee (\forall y)(q(y) \rightarrow r(y))$

aa)

Nenhum filho adolescente de Maria gosta de estudar.

Seja I uma interpretação sobre o Conjunto de filhos de Maria,

I[a]= Maria

$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é adolescente.

$I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ é filho de y_I.

$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ gosta de estudar.

$(\forall x)((p(x, a) \wedge r(x)) \rightarrow \neg q(x))$

bb)

Há pelo menos um cavalo branco

Seja I uma interpretação sobre um conjunto de cavalos

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é branco

$(\exists x)p(x)$

cc)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos cavalos tal que

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é branco. $(\exists x)\neg p(x)$

dd)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos homens e dos vegetais tal que

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é homem.

$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é mamífero.

$I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é tomate.

$I[s(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é vegetal.

$(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\forall y)(r(y) \rightarrow s(y))$

ee)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos homens tal que

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é feliz.

$(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)\neg p(x)$

ff)

Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos.

Seja I uma interpretação sobre um conjunto de pessoas

$I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I.

$(\exists x)(\forall y)\neg p(x, y) \rightarrow (\forall x)(\forall y)\neg p(x, y)$

gg)

Se todos nao amam todos, não existe alguém que não ame alguém.

Seja I uma interpretação sobre um conjunto de pessoas

$I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I$ ama y_I.

$(\forall x)(\forall y)\neg p(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)p(x, y)$

Exercício 10:

a)

Todo homem é mortal

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de pessoas do mundo.

$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I$ é mortal

$(\forall x)p(x)$

b)

Não é possível representar, pois possivelmente é considerado apenas na lógica Modal.

c)

Não é possível representar, pois o "tempo" não é considerado na Lógica de Predicados Clássica.

d)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação.
$I[p(x,y) = T \Leftrightarrow x_I$ *admira* y_I.
$(\forall x)(\exists y)p(x,y)$

e)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de alunos da minha turma, tal que, I[p(x,y)]=T $\Leftrightarrow$ x_i não gosta de y_i.
($\exists$ x)($\forall$ y) p(x,y)

f)

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de alunos de C.C., tal que I[p(x,y)]=T $\Leftrightarrow$ y_i detesta x_i.
($\exists$ x)($\forall$ y) p(x,y)

g)

Não é possível representar "necessariamente"na lógica de predicados.

h)

Não é possível representar, pois o "tempo" não é considerado na lógica de predicados clássica.

i)

Não é possível representar, pois a quantificação "quase todo" não é considerada na Lógica de Predicados.

j)

Não é possível representar, pois o "tempo" não é considerado na Lógica de Predicados Clássica.

k)

Toda regra tem exceção.
Suponha uma interprestação sobre os funcionários da Algar.
$i[px, y] = T$, se x_I é regra e y_I é exeção.
$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$

l)

Quase todo funcionário da Algar é um talento.
Suponha uma interprestação sobre os funcionários da Algar.
$I[p(x)] = T$ se x é funcionário.
$I[q(x)] = T$ se x é um talento.
$(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)(q(x)$

m)

Poucos funcionários da Algar não são empreendedores.
Suponha uma interprestação sobre os funcionários da Algar.
$I[p(x)] = T$ se x é funcionário.
$I[q(x)] = T$ se x é empreendedor.
$(\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists x)(\neg q(x))$

n)

O presidente da Algar é admirado por seus colaboradores. Suponha uma interprestação sobre os funcionários da Algar.
$I[p(x)] = T$ se x é funcionário.
$I[a] = T$ se a é presidente.
$I[q] = T$ se q é admira.
$(\forall x)(p(x) \wedge q(x, a))$

10

Propriedades semânticas da Lógica de Predicados

Exercício 1:

a)

H equivale a G = $\Leftrightarrow \forall$I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow \forall$I, {I[H] = T $\Leftrightarrow$ I[G] = T}
I[H] = T = $\Leftrightarrow$ I[($\forall$x)($\forall$y)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \forall$ d $\in$ U, <x $\leftarrow$ d> I[($\forall$y)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \forall$ d $\in$ U, $\forall$ e $\in$ U, <y $\leftarrow$ e><x $\leftarrow$ d> I[p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \forall$ e $\in$ U, $\forall$ d $\in$ U, <x $\leftarrow$ d><y $\leftarrow$ e> I[p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \forall$ e $\in$ U, <y $\leftarrow$ e> I[($\forall$x)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow$ I[($\forall$y)($\forall$x)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow$ I[G] = T

b)

H equivale a G = $\Leftrightarrow \forall$I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow \forall$I, {I[H] = T $\Leftrightarrow$ I[G] = T}
I[H] = T = $\Leftrightarrow$ I[($\exists$x)($\exists$y)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \exists$ d $\in$ U, <x $\leftarrow$ d> I[($\exists$y)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \exists$ d $\in$ U, $\exists$ e $\in$ U, <y $\leftarrow$ e><x $\leftarrow$ d> I[p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \exists$ e $\in$ U, $\exists$ d $\in$ U, <x $\leftarrow$ d><y $\leftarrow$ e> I[p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow \exists$ e $\in$ U, <y $\leftarrow$ e> I[($\exists$x)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow$ I[($\exists$y)($\exists$x)p(x,y,z)] = T
$\Leftrightarrow$ I[G] = T

c)

H equivale a G = $\Leftrightarrow \forall$I, I[H] = I[G]
$\Leftrightarrow \forall$I, {I[H] = T $\Leftrightarrow$ I[G] = T}
I[H] = T = $\Leftrightarrow$ I[$\neg$($\exists$x)p(y)] = T
$\Leftrightarrow$ I[($\exists$x)p(y)] = F

$\Leftrightarrow \forall$ d $\in$ U, $<$y $\leftarrow$ d$>$ I[p(y)] = F
$\Leftrightarrow \forall$ d $\in$ U, $<$y $\leftarrow$ d$>$ I[$\neg$p(y)] = T
$\Leftrightarrow$ I[($\forall$y)$\neg$p(y)] = T
$\Leftrightarrow$ I[G] = T

d)

H = ($\exists$ x)p(x)
G = ($\exists$ y)p(y)
I[H] = T $\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; pi(d) = T$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; < y \leftarrow d > I[p(y)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists y)p(y)] = T$
$\Leftrightarrow I[G] = T$

Logo H equivale a G

e)

H = ($\forall$ x)p(x)
G = ($\forall$ y)p(y)
I[H] = T $\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; pi(d) = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < y \leftarrow d > I[p(y)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall y)p(y)] = T$
$\Leftrightarrow I[G] = T$

Logo H equivale a G

f)

H = ($\forall$ x)($\forall$ x)p(x)
G = ($\forall$ x)p(x)
I[H] = T $\Leftrightarrow I[(\forall x)(\forall x)p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; \forall c \in U; < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T$
$\Leftrightarrow \forall d \in U; \forall c \in U; pi(c) = T$
$\Leftrightarrow \forall c \in U; pi(c) = T$
$\Leftrightarrow \forall c \in U; < x \leftarrow c > I[p(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[G] = T$

Logo H equivale a G

Exercício 2:

a)

Suponha por contradição, que H não é válida. Logo, por definição, existe uma interpretação I sobre um dominio U, tal que I[H] = F.

I[H] = F $\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \rightarrow p(a)] = F$

$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e I[p(a)] = F

$\Leftrightarrow$ $\forall$ d ε U; <x $\leftarrow$ d> I[p(x)] = T e I[p(a)] = F

$\Leftrightarrow$ $\forall$ d ε U; pI(d) = T e pI(a) = F

b)

Suponha por contradição, que H não é válida. Logo, por definição, existe uma interpretação I sobre um dominio U, tal que I[H] = F.

I[H] = F $\Leftrightarrow I[p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)] = F$

$\Leftrightarrow I[p(a)] = T$ e I[$(\exists x)p(x)$] = F

$\Leftrightarrow$ $\forall$ d ε U; <x $\leftarrow$ d> I[p(x)] = F e I[p(a)] = T

$\Leftrightarrow$ $\forall$ d ε U; pI(d) = F e pI(a) = T

Exercício 3:

H = $(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$
I[H]=F $\Leftrightarrow$ I[$(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y)) \rightarrow (\neg(\forall y)q(y,y))$] = F
$\Leftrightarrow$ I[$(\forall x)(\neg(\forall y)q(x,y))$]=T e I[$\neg(\forall y)q(y,y)$] = F
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ U; <x$\leftarrow$d> I[$\neg$ ($\forall$ y) q(x,y)]=T e I[($\forall$ y) q(y,y)] = T
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ U; <x$\leftarrow$d> I[($\forall$ y) q(x,y)]=F e $\forall$ c $\in$ U; <y$\leftarrow$c> I[q(y,y)] = T
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ U; $\exists$ e $\in$ U; <y$\leftarrow$e> <x$\leftarrow$d> I[q(x,y)]=F e $\forall$ c $\in$ U; <y$\leftarrow$c> I[q(y,y)] = T
$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ U; $\exists$ e $\in$ U; qi(d,e) = F e $\forall$ c $\in$ U; qi(c,c)=T

Seja por exemplo, uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais, onde:
I[q(x,y)] = T $\Leftrightarrow$ xi = yi
$\forall$ d $\in$ U; $\exists$ e $\in$ U; d $\neq$ e e $\forall$ c $\in$ U; c = c
Esta afirmação é verdadeira, logo a interpretação que torna H falsa, portanto H não é válida.

Exercício 4:

a)

b)

c)

d)

Falsa.
Seja U = conjunto dos números naturais e I [p(x,y)] = T $\Leftrightarrow$ y é sucessor de x

e)

Falsa. Análoga à resposta da letra d).

f)

Seja H = $(\exists x)$ $(p(x) \rightarrow r(x))$ e G = $(\forall x)$ $(p(x) \rightarrow (\exists x)$ $(r(x)$

$$
\begin{aligned}
I[H] = F &\Leftrightarrow I[(\exists x)\ (p(x) \rightarrow r(x))] = F \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U, <x \leftarrow d>\ I[(p(x) \rightarrow r(x)] = F \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U, <x \leftarrow d>\ I[(p(x)] = T \text{ e } I[(r(x)] = F \\
&\Leftrightarrow \forall\ d \in U, <x \leftarrow d>\ I[(p(x)] = T \text{ e } \forall\ d \in U, <x \leftarrow d>\ I[(r(x)] = F \\
&\Leftrightarrow I[(\forall x)\ (p(x)] = T \text{ e } I[(\exists x)\ (r(x)] = F \\
&\Leftrightarrow I[G] = F.
\end{aligned}
$$

Logo I[H] = F $\Leftrightarrow$ I[G] = F, e assim pelo lema 10.2 (pag. 185), I[H] = I[G]. Dessa forma concluímos que H equivale a G.

g)

$(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$

Por definição, $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$ é válida se, e somente se, $\forall$ int. I, $I[(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))] = T$

Mas, $(\forall x)(p(x) \vee r(x))$ implica $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$ se, e somente se, $\forall$ int. I, se $I[(\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T$, então $I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))] = T$

Então, seja uma int. I, sobre um domínio U; $I[(\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T$.

$$
\begin{aligned}
I[(\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T &\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[(p(x) \vee r(x)] = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e/ou}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< x \leftarrow d > I[r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e/ou} \\
& \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[r(x)] = T \\
\Rightarrow\ & I[(\forall x)p(x)] = T \text{ ou } I[(\forall x)r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & I[(\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T
\end{aligned}
$$

Portanto, se $(\forall x)(p(x) \vee r(x))$ implica $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$, então $I[(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))] = T$, ou seja, $(\forall x)(p(x) \vee r(x)) \rightarrow ((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$ é válida.

h)

$((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$

Por definição, $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$ é válida se, e somente se, $\forall$ int. I, $I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T$

Mas, $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$ implica $(\forall x)(p(x) \vee r(x))$ se, e somente se, $\forall$ int. I, se $I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))] = T$, então $I[(\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T$

Então, seja uma int. I, sobre um domínio U; $I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))] = T$

$$
\begin{aligned}
I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)] = T \Leftrightarrow\ & I[(\forall x)p(x)] = T \text{ e/ou } I[(\forall x)r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \text{ e/ou} \\
& \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] \text{ e/ou} \\
& < x \leftarrow d > I[r(x)] = T \\
\Rightarrow\ & \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] \text{ ou} \\
& < x \leftarrow d > I[r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & I[(\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T
\end{aligned}
$$

Portanto, se $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x))$ implica $(\forall x)(p(x) \vee r(x))$, então $I[((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))] = T$, ou seja, $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \vee r(x))$ é válida.

i)

$(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

Por definição, $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$ é válida se, e somente se, $\forall$ int. I, $I[(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))] = T$

Mas, $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x))$ implica $((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$ se, e somente se, $\forall$ int. I, se $I[(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x))] = T$, então $I[((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))] = T$

Então, seja uma int. I, sobre um domínio U; $I[(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x))] = T$

$$
\begin{aligned}
I[(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x))] = T \Leftrightarrow\ & \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x) \leftrightarrow r(x)] = T \\
\Leftrightarrow\ & \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] \text{ é igual a } < x \leftarrow d > I[r(x)] \\
\Leftrightarrow\ & \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] \text{ é igual a } \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[r(x)]
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x)] = T$ é igual a
$\exists d \in U; < x \leftarrow d > I[r(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T$ é igual $I[(\exists x)r(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = I[(\exists x)r(x)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x)] = T$

Portanto, se $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x))$ implica $((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$, então $I[(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))] = T$, ou seja, $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$ é válida.

j)

k)

l)

m)

n)

o)

p)

Seja uma interpretação I sobre o domínio U, tal que $I[H] = F$

$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\forall y)p(y) \rightarrow (\forall x)p(x)] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall y)p(y)] = T$ e $I[(\forall x)p(x)] = F$
$\Leftrightarrow \forall d \in U, < y \leftarrow d > I[p(y)] = T$ e $\exists s \in U, < x \leftarrow s > I[p(x)] = F$
Logo, se $I[H] = F$, então H é tautologia e é válida.

q)

Seja uma interpretação I, sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$
$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)p(x) \rightarrow p(x)] = F$
$\Leftrightarrow I[(\exists x)p(x)] = T$ e $I[p(x)] = F$
Logo, se $I[H] = F$, então H é tautologia e é válida.

r)

Seja uma interpretação I, sobre um domínio U, tal que $I[H] = F$
$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x) \rightarrow p(x)] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T$ e $I[p(x)] = F$
Logo, se $I[H] = F$, então H é tautologia e é válida.

s)

I[H]=F $\Leftrightarrow$ I[p(x)]$\rightarrow$($\exists$ x)p(x)]=F

$\Leftrightarrow$ I[p(x)]=T e I[($\exists$ x)p(x)]=F

$\Leftrightarrow$ $I[p(x)] = T$ e $\forall$ d $\in$ D, <x $\leftarrow$ d> I[p(x)]=F

$\Leftrightarrow$ $\forall$ d $\in$ D $p_I(x_I) = T$ e $p_I(d) = F$

A afirmação acima é falsa. Logo a suposição inicial é falsa, o que significa que I[H] = T.

Exercício 5:

a)

Sim. Fazendo H = p(y) e G = p(y)

Fazendo A = $(\forall x)(H \rightarrow G)$

Fazendo B = $(\exists x)(H \rightarrow G)$

$A \leftrightarrow B$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ int I, I[A]=I[B]

$\Leftrightarrow$ $\forall$ int. I, I[A]=F $\Leftrightarrow$ I[B]=F

Mas I[A]=F $\Leftrightarrow$ $I[(\forall x)(H \rightarrow G)]$ = F

$\Leftrightarrow I[(\forall x)(p(y) \rightarrow p(y))] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in D; < x \leftarrow d > I[p(y)] = Te < x \leftarrow d > I[p(y)] = F$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ d $\in$ D; $p_I(y_I)$=T e $p_I(y_I)$=F

Afirmação Falsa logo I[A]=T

$I[B] = F \Leftrightarrow I[(\exists)(H \rightarrow G)] = F$

$\Leftrightarrow \forall d \in D; < x \leftarrow d >$ I[H]=T e $< x \leftarrow d >$ I[G]=F

$\Leftrightarrow \forall d \in D; < x \leftarrow d >$ I[p(y)]=T e $< x \leftarrow d >$ I[p(y)]=F

$\Leftrightarrow \forall d \in D$; $p_I(y_I)$=T e $p_I(y_I)$=F

A afirmação acima é falsa, logo, I[B]=T

Como I[A] = I[B], então I[H] = T

b)

Sim basta fazer H = *true* e G=p(x).

Exercício 6:

Exercício 7:

a)

$(\forall \breve{x})$G e G

$(\forall \breve{x})$ equivale a G $\Leftrightarrow$ para toda interpretaçao I, $I[(\forall x)G] = I[G]$.

Mas, $I[(\forall x)G] = I[G] \Leftrightarrow \{I[(\forall x)G] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$

$I[(\forall x)G] = T \Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[G] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; I[G] = T$ (Como x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow I[G] = T$

b)

$(\exists \breve{x})$G e G

$((\exists x)$G) equivale a G $\Leftrightarrow$ para toda interpretaçao I, I[$(\exists x)$G] = I[G].

Mas, I[$(\exists x)$G] = I[G] $\Leftrightarrow$ {I[$(\exists x)G] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$

I[$(\exists x)$G] = T $\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[G] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; I[G] = T$ (Como x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow$ I[G] = T

c)

$(\forall \breve{x})(H \wedge G)$ e $((\forall \breve{x})H \wedge G)$

$E_1 = (\forall x)(H \wedge G)$

$E_2 = ((\forall x)H \wedge G)$

E_1 equivale $E_2 \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[E_1] = I[E_2]$.

Mas, $I[E_1] = I[E_2] \Leftrightarrow \{I[E_1] = T \Leftrightarrow I[E_2] = T\}$

$I[E_1] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)(H \wedge G)] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H \wedge G] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = T$ e $< x \leftarrow d > I[G] = T$

$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = T$ e $I[G] = T$ (Como x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = T$ e $I[G] = T$

$\Leftrightarrow I[E_2] = T$

d)

$(\exists\check{x})(H \wedge G)$ e $((\exists\check{x})H \wedge G)$

$E_1 = ((\exists x)H \wedge G)$

$E_2 = (\exists x)(H \wedge G)$

E_2 equivale $E_1 \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[E_0] = I[E_1]$.

Mas, $I[E_2] = I[E_1] \Leftrightarrow \{I[E_2] = T \Leftrightarrow I[E_7] = T\}$

$I[E_1] = T \Leftrightarrow I[(\exists x)(H \wedge G)] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H \wedge G] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = T$ e $< x \leftarrow d > I[G] = T$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = T$ e $I[G] = T$ (Como x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow I[(\exists x)H] = T$ e $I[G] = T$

$\Leftrightarrow I[E_1] = T$

e)

$(\forall\check{x})(H \vee G)$ e $((\forall\check{x})H \vee G)$

$E_1 = ((\forall x)H \vee G)$

$E_2 = (\forall x)(H \vee G)$

E_2 equivale $E_1 \Leftrightarrow$ para toda inperpretação I, $I[E_2] = I[E_1]$.

Mas, $I[E_2] = I[E_1] \Leftrightarrow \{I[E_2] = F \Leftrightarrow I[E_1] = F\}$

$I[E_2] = F \Leftrightarrow I[(\forall x)(H \vee G)] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H \vee G] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F$ e $< x \leftarrow d > I[G] = F$

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F$ e $I[G] = F$ (Como x não ocorre livre em G)

$\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = F$ e $I[G] = F$

$\Leftrightarrow I[E_1] = F$

f)

$(\exists\check{x})(H \vee G)$ e $((\exists\check{x})H \vee G)$

$E_1 = ((\exists\check{x})H \vee G)$

$E_2 = (\exists\check{x})(H \vee G)$

E_2 equivale $E_1 \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[E_2] = I[E_1]$.

Mas, $I[E_2] = I[E_1] \Leftrightarrow \{I[E_2] = F \Leftrightarrow I[E_1] = F\}$

$I[E_2] = F \Leftrightarrow I[(\exists\check{x})(H \vee G)] = F$

$$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H \vee G] = F$$
$$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F \text{ e } < x \leftarrow d > I[G] = F$$
$$\Leftrightarrow \forall d \in U; < x \leftarrow d > I[H] = F \text{ e } I[G] = F \text{ (Como } x \text{ não ocorre livre em } G)$$
$$\Leftrightarrow I[(\exists x)H] = F \text{ e } I[G] = F$$
$$\Leftrightarrow I[E_1] = F$$

g)

$E1 = (\forall \check{x})(H \rightarrow G)$ e $E2 = ((\exists \check{x})H \rightarrow G)$ considerando que $< x \leftarrow d > I[G] = T \Leftrightarrow I[G] = T$

E1 eq. E2 $\Leftrightarrow \forall$ int. $I, I[E1] = F \Leftrightarrow I[E2] = F$

$I[E1] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall \check{x})(H \rightarrow G)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H \rightarrow G] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T\ e\ \ < x \leftarrow d > I[G] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T\ e\ I[G] = F$
$\Leftrightarrow I[(\exists \check{x})H] = T\ e\ I[G] = T$
$\Leftrightarrow I[E2] = F$

h)

$E1 = (\forall \check{x})(G \rightarrow H)\ e\ E2 = (G \rightarrow (\forall \check{x})H)$

$E1\ eq.\ E2 \Leftrightarrow \forall\ int.\ I, I[E1] = F\ e\ I[E2] = F$

$I[E1] = F \Leftrightarrow I[(\forall \check{x})(G \rightarrow H)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[(G \rightarrow H)] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[G] = T\ e\ \ < x \leftarrow d > I[H] = F$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, I[G] = T\ e < x \leftarrow d > I[H] = F$
$\Leftrightarrow I[G] = T\ e\ I[(\forall \check{x})H] = F$
$\Leftrightarrow I[(G \rightarrow (\forall \check{x})H)] = F$
$\Leftrightarrow I[E2] = F$

i)

$E2 = (\exists x)(H \rightarrow G)\ e\ E1 = ((\forall x)H \rightarrow G)$

$E2\ eq.\ E1 \Leftrightarrow \forall\ int. I, I[E2] = F \Leftrightarrow I[E1] = F$

$I[E2] = F \Leftrightarrow I[(\exists x)(H \rightarrow G)] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d\ \in U, < x \leftarrow d > I[H \rightarrow G] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d\ \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T\ e\ \ < x \leftarrow d > I[G] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d\ \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T\ e\ I[G] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = T\ e\ I[G] = F$
$\Leftrightarrow I[E1] = F$

j)

$E1 = (\exists\check{x})(G \rightarrow H) \ e \ E2 = (G \rightarrow (\exists\check{x})H)$

$E2 \ eq. \ E1 \Leftrightarrow \forall \ int.I, I[E1] = F \ e \ I[E2] = F$

$I[E1] = F \Leftrightarrow I[(\exists\check{x})(G \rightarrow H)] = F$
$\Leftrightarrow \forall \ d \in U, < x \leftarrow d > I[G \rightarrow H] = F$
$\Leftrightarrow \forall \ d \in U, < x \leftarrow d > I[G] = T \ e \ < x \leftarrow d > I[H] = F$
$\Leftrightarrow I[G] = T \ e \ I[(\exists\check{x})H] = F$
$\Leftrightarrow I[G- > (\exists\check{x})H] = F$
$\Leftrightarrow I[E2] = F$

Exercício 8:

a)

E1 = (∀ x)(H ∧ G) e E2=(∀ x)H ∧ (∀ x)
E1 equivale a E2 ⇔ ∀ interpretação I, I[E1]=T ⇔ I[E2]=T
I[E1]=T ⇔ I[(∀ x)(H ∧ G)]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[(H ∧ G)]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H]=T e <x ↩ d> I[G]=T
⇔ I[(∀ x) H]=T e I[(∀ x) G]=T
⇔ I[(∀ x) H ∧ (∀ x) G]=T
⇔ I[E2]=T

b)

E1 = (∀ x)(H ∨ G) e E2=(∀ x)H ∨ (∀ x)G
E2 implica E1 ⇔ ∀ interpretação I, Se I[E2]=T então I[E1]=T
I[E2]=T ⇔ I[(∀ x)H ∨ (∀ x)G]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H ∨ (∀ x)G]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H]=T ou I[(∀ x)G]=T
⇔ ∀ d ∈ U, ∀ c ∈ U, <x ↩ d> I[H]=T ou <x ↩ c> I[G]=T
⇒ ∀ b ∈ U, <x ↩ b> I[H ∨ G]=T
⇔ I[(∀ x)(H ∨ G)]=T
⇔ I[E1]=T

E1 não implica E2 ⇔ ∀ interpretação I, Se I[E1]=T então I[E2]=F
I[E1]=T ⇔ I[(∀)(H ∨ G)]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H ∨ G]=T
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H]=T ou <x ↩ d> I[G]=T
⇔ I[(∀ x) H]=T ou I[(∀ x) G]=T
⇔ I[(∀ x) H ∨ (∀ x) G]=T
⇔ I[E2]=T

c)

E1= (∃ x)(H ∨ G) e E2=(∃ x) H ∨ (∃ x) G, então E1 equivale E2.
E1 equivale E2 ⇔ ∀ interpretação I, I[E1]=I[E2]
⇔ ∀ interpretação I, I[E1]=F ⇔ I[E2]=F

I[E1]=F ⇔ I[(∃ x)(H ∨ G)]=F
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H ∨ G]=F
⇔ ∀ d ∈ U, <x ↩ d> I[H]=F e <x ↩ d> I[G]=F
⇔ I[(∃ x)H]=F e I[(∃ x)G]=F

d)

$E1eq.E2 \Leftrightarrow \forall\ int.\ I, I[E1] = F\ e\ I[E2] = F$

$I[E1] = F \Leftrightarrow I[(\exists \check{x})(H \to G)] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H \to G] = F$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T\ e\ \ < x \leftarrow d > I[G] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall \check{x} H) \to (\exists \check{x})G] = F$
$\Leftrightarrow I[E2] = F$

e)

Se $E1 = (\exists \check{x})(H \to G)$ e $E2 = (\forall \check{x})H \to (\forall \check{x})G$, então E2 implica E1, mas E1 não implica E2.

$E2\ implica\ E1 \Leftrightarrow \forall\ int.\ I,\ se\ I[E2] = T,\ ento\ I[E1] = T$
$I[E2] = T \Leftrightarrow I[(\exists \check{x})(H \to G)] = T$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H \to G] = T$
$\Leftrightarrow \exists\ d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F\ e\ \ < x \leftarrow d > I[G] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)H] = F\ e\ I[(\forall x)G] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)H \to (\forall x)G] = T$
$\Leftrightarrow I[E2] = T$

f)

$E1$ não implica em $E2$, portanto $I[E1] = T$ e $I[E2] = F$.
Suponha o contra exemplo no universo dos números natuarais.
$I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I\ \ divisvel\ por\ 3.$
$I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I\ \ mpar.$

Nesse caso, $I[(\forall x)(p(x) \to q(x))] = T$
$\Leftrightarrow \forall\ d \in N, < x \leftarrow d > I[p(x)] = T\ e\ \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T$
ou
$\Leftrightarrow \forall\ d \in N, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F\ e\ \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = F$
ou
$\Leftrightarrow \forall\ d \in N, < x \leftarrow d > I[p(x)] = F\ e\ \ < x \leftarrow d > I[q(x)] = T$

Exercício 9:

a)

$\forall d \in D, < x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$
pelo lema 10.1

$$< x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$$

se e somente se,

$$< x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T \Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T$$

mas
$< x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T \Leftrightarrow \exists\ c \in U, < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x,y)] = T$
$\Leftrightarrow \exists\ c \in U, \forall\ c \in U, < x \leftarrow c >< y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = T$**cqd.**

b)

$\forall d \in D, < x \leftarrow d > I(\forall x)p(x,y)] = I(\forall x)p(x,y)]$
pelo lema 10.1

$$< x \leftarrow d > I(\forall x)p(x,y)] = I(\forall x)p(x,y)]$$

se e somente se,

$$< x \leftarrow d > I(\forall x)p(x,y)] = T \Leftrightarrow I(\forall x)p(x,y)] = T$$

mas
$< x \leftarrow d > I(\forall x)p(x,y)] = T \Leftrightarrow I\forall\ c \in U, < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x,y)] = T$
$\Leftrightarrow I(\forall x)p(x,y)] = T$**cqd.**

c)

$\forall d \in D, < x \leftarrow d > I[q(y) = I[q(y)]$ pelo lema 10.1

$$< x \leftarrow d > I[q(y) = I[q(y)]$$

se e somente se,

$$< x \leftarrow d > I[q(y) = T \Leftrightarrow I[q(y)] = T$$

mas,
$< x \leftarrow d > I[q(y)] = T \Leftrightarrow I[q(y)] = T$**cqd.**

Exercício 10:

a)

b)

Exercício 11:

a)

H = (∀ x)(∃ z)(∃ y) p(x,z,y)
Hs = (∀ x)p(x,g(x),f(x))
I[H] = F $\Leftrightarrow I[(\forall x)(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)] = F$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[(\exists z)(\exists y)p(x,z,y)] = F$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; \forall b \in U; < z \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x,z,y)] = F$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; \forall b \in U; \forall c \in U; < y \leftarrow c >< z \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[p(x,z,y)] = F$
$\Leftrightarrow \exists d \in U; \forall b \in U; \forall c \in U; pi(d,b,c) = F$

Portanto, existe um d ∈ U tal que para qualquer escolha de b e c, temos que pi(d,b,c) = F. Dados f e g funções tais que: fi(d)=c e gi(d)=b, logo pi(d,gi(d),fi(d))=F

$\Leftrightarrow \exists d \in U; \forall b \in U; \forall c \in U; pi(d,b,c) = F$
$\Rightarrow \exists d \in U; pi(d, gi(d), fi(d)) = F$, onde f e g sao funções tais que: fi(d)=c e gi(d)=b

$\Leftrightarrow \exists d \in U; < x \leftarrow d > I[p(x, g(x), f(x))] = F$
$\Leftrightarrow I[(\forall x)p(x, g(x), f(x))] = F$
$\Leftrightarrow I[Hs] = F$

Como I e uma intepretação qualquer, concluímos que para toda interpretação I, I[Hs]=F.
Portanto, se H e insatisfatível, então Hs e insatisfatível.

b)

Usa indução no comprimento das fórmulas.

Exercício 12:

a)

$H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(x)$

b)

c)

Exercício 13:

a)

¬(∀ *)H equivale a (∃ *)¬ H
$\Leftrightarrow \forall int I, I[\neg(\forall *)H] = I[(\exists *)\neg H]$
$\Leftrightarrow \forall int I, I[\neg(\forall *)H] = T \Leftrightarrow I[(\exists *)\neg H] = T$
$I[\neg(\forall *)H] = T \Leftrightarrow I[(\forall *)H] = F \Leftrightarrow I[(\forall x1)...(\forall xn)H] = F$
$\Leftrightarrow \exists d1 \in U; ...; \exists dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[H] = F$
$\Leftrightarrow \exists d1 \in U; ...; \exists dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[\neg H] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists x1)...(\exists xn)\neg H] = T$
$\Leftrightarrow I[(\exists *)\neg H] = T$

b)

¬(∃ *)H equivale a (∀ *)¬ H
$\Leftrightarrow \exists int I, I[\neg(\exists *)H] = I[(\forall *)\neg H]$
$\Leftrightarrow \exists int I, I[\neg(\exists *)H] = T \Leftrightarrow I[(\forall *)\neg H] = T$
$I[\neg(\exists *)H] = T \Leftrightarrow I[(\exists *)H] = F \Leftrightarrow I[(\exists x1)...(\exists xn)H] = F$
$\Leftrightarrow \forall d1 \in U; ...; \forall dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[H] = F$
$\Leftrightarrow \forall d1 \in U; ...; \forall dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[\neg H] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall x1)...(\forall xn)\neg H] = T$
$\Leftrightarrow I[(\forall *)\neg H] = T$

c)

(∀ *)H é válida se, e somente se H é válida
$\forall int I, I[(\forall *)H] = T \Leftrightarrow I[H] = T$
$I[(\forall *)H] = T \Leftrightarrow I[\forall x1)...(\forall xn)H] = T$
$\Leftrightarrow \forall d1 \in U; ...; \forall dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[H] = T$
$\Leftrightarrow I[H] = T$

Como H é válida, logo não e necessário interpretar o quantificador universal para decidir sobre sua validade, assim,(∀ *) H também e válida.

d)

(∃ *)H é satisfatível se, e somente se H é satisfatível
$\exists int I, I[(\exists *)H] = T \Leftrightarrow I[H] = T$
$I[(\exists *)H] = T \Leftrightarrow I[\exists x1)...(\exists xn)H] = T$
$\Leftrightarrow \exists d1 \in U; ...; \exists dn \in U; < xn \leftarrow dn > ... < xn \leftarrow dn > I[H] = T$
$\Leftrightarrow I[H] = T$

Como existe interpretacao que torna (∃ *)H = T, entao, existe interpretacao que torna H=T

e)

H $\vdash G \Leftrightarrow \forall$ int I; I[H]=T então I[G]=T
$\Leftrightarrow \forall int I; I[H \rightarrow G] = T$
$\Leftrightarrow \forall int I; I[(\forall *)H \rightarrow G] = T$

f)

H = G $\Leftrightarrow \forall$ int I; I[H]=I[G]
$\Leftrightarrow \forall int I; I[H \leftrightarrow G] = T$
$\Leftrightarrow \forall int I; I[(\forall *)H \leftrightarrow G] = T$

Exercício 14:

a)

b)

c)

d)

Exercício 15:

a)

H = (p(x) $\vee$ ¬p(x)).

b)

H = (p(a) $\vee$ ¬p(a)).

c)

H = (p(x) $\vee$ ¬($\forall$x)p(x)).

d)

Não. Se uma dada fórmula é válida, então a insercão o quantificador universal não altera sua validade.

Exercício 16:

a)

b)

c)

Exercício 17:

a)

b)

c)

d)

Exercício 18:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

Toda mulher bonita, inteligente e sensível é observada. Nenhuma filha de Sr. Arnaldo é observada. Mulher que não é observada não se casa, portanto as filhas do Sr. Arnaldo não se casarão.

Seja I uma interpretação sobre um conjunto de pessoas.

I[p(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I é mulher bonita, inteligente e sensível.

I[q(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I é observada

I[r(x,y)] = T$\Leftrightarrow$ x_I é filha de y_I

I[a] = Arnaldo

I[s(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I se casa.

$(\forall x)(\forall y)((p(x) \to q(x)) \land (r(y,a) \to \neg q(x)) \land (\neg q(x) \to \neg s(x))) \to (r(y,a) \to \neg s(y))$

h)

Se há fé há amor. Se há amor há paz. Se há paz há Deus.Se há Deus nada faltará.

Seja I uma interpretação sobre os sentimentos de uma pessoa.

I[p(x)] = T $\Leftrightarrow x_I$ tem fé.

I[q(x)]=T $\Leftrightarrow x_I$ tem amor.

I[r(x)]=T $\Leftrightarrow x_I$ tem paz.

I[s(x)]=T $\Leftrightarrow x_I$ tem Deus.

I[$p_1(x)$]=T $\Leftrightarrow$ nada faltará a x_I.

((∃ x)(p(x)→ q(x)))∧ ((∃ x) (q(x)→ r(x)))∧ (∃ x)(r(x)→ s(x))∧(∃ x s(x)→ $p_1(x)$)

i)

Quem não se ama não ama ninguém

Seja I uma interpretação sobre um conjunto de Pessoas:

I[p(x,y)] = T $\Leftrightarrow x_I$ não ama y_I

$(\exists x)(\forall x)(\neg(p(x,x) \rightarrow \neg p(x,y))$

j)

Uma condição necessária e suficiente para que um individuo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.

Seja I uma interpretação sobre o conjunto de pessoas tal que I[p(x)]=T $\Leftrightarrow x_I$ é produtivo, I[q(x)]=T$\Leftrightarrow x_I$ é esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações. A tradução da sentença na lógica de predicados é H=($\forall x$)(p(x)↔ q(x)).

Supondo I[H]=F

⇔ I[(∀ x)(p(x)↔ q(x))] = F

Mas I[($\forall x$)(p(x)↔ q(x))] = F ⇔ ∃ d ∈ D, <x← d> I[p(x)↔ q(x)] =F

⇔ ∃ d ∈ D, <x← d> I[p(x)]=T e <x← d> q(x)] =F

ou ainda

⇔ $\exists d \in$ D, <x← d> I[p(x)]=F e <x← d> q(x)] =T

⇔ $\exists d \in$ D, $p_I(d)$=T e $q_I(d)$=F

ou ainda

⇔ $\exists d \in$ D, $p_I(d)$=F e $q_I(d)$=T

Acima não aconteceu nenhum absurdo, logo é possível ter interpretação falsas.

Supondo a sentença verdadeira, também não é possível encontrar nenhum absurdo.

Conclusão: A tradução da senteça pode nos dar interpretações verdadeiras e interpretações falsas. O que nos permite dizer que é satisfatível, mas não é tautologia.

Exercício 19:

H_1 = Toda mulher dócil tem um amado.

H_2 = Se existe mulher dócil, toda mulher tem um amado.

Seja I uma interpretação sobre o conjunto das pessoas tal que

I[p(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I é mulher

I[s(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I é dócil

I[q(x)] = T $\Leftrightarrow$ x_I é homem

I[r(x,y)] = T $\Leftrightarrow$ x_I ama y_I

$H_1 = (\forall x)((p(x) \land s(x)) \to (\exists y)(q(y) \land r(y,x)))$

$H_2 = (\exists x)(p(x) \land s(x)) \to (\forall x)(\exists y)(q(y) \land r(y,x))$

a)

H_1 não implica H_2, logo a afirmação é falsa.

b)

H_2 implica H_1.

Exercício 20:

A sentença é representada por: $H = ((\exists x)(p_1(x) \land r(x) \land \neg s(x)) \land (\forall x)(p_1(x) \to (p(x) \land r(x))) \land (\forall x)(q(x) \to r_1(x))) \to (\exists x)(p(x) \land r(x) \land \neg q(x))$

11

Programação Lógica

Exercício 1:

a)

b)

c)

Exercício 2:

a)

$\theta\sigma = \{x \leftarrow f(x,y)\sigma,\ y \leftarrow g(x,y)\sigma,\ z \leftarrow x\sigma,\ x \leftarrow z,\ y \leftarrow x\}$
$= \{x \leftarrow f(z,x),\ y \leftarrow g(z,x),\ z \leftarrow z,\ x \leftarrow z,\ y \leftarrow x\}$
$= \{x \leftarrow f(z,x),\ y \leftarrow g(z,x)\}$

$\sigma\theta = \{x \leftarrow z\theta,\ y \leftarrow x\theta,\ x \leftarrow f(x,y),\ y \leftarrow g(x,y),\ z \leftarrow x\}$
$= \{x \leftarrow z,\ y \leftarrow z,\ x \leftarrow f(x,y),\ y \leftarrow g(x,y),\ z \leftarrow x\}$
$= \{x \leftarrow z,\ y \leftarrow z,\ z \leftarrow x\}$

b)

$\theta = \{\text{x} \hookleftarrow \text{y, y} \hookleftarrow \text{z, z} \hookleftarrow \text{x}\}$
$\alpha = \{\text{x} \hookleftarrow \text{z, y} \hookleftarrow \text{x}\}$

$\theta\alpha$
$\theta\alpha = \{\text{x} \hookleftarrow \text{y } \alpha\text{, y} \hookleftarrow \text{z } \alpha\text{, z} \hookleftarrow \text{x } \alpha\text{, x} \hookleftarrow \text{z, y} \hookleftarrow \text{x}\}$
$\theta\alpha = \{\text{x} \hookleftarrow \text{x, y} \hookleftarrow \text{z, z} \hookleftarrow \text{z, x} \hookleftarrow \text{z, y} \hookleftarrow \text{x}\}$
$\theta\alpha = \{\text{x} \hookleftarrow \text{x, y} \hookleftarrow \text{z, z} \hookleftarrow \text{z}\}$
$\theta\alpha = \{\text{y} \hookleftarrow \text{z}\}$

$\alpha\theta$
$\alpha\theta = \{\mathrm{x} \hookleftarrow \mathrm{z}\ \theta, \mathrm{y} \hookleftarrow \mathrm{x}\ \theta, \mathrm{x} \hookleftarrow \mathrm{y}, \mathrm{y} \hookleftarrow \mathrm{z}, \mathrm{z} \hookleftarrow \mathrm{x}\}$
$\alpha\theta = \{\mathrm{x} \hookleftarrow \mathrm{x}, \mathrm{y} \hookleftarrow \mathrm{y}, \mathrm{x} \hookleftarrow \mathrm{y}, \mathrm{y} \hookleftarrow \mathrm{z}, \mathrm{z} \hookleftarrow \mathrm{x}\}$
$\alpha\theta = \{\mathrm{x} \hookleftarrow \mathrm{x}, \mathrm{y} \hookleftarrow \mathrm{y}, \mathrm{z} \hookleftarrow \mathrm{x}\}$
$\alpha\theta = \{\mathrm{z} \hookleftarrow \mathrm{x}\}$

Exercício 3:

θ é o mais geral que σ, pois:
$\sigma = \theta\{x \leftarrow f(x),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\}$
$= \{x \leftarrow g(x,y,z)\{x \leftarrow f(x),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\},\ z \leftarrow w\{x \leftarrow f(x),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\},\ x \leftarrow f(x),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\}$
$\sigma = \{x \leftarrow g(f(x),z,z),\ z \leftarrow z,\ x \leftarrow f(x),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\}$
$\sigma = \{x \leftarrow g(f(x),z,z),\ y \leftarrow z,\ w \leftarrow z\}$
cqd.

Exercício 4:

a)

σ é o mais geral que θ e θ é mais geral que σ;

Supondo que: $\sigma = \{y \leftarrow x\}$, $\theta = \{x \leftarrow y\}$ e $\phi\{x \leftarrow y\}$
por definição: $\sigma = \theta\phi$
$\sigma = \{y \leftarrow x\}$
$\sigma = \{y \leftarrow x\phi, \phi\}$
$\sigma = \{(y \leftarrow x, x \leftarrow y), x \leftarrow y\}$
$\sigma = \{y \leftarrow y, x \leftarrow y\}$
$\sigma = \{x \leftarrow y\}$ **cqd.**

Supondo agora que $\phi\{y \leftarrow x\}$
por definição: $\theta = \sigma\phi$
$\theta = \{x \leftarrow y\}$
$\theta = \{x \leftarrow y\phi, \phi\}$
$\theta = \{(x \leftarrow y, y \leftarrow x), y \leftarrow x\}$
$\theta = \{x \leftarrow x, y \leftarrow x\}$
$\theta = \{y \leftarrow x\}$ **cqd.**

b)

$\theta\sigma = \{\}$, e $\sigma\theta = \{\}$.
Supondo que: $\theta\{x \leftarrow y, y \leftarrow x\}$ e $\sigma = \{y \leftarrow x, x \leftarrow y\}$

$\theta\sigma = \{x \leftarrow y\sigma, y \leftarrow x\sigma, \sigma\}$
$\theta\sigma = \{x \leftarrow x, y \leftarrow y, y \leftarrow x, x \leftarrow y\}$

$\theta\sigma = \{x \leftarrow x, y \leftarrow y\}$
$\theta\sigma = \{\}$ **cqd.**

$\sigma\theta = \{y \leftarrow x\theta, x \leftarrow y\theta, \theta\}$
$\sigma\theta = \{y \leftarrow y, x \leftarrow x, x \leftarrow y, y \leftarrow x\}$
$\sigma\theta = \{y \leftarrow y, x \leftarrow x\}$
$\sigma\theta = \{\}$ **cqd.**

Exercício 5:

a)

S = { p(x) $\rightarrow$ q(z), p(g(z)) $\rightarrow$ q(x) }
Passo 1: k = 0, $\Theta_0 = \{\}$
Passo 2: k = 0, $\Theta_0 = \{\}$
- $|S\Theta_0| \neq 1$, $D_0 = \{x, g(z)\}$
Passo 3: x não ocorre em g(z)
- $\Theta_1 = \{x \hookleftarrow g(z)\}$, k = 1
Passo 2: k = 1, $\Theta_1 = \{x \hookleftarrow g(z)\}$
- $|S\Theta_1| \neq 1$, $D_1 = \{z, g(z)\}$
Passo 3: z não ocorre em g(z)
- S não é unificável.

b)

S = { p(x, h(y), f(g(a))), p(a, w, f(z)), p(y, h(x), f(g(b))) }
Passo 1: k = 0, $\Theta_0 = \{\}$
Passo 2: k = 0, $\Theta_0 = \{\}$
- $|S\Theta_0| \neq 1$, $D_0 = \{x, a\}$
Passo 3: x não ocorre em a
- $\Theta_1 = \{x \hookleftarrow a\}$, k = 1
Passo 2: k = 1, $\Theta_1 = \{x \hookleftarrow a\}$
- $|S\Theta_1| \neq 1$, $D_1 = \{y, a\}$
Passo 3: y não ocorre em a
- $\Theta_2 = \{y \hookleftarrow a\}$, k = 2
Passo 2: k = 2, $\Theta_2 = \{x \hookleftarrow a, y \hookleftarrow a\}$
- $|S\Theta_2| \neq 1$, $D_2 = \{w, h(a)\}$
Passo 3: w não ocorre em h(a)
- $\Theta_3 = \{w \hookleftarrow h(a)\}$, k = 3
Passo 2: k = 3, $\Theta_3 = \{x \hookleftarrow a, y \hookleftarrow a, w \hookleftarrow h(a)\}$
- $|S\Theta_3| \neq 1$, $D_3 = \{z, g(a)\}$
Passo 3: z não ocorre em g(a)
- $\Theta_4 = \{z \hookleftarrow g(a)\}$, k = 4
Passo 2: k = 4, $\Theta_4 = \{x \hookleftarrow a, y \hookleftarrow a, w \hookleftarrow h(a), z \hookleftarrow g(a)\}$
- $|S\Theta_4| \neq 1$, $D_4 = \{g(a), g(b)\}$
Passo 3: não existe variável em D_4. S não é unificável

c)

S=$\{p(x, f(y)) \rightarrow q(z), p(a, f(g(y))) \rightarrow q(w)\}$

passo 1: k=0 $\theta 0 = \{\}$

passo 2: Sθ0 = S{}=S
|Sθ0| $\neq$ 1 D0 = {x,a}

passo 3: x,a $\in$ D0, e x não ocorre em a
$\theta 1 = \theta 0$ {x$\hookleftarrow$a} = {x$\hookleftarrow$a}
k=1

passo 2: Sθ1 = {p(a,f(y)) $\rightarrow$ q(z), p(a,f(g(y)))$\rightarrow$ q(w))}
|Sθ1| $\neq$ 1 D1 = {y,g(y)}

passo 3: y,g(y) $\in$ D1, mas y ocorre em g(y) Pare!
Logo S não e unificãvel.

d)

S=$\{p(x, f(y)) \rightarrow q(z), p(g(z), f(w)) \rightarrow q(w), p(y, f(g(b))) \rightarrow q(g(c))\}$

passo 1: k=0 $\theta 0 = \{\}$

passo 2: Sθ0 = S{}=S
|Sθ0| $\neq$ 1 D0 = {x,y, g(z)}

passo 3: x,y, g(z) $\in$ D0, e x e y não ocorrem em g(z)
$\theta 1 = \theta 0$ {x$\hookleftarrow$g(z), y$\hookleftarrow$g(z)} = {x$\hookleftarrow$g(z), y$\hookleftarrow$g(z)}
k=1

passo 2: Sθ1 = {p(g(z),f(g(z))) $\rightarrow$ q(z), p(g(z),f(w))$\rightarrow$ $q(w), p(g(z), f(g(b))) \rightarrow q(g(c))\}$
|Sθ1| $\neq$ 1 D1 = {g(z),w, g(b)}

passo 3: g(z),w, g(b)$\in$ D1, e w e z não ocorrem em g(b)
$\theta 2 = \theta 2$ {z$\hookleftarrow$b, w$\hookleftarrow$g(b)} = {x$\hookleftarrow$g(b), y$\hookleftarrow$g(b), z$\hookleftarrow$b, w$\hookleftarrow$g(b)}
k=2

passo 2: Sθ2 = {p(g(b),f(g(b))) $\rightarrow$ q(b), p(g(b),f(g(b)))$\rightarrow$ $q(g(b)), p(g(b), f(g(b))) \rightarrow q(g(c))\}$
|Sθ2| $\neq$ 1 D2 = {b,g(b),g(c)}

passo 3: Não há variáveis em D2
Logo S não é unificável.

e)

S = p(x,f(g(a))), p(a,f(z)), p(y,f(g(b)))

Passo 1. $k = 0, \theta 0 = \{\}$

Passo 2. $S\theta 0 = S = \{p(x, f(g(a))), p(a, f(z)), p(y, f(g(b)))\}$

$D0 = \{x, a\}$

Passo 3. $\theta 1 = \{\}\{a \leftarrow x\} = \{a \leftarrow x\}$

$k = 1$

Passo 2. $S\theta 1 = \{p(x, f(g(x))), p(x, f(z)), p(y, f(g(b)))\}$

$D1 = \{x, y\}$

Passo 3. $\theta 2 = \{a \leftarrow x\}\{y \leftarrow x\} = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x\}$

$k = 2$

Passo 2. $S\theta 2 = \{p(x, f(g(x))), p(x, f(z)), p(x, f(g(b)))\}$

$D2 = \{g(x), z\}$

Passo 3. $\theta 3 = \{a \leftarrow x\}\{y \leftarrow x\}\{z \leftarrow g(x)\} = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, z \leftarrow g(x)\}$

$k = 3$

Passo 2. $S\theta 3 = \{p(x, f(g(x))), p(x, f(g(x)), p(x, f(g(b)))\}$

$D3 = \{b, x\}$

Passo 3. $\theta 4 = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, z \leftarrow g(x)\}\{b \leftarrow x\} = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, z \leftarrow g(x), b \leftarrow x\}$

$k = 4$

Passo 2: $S\theta 4 = \{p(x, f(g(x))), p(x, f(g(x))), p(x, f(g(x)))\}$

Pare! $\theta 4$ é um umg de S.

Exercício 6:

a)

$S = \{p(x, h(y), f(g(a))), p(a, w, f(z)), p(y, h(x)), f(g(b)))\}$

Passo 1. $k = 0, \theta 0 = \{\}$

Passo 2. $S\theta 0 = S = \{p(x, h(y), f(g(a))), p(a, w, f(z)), p(y, h(x), p(g(b)))\}$

$D0 = \{x, a, y\}$

Passo 3. $\theta 1 = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x\}$

$k = 1$

Passo 2. $S\theta 1 = \{p(x, h(x), f(g(x))), p(x, w, f(z)), p(x, h(x), f(g(b)))\}$

$D1 = \{h(x), w\}$

Passo 3. $\theta 2 = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x\}\{w \leftarrow h(x)\} = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, w \leftarrow h(x)\}$

$k = 2$

Passo 2. $S\theta 2 = \{p(x, h(x), f(g(x))), p(x, h(x), f(z))), p(x, h(x), f(g(b)))\}$

$D2 = \{g(x), z\}$

Passo 3. $\theta 3 = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, w \leftarrow h(x)\}\{z \leftarrow g(x)\} = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, w \leftarrow h(x), y \leftarrow g(x)\}$

$k = 3$

Passo 2. $S\theta 3 = \{p(x, h(x), f(g(x))), p(x, h(x), f(g(x))), p(x, h(x), f(g(b)))\}$

$D3 = \{x, b\}$

Passo 3. $\theta 4 = \{a \leftarrow x, y \leftarrow x, w \leftarrow h(x), z \leftarrow g(x), b \leftarrow x\}$

$k = 4$

Passo 2. $S\theta 4 = \{p(x, h(x), f(g(x))), p(x, h(x), f(g(x))), p(x, h(x), f(g(x)))\}$

Pare! $\theta 4$ é um umg de S.

b)

S=$\{p(x) \rightarrow q(z), p(g(z)) \rightarrow q(x)\}$

passo 1: k=0 $\theta 0$ = {}

passo 2: Sθ0 = S{}=S
|Sθ0| $\neq$ 1 D0 = {x,g(z)}

passo 3: θ1 = θ0 {x$\hookleftarrow$g(z)} = {x$\hookleftarrow$g(z)}
k=1

passo 2: Sθ1 = {p(g(z)) $\rightarrow$ q(z), p(g(z))$\rightarrow$ $q(g(z))$}
|Sθ1| $\neq$ 1 D1 = {z, g(z)}

passo 3: θ2 = θ2 {z$\hookleftarrow$g(z)} = {x$\hookleftarrow$g(g(z)), z$\hookleftarrow$g(z)}
k=2

passo 2: Sθ2 = {p(g(g(z))) $\rightarrow$ q(g(z)), p(g(g(z)))$\rightarrow$ $q(g(g(z)))$}
|Sθ2| $\neq$ 1 D2 = {z,g(z)}

passo 3: Não é unificável.
O processo continua infinitamente.

c)

S=$\{p(x, f(y)) \rightarrow q(z), p(a, f(g(y))) \rightarrow q(w)\}$

passo 1: k=0 $\theta 0$ = {}

passo 2: Sθ0 = S{}=S
|Sθ0| $\neq$ 1 D0 = {x,a}

passo 3: $\theta 1 = \theta 0$ {x$\hookleftarrow$a} = {x$\hookleftarrow$a}
k=1

passo 2: Sθ1 = {p(a,f(y)) $\rightarrow$ q(z), p(a,f(g(y)))$\rightarrow$ $q(w)$}
|Sθ1| $\neq$ 1 D1 = {y, g(y)}

passo 3: $\theta 2 = \theta 2$ {y$\hookleftarrow$g(y)} = {x$\hookleftarrow$a, y$\hookleftarrow$g(y)}
k=2

passo 2: Sθ2 = {p(a,f(g(y))) $\rightarrow$ q(z), p(a,f(g(g(y))))$\rightarrow$ $q(w)$}
|Sθ2| $\neq$ 1 D2 = {y,g(y)}

passo 3: Não é unificável.
O processo continua infinitamente.

Exercício 7:

a)

b)

Exercício 8:

O passo 3 do algoritmo da unificacão trata de verificar se existe uma variavel x e um termo t em D_k, tal que x não ocorre em t. Se tal variável existe, o algoritmo faz a composicão do conjunto Θ_k com o conjunto {x $\hookleftarrow$ t}.
Dessa forma, a variável x não aparecerá nos conjuntos diferenca D_k subsequentes, e assim ela não será mais escolhida pelo algoritmo.

Exercício 9:

Seja S um conjunto de expressões da lógica de predicados. Se S é unificável, o algoritmo determina um *umg* de S; caso contrário, ele indica que S não é unificável.

Ou seja, o algoritmo sempre para, sendo S unificável ou não.

Do algoritmo, tem-se que as condições de parada são:

1. $|S\theta_k| = 1$ (passo 1)
2. $\exists x, t \in D_k$, tal que x ocorre em t (passo 2)

A partir disso:

1. Se S é unificável, $\exists\theta_k$, tal que θ_k é um *umg* de S, logo $|S\theta_k| = 1$ (condição 1).

2. Se S não é unificável, $\nexists \theta_k$, tal que θ_k é um *umg* de S, logo $|S\theta_k| \neq 1$. Mas, se $|S\theta_k| \neq 1$, então $D_k \neq \{\}$, logo $\exists x, t \in D_k$.

   Entretanto, se $\nexists \theta_k$, tal que θ_k é um *umg* de S e $\exists x, t \in D_k$, logo $\exists x, t \in D_k$, tal que x ocorre em t (condição 2).