Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич
+79219181076 и +48572768176
kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Лекция 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$y' = xy$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b\rangle$ – интервал
Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b\rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b\rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D \ \forall x \in \langle a, b\rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$y' = xy$
Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
   $y' = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
$5 = Ce^0 = C$
Получаем ответ $y = 5e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$y' = \sqrt{y};\ y \geq 0$
Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)
Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи
Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D, то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Example 2.4.

$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x}$ или $x' = \frac{x}{y}$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t),\varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t),\varphi(t))\varphi'(t) = 0$

3 Лекция 2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Definition 3.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$t, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R};$ t – время, $x_1 \ldots x_n$ – фазовые переменные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \text{ – скалярная запись системы}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix};\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} \text{ – векторная запись системы}$$

Notation 3.1. Как свести уравнение высшего порядка к системам?

Пусть есть уравнение $x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$
Полагаем $x_1 = x, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$

$$\text{Получаем } \begin{cases} x_1' = x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Example 3.1.

$x'' + \sin x = 0$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 \end{cases}$$

Remark 3.1.

Предполагается что $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна и $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definition 3.2. Решение системы

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением системы если

1. $\varphi \in C^1$
2. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = f(t, \varphi(t))\ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Definition 3.3. Задача Коши для систем

Пусть $t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n} \in \mathbb{R}$; $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$

Начальные условия: $\begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$

Или в векторной форме: $x(t_0) = x_0$, где $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \ldots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$

Задача Коши – уравнение + начальные условия

$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Definition 3.4. Эквивалентное интегральное уравнение

$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением эквивалентного интегрального уравнения, если

1. φ – непрерывна
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Lemma 3.1.

Функция $\varphi(t)$ – решение задачи Коши тогда и только тогда, когда она является решением эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство:

- $\Rightarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение задачи Коши
    1. φ непрерывна – очевидно
    2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
    3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается интегрированием уравнения $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ с учетом начальных условий
- $\Leftarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение интегрального уравнения
    1. φ непрерывна и есть интеграл от непрерывной функции – значит дифференцируема
    2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
    3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается дифференцированием интегрального уравнения

Theorem 3.1. Теорема существования решений

Пусть правая часть $f(t,x)$ системы $x' = f(t,x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение задачи Коши
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
определенное на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

Remark 3.2.

Этот промежуток называется промежутком Пеано

Доказательство:

Будем вместо решения задачи Коши искать решение эквивалентного интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

Поскольку D – область (открытое множество), выберем константы $a, b > 0$ такие, что $K := \{(t,x) : |t - t_0| \leq a;\ |x - x_0| \leq b\} \subset D$

K – компакт, значит непрерывная функция огр. Пусть $M = \max\limits_{(t,x)\in K} |f(t,x)|;\ h := \min(a, \frac{b}{M})$

Remark 3.3.

Длина промежутка Пеано непрерывно зависит от начальной точки

Definition 3.5. Векторные нормы

Понятие нормы в $\mathbb{R}^n$:

1. $||x|| \geq 0;\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||ax|| = |a|||x||\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Example 3.2.

1. $||x||_1 = |x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ – с этой нормой и будем работать
2. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклидова норма
3. $||x||_3 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

Definition 3.6. Равностепенная непрерывность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равностепенно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \varepsilon$

Definition 3.7. Равномерная ограниченность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равномерно ограничена, если $\exists C > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|\varphi_k(t)| \leq C$

Theorem 3.2. Теорема Арцела Асколи

Пусть последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Тогда существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi_*$ на $[\alpha, \beta]$

Definition 3.8. Кусочно-гладкая функция

Функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна, имеет производную везде, кроме конечного числа точек, а в тех точках имеет односторонние пределы

Definition 3.9. ε-решение системы

Пусть $\varepsilon > 0$. Кусочно-гладкая функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется ε-решением системы, если

1. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in [\alpha, \beta]$
2. $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \le \varepsilon$ во всех точках, где производная определена

Lemma 3.2.

Пусть $\varepsilon_m \to 0$ и $\varphi_m(t)$ – последовательность ε_m-решений системы на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi_m(t_0) = x_0;\ |f(t, \varphi_m(t))| \le M$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_*$. Тогда φ_* – решение задачи Коши

Доказательство:

Пусть Δ_m – последовательность функций, заданных формулой

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \Delta_m(t)$$

Интегрируя неравенство $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \le \varepsilon_m$ от t_0 до t, с учетом того, что $\varphi_m(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$, получаем $|\Delta_m(t)| \le \varepsilon_m(\beta - \alpha)$

Переходя к пределу в первой формуле, получаем, что $\varphi_*(t)$ – решение эквивалентного интегрального уравнения, а значит, и задачи Коши

Remark 3.4.

Далее, мы предложим метод построения таких приближенных решений. Мы будем строить эти решения на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, построение на промежутке $[t_0 - h, t_0]$ аналогично

Definition 3.10. Ломаные Эйлера

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на m равных частей:
$t_j = t_0 + \frac{hj}{m};\ j = 0, \dots, m$
Положим $\varphi_m(t_0) = x_0$ и последовательно определим $\varphi_m(t) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))(t - t_j)$ при $j = 0, \dots, m-1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$
В частности $\varphi_m(t_{j+1}) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))\frac{h}{m}$
Если положить $A_j = (t_j, \varphi_m(t_j))$, то график $\varphi_m(t)$ – ломаная, соединяющая точки A_j

Proposition 3.1.

$K := \{(t, x) := |t - t_0| \leq a;\ |x - x_0| \leq b\} \subset D$
Для любого $m \in \mathbb{N}, t \in [t_0, t_0 + h]$ верно $(t, \varphi_m(t)) \in K$

Доказательство:

1. $|t - t_0| \leq h = \min(a, \frac{b}{M})$
2. $t^* = \min\limits_{t \in [t_0, t_0 + h]} \{|\varphi_m(t) - x_0| \geq b\}$

   С другой стороны, $|\varphi_m(t^*) - x_0| = |\varphi_m(t^*) - \varphi_m(t_0)| \leq \int\limits_t^{t^*} |\varphi'_m(s)| ds \leq M(t^* - t_0) \leq Mh \leq b$

Proposition 3.2.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0$, такое что при $m \geq m_0$ функция φ_m является ε-решением системы

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$
Если $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $|t - t_j| \leq \frac{h}{m}$; $|f(t_j, \varphi_m(t_j)) - f(t, \varphi_m(t))| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ равномерно по t

Proposition 3.3.

Функции $\varphi_m(t)$ равномерно ограничены

Доказательство:

$|\varphi_m(t)| \leq M|t - t_0| + |x_0| \leq Mh + |x_0|$

Proposition 3.4.

Функции $\varphi_m(t)$ равностепенно непрерывны

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$

Theorem 3.3. Теорема Кнезера

В условиях теоремы существования, для любого $t_1 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ множество значений решений задачи Коши $\{x(t_1) : x(t) - \text{решение}\}$ замкнуто и связно

Exercise 3.1.

Доказать замкнутость (пользуемся утверждениями 2.1-2.4, леммой 2.1 и теоремой Арцела-Асколи)

4 Лекция 3

Lemma 4.1. Лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть $u(t) \geq 0;\ f(t) \geq 0; u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$, при этом

для $t \geq t_0$ выполняется неравенство $u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1$, где $c > 0$ – константа

Тогда при $t \geq t_0$ имеем оценку $u(t) \leq c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$

Доказательство:

Из неравенства получаем $\frac{u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq 1$ и $\frac{f(t)u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq f(t)$

Т.к. $\frac{d}{dt}\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] = f(t)u(t)$, то проинтегрировав от t_0 до t, получим

$\ln\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] - \ln c \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1$, отсюда и из неравенства

$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \leq c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$, чтд

Theorem 4.1. Следствие леммы Гронуолла-Беллмана

1. $u(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \Rightarrow u(t) \equiv 0$
2. $t \leq t_0$

   $u(t) \leq c + \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right| \Rightarrow u(t) \leq c \cdot \exp\left|\int\limits_{t}^{t_0} f(t_1)dt_1\right|$

Доказательство:

В пункте 2 замена $s = -t$

Lemma 4.2. Усиленная лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет там неравенству $0 \leq u(x) \leq A + B\int\limits_{x_0}^{x} u(t)dt + \varepsilon(x - x_0)$ при $A, B, \varepsilon \geq 0$

Тогда при $x \in [x_0, x_0 + h]$ справедливо неравенство $u(x) \leq Ae^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1)$

Exercise 4.1.

Доказать усиленную лемму Гронуолла-Беллмана

Definition 4.1. Условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица, $f \in Lip(A)$, если существует такая константа $L > 0$, что $|f(x) - f(y) \leq L|x - y|$ для любых $x, y \in A$

Definition 4.2. Локальное условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого $x_0 \in A$ существует окрестность U точки x_0, в которой функция f удовлетворяет условию Липшица

Lemma 4.3.

Функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируема, где U – область в $\mathbb{R}^m$, значит f удовлетворяет в этой области локальному условию Липшица

Доказательство:

Возьмем точку $x_0 \in U$ и замкнутый шарик B с центром в x_0 такой, что $B \subset U$. Пусть $M = \max\limits_{x \in B} |Df(x)|$. Тогда по теореме о среднем $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ для любых $x, y \in B$

Definition 4.3. Условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_x(A)$ если существует такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in U$

Definition 4.4. Локальное условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_{loc,x}(A)$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует окрестность V этой точки и такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in V$

Theorem 4.2. Теорема об условии Липшица в компакте

Пусть вектор-функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области U. Тогда для любого компакта $K \subset U$ эта функция липшицева по x на этом компакте

Доказательство:

Пусть это утверждение неверно. Тогда существуют последовательности $(t_k, x_k) \in K$ и $(t_k, y_k) \in K, x_k \neq y_k$, такие что $|f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)| \geq k|x_k - y_k|$

НУО можем считать, что $t_k \to t^*,\ x_k \to x^*,\ y_k \to y^*$. При этом $(t^*, x^*), (t^*, y^*) \in K$

Возможны два случая:

1. $x^* \neq y^*$
   Тогда $\frac{|f(t_k,x_k)-f(t_k,y_k)|}{|x_k-y_k|} \to \infty,\ |x_k - y_k| \not\to 0 \Rightarrow |f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)|$ не ограничено. Противоречие (т.к. f непрерывна на компакте)
2. $x^* = y^*$

В этом случае существует окрестность U точки (t^*, x^*) такая, что существует константа $L > 0$, что $|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|$ для любых $(t,x),(t,y) \in U$
Значит, такое неравенство выполнено для всех $(t_k, x_k), (t_k, y_k)$ начиная с некоторого номера. Противоречие

Theorem 4.3. Теорема единственности

Пусть $x' = f(t,x)$ – система оду. $f : D \to \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и локально липшицева по x в области D

Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Пусть утверждение теоремы неверно. Есть такая точка $(t_0, x_0) \in D$, что задача Коши имеет два различных решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

$K = \{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \cup \{(t, \psi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\}$

Множество K – компакт. На нем выполнено глобальное условие Липшица по x, в частности $|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| \le L|\varphi(t) - \psi(t)|$. Положим $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds;\ \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds$$

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\right] ds$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\right] ds\right| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \le L \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)| ds$$

$u(t) \le L \int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds$ по следствию из леммы Гронуолла-Беллмана $u(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \psi(t)$

Theorem 4.4. Следствие

Пусть $x' = f(t,x)$ – система оду. $f : D \to \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области D. Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Remark 4.1.

Условие теоремы единственности достаточное, но не необходимое
$y' = y \ln |y|$; $y \ne 0$; $y' = 0$ при $y = 0$
$y = 0$ или $\ln|\ln|y|| = x + c \Rightarrow y = e^{ce^x}$
Единственность решений есть, а условия Липшица (даже локального) нет

5 Лекция 4. Продолжение решений

Definition 5.1. Продолжение решения

Пусть есть решения $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \langle a_1,b_1\rangle \to \mathbb{R}^n$. Говорим, что решение ψ есть продолжение решения φ (продолжает решение φ), если

1. $\langle a,b\rangle \not\subseteq \langle a_1,b_1\rangle$
2. $\psi \mid_{\langle a,b\rangle} = \varphi$

Definition 5.2. Продолжимость влево

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым влево за a, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $a_1 < a$

Definition 5.3. Продолжимость вправо

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым вправо за b, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $b_1 > b$

Definition 5.4. Максимально продолженное решение

Решение $\varphi(t)$ называется непродолжимым или максимально продолженным, если решения $\psi(t)$, продолжающего $\varphi(t)$, не существует

Theorem 5.1. Теорема о продолжимости решений вправо за b

Пусть решение $\varphi(t)$ уравнения $x' = f(t,x)$ задано на промежутке $\langle a,b)$, причем существует предел $\lim\limits_{t\to b_-} \varphi(t) = x_0$ и $(b,x_0) \in D$. Тогда решение $\varphi(t)$ продолжимо вправо за b

Теорема о продолжимости решения влево за a выглядит аналогично

Доказательство:

Рассмотрим некоторое решение $\psi(t)$ задачи Коши для уравнения $x' = f(x,t)$ с начальными данными $x(b) = x_0$, заданное на промежутке Пеано $[b-h, b+h]$ и положим

$$\chi(t) = \left[\begin{array}{l} \varphi(t) \text{ если } t \in \langle a,b) \\ \psi(t) \text{ если } t \in [b,b+h] \end{array}\right.$$

Достаточно показать, что $\chi(t)$ – решение системы. Для этого достаточно проверить справедливость интегрального уравнения $\chi(t) = x_0 + \int\limits_b^t f(s,\chi(s))ds$

Пусть $\varphi(t_1) = x_1$, $\varphi(t) = x_1 + \int\limits_{t_1}^t f(s,\varphi(s))ds$; $\varphi(b) = x_0 = x_1 + \int\limits_{t_1}^b f(s,\varphi(s))ds$

Definition 5.5. Частничный порядок

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество. Отношение $\preccurlyeq$ на этом множестве называется частичным порядком, а само множество частично упорядоченным, если выполнены следующие соотношения

1. $a \preccurlyeq a$ для любого $a \in \mathfrak{M}$ (рефлексивность)
2. $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$ для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ (транзитивность)
3. $a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)

Example 5.1.

Обычный порядок на $\mathbb{R}$, делимость натуральных чисел, порядок по ключению для всех подмножеств некоторого множества $\mathfrak{A}$ $(A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A \subset B)$

Definition 5.6. Максимальный элемент

Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется максимальным, если $a \preccurlyeq b \Rightarrow b = a$

Definition 5.7. Линейный порядок

Частично упорядоченное множество называется линейно упорядоченным (или цепью), если для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ либо $a \preccurlyeq b$, либо $b \preccurlyeq a$

Definition 5.8. Верхняя грань

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется верхней гранью множества $\mathfrak{A}$, если $b \preccurlyeq a$ для любого $b \in \mathfrak{A}$

Lemma 5.1. Лемма Цорна

Если в частично-упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$ каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то само множество имеет максимальный элемент

Доказательство:

Доказывается как следствие из аксиомы выбора

Theorem 5.2.

Для любого $(t_0, x_0) \in D$ существует максимально продолженное решение задачи коши
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех решений задачи Коши. Для любых двух решений φ, ψ задачи Коши говорим, что $\varphi \preccurlyeq \psi$, если ψ продолжает φ либо они совпадают. Для каждого решения φ обозначим символом $I(\varphi)$ область определения этого решения

Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторое линейно упорядоченное множество решений задачи. Положим $J = \bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{B}} I(\varphi)$. Отметим, что для каждой точки $t \in J$ все значения $\varphi(t)$ при $\varphi \in \mathfrak{B}$ совпадают

В самом деле, если $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, по одно решение является продолжением другого и, если они определены в одной точке, то их значения там совпадают

Тогда можно корректно определить решение $\eta(t)$, продолжающее все решения из $\mathfrak{B}$ (или совпадающее с кем-то из них). Это будет верхняя грань. Существование максимального элемента $\mathfrak{M}$ следует из леммы Цорна

Theorem 5.3.

Пусть $\varphi(t)$ – максимально продолженное решение системы, заданное на отрезке (a, b); $K \subset D$ – компакт. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\varphi(t) \notin K$ для любого $t \in (a, a+\varepsilon) \cup (b-\varepsilon, b)$

Доказательство:

Пусть не так. НУО существует $t_k \to b$ такая, что $\varphi(t_k) \in K$ для любого k. Можно считать, что $(t_k, \varphi(t_k)) \to (b, \varphi^*) \in K$

Тогда $(t, \varphi(t)) \to (b, \varphi^*)$ при $t \to b$. Существует $h_0 > 0, M > 0$ такие, что если $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$, то решение $\varphi(t)$ определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ и на этом отрезке $|\varphi'(t)| \leq M$. Следует из построения промежутка Пеано

При больших k $t_{k+1} - t_k < h$; $|\varphi(t) - \varphi(t_k)| \leq M(t - t_k)$ для любых $t \in [t_k, t_{k+1}]$

Отсюда $(t, \varphi(t)) \to (b, \varphi^*)$ при $t \to b$. Тогда $\varphi(t)$ можно продолжить вправо за b. Противоречие

Definition 5.9. Почти линейные системы

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная
Система $x' = f(t, x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t, x) \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 5.4.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на $\mathbb{R}$

6 Лекция 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Definition 6.1. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$ – линейное неоднородное порядка n
$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0$ – линейное однородное порядка n
Предполагается, что все функции a_i и f непрерывны на некотором промежутке $I = (a, b)$, который может быть прямой или лучом. При этом $a_n(x) \neq 0$ для любого $x \in I$.
Переменная y может быть вещественной и комплексной

Theorem 6.1. Основные свойства решений линейного уравнения

Решения – функции класса гладкости C^n, определенные на I и дающие при подстановке в уравнение тождество. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = \frac{-a_{n-1}(x)y_n - \ldots - a_0(x)y_1 + f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$
Отсюда следует, что решения уравнения с любыми начальными данными $x_0 \in I$, $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определены, единственны и продолжимы на I

Definition 6.2. Пространство решений однородной системы

Обозначим левую часть уравнения символом $\mathcal{L} := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y$
Это линейный оператор: $\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$
Соответственно, множество решений однородного уравнения – линейное пространство.
Поскольку каждым начальным данным соответствует ровно одно решение, размерность пространства равна n
Решения с начальными данными $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ образуют базис пространства решений. Это начальные данные $(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$

Remark 6.1.

Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ системы линейно зависмы, если существует константы $C_1, \ldots, C_k$, не все равные нулю, такие, что $C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0$

Definition 6.3. Определитель Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – решения системы. Вронскианом или определителем Вронского этого семейства решений называется функция от x:

$$W(x) = W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Theorem 6.2. Свойства определителя Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – решения уравнения. Тогда равносильны следующие условия:

1. $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) \equiv 0$
2. Существует $x_0 \in I$ такой, что $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = 0$
3. Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ Очевидно

$2 \Rightarrow 3$ $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = 0$. Тогда существуют константы $C_1, \ldots, C_n$, не все нулевые, такие что

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\varphi_1'(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Положим $\psi(x) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$

Тогда $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(x_0) = 0 \Rightarrow \psi(x) \equiv 0$

$3 \Rightarrow 1$ $C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow C_1\varphi_1^{(k)}(x)+\ldots+C_n\varphi_n^{(k)}(x) \equiv 0$ для любого $k = 1, \ldots, n-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) \equiv 0$

Theorem 6.3. Формула Остроградского-Лиувилля

Для любых $x_0, x \in I$ справедливо соотношение $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt}$

Доказательство:

Для начала, докажем формулу подсчета производных определителей:

Пусть $U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$ – определитель, состоящий из дифференцируемых функций. Тогда

$$U'(x) = \begin{vmatrix} u_{11}'(x) & \ldots & u_{1n}'(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}'(x) & \ldots & u_{nn}'(x) \end{vmatrix}$$

Формула следует из формулы производной произведения функций и из представления определителя в виде

$$U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{p\in\prod_n} (-1)^{|p|} \prod_{i=1}^{n} u_{ip_i}(x)$$

Здесь $\prod_n$ – всевозможные перестановки n элементов, $|p|$ – четность перестановки

Отсюда $W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \dots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_1^{(k)}(x) & -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_2^{(k)}(x) & \dots & -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k)}(x) & \varphi_2^{(k)}(x) & \dots & \varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$= -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) = W'(x)$

Remark 6.2. Зачем нужна формула Остроградского-Лиувилля?

$y'' + xy' - y = 0$

Догадались, что решение $y = x$. Пусть другое решение – $\varphi(x)$

$\begin{vmatrix} \varphi(x) & x \\ \varphi'(x) & 1 \end{vmatrix} = W(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$. НУО $W(0) = -1$

$y'x - y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\varphi(x)$ – решение. Решение линейного однородного уравнения $y'x - y = 0$ – это $y = Cx$

$y = ux \Rightarrow u'x^2 + ux - ux = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercise 6.1.

Каков должен быть минимальный порядок линейного однородного уравнения, определенного на всей оси, чтобы у него были одновременно решения $y = x$ и $y = \sin x$

7 Лекция 6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Definition 7.1. Квазимногочлены

Так называются выражения $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами

Example 7.1.

1. $x \sin x$
2. $e^x + x^2 + e^{2x}$

Lemma 7.1.

Пусть наборы $(k_1, \lambda_1), \ldots, (k_m, \lambda_m)$; $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны (то есть для любых двух пар либо первая, либо вторая компоненты разные)
Тогда функции $\{x^{k_j} e^{\lambda_j x},\ j = 1, \ldots, m\}$ линейно независимы

Lemma 7.2.

Для любого квазимногочлена $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$ верно следующее
$f(x) \equiv 0 \Leftarrow P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \ldots \equiv P_n(x) \equiv 0$

Доказательство:

Отметим следующий факт. Пусть $\lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $(x^k e^{\lambda x})' = (\lambda x^k + kx^{k-1})e^{\lambda x}$, то есть справа при $e^{\lambda x}$ стоит многочлен степени k. Отсюда, следует, что если $\lambda \neq 0$ и $P(x)$ – многочлен, то $(P(x)e^{\lambda x})' = Q(x)e^{\lambda x}$, где $Q(x)$ – многочлен и $\deg Q = \deg P$

Будем доказывать индукцией по n – числу слагаемых

База: $n = 1$. Очевидно. $P(x)e^{\lambda x} \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv 0$

Переход: $n \to n+1$. Пусть $P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n e^{\lambda_n x} + P_{n+1}(x)e^{\lambda_{n+1} x} \equiv 0$, причем $\deg P_{n+1} = m$
$P_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \ldots + P_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} + P_{n+1}(x) \equiv 0$

Продифференцируем полученное равенство $m+1$ раз по x. Получим
$Q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \ldots + Q_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} \equiv 0$, причем $\deg P_j = \deg Q_j$

Степень нулевого многочлена – $-\infty$. В силу индукционного предположения получаем, что $P_1(x) \equiv \ldots \equiv P_n(x) \equiv 0$. Тогда в силу базы $P_{n+1}(x) \equiv 0$

Notation 7.1.

Сейчас будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами:
$\mathcal{L}y := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, где $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$

Remark 7.1.

Почти все результаты лекции применимы к случаю уравнений с комплексными коэффициентами

Definition 7.2. Характеристический многочлен

Многочлен $\chi(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ называется характеристическим многочленом уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Example 7.2.

$y'' + 3y' + 2y = 0$
$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = \chi(\lambda)$ – характеристическое уравнение
Заметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}, (e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}$
Отсюда следует, что $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$
В частсности, если λ – корень характеристического многочлена, то $e^{\lambda x}$ – решение уравнения. Например, e^{-x} и e^{-2x} – решения данного уравнения

Theorem 7.1.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда функции $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ – решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Доказательство:

Если λ_0 – корень кратности k, то $\chi(\lambda_0) = \chi'(\lambda_0) = \ldots = \chi^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$

С другой стороны, пусть $m \in \{0, \ldots, k-1\}$. Продифференцируем $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$ m раз по λ. С одной стороны, дифференцирования по x и λ коммутируют между собой и с умножением на константы. Следовательно $\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[x^m e^{\lambda x}]$

С другой стороны, по формуле производной произведения $\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}(\chi(\lambda)e^{\lambda x}) = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j \chi^{(j)}(\lambda)x^{m-j}e^{\lambda x}$

Подставляя $\lambda = \lambda_0$, получаем, что $\mathcal{L}[x^m e^{\lambda_0 x}] = 0$, значит $x^m e^{\lambda_0 x}$ – решение уравнения

Example 7.3.

1. $y''' + 5y'' + 6y' = 0$
   $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$. Корни – $0, -2, -3$. Решения: $1, e^{-2x}, e^{-3x}$
2. $y''' + y'' - y' - y = 0$
   $\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Корни – -1 (кратности 2), 1. Решения: e^{-x}, xe^{-x}, e^x

Lemma 7.3.

Пусть $\varphi(x)$ – комплексное решение уравнения с вещественными коэффициентами, тогда $\operatorname{Re}\varphi(x)$ и $\operatorname{Im}\varphi(x)$ – тоже решения

Example 7.4.

$y'' - 8y' + 25y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$
Будут решения $e^{(4\pm 3i)x} = e^{4x}(\cos 3x \pm i\sin 3x)$

Remark 7.2.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения кратности k, то $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ – тоже. Этой паре корней отвечает набор из $2k$ решений:
$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Example 7.5.

$y'''' + 2y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ (кратности 2)
Решения: $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$

Definition 7.3. Уравнения Эйлера

Это уравнения вида $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = 0$
Они заданы при $x > 0$ и при $x < 0$. Соответственно, замены $x = e^t$ и $x = -e^t$ $(t = \ln|x|)$ сводят уравнения Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами
Характеристический многочлен имеет вид
$\chi(\lambda) = a_n\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_1\lambda + a_0$

Lemma 7.4.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда ему отвечает набор решений $|x|^{\lambda_0}, |x|^{\lambda_0}\ln|x|, \ldots, |x|^{\lambda_0}(\ln|x|)^{k-1}$
Если есть пара комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k, то ей отвечают решения
$|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|), |x|^\alpha\ln|x|\cos(\beta\ln|x|), \ldots, |x|^\alpha(\ln|x|)^{k-1}\cos(\beta\ln|x|)$
$|x|^\alpha\sin(\beta\ln|x|), |x|^\alpha\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), \ldots, |x|^\alpha(\ln|x|)^{k-1}\sin(\beta\ln|x|)$

Example 7.6.

$x^2y'' + xy' - y = 0 \Rightarrow \chi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Definition 7.4. Почти линейная система

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция
Система $x' = f(t,x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные на всей оси функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t,x)| \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 7.2.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на $\mathbb{R}$

Доказательство:

Пусть $||x||$ – евклидова норма. Ясно, что для любого решения $x(t)$ системы имеем
$\frac{d}{dt}(||x(t)||^2) = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = 2\langle x(t), x'(t)\rangle$
Пусть максимальный промежуток существования решения $x(t)$ – интервал (a,b), содержащий точку t_0. Из последнего неравенства следует, что

$$||x(t)||^2 \leq ||x(t_0)||^2 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left|\frac{d}{ds}||x(s)||^2\right|\right| = ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\langle x(s), x'(s)\rangle| ds\right| \leq$$

$$\leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\langle x(s), f(s, x(s))\rangle| ds\right| \leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |x(s)||f(s, x(s))|| ds\right| \leq$$

$$\leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} ||x(s)||(A(s)||x(s)|| + B(s)) ds\right| \leq (*)$$

Пусть решение не продолжимо вправо за b. Тогда $b < +\infty$ и решение $x(t)$ стремится к бесконечности при $t \to b$ (оно же обязано покидать любой компакт!)

Тогда положим $C_1 = 2 \max\limits_{t \in [t_0, b]}(\max(A(t)), B(t)), C_2 = C_1|b - t_0|$

Воспользовавшись неравенством $||x(s)|| \leq \frac{1}{2}(||x(s)||^2 + 1)$, для оценки $B(s)||x(s)||$, получаем

$$(*) \leq ||x(t_0)||^2 + C_1\left|\int\limits_{t_0}^{t} ||x(s)||^2 ds\right| + C_1|t - t_0|$$

Отсюда и из леммы Гронуолла следует, что $||x(t)||^2$ ограничено на $[t_0, b]$. Противоречие

Продолжимость влево на $(-\infty, t_0]$ проверяется аналогично

8 Лекция 7. Линейные неоднородные уравнения

Example 8.1. Пример дифференциальных уравнений: пружинный маятник

Пусть есть грузик массы m на пружине жесткости k, испытывающий при движении силу трения, пропорциональную скорости
Тогда по второму закону Ньютона $ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} + F(t)$
Это можно записать в виде $mx'' + bx' + kx = F(t)$. При $F(t) = 0$ (свободные колебания)

1. $b^2 < 4km, \omega^2 = \frac{b^2}{4} - km \Rightarrow x = C_1 e^{-\frac{bt}{2}} \cos(\omega t) + C_2 e^{-\frac{bt}{2}} \sin(\omega t)$
2. $b^2 = 4km \Rightarrow x = C_1 e^{-\frac{bt}{2}} + C_2 t e^{-\frac{bt}{2}}$
3. $b^2 > 4km \Rightarrow x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$, где $a_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{km - \frac{b^2}{4}}$

Example 8.2. Пример дифференциальных уравнений: колебательный контур в электрической цепи

Пусть есть электрический колебательный контур, содержащий

1. Источник переменного тока V
2. Резистор сопротивления R
3. Катушку индуктивности L
4. Конденсатор емкости C

Такие цепи используются, например, в радиоприемниках и телефонах. Уравнение свободных колебаний имеет вид $\frac{d^2}{dt^2} I(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 0$
Или, используя обозначения $\alpha = \frac{R}{2L}$ и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $\frac{d^2}{dt^2} I(t) + 2\alpha \frac{d}{dt} I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0$
Интенсивность колебаний неоднородной системы максимальна, когда период колебаний V близок к $\frac{2\pi}{\omega_0}$

Definition 8.1. Линейные неоднородные уравнения

Так называются уравнения вида $a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$, или, если обозначить $\mathcal{L}y := a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y$, то $\mathcal{L}y = f(x)$
Для решения уравнения линейного неоднородного уравнения сначала надо решить линейное однородное уравнение вида $\mathcal{L}y = 0$

Lemma 8.1.

Пусть $y^*(x)$ – некоторое решение линейного неоднородного уравнения. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y_{\text{ОН}}(x) = C_1 \varphi_1(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x) + y^*(x)$

Доказательство:

Достаточно проверить, что разница двух решений неоднородно уравнения – решение однородного уравнения

$\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y_2 = f \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 - y_2) = 0$

Example 8.3.

$y'' + y = e^x$. Решение однородного $y'' + y = 0$ – $y_{\text{ОО}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$
Решение неоднородного $y = \frac{e^x}{2} \Rightarrow y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{e^x}{2}$

Lemma 8.2. Принцип суперпозиции

Пусть $\mathcal{L}y_1 = f_1(x), \mathcal{L}y_2 = f_2(x)$, a, b – константы. Тогда $\mathcal{L}(ay_1 + by_2) = af_1(x) + bf_2(x)$

Доказательство:

Следует из линейности оператора $\mathcal{L}$

Theorem 8.1.

Пусть $y_{\text{OO}}(x) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ – общее решение уравнения. Тогда функция $y^*(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x)$ будет решением уравнения, где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ – первообразные (любые) решений следующей алгебраической системы

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

Remark 8.1.

Определитель системы – вронскиан системы решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Следовательно решение алгебраической системы всегда существуют и единственно

Доказательство:

Продифференцируем формулу $y^*(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x)$

Получим $y^{*'}(x) = C_1'(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) + C_1(x)\varphi_1'(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n'(x) =$
$= C_1(x)\varphi_1'(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n'(x)$, по первому равенству из системы

$y^{*''}(x) = C_1\varphi_1''(x) + \ldots + C_n\varphi_n''(x)$, по второму равенству из системы итд

$y^{*(n)}(x) = C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) =$
$= C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_n(x)}$ и подставляем все это в уравнение

$$\mathcal{L}y^* = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)y^{*(j)}(x) = a_n(x)\frac{f(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\varphi_k^{(j)}(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\varphi_k^{(j)}(x) =$$
$$= f(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\mathcal{L}\varphi_k(x) = f(x)$$

Remark 8.2.

Если мы возьмем в качестве функций $C_j(x)$ какие-то другие первообразные решения нашего уравнения, то к решению $y^*(x)$ добавится какое-то решение линейного однородного уравнения. Вид общего решения неоднородного уравнения не изменится

Example 8.4.

$y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-x}}{x^2}$
Решение линейного однородного уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ (кратности 2)
$y_{OO} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$
$y^*(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$
$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(1-x)e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2'x = 0 \\ C_2' = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{1}{x} \\ C_2' = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$
Можно взять $C_1(x) = \ln|x|, C_2(x) = \frac{1}{x}$. Тогда получим $y^*(x) = \ln|x|e^{-x} + e^{-x}$
Замечаем, что $\ln|x|e^{-x}$ – тоже реение уравнения
Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \ln|x|e^{-x}$

Definition 8.2. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть все коэффициенты $a_j(x)$ постоянны, а функция $f(x)$ в правой части уравнения имеет вид квазимногочлена, то есть уравнение имеет вид
$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P(x)e^{\lambda_0 x}$
В правой части может стоять линейная комбинация квазимногочленов, тогда мы пользуемся принципом суперпозиции
В частности, λ_0 может быть комплексным числом, то есть можем работать с экспонентами, умноженными на синусы и косинусы

Definition 8.3. Резонанс и нерезонанс

Пусть $\chi(x) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0$ – характеристический многочлен, соответствующего линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами
Тогда для уравнения возможны два случая:

1. $\chi(\lambda_0) \neq 0$ – нерезонансный случай
2. $\chi(\lambda_0) = 0$ – резонансный случай. Пусть $k \in \{1, \ldots, n\}$ таково, что $\chi(\lambda_0) = \ldots = \chi^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, но $\chi^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда говорим о резонансе порядка k

Отсутствие резонанса – это резонанс порядка 0

Theorem 8.2.

Пусть в уравнении $a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P(x)e^{\lambda_0 x}$ $\deg P(x) = m$. Тогда

1. Если $\chi(\lambda_0) \neq 0$, то есть имеет место нерезонанс, то указанное уравнение имеет решение вида $y^*(x) = Q(x)e^{\lambda_0 x}$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен той же степени, что и $P(x)$
2. Если имеет место резонанс порядка k, то указанное уравнение имеет решение вида $y^*(x) = x^k Q(x)e^{\lambda_0 x}$, где $\deg Q = \deg P$

Доказательство:

Достаточно доказать случай 2, случай 1 доказывается так же ($k = 0$)

Пусть $P(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} p_l x^l$. Положим $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} q_j x^j$.

Подставляем функцию $y^*(x) = x^k Q(x)e^{\lambda_0 x} = \sum\limits_{j=0}^{m} q_j x^{k+j} e^{\lambda_0 x}$ в уравнение

В левой части этого уравнения получаем

$$\mathcal{L}y^* = \sum_{j=0}^{m} q_j \mathcal{L}[x^{k+j}e^{\lambda_0 x}] = \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{\partial^{k+j}}{\partial\lambda^{k+j}}\mathcal{L}[e^{\lambda x}]\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{\partial^{k+j}}{\partial\lambda^{k+j}}(\chi(\lambda)e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\lambda_0} x^l =$$
$$= \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=0}^{k+j} C_{k+j}^l x^k \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0)e^{\lambda_0 x} = \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=0}^{j} C_{k+j}^l x^l \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0)e^{\lambda_0 x} =$$
$$= \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{j=l}^{m} q_j C_{k+j}^l \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0) \right) x^l e^{\lambda_0 x}$$

Это выражение должно равняться $f(x) = \sum\limits_{l=0}^{m} p_l x^l e^{\lambda_0 x}$

Таким образом, для коэффициентов q_j получаем уравнения

При $x^m : C_{m+k}^m \chi^{(k)}(\lambda_0) q_m = p_m$

При $x^{m-1} : C_{m-1+k}^{m-1} \chi^{(k)}(\lambda_0) q_{m-1} + C_{m+k}^{m-1} \chi^{(k+1)}(\lambda_0) q_m = p_{m-1}$

$\ldots$

При $1 : \chi^{(k)}(\lambda_0) q_0 + \chi^{(k+1)}(\lambda_0) q_1 + \ldots + \ldots + \chi^{(k+m)}(\lambda_0) q_m = p_0$

Если коэффициенты $p_0, \ldots, p_m$ известны, то коэффициенты $q_0, \ldots, q_m$ могут быть однозначно найдены последовательно, начиная с q_m

Example 8.5.

$y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)e^{3x} + e^x$

1. $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow y_{OO} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$
2. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x^2+1)e^{3x} + e^x$
   Рассмотрим два уравнения
   - $y'' - 3y' + 2y = (x^2+1)e^{3x}$
   - $y'' - 3y' + 2y = e^x$
3. Первое уравнение нерезонансно $3 \notin \{1, 2\}$. Имеет решение вида
   $y_1^* = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$
   $y_1^{*'} = (3ax^2 + (2a+3b)x + (b+3c))e^{3x}$
   $y_1^{*''} = (9ax^2 + (8a+9b)x + (2a+4b+9c))e^{3x}$
   $\mathcal{L}y_1^* = (2ax^2 + (2a+2b)x + (2a+b+2c))e^{3x}$
   $$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2a + b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$
   $y_1^* = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{3x}$
   Второе уравнение резонансно $\lambda_1 = 1$, резонанс порядка 1
   $y_2^* = Axe^x,\ y_2^{*'} = A(x+1)e^x,\ y_2^{*''} = A(x+2)e^x \Rightarrow \mathcal{L}y_2^* = -Ae^x$
   Слагаемые вида xe^x сокращаются (и это неслучайно)
   Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{3x} + xe^x$

Exercise 8.1.

Сформулировать и обосновать принцип неопределенных коэффициентов для неоднородного уравнения Эйлера
Подсказка: Какая там была замена переменных?

9 Лекция 8. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Definition 9.1. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $t, x_1, \ldots, x_n$ – вещественные переменные, $a_{11}(t), a_{12}(t), \ldots, a_{nn}(t), f_1(t), \ldots, f_n(t)$ – непрерывные функции на $I := \langle \alpha, \beta \rangle$, где α и β – конечные или бесконечные величины
Линейная неоднородная система обывновенных дифференциальных уравнений это

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Система называется однородной, если все f_i равны нулю

Notation 9.1. Векторная запись систем

Положим $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
Тогда систему можно переписать в виде $x' = A(t)x + f(t)$ (или $x' = A(t)x$ для однородной системы)
Говорим, что C^1 гладкая функция $x(t)$ – решение уравнения, если $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$

Definition 9.2. Задача Коши

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$. Можем рассмотреть задачу Коши с начальными условиями (t_0, x_0): $\begin{cases} x' = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Theorem 9.1.

Для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ задача Коши имеет единственное решение, которое определено на всем отрезке I

Доказательство:

Следует из теорем существования, единственности и продолжимости

Definition 9.3. Пространство решений линейной однородной системы

Решения однородной системы образуют линейное пространство
$x' = A(t)x,\ y' = A(t)y,\ z = ax + by \Rightarrow z' = A(t)z$

Remark 9.1.

Существует канонический изоморфизм между решениями и их начальными данными. Соответственно, пространство решений имеет размерность n

Поэтому существует базис из n решений (векторных функций) $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$

Definition 9.4. Фундаментальная матрица системы

Общее решение можно записать в виде $x(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = \Phi(t)C$, где $\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\Big)$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Такая матрица Φ называется фундаментальной

Theorem 9.2. Свойства фундаментальных матриц

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица. Тогда $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Это потому что каждый столбец матрицы Φ удовлетворяет условию $\varphi_k'(t) = A(t)\varphi_k(t)$ и $\varphi_{ki}'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_{kj}(t)$

Lemma 9.1.

Если $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, B – постоянная невырожденная матрица, то $\Psi(t) = \Phi(t)B$ – тоже фундаментальная матрица

Доказательство:

Как дифференцировать произведение матриц?

$\frac{d}{dt}(X(t)Y(t)) = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t)$

$\Psi'(t) = \Phi'(t)B = A(t)\Phi(t)B = A(t)\Psi(t)$

Наоборот, если $\Psi(t), \Psi(t)$ – фундаментальные матрицы, то существует невырожденная постоянная матрица B, такая что $\Psi(t) = \Phi(t)B$

Как считать производные обратных матриц?

$X^{-1}X(t) = \mathrm{Id} \Rightarrow \frac{d}{dt}X^{-1}(t)X(t) + X^{-1}(t)X'(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)X'(t)X^{-1}(t)$

Итак, $\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\Psi) = \frac{d}{dt}\Phi^{-1}\Psi + \Phi^{-1}\Psi' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}\Psi + \Phi^{-1}\Psi' = -\Phi^{-1}A\Phi\Phi^{-1}\Psi + \Phi^{-1}A\Psi = 0$

Отсюда матрица B постоянна, а невырождена она, как матрица перехода между двумя базисами

Definition 9.5. Определитель Вронского (вронскиан)

Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – решения рассматриваемой системы уравнений (необязательно базис), $\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\Big)$

Тогда $W(t) := \det\Phi(t)$ называется определителем Вронского или вронскианом

Lemma 9.2. Основное свойство вронскиана

Для каждого $t_0 \in I$ следующие утверждения равносильны

1. Решение $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ линейно зависимы как функции
2. $W(t) = 0$ для каждого $t \in I$
3. Существует $t_0 \in I$ такое, что $W(t_0) = 0$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ очевидно. Докажем $3 \Rightarrow 1$

Фиксировав t_0, берем постоянные $c_1, \ldots, c_n$ (не все нули) такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t_0) = 0$

Затем полагаем $\psi(t) := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$. Имеем $\psi(t_0) = 0$

С другой стороны, x_0 – это решение задачи Коши. Из единственности решений, $\psi(t) \equiv 0$

Lemma 9.3. Дифференцирование определителя

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_{11} & \ldots & x'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & \ldots & x'_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство:

Это следует из формулы $\begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{p \in \prod_n} (-1)^{|p|} \prod\limits_{j=1}^{n} x_{jp(j)}$

Theorem 9.3. Теорема Остроградского-Лиувилля

$$W(t) = W(t_0) e^{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s) ds}$$

Доказательство:

Пусть $\Phi(t) = \Big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\Big) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$. Тогда

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

С другой стороны

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(t)\varphi_{j1}(t) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(t)\varphi_{jn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \begin{vmatrix} \varphi_{j1}(t) & \ldots & \varphi_{jn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t)W(t)$$

С остальными слагаемыми поступаем аналогично

В конечном итоге $W'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}(t)W(t) = \operatorname{Tr} A(t)W(t) \Rightarrow W(t) = W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)ds}$

Definition 9.6. Экспонента матрицы

Пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда экспонентой матрицы A называется сумма ряда $e^A := \mathrm{Id} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, где A^n – n-ая степень матрицы A, а Id – единичная матрица

Remark 9.2.

Аналогично можно определить любую аналитическую функцию от матрицы, например, синус. Однако непонятно, почему ряды сходятся

Definition 9.7. Матричная норма

Пусть $||\cdot||$ – векторная норма
Определим матричную норму по формуле $||A|| = \max\limits_{||x||=1} ||Ax|| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$

Theorem 9.4. Свойства матричной нормы

1. $||A|| \geq 0;\ ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
4. $||AB|| \leq ||A||||B||$
   $||AB|| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{||ABx||}{||x||} = \max\limits_{x \neq 0} \frac{||ABx||}{||Bx||} \cdot \frac{||Bx||}{||x||} \leq ||A||||B||$

4'. $||A^k|| \leq ||A||^k;\ ||\operatorname{Id}|| = 1 \Rightarrow ||A^{-1}||||A|| \geq 1$

Example 9.1.

1. $||x|| = \max |x_k| \Rightarrow ||A|| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
2. $||x|| = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| \Rightarrow ||A|| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
3. $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2} \Rightarrow ||A|| = \max \sqrt{\lambda^*}$, где λ^* – собственные числа матрицы AA^*

Notation 9.2.

Ряд из матриц сходится, если он сходится покоэффициентно

Proposition 9.1.

Матричный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится, если сходится ряд из норм $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||A_k||$

Lemma 9.4.

Матричный ряд e^A сходится абсолютно, причем $||e^A|| \le e^{||A||}$

Доказательство:

Доказывается оценкой конечных сумм ряда $e^A = \mathrm{Id} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Theorem 9.5. Свойства экспонент матриц

1. $e^0 = \mathrm{Id}$; $e^{kA} = (e^A)^k$. В частности $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
2. $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

   Доказательство:

   $$e^{A+B} = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}}{n!} = \mathrm{Id} + \sum_{k,n=1}^{\infty} \frac{A^k B^n}{k!n!} = e^A e^B$$

Notation 9.3.

Пусть $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ – пространство квадратных матриц размера $n \times n$

Theorem 9.6.

Для каждой матрицы A матричная функция $t \mapsto e^{tA} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ дифференцируема и удовлетворяет соотношению $\frac{d}{dt}X = AX$

Доказательство:

$(e^{At})' = (\mathrm{Id} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!})' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At}$

Theorem 9.7. Следствие

Одна из фундаментальных матриц системы имеет вид $X(t) = e^{At}$

Remark 9.3.

Это не работает, если матрица A зависит от t

Exercise 9.1.

1. Покажите, что матричные синус, косинус и экспонента связаны соотношением $e^{iA} = \cos A + i \sin A$
2. Покажите, что матрицы $X_1(t) = \sin At$ и $X_2(t) = \cos At$ удовлетворяют соотношению $X'' + A^2 X = 0$

10 Лекция 9. Жордановы все на свете

Notation 10.1. Зачем нужны экспоненты матриц?

Если мы имеет систему $x' = Ax$, где A – постоянная матрица, то одной из фундаментальных матриц будет $\Phi(t) := e^{At}$
$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$
$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2t + \ldots + \frac{A^{n+1}t^n}{n!} + \ldots = Ae^{At}$
В этом случае общее решение нашей системы имеет вид $e^{At}C$, где C – постоянный вектор-столбец

Reminder 10.1. Жордановы нормальные формы

Напоминание из алгебры
Факт. Пусть A – некоторая квадратная матрица $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа. Тогда существует единственная с точностью до перестановок блоков блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_m \end{pmatrix}, \text{ где каждая матрица } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

такая, что $J = SAS^{-1}$, где S – некоторая невырожденная матрица. Вместо единичек могут быть любые числа

Remark 10.1.

Собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ могут повторяться, а также быть мнимыми, равно как и матрицы J и S

Notation 10.2. Как строится матрица S?

В простейшем случае это может быть матрица из собственных векторов, записанных в том же порядке, что и соответствующие собственные числа
В случае, если есть собственный вектор и отвечающая ему цепочка дополнительных векторов, выписываем их по порядку справа налево (для единичек сверху – слева направо)

Example 10.1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, собственные числа 1 и -1 кратности 2

$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, собственный вектор для 1 равен $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – ранг равен 2, собственный вектор только 1

$(A+\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -8 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Ранг уже равен 1. Возьмем собственный вектор этой матрицы, не являющийся собственным вектором матрицы $A + \mathrm{Id}$

Например, вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ему будет отвечать собственный вектор

$v_0 = (A + \mathrm{Id})v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ матрицы A для собственного числа -1

Итого, жорданова форма имеет вид $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

а матрица перехода $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Example 10.2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, собственное число 1 кратности 3

Имеем $A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ранг 1. Тогда $(A - \mathrm{Id})^2 = 0$

Выберем вектор, обнуляемый $(A-\mathrm{Id})^2$ (то есть любой), не обнуляемый матрицей $A-\mathrm{Id}$

Например, вектор

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ему соответствует собственный вектор матрицы $A - I$, равный $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Возьмем еще один собственный вектор этой матрицы, независимый с предыдущим.

Например, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ему будет соответствовать отдельная клетка в жордановой форме

Выписываем жорданову форму

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу перехода $A = S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Notation 10.3.

Если матрицы A и B сопряженные, то есть $A = SBS^{-1}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ $A^n = SB^nS^{-1}$. Тогда, подставляя это соотношение в формулу $e^A := \mathrm{Id} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$, получаем $e^A = Se^BS^{-1}$

Таким образом, достаточно научиться считать экспоненты только от жоржановых форм. Степени (а значит, и экспоненты) от блочно-диагональных матриц считаются поблочно

Значит, достаточно научиться считать экспоненты от жордановых блоков

Каждый жорданов блок имеет вид $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$ (пусть это матрица $m \times m$) и, значит, может быть записан в виде $J = \lambda_k \mathrm{Id} + U$, где $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. В этой матрице все элементы, кроме поддиагональных, нулевые. В матрице U^2 единички спустятся на диагональ ниже, потом ниже, матрица U^{m-1} будет иметь единичку в левом нижнем углу и, наконец $U^m = 0$

Notation 10.4.

Так как $J_k = \lambda_k \operatorname{Id} + U$, то $e^{Jt} = e^{\operatorname{Id}\lambda t} e^{Ut}$ (матрицы коммутируют)
С другой стороны, $e^{\operatorname{Id}\lambda t} = e^{\lambda t}\operatorname{Id}$. Осталось посчитать

$$e^{Ut} = \operatorname{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^n t^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{t^{m-4}}{(m-4)!} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда $$e^{J_k t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_k t} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ te^{\lambda_k t} & e^{\lambda_k t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & e^{\lambda_k t} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_k t} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{\lambda_k t} & \frac{t^{m-4}}{(m-4)!}e^{\lambda_k t} & \dots & e^{\lambda_k t} & 0 \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_k t} & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_k t} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{\lambda_k t} & \dots & te^{\lambda_k t} & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}$$

Example 10.3.

Решим систему $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = 5,\ \operatorname{Tr} A = 6,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$

$A - \operatorname{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A - 5\operatorname{Id} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$, $\Phi(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$

Ответ: $x = C_1 e^t + C^2 e^{5t},\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$

Example 10.4.

Решаем систему $\begin{cases} x' = -x + y - 2z \\ y' = 4x + y \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – считали выше

$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$; $\Phi(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} 0 & -te^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^t & (1+2t)e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^t & (1+t)e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{cases} x = -C_2te^{-t} - C_3e^{-t} \\ y = 2C_1e^t + C_2(1+2t)e^{-t} + 2C_3e^{-t} \\ z = C_1e^t + C_2(1+t)e^{-t} + C_3e^{-t} \end{cases}$

Definition 10.1. Вещественная жоржанова форма

Факт из алгебры. Если у вещественной матрицы есть два сопряженных мнимых собственных числа $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, то собственные и присоединенные вектора также могут быть выбраны сопряженными, количество жордановых клеток одинаково и они имеют одинаковую структуру. $Au = \lambda u \Rightarrow A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$

Theorem 10.1.

Пусть A – некоторая вещественная матрица, $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m} \notin \mathbb{R}$ – собственные числа, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Тогда существует единственная с точностью до перестановок блоков матрица $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_p \end{pmatrix}$, где каждая матрица J_k имеет вид или $\begin{pmatrix} \mu_j & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \mu_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_j \end{pmatrix}$, или $\begin{pmatrix} \Lambda_j & 0 & \ldots & 0 \\ E_2 & \Lambda_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda_j \end{pmatrix}$, где $\Lambda_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, такая, что $J = SAS^{-1}$, где S – некоторая невырожденная вещественная матрица (заметим, что вместо единичек, как в вещественных, так и в комплексных блоках можно ставить любое ненулевое число ε)

Notation 10.5. Метод построения вещественной жордановой формы

Пусть для заданная матрица $A = SJS^{-1}$, где J – обычная жорданова форма, S – матрица перехода. Пусть в матрице S есть последовательность из собственного и дополнительных векторов $u_{m-1}, \dots, u_1, u_0$, отвечающая жоржановой клетке J_j для мнимого собственного числа λ_j. Тогда будет и последовательность из собственного и дополнительных векторов $\overline{u_{m-1}}, \dots, \overline{u_1}, \overline{u_0}$, отвечающая жордановой клетке $\overline{J_j}$ для мнимого собственного числа $\overline{\lambda_j}$. Пусть $u_k = v_k + iw_k$. Тогда в матрице перехода к вещественной жордановой форме в тех столбцах, где стоит блок $\begin{pmatrix} \Lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ E_2 & \Lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_j \end{pmatrix}$, ставим набор $(v_{m-1}, w_{m-1}, \dots, v_1, w_1, v_0, w_0)$ – именно в таком порядке

Notation 10.6. Факт из алгебры

Матрицы вида $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ образуют поле, изоморфное $\mathbb{C}$

Соответственно, $e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}$

Экспонента от вещественно жордановой формы считается, так же, как и в обычном случае. Единственная разница: когда имеем дело с блоком или $J_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ E_2 & \Lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_j \end{pmatrix}$,

то имеем $e^{J_j t} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_j t} & 0 & \dots & 0 \\ te^{\Lambda_j t} & e^{\Lambda_j t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\Lambda_j t} & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\Lambda_j t} & \dots & e^{\Lambda_j t} \end{pmatrix}$

Remark 10.2. Зачем это все нужно?

Решаем систему $x' = Ax$, знаем e^{At} – фундаментальная матрица. Тогда $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$. В качестве фундаментальной можем взять матрицу $\Phi(t) := Se^{Jt}$. Если J – вещественная жорданова форма, то матрица $\Phi(t)$ тоже вещественна

Example 10.5.

Решим систему $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 3y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

Найдем собственные числа матрицы коэффициентов

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= (3-\lambda)\lambda^2 + 2\lambda - 4 + 10 - 10\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0$, собственные числа равны -1 и $1 \pm i$

Координаты собственного вектора для $\lambda_1 = -1$ удовлетворяют системе $A - \lambda_1 E, \overrightarrow{\alpha} = 0$, или $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отсюда сам вектор равен $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Теперь найдем собственный вектор для $\lambda_2 = 1+i$ (для $1-i$ вектор будет сопряженный)

Получаем систему $A - \lambda_2 E, \overrightarrow{\gamma} = 0$, $\begin{pmatrix} 2-i & -3 & 1 \\ 3 & -3-i & 2 \\ -1 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Прибавляя ко второму уравнению три раза третье, получим $(3-i)\gamma_2 - (1+3i)\gamma_3 = 0$. Можно взять $\gamma_2 = 1 + 3i,\ \gamma_3 = 3 - i$

Из третьего уравнения $\gamma_1 = 2\gamma_2 - (1+i)\gamma_3 = 2 + 6i - 3 + i - 3i + 1 = 4i \Rightarrow \begin{pmatrix} 4i \\ 1+3i \\ 3-i \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t\cos t & e^t \sin t \\ 0 & -e^t \sin t & e^t\cos t \end{pmatrix}$$

$\Phi(t) = Se^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -4e^t\sin t & 4e^t\cos t \\ e^{-t} & e^t(\cos t - 3\sin t) & e^t(\sin t + 3\cos t) \\ -e^{-t} & e^t(3\cos t + \sin t) & -e^t(\cos t + 3\sin t) \end{pmatrix}$. Первый столбец: $e^{\lambda t}u$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t} - 4C_2 e^t \sin t + 4C_3 e^t \cos t \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t(\cos t - 3\sin t) + C_3 e^t(\sin t + 3\cos t) \\ z = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t(3\cos t + \sin t) - C_3 e^t(\cos t + 3\sin t) \end{cases}$$

Notation 10.7. Лайфхак

Будет комплексное решение $e^{(1+i)t} = e^t \begin{pmatrix} -4\sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \sin t + 3\cos t \\ -\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$

Вещественная и внимая часть решения дадут второй и третий столбец фундаментальной матрицы