

## Содержание

1	§1. Производящие функции	2
2	§2. Биномиальные коэффициенты	7
3	§3. Числа Каталана	8

# 1 §1. Производящие функции

## Definition 1.1. Производящая функция

Пусть  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  – последовательность. Ее производящая функция – это формальный степенной ряд  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$

## Notation 1.1. Элементарные операции

1.  $A(t) \pm B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) t^n$
2.  $c \in \mathbb{C} \Rightarrow c \cdot A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) t^n$
3.  $A(t)B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0)t^n + \dots$

## Definition 1.2. Свертка

Последовательность  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ , где  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$  называется сверткой последовательностей  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  и  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

## Remark 1.1.

Множество производящих функций образует коммутативное кольцо с единицей; векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$

Вообще это называется коммутативная алгебра с единицей

## Definition 1.3. Композиция производящих функций

Пусть  $b_0 = 0$

$$A(B(t)) = a_0 + a_1 B(t) + a_2 B(t)^2 + \dots = a_0 + a_1 (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots) + a_2 (b_1^2 t^2 + 2b_1 b_2 t^3 + \dots) + a_3 (b_1^3 t^3 + \dots) = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) t^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) t^3$$

### Example 1.1.

$$A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + \dots$$

**Theorem 1.1.**

Пусть  $a_0 \neq 0$ . Тогда  $\exists! B(t)$ , т.ч.  $A(t)B(t) = 1$

*Доказательство:*

Ищем  $B(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots$

$$A(t)B(t) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)t + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)t^2 + \dots = 1$$

$a_0b_0 = 1 \Rightarrow$  находим  $b_0$

$$\underbrace{a_1b_0}_{\text{знаем}} + a_0b_1 = 0 \Rightarrow \text{находим } b_1$$

знаем

$$\underbrace{a_2b_0 + a_1b_1}_{\text{знаем}} + a_0b_2 = 0 \Rightarrow \text{находим } b_2$$

И так далее ...

**Theorem 1.2.**

$b_0 = 0, b_1 \neq 0$ . Тогда  $\exists! A(t)$  и  $C(t)$ , т.ч.  $a_0 = c_0 = 0$  и  $A(B(t)) = B(C(t)) = t$

**Exercise 1.1.**

Доказать теорему 1.2.

**Definition 1.4. Производная**

$$A'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nt^{n-1}$$

$$t \cdot A'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} na_nt^n$$

**Definition 1.5. Первообразная**

$$\int A(t)dt = a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \dots$$

**Remark 1.2.**

$$(\int A(t)dt)' = A(t); \int A'(t)dt = A(t) - a_0$$

**Example 1.2.**

$$1. a_n \equiv 1 \Rightarrow A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

Пусть  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  – произвольная последовательность

$$c_n = \underbrace{b_0 + b_1 + \dots + b_n}_{\text{свертка послед. выше}}; C(t) = \frac{B(t)}{1-t}$$

$$2. e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}; \sum_{n=0}^{\infty} nt^n = t\left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{t}{(1-t)^2}$$

### Example 1.3. Числа Фиббоначи

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_{n+2}t^{n+2} = F_{n+1}t^{n+2} + F_nt^{n+2}$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n; \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} t^{n+2}}_{F(t)-t} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^{n+2}}_{t(\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^{n+1})=tF(t)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^{n+2}}_{t^2 F(t)}$$

$$F(t) - t = tF(t) + t^2 F(t)$$

$F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$  – производящая функция для чисел Фиббоначи

Корни знаменателя ( $t_2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ );  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ;  $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$   
 $1 - t - t^2 = (1 - \varphi t)(1 - \psi t)$

Ищем разложение на простейшие  $\frac{t}{1-t-t^2} = \frac{A}{1-\varphi t} + \frac{B}{1-\psi t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t = A(1 - \psi t) + B(1 - \varphi t) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A\psi + B\varphi = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A\psi - A\varphi = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Итого:  $F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1-\varphi t} - \frac{1}{1-\psi t} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n t^n \right)$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

### Notation 1.2. Как решать линейные рекуррентные соотношения?

$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n$ ; знаем  $a_0, a_1 \dots a_{k-1}$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$a_{n+k} t^{n+k} = c_1 t a_{n+k-1} t^{n+k-1} + c_2 t^2 a_{n+k-2} t^{n+k-2} + \dots + c_k t^k a_n t^n$$

$$\text{Суммируем по } n = 0 : \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} t^{n+k}}_{A(t) - a_0 - a_1 t - \dots - a_{k-1} t^{k-1}} = c_1 t \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k-1} t^{n+k-1}}_{A(t) - a_0 - a_1 t - \dots - a_{k-2} t^{k-2}} + \dots + c_k t^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}_{A(t)}$$

$$\text{Получаем уравнение: } (1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k) A(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{многочлен, знаем}}$$

$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$  – рациональная функция

$$Q(t) = (1 - \alpha_1 t)^{r_1} (1 - \alpha_2 t)^{r_2} \dots (1 - \alpha_e t)^{r_e}$$

Раскладываем на простейшие вида  $\frac{1}{(1 - \alpha_s t)^m}$

$$\frac{1}{1 - \alpha_s t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_s^n t^n$$

$$\frac{1}{(1 - \alpha_s t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_s^n t^n$$

### Remark 1.3. Вопрос

Когда производящая функция – рациональная?

### Definition 1.6. Квазимногочлен

Последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  – квазимногочлен, если  $a_n = c_1(n)q_1^n + c_2(n)q_2^n + \dots + c_k(n)q_k^n$ , где  $q_1 \dots q_k \in \mathbb{C}$ ;  $c_1(n) \dots c_k(n)$  – многочлены с комплексными коэффициентами

### Theorem 1.3.

$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ;  $A(t)$  – рациональна  $\Leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty}$  – квазимногочлен, начиная с некоторого места

*Доказательство:*

" $\Rightarrow$ "  $A(t)$  – рациональная  $\Rightarrow$  раскладываем на простейшие вида  $(1-qt)^{-m} + \underbrace{\text{некоторый многочлен}}_{\text{влияет на первые неск. эл. посл-ти}}$

$$(1-qt)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} q^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{(m-1)!}}_{\text{многочлен от } n} q^n t^n$$

" $\Leftarrow$ " Надо доказать, что  $(c(n)q^n)_{n=0}^{\infty}$  имеет рациональную производящую функцию

$$c(n) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m n(n+1)\dots(n+m) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \geq 0} \alpha_m (n+1)(n+2)\dots(n+m) \cdot (qt)^n \stackrel{x=qt}{=} \sum_{m \geq 0} \alpha_m \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)(n+2)\dots(n+m)x^n}_{(x^{n+m})^{(m)}} =$$

$$= \sum_{m \geq 0} \alpha_m \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+m} \right)^{(m)} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^{(m)} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \left( \frac{1}{1-x} \right)^{(m)}$$

Получаем рациональную функцию

### Definition 1.7. Произведение Адамара

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n; \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$\text{Произведение Адамара } A(t) \odot B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_n) t^n$$

### Theorem 1.4. Следствие

Произведение Адамара рациональных функций – рациональная функция (очевидно из теоремы)

### Example 1.4.

$$F_1 + \dots F_n = S_n = ?$$

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{\underbrace{1-t-t^2}_{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\varphi} - \frac{1}{1-\psi t})}} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n = \frac{\mathcal{F}(t)}{1-t}$$

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1-\varphi t} - \frac{1}{1-\psi t} \right) \frac{1}{1-t}$$

$$\text{Разложим } \frac{1}{1-\varphi t} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{A}{1-\varphi t} + \frac{B}{1-t} \Leftrightarrow 1 = A(1-t) + B(1-\varphi t) \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{1-\varphi} = -\varphi \\ A = 1 + \varphi \end{cases}$$

$$\text{Аналогично } \frac{1}{1-\psi t} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{1+\psi}{1-\psi t} - \frac{\psi}{1-t}$$

$$\text{Итого, } S(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \underbrace{\frac{1+\varphi}{1-\varphi t} - \frac{1+\psi}{1-\psi t}}_{\frac{1+\varphi-\psi t-\varphi\psi t-1-\psi+\varphi t+\varphi\psi t}{1-t-t^2}} - \underbrace{\frac{\varphi-\psi}{1-t}}_{\frac{\sqrt{5}}{1-t}} \right)$$

$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2} - \frac{1}{1-t}$$

$$\frac{t}{1-t-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \mathcal{F}(t)$$

$$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{\mathcal{F}(t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^n$$

$$\text{Ответ: } F_{n+2} - 1$$

### Example 1.5. Еще один пример

#### Осторожно! На записи рисуночки

Взаимно рекуррентные последовательности

**Задача:** сколько способов разбить прямоугольник  $3 \times n$  на доминошки  $1 \times 2$ ?

$v_n$  – кол-во способов разбить прямоугольник  $3 \times n$  без левой нижней клетки

$u_n$  – кол-во способов разбить прямоугольник  $3 \times n$

Методом нехитрого посмотреть запись и увидеть красивые рисунки становится очевидно, что

$$\begin{cases} u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2} \\ v_n = u_{n-1} + v_{n-2} \end{cases} \quad \text{при } u_1 = 0, u_2 = F_4 = 3; \quad v_1 = 1, v_2 = 0. \text{ Пусть } u_0 = 1; \quad v_0 = 0$$

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n; \quad V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n$$

$$\begin{cases} u_{n+2} t^{n+2} = 2v_{n+1} t^{n+2} + u_n t^{n+2} \\ v_{n+2} t^{n+2} = u_{n+1} t^{n+2} + v_n t^{n+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(t) - 1 = 2tV(t) + t^2 U(t) \\ V(t) - t = t^2 V(t) + t(U(t) - 1) \end{cases}$$

$$V(t) = \frac{t}{1-t^2} U(t). \text{ Подставляем во 2 уравнение}$$

$$U(t) - 1 = \frac{2t^2}{1-t^2} U(t) + t^2 U(t)$$

$$U(t) = \frac{1-t^2}{1-4t^2+t^4}$$

$$\text{Пусть } t^2 = s, \text{ тогда } W(s) = \frac{1-s}{1-4s+s^2} = \underbrace{\frac{A}{1-\varphi s}}_{A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n s^n} + \underbrace{\frac{B}{1-\psi s}}_{B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n s^n} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ B = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$u_{2n} = A\varphi^n + B\psi^n = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n \approx \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$$

## 2 §2. Биномиальные коэффициенты

### Reminder 2.1.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} - \text{определено при всех } n \in \mathbb{C}$$

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$$

### Example 2.1.

$$1. \underbrace{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}_{\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} t^k} = ((1+t)^\alpha)' = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k t^{k-1}$$

Приравняем коэффициенты при  $t^{k-1}$ :  $\alpha \binom{\alpha-1}{k-1} = k \binom{\alpha}{k}$

$$2. ((1+t)^\alpha)^{(m)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k \right)^{(m)} = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \underbrace{k(k-1)\dots(k-m+1)}_{m! \binom{k}{m}} t^{k-m}$$

$$((1+t)^\alpha)^{(m)} = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}_{m! \binom{\alpha}{m}} (1+t)^{\alpha-m} = m! \binom{\alpha}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-m}{k} t^k$$

Приравниваем коэффициенты при  $t^{k-m}$ :  $\binom{\alpha}{m} \binom{\alpha-m}{k-m} = \binom{\alpha}{k} \binom{k}{m}$

$$3. (1+t)^{2n} = (1+t)^n (1+t)^n = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \right)^2$$

$$(1+t)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$$

Коэффициент при  $t^n$ :  $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{n}{0}$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

$$4. (1+t)^p (1+t)^{1-p} = (1+t)^n$$

$$\binom{n}{m} = \binom{p}{0} \binom{n-p}{m} + \binom{p}{1} \binom{n-p}{m-1} + \dots + \binom{p}{m} \binom{n-p}{0} - \text{свертка Вандермонда}$$

$$5. (1-t)^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} t^k - \text{производящая } \left( \binom{n+k}{n} \right)_{k=0}^{\infty}$$

$$\frac{1}{(1-t)^{n+2}} = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-t)^{n+1}} - \text{производящая функция } \left( \binom{n+0}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} \right)_{k=0}^{\infty}$$

Коэффициент при  $t^m$ :  $\binom{n+m+1}{n+1} = \binom{n+0}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+m}{n}$

$$m+1 = k \Rightarrow \binom{n+k}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+k-1}{n}$$

$$n=1 \Rightarrow \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+\dots+k$$

$$n=2 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = 2 \binom{k+2}{3} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

### 3 §3. Числа Каталана

#### Definition 3.1. Правильная скобочная последовательность

Последовательность из  $2n$  открывающих и закрывающих скобок – правильная, если в любом префиксе открывающих  $\geq$  закрывающих и всего  $n$  открывающих и  $n$  закрывающих

#### Definition 3.2. Числа Каталана

Числа Каталана  $(C_n)$  – количество правильных скобочных последовательностей длины  $2n$

#### Notation 3.1.

$C_0 = 1$   
 $C_1 = 1: ()$   
 $C_2 = 2: (), (())$   
 $C_3 = 5: ((())), ((())), ((())()), ()((())), ()()()$

#### Proposition 3.1.

$$\forall n \geq 1 \ C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0$$

*Доказательство:*

Рассмотрим  $\min k$ , т.ч. среди первых  $2k$  скобок поровну открывающих и закрывающих

$$\underbrace{\left( \dots \dots \dots \right)}_{\substack{1 \text{ ПСП длины } 2(k-1) \\ 2k}} \quad \underbrace{\left( \dots \right)}_{\substack{2k+1 \quad 2n \\ \text{ПСП длины } 2(n-k)}}$$

$$C_{k-1} \cdot C_{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

#### Notation 3.2.

$$C_0 = 1; \ C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 \quad n \geq 0$$

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n; \ C_{n+1} t^{n+1} = (C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0) t^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} : C(t) - 1 = t C(t)^2 \Leftrightarrow t C(t)^2 - C(t) + 1 = 0$$

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}, \text{ т.к. } C(0) = 1, \text{ то берем } C(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4t} &= (1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} 4^n t^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) \dots (\frac{3-2k}{2})}{k!} (-1)^k 2^{2k} t^k = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k!} \underbrace{2^k}_{2 \cdot \frac{2 \cdot \dots \cdot (2k-2)}{(k-1)!}} t^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2} t^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} t^k \end{aligned}$$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} t^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n$$

$$\text{Мы доказали теорему } C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$



**Theorem 3.1.**

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$