Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич
+79219181076 и +48572768176
kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$y' = xy$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b \rangle$ – интервал
Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b \rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b \rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D \ \forall x \in \langle a, b \rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$y' = xy$
Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
   $y' = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
$5 = Ce^0 = C$
Получаем ответ $y = 5e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$y' = \sqrt{y};\ y \geq 0$
Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)
Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи
Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D, то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Example 2.4.

$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x}$ или $x' = \frac{x}{y}$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = 0$

Definition 2.10. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$t, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R};\ t$ – время, $x_1 \dots x_n$ – фазовые переменные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{– скалярная запись системы}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{– векторная запись системы}$$

Notation 2.2. Как свести уравнение высшего порядка к системам?

Пусть есть уравнение $x^{(n)} = g(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$
Полагаем $x_1 = x, \ldots, x_n = x^{(n-1)}$
Получаем $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$

Example 2.5.

$x'' + \sin x = 0$
$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 \end{cases}$

Remark 2.5.

Предполагается что $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна и $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definition 2.11. Решение системы

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением системы если

1. $\varphi \in C^1$
2. $(t, \varphi(t)) \in D \; \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = f(t, \varphi(t)) \; \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Definition 2.12. Задача Коши для систем

Пусть $t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n} \in \mathbb{R}$; $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$
Начальные условия: $\begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$

Или в векторной форме: $x(t_0) = x_0$, где $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \ldots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$
Задача Коши – уравнение + начальные условия
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Definition 2.13. Эквивалентное интегральное уравнение

$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением эквивалентного интегрального уравнения, если

1. φ – непрерывна
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Lemma 2.1.

Функция $\varphi(t)$ – решение задачи Коши тогда и только тогда, когда она является решением эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение задачи Коши

1. φ непрерывна – очевидно
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается интегрированием уравнения $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ с учетом начальных условий

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение интегрального уравнения

1. φ непрерывна и есть интеграл от непрерывной функции – значит дифференцируема
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается дифференцированием интегрального уравнения

Theorem 2.2. Теорема существования решений

Пусть правая часть $f(t, x)$ системы $x' = f(t, x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение задачи Коши

$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

определенное на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

Remark 2.6.

Этот промежуток называется промежутком Пеано

Доказательство:

Будем вместо решения задачи Коши искать решение эквивалентного интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

Поскольку D – область (открытое множество), выберем константы $a, b > 0$ такие, что $K := \{(t, x) : |t - t_0| \le a; \ |x - x_0| \le b\} \subset D$

K – компакт, значит непрерывная функция огр. Пусть $M = \max\limits_{(t,x)\in K} |f(t, x)|; \ h := \min(a, \frac{b}{M})$

Remark 2.7.

Длина промежутка Пеано непрерывно зависит от начальной точки

Definition 2.14. Векторные нормы

Понятие нормы в $\mathbb{R}^n$:

1. $||x|| \geq 0$; $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||ax|| = |a|||x||\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Example 2.6.

1. $||x||_1 = |x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ – с этой нормой и будем работать
2. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклидова норма
3. $||x||_3 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

Definition 2.15. Равностепенная непрерывность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равностепенно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \varepsilon$

Definition 2.16. Равномерная ограниченность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равномерно ограничена, если $\exists C > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|\varphi_k(t)| \leq C$

Theorem 2.3. Теорема Арцела Асколи

Пусть последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Тогда существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi_*$ на $[\alpha, \beta]$

Definition 2.17. Кусочно-гладкая функция

Функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна, имеет производную везде, кроме конечного числа точек, а в тех точках имеет односторонние пределы

Definition 2.18. ε-решение системы

Пусть $\varepsilon > 0$. Кусочно-гладкая функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется ε-решением системы, если

1. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in [\alpha, \beta]$
2. $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$ во всех точках, где производная определена

Lemma 2.2.

Пусть $\varepsilon_m \to 0$ и $\varphi_m(t)$ – последовательность ε_m-решений системы на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi_m(t_0) = x_0$; $|f(t, \varphi_m(t))| \le M$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_*$. Тогда φ_* – решение задачи Коши

Доказательство:

Пусть Δ_m – последовательность функций, заданных формулой

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \Delta_m(t)$$

Интегрируя неравенство $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \le \varepsilon_m$ от t_0 до t, с учетом того, что $\varphi_m(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$, получаем $|\Delta_m(t)| \le \varepsilon_m(\beta - \alpha)$

Переходя к пределу в первой формуле, получаем, что $\varphi_*(t)$ – решение эквивалентного интегрального уравнения, а значит, и задачи Коши

Remark 2.8.

Далее, мы предложим метод построения таких приближенных решений. Мы будем строить эти решения на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, построение на промежутке $[t_0 - h, t_0]$ аналогично

Definition 2.19. Ломаные Эйлера

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на m равных частей:
$t_j = t_0 + \frac{hj}{m}$; $j = 0, \dots, m$
Положим $\varphi_m(t_0) = x_0$ и последовательно определим $\varphi_m(t) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))(t - t_j)$ при $j = 0, \dots, m-1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$
В частности $\varphi_m(t_{j+1}) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))\frac{h}{m}$
Если положить $A_j = (t_j, \varphi_m(t_j))$, то график $\varphi_m(t)$ – ломаная, соединяющая точки A_j

Proposition 2.1.

$K := \{(t, x) := |t - t_0| \le a;\ |x - x_0| \le b\} \subset D$
Для любого $m \in \mathbb{N}, t \in [t_0, t_0 + h]$ верно $(t, \varphi_m(t)) \in K$

Доказательство:

1. $|t - t_0| \le h = \min(a, \frac{b}{M})$
2. $t^* = \min\limits_{t \in [t_0, t_0+h]} \{|\varphi_m(t) - x_0| \ge b\}$

   С другой стороны, $|\varphi_m(t^*) - x_0| = |\varphi_m(t^*) - \varphi_m(t_0)| \le \int\limits_{t}^{t^*} |\varphi'_m(s)|ds \le M(t^* - t_0) \le Mh \le b$

Proposition 2.2.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0$, такое что при $m \ge m_0$ функция φ_m является ε-решением системы

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$

Если $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $|t - t_j| \le \frac{h}{m}$; $|f(t_j, \varphi_m(t_j)) - f(t, \varphi_m(t))| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ равномерно по t

Proposition 2.3.

Функции $\varphi_m(t)$ равномерно ограничены

Доказательство:

$|\varphi_m(t)| \leq M|t-t_0| + |x_0| \leq Mh + |x_0|$

Proposition 2.4.

Функции $\varphi_m(t)$ равностепенно непрерывны

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$

Theorem 2.4. Теорема Кнезера

В условиях теоремы существования, для любого $t_1 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ множество значений решений задачи Коши $\{x(t_1) : x(t) - \text{решение}\}$ замкнуто и связно

Exercise 2.1.

Доказать замкнутость (пользуемся утверждениями 2.1-2.4, леммой 2.1 и теоремой Арцела-Асколи)

Lemma 2.3. Лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть $u(t) \geq 0;\ f(t) \geq 0; u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$, при этом

для $t \geq t_0$ выполняется неравенство $u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1$, где $c > 0$ – константа

Тогда при $t \geq t_0$ имеем оценку $u(t) \leq c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$

Доказательство:

Из неравенства получаем $\frac{u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq 1$ и $\frac{f(t)u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq f(t)$

Т.к. $\frac{d}{dt}\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] = f(t)u(t)$, то проинтегрировав от t_0 до t, получим

$\ln\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] - \ln c \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1$, отсюда и из неравенства

$u(t) \leq c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \leq c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$, чтд

Theorem 2.5. Следствие леммы Гронуолла-Беллмана

1. $u(t) \le \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \Rightarrow u(t) \equiv 0$
2. $t \le t_0$

   $u(t) \le c + \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right| \Rightarrow u(t) \le c \cdot \exp\left|\int\limits_{t}^{t_0} f(t_1)dt_1\right|$

Доказательство:

В пункте 2 замена $s = -t$

Lemma 2.4. Усиленная лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет там неравенству $0 \le u(x) \le A + B\int\limits_{x_0}^{x} u(t)dt + \varepsilon(x - x_0)$ при $A, B, \varepsilon \ge 0$

Тогда при $x \in [x_0, x_0 + h]$ справедливо неравенство $u(x) \le Ae^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1)$

Exercise 2.2.

Доказать усиленную лемму Гронуолла-Беллмана

Definition 2.20. Условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица, $f \in Lip(A)$, если существует такая константа $L > 0$, что $|f(x) - f(y) \le L|x - y|$ для любых $x, y \in A$

Definition 2.21. Локальное условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого $x_0 \in A$ существует окрестность U точки x_0, в которой функция f удовлетворяет условию Липшица

Lemma 2.5.

Функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируема, где U – область в $\mathbb{R}^m$, значит f удовлетворяет в этой области локальному условию Липшица

Доказательство:

Возьмем точку $x_0 \in U$ и замкнутый шарик B с центром в x_0 такой, что $B \subset U$. Пусть $M = \max\limits_{x \in B} |Df(x)|$. Тогда по теореме о среднем $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ для любых $x, y \in B$

Definition 2.22. Условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_x(A)$ если существует такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in U$

Definition 2.23. Локальное условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_{loc,x}(A)$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует окрестность V этой точки и такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in V$

Theorem 2.6. Теорема об условии Липшица в компакте

Пусть вектор-функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области U. Тогда для любого компакта $K \subset U$ эта функция липшицева по x на этом компакте

Доказательство:

Пусть это утверждение неверно. Тогда существуют последовательности $(t_k, x_k) \in K$ и $(t_k, y_k) \in K, x_k \neq y_k$, такие что $|f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)| \geq k|x_k - y_k|$

НУО можем считать, что $t_k \to t^*,\ x_k \to x^*,\ y_k \to y^*$. При этом $(t^*, x^*), (t^*, y^*) \in K$

Возможны два случая:

1. $x^* \neq y^*$
   Тогда $\frac{|f(t_k,x_k)-f(t_k,y_k)|}{|x_k-y_k|} \to \infty,\ |x_k - y_k| \not\to 0 \Rightarrow |f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)|$ не ограничено. Противоречие (т.к. f непрерывна на компакте)
2. $x^* = y^*$
   В этом случае существует окрестность U точки (t^*, x^*) такая, что существует константа $L > 0$, что $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ для любых $(t, x), (t, y) \in U$
   Значит, такое неравенство выполнено для всех $(t_k, x_k), (t_k, y_k)$ начиная с некоторого номера. Противоречие

Theorem 2.7. Теорема единственности

Пусть $x' = f(t, x)$ – система оду. $f : D \to \mathbb{R}^n;\ D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и локально липшицева по x в области D

Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Пусть утверждение теоремы неверно. Есть такая точка $(t_0, x_0) \in D$, что задача Коши имеет два различных решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

$K = \{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \cup \{(t, \psi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\}$

Множество K – компакт. На нем выполнено глобальное условие Липшица по x, в частности $|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq L|\varphi(t) - \psi(t)|$. Положим $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$

$$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds;\ \psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds$$

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\right] ds$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\right] ds\right| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|ds \leq L\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)|ds$$

$u(t) \le L \int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds$ по следствию из леммы Гронуолла-Беллмана $u(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \psi(t)$

Theorem 2.8. Следствие

Пусть $x' = f(t,x)$ – система оду. $f : D \to \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области D. Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Remark 2.9.

Условие теоремы единственности достаточное, но не необходимое
$y' = y \ln|y|$; $y \neq 0$; $y' = 0$ при $y = 0$
$y = 0$ или $\ln|\ln|y|| = x + c \Rightarrow y = e^{ce^x}$
Единственность решений есть, а условия Липшица (даже локального) нет

Definition 2.24. Продолжение решения

Пусть есть решения $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \langle a_1, b_1\rangle \to \mathbb{R}^n$. Говорим, что решение ψ есть продолжение решения φ (продолжает решение φ), если

1. $\langle a, b\rangle \not\subseteq \langle a_1, b_1\rangle$
2. $\psi \mid_{\langle a,b\rangle} = \varphi$

Definition 2.25. Продолжимость влево

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым влево за a, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $a_1 < a$

Definition 2.26. Продолжимость вправо

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым вправо за b, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $b_1 > b$

Definition 2.27. Максимально продолженное решение

Решение $\varphi(t)$ называется непродолжимым или максимально продолженным, если решения $\psi(t)$, продолжающего $\varphi(t)$, не существует

Theorem 2.9. Теорема о продолжимости решений вправо за b

Пусть решение $\varphi(t)$ уравнения $x' = f(t,x)$ задано на промежутке $\langle a, b)$, причем существует предел $\lim\limits_{t \to b_-} \varphi(t) = x_0$ и $(b, x_0) \in D$. Тогда решение $\varphi(t)$ продолжимо вправо за b

Теорема о продолжимости решения влево за a выглядит аналогично

Доказательство:

Рассмотрим некоторое решение $\psi(t)$ задачи Коши для уравнения $x' = f(x,t)$ с начальными данными $x(b) = x_0$, заданное на промежутке Пеано $[b-h, b+h]$ и положим

$$\chi(t) = \left[\begin{array}{c} \varphi(t) \text{ если } t \in \langle a, b) \\ \psi(t) \text{ если } t \in [b, b+h] \end{array}\right.$$

Достаточно показать, что $\chi(t)$ – решение системы. Для этого достаточно проверить справедливость интегрального уравнения $\chi(t) = x_0 + \int\limits_b^t f(s, \chi(s))ds$

Пусть $\varphi(t_1) = x_1$, $\varphi(t) = x_1 + \int\limits_{t_1}^t f(s, \varphi(s))ds;\ \varphi(b) = x_0 = x_1 + \int\limits_{t_1}^b f(s, \varphi(s))ds$

Definition 2.28. Частничный порядок

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое множество. Отношение $\preccurlyeq$ на этом множестве называется частичным порядком, а само множество частично упорядоченным, если выполнены следующие соотношения

1. $a \preccurlyeq a$ для любого $a \in \mathfrak{M}$ (рефлексивность)
2. $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$ для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ (транзитивность)
3. $a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)

Example 2.7.

Обычный порядок на $\mathbb{R}$, делимость натуральных чисел, порядок по ключению для всех подмножеств некоторого множества $\mathfrak{A}$ ($A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A \subset B$)

Definition 2.29. Максимальный элемент

Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется максимальным, если $a \preccurlyeq b \Rightarrow b = a$

Definition 2.30. Линейный порядок

Частично упорядоченное множество называется линейно упорядоченным (или цепью), если для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ либо $a \preccurlyeq b$, либо $b \preccurlyeq a$

Definition 2.31. Верхняя грань

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется верхней гранью множества $\mathfrak{A}$, если $b \preccurlyeq a$ для любого $b \in \mathfrak{A}$

Lemma 2.6. Лемма Цорна

Если в частично-упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$ каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то само множество имеет максимальный элемент

Доказательство:

Доказывается как следствие из аксиомы выбора

Theorem 2.10.

Для любого $(t_0, x_0) \in D$ существует максимально продолженное решение задачи коши
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть $\mathfrak{M}$ – множество всех решений задачи Коши. Для любых двух решений φ, ψ задачи Коши говорим, что $\varphi \preccurlyeq \psi$, если ψ продолжает φ либо они совпадают. Для каждого решения φ обозначим символом $I(\varphi)$ область определения этого решения

Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторое линейно упорядоченное множество решений задачи. Положим $J = \bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{B}} I(\varphi)$. Отметим, что для каждой точки $t \in J$ все значения $\varphi(t)$ при $\varphi \in \mathfrak{B}$ совпадают

В самом деле, если $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, no одно решение является продолжением другого и, если они определены в одной точке, то их значения там совпадают

Тогда можно корректно определить решение $\eta(t)$, продолжающее все решения из $\mathfrak{B}$ (или совпадающее с кем-то из них). Это будет верхняя грань. Существование максимального элемента $\mathfrak{M}$ следует из леммы Цорна

Theorem 2.11.

Пусть $\varphi(t)$ – максимально продолженное решение системы, заданное на отрезке (a,b); $K \subset D$ – компакт. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\varphi(t) \notin K$ для любого $t \in (a, a+\varepsilon) \cup (b-\varepsilon, b)$

Доказательство:

Пусть не так. НУО существует $t_k \to b$ такая, что $\varphi(t_k) \in K$ для любого k. Можно считать, что $(t_k, \varphi(t_k)) \to (b, \varphi^*) \in K$

Тогда $(t, \varphi(t)) \to (b, \varphi^*)$ при $t \to b$. Существует $h_0 > 0, M > 0$ такие, что если $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$, то решение $\varphi(t)$ определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ и на этом отрезке $|\varphi'(t)| \leq M$. Следует из построения промежутка Пеано

При больших k $t_{k+1} - t_k < h$; $|\varphi(t) - \varphi(t_k)| \leq M(t - t_k)$ для любых $t \in [t_k, t_{k+1}]$

Отсюда $(t, \varphi(t)) \to (b, \varphi^*)$ при $t \to b$. Тогда $\varphi(t)$ можно продолжить вправо за b. Противоречие

Definition 2.32. Почти линейные системы

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная
Система $x' = f(t,x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t,x) \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 2.12.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на $\mathbb{R}$

3 Дифференциальные уравнения высшего порядка

Definition 3.1. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x)$ – линейное неоднородное порядка n
$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0$ – линейное однородное порядка n
Предполагается, что все функции a_i и f непрерывны на некотором промежутке $I = (a, b)$, который может быть прямой или лучом. При этом $a_n(x) \neq 0$ для любого $x \in I$.
Переменная y может быть вещественной и комплексной

Theorem 3.1. Основные свойства решений линейного уравнения

Решения – функции класса гладкости C^n, определенные на I и дающие при подстановке в уравнение тождество. Уравнение сводится к системе $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = \frac{-a_{n-1}(x)y_n - \ldots - a_0(x)y_1 + f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$
Отсюда следует, что решения уравнения с любыми начальными данными $x_0 \in I$, $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определены, единственны и продолжимы на I

Definition 3.2. Пространство решений однородной системы

Обозначим левую часть уравнения символом $\mathcal{L} := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y$
Это линейный оператор: $\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$
Соответственно, множество решений однородного уравнения – линейное пространство.
Поскольку каждым начальным данным соответствует ровно одно решение, размерность пространства равна n
Решения с начальными данными $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ образуют базис пространства решений. Это начальные данные $(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$

Remark 3.1.

Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ системы линейно зависмы, если существует константы $C_1, \ldots, C_k$, не все равные нулю, такие, что $C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0$

Definition 3.3. Определитель Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – решения системы. Вронскианом или определителем Вронского этого семейства решений называется функция от x:

$$W(x) = W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Theorem 3.2. Свойства определителя Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – решения уравнения. Тогда равносильны следующие условия:

1. $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) \equiv 0$
2. Существует $x_0 \in I$ такой, что $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = 0$
3. Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ Очевидно

$2 \Rightarrow 3$ $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = 0$. Тогда существуют константы $C_1, \ldots, C_n$, не все нулевые, такие что

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\varphi_1'(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Положим $\psi(x) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$

Тогда $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(x_0) = 0 \Rightarrow \psi(x) \equiv 0$

$3 \Rightarrow 1$ $C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow C_1\varphi_1^{(k)}(x)+\ldots+C_n\varphi_n^{(k)}(x) \equiv 0$ для любого $k = 1, \ldots, n-1 \Rightarrow$ $\Rightarrow W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) \equiv 0$

Theorem 3.3. Формула Остроградского-Лиувилля

Для любых $x_0, x \in I$ справедливо соотношение $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt}$

Доказательство:

Для начала, докажем формулу подсчета производных определителей:

Пусть $U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$ – определитель, состоящий из дифференцируемых функций. Тогда

$$U'(x) = \begin{vmatrix} u_{11}'(x) & \ldots & u_{1n}'(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}'(x) & \ldots & u_{nn}'(x) \end{vmatrix}$$

Формула следует из формулы производной произведения функций и из представления определителя в виде

$$U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \ldots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \ldots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \ldots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{p\in\prod_n} (-1)^{|p|} \prod_{i=1}^{n} u_{ip_i}(x)$$

Здесь $\prod_n$ – всевозможные перестановки n элементов, $|p|$ – четность перестановки

Отсюда $W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \dots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$

$+ \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$

$= 0 + 0 + \ldots + 0 + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_1^{(k)}(x) & -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_2^{(k)}(x) & \dots & -\frac{1}{a_n(x)}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(x)\varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} =$

$= -\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k)}(x) & \varphi_2^{(k)}(x) & \dots & \varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$

$= -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) = W'(x)$

Remark 3.2. Зачем нужна формула Остроградского-Лиувилля?

$y'' + xy' - y = 0$

Догадались, что решение $y = x$. Пусть другое решение – $\varphi(x)$

$\begin{vmatrix} \varphi(x) & x \\ \varphi'(x) & 1 \end{vmatrix} = W(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$. НУО $W(0) = -1$

$y'x - y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\varphi(x)$ – решение. Решение линейного однородного уравнения $y'x - y = 0$ – это $y = Cx$

$y = ux \Rightarrow u'x^2 + ux - ux = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

4 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Definition 4.1. Квазимногочлены

Так называются выражения $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами

Example 4.1.

1. $x \sin x$
2. $e^x + x^2 + e^{2x}$

Lemma 4.1.

Пусть наборы $(k_1, \lambda_1), \ldots, (k_m, \lambda_m)$; $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны (то есть для любых двух пар либо первая, либо вторая компоненты разные)
Тогда функции $\{x^{k_j} e^{\lambda_j x},\ \ j = 1, \ldots, m\}$ линейно независимы

Lemma 4.2.

Для любого квазимногочлена $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$ верно следующее
$f(x) \equiv 0 \Leftarrow P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \ldots \equiv P_n(x) \equiv 0$

Доказательство:

Отметим следующий факт. Пусть $\lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $(x^k e^{\lambda x})' = (\lambda x^k + k x^{k-1})e^{\lambda x}$, то есть справа при $e^{\lambda x}$ стоит многочлен степени k. Отсюда, следует, что если $\lambda \neq 0$ и $P(x)$ – многочлен, то $(P(x)e^{\lambda x})' = Q(x)e^{\lambda x}$, где $Q(x)$ – многочлен и $\deg Q = \deg P$

Будем доказывать индукцией по n – числу слагаемых

База: $n = 1$. Очевидно. $P(x)e^{\lambda x} \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv 0$

Переход: $n \to n+1$. Пусть $P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_n e^{\lambda_n x} + P_{n+1}(x)e^{\lambda_{n+1} x} \equiv 0$, причем $\deg P_{n+1} = m$

$P_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \ldots + P_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} + P_{n+1}(x) \equiv 0$

Продифференцируем полученное равенство $m+1$ раз по x. Получим

$Q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \ldots + Q_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} \equiv 0$, причем $\deg P_j = \deg Q_j$

Степень нулевого многочлена – $-\infty$. В силу индукционного предположения получаем, что $P_1(x) \equiv \ldots \equiv P_n(x) \equiv 0$. Тогда в силу базы $P_{n+1}(x) \equiv 0$

Notation 4.1.

Сейчас будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами:
$\mathcal{L}y := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$, где $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$

Remark 4.1.

Почти все результаты лекции применимы к случаю уравнений с комплексными коэффициентами

Definition 4.2. Характеристический многочлен

Многочлен $\chi(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ называется характеристическим многочленом уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Example 4.2.

$y'' + 3y' + 2y = 0$
$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = \chi(\lambda)$ – характеристическое уравнение
Заметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}, (e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}$
Отсюда следует, что $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$
В частсности, если λ – корень характеристического многочлена, то $e^{\lambda x}$ – решение уравнения. Например, e^{-x} и e^{-2x} – решения данного уравнения

Theorem 4.1.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда функции $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ – решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Доказательство:

Если λ_0 – корень кратности k, то $\chi(\lambda_0) = \chi'(\lambda_0) = \ldots = \chi^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$

С другой стороны, пусть $m \in \{0, \ldots, k-1\}$. Продифференцируем $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$ m раз по λ. С одной стороны, дифференцирования по x и λ коммутируют между собой и с умножением на константы. Следовательно $\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[x^m e^{\lambda x}]$

С другой стороны, по формуле производной произведения $\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}(\chi(\lambda)e^{\lambda x}) = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j \chi^{(j)}(\lambda)x^{m-j}e^{\lambda x}$

Подставляя $\lambda = \lambda_0$, получаем, что $\mathcal{L}[x^m e^{\lambda_0 x}] = 0$, значит $x^m e^{\lambda_0 x}$ – решение уравнения

Example 4.3.

1. $y''' + 5y'' + 6y' = 0$
   $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$. Корни – $0, -2, -3$. Решения: $1, e^{-2x}, e^{-3x}$
2. $y''' + y'' - y' - y = 0$
   $\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Корни – -1 (кратности 2), 1. Решения: e^{-x}, xe^{-x}, e^x

Lemma 4.3.

Пусть $\varphi(x)$ – комплексное решение уравнения с вещественными коэффициентами, тогда $\operatorname{Re}\varphi(x)$ и $\operatorname{Im}\varphi(x)$ – тоже решения

Example 4.4.

$y'' - 8y' + 25y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$
Будут решения $e^{(4\pm 3i)x} = e^{4x}(\cos 3x \pm i\sin 3x)$

Remark 4.2.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения кратности k, то $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ – тоже. Этой паре корней отвечает набор из $2k$ решений:
$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Example 4.5.

$y'''' + 2y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ (кратности 2)
Решения: $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$

Definition 4.3. Уравнения Эйлера

Это уравнения вида $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = 0$
Они заданы при $x > 0$ и при $x < 0$. Соответственно, замены $x = e^t$ и $x = -e^t$ $(t = \ln|x|)$ сводят уравнения Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами
Характеристический многочлен имеет вид
$\chi(\lambda) = a_n\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_1\lambda + a_0$

Lemma 4.4.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда ему отвечает набор решений $|x|^{\lambda_0}, |x|^{\lambda_0}\ln|x|, \ldots, |x|^{\lambda_0}(\ln|x|)^{k-1}$
Если есть пара комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k, то ей отвечают решения
$|x|^\alpha\cos(\beta\ln|x|), |x|^\alpha\ln|x|\cos(\beta\ln|x|), \ldots, |x|^\alpha(\ln|x|)^{k-1}\cos(\beta\ln|x|)$
$|x|^\alpha\sin(\beta\ln|x|), |x|^\alpha\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), \ldots, |x|^\alpha(\ln|x|)^{k-1}\sin(\beta\ln|x|)$

Example 4.6.

$x^2y'' + xy' - y = 0 \Rightarrow \chi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Definition 4.4. Почти линейная система

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция
Система $x' = f(t, x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные на всей оси функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t,x)| \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 4.2.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на $\mathbb{R}$

Доказательство:

Пусть $||x||$ – евклидова норма. Ясно, что для любого решения $x(t)$ системы имеем
$\frac{d}{dt}(||x(t)||^2) = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = 2\langle x(t), x'(t)\rangle$
Пусть максимальный промежуток существования решения $x(t)$ – интервал (a, b), содержащий точку t_0. Из последнего неравенства следует, что

$$||x(t)||^2 \leq ||x(t_0)||^2 + \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left|\frac{d}{ds}||x(s)||^2\right|\right| = ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\langle x(s), x'(s)\rangle| ds\right| \leq$$

$$\leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |\langle x(s), f(s, x(s))\rangle| ds\right| \leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} |x(s)||f(s, x(s))|| ds\right| \leq$$

$$\leq ||x(t_0)||^2 + 2\left|\int\limits_{t_0}^{t} ||x(s)||(A(s)||x(s)|| + B(s)) ds\right| \leq (*)$$

Пусть решение не продолжимо вправо за b. Тогда $b < +\infty$ и решение $x(t)$ стремится к бесконечности при $t \to b$ (оно же обязано покидать любой компакт!)

Тогда положим $C_1 = 2 \max\limits_{t \in [t_0, b]}(\max(A(t)), B(t)), C_2 = C_1|b - t_0|$

Воспользовавшись неравенством $||x(s)|| \leq \frac{1}{2}(||x(s)||^2 + 1)$, для оценки $B(s)||x(s)||$, получаем

$$(*) \leq ||x(t_0)||^2 + C_1\left|\int\limits_{t_0}^{t} ||x(s)||^2 ds\right| + C_1|t - t_0|$$

Отсюда и из леммы Гронуолла следует, что $||x(t)||^2$ ограничено на $[t_0, b]$. Противоречие

Продолжимость влево на $(-\infty, t_0]$ проверяется аналогично