Конспект Шорохова Сергея

Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Оргинфа **2**

2 Дифференциальные уравнения первого порядка **2**

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич
+79219181076 и +48572768176
kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция
Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$y' = xy$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b \rangle$ – интервал
Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b \rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b \rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D \ \forall x \in \langle a, b \rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$y' = xy$
Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
   $y' = xe^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$
$5 = Ce^0 = C$
Получаем ответ $y = 5e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$y' = \sqrt{y};\ y \geq 0$
Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)
Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи
Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D, то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Example 2.4.

$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x}$ или $x' = \frac{x}{y}$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = 0$

Definition 2.10. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$t, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R};$ t – время, $x_1 \ldots x_n$ – фазовые переменные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ x_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \quad \text{– скалярная запись системы}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{– векторная запись системы}$$

Notation 2.2. Как свести уравнение высшего порядка к системам?

Пусть есть уравнение $x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$
Полагаем $x_1 = x, \dots, x_n = x^{(n-1)}$
Получаем $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = g(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Example 2.5.

$x'' + \sin x = 0$
$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 \end{cases}$

Remark 2.5.

Предполагается что $f : D \to \mathbb{R}^n$ – непрерывна и $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definition 2.11. Решение системы

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением системы если

1. $\varphi \in C^1$
2. $(t, \varphi(t)) \in D \; \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = f(t, \varphi(t)) \; \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Definition 2.12. Задача Коши для систем

Пусть $t_0, x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R};\; (t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$
Начальные условия: $\begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$

Или в векторной форме: $x(t_0) = x_0$, где $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$

Задача Коши – уравнение + начальные условия
$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Definition 2.13. Эквивалентное интегральное уравнение

$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds$

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{R}^n$ называется решением эквивалентного интегрального уравнения, если

1. φ – непрерывна
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Lemma 2.1.

Функция $\varphi(t)$ – решение задачи Коши тогда и только тогда, когда она является решением эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение задачи Коши

1. φ непрерывна – очевидно
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается интегрированием уравнения $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ с учетом начальных условий

$\Leftarrow$ Пусть $\varphi(t)$ – решение интегрального уравнения

1. φ непрерывна и есть интеграл от непрерывной функции – значит дифференцируема
2. $(t, \varphi(t)) \in D \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \ \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается дифференцированием интегрального уравнения

Theorem 2.2. Теорема существования решений

Пусть правая часть $f(t, x)$ системы $x' = f(t, x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение задачи Коши

$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

определенное на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

Remark 2.6.

Этот промежуток называется промежутком Пеано

Доказательство:

Будем вместо решения задачи Коши искать решение эквивалентного интегрального уравнения $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

Поскольку D – область (открытое множество), выберем константы $a, b > 0$ такие, что $K := \{(t, x) : |t - t_0| \le a; \ |x - x_0| \le b\} \subset D$

K – компакт, значит непрерывная функция огр. Пусть $M = \max\limits_{(t,x) \in K} |f(t, x)|; \ h := \min(a, \frac{b}{M})$

Remark 2.7.

Длина промежутка Пеано непрерывно зависит от начальной точки

Definition 2.14. Векторные нормы

Понятие нормы в $\mathbb{R}^n$:

1. $||x|| \geq 0;\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||ax|| = |a|||x||\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Example 2.6.

1. $||x||_1 = |x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ – с этой нормой и будем работать
2. $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – евклидова норма
3. $||x||_3 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

Definition 2.15. Равностепенная непрерывность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равностепенно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \varepsilon$

Definition 2.16. Равномерная ограниченность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ – равномерно ограничена, если $\exists C > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta],\ k \in \mathbb{N}$ верно $|\varphi_k(t)| \leq C$

Theorem 2.3. Теорема Арцела Асколи

Пусть последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена. Тогда существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi_*$ на $[\alpha, \beta]$

Definition 2.17. Кусочно-гладкая функция

Функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна, имеет производную везде, кроме конечного числа точек, а в тех точках имеет односторонние пределы

Definition 2.18. ε-решение системы

Пусть $\varepsilon > 0$. Кусочно-гладкая функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ называется ε-решением системы, если

1. $(t, \varphi(t)) \in D\ \forall t \in [\alpha, \beta]$
2. $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$ во всех точках, где производная определена

Lemma 2.2.

Пусть $\varepsilon_m \to 0$ и $\varphi_m(t)$ – последовательность ε_m-решений системы на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi_m(t_0) = x_0$; $|f(t, \varphi_m(t))| \leq M$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_*$. Тогда φ_* – решение задачи Коши

Доказательство:

Пусть Δ_m – последовательность функций, заданных формулой

$\varphi_m(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \varphi_m(s))ds + \Delta_m(t)$

Интегрируя неравенство $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon_m$ от t_0 до t, с учетом того, что $\varphi_m(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$, получаем $|\Delta_m(t)| \leq \varepsilon_m(\beta - \alpha)$

Переходя к пределу в первой формуле, получаем, что $\varphi_*(t)$ – решение эквивалентного интегрального уравнения, а значит, и задачи Коши

Remark 2.8.

Далее, мы предложим метод построения таких приближенных решений. Мы будем строить эти решения на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, построение на промежутке $[t_0 - h, t_0]$ аналогично

Definition 2.19. Ломаные Эйлера

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на m равных частей:
$t_j = t_0 + \frac{hj}{m}$; $j = 0, \ldots, m$
Положим $\varphi_m(t_0) = x_0$ и последовательно определим $\varphi_m(t) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))(t - t_j)$ при $j = 0, \ldots, m-1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$
В частности $\varphi_m(t_{j+1}) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))\frac{h}{m}$
Если положить $A_j = (t_j, \varphi_m(t_j))$, то график $\varphi_m(t)$ – ломаная, соединяющая точки A_j

Proposition 2.1.

$K := \{(t, x) := |t - t_0| \leq a;\ |x - x_0| \leq b\} \subset D$
Для любого $m \in \mathbb{N}, t \in [t_0, t_0 + h]$ верно $(t, \varphi_m(t)) \in K$

Доказательство:

1. $|t - t_0| \leq h = \min(a, \frac{b}{M})$
2. $t^* = \min\limits_{t \in [t_0, t_0+h]} \{|\varphi_m(t) - x_0| \geq b\}$

   С другой стороны, $|\varphi_m(t^*) - x_0| = |\varphi_m(t^*) - \varphi_m(t_0)| \leq \int\limits_{t}^{t^*} |\varphi'_m(s)|ds \leq M(t^* - t_0) \leq Mh \leq b$

Proposition 2.2.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0$, такое что при $m \geq m_0$ функция φ_m является ε-решением системы

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$

Если $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $|t - t_j| \leq \frac{h}{m}$; $|f(t_j, \varphi_m(t_j)) - f(t, \varphi_m(t))| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ равномерно по t

Proposition 2.3.

Функции $\varphi_m(t)$ равномерно ограничены

Доказательство:

$|\varphi_m(t)| \le M|t-t_0| + |x_0| \le Mh + |x_0|$

Proposition 2.4.

Функции $\varphi_m(t)$ равностепенно непрерывны

Доказательство:

$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$

Theorem 2.4. Теорема Кнезера

В условиях теоремы существования, для любого $t_1 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ множество значений решений задачи Коши $\{x(t_1) : x(t) - \text{решение}\}$ замкнуто и связно

Exercise 2.1.

Доказать замкнутость (пользуемся утверждениями 2.1-2.4, леммой 2.1 и теоремой Арцела-Асколи)

Lemma 2.3. Лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть $u(t) \ge 0;\ f(t) \ge 0; u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$, при этом

для $t \ge t_0$ выполняется неравенство $u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1$, где $c > 0$ – константа

Тогда при $t \ge t_0$ имеем оценку $u(t) \le c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$

Доказательство:

Из неравенства получаем $\frac{u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \le 1$ и $\frac{f(t)u(t)}{c+\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1} \le f(t)$

Т.к. $\frac{d}{dt}\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] = f(t)u(t)$, то проинтегрировав от t_0 до t, получим

$\ln\left[c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right] - \ln c \le \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1$, отсюда и из неравенства

$u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \le c \cdot \exp(\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)dt_1)$, чтд

Theorem 2.5. Следствие леммы Гроноулла-Беллмана

1. $u(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1 \Rightarrow u(t) \equiv 0$
2. $t \leq t_0$

   $u(t) \leq c + \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(t_1)u(t_1)dt_1\right| \Rightarrow u(t) \leq c \cdot \exp\left|\int\limits_{t}^{t_0} f(t_1)dt_1\right|$

Доказательство:

В пункте 2 замена $s = -t$

Lemma 2.4. Усиленная лемма Гроноулла-Беллмана

Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет там неравенству $0 \leq u(x) \leq A + B\int\limits_{x_0}^{x} u(t)dt + \varepsilon(x - x_0)$ при $A, B, \varepsilon \geq 0$

Тогда при $x \in [x_0, x_0 + h]$ справедливо неравенство $u(x) \leq Ae^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1)$

Exercise 2.2.

Доказать усиленную лемму Гроноулла-Беллмана

Definition 2.20. Условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица, $f \in Lip(A)$, если существует такая константа $L > 0$, что $|f(x) - f(y) \leq L|x - y|$ для любых $x, y \in A$

Definition 2.21. Локальное условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого $x_0 \in A$ существует окрестность U точки x_0, в которой функция f удовлетворяет условию Липшица

Lemma 2.5.

Функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируема, где U – область в $\mathbb{R}^m$, значит f удовлетворяет в этой области локальному условию Липшица

Доказательство:

Возьмем точку $x_0 \in U$ и замкнутый шарик B с центром в x_0 такой, что $B \subset U$. Пусть $M = \max\limits_{x \in B} |Df(x)|$. Тогда по теореме о среднем $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ для любых $x, y \in B$

Definition 2.22. Условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_x(A)$ если существует такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in U$

Definition 2.23. Локальное условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной x, $f \in Lip_{loc,x}(A)$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует окрестность V этой точки и такая константа $L > 0$, что $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t,x_1),(t,x_2) \in V$

Theorem 2.6. Теорема об условии Липшица в компакте

Пусть вектор-функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области U. Тогда для любого компакта $K \subset U$ эта функция липшицева по x на этом компакте

Доказательство:

Пусть это утверждение неверно. Тогда существуют последовательности $(t_k, x_k) \in K$ и $(t_k, y_k) \in K, x_k \neq y_k$, такие что $|f(t_k,x_k) - f(t_k,y_k)| \geq k|x_k - y_k|$

НУО можем считать, что $t_k \to t^*,\ x_k \to x^*,\ y_k \to y^*$. При этом $(t^*,x^*),(t^*,y^*) \in K$

Возможны два случая:

1. $x^* \neq y^*$
   Тогда $\frac{|f(t_k,x_k)-f(t_k,y_k)|}{|x_k-y_k|} \to \infty,\ |x_k - y_k| \not\to 0 \Rightarrow |f(t_k,x_k) - f(t_k,y_k)|$ не ограничено. Противоречие (т.к. f непрерывна на компакте)
2. $x^* = y^*$
   В этом случае существует окрестность U точки (t^*,x^*) такая, что существует константа $L > 0$, что $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$ для любых $(t,x),(t,y) \in U$
   Значит, такое неравенство выполнено для всех $(t_k,x_k),(t_k,y_k)$ начиная с некоторого номера. Противоречие

Theorem 2.7. Теорема единственности

Пусть $x' = f(t,x)$ – система оду. $f : D \to \mathbb{R}^n;\ D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и локально липшицева по x в области D

Тогда для любой пары $(t_0,x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Пусть утверждение теоремы неверно. Есть такая точка $(t_0,x_0) \in D$, что задача Коши имеет два различных решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

$K = \{(t,\varphi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \cup \{(t,\psi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\}$

Множество K – компакт. На нем выполнено глобальное условие Липшица по x, в частности $|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))| \leq L|\varphi(t) - \psi(t)|$. Положим $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$

$$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds;\ \psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds$$

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\right] ds$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \left[f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\right] ds\right| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|ds \leq L\int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)|ds$$

$u(t) \leq L\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds$ по следствию из леммы Гроноулла-Беллмана $u(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \psi(t)$

Theorem 2.8. Следствие

Пусть $x' = f(t,x)$ – система оду. $f: D \to \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области D. Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Remark 2.9.

Условие теоремы единственности достаточное, но не необходимое
$y' = y\ln|y|$; $y \neq 0$; $y' = 0$ при $y = 0$
$y = 0$ или $\ln|\ln|y|| = x + c \Rightarrow y = e^{ce^x}$
Единственность решений есть, а условия Липшица (даже локального) нет

Definition 2.24. Продолжение решения

Пусть есть решения $\varphi : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \langle a_1, b_1\rangle \to \mathbb{R}^n$. Говорим, что решение ψ есть продолжение решения φ (продолжает решение φ), если

1. $\langle a,b\rangle \nsubseteq \langle a_1, b_1\rangle$
2. $\psi\mid_{\langle a,b\rangle} = \varphi$

Definition 2.25. Продолжимость влево

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым влево за a, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $a_1 < a$

Definition 2.26. Продолжимость вправо

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым вправо за b, если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $b_1 > b$

Definition 2.27. Максимально продолженное решение

Решение $\varphi(t)$ называется непродолжимым или максимально продолженным, если решения $\psi(t)$, продолжающего $\varphi(t)$, не существует

Theorem 2.9. Теорема о продолжимости решений вправо за b

Пусть решение $\varphi(t)$ уравнения $x' = f(t,x)$ задано на промежутке $\langle a,b)$, причем существует предел $\lim\limits_{t\to b_-} \varphi(t) = x_0$ и $(b, x_0) \in D$. Тогда решение $\varphi(t)$ продолжимо вправо за b
Теорема о продолжимости решения влево за a выглядит аналогично