Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 Глава 9. Теория меры

1.1 §1. Системы множеств

Definition 1.1. Объемлющее множество

X – объемлющее множество. Будем рассматривать $A \subset X$

Declaration 1.1. Обозначения

$A \sqcup B$ – объединение множеств A и B и множества A и B не пересекаются

$\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ – объединение и $A_i \cap A_j = \varnothing$

Дизъюнктные множества = непересекающиеся множества

Definition 1.2. Разбиение множества

Множества $E_\alpha,\ \alpha \in I$ – разбиение множества E, если $E = \bigsqcup\limits_{a \in I} E_\alpha$

Definition 1.3. Система подмножеств и ее свойства

$\mathcal{A}$ – система подмножеств X (т.е. $\mathcal{A} \subset 2^X$)

1. $\mathcal{A}$ имеет свойство σ_0, если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ имеет свойство δ_0, если $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ имеет свойство σ, если $\forall A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. $\mathcal{A}$ имеет свойство δ, если $\forall A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
5. $\mathcal{A}$ – симметричная система, если $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

Reminder 1.1.

$X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$

$X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$

Proposition 1.1.

Если $\mathcal{A}$ симметричная система, то $\begin{matrix} (\sigma_0) \Leftrightarrow (\delta_0) \\ (\sigma) \Leftrightarrow (\delta) \end{matrix}$

Definition 1.4. Алгебра

$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ – симметричная система
3. Есть свойства (σ_0) и (δ_0)

Definition 1.5. σ-алгебра

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}$ – симметричная система
3. Есть свойства (σ) и (δ)

Theorem 1.1. Свойства

1. Если $\mathcal{A}$ – алгебра и $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
2. Если $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, то $\mathcal{A}$ – алгебра
3. Если $\mathcal{A}$ – алгебра и $A, B \in \mathcal{A}$, то $\underbrace{A \setminus B}_{A \cap (X \setminus B)} \in \mathcal{A}$

Example 1.1.

1. $X = \mathbb{R}^n$
   $\mathcal{A}$ – все ограниченные множества и их дополнения. Это алгебра, но не σ-алгебра
2. 2^X – σ-алгебра
3. Индуцированная $(\sigma$-)алгебра
   $Y \subset X,\ \mathcal{A}$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   $\mathcal{B} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств Y
4. $X \supset A, B$
   $\mathcal{A}$ – алгебра подмножеств X
   $\varnothing, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, A \triangle B, X \setminus (A \cap B), X \setminus (A \cup B),$
   $X \setminus (A \triangle B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A)$
5. A_α – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   Тогда $\mathcal{B} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – $(\sigma$-)алгебра подмножеств X
   Доказательство:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{B}$
   (b) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{B}$

Theorem 1.2.

Пусть $\mathcal{E}$ – система подмножеств X
Тогда существует наименьшая по включению $(\sigma$-)алгебра $\mathcal{A}$, содержащая $\mathcal{E}$

Доказательство:

Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные алгебры, содержащие $\mathcal{E}$ (2^X подходит)

$\mathcal{A} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра и $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha$

Definition 1.6. Борелевская оболочка

$\mathcal{E}$ – система подмножеств X
Борелевская оболочка системы $\mathcal{E}$ – наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$

Declaration 1.2. Обозначение

$\mathcal{B}(\mathcal{E})$

Definition 1.7. Борелевская σ-алгебра

Борелевская σ-алгебра – это $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – всевозможные открытые множества в $\mathbb{R}^n$

Declaration 1.3. Обозначение

$\mathcal{B}^n$

Remark 1.1.

$\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Definition 1.8. Кольцо

$\mathcal{A}$ – семейство подмножеств X
$\mathcal{A}$ – кольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A},\ A \cup B \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Remark 1.2.

$\mathcal{A}$ – алгебра $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ – кольцо и $X \in \mathcal{A}$

Definition 1.9.

$\mathcal{P}$ – семейство подмножеств X
$\mathcal{P}$ – полукольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

Example 1.2.

1. $X = \mathbb{R};\ \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ – полукольцо
2. $X = \mathbb{R};\ \mathcal{P} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$ – полукольцо

Lemma 1.1.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \underbrace{(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)}_{B_k} \text{ (для } \infty \text{ вместо } n \text{ тоже верно)}$$

Доказательство:

- $B_k \subset A_k \Rightarrow \supset$ верно
- $\subset$ возьмем $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow$ найдется наименьший индекс m, т.ч. $x \in A_m$ и $x \notin A_{m-1} \dots A_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in B_m$
- Дизъюнктность $k < m \Rightarrow B_k \cap B_m = \varnothing$
  $B_m = A_m \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} A_j \subset A_m \setminus A_k \subset A_m \setminus B_k$
  $B_k \subset A_k$

Theorem 1.3.

$\mathcal{P}$ – полукольцо. Тогда

1. $P, P_1 \dots P_n \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_1 \dots Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч. $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$
2. $P_1, P_2 \dots \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists Q_{ij} \in \mathcal{P}$, т.ч. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \subset P_k \forall\ k, j$
3. В п. 2 можно вместо n написать ∞

Доказательство:

1. Индукция. База $n = 1$ – определение полукольца
   Переход $n \to n + 1$
   $$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = \underbrace{(P \setminus \bigcup_{k=1}^{n} P_k)}_{\text{инд. предполож.}} \setminus P_{n+1} = \underbrace{(\bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j)}_{\text{где } Q_j \in \mathcal{P}} \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \bigsqcup_{i=1}^{m_j} Q_{ji}$$
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \underbrace{(P_k \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j)}_{\text{п. 1}}$

Definition 1.10.

$\mathcal{P}$ – полукольцо подмножеств X
$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмножеств Y
$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{A \times B : A \in \mathcal{P} \text{ и } B \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$

Theorem 1.4.

Декартово произведение полуколец – полукольцо

Доказательство:

1. Пустые очев
2. $C \times D$ и $A \times B \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \Rightarrow (A \times B) \cap (C \times D) = \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \cap D)}_{\in \mathcal{Q}}$
3. $A \times B, C \times D \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \stackrel{?}{\Rightarrow} (A \times B) \setminus (C \times D) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \underbrace{P_k}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{Q_k}_{\in \mathcal{Q}}$

   $(A \times B) \setminus (C \times D) = \underbrace{(A \setminus C)}_{\bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_j} \times \underbrace{B}_{\in \mathcal{Q}} \sqcup \underbrace{(A \cap C)}_{\in \mathcal{P}} \times \underbrace{(B \setminus D)}_{\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} Q_i}$

Definition 1.11. Замкнутый и открытый параллелепипеды

$a, b \in \mathbb{R}^n$
Замкнутый параллелепипед $[a, b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$
Открытый параллелепипед $(a, b) := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$

Definition 1.12. Ячейка

$a, b \in \mathbb{R}^n$
Ячейка $(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n]$

Remark 1.3.

$(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$

Proposition 1.2.

1. Непустая ячейка – объединение возрастающей (по включению) последовательности замкнутых параллелепипедов
2. Непустая ячейка – пересечение убывающей (по включению) последовательности открытых параллелепипедов

Доказательство:

1. $A_k := [a_1 - \frac{1}{k}, b_1] \times [a_2 - \frac{1}{k}, b_2] \times \ldots \times [a_n - \frac{1}{k}, b_n]$

   $A_{k+1} \supset A_k$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = (a, b]$
2. $B_k := (a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times (a_2, b_2 + \frac{1}{k}) \times \ldots \times (a_n, b_n + \frac{1}{k})$

   $B_{k+1} \subset B_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = (a, b]$

Declaration 1.4. Обозначения

$\mathcal{P}^n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$
$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q}^n\}$

Proposition 1.3.

$\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – полукольца

Доказательство:

$\mathcal{P}^n = \underbrace{\mathcal{P}^1 \times \mathcal{P}^1 \times \ldots \times \mathcal{P}^1}_{\text{полукольца}}$

Theorem 1.5.

G – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^m$
Тогда G представимо в виде счетного дизъюнктного объединения ячеек с рациональными координатами вершин

Доказательство:

У АИ тут рисуночки, посмотрите запись!

Для $x \in G$ построим ячейку P_x с рациональными координатами вершин, т.ч. $P_x \in G$ и $x \in P_x$

$\bigcup\limits_{x \in G} P_x = G$

Ячеек с рациональными координатами вершин счетное число. Значит если выкинуть повторы из объединения выше, то останется счетное объединение

$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_{x_n} = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} \coprod\limits_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ – ячейки с рациональными координатами вершин

Theorem 1.6. Следствие

$\mathcal{B}^m = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

Доказательство:

1. $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}^m \supset \mathcal{P}^m$
   $(a, b]$ – счетное пересечение открытых параллелепипедов (т.к. открытых множеств) $\Rightarrow$ $(a, b]$ лежит в σ-алгебре, содержащей все открытые множества
2. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$, но $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$
3. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \supset \mathcal{B}^m$. Достаточно доказать, что $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$ содержит все открытые множества. Это следует из теоремы 1.5.

1.2 §2. Объем и мера

Definition 1.13. Объем

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$
μ – объем, если

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, \dots A_n$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu A_k$

Definition 1.14. Мера

$\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$
μ – мера, если

1. $\mu\varnothing = 0$
2. Если $A_1, A_2 \dots$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

Exercise 1.1.

Если $\mu\varnothing \neq +\infty$, то $\mu\varnothing = 0$ из свойства 2

Example 1.3. Примеры объемов

1. $X = \mathbb{R},\ \mathcal{P}^1$. Длина – объем. $\mu(a, b] = b - a$
2. $X = \mathbb{R},\ \mathcal{P}^1$. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нестрого возрастающая функция
   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$
3. Классический объем на $\mathcal{P}^m$
   $\lambda_m(a, b] = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ – объем и даже мера (докажем позже)
4. $x_0 \in X;\ \mu A = \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$
5. $X = \mathbb{R}^2;\ \mathcal{P}$ – ограниченные множества и их дополнения
   $\mu A = \begin{cases} 0 & A \text{ – ограничена} \\ 1 & A \text{ дополнение ограничено} \end{cases}$ – объем, но не мера

Theorem 1.7. Свойства объема

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – объем на $\mathcal{P}$. Тогда

1. Монотонность
   $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $P \subset \tilde{P} \Rightarrow \mu P \leq \mu\tilde{P}$
2. Усиленная монотонность
   $P_1, P_2 \dots P_n, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k \leq \mu\tilde{P}$

2'. $P_1, P_2 \dots, \tilde{P} \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P \subset \tilde{P} \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu\tilde{P}$

3. Конечная полуаддитивность
   $P_1 \dots P_n, P \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow \mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu P_k$

Доказательство:

2. $\tilde{P} \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$

$$\tilde{P} = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{m} Q_j \Rightarrow \mu\tilde{P} = \sum_{k=1}^{n} \mu P_k + \underbrace{\sum_{j=1}^{m}}_{\geq 0} \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^{n} \mu P_k$$

2'. Предельный переход в неравенстве

3. $P'_k := P_k \cap P \in \mathcal{P} \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k \underbrace{=}_{\text{th.}} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ (они из $\mathcal{P}$) $\Rightarrow \mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$

$$P_k \supset P'_k \supset \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj} \Rightarrow \mu P_k \geq \sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}$$

Remark 1.4.

1. Если μ – объем на алгебре $\mathcal{A}$, $A \subset B;\ A, B \in \mathcal{A}$ и $\mu A < +\infty$, то $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$
   Доказательство: Т.к. $B = A \sqcup (B \setminus A)$
2. Объем на полукольце можно продолжить на кольцо, состоящего из всевозможных объединений элементов полукольца

Theorem 1.8.

$\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – полукольца подмножеств X и Y. μ и ν – объемы на $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$
$\lambda \underbrace{(P \times Q)}_{P \in \mathcal{P};\ Q \in \mathcal{Q}} := \mu P \cdot \nu Q$ (считаем, что $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$)
Тогда λ – объем на $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$

Theorem 1.9. Следствие

Классический объем λ_m – объем

Доказательство:

Случай 1. $P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P_j$ и $Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$

Тогда $P \times Q = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_j \times Q_k$

$$\lambda(P \times Q) = \mu P \cdot \nu Q = \sum_{j=1}^{m} \mu P_j \cdot \sum_{k=1}^{n} \nu Q_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \mu P_j \cdot \nu Q_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda(P_j \times Q_k)$$

Случай 2. $P \times Q = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \times Q_k \overset{?}{\Rightarrow} \lambda(P \times Q) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda(P_k \times Q_k)$

Разбиваем P на кусочки $P = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} P'_j$ и каждая P_k – дизъюнктное объединение каких-то P'_j

Example 1.4. Примеры мер

1. λ_m – мера (потом докажем)
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нестрого возрастающая и непрерывная справа во всех точках
   $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера
3. $x_0 \in X;\ \mu A = \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$ – мера на 2^X
4. Считающая мера = количество элементов в множестве
5. $X;\ \begin{matrix} t_1, t_2 \ldots \in X \\ w_1, w_2 \ldots \geq 0 \end{matrix};\ \mu A := \sum\limits_{k: t_k \in A} w_k$ – мера на 2^X

   Счетная аддитивность: $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \overset{?}{\Rightarrow} \mu A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k$

   В множестве A_k гирьки $w_{k_1}, w_{k_2} \ldots$

   $\mu A_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_{k_j}$ и $\mu A = \sum w_{k_j}$

   Надо понять, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_{k_j} = \sum w_{k_j}$

   $\leq$: $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{j=1}^{\infty} w_{k_j}}_{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{K} w_{k_j}} \leq R \Rightarrow L \leq R$

   $\geq$: Берем частичную сумму S для R. Надо доказать, что $S \leq L$
   $\begin{matrix} K = \max k \text{ в этой частичной сумме} \\ J = \max j \text{ в этой частичной сумме} \end{matrix} \Rightarrow S \leq \sum\limits_{k=1}^{K} \sum\limits_{j=1}^{J} w_{k_j} \leq L$

Theorem 1.10.

$\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда
μ – мера $\Leftrightarrow$ (счетная полуаддитивность)
$(P, P_k \in \mathcal{P})\ \forall P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \Rightarrow \mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

Доказательство:

$\Leftarrow$: $P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \xRightarrow[\text{сч. полуадд.}]{} \mu P \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

$P = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \xRightarrow[\text{усил. монот.}]{} \mu P \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

$\Rightarrow$: $P'_k := P \cap P_k \Rightarrow P = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P'_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$, где $Q_{k_j} \subset P'_k \subset P_k \xRightarrow[\mu\text{ – мера}]{} \mu P = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{k_j}}_{\leq \mu P_k}$

$\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j} \subset P_k \xRightarrow[\text{усил. монот.}]{} \mu P_k \geq \sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu Q_{k_j}$

Theorem 1.11. Следствие

μ – мера на σ-алгебре. Тогда счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры

Доказательство:

$$\mu A = 0;\ A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu A \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k = 0 \Rightarrow \mu A = 0$$

Theorem 1.12. Непрерывность меры снизу

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда равносильны

1. μ – мера
2. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots;\ A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu A_k$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2:$ $A_0 \neq \varnothing$ и $B_k := A_k \setminus A_{k-1};\ A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow \mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu B_k}_{\mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k)} = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$$

$2 \Rightarrow 1:$ Пусть $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k;\ A_n := \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k \Rightarrow A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu C_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k$

Theorem 1.13. Непрерывность меры сверху

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$. Следующие условия равносильны

1. μ – мера
2. Непрерывность меры сверху
   $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots;\ A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu A_k$
3. Непрерывность меры сверху на пустом множестве
   $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots;\ A_k \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \mu A_k = 0$

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2:$ $B_k := A_1 \setminus A_k;\ B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k. \text{ По предыдущей теореме } \underbrace{\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)}_{\mu A_1 - \mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k)} = \lim_{k\to\infty} \mu B_k = \mu A_1 - \lim_{k\to\infty} \mu A_k$$

$2 \Rightarrow 3:$ Очев, 3. – частный случай 2.

$3 \Rightarrow 1: \ A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k; A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k; \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ и $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \lim \mu A_n = 0$

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu C_k}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_k} + \underbrace{\mu A_n}_{\to 0}$$

Theorem 1.14. Следствие

μ – мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $\mu A_m < +\infty$ для некоторого m

Тогда $\mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim \mu A_k$

Доказательство:

Пишем $A_m \setminus A_k$ вместо $A_1 \setminus A_k$

Remark 1.5.

Условие $\mu X < +\infty$ важно. $A_n := [n, +\infty)$ и $\lambda_1 A_n = +\infty$; $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing$

Exercise 1.2.

Придумать объем, не являющийся мерой, который обладает свойством из следствия

1.3 §3. Продолжение меры

Definition 1.15. Субмера

$\nu : 2^X \to [0, +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu\varnothing = 0$
2. Монотонность: $A \subset B \Rightarrow \nu A \leq \nu B$
3. Счетная полуаддитивность: $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \nu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

Remark 1.6.

2. – частный случай 3.

Definition 1.16. Полная мера

μ – мера на $\mathcal{A}$. μ – полная мера, если
$A \in \mathcal{A}$, т.ч. $\mu A = 0 \Rightarrow \forall B \subset A\ B \in \mathcal{A}$ (и тогда $\mu B = 0$)

Definition 1.17.

ν – субмера. $E \subset X$
E – ν-измеримое множество, если $\forall A \subset X \Rightarrow \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Remark 1.7.

1. Достаточно требовать $\geq$, т.к. $\leq$ из полуаддитивности
2. $E_1, E_2 \dots E_n$ – ν-измеримые и $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow \nu(A \cap E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)$

   Индукция по n. $n \to n+1$

   $$\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} E_k) = \nu\,\underbrace{((A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} E_k) \cap E_{n+1})}_{A \cap E_{n+1}} + \nu\,\underbrace{((A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n+1} E_k) \setminus E_{n+1})}_{A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k}$$

Theorem 1.15. Теорема Каратеодори

ν – субмера. Тогда

1. ν-измеримые множества образуют σ-алгебру
2. Сужение ν на эту σ-алгебру – полная мера

Доказательство:

$\mathcal{A}$ – семейство всех ν-измеримых множеств

1. Маленькими шагами :)

Шаг 1. Если $\nu E = 0$, то E будет ν-измеримым

$$\nu\,\underbrace{(A \cap E)}_{\subset E} + \nu\,\underbrace{(A \setminus E)}_{\subset A} \leq \nu E + \nu A = 0 + \nu A = \nu A$$

Шаг 2. $\mathcal{A}$ – симметричная, т.к. если $E \in \mathcal{A}$, то $X \setminus E \in \mathcal{A}$
$A \cap (X \setminus E) = A \setminus E;\ A \setminus (X \setminus E) = A \cap E$

Шаг 3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F) + \nu \underbrace{((A \setminus E) \setminus F)}_{A \setminus (E \cup F)} \geq$$

$$\geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$$

Шаг 4. $\mathcal{A}$ – алгебра

Шаг 5. $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и $E_n \in \mathcal{A} \overset{?}{\Rightarrow} E \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k)}_{\to \sum\limits_{k=1}^{\infty}} + \nu(A \setminus E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k) + \nu(A \setminus E) \geq \nu(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k))}_{A \cap E} + \nu(A \setminus E)$$

Шаг 6. $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$

Переделаем в дизъюнктное объединение

Т.е. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра

2. $\nu \mid_{\mathcal{A}}$ – мера, т.к. это объем и счетная полуаддитивная

$\nu(A \cap \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A \cap E_k);\ A = X \Rightarrow$ объем

$\nu \mid_{\mathcal{A}}$ – полная мера. Если $\nu B = 0$ и $A \subset B$, то $\nu A = 0$ и тогда $A \in \mathcal{A}$ по шагу 1

Definition 1.18. Внешняя мера

μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. Внешняя мера, порожденная μ называется

$\mu^* A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu A_k : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k, A_k \in \mathcal{P}\}$

Если такого покрытия для A нет, то $\mu^* A = +\infty$

Remark 1.8.

1. Можем рассматривать только покрытия дизъюнктными множествами
   $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j}$ и $\bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{k_j} \subset A_k$
2. Если μ – мера на σ-алгебре, то $\mu^* A = \inf\{\mu B : B \supset A$ и $B \in \mathcal{A}\}$

Theorem 1.16.

μ^* – субмера, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$

Доказательство:

Шаг 1. Если $A \in \mathcal{P}$, то $\mu A = \mu^* A$

$\geq$ Берем покрытие $A, \varnothing, \varnothing, \ldots$. $\mu^* A = \inf \leq \mu A$

$\leq$ $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ (счетная полуаддитивность меры) $\Rightarrow \mu A \leq \inf = \mu^* A$

Шаг 2. μ^* – субмера

Надо проверить, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu^* A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$

Если справа есть $+\infty$, то все очев. Считаем, что $\mu^* A_n < +\infty$

Возьмем покрытие $A_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk}$, т.ч. $C_{nk} \in \mathcal{P}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{nk}$

$\mu^* A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu C_{nk} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \varepsilon + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n$

Definition 1.19. Стандартное продолжение меры

μ_0 – мера на полукольце $\mathcal{P}$
μ_0^* – внешняя мера, построенная по μ_0 – субмера
μ – сужение субмеры μ_0^* на μ_0^*-измеримые множества
μ называется стандартным продолжением μ_0

Declaration 1.5.

Будем писать μ-измеримые, вместо μ_0^*-измеримые

Theorem 1.17.

Это действительно продолжение. Т.е. множества из $\mathcal{P}$ будут μ-измеримы

Доказательство:

Шаг 1. Если E и $A \in \mathcal{P}$, то $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

$\mu_0^* A = \mu_0 A$ и $\mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$

$A \setminus E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$, где $Q_k \in \mathcal{P} \Rightarrow A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k \Rightarrow \mu_0 A = \mu_0(A \cap E) + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_0^* Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} \geq$

$\geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

Шаг 2. Если $E \in \mathcal{P}$, а $A \notin \mathcal{P}$

Если $\mu_0^* A = +\infty$, то неравенство очевидно. Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$

Возьмем покрытие $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, т.ч. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \varepsilon$ ($P_n \in \mathcal{P}$)

$\mu_0 P_k \geq \mu_0^*(P_k \cap E) + \mu_0^*(P_k \setminus E)$

$\varepsilon + \mu_0^* A > \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E) \geq \mu_0^* \underbrace{(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E))}_{\supset A \cap E} + \mu_0^* \underbrace{(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E))}_{\supset A \setminus E} \geq$

$\geq \mu_0^*(A \cap E) + \mu_0^*(A \setminus E)$

Definition 1.20. σ-конечная мера

Мера μ – σ-конечная, если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\mu X_n < +\infty$

Remark 1.9.

1. Меру и ее стандартное продолжение будем обозначать одинаково
2. μ задана на σ-алгебре
   $\mu A = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P},\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$
3. Применение стандартного продолжения к стандартному продолжению меры не дает ничего нового
4. Можно ли продолжить меру на более широкий класс множеств?
   Обычно да, но нет однозначности продолжения
5. Можно ли по-другому продолжить меру на σ-алгебру μ-измеримых множеств?
   Если μ_0 – σ-конечная мера, то нет!
6. Обязательно ли полная мера задана на σ-алгебре μ-измеримых множеств?
   Если μ_0 – σ-конечная, то да

Exercise 1.3.

Доказать замечание 1.9.3.
Подсказка: нужно доказать, что $\mu_0^* = \mu^*$

Theorem 1.18.

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с полукольца
μ^* – внешняя мера. A – множество, т.ч. $\mu^* A < +\infty$. Тогда существует $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $C_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk},\ C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n,\ C \supset A$ и $\mu C = \mu^* A$

Доказательство:

$\mu^* A = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$

Пусть $B_{nk} \in \mathcal{P}$, т.ч. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A$

$A \subset C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{nk} \Rightarrow \mu C_n \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}$

$A \subset C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset C_n;\ \mu C \le \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n} \Rightarrow \mu C \le \mu^* A$

$C \supset A \Rightarrow \mu^* A \le \mu^* C = \mu C$

Theorem 1.19. Следствие

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с $\mathcal{P}$, A – μ-измеримое множество.
$\mu A < +\infty$. Тогда существует $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и e – μ-измеримое, т.ч. $A = B \sqcup e$ и $\mu e = 0$

Доказательство:

По теореме существует $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, т.ч. $A \subset C$ и $\mu A = \mu C$

$e_1 := C \setminus A;\ \mu e_1 = \mu C - \mu A = 0$

По теореме найдется $e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$, т.ч. $e_1 \subset e_2$ и $\mu e_2 = \mu e_1 = 0 \Rightarrow A \supset C \setminus e_2$

$\mu(\underbrace{C \setminus e_2}_{B}) = \mu C = \mu A$

$e := A \setminus B \Rightarrow \mu e = \mu A - \mu B = 0$

Theorem 1.20. Единственность продолжения

$\mathcal{P}$ – полукольцо, μ – стандартное продолжение с полукольца, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра, на которой задана μ. ν – мера на $\mathcal{A}$, т.ч. $\mu P = \nu P\ \forall P \in \mathcal{P}$
Если мера μ – σ-конечна, то $\mu A = \nu A\ \forall A \in \mathcal{A}$

Reminder 1.2. σ-конечность

μ – σ-конечна, если $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\mu X_n < +\infty$

Доказательство:

Шаг 1. $\mu A \geq \nu A\ \forall A \in \mathcal{A}$

$\mu A = \inf\{\underbrace{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k}_{\geq \nu A} : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ и $P_k \in \mathcal{P}\}$. По усиленной монотонности меры ν

$\nu A \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu P_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu P_k \Rightarrow \mu A \geq \nu A$

Шаг 2. Если $E \in \mathcal{A}$ и $\mu P < +\infty$, то $\mu(P \cap E) = \nu(P \cap E)\ \forall P \in \mathcal{P}$

$\mu P = \underbrace{\mu(P \cap E)}_{\geq \nu(P \cap E)} + \underbrace{\mu(P \setminus E)}_{\geq \nu(P \setminus E)} \geq \nu(P \cap E) + \nu(P \setminus E) = \nu P \Rightarrow \mu(P \cap E) = \nu(P \cap E)$

Шаг 3. $\mu A = \nu A\ \forall A \in \mathcal{A}$

μ – σ-конечная $\Rightarrow X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, т.ч. $P_n \in \mathcal{P}$ и $\mu P_n < +\infty$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap P_n)$

$\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap P_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap P_n) = \nu A$

1.4 §4. Мера Лебега

Theorem 1.21.

λ_m (классический объем в $\mathbb{R}^m$) – σ-конечная мера

Доказательство: (на записи рисуночки!)

Достаточно проверить счетную полуаддитивность λ_m, т.е. если $(a,b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]$, то $\lambda_m(a,b] \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_m(a_n,b_n]$

Возьмем $a' \in (a,b]$, т.ч. $\lambda_m(a',b] > \lambda_m(a,b] - \varepsilon \Rightarrow [a',b] \subset (a,b]$

Возьмем b'_n, т.ч. $(a_n,b_n] \subset (a_n,b'_n)$ и $\lambda_m(a_n,b'_n] < \lambda_m(a_n,b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\underbrace{[a',b]}_{\text{замкн. паралл. – компакт}} \subset (a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a_n,b'_n)}_{\text{откр. паралл. – откр. мн-ва}}$$

Выберем конечное подпокрытие $(a',b] \subset [a',b] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N}(a_n,b'_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N}(a_n,b'_n]$

По конечной полуаддитивности объема:

$\lambda_m(a,b] - \varepsilon < \lambda_m(a',b] \leq \sum\limits_{n=1}^{N}\lambda_m(a_n,b'_n] < \sum\limits_{n=1}^{N}(\lambda_m(a_n,b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n}) < \varepsilon + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_m(a_n,b_n]$ и устремляем ε к 0

Definition 1.21. Мера Лебега

Мера Лебега – стандартное продолжение классического объема

Declaration 1.6. Обозначение

$\mathcal{L}^m$ – σ-алгебра, на которую продолжили
Лебеговская σ-алгебра

Remark 1.10.

1. Если $A \in \mathcal{L}^m$, то $\lambda_m A = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_m P_k : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ и P_k – ячейки$\}$
2. Можно брать ячейки из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$

Theorem 1.22. Свойства меры Лебега

1. Открытые множества измеримы и меры непустого открытого > 0
2. Замкнутые множества измеримы
3. Мера одноточечного множества равна 0
4. Мера ограниченного измеримого множества конечна
5. Всякое измеримое множество – счетное объединение множеств конечной меры
   Картинка! $\mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, P_k – единичные ячейки. $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (P_k \cap A)$ и $\lambda_m(P_k \cap A) \leq$
   $\leq \lambda_m P_k = 1$
6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0$ найдутся $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{L}^m$, т.ч. $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. Тогда $E \in \mathcal{L}^m$

   Remark 1.11.

   Это свойство любой полной меры

7. Пусть $e \subset \mathbb{R}^m$, т.ч. $\forall \varepsilon > 0$ найдется $B_\varepsilon \in \mathcal{L}^m$, т.ч. $e \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m B_\varepsilon < \varepsilon$
   Тогда $E \in \mathcal{L}^m$ и $\lambda_m e = 0$
8. Счетное объединение множеств нулевой меры – множество нулевой меры
9. Счетное множество имеет нулевую меру
10. Множество нулевой меры не имеет внутренних точек
11. $\lambda_m e = 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся кубические ячейки Q_k, т.ч. $e \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m Q_k < \varepsilon$
12. Пусть $m \geq 2$. $H_k(c) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$. Тогда $\lambda_m(H_k(c)) = 0$
13. Пусть $m \geq 2$. Множество, содержащееся в нбчс объединении гиперплоскостей $H_k(c)$, имеет меру 0
14. $\lambda_m(a, b] = \lambda_m(a, b) = \lambda_m[a, b]$

Доказательство:

1. Открытые множества лежат в $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$. Картинка на записи! $\lambda_m \delta > \lambda_m(\text{ячейка}) > 0$
3. Картинка! $\lambda_m(\text{точка}) < \lambda_m(\text{ячейка}) = \varepsilon^m$
4. Картинка! A – ограничено. $\lambda_m A \leq \lambda_m(\text{шар}) \leq \lambda_m(\text{ячейка}) < +\infty$
6. $A_{\frac{1}{n}} \subset E \subset B_{\frac{1}{n}}$; $\lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n}$
   $A := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ и $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$
   $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$; $\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_m(B \setminus A) = 0$
   Тогда т.к. $E \setminus A \subset B \setminus A \Rightarrow E \setminus A \in \mathcal{L}^m$
   Тогда $E = \underbrace{A}_{\in \mathcal{L}^m} \cup \underbrace{(E \setminus A)}_{\in \mathcal{L}^m}$
7. $A_\varepsilon = \varnothing$ в свойстве 6
10. От противного. Если a – внутренняя точка A. Рисунок! $\Rightarrow \lambda_m A \geq \lambda_m(\text{ячейка}) > 0$
11. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : e \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } P_k \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}\}$

    Возьмем такие $P_k \in \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$, что $e \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < \varepsilon$

    Рассмотрим P_k, у нее все стороны имеют рациональную длину. $d = \frac{1}{\text{НОК знаменателей}}$
    $\Rightarrow$ каждая сторона кратна $d \Rightarrow$ нарежем P_k на кубики со стороной d

12. $A_n := (-n,n]^m \cap H_k(c) \Rightarrow H_k(c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Достаточно доказать, что $\lambda_n A_n = 0$. $A_n \subset (-n,n] \times \ldots \times (-n,n] \times (c-\varepsilon, c] \times (-n,n] \times \ldots$

$\lambda_m(\text{ячейка}) = (2n)^{m-1} \cdot \varepsilon$

Remark 1.12.

1. Существуют несчетные множество нулевой меры

   При $m \geq 2$ подойдет $H_1(0)$

   При $m = 1$ подойдет Канторово множество:

   $$1 = \lambda(0,1] = \lambda K + \underbrace{\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}}_{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1} \Rightarrow \lambda K = 0$$

   $(0,1]$ запишем в троичной системе счисления. Запрещаем запись $\ldots\underbrace{000}_{\text{нули}}$

   Т.к. $0,2000\ldots = 0,1222\ldots$

   $(\underset{\frac{1}{3}}{} \; \underset{\frac{2}{3}}{}]$ – числа, у которых первая цифра после запятой – 1

   $(\underset{\frac{1}{9}}{} \; \underset{\frac{2}{9}}{}]$ и $(\underset{\frac{7}{9}}{} \; \underset{\frac{8}{9}}{}]$ – числа, у которых вторая цифра после запятой – 1

   И так далее

   K – числа из $(0,1]$, у которых в троичной записи нет 1. Биекция между K и $(0,1]$:

   $0 \mapsto 0$; $2 \mapsto 1$; троичная $\mapsto$ двоичная

2. Существуют неизмеримые множества (т.е. $\mathcal{L}^m \neq 2^{\mathbb{R}^m}$)

Theorem 1.23. Регулярность меры Лебега

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существует G – открытое, $G \supset E$, т.ч. $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon$

Доказательство:

$\lambda_m E < +\infty$. $\lambda_m E = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k : P_k$ – ячейки и $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$

Возьмем такие ячейки, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < \lambda_m E + \varepsilon$ и $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$

Возьмем $(a_k, b_k) \supset P_k$, т.ч. $\lambda_m(a_k, b_k) < \lambda_m P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$

$E \subset G := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ – открытое

$\lambda_m G \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m(a_k, b_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_m P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k < 2\varepsilon + \lambda_m E$

$\lambda_m(G \setminus E) = \lambda_m G - \lambda_m E < 2\varepsilon$

$\lambda_m E = +\infty$. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, т.ч. $\lambda_m E_n < +\infty$

По предыдущему случаю $\exists G_n$ – открытое, $G_n \supset E_n$ и $\lambda_m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$G := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое

$G \setminus E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \Rightarrow \lambda_m(G \setminus E) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_m(G_n \setminus E_n) < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

Theorem 1.24. Следствие 1

$\varepsilon > 0,\ E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существует замкнутое F, т.ч. $F \subset E$ и $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon$

Доказательство:

По теореме найдется G – открытое, т.ч. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$ и $\lambda_m(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)) < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое, $F \subset E$ и $E \setminus F = G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)$

Theorem 1.25. Следствие 2

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда
$\lambda_m E = \inf\{\lambda_m G : G$ – открытое и $E \subset G\}$
$\lambda_m E = \sup\{\lambda_m F : F$ – замкнутое и $E \supset F\}$
$\lambda_m E = \sup\{\lambda_m K : K$ – компакт и $K \subset E\}$

Доказательство:

1. Из теоремы $\Rightarrow \exists G \supset E$ – открытое, т.ч. $\lambda_m(G \setminus E) < \varepsilon \Rightarrow \lambda_m G < \lambda_m E + \varepsilon$
2. Если $\lambda_m E < +\infty$, то по следствию 1 $\exists F \subset E$ – замкнутое, т.ч. $\lambda_m(E \setminus F) < \varepsilon \Rightarrow \lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon$
   Если $\lambda_m E = +\infty \ldots\ldots \Rightarrow \lambda_m F = +\infty$
3. Выберем замкнутое $F \subset E$, т.ч. $\lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon$
   $K_n := \underbrace{[-n, n]^m}_{\text{компакт}} \cap F$
   $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = F \xRightarrow[\text{непр. меры снизу}]{} \lambda_m K_n \to \lambda_m F > \lambda_m E - \varepsilon \Rightarrow$ найдется K_n, т.ч. $\lambda_m K_n > \lambda_m F - \varepsilon$
   В случае с $\lambda_m E = +\infty$ доказательство меняется несильно

Theorem 1.26. Следствие 3

$E \in \mathcal{L}^m$. Тогда существуют компакты $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ и e нулевой меры, т.ч. $E = e \sqcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$

Доказательство:

$\lambda_m E < +\infty$. Возьмем $K_n \subset E$ – компакт, т.ч. $\lambda_m K_n > \lambda_m E - \frac{1}{n}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset E \text{ и } \underbrace{E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}_{e} \subset E \setminus K_n \Rightarrow \lambda_m e < \lambda_m(E \setminus K) = \lambda_m E - \lambda_m K_n < \tfrac{1}{n} \Rightarrow \lambda_m e = 0$$

Как сделать вложенность? $K_1, K_1 \cup K_2, K_1 \cup K_2 \cup K_3, \ldots$

$\lambda_m E = +\infty$. $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n;\ \lambda_m E_n < +\infty$. Тогда $\exists K_{n1}, K_{n2} \ldots$ – компакты и $\lambda_m e_n = 0$,

т.ч. $E_n = e_n \sqcup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_{nk} \Rightarrow E = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n}_{e} \sqcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K_{nk}$

Theorem 1.27. Инвариантность меры Лебега относительно сдвига

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое относительно меры Лебега, $v \in \mathbb{R}^m$
Тогда $E + v$ – измеримо и $\lambda E = \lambda(E + v)$

Доказательство:

$\mu E := \lambda(E + v)$

μ и λ совпадают на ячейках $\Rightarrow$ μ^* и λ^* совпадают $\Rightarrow$ совпадают измеримые множества для μ^* и λ^* $\Rightarrow$ E и $E + v$ одновременно измеримые (или нет) и их меры равны

Theorem 1.28.

Пусть μ задана на $\mathcal{L}^m$. Если

1. μ инвариантна относительно сдвигов
2. μ конечна на ячейках (= μ конечна на ограниченных измеримых множествах)

то существует $k \in [0, +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$

Доказательство:

$Q := (0, 1]^m;\ k := \mu Q$

$k = 1$: Тогда $\mu Q = 1$
$Q_n := (0, \frac{1}{n}]^m$. Из n^m копий Q_n можно собрать $Q \Rightarrow n^m \mu Q_n = \mu Q = \lambda Q = n^m \lambda Q_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu Q_n = \lambda Q_n$
Рассмотрим ячейку из $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$. Все длины сторон у нее рациональные
n = НОК всех знаменателей длин сторон. Эта ячейка собирается из сдвигов $Q_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu = \lambda$ на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \xRightarrow[\text{единств. продолж.}]{} \mu = \lambda$

$k > 0$: $\tilde{\mu} := \frac{1}{k}\mu \Rightarrow \tilde{\mu} Q = 1 \Rightarrow \tilde{\mu} = \lambda \Rightarrow \mu = k\lambda$

$k = 0$: $\mu Q = 0$
$\mathbb{R}^m$ – счетное объединение сдвигов $Q \Rightarrow \mu \mathbb{R}^m = 0 \Rightarrow \mu \equiv 0$

Theorem 1.29.

$G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое. $\Phi : G \to \mathbb{R}^m$ – непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\lambda(\Phi(e)) = 0$
2. Если $E \subset G$, т.ч. E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое

Доказательство:

1. • Случай $e \subset P \subset \operatorname{Cl} P \subset G$, где P – ячейка
$\operatorname{Cl} P$ – компакт, $\Phi'(x)$ – непрерывна на $\operatorname{Cl} P$
$||\Phi'(x)||$ непрерывна на $\operatorname{Cl} P \Rightarrow ||\Phi'(x)|| \le M\ \forall x \in \operatorname{Cl} P \Rightarrow ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le M||x - y||$
$\lambda e = 0 \Rightarrow e$ можно покрыть кубическими ячейками Q_n так, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda Q_n < \varepsilon$;
$(e \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n) \Rightarrow \Phi(e) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(Q_n) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{Q_n}$
Пусть a_n – длина ребра Q_n
Если x и $y \in Q_n$, то $||x - y|| < \sqrt{m} a_n \Rightarrow ||\Phi(x) - \Phi(y)|| < \sqrt{m} M a_n \Rightarrow \Phi(y)$ лежит в шаре радиуса $\sqrt{m} M a_n$ с центром в $\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$ лежит в кубической ячейке $\tilde{Q_n}$ со стороной $2\sqrt{m} M a_n$ (с центром в $\Phi(x)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\tilde{Q_n} = \sum_{n=1}^{\infty}(2\sqrt{m}Ma_n)^m = (2\sqrt{m}M)^m\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^m = (2\sqrt{m}M)^m \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda Q_n}_{<\varepsilon} < \varepsilon\cdot(2\sqrt{m}M)^m \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda\Phi(e) = 0$

- Случай произвольный

  Представим G в виде $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейки и $\operatorname{Cl} P_j \subset G$

  $e_j := e \cap P_j$; $\lambda e_j = 0$ и e_j подходит под предыдущий случай $\Rightarrow \lambda\Phi(e_j) = 0$, но

  $\Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e_j) \Rightarrow \lambda\Phi(e) = 0$

2. E – измеримое $\Rightarrow E = e \sqcup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, где $\lambda e = 0$ и K_n – компакты $\Rightarrow$

   $$\Rightarrow \Phi(E) = \underbrace{\Phi(e)}_{\text{мера 0, т.е. измеримы}} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\Phi(K_n)}_{\text{компакты, т.е. измеримы}}$$

Theorem 1.30.

Мера Лебега инвариантна относительно движения

Доказательство:

Движение – композиция сдвигов и поворотов. Надо понять, что λ не меняется при повороте

U – поворот вокруг 0. Если E – измеримо, то $U(E)$ – измеримо

$\mu E := \lambda(U(E))$. μ задана на $\mathcal{L}^m$

Проверим, что μ инвариантна относительно сдвигов

$\mu(E + v) = \lambda(U(E + v)) = \lambda(U(E) + U(v)) = \lambda(U(E)) = \mu E$

μ конечна на ограниченных измеримых множествах $\Rightarrow \mu = k\lambda$

Но U переводит в себя единичный шарик с центром в 0 $\Rightarrow k = 1$

B – единичный шар. $\underbrace{\mu B}_{k\lambda B} = \lambda(\underbrace{U(B)}_{B}) = \lambda B$

Theorem 1.31. Об изменении меры Лебега при линейной отображении

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$; E – измеримое. Тогда $T(E)$ – измеримое и $\lambda(T(E)) = |\det T| \cdot \lambda E$

Доказательство:

$\mu E := \lambda(T(E))$ – инвариантна относительно сдвигов

μ – конечна на ограниченных измеримых множествах $\Rightarrow \mu = k\lambda$

Нужно найти k. Возьмем Q – единичный куб. Q был куб, натянутым на вектора. T повернул эти вектора, получили $T(Q)$ – косоугольный параллелепипед и $|\det T|$ – его объем

Remark 1.13.

λ и объем на параллелепипеде из алгебры – одно и то же (рисунок на записи)

Example 1.5. Неизмеримое множество для λ_1

$[0,1]$; $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$
В каждом классе эквивалентности возьмем по одному представителю
A – получившееся множество
Предположим, что A – измеримо. Тогда у него есть конечная мера

- $\lambda A = 0$:
  $\bigsqcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) \supset [0,1]$
  $(A + r_1) \cap (A + r_2) \neq \varnothing \Rightarrow x + r_1 = y + r_2$, где $x, y \in A \Rightarrow x \sim y \Rightarrow x = y \Rightarrow$
  $\Rightarrow \underbrace{\lambda_1[0,1]}_{1} \leq \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{\lambda(A + r)}_{\lambda A = 0} = 0$. Противоречие
- $\lambda A > 0$:
  $\bigsqcup\limits_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (A + r) \subset [0,2] \Rightarrow \underbrace{\lambda[0,2]}_{2} \geq \sum\limits_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \underbrace{\lambda(A + r)}_{\lambda A} = +\infty$. Противоречие

1.5 §5. Измеримые функции

Notation 1.1.

Теперь все меры заданы на σ-алгебрах
Измеримые множества – множества из σ-алгебры, где задана мера

Definition 1.22. Лебеговы множества

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Лебеговы множества для функции f
$E\{f \le a\} := f^{-1}[-\infty, a] = \{x \in E : f(x) \le a\}$
$E\{f < a\} := f^{-1}[-\infty, a) = \{x \in E : f(x) < a\}$
$E\{f \ge a\} := f^{-1}[a, +\infty] = \{x \in E : f(x) \ge a\}$
$E\{f > a\} := f^{-1}(a, +\infty] = \{x \in E : f(x) > a\}$

Theorem 1.32.

Пусть E – измеримое множество. Тогда равносильно следующее:

1. $E\{f \le a\}$ – измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f < a\}$ – измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f \ge a\}$ – измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f > a\}$ – измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство:

$1 \Leftrightarrow 4$: $E\{f > a\} = E \setminus E\{f \le a\}$
$2 \Leftrightarrow 3$: $E\{f < a\} = E \setminus E\{f \ge a\}$
$1 \Rightarrow 2$: $E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \le a - \frac{1}{n}\}$
$3 \Rightarrow 4$: $E\{f > a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E\{f \ge a + \frac{1}{n}\}$

Definition 1.23. Измеримая функция

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измерима, если измеримы все ее Лебеговы множества

Remark 1.14.

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$
f – измерима $\Leftrightarrow$ E – измеримо и $\forall a \in \mathbb{R}$ измеримы все лебеговы множества одного типа

Доказательство:

$\Leftarrow$: Теорема
$\Rightarrow$: $E = E\{f < a\} \cup E\{f \ge a\}$

Example 1.6.

1. Константа
2. A, E – измеримые; $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \cap E \\ 0, & x \in E \setminus A \end{cases}$
3. $f \in C(\mathbb{R}^m)$. Тогда f – измерима относительно λ_m
   Доказательство:
   $\mathbb{R}^m\{f < a\} = f^{-1}\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{откр.}}$ – открыто $\Rightarrow$ измеримо

Theorem 1.33. Свойства измеримых функций

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая

1. E – измеримо
2. $E\{f = -\infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f < -n\}$ и $E\{f = +\infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f > n\}$ – измеримы
3. Прообразы любого промежутка измеримы
   $\underbrace{E\{a < f < b\}}_{E\{f<b\} \setminus E\{f \leq a\}}, E\{a \leq f \leq b\}, \ldots$
4. $E\{f = c\}$ – измеримы
5. Прообразы любого открытого множества измеримы
   Доказательство:
   $G \subset \mathbb{R}$ – открытое $\Rightarrow G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \Rightarrow f^{-1}(G) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}(a_k, b_k]$
6. $-f$ и $|f|$ – измеримы
   Доказательство:
   $E\{-f < a\} = E\{f > -a\}$
   $E\{|f| < a\} = \begin{cases} \varnothing & a \leq 0 \\ E\{-a < f < a\} & a > 0 \end{cases}$
7. $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримы
   Тогда $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ – измеримы
   ($\max\{f, g\}$ – такая $h : E \to \overline{\mathbb{R}}$, что $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$)
   Доказательство:
   $E\{max\{f, g\} < a\} = E\{f < a\} \cap E\{g < a\}$
8. $f_+ := \max\{f, 0\}$ и $f_- := \max\{-f, 0\}$ – измеримы
9. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n – измеримы, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Если $f\,|_{E_n}$ – измеримо, то f – измерима
   Доказательство:
   $E\{f < a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\{f < a\}$
10. $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая, тогда $f = g\,|_E$, где $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримая
    Доказательство:
    $g(x) := \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$

Theorem 1.34.

$f_1, f_2, \ldots : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда

1. $\sup f_n, \inf f_n$ – измеримы
   ($\sup f_n$ – такая функция h, что $h(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}$)
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримы
3. Если существует $\lim f_n$, то он измерим

Доказательство:

1. $h := \sup\{f_n\}$
   $E\{h \le a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n \le a\}$
   Если $x \in E\{h \le a\}$, то $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \le a \Leftrightarrow f_n(x) \le a \ \forall n$
   $E\{\inf f_n \ge a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\{f_n \ge a\}$
2. $\underline{\lim} f_n(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf\limits_{k\ge n} f_k(x)}_{\text{измеримо}}$
   $\overline{\lim} f_n(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sup\limits_{k\ge n} f_k(x)}_{\text{измеримо}}$
3. Если lim существует, то он совпадает с $\overline{\lim}$ и с $\underline{\lim}$

Theorem 1.35.

$f : E \to H \subset \mathbb{R}^m$; $f_1, f_2, \ldots, f_m$ – измеримы
$\varphi : H \to \mathbb{R}$, т.ч. $\varphi \in C(H)$
Тогда $F(x) := \varphi(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ – измерима

Доказательство:

$E\{F < a\} = F^{-1}(-\infty, a) = f^{-1}(\varphi^{-1}(-\infty, a))$

$\varphi^{-1}(-\infty, a)$ – прообраз открытого множества – открытое в H множество, т.е. это пересечение некоторого открытого $G \subset \mathbb{R}^m$ с H

$\varphi^{-1}(-\infty, a) = G \cap H$, т.е. $E\{F < a\} = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G)$

Т.е. надо для открытого G понять, что $f^{-1}(G)$ – измеримо

$G = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k, b_k]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$, т.е. надо понять, что $f^{-1}(c, d]$ – измеримо

$(c, d] = (c_1, d_1] \times (c_2, d_2] \times \ldots \times (c_m, d_m]$

$f^{-1}(c, d] = \{x \in E : c_1 < f_1(x) \le d_1, \ldots, c_m < f_m(x) \le d_m\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E\{c_k < f_k \le d_k\}$

Notation 1.2. Операции с $\pm\infty$

1. $\pm\infty + a = \pm\infty \ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $\pm\infty \cdot a = \pm\infty \ \forall a > 0$
   $\pm\infty \cdot a = \mp\infty \ \forall a < 0$
3. $\pm\infty \cdot 0 = 0$
4. $+\infty - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = +\infty + (-\infty) = 0$
5. $\frac{a}{\pm\infty} = 0 \ \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$
6. Деление на 0 не определено

Theorem 1.36.

1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримы
2. φ – непрерывна, f – измерима, $\varphi \circ f$ – измерима
3. $p > 0$, f – измерима и $\geq 0 \Rightarrow f^p$ – измерима (считаем, что $(+\infty)^p = +\infty$)
4. Если f – измерима, то $\frac{1}{f}$ измерима на $E\{f \neq 0\}$

Доказательство:

1. $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – измеримые
   $E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\}$ и $E\{f \in \mathbb{R}\}$ и аналогично для g
   На $E\{f \in \mathbb{R}\} \cap E\{g \in \mathbb{R}\} : f + g$ – измерима
   $\varphi(x, y) = x + y;\ f + g = \varphi(f, g)$
   На остальных пересечениях $f + g$ – постоянна
2. Частный случай теоремы
3. $\{f^p \leq a\} = \begin{cases} \varnothing & a \leq 0 \\ E\{f \leq a^{\frac{1}{p}}\} & a > 0 \end{cases}$
4. $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$
   $\tilde{E}\{\frac{1}{f} \leq a\} = \begin{cases} E\{\frac{1}{a} \leq f < 0\} & a < 0 \\ E\{f < 0\} & a = 0 \\ E\{f \leq 0\} \cup E\{\frac{1}{a} \leq f\} & a > 0 \end{cases}$

Theorem 1.37. Следствия

1. Произведение конечного числа измеримых – измеримая
2. Натуральная степень измеримых – измеримая
3. Линейная комбинация измеримых – измеримая

Theorem 1.38.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо относительно меры Лебега
$f \in C(E)$. Тогда f – измерима относительно меры Лебега

Доказательство:

$E\{f < a\} = f^{-1}(-\infty, a)$ – открыто в E, т.е. $E \cap G$ для некоторого $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое

Definition 1.24. Простая функция

$f : E \to \mathbb{R}$ – измеримая
f – простая, если она принимает конечное число значений

Definition 1.25. Допустимое разбиение

$E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_n$, т.ч. $f\,|_{A_k}$ – константа и A_k – измеримые $\forall k$

Theorem 1.39. Свойства

1. Если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, A_k – измеримы $\forall k$, $f\,|_{A_k}$ – константы, то f – простая
2. Для любой пары простых функций есть общее допустимое разбиение
   Доказательство:
   $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} A_k$ – допустимое разбиение для f
   $E = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ – допустимое разбиение для g
   $\bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_k \cap B_j$ – допустимое разбиение для f и g
3. Сумма, разность и произведение простых функций – простая функция
4. Линейная комбинация простых функций – простая функция
5. max и min конечного числа простых функций – простая функция
   Доказательство:
   Для двух функций – общее допустимое разбиение

Theorem 1.40.

$F : E \to \overline{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая
Тогда существует последовательность $f_1, f_2, \ldots : E \to \mathbb{R}$ – простые, т.ч. $f_1 \le f_2 \le \ldots$ и $\lim f_n = f$