Конспект Шорохова Сергея
Если нашли опечатку/ошибку - пишите @le9endwp

Содержание

1 §1. Производящие функции

Definition 1.1. Производящая функция

Пусть $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – последовательность. Ее производящая функция – это формальный степенной ряд $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$

Notation 1.1. Элементарные операции

1. $A(t) \pm B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) t^n$
2. $c \in \mathbb{C} \Rightarrow c \cdot A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c a_n) t^n$
3. $A(t)B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) t^n + \ldots$

Definition 1.2. Свертка

Последовательность $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ называется сверткой последовательностей $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$

Remark 1.1.

Множество производящих функций образует коммутативное кольцо с единицей; векторное пространство над полем $\mathbb{C}$
Вообще это называется коммутативная алгебра с единицей

Definition 1.3. Композиция производящих функций

Пусть $b_0 = 0$
$A(B(t)) = a_0 + a_1 B(t) + a_2 B(t)^2 + \ldots = a_0 + a_1(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots) +$
$+ a_2(b_1^2 t^2 + 2 b_1 b_2 t^3 + \ldots) + a_3(b_1^3 t^3 + \ldots) = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) t^2 + (a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) t^3$

Example 1.1.

$A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + \ldots$

Theorem 1.1.

Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда $\exists! B(t)$, т.ч. $A(t)B(t) = 1$

Доказательство:

Ищем $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$

$A(t)B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)t^2 + \ldots = 1$

$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow$ находим b_0

$\underbrace{a_1 b_0}_{\text{знаем}} + a_0 b_1 = 0 \Rightarrow$ находим b_1

$\underbrace{a_2 b_0 + a_1 b_1}_{\text{знаем}} + a_0 b_1 = 0 \Rightarrow$ находим b_2

И так далее ...

Theorem 1.2.

$b_0 = 0, b_1 \neq 0$. Тогда $\exists! A(t)$ и $C(t)$, т.ч. $a_0 = c_0 = 0$ и $A(B(t)) = B(C(t)) = t$

Exercise 1.1.

Доказать теорему 1.2.

Definition 1.4. Производная

$A'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$

$t \cdot A'(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n t^n$

Definition 1.5. Первообразная

$\int A(t)dt = a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \ldots$

Remark 1.2.

$(\int A(t)dt)' = A(t);\ \int A'(t)dt = A(t) - a_0$

Example 1.2.

1. $a_n \equiv 1 \Rightarrow A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$
   Пусть $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность
   $c_n = \underbrace{b_0 + b_1 + \ldots + b_n}_{\text{свертка послед. выше}};\ C(t) = \frac{B(t)}{1-t}$
2. $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t};\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} n t^n = t(\frac{1}{1-t})' = \frac{t}{(1-t)^2}$

Example 1.3. Числа Фиббоначи

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_{n+2}t^{n+2} = F_{n+1}t^{n+2} + F_n t^{n+2}$

$F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n t^n;\ \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{n+2}t^{n+2}}_{F(t)-t} = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{n+1}t^{n+2}}_{t(\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{n+1}t^{n+1})=tF(t)} + \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n t^{n+2}}_{t^2F(t)}$

$F(t) - t = tF(t) + t^2F(t)$

$F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$ – производящая функция для чисел Фиббоначи

Корни знаменателя $(t_2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2})$; $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$1 - t - t^2 = (1-\varphi t)(1-\psi t)$

Ищем разложение на простейшие $\frac{t}{1-t-t^2} = \frac{A}{1-\varphi t} + \frac{B}{1-\psi t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = A(1-\psi t) + B(1-\varphi t) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A\psi + B\varphi = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A\psi - A\varphi = -1 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\varphi-\psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{cases}$

Итого: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\varphi t} - \frac{1}{1-\psi t}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n t^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi^n t^n)$

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

Notation 1.2. Как решать линейные рекуррентные соотношения?

$a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + \ldots + c_ka_n$; знаем $a_0, a_1 \ldots a_{k-1}$

$A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

$a_{n+k}t^{n+k} = c_1ta_{n+k-1}t^{n+k-1} + c_2t^2a_{n+k-2}t^{n+k-2} + \ldots + c_kt^ka_nt^n$

Суммируем по $n = 0$: $\underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+k}t^{n+k}}_{A(t)-a_0-a_1t-\ldots-a_{k-1}t^{k-1}} = c_1t \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+k-1}t^{n+k-1}}_{A(t)-a_0-a_1t-\ldots-a_{k-2}t^{k-2}} + \ldots + c_kt^k \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n}_{A(t)}$

Получаем уравнение: $(1 - c_1t - c_2t^2 - \ldots - c_kt^k)A(t) = \underbrace{P(t)}_{\text{многочлен, знаем}}$

$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ – рациональная функция

$Q(t) = (1-\alpha_1t)^{r_1}(1-\alpha_2t)^{r_2}\ldots(1-\alpha_et)^{r_e}$

Раскладываем на простейшие вида $\frac{1}{(1-\alpha_st)^m}$

$\frac{1}{1-\alpha_st} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_s^nt^n$

$\frac{1}{(1-\alpha_st)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_s^nt^n$

Remark 1.3. Вопрос

Когда производящая функция – рациональная?

Definition 1.6. Квазимногочлен

Последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – квазимногочлен, если $a_n = c_1(n)q_1^n + c_2(n)q_2 + \ldots + c_k(n)q_k^n$, где $q_1 \ldots q_k \in \mathbb{C}$; $c_1(n) \ldots c_k(n)$ – многочлены с комплексными коэффициентами

Theorem 1.3.

$A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; $A(t)$ – рациональна $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – квазимногочлен, начиная с некоторого места

Доказательство:

"$\Rightarrow$" $A(t)$ – рациональная $\Rightarrow$ раскладываем на простейшие вида $(1-qt)^{-m} + \underbrace{\text{некоторый многочлен}}_{\text{влияет на первые неск. эл. посл-ти}}$

$$(1-qt)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} q^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}}_{\text{многочлен от } n} q^n t^n$$

"$\Leftarrow$" Надо доказать, что $(c(n)q^n)_{n=0}^{\infty}$ имеет рациональную производящую функцию

$c(n) = \sum\limits_{m \geq 0} \alpha_m n(n+1)\ldots(n+m) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n)q^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m\geq 0} \alpha_m (n+1)(n+2)\ldots(n+m)\cdot(qt)^n \overset{x=qt}{=} \sum_{m\geq 0}\alpha_m \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)x^n}_{(x^{n+m})^{(m)}} =$$

$$= \sum_{m\geq 0} \alpha_m \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+m})^{(m)} = \sum_{m\geq 0} \alpha_m (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)^{(m)} = \sum_{m\geq 0} \alpha_m (\tfrac{1}{1-x})^{(m)}$$

Получаем рациональную функцию

Definition 1.7. Произведение Адамара

$A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; $B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$

Произведение Адамара $A(t) \odot B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n b_n) t^n$

Theorem 1.4. Следствие

Произведение Адамара рациональных функций – рациональная функция (очевидно из теоремы)

Example 1.4.

$F_1 + \dots F_n = S_n = ?$

$\mathcal{F}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \underbrace{\dfrac{t}{1-t-t^2}}_{\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\varphi 1} - \frac{1}{1-\psi t})} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n t^n = \frac{\mathcal{F}(t)}{1-t}$

$S(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-\varphi t} - \frac{1}{1-\psi t})\frac{1}{1-t}$

Разложим $\frac{1}{1-\varphi t} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{A}{1-\varphi t} + \frac{B}{1-t} \Leftrightarrow 1 = A(1-t) + B(1-\varphi t) \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{1-\varphi} = -\varphi \\ A = 1+\varphi \end{cases}$

Аналогично $\frac{1}{1-\psi t} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{1+\psi}{1-\psi t} - \frac{\psi}{1-t}$

Итого, $S(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\underbrace{\dfrac{1+\varphi}{1-\varphi t} - \dfrac{1+\psi}{1-\psi t}}_{\frac{1+\varphi-\psi t-\varphi\psi t-1-\psi+\varphi t+\varphi\psi t}{1-t-t^2}} - \underbrace{\dfrac{\varphi-\psi}{1-t}}_{\frac{\sqrt{5}}{1-t}})$

$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2} - \frac{1}{1-t}$

$\frac{t}{1-t-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \mathcal{F}(t)$

$\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{\mathcal{F}(t)}{t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n t^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{n+1} t^n$

Ответ: $F_{n+2} - 1$

Example 1.5. Еще один пример

Осторожно! На записи рисуночки

Взаимно рекуррентные последовательности

Задача: сколько способов разбить прямоугольник $3 \times n$ на доминошки 1×2?

v_n – кол-во способов разбить прямоугольник $3 \times n$ без левой нижней клетки

u_n – кол-во способов разбить прямоугольник $3 \times n$

Методом нехитрого посмотреть запись и увидеть красивые рисунки становится очевидно, что

$\begin{cases} u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2} \\ v_n = u_{n-1} + v_{n-2} \end{cases}$ при $u_1 = 0, u_2 = F_4 = 3;\ v_1 = 1, v_2 = 0$. Пусть $u_0 = 1;\ v_0 = 0$

$U(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n t^n;\ V(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n t^n$

$\begin{cases} u_{n+2}t^{n+2} = 2v_{n+1}t^{n+2} + u_n t^{n+2} \\ v_{n+2}t^{n+2} = u_{n+1}t^{n+2} + v_n t^{n+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(t) - 1 = 2tV(t) + t^2 U(t) \\ V(t) - t = t^2 V(t) + t(U(t) - 1) \end{cases}$

$V(t) = \frac{t}{1-t^2}U(t)$. Подставляем во 2 уравнение

$U(t) - 1 = \frac{2t^2}{1-t^2}U(t) + t^2 U(t)$

$U(t) = \frac{1-t^2}{1-4t^2+t^4}$

Пусть $t^2 = s$, тогда $W(s) = \frac{1-s}{1-4s+s^2} = \underbrace{\dfrac{A}{1-\varphi s}}_{A\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n s^n} + \underbrace{\dfrac{B}{1-\psi s}}_{B\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi^n s^n} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ B = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$

$u_{2n} = A\varphi^n + B\psi^n = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n \approx \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n$

2 §2. Биномиальные коэффициенты

Reminder 2.1.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$ – определено при всех $n \in \mathbb{C}$
$(1+t)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$

Example 2.1.

1. $\underbrace{\alpha(1+t)^{\alpha-1}}_{\alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k} t^k} = ((1+t)^\alpha)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k t^{k-1}$

   Приравниваем коэффициенты при t^{k-1}: $\alpha\binom{\alpha-1}{k-1} = k\binom{\alpha}{k}$
2. $((1+t)^\alpha)^{(m)} = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k)^{(m)} = \sum\limits_{k=m}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \underbrace{k(k-1)\dots(k-m+1)}_{m!\binom{k}{m}} t^{k-m}$

   $((1+t)^\alpha)^{(m)} = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}_{m!\binom{\alpha}{m}}(1+t)^{\alpha-m} = m!\binom{\alpha}{m} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-m}{k} t^k$

   Приравниваем коэффициенты при t^{k-m}: $\binom{\alpha}{m}\binom{\alpha-m}{k-m} = \binom{\alpha}{k}\binom{k}{m}$
3. $(1+t)^{2n} = (1+t)^n(1+t)^n = (\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k)^2$

   $(1+t)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k$

   Коэффициент при t^n: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$
   $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$
4. $(1+t)^p(1+t)^{n-p} = (1+t)^n$
   $\binom{n}{m} = \binom{p}{0}\binom{n-p}{m} + \binom{p}{1}\binom{n-p}{m-1} + \dots + \binom{p}{m}\binom{n-p}{0}$ – свертка Вандермонда
5. $(1-t)^{-n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} t^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} t^k$ – производящая $(\binom{n+k}{n})_{k=0}^{\infty}$

   $\frac{1}{(1-t)^{n+2}} = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ – производящая функция $(\binom{n+0}{n} + \dots + \binom{n+k}{n})_{k=0}^{\infty}$
   Коэффициент при t^m: $\binom{n+m+1}{n+1} = \binom{n+0}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+m}{n}$
   $m+1 = k \Rightarrow \binom{n+k}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+k-1}{n}$
   $n = 1 \Rightarrow \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + k$
   $n = 2 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = 2\binom{k+2}{3} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

3 §3. Числа Каталана

Definition 3.1. Правильная скобочная последовательность

Последовательность из $2n$ открывающих и закрывающих скобок – правильная, если в любом префиксе открывающих $\geq$ закрывающих и всего n открывающих и n закрывающих

Definition 3.2. Числа Каталана

Числа Каталана (C_n) – количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$

Notation 3.1.

$C_0 = 1$
$C_1 = 1$: ()
$C_2 = 2$: ()(), (())
$C_3 = 5$: ((())), (()()), (())(), ()(()), ()()()

Proposition 3.1.

$\forall n \geq 1\ C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$

Доказательство:

Рассмотрим $\min k$, т.ч. среди первых $2k$ скобок поровну открывающих и закрывающих

$\underset{1}{(}\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{ПСП длины } 2(k-1)}\underset{2k}{)} \qquad \underbrace{\underset{2k+1}{(}\ \ldots\ \underset{2n}{)}}_{\text{ПСП длины } 2(n-k)}$

$C_{k-1} \cdot C_{n-k},\ k = 1, 2, \ldots, n$

$C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$

Notation 3.2.

$C_0 = 1;\ C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0\ n \geq 0$

$C(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nt^n;\ C_{n+1}t^{n+1} = (C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ldots + C_nC_0)t^{n+1}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} : C(t) - 1 = tC(t)^2 \Leftrightarrow tC(t)^2 - C(t) + 1 = 0$

$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$, т.к. $C(0) = 1$, то берем $C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$

$\sqrt{1-4t} = (1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} 4^k t^k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\ldots(\frac{3-2k}{2})}{k!}(-1)^k 2^{2^k} t^k =$

$= 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{k!} \underbrace{2^k}_{2\cdot\frac{2\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{(k-1)!}} t^k = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}t^k = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}t^k$

$C(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}t^{k-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}t^n$

Мы доказали теорему $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Theorem 3.1.

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

4 §4. Разбиение чисел

Notation 4.1. Вопрос

Сколько способов разбить n в сумму $n = x_1 + \ldots + x_k;\ k \in \mathbb{N}$?

1. Упорядоченное разбиение (т.е. порядок важен)
   Ответ: $\binom{n-1}{k-1}$
2. Неупорядоченное разбиение

Definition 4.1.

$p_k(n)$ – количество представление $n = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1$

$n - k = \underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{y_2} + \ldots + \underbrace{(x_k - 1)}_{y_k} = y_1 + \ldots + y_k$, где $y_1 \geq \ldots \geq y_k \geq 0$

Пусть $y_s > 0, y_{s+1} = \ldots = y_n = 0$ – таких способок $p_s(n-k)$

$p_k(n) = p_k(n-k) + \underbrace{p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k)}_{p_{k-1}(n-1)} = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$

Example 4.1.

$p_2(n) = p_2(n-2) + p_1(n-1) = p_2(n-2) + 1$

$$p_2(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \,\vdots\, 2 \\ \frac{n-1}{2} & n \,\not\vdots\, 2 \end{cases}$$

$$p_3(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{12} & n \equiv 0 \pmod 6 \\ \frac{n^2-1}{12} & n \equiv \pm 1 \pmod 6 \\ \frac{n^2-4}{12} & n \equiv \pm 2 \pmod 6 \\ \frac{n^2+3}{12} & n \equiv \pm 3 \pmod 6 \end{cases}$$

Lemma 4.1.

$P_j(n) := 1^j + \ldots + n^j$ – многочлен степени $j+1$ от n со старшим коэффициентом $\frac{1}{j+1}$

Доказательство:

$(a+1)^{j+1} - a^{j+1} = \binom{j+1}{1} a^j + \binom{j+1}{2} a^{j-1} + \ldots + \binom{j+1}{j} a + 1$

Воспользуемся для $a = 0, 1, 2, \ldots, n$

$(n+1)^{j+1} = \binom{j+1}{1} P_j(n) + \binom{j+1}{2} P_{j-1}(n) + \ldots + \binom{j+1}{j} P_1(n) + \underbrace{P_0(n)}_{n}$

$P_j(n) = \frac{1}{j+2}((n+1)^{j+1} - \binom{j+1}{2} P_{j-1}(n) - \ldots - \binom{j+1}{j} P_1(n) - n)$

Theorem 4.1.

$p_k(n)$ – многочлен, коэффициенты которого зависят от $n \mod k!$, старший член $\frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$

Доказательство:

Индукция по k. База: $k = 1, 2$ – смотреть выше

Переход: $k - 1 \to k$

$p_k(n) - p_k(n-k) = p_{k-1}(n-1) = \frac{(n-1)^{k-2}}{(k-2)!(k-1)!} + \ldots = \frac{n^{k-2}}{(k-2)!(k-1)!} + R^{(0)}_{k-3}(n)$, где $R^{(0)}_{k-3}(n)$ – многочлен от n степени $\leq k-3$, коэффициенты которого зависят от $n \mod (k-1)!$

Аналогично: $p_k(n - jk) - p_k(n-(j+1)k) = \frac{n^{k-2}}{(k-2)!(k-1)!} + R^{(j)}_{k-3}(n)$

$p_k(n) - p_k(n - k!) = \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} + S_{k-3}(n)$

$n = k!m + r$

$p_k(n) = \frac{\overbrace{(k!m+r)^{k-2}}^{k!^{k-2}m^{k-2}+\ldots}}{(k-2)!} + \frac{(k!(m-1)+r)^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \frac{(k!+r)^{k-2}}{(k-2)!} + S_{k-3}(k!m+r) + S_{k-3}(k!(m-1)+r) + \ldots +$
$+ S_{k-3}(k!+r) + p_k(r)$

$\frac{k!^{k-2}}{(k-2)!}\underbrace{(m^{k-2} + (m-1)^{k-2} + \ldots + 1)}_{\frac{m^{k-1}}{k-1}+\ldots}$ +(многочлен степени $\leq k-2$) $= \frac{k!^{k-2}}{(k-2)!} \cdot \frac{m^{k-1}}{k-1} + \ldots =$
$= \frac{(mk!+r)^{k-1}}{(k-1)!k!} + \ldots$

Exercise 4.1. Заметки на полях

$Q(n+1) - Q(n)$ – многочлен степени k от $n \Rightarrow Q(n)$ – многочлен степени $k+1$ от n

Theorem 4.2. Следствие

$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$

Remark 4.1. Сравнение с упорядоченным разбиением

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{p_k(n)} \sim \frac{\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}}{\frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}} \sim \frac{\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}}{\frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} k!$$

Theorem 4.3.

$p_k(n)$ – количество способов разбить n в сумму нескольких слагаемых, т.ч. $\max = k$

Доказательство:

Симметрия диаграмм Юнга

Notation 4.2. Задача о размене

a_n – количество способов разменять n рублей при номиналах монет $1, 2, 5, 10$

$\mathcal{A}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n;\ n = a + 2b + 5c + 10d$

$\mathcal{A}(t) = (1 + t + t^2 + \ldots)(1 + t^2 + t^4 + \ldots)(1 + t^5 + t^{10} + \ldots)(1 + t^{10} + t^{20} + \ldots) =$
$= \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1-t^5} \cdot \frac{1}{1-t^{10}} = \frac{P(t)}{(1-t^{10})^4}$, где $P(t) = (1+t+t^2+\ldots+t^9)(1+t^2+t^4+t^6+t^8)(1+t^5)$

$\frac{1}{(1-t^{10})^4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} t^{10n}$

Definition 4.2. Количество разбиений

$H \subset N$. $p(H;n)$ – количество способок разбить n в сумму слагаемых из H
$p_k(n) = p(\{1,2,\dots,k\};n) - p(\{1,2,\dots,k-1\};n)$

Definition 4.3.

$p(n) = p(\mathbb{N};n)$

Производящая функция: $\mathcal{P}_H(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p(H;n)t^n = \prod\limits_{k\in H} \frac{1}{1-t^k}$

Theorem 4.4. Формула Харди-Раманджана

$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}}$

Theorem 4.5. Теорема Эйлера

Число разбиений n на нечетные слагаемые = количеству разбиеный n на различные слагаемые

Доказательство:

$\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+t^k)$ – производящая функция для числа разбиений на различные слагаемые

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-t^{2k}}{1-t^k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k}}} = \prod_{k \not\vdots 2} \frac{1}{1-t^k}$$

Theorem 4.6. Пентагональная теорема

$\frac{1}{p(t)} = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-t^k) = \sum\limits_{q\in\mathbb{Z}}(-1)^q t^{\frac{3q^2-q}{2}}$