

Содержание

1	Оргинфа	2
2	Лекция 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	3
3	Лекция 2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	6
4	Лекция 3	11
5	Лекция 4. Продолжение решений	14
6	Лекция 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	17
7	Лекция 6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	20
8	Лекция 7. Линейные неоднородные уравнения	24

1 Оргинфа

Ведет Крыжевич Сергей Геннадьевич

+79219181076 и +48572768176

kryzhevicz@gmail.com и serkryzh@pg.edu.pl

2 Лекция 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Definition 2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

$D \subset \mathbb{R}^2$ – область, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция

Дифференциальные уравнения первого порядка – это уравнения вида $y' = f(x, y)$

Example 2.1.

$$y' = xy$$

Definition 2.2. Решение дифференциального уравнения

$\langle a, b \rangle$ – интервал

Функция $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения на $\langle a, b \rangle$, если

1. φ, φ' – непрерывны на $\langle a, b \rangle$
2. $(x, \varphi(x)) \in D \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Example 2.2.

$$y' = xy$$

Решениями будут:

1. $y = 0$
2. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$
 $y' = x e^{\frac{x^2}{2}} = xy$

На самом деле решением будет любая функция вида $y = C e^{\frac{x^2}{2}}$

Notation 2.1. Начальные данные для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definition 2.3. Задача Коши

Задача Коши – дифференциальное уравнение с начальными данными

Example 2.3.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$y = C e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$5 = C e^0 = C$$

Получаем ответ $y = 5 e^{\frac{x^2}{2}}$

Definition 2.4. Общее решение дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения – совокупность всех его решений (= решение с параметром)

Definition 2.5. Интегральная кривая

Интегральная кривая – график решения дифференциального уравнения, т.е. график $\{x, \varphi(x)\}$

Remark 2.1.

$$y' = \sqrt{y}; y \geq 0$$

Здесь множество не является открытым, но считается, что $y = 0$ является решением (хотя формально им не является)

Если в каких-то задачах такое будет, в рамках курса не считаем это ошибкой

Remark 2.2. Единственность решений задачи Коши

Почти всегда задача Коши имеет единственное решение. Но есть исключения, например

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Очевидное решение $y = 0$, но также $y = x^3$. Более того, решением будет любая функция вида $y = (x + C)^3$. График есть на записи

Более того, можно собрать решение покусочно (ветка параболки вниз + прямая $y = 0$ + ветка параболы вверх)

Definition 2.6. Точка единственности/ветвления

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Точка (x_0, y_0) – точка единственности, если решение задачи Коши единственно. В противном случае это точка ветвления

Definition 2.7. Особое решение

Решение называется особым, если любая его точка – точка ветвления

Theorem 2.1.

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция f непрерывна и имеет непрерывную производную по переменной y в области D , то для любой точки (x_0, y_0) из D решение задачи Коши с начальными данными $y(x_0) = y_0$ существует и единственно

Remark 2.3.

По x нужна только непрерывность, производной существовать не обязательно

Definition 2.8. Дифференциальные уравнения в симметричной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Example 2.4.

$$ydx - xdy = 0 \mapsto y' = \frac{y}{x} \text{ или } x' = \frac{x}{y}$$

Remark 2.4.

Предполагаем, что P и Q – функции, непрерывные в некоторой области D на плоскости и они не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке D

Definition 2.9. Решение уравнения в симметричной форме

1. $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, решением будет $y = \varphi(x) : P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$
2. $x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, решением будет $x = \psi(y) : P(\psi(y), y)\psi'(y) + Q(\psi(y), y) = 0$
3. $y = \varphi(t), x = \psi(t)$, хотим $P(\psi(t), \varphi(t))\psi'(t) + Q(\psi(t), \varphi(t))\varphi'(t) = 0$

3 Лекция 2. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Definition 3.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$t, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; t – время, $x_1 \dots x_n$ – фазовые переменные

$$\begin{cases} x_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{– скалярная запись системы}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{– векторная запись системы}$$

Notation 3.1. Как свести уравнение высшего порядка к системам?

Пусть есть уравнение $x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$

Полагаем $x_1 = x, \dots, x_n = x^{(n-1)}$

$$\text{Получаем } \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ \dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = g(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Example 3.1.

$$\begin{cases} x'' + \sin x = 0 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\sin x_1 \end{cases}$$

Remark 3.1.

Предполагается что $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывна и $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Definition 3.2. Решение системы

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется решением системы если

1. $\varphi \in C^1$
2. $(t, \varphi(t)) \in D \quad \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Definition 3.3. Задача Коши для систем

Пусть $t_0, x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R}; (t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$

$$\text{Начальные условия: } \begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$$

Или в векторной форме: $x(t_0) = x_0$, где $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$

Задача Коши – уравнение + начальные условия

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definition 3.4. Эквивалентное интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, x(s)) ds$$

Функция $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется решением эквивалентного интегрального уравнения, если

1. φ – непрерывна
2. $(t, \varphi(t)) \in D \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$
3. $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Lemma 3.1.

Функция $\varphi(t)$ – решение задачи Коши тогда и только тогда, когда она является решением эквивалентного интегрального уравнения

Доказательство:

\Rightarrow Пусть $\varphi(t)$ – решение задачи Коши

1. φ непрерывна – очевидно
2. $(t, \varphi(t)) \in D \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается интегрированием уравнения $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ с учетом начальных условий

\Leftarrow Пусть $\varphi(t)$ – решение интегрального уравнения

1. φ непрерывна и есть интеграл от непрерывной функции – значит дифференцируема
2. $(t, \varphi(t)) \in D \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – то же условие
3. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ – получается дифференцированием интегрального уравнения

Theorem 3.1. Теорема существования решений

Пусть правая часть $f(t, x)$ системы $x' = f(t, x)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $(t_0, x_0) \in D$. Тогда существует решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

определенное на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

Remark 3.2.

Этот промежуток называется промежутком Пеано

Доказательство:

Будем вместо решения задачи Коши искать решение эквивалентного интегрального уравне-

$$\text{ния } x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Поскольку D – область (открытое множество), выберем константы $a, b > 0$ такие, что $K := \{(t, x) : |t - t_0| \leq a; |x - x_0| \leq b\} \subset D$

K – компакт, значит непрерывная функция огр. Пусть $M = \max_{(t,x) \in K} |f(t, x)|$; $h := \min(a, \frac{b}{M})$

Remark 3.3.

Длина промежутка Пеано непрерывно зависит от начальной точки

Definition 3.5. Векторные нормы

Понятие нормы в \mathbb{R}^n :

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|ax\| = |a|\|x\| \quad \forall a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Example 3.2.

1. $\|x\|_1 = |x| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ – с этой нормой и будем работать
2. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ – евклидова норма
3. $\|x\|_3 = |x_1| + \dots + |x_n|$

Definition 3.6. Равностепенная непрерывность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ – равностепенно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], k \in \mathbb{N}$ верно $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \varepsilon$

Definition 3.7. Равномерная ограниченность

Последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ – равномерно ограничена, если $\exists C > 0 : \forall t \in [\alpha, \beta], k \in \mathbb{N}$ верно $|\varphi_k(t)| \leq C$

Theorem 3.2. Теорема Арцела Асколи

Пусть последовательность функций $\varphi_k : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ равномерно непрерывна и равномерно ограничена. Тогда существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\varphi_{n_k} \rightrightarrows \varphi_*$ на $[\alpha, \beta]$

Definition 3.8. Кусочно-гладкая функция

Функция $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется кусочно-гладкой, если она непрерывна, имеет производную везде, кроме конечного числа точек, а в тех точках имеет односторонние пределы

Definition 3.9. ε -решение системы

Пусть $\varepsilon > 0$. Кусочно-гладкая функция $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется ε -решением системы, если

1. $(t, \varphi(t)) \in D \forall t \in [\alpha, \beta]$
2. $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon$ во всех точках, где производная определена

Lemma 3.2.

Пусть $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и $\varphi_m(t)$ – последовательность ε_m -решений системы на отрезке $[\alpha, \beta]$, такая, что $\varphi_m(t_0) = x_0$; $|f(t, \varphi_m(t))| \leq M$ и $\varphi_m \rightrightarrows \varphi_*$. Тогда φ_* – решение задачи Коши

Доказательство:

Пусть Δ_m – последовательность функций, заданных формулой

$$\varphi_m(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds + \Delta_m(t)$$

Интегрируя неравенство $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon_m$ от t_0 до t , с учетом того, что $\varphi_m(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$, получаем $|\Delta_m(t)| \leq \varepsilon_m(\beta - \alpha)$

Переходя к пределу в первой формуле, получаем, что $\varphi_*(t)$ – решение эквивалентного интегрального уравнения, а значит, и задачи Коши

Remark 3.4.

Далее, мы предложим метод построения таких приближенных решений. Мы будем строить эти решения на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, построение на промежутке $[t_0 - h, t_0]$ аналогично

Definition 3.10. Ломаные Эйлера

Фиксируем $m \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[t_0, t_0 + h]$ на m равных частей:

$$t_j = t_0 + \frac{hj}{m}; \quad j = 0, \dots, m$$

Положим $\varphi_m(t_0) = x_0$ и последовательно определим $\varphi_m(t) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j))(t - t_j)$ при $j = 0, \dots, m - 1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$\text{В частности } \varphi_m(t_{j+1}) = \varphi_m(t_j) + f(t_j, \varphi_m(t_j)) \frac{h}{m}$$

Если положить $A_j = (t_j, \varphi_m(t_j))$, то график $\varphi_m(t)$ – ломаная, соединяющая точки A_j

Proposition 3.1.

$K := \{(t, x) := |t - t_0| \leq a; |x - x_0| \leq b\} \subset D$
 Для любого $m \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, t_0 + h]$ верно $(t, \varphi_m(t)) \in K$

Доказательство:

1. $|t - t_0| \leq h = \min(a, \frac{b}{M})$
2. $t^* = \min_{t \in [t_0, t_0 + h]} \{|\varphi_m(t) - x_0| \geq b\}$

С другой стороны, $|\varphi_m(t^*) - x_0| = |\varphi_m(t^*) - \varphi_m(t_0)| \leq \int_t^{t^*} |\varphi'_m(s)| ds \leq M(t^* - t_0) \leq Mh \leq b$

Proposition 3.2.

$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0$, такое что при $m \geq m_0$ функция φ_m является ε -решением системы

Доказательство:

$$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$$

Если $t \in [t_j, t_{j+1}]$, то $|t - t_j| \leq \frac{h}{m}$; $|f(t_j, \varphi_m(t_j)) - f(t, \varphi_m(t))| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ равномерно по t

Proposition 3.3.

Функции $\varphi_m(t)$ равномерно ограничены

Доказательство:

$$|\varphi_m(t)| \leq M|t - t_0| + |x_0| \leq Mh + |x_0|$$

Proposition 3.4.

Функции $\varphi_m(t)$ равностепенно непрерывны

Доказательство:

$$|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$$

Theorem 3.3. Теорема Кнезера

В условиях теоремы существования, для любого $t_1 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ множество значений решений задачи Коши $\{x(t_1) : x(t) - \text{решение}\}$ замкнуто и связно

Exercise 3.1.

Доказать замкнутость (пользуемся утверждениями 2.1-2.4, леммой 2.1 и теоремой Арцела-Асколи)

4 Лекция 3

Лемма 4.1. Лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть $u(t) \geq 0$; $f(t) \geq 0$; $u(t), f(t) \in C[t_0, \infty)$, при этом для $t \geq t_0$ выполняется неравенство $u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1$, где $c > 0$ – константа

Тогда при $t \geq t_0$ имеем оценку $u(t) \leq c \cdot \exp(\int_{t_0}^t f(t_1)dt_1)$

Доказательство:

Из неравенства получаем $\frac{u(t)}{c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq 1$ и $\frac{f(t)u(t)}{c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1} \leq f(t)$

Т.к. $\frac{d}{dt} \left[c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1 \right] = f(t)u(t)$, то проинтегрировав от t_0 до t , получим

$\ln \left[c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1 \right] - \ln c \leq \int_{t_0}^t f(t_1)dt_1$, отсюда и из неравенства

$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1 \leq c \cdot \exp(\int_{t_0}^t f(t_1)dt_1)$, что и требовалось доказать

Theorem 4.1. Следствие леммы Гронуолла-Беллмана

1. $u(t) \leq \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1 \Rightarrow u(t) \equiv 0$

2. $t \leq t_0$

$$u(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t f(t_1)u(t_1)dt_1 \right| \Rightarrow u(t) \leq c \cdot \exp \left| \int_{t_0}^t f(t_1)dt_1 \right|$$

Доказательство:

В пункте 2 замена $s = -t$

Лемма 4.2. Усиленная лемма Гронуолла-Беллмана

Пусть функция $u(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет там неравенству $0 \leq u(x) \leq A + B \int_{x_0}^x u(t)dt + \varepsilon(x - x_0)$ при $A, B, \varepsilon \geq 0$

Тогда при $x \in [x_0, x_0 + h]$ справедливо неравенство $u(x) \leq Ae^{B(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{B}(e^{B(x-x_0)} - 1)$

Exercise 4.1.

Доказать усиленную лемму Гронуолла-Беллмана

Definition 4.1. Условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица, $f \in Lip(A)$, если существует такая константа $L > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ для любых $x, y \in A$

Definition 4.2. Локальное условие Липшица

Непрерывная функция (вектор-функция) $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица, если для любого $x_0 \in A$ существует окрестность U точки x_0 , в которой функция f удовлетворяет условию Липшица

Lemma 4.3.

Функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывно дифференцируема, где U – область в \mathbb{R}^m , значит f удовлетворяет в этой области локальному условию Липшица

Доказательство:

Возьмем точку $x_0 \in U$ и замкнутый шарик B с центром в x_0 такой, что $B \subset U$. Пусть $M = \max_{x \in B} |Df(x)|$. Тогда по теореме о среднем $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ для любых $x, y \in B$

Definition 4.3. Условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x , $f \in Lip_x(A)$ если существует такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in U$

Definition 4.4. Локальное условие Липшица по переменной x

Пусть $U \subset \mathbb{R}_{t,x}^{n+1}$ – область. Непрерывная вектор-функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет локальному условию Липшица по переменной x , $f \in Lip_{loc,x}(A)$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует окрестность V этой точки и такая константа $L > 0$, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in V$

Theorem 4.2. Теорема об условии Липшица в компакте

Пусть вектор-функция f удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области U . Тогда для любого компакта $K \subset U$ эта функция липшицева по x на этом компакте

Доказательство:

Пусть это утверждение неверно. Тогда существуют последовательности $(t_k, x_k) \in K$ и $(t_k, y_k) \in K, x_k \neq y_k$, такие что $|f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)| \geq k|x_k - y_k|$

НУО можем считать, что $t_k \rightarrow t^*, x_k \rightarrow x^*, y_k \rightarrow y^*$. При этом $(t^*, x^*), (t^*, y^*) \in K$

Возможны два случая:

1. $x^* \neq y^*$

Тогда $\frac{|f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)|}{|x_k - y_k|} \rightarrow \infty, |x_k - y_k| \not\rightarrow 0 \Rightarrow |f(t_k, x_k) - f(t_k, y_k)|$ не ограничено. Противоречие (т.к. f непрерывна на компакте)

2. $x^* = y^*$

В этом случае существует окрестность U точки (t^*, x^*) такая, что существует константа $L > 0$, что $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ для любых $(t, x), (t, y) \in U$.
Значит, такое неравенство выполнено для всех $(t_k, x_k), (t_k, y_k)$ начиная с некоторого номера. Противоречие

Theorem 4.3. Теорема единственности

Пусть $x' = f(t, x)$ – система оду. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и локально липшицева по x в области D

Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$ задача Коши $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Пусть утверждение теоремы неверно. Есть такая точка $(t_0, x_0) \in D$, что задача Коши имеет два различных решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на промежутке $[t_0 - h, t_0 + h]$

$$K = \{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\} \cup \{(t, \psi(t)) : t \in [t_0 - h, t_0 + h]\}$$

Множество K – компакт. На нем выполнено глобальное условие Липшица по x , в частности $|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq L|\varphi(t) - \psi(t)|$. Положим $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))ds; \quad \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s))ds$$

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| ds \leq L \int_{t_0}^t |\varphi(s) - \psi(s)| ds$$

$$u(t) \leq L \int_{t_0}^t u(s) ds \text{ по следствию из леммы Гронуолла-Беллмана } u(t) \equiv 0 \text{ и } \varphi(t) \equiv \psi(t)$$

Theorem 4.4. Следствие

Пусть $x' = f(t, x)$ – система оду. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область. Пусть f непрерывна и непрерывно дифференцируема по x в области D . Тогда для любой пары $(t_0, x_0) \in D$

задача Коши $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ имеет единственное решение

Remark 4.1.

Условие теоремы единственности достаточное, но не необходимое

$$y' = y \ln |y|; \quad y \neq 0; \quad y' = 0 \text{ при } y = 0$$

$$y = 0 \text{ или } \ln |\ln |y|| = x + c \Rightarrow y = e^{ce^x}$$

Единственность решений есть, а условия Липшица (даже локального) нет

5 Лекция 4. Продолжение решений

Definition 5.1. Продолжение решения

Пусть есть решения $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : \langle a_1, b_1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$. Говорим, что решение ψ есть продолжение решения φ (продолжает решение φ), если

1. $\langle a, b \rangle \not\subseteq \langle a_1, b_1 \rangle$
2. $\psi|_{\langle a, b \rangle} = \varphi$

Definition 5.2. Продолжимость влево

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым влево за a , если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $a_1 < a$

Definition 5.3. Продолжимость вправо

Решение $\varphi(t)$ называется продолжимым вправо за b , если существует решение $\psi(t)$, продолжающее решение, и при этом $b_1 > b$

Definition 5.4. Максимально продолженное решение

Решение $\varphi(t)$ называется непродолжимым или максимально продолженным, если решения $\psi(t)$, продолжающего $\varphi(t)$, не существует

Theorem 5.1. Теорема о продолжимости решений вправо за b

Пусть решение $\varphi(t)$ уравнения $x' = f(t, x)$ задано на промежутке $\langle a, b \rangle$, причем существует предел $\lim_{t \rightarrow b-} \varphi(t) = x_0$ и $(b, x_0) \in D$. Тогда решение $\varphi(t)$ продолжимо вправо за b

Теорема о продолжимости решения влево за a выглядит аналогично

Доказательство:

Рассмотрим некоторое решение $\psi(t)$ задачи Коши для уравнения $x' = f(x, t)$ с начальными данными $x(b) = x_0$, заданное на промежутке Пеано $[b - h, b + h]$ и положим

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{если } t \in \langle a, b \rangle \\ \psi(t) & \text{если } t \in [b, b + h] \end{cases}$$

Достаточно показать, что $\chi(t)$ – решение системы. Для этого достаточно проверить справедливость интегрального уравнения $\chi(t) = x_0 + \int_b^t f(s, \chi(s)) ds$

Пусть $\varphi(t_1) = x_1$, $\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \varphi(s)) ds$; $\varphi(b) = x_0 = x_1 + \int_{t_1}^b f(s, \varphi(s)) ds$

Definition 5.5. Частичный порядок

Пусть \mathfrak{M} – некоторое множество. Отношение \preccurlyeq на этом множестве называется частичным порядком, а само множество частично упорядоченным, если выполнены следующие соотношения

1. $a \preccurlyeq a$ для любого $a \in \mathfrak{M}$ (рефлексивность)
2. $a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$ для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ (транзитивность)
3. $a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)

Example 5.1.

Обычный порядок на \mathbb{R} , делимость натуральных чисел, порядок по включению для всех подмножеств некоторого множества \mathfrak{A} ($A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A \subset B$)

Definition 5.6. Максимальный элемент

Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется максимальным, если $a \preccurlyeq b \Rightarrow b = a$

Definition 5.7. Линейный порядок

Частично упорядоченное множество называется линейно упорядоченным (или цепью), если для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ либо $a \preccurlyeq b$, либо $b \preccurlyeq a$

Definition 5.8. Верхняя грань

Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$. Элемент $a \in \mathfrak{M}$ называется верхней гранью множества \mathfrak{A} , если $b \preccurlyeq a$ для любого $b \in \mathfrak{A}$

Lemma 5.1. Лемма Цорна

Если в частично-упорядоченном множестве \mathfrak{M} каждое линейно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то само множество имеет максимальный элемент

Доказательство:

Доказывается как следствие из аксиомы выбора

Theorem 5.2.

Для любого $(t_0, x_0) \in D$ существует максимально продолженное решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Доказательство:

Пусть \mathfrak{M} – множество всех решений задачи Коши. Для любых двух решений φ, ψ задачи Коши говорим, что $\varphi \preccurlyeq \psi$, если ψ продолжает φ либо они совпадают. Для каждого решения φ обозначим символом $I(\varphi)$ область определения этого решения

Пусть \mathfrak{B} – некоторое линейно упорядоченное множество решений задачи. Положим $J = \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{B}} I(\varphi)$. Отметим, что для каждой точки $t \in J$ все значения $\varphi(t)$ при $\varphi \in \mathfrak{B}$ совпадают

В самом деле, если $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}$, по одно решение является продолжением другого и, если они определены в одной точке, то их значения там совпадают

Тогда можно корректно определить решение $\eta(t)$, продолжающее все решения из \mathfrak{B} (или совпадающее с кем-то из них). Это будет верхняя грань. Существование максимального элемента \mathfrak{M} следует из леммы Цорна

Theorem 5.3.

Пусть $\varphi(t)$ – максимально продолженное решение системы, заданное на отрезке (a, b) ; $K \subset D$ – компакт. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\varphi(t) \notin K$ для любого $t \in (a, a + \varepsilon) \cup (b - \varepsilon, b)$

Доказательство:

Пусть не так. НУО существует $t_k \rightarrow b$ такая, что $\varphi(t_k) \in K$ для любого k . Можно считать, что $(t_k, \varphi(t_k)) \rightarrow (b, \varphi^*) \in K$

Тогда $(t, \varphi(t)) \rightarrow (b, \varphi^*)$ при $t \rightarrow b$. Существует $h_0 > 0, M > 0$ такие, что если $(t_0, \varphi(t_0)) \in K$, то решение $\varphi(t)$ определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ и на этом отрезке $|\varphi'(t)| \leq M$. Следует из построения промежутка Пеано

При больших k $t_{k+1} - t_k < h$; $|\varphi(t) - \varphi(t_k)| \leq M(t - t_k)$ для любых $t \in [t_k, t_{k+1}]$

Отсюда $(t, \varphi(t)) \rightarrow (b, \varphi^*)$ при $t \rightarrow b$. Тогда $\varphi(t)$ можно продолжить вправо за b . Противоречие

Definition 5.9. Почти линейные системы

Пусть $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная

Система $x' = f(t, x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t, x)| \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 5.4.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на \mathbb{R}

6 Лекция 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Definition 6.1. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$ – линейное неоднородное порядка n

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$ – линейное однородное порядка n

Предполагается, что все функции a_i и f непрерывны на некотором промежутке $I = (a, b)$, который может быть прямой или лучом. При этом $a_n(x) \neq 0$ для любого $x \in I$. Переменная y может быть вещественной и комплексной

Theorem 6.1. Основные свойства решений линейного уравнения

Решения – функции класса гладкости C^n , определенные на I и дающие при подстановке

в уравнение тождество. Уравнение сводится к системе

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = \frac{-a_{n-1}(x)y_n - \dots - a_0(x)y_1 + f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

Отсюда следует, что решения уравнения с любыми начальными данными $x_0 \in I$, $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ определены, единственны и продолжимы на I

Definition 6.2. Пространство решений однородной системы

Обозначим левую часть уравнения символом $\mathcal{L} := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y$

Это линейный оператор: $\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{L}(u) + \beta \mathcal{L}(v)$

Соответственно, множество решений однородного уравнения – линейное пространство. Поскольку каждому начальному данным соответствует ровно одно решение, размерность пространства равна n

Решения с начальными данными $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ образуют базис пространства решений. Это начальные данные $(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))$

Remark 6.1.

Решения $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ системы линейно зависимы, если существуют константы C_1, \dots, C_k , не все равные нулю, такие, что $C_1\varphi_1(x) + \dots + C_k\varphi_k(x) \equiv 0$

Definition 6.3. Определитель Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – решения системы. Вронскианом или определителем Вронского этого семейства решений называется функция от x :

$$W(x) = W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Theorem 6.2. Свойства определителя Вронского

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – решения уравнения. Тогда равносильны следующие условия:

1. $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(x) \equiv 0$
2. Существует $x_0 \in I$ такой, что $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(x_0) = 0$
3. Решения $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$ Очевидно

$2 \Rightarrow 3$ $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(x_0) = 0$. Тогда существуют константы C_1, \dots, C_n , не все нулевые, такие что

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + \dots + C_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\varphi_1'(x_0) + \dots + C_n\varphi_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Положим $\psi(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$

Тогда $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n-1)}(x_0) = 0 \Rightarrow \psi(x) \equiv 0$

$3 \Rightarrow 1$ $C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \equiv 0 \Rightarrow C_1\varphi_1^{(k)}(x) + \dots + C_n\varphi_n^{(k)}(x) \equiv 0$ для любого $k = 1, \dots, n-1 \Rightarrow W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(x) \equiv 0$

Theorem 6.3. Формула Остроградского-Лиувилля

Для любых $x_0, x \in I$ справедливо соотношение $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt}$

Доказательство:

Для начала, докажем формулу подсчета производных определителей:

Пусть $U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$ – определитель, состоящий из дифференцируемых функций. Тогда

$$U'(x) = \begin{vmatrix} u'_{11}(x) & \dots & u'_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u'_{n1}(x) & \dots & u'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Формула следует из формулы производной произведения функций и из представления определителя в виде

$$U(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{p \in \Pi_n} (-1)^{|p|} \prod_{i=1}^n u_{ip_i}(x)$$

Здесь Π_n – всевозможные перестановки n элементов, $|p|$ – четность перестановки

$$\begin{aligned}
\text{Отсюда } W'(x) &= \begin{vmatrix} \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \dots & \varphi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \\
&+ \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \\
&= 0 + 0 + \dots + 0 + \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \varphi_1^{(k)}(x) & -\frac{1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \varphi_2^{(k)}(x) & \dots & -\frac{1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} = \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k)}(x) & \varphi_2^{(k)}(x) & \dots & \varphi_n^{(k)}(x) \end{vmatrix} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) = W'(x)
\end{aligned}$$

Remark 6.2. Зачем нужна формула Остроградского-Лиувилля?

$$y'' + xy' - y = 0$$

Догадались, что решение $y = x$. Пусть другое решение — $\varphi(x)$

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & x \\ \varphi'(x) & 1 \end{vmatrix} = W(0)e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ НУО } W(0) = -1$$

$y'x - y = e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\varphi(x)$ — решение. Решение линейного однородного уравнения $y'x - y = 0$ — это $y = Cx$

$$y = ux \Rightarrow u'x^2 + ux - ux = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u' = x^{-2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercise 6.1.

Каков должен быть минимальный порядок линейного однородного уравнения, определенного на всей оси, чтобы у него были одновременно решения $y = x$ и $y = \sin x$

7 Лекция 6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Definition 7.1. Квазимногочлены

Так называются выражения $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $P_1(x), \dots, P_n(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами

Example 7.1.

1. $x \sin x$
2. $e^x + x^2 + e^{2x}$

Lemma 7.1.

Пусть наборы $(k_1, \lambda_1), \dots, (k_m, \lambda_m)$; $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны (то есть для любых двух пар либо первая, либо вторая компоненты разные)
Тогда функции $\{x^{k_j} e^{\lambda_j x}, j = 1, \dots, m\}$ линейно независимы

Lemma 7.2.

Для любого квазимногочлена $f(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_n(x)e^{\lambda_n x}$ верно следующее
 $f(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P_1(x) \equiv P_2(x) \equiv \dots \equiv P_n(x) \equiv 0$

Доказательство:

Отметим следующий факт. Пусть $\lambda \neq 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $(x^k e^{\lambda x})' = (\lambda x^k + kx^{k-1})e^{\lambda x}$, то есть справа при $e^{\lambda x}$ стоит многочлен степени k . Отсюда, следует, что если $\lambda \neq 0$ и $P(x)$ – многочлен, то $(P(x)e^{\lambda x})' = Q(x)e^{\lambda x}$, где $Q(x)$ – многочлен и $\deg Q = \deg P$

Будем доказывать индукцией по n – числу слагаемых

База: $n = 1$. Очевидно. $P(x)e^{\lambda x} \equiv 0 \Rightarrow P(x) \equiv 0$

Переход: $n \rightarrow n+1$. Пусть $P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_n(x)e^{\lambda_n x} + P_{n+1}(x)e^{\lambda_{n+1} x} \equiv 0$, причем $\deg P_{n+1} = m$
 $P_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \dots + P_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} + P_{n+1}(x) \equiv 0$

Продифференцируем полученное равенство $m+1$ раз по x . Получим

$Q_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})x} + \dots + Q_n(x)e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})x} \equiv 0$, причем $\deg P_j = \deg Q_j$

Степень нулевого многочлена – $-\infty$. В силу индукционного предположения получаем, что $P_1(x) \equiv \dots \equiv P_n(x) \equiv 0$. Тогда в силу базы $P_{n+1}(x) \equiv 0$

Notation 7.1.

Сейчас будем рассматривать уравнения с постоянными коэффициентами:

$\mathcal{L}y := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, где $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$

Remark 7.1.

Почти все результаты лекции применимы к случаю уравнений с комплексными коэффициентами

Definition 7.2. Характеристический многочлен

Многочлен $\chi(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ называется характеристическим многочленом уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Example 7.2.

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = \chi(\lambda) - \text{характеристическое уравнение}$$

Заметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}, (e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}$

Отсюда следует, что $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$

В частности, если λ – корень характеристического многочлена, то $e^{\lambda x}$ – решение уравнения. Например, e^{-x} и e^{-2x} – решения данного уравнения

Theorem 7.1.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда функции $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ – решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$

Доказательство:

Если λ_0 – корень кратности k , то $\chi(\lambda_0) = \chi'(\lambda_0) = \dots = \chi^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$

С другой стороны, пусть $m \in \{0, \dots, k-1\}$. Продифференцируем $\mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \chi(\lambda)e^{\lambda x}$ m раз по λ .

С одной стороны, дифференцирования по x и λ коммутируют между собой и с умножением на константы. Следовательно $\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \mathcal{L}[e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} e^{\lambda x}] = \mathcal{L}[x^m e^{\lambda x}]$

С другой стороны, по формуле производной произведения $\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} (\chi(\lambda)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^m C_m^j \chi^{(j)}(\lambda) x^{m-j} e^{\lambda x}$

Подставляя $\lambda = \lambda_0$, получаем, что $\mathcal{L}[x^m e^{\lambda_0 x}] = 0$, значит $x^m e^{\lambda_0 x}$ – решение уравнения

Example 7.3.

1. $y''' + 5y'' + 6y' = 0$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda. \text{ Корни } -0, -2, -3. \text{ Решения: } 1, e^{-2x}, e^{-3x}$$

2. $y''' + y'' - y' - y = 0$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1. \text{ Корни } -1 \text{ (кратности 2)}, 1. \text{ Решения: } e^{-x}, xe^{-x}, e^x$$

Lemma 7.3.

Пусть $\varphi(x)$ – комплексное решение уравнения с вещественными коэффициентами, тогда $\operatorname{Re} \varphi(x)$ и $\operatorname{Im} \varphi(x)$ – тоже решения

Example 7.4.

$$y'' - 8y' + 25y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$$

Будут решения $e^{(4 \pm 3i)x} = e^{4x}(\cos 3x \pm i \sin 3x)$

Remark 7.2.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень характеристического уравнения кратности k , то $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ – тоже. Этой паре корней отвечает набор из $2k$ решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Example 7.5.

$$y'''' + 2y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \text{ (кратности 2)}$$

Решения: $\cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x$

Definition 7.3. Уравнения Эйлера

Это уравнения вида $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$

Они заданы при $x > 0$ и при $x < 0$. Соответственно, замены $x = e^t$ и $x = -e^t$ ($t = \ln |x|$) сводят уравнения Эйлера к уравнению с постоянными коэффициентами

Характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(\lambda) = a_n \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + a_{n-1} \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Lemma 7.4.

Пусть λ_0 – корень характеристического уравнения кратности $k \in \mathbb{N}$. Тогда ему отвечает набор решений $|x|^{\lambda_0}, |x|^{\lambda_0} \ln |x|, \dots, |x|^{\lambda_0} (\ln |x|)^{k-1}$

Если есть пара комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k , то ей отвечают решения

$$|x|^\alpha \cos(\beta \ln |x|), |x|^\alpha \ln |x| \cos(\beta \ln |x|), \dots, |x|^\alpha (\ln |x|)^{k-1} \cos(\beta \ln |x|)$$

$$|x|^\alpha \sin(\beta \ln |x|), |x|^\alpha \ln |x| \sin(\beta \ln |x|), \dots, |x|^\alpha (\ln |x|)^{k-1} \sin(\beta \ln |x|)$$

Example 7.6.

$$x^2 y'' + x y' - y = 0 \Rightarrow \chi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - 1 = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Definition 7.4. Почти линейная система

Пусть $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция

Система $x' = f(t, x)$ почти линейная, если существуют такие непрерывные на всей оси функции $A(t), B(t) \geq 0$, что $|f(t, x)| \leq A(t)|x| + B(t)$

Theorem 7.2.

Любое решение почти линейной системы продолжимо на \mathbb{R}

Доказательство:

Пусть $\|x\|$ – евклидова норма. Ясно, что для любого решения $x(t)$ системы имеем

$$\frac{d}{dt} (\|x(t)\|^2) = \frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle = 2 \langle x(t), x'(t) \rangle$$

Пусть максимальный промежуток существования решения $x(t)$ – интервал (a, b) , содержащий точку t_0 . Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &\leq \|x(t_0)\|^2 + \left| \int_{t_0}^t \left| \frac{d}{ds} \|x(s)\|^2 \right| ds \right| = \|x(t_0)\|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t \langle x(s), x'(s) \rangle ds \right| \leq \\
&\leq \|x(t_0)\|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t |\langle x(s), f(s, x(s)) \rangle| ds \right| \leq \|x(t_0)\|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t \|x(s)\| \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq \\
&\leq \|x(t_0)\|^2 + 2 \left| \int_{t_0}^t \|x(s)\| (A(s)\|x(s)\| + B(s)) ds \right| \leq (*)
\end{aligned}$$

Пусть решение не продолжимо вправо за b . Тогда $b < +\infty$ и решение $x(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow b$ (оно же обязано покидать любой компакт!)

Тогда положим $C_1 = 2 \max_{t \in [t_0, b]} (\max(A(t)), B(t))$, $C_2 = C_1 |b - t_0|$

Воспользовавшись неравенством $\|x(s)\| \leq \frac{1}{2}(\|x(s)\|^2 + 1)$, для оценки $B(s)\|x(s)\|$, получаем

$$(*) \leq \|x(t_0)\|^2 + C_1 \left| \int_{t_0}^t \|x(s)\|^2 ds \right| + C_1 |t - t_0|$$

Отсюда и из леммы Гронуолла следует, что $\|x(t)\|^2$ ограничено на $[t_0, b]$. Противоречие
Продолжимость влево на $(-\infty, t_0]$ проверяется аналогично

8 Лекция 7. Линейные неоднородные уравнения

Example 8.1. Пример дифференциальных уравнений: пружинный маятник

Пусть есть грузик массы m на пружине жесткости k , испытывающий при движении силу трения, пропорциональную скорости

Тогда по второму закону Ньютона $ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} + F(t)$

Это можно записать в виде $mx'' + bx' + kx = F(t)$. При $F(t) = 0$ (свободные колебания)

1. $b^2 < 4km, \omega^2 = \frac{b^2}{4} - km \Rightarrow x = C_1 e^{-\frac{bt}{2}} \cos(\omega t) + C_2 e^{-\frac{bt}{2}} \sin(\omega t)$
2. $b^2 = 4km \Rightarrow x = C_1 e^{-\frac{bt}{2}} + C_2 t e^{-\frac{bt}{2}}$
3. $b^2 > 4km \Rightarrow x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$, где $a_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{km - \frac{b^2}{4}}$

Example 8.2. Пример дифференциальных уравнений: колебательный контур в электрической цепи

Пусть есть электрический колебательный контур, содержащий

1. Источник переменного тока V
2. Резистор сопротивления R
3. Катушку индуктивности L
4. Конденсатор емкости C

Такие цепи используются, например, в радиоприемниках и телефонах. Уравнение свободных колебаний имеет вид $\frac{d^2}{dt^2} I(t) + \frac{R}{L} \frac{d}{dt} I(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 0$

Или, используя обозначения $\alpha = \frac{R}{2L}$ и $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: $\frac{d^2}{dt^2} I(t) + 2\alpha \frac{d}{dt} I(t) + \omega_0^2 I(t) = 0$

Интенсивность колебаний неоднородной системы максимальна, когда период колебаний V близок к $\frac{2\pi}{\omega_0}$

Definition 8.1. Линейные неоднородные уравнения

Так называются уравнения вида $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, или, если обозначить $\mathcal{L}y := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$, то $\mathcal{L}y = f(x)$

Для решения уравнения линейного неоднородного уравнения сначала надо решить линейное однородное уравнение вида $\mathcal{L}y = 0$

Lemma 8.1.

Пусть $y^*(x)$ – некоторое решение линейного неоднородного уравнения. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y_{\text{OH}}(x) = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) + y^*(x)$

Доказательство:

Достаточно проверить, что разность двух решений неоднородно уравнения – решение однородного уравнения

$$\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y_2 = f \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 - y_2) = 0$$

Example 8.3.

$y'' + y = e^x$. Решение однородного $y'' + y = 0$ – $y_{\text{OH}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Решение неоднородного $y = \frac{e^x}{2} \Rightarrow y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{e^x}{2}$

Лемма 8.2. Принцип суперпозиции

Пусть $\mathcal{L}y_1 = f_1(x)$, $\mathcal{L}y_2 = f_2(x)$, a, b – константы. Тогда $\mathcal{L}(ay_1 + by_2) = af_1(x) + bf_2(x)$

Доказательство:

Следует из линейности оператора \mathcal{L}

Theorem 8.1.

Пусть $y_{00}(x) = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$ – общее решение уравнения. Тогда функция $y^*(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$ будет решением уравнения, где функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$ – первообразные (любые) решений следующей алгебраической системы

$$\begin{cases} C'_1(x)\varphi_1(x) + C'_2(x)\varphi_2(x) + \dots + C'_n(x)\varphi_n(x) = 0 \\ C'_1(x)\varphi'_1(x) + C'_2(x)\varphi'_2(x) + \dots + C'_n(x)\varphi'_n(x) = 0 \\ \dots \\ C'_1(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + C'_2(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + \dots + C'_n(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C'_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + C'_2(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases}$$

Remark 8.1.

Определитель системы – вронскиан системы решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Следовательно решение алгебраической системы всегда существуют и единственно

Доказательство:

Продифференцируем формулу $y^*(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$

Получим $y^{*'}(x) = C'_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C'_n(x)\varphi_n(x) + C_1(x)\varphi'_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi'_n(x) = C_1(x)\varphi'_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi'_n(x)$, по первому равенству из системы

$y^{*''}(x) = C_1\varphi''_1(x) + \dots + C_n\varphi''_n(x)$, по второму равенству из системы итд

$y^{*(n)}(x) = C'_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + C'_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) = C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_n(x)}$ и подставляем все это в уравнение

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y^* &= \sum_{j=0}^n a_j(x)y^{*(j)}(x) = a_n(x)\frac{f(x)}{a_n(x)} + \sum_{j=0}^n a_j(x) \sum_{k=1}^n C_k(x)\varphi_k^{(j)}(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x) \sum_{j=0}^n a_j(x)\varphi_k^{(j)}(x) = \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^n C_k(x)\mathcal{L}\varphi_k(x) = f(x) \end{aligned}$$

Remark 8.2.

Если мы возьмем в качестве функций $C_j(x)$ какие-то другие первообразные решения нашего уравнения, то к решению $y^*(x)$ добавится какое-то решение линейного однородного уравнения. Вид общего решения неоднородного уравнения не изменится

Example 8.4.

$$y'' + 2y' + y = -\frac{e^{-x}}{x^2}$$

Решение линейного однородного уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ (кратности 2)

$$y_{00} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$y^*(x) = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) (1-x) e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_2' = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{1}{x} \\ C_2' = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Можно взять $C_1(x) = \ln|x|$, $C_2(x) = \frac{1}{x}$. Тогда получим $y^*(x) = \ln|x| e^{-x} + e^{-x}$

Замечаем, что $\ln|x| e^{-x}$ – тоже решение уравнения

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \ln|x| e^{-x}$

Definition 8.2. Метод неопределенных коэффициентов

Пусть все коэффициенты $a_j(x)$ постоянны, а функция $f(x)$ в правой части уравнения имеет вид квазимногочлена, то есть уравнение имеет вид

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P(x) e^{\lambda_0 x}$$

В правой части может стоять линейная комбинация квазимногочленов, тогда мы пользуемся принципом суперпозиции

В частности, λ_0 может быть комплексным числом, то есть можем работать с экспонентами, умноженными на синусы и косинусы

Definition 8.3. Резонанс и нерезонанс

Пусть $\chi(x) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$ – характеристический многочлен, соответствующего линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Тогда для уравнения возможны два случая:

1. $\chi(\lambda_0) \neq 0$ – нерезонансный случай
2. $\chi(\lambda_0) = 0$ – резонансный случай. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ таково, что $\chi(\lambda_0) = \dots = \chi^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, но $\chi^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда говорим о резонансе порядка k

Отсутствие резонанса – это резонанс порядка 0

Theorem 8.2.

Пусть в уравнении $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P(x) e^{\lambda_0 x}$ $\deg P(x) = m$. Тогда

1. Если $\chi(\lambda_0) \neq 0$, то есть имеет место нерезонанс, то указанное уравнение имеет решение вида $y^*(x) = Q(x) e^{\lambda_0 x}$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен той же степени, что и $P(x)$
2. Если имеет место резонанс порядка k , то указанное уравнение имеет решение вида $y^*(x) = x^k Q(x) e^{\lambda_0 x}$, где $\deg Q = \deg P$

Доказательство:

Достаточно доказать случай 2, случай 1 доказывается так же ($k = 0$)

Пусть $P(x) = \sum_{l=0}^m p_l x^l$. Положим $Q(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j$.

Подставляем функцию $y^*(x) = x^k Q(x) e^{\lambda_0 x} = \sum_{j=0}^m q_j x^{k+j} e^{\lambda_0 x}$ в уравнение

В левой части этого уравнения получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}y^* &= \sum_{j=0}^m q_j \mathcal{L}[x^{k+j} e^{\lambda_0 x}] = \sum_{j=0}^m q_j \frac{\partial^{k+j}}{\partial \lambda^{k+j}} \mathcal{L}[e^{\lambda x}] \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{j=0}^m q_j \frac{\partial^{k+j}}{\partial \lambda^{k+j}} (\chi(\lambda) e^{\lambda x}) \Big|_{\lambda=\lambda_0} x^l = \\
&= \sum_{j=0}^m q_j \sum_{l=0}^{k+j} C_{k+j}^l x^l \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x} = \sum_{j=0}^m q_j \sum_{l=0}^j C_{k+j}^l x^l \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x} = \\
&= \sum_{l=0}^m \left(\sum_{j=l}^m q_j C_{k+j}^l \chi^{(k+j-l)}(\lambda_0) \right) x^l e^{\lambda_0 x}
\end{aligned}$$

Это выражение должно равняться $f(x) = \sum_{l=0}^m p_l x^l e^{\lambda_0 x}$

Таким образом, для коэффициентов q_j получаем уравнения

При $x^m : C_{m+k}^m \chi^{(k)}(\lambda_0) q_m = p_m$

При $x^{m-1} : C_{m-1+k}^{m-1} \chi^{(k)}(\lambda_0) q_{m-1} + C_{m+k}^{m-1} \chi^{(k+1)}(\lambda_0) q_m = p_{m-1}$

...

При 1 : $\chi^{(k)}(\lambda_0) q_0 + \chi^{(k+1)}(\lambda_0) q_1 + \dots + \dots + \chi^{(k+m)}(\lambda_0) q_m = p_0$

Если коэффициенты p_0, \dots, p_m известны, то коэффициенты q_0, \dots, q_m могут быть однозначно найдены последовательно, начиная с q_m

Example 8.5.

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^{3x} + e^x$$

$$1. y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

$$2. f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x^2 + 1)e^{3x} + e^x$$

Рассмотрим два уравнения

$$\bullet y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

$$\bullet y'' - 3y' + 2y = e^x$$

3. Первое уравнение нерезонансно $3 \notin \{1, 2\}$. Имеет решение вида

$$y_1^* = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

$$y_1^{*'} = (3ax^2 + (2a + 3b)x + (b + 3c))e^{3x}$$

$$y_1^{*''} = (9ax^2 + (8a + 9b)x + (2a + 4b + 9c))e^{3x}$$

$$\mathcal{L}y_1^* = (2ax^2 + (2a + 2b)x + (2a + b + 2c))e^{3x}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ 2a + b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_1^* = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{3x}$$

Второе уравнение резонансно $\lambda_1 = 1$, резонанс порядка 1

$$y_2^* = A x e^x, y_2^{*'} = A(x + 1)e^x, y_2^{*''} = A(x + 2)e^x \Rightarrow \mathcal{L}y_2^* = -A e^x$$

Слагаемые вида $x e^x$ сокращаются (и это неслучайно)

$$\text{Ответ: } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{3x} + x e^x$$

Exercise 8.1.

Сформулировать и обосновать принцип неопределенных коэффициентов для неоднородного уравнения Эйлера

Подсказка: Какая там была замена переменных?