

Table des matières

Introduction	2
1 Semi-groupe associé à un processus de Markov	4
1.1 Intégrale de Bochner	4
1.2 Semi-groupes et leurs générateurs	7
1.3 Semi-groupe associé à un processus de Markov	9
2 Processus de Lévy α-stable	12
2.1 Généralités sur les processus de Lévy	12
2.2 Processus de Lévy à mesure de Lévy fini	16
2.3 Processus α -stables	18
2.4 Générateur infinitésimal du processus α -stable	26
3 Propriété de couplage des processus α-stables	29
3.1 Propriété de couplage	29
3.2 Une condition suffisante pour le couplage des processus de Lévy	35
Bibliographie	40

Introduction

Le théorème de Liouville prend ses origines dans l'analyse complexe et énonce que toute fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe bornée est nécessairement constante sur \mathbb{C} . En analysant la partie réelle des fonctions holomorphes, nous en déduisons que les constantes sont les seules fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiables vérifiant pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0.$$

D'une façon plus générale, il est bien connu que (Voir par exemple [2]) que le théorème de Liouville a lieu pour les fonctions Δ -harmoniques sur \mathbb{R}^d . Plus précisément, pour tout entier $d \geq 1$ et pour toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , si

$$\Delta f := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$$

est identiquement nulle, alors f est constante sur \mathbb{R}^d .

Dans plusieurs ouvrage (voir [2, 14]), une étude détaillée des fonctions Δ -harmoniques a été développée en utilisant des outils analytiques (théorie du potentiel, analyse harmonique, EDP ...etc.). Il est connu que

$$\Delta f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(f(B_t) | B_0 = x) - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que cette limite existe et où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien d-dimensionnel défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. En particulier, il est démontré que toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne localement bornée est Δ -harmonique sur \mathbb{R}^d si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout réel $r > 0$,

$$f(x) = \mathbb{E}(f(B_{\tau_{x,r}}) | B_0 = x)$$

où $\tau_{x,r} = \inf \{t > 0; B_t \notin B(x, r)\}$ est le premier temps de sortie de la boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon r . Tout ceci a, entre autre, permis de développer une étude des fonctions Δ -harmoniques basée sur des outils probabilistes (voir par exemple [10, ?]).

Dans notre travail, nous considérerons un processus de Lévy $X = (X_t)_{t \geq 0}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière est X -harmonique sur \mathbb{R}^d si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t} = 0.$$

Le but de ce mémoire est d'analyser si la propriété de Liouville à lieu pour les fonctions X -harmoniques. En particulier, nous allons nous intéresser aux processus de Lévy α -stables invariant par rotation à valeurs dans \mathbb{R}^d où $0 < \alpha \leq 2$. On signale que le mouvement brownien est le processus 2-stable invariant. Supposons maintenant que $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus α -stable invariant par rotation où $0 < \alpha < 2$. On appelle laplacien fractionnaire l'opérateur définie par

$$\Delta^{\alpha/2} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que cette limite existe. Les fonctions α -harmoniques sur \mathbb{R}^d sont les fonctions dont le laplacien fractionnaire est nul sur \mathbb{R}^d . W.Chen, X.Cui, Z.Yuan et R.Zhuo [8] ont montré par une méthode analytique que le laplacien fractionnaire possède la propriété de Liouville. Nous allons proposer dans notre travail une méthode probabiliste pour vérifier ce résultat.

La méthode proposée ici est basée sur la propriété de couplage des processus de Lévy (voir [12]). Pour tout processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on définit les processus $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(X_t^y)_{t \geq 0}$ issus respectivement de x et y possédant les mêmes lois de transition que $(X_t)_{t \geq 0}$. On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété de couplage si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ le temps d'arrêt

$$T_{x,y} = \inf \{t > 0; X_t^x = X_t^y\} < \infty.$$

Un processus possédant la propriété de couplage vérifie la propriété de Liouville (voir [12]). Il nous suffira alors de montrer que la propriété de couplage à lieu pour le processus α -stable invariant par rotation. Dans un cadre plus générale, R.Schilling et J.Wang [17] ont donnés dans leur article des conditions suffisantes pour qu'un processus de Lévy possède la propriété de couplage. Nous énoncerons, en complément de notre travail, quelques-uns de leurs résultats.

Notre mémoire sera organisé comme suit : nous commencerons dans le premier chapitre par parler des semi-groupes associés aux processus de Markov. Dans ce chapitre, nous rappellerons quelques propriétés sur les semi-groupes qui permettront de définir le générateur infinitésimal puis nous montrerons la connection entre cette notion et celle des processus de Markov.

Dans le second chapitre, nous rappellerons quelques propriétés sur les processus de Lévy, puis nous définirons les processus α -stables et nous étudierons divers propriétés associés à leurs mesures de Lévy. Finalement, nous terminerons le chapitre par une brève analyse du laplacien fractionnaire.

Dans le dernier chapitre, nous définirons la propriété de couplage et établirons sa connection avec la propriété de Liouville. Par suite, nous démontrerons que le processus de Lévy α -stables invariant par rotation possède la propriété de couplage. Pour finir, nous donnerons une condition suffisante pour qu'un processus de Lévy possède la propriété de couplage.

Chapitre 1

Semi-groupe associé à un processus de Markov

Dans ce premier chapitre, nous donnerons un aperçu sur la théorie des semi-groupes et des processus de Markov. Nous étudierons la connection entre ces deux notions.

Dans toute la suite de ce mémoire, nous considérerons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, d un entier naturel non nul, $B_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées définies sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} et $M_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre d à coefficients réels.

1.1 Intégrale de Bochner

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{B}(E)$ la tribu borélienne de E engendrée par les ouverts de la topologie forte. Une application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ est dite fortement mesurable si elle est mesurable par rapport à $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(E))$.

Soit une mesure borélienne μ sur \mathbb{R}_+ . Une application s définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans E est dite étagée si elle s'écrit sous la forme

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x) b_i \quad (1.1)$$

où n est un entier naturel non nul, x est un réel positif, et pour tout $1 \leq i \leq n$, $b_i \in E$ et les ensembles A_i sont des boréliens de \mathbb{R}_+ deux à deux disjoints tels que $\mu(A_i) < \infty$. Pour une telle fonction, on définit l'intégrale de Bochner de s par rapport à μ par

$$\int_{\mathbb{R}_+} s(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i.$$

Vu la non unicité de l'écriture (1.1) d'une fonction étagée s , pour que la définition soit cohérente, il est nécessaire que l'intégrale de Bochner de s soit indépendante de son écriture sous la forme (1.1). Pour vérifier ceci, supposons que

$$s = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(x) b_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{1}_{B_j}(x) c_j$$

où m est un entier naturel non nul et pour tout $1 \leq j \leq m$, $c_j \in E$ et les ensembles B_j sont des boréliens de \mathbb{R}_+ deux à deux disjoints tels que $\mu(B_j) < \infty$. On définit

$$A_{n+1} := \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B_{m+1} := \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j.$$

Soit $1 \leq i \leq n$ un indice tel que $b_i \neq 0$. Alors

$$A_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m+1} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m+1} (A_i \cap B_j).$$

On signale que $A_i \cap B_{m+1} = \emptyset$. De même, pour tout $1 \leq j \leq m$, tel que $c_j \neq 0$, on a $B_j = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_j)$. Remarquons aussi que si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, on a $b_i = c_j$. Nous obtenons alors

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) c_j = \sum_{j=1}^m \mu(B_j) c_j.$$

D'autre part, l'intégrale de Bochner d'une application étagée s vérifie

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} s \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \|b_i\| = \int_{\mathbb{R}_+} \|s(x)\| \, \mu(dx). \quad (1.2)$$

La dernière intégrale étant une intégrale classique par rapport à la mesure μ .

Définition 1.1.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une application fortement mesurable. On dit que f est μ -Bochner intégrable s'il existe une suite d'applications étagées $(s_n)_{n \geq 1}$ définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans E vérifiant :

- (i) $(s_n)_{n \geq 0}$ converge μ -presque partout vers f dans E .
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \|f - s_n\| \, d\mu = 0$.

Dans ce cas, on définit l'intégrale de Bochner de f par rapport à μ par

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu. \quad (1.3)$$

La limite dans l'équation (1.3) correspond à la limite par rapport à la norme de E , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu \right\| = 0.$$

La définition 1.1.1 nécessite quelques justifications. L'espace $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Ainsi en démontrant qu'elle est de Cauchy, on en déduit que la suite

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu \right)_{n \geq 1}$$

admet une limite dans E quand n tend vers ∞ . Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(\epsilon) > 0$ tel que pour tous $n, m \geq N(\epsilon)$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} s_m \, d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|s_n - s_m\| \, d\mu$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|s_n - f\| d\mu + \int_{\mathbb{R}_+} \|f - s_m\| d\mu \leq 2\epsilon.$$

Montrons maintenant que l'intégrale de Bochner de f est indépendante du choix de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$. Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une autre suite vérifiant (i) et (ii) de la définition 1.1.1. On a donc $(r_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy. On pose alors

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} s_n d\mu \quad \text{et} \quad r := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} r_n d\mu.$$

On définit la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ vérifiant pour tout $k \geq 1$

$$z_{2k} = s_k \quad \text{et} \quad z_{2k+1} = r_{k+1}.$$

Puisque $(z_n)_{n \geq 1}$ vérifie (ii), on conclut que la suite

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} z_n d\mu \right)_{n \geq 1}$$

est aussi de Cauchy. Alors elle converge vers un élément $z \in E$. De plus, cette suite admet deux sous-suites convergentes ayant pour limites respectivement r et s . On en déduit alors que $r = s = z$.

Il est facile de vérifier, par passage à la limite, que l'inégalité (1.2) s'étend à toute application μ -Bochner intégrable $s = f$. Autrement dit, si f est μ -Bochner intégrable alors

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(x)\| \mu(dx). \quad (1.4)$$

Une application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ est dite fortement dérivable en un réel $x > 0$ s'il existe un élément $c \in E$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x+h) - f(h)}{h} - c \right\| = 0.$$

Le vecteur c s'appelle la dérivée forte de f au point x . On note

$$c = f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}. \quad (1.5)$$

Dans toute la suite, pour tout $x \geq 0$, on notera

$$\int_0^x f du = \int_0^x f \mathbf{1}_{[0,x]} du$$

l'intégrale de Bochner de f sur $[0, x]$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ . Par ailleurs, on dira qu'une application f est Bochner intégrable si elle est Bochner intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ .

Théorème 1.1.2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une application Bochner intégrable sur \mathbb{R}_+ .*

(i) *L'application $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par*

$$F(x) = \int_0^x f(u) du \quad (1.6)$$

est fortement dérivable en tout point $x > 0$ et on a $F'(x) = f(x)$.

(ii) Soit $a, b > 0$ et soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx. \quad (1.7)$$

Proposition 1.1.3. Soit $T : E \rightarrow E$ un opérateur linéaire continu et soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ une application μ -Bochner intégrable. Alors

$$T \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} T f d\mu.$$

Démonstration. Considérons tout d'abord une application étagée donnée par (1.1). Par linéarité de l'opérateur T on obtient

$$T \int_{\mathbb{R}_+} s d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) T b_i = \int_{\mathbb{R}_+} T s d\mu.$$

Soit maintenant $(s_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications étagées vérifiant (i) et (ii) de la définition 1.1.1. Alors par continuité de l'opérateur T , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T \int_{\mathbb{R}_+} s_n d\mu = T \int_{\mathbb{R}_+} f d\mu.$$

De plus, en utilisant (1.4) on en déduit que pour tout $n \geq 1$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} T s_n d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} T f d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|T(s_n - f)\| d\mu \leq \|T\| \int_{\mathbb{R}_+} \|(s_n - f)\| d\mu$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

□

1.2 Semi-groupes et leurs générateurs

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contraction sur E , i.e. $(T_t)_{t \geq 0}$ est une famille d'endomorphisme de E vérifiant :

- (i) $T_0 = I$ (où est I est l'application identité de E).
- (ii) Pour tous réels $s, t \geq 0$, $T_{s+t} = T_s T_t$. (Propriété de semi-groupe)
- (iii) Pour tout $t > 0$, $\|T_t\| \leq 1$.
- (iv) L'application $t \mapsto T_t$ définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de E est fortement continue en 0, i.e. pour tout $\psi \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t \psi - \psi\| = 0.$$

On remarque que l'application $t \mapsto T_t$ est fortement continue en tout $t > 0$, i.e. pour tout $\psi \in E$, on a

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T_t \psi - T_s \psi\| = 0.$$

En effet, pour $h > 0$,

$$\begin{aligned}\|T_{t+h}\psi - T_t\psi\| &= \|T_t(T_h - I)\psi\| \\ &\leq \|T_t\| \|(T_h - I)\psi\| \\ &\leq \|(T_h - I)\psi\|.\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on conclut que

$$\lim_{s \rightarrow t^+} \|T_t\psi - T_s\psi\| = 0.$$

De même, on vérifie que

$$\lim_{s \rightarrow t^-} \|T_t\psi - T_s\psi\| = 0.$$

Soit l'ensemble D défini par

$$D = \left\{ \psi \in E : \exists \phi_\psi \in E; \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T_t\psi - \psi}{t} - \phi_\psi \right\| = 0 \right\}.$$

Il est évident que D est un sous espace vectoriel de E . De plus, pour tout $\psi \in D$, ϕ_ψ est unique.

Définition 1.2.1. L'opérateur linéaire A qui associe à tout élément $\psi \in D$ l'élément ϕ_ψ s'appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$. Le sous espace vectoriel D sera noté par D_A et est appelé le domaine de l'opérateur A .

Soit $\psi \in E$. Considérons l'application $\Psi : t \mapsto T_t\psi$ définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans E . L'application Ψ est Bochner intégrable sur tout compact de \mathbb{R}_+ (voir [9]). Comme pour tout $t > 0$, l'opérateur T_t est continu, la proposition 1.1.3 donne que pour tous réels t, s et $u > 0$:

$$T_s \int_0^t T_u \psi \, du = \int_0^t T_{u+s} \psi \, du. \quad (1.8)$$

Proposition 1.2.2. Soit $t > 0$ et $\psi \in E$. Alors $\int_0^t T_u \psi \, du \in D_A$ et on a

$$A \int_0^t T_u \psi \, du = T_t\psi - \psi.$$

Démonstration. Soit $\psi \in E$ et un réel $t > 0$. En utilisant (1.7) et (1.8), on obtient pour tout réels $h > 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{h} \int_0^t T_{u+h} \psi \, du - \frac{1}{h} \int_0^t T_u \psi \, du \right) &= \left(\frac{1}{h} \int_h^{t+h} T_u \psi \, du - \frac{1}{h} \int_0^t T_u \psi \, du \right) \\ &= \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T_u \psi \, du - \frac{1}{h} \int_0^h T_u \psi \, du \right) \\ &= \frac{F(t+h) - F(h)}{h} - \frac{F(h) - F(0)}{h}\end{aligned}$$

où

$$F(x) = \int_0^x T_u \psi \, du \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

On faisant tendre h vers l'infini, (1.6) donne que

$$A \int_0^t T_u \psi \, du = T_t\psi - \psi.$$

□

Théorème 1.2.3. *Pour tous $t \geq 0$ et $\psi \in D_A$,*

$$T_t\psi \in D_A \quad \text{et} \quad AT_t\psi = T_tA\psi.$$

Démonstration. Soit $\psi \in D_A$ et $t \geq 0$ et posons $\phi = T_t\psi$. En utilisant le fait que l'opérateur T_t est continu sur E , on a

$$\frac{T_s\phi - \phi}{s} = T_t \left(\frac{T_s\psi - \psi}{s} \right) \xrightarrow{s \rightarrow 0} T_tA\psi. \quad (1.9)$$

Par suite, $\phi = T_t\psi \in D_A$ et $A\phi = T_tA\psi$. □

Il est immédiat d'après (1.9), que $t \mapsto T_t\psi$ est fortement dérivable sur \mathbb{R}^+ et que

$$\frac{d}{dt}T_t\psi = AT_t\psi = T_tA.$$

Cette égalité s'appelle équation Forward-Backward.

1.3 Semi-groupe associé à un processus de Markov

Soit X et Y des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit une tribu \mathcal{B} sur Ω telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. On rappelle que l'espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{B} est la variable aléatoire notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ vérifiant :

- (i) $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est \mathcal{B} mesurable.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_A)$.

On note par $\mathbb{E}(X|Y)$ l'espérance conditionnelle de X sachant à la tribu engendrée par Y .

Une application $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ est appelée probabilité de transition si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $N(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $N(\cdot, A)$ est une fonction borélienne sur \mathbb{R}^d .

Entre autre, si μ est une mesure de probabilité, on note par $\mu \cdot N$ l'application définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu \cdot N(A \times B) = \int_A N(x, B)\mu(dx).$$

Le théorème de Carathéodory (voir par exemple [9]) nous permet de prolonger cette application en une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}))$ que l'on note encore $\mu \cdot N$.

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . On appelle loi conditionnelle de X sachant Y , la probabilité de transition $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_Y \cdot N. \quad (1.10)$$

On note pour tous $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $y \in \mathbb{R}^d$

$$N(y, A) := \mathbb{P}(X \in A | Y = y).$$

Le théorème de Jirina ([18] page 256) assure l'existence d'une telle loi conditionnelle.

Le théorème suivant est le théorème de Fubini. Pour une démonstration de ce résultat, voir Strook [18].

Théorème 1.3.1. *Soit $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application borélienne.*

(i) *Supposons que ϕ est positive. Alors l'application*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, y) \mathbb{P}(X \in dx | Y = y)$$

est borélienne positive et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x, y) \mathbb{P}_{(X, Y)}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, y) \mathbb{P}(X \in dx | Y = y) \right] \mathbb{P}_Y(dy). \quad (1.11)$$

(ii) *Supposons que ϕ est $\mathbb{P}_{(X, Y)}$ -intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Alors pour \mathbb{P}_Y -presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ l'application $x \mapsto \phi(x, y)$ est $\mathbb{P}(X \in \cdot | Y = y)$ intégrable et l'application*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, y) \mathbb{P}(X \in dx | Y = y)$$

est \mathbb{P}_Y intégrable. De plus, l'égalité (1.11) à lieu.

Proposition 1.3.2. *Soit $\phi \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et soit pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,*

$$\psi(y) = \mathbb{E}(\phi(X) | Y = y) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \mathbb{P}(X \in dx | Y = y).$$

Alors $\psi(Y) = \mathbb{E}(\phi(X) | Y)$.

Démonstration. Le théorème de Fubini donne que ψ est borélienne, ce qui entraîne que $\psi(Y)$ est $\sigma(Y)$ -mesurable. Puisque $\mathbb{P}(X \in \cdot | Y = \cdot)$ est une probabilité de transition vérifiant (1.10), on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi(Y) \mathbf{1}_{\{Y \in A\}}) &= \int_A \psi(y) \mathbb{P}_Y(dy) \\ &= \int_A \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \mathbb{P}_{X|Y=y}(dx) \mathbb{P}_Y(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x) \mathbf{1}_A(y) \mathbb{P}_{(X, Y)}(dx, dy) \\ &= \mathbb{E}(\phi(X) \mathbf{1}_{\{Y \in A\}}). \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.3. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit qu'un processus adapté $(X_t)_{t \geq 0}$ est de Markov (il vérifie la propriété de Markov faible) si pour toute fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $t \geq s \geq 0$:

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s). \quad (1.12)$$

A tout processus de Markov, on associe la famille d'opérateurs $(T_{s,t})_{t \geq s \geq 0}$ définie sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $B_b(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$T_{s,t}f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s = x).$$

Cette famille est appelée famille de transition.

Proposition 1.3.4. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov et $(T_{s,t}, t \geq s \geq 0)$ la famille de transition associée. Alors pour tous réels $t \geq r \geq s \geq 0$, on a

$$T_{r,s}T_{s,t} = T_{r,t}. \quad (1.13)$$

Démonstration. Soit $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq r \geq s \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} T_{r,t}f(x) &= \mathbb{E}(f(X_t)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t)|X_s)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(T_{s,t}f(X_s)|X_r = x) \\ &= T_{r,s}T_{s,t}f(x). \end{aligned}$$

□

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov et $(T_{s,t})_{t \geq s \geq 0}$ la famille de transition associée. On dit qu'un processus de Markov est normal si pour tout $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et pour tous réels $t \geq s \geq 0$, $T_{s,t}f$ est mesurable. On définit pour tous réels $t \geq s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la famille de probabilité de transition $(p_{s,t})_{t \geq s \geq 0}$ par :

$$p_{s,t}(x, A) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s = x) = T_{s,t}\mathbf{1}_A(x).$$

Cette famille s'appelle la loi de transition du processus. On remarque que pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$T_{s,t}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_{s,t}(x, dy).$$

On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est homogène si pour tous $t \geq s \geq 0$, $T_{s,t} = T_{0,t-s}$. Dans ce cas, on note $T_{0,t}$ par T_t et $p_{0,t}$ par p_t . Ainsi l'égalité (1.13) s'écrit

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad \text{pour tous } t \geq s \geq 0.$$

Dans toute la suite, $C_0(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0.$$

On muni cet espace de la norme uniforme.

Définition 1.3.5 (Processus de Feller). Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov normal et homogène et on désigne par $(T_t)_{t \geq 0}$ sa famille de transition. Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit de Feller, si pour tout $t \geq 0$ et pour toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

- (i) $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t f - f\| = 0$.

Il est immédiat que $(T_t)_{t \geq 0}$ forme un semigroupe fortement continu de contraction sur $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 2

Processus de Lévy α -stable

Dans ce chapitre, nous étudions quelques propriétés élémentaires des processus de Lévy, puis nous introduisons la notion de processus stable. Nous donnerons aussi une représentation du générateur infinitésimal d'un processus de Lévy sous forme d'opérateur pseudo-différentiel.

Dans toute la suite de ce chapitre, $(X_t)_{t \geq 0}$ designera un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.1 Généralités sur les processus de Lévy

Soit λ et μ deux mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d . On rappelle que leur produit de convolution est défini pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\lambda * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{1}_A(x+y) \lambda(dx) \mu(dy).$$

Autrement dit, pour toute fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu * \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) \mu(dx) \lambda(dy).$$

Définition 2.1.1. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . On dit que μ est infiniment divisible si pour tout $n \geq 1$, il existe une mesure de probabilité μ_n sur \mathbb{R}^d vérifiant

$$\mu = \mu_n^{*n} = \underbrace{\mu_n * \dots * \mu_n}_{n \text{ fois}}.$$

De même, on dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d est infiniment divisible si sa loi l'est.

Dans la suite, nous noterons pour toute mesure de probabilité μ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\Phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, u \rangle} \mu(dx)$$

la fonction caractéristique de μ .

Proposition 2.1.2. Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Alors μ est infiniment divisible, si et seulement si, pour tout $n \geq 1$ il existe une mesure de probabilité μ_n sur \mathbb{R}^d , vérifiant :

$$\Phi_\mu(u) = (\Phi_{\mu_n}(u))^n.$$

Démonstration. Si μ est infiniment divisible, on a pour tous $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\Phi_\mu(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, u \rangle} \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, u \rangle} \mu_n^{*n}(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x_1, u \rangle} \mu_n(dx_1) \times \dots \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x_n, u \rangle} \mu_n(dx_n) \\ &= (\Phi_{\mu_n}(u))^n\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, on note μ_n la mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d vérifiant $\Phi_\mu(u) = (\Phi_{\mu_n}(u))^n$. Il est évident que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_\mu(u) = \Phi_{\mu_n^{*n}}(u)$. On en déduit que $\mu = \mu_n^{*n}$. \square

On rappelle qu'une mesure de Lévy ν sur \mathbb{R}^d vérifie :

- (i) $\nu(\{0\}) = 0$.
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |y|^2 \nu(dy) < \infty$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des mesures infiniment divisibles par la forme de leurs fonctions caractéristiques. Pour la démonstration de ce résultat voir Applebaum [1] page 30 et 126.

Théorème 2.1.3 (Formule de Levy-Khintchine). *Soit μ une mesure de probabilité infiniment divisible sur \mathbb{R}^d . Alors il existe $A \in M_d(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$ et une mesure de Lévy ν sur \mathbb{R}^d tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\Phi_\mu(u) = \exp \left(i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy) \right) \quad (2.1)$$

où $B(0,1)$ désigne la boule unité de \mathbb{R}^d .

Reciproquement, toute mesure infiniment divisible dont la fonction caractéristique s'écrit sous la forme (2.1) est infiniment divisible.

L'application η vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\eta(u) = i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy)$$

est appelée *symbole de Lévy*. Le triplet (A, b, ν) quand à lui est appelé *triplet de Lévy*.

On rappelle que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout entier $n \geq 1$, $0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires si pour tout $t \geq s \geq 0$, les variables aléatoires $X_t - X_s$ et $X_{t-s} - X_0$ ont même loi.

Dans toute la suite, nous appellerons P.A.I.S les processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 2.1.4. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy issu de x si :

- (i) $X_0 = x$.
- (ii) $(X_t)_{t \geq 0}$ est un P.A.I.S.
- (iii) $(X_t)_{t \geq 0}$ est à trajectoires continues à droite avec une limite à gauche (càdlàg), i.e. pour tout $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$, et $r > 0$:

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \geq t}} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{s \rightarrow r \\ 0 \leq s \leq r}} |X_s(\omega)| < \infty.$$

On remarque que pour tous $t \geq 0$ et $n \geq 1$:

$$X_t = \sum_{k=1}^n Y_k^{(n)}(t)$$

avec $Y_k^{(n)}(t) = X_{\frac{kt}{n}} - X_{\frac{(k-1)t}{n}}$ pour tout entier $1 \leq k \leq n$. Comme les variables aléatoires $Y_k^{(n)}(t)$ sont i.i.d (indépendantes identiquement distribuées), on en déduit que X_t est infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.

Lemme 2.1.5 (Voir [1]). Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, l'application $t \rightarrow \Phi_{X_t}(u)$ est continue.

Théorème 2.1.6. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R}^d et soit η et (A, b, ν) respectivement, symbole et triplet de Lévy de X_1 . Alors pour tout $t \geq 0$:

$$\Phi_{X_t}(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle X_t, u \rangle}) = e^{t\eta(u)} = (\Phi_{X_1}(u))^t. \quad (2.2)$$

Dans ce cas, on dit que η et (A, b, ν) sont respectivement symbole et triplet de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\eta_t(u) = t\eta_1(u)$ où η_t est le symbole de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$. Sans perte de généralité, supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est issu de 0. Soit $t, s \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\Phi_{X_{t+s}}(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle X_{t+s}, u \rangle}) = \mathbb{E}(e^{i\langle X_{t+s} - X_s, u \rangle} e^{i\langle X_s, u \rangle}) = \Phi_{X_{t+s} - X_s}(u) \Phi_{X_s}(u) = \Phi_{X_t}(u) \Phi_{X_s}(u). \quad (2.3)$$

D'autre part, il est évident que $\Phi_{X_t}(0) = 1$. On en déduit que l'unique solution continue de l'équation vérifiant (2.3) est $\Phi_{X_t}(u) = e^{t\beta(u)}$ avec $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. D'où $\beta(u) = \eta(u)$. □

Théorème 2.1.7. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus de Lévy tels que les variables aléatoires X_1 et Y_1 aient la même loi. Alors les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ ont même loi.

Démonstration. D'après la théorème 2.1.6, pour tout $t \geq 0$, $X_t \stackrel{\text{loi}}{=} Y_t$. Cela implique que pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$:

$$X_{t+s} - X_s \stackrel{\text{loi}}{=} Y_{t+s} - Y_s.$$

Comme les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont à accroissements indépendants, on a pour tous $n \geq 1$ et $t_n > \dots > t_1 \geq 0$

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}).$$

Vu que la fonction $f : x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_{n-1} + x_n)$ définie sur \mathbb{R}^{nd} à valeurs \mathbb{R}^{nd} est borélienne et nous donne

$$f((X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

on en déduit que

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}).$$

Les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ possèdent alors les mêmes lois finis dimensionnelles. On en déduit qu'ils ont même loi. \square

Lemme 2.1.8 (Voir [1]). *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy issu de $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p_t la loi de X_t pour tout $t > 0$. Alors p_t converge faiblement vers δ_x (mesure de Dirac en x), i.e. pour tout $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_t(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \delta_x(dy).$$

Proposition 2.1.9. *Tout processus de Lévy est un processus de Feller.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $X_0 = 0$. Montrons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov homogène. Soit $t \geq s \geq 0$ et $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t - X_s + X_s) | \mathcal{F}_s) = g(X_s) \quad (2.4)$$

où $g(x) = \mathbb{E}(f(X_t - X_s + x)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y) \mathbb{P}_{X_{t-s}}(dy)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. De même, il est facile de vérifier que

$$\mathbb{E}(f(X_t) | X_s) = g(X_s).$$

Ceci montre que la propriété de Markov est vérifiée. Etant donné que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements stationnaires il est immédiat de remarquer qu'il est homogène.

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ la famille de transition associée à notre processus. D'après (2.4), on a pour tous $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ et $s \geq 0$:

$$T_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_{t+s}) | X_s = x) = g(x) = \mathbb{E}(f(X_t + x)). \quad (2.5)$$

Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, montrons que pour tout $t \geq 0$, $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^d$. Le théorème de convergence dominée donne :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_t f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x_n + y) \mathbb{P}_{X_t}(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y) \mathbb{P}_{X_t}(dy) \\ &= T_t f(x). \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |T_t f(x)| &\leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + y)| \mathbb{P}_{X_t}(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x + y)| \mathbb{P}_{X_t}(dy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. La continuité uniforme de f donne que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(0, r)$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + y) - f(y)| < \epsilon/2.$$

On en déduit que pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \|T_t f - f\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |T_t f(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y) - f(x) p_t(dy) \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B(0, r)} |f(x + y) - f(x)| p_t(dy) + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(B(0, r))^c} |f(x + y) - f(x)| p_t(dy) \\ &\leq \epsilon/2 + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{(B(0, r))^c} |f(x + y) - f(x)| p_t(dy). \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0 dans cette inégalité et en appliquant le lemme 2.1.8 on obtient que l'application $t \mapsto T_t$ est fortement continue en 0. □

2.2 Processus de Lévy à mesure de Lévy fini

Dans toute la suite, $(B_t)_{t \geq 0}$ désignera un mouvement brownien standard à valeurs dans \mathbb{R}^d i.e. le processus stochastique vérifiant :

- (i) $B_0 = 0$ p.s.
- (ii) $(B_t)_{t \geq 0}$ est à accroissement indépendant.
- (iii) Pour tout $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)I_d)$, où I_d désigne la matrice identité de $M_d(\mathbb{R}^d)$. (i.e. $B_t - B_s$ suit la loi normal de paramètres 0 et $(t - s)I_d$. De plus, par convention $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$.)
- (iv) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

Il est évident que le mouvement brownien standard est un processus de Lévy. De plus, comme $B_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d)$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ sa fonction caractéristique est

$$\Phi_{B_1}(u) = e^{-\frac{|u|^2}{2}}.$$

On en déduit alors que le mouvement brownien standard est de symbole de Lévy donné pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\eta(u) = -\frac{|u|^2}{2}.$$

Définition 2.2.1. On appelle mouvement brownien avec drift le processus $(D_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d qui s'écrit sous la forme

$$D_t = zt + \sigma B_t$$

où $z \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma \in M_d(\mathbb{R})$ vérifiant $A := \sigma^\top \sigma = {}^\top \sigma \sigma$ et telle que A soit définie positive. Ce processus est de Lévy et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ son symbole de Lévy est :

$$\eta(u) = i \langle z, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle.$$

Proposition 2.2.2. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν) . Si $\nu = 0$ alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift.*

Démonstration. Par définition, $(X_t)_{t \geq 0}$ a pour symbole de Lévy pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\eta(u) = i \langle z, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle.$$

Comme A est une matrice symétrique définie positive, il existe $\sigma \in M_d(\mathbb{R})$ vérifiant $\sigma^\top \sigma = {}^\top \sigma \sigma = A$. On en conclut que $(X_t)_{t \geq 0}$ a la même loi que $(bt + \sigma B_t)_{t \geq 0}$. □

On rappelle que le processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ d'intensité $\rho > 0$ est un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{N} , croissant et tel que pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre ρt .

Définition 2.2.3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, un réel $\rho > 0$ et μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . On appelle processus de Poisson composé de paramètre (μ, ρ) le processus de Lévy $(Y_t)_{t \geq 0}$ vérifiant pour tout $t \geq 0$:

$$Y_t = x + \sum_{k=0}^{N_t} Z_k$$

où $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ρ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi μ tels que $(N_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants.

Proposition 2.2.4. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν) tel que $0 < \nu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Alors $(X_t)_{t \geq 0} = (Y_t + D_t)_{t \geq 0}$ où $(D_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec drift et $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson composé de paramètre $(\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}, \nu(\mathbb{R}^d))$ indépendant de $(D_t)_{t \geq 0}$.*

Démonstration. D'après la formule de Lévy-Khintchine, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ l'exposant de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$ est :

$$\eta_X(u) = i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i \langle u, y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy).$$

Comme $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$, on a

$$\int_{B(0,1)} |x| \nu(dx) < \infty.$$

On en déduit alors que

$$\eta_X(u) = i \langle b_D, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i \langle u, y \rangle} - 1] \nu(dy) \quad (2.6)$$

où

$$b_D = b - \int_{B(0,1)} y \nu(dy).$$

D'autre part, $(Y_t)_{t \geq 0}$ a pour exposant de Lévy,

$$\eta_Y(u) = \nu(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i \langle x, u \rangle} - 1) \frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R}^d)}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. La formule (2.6) et la proposition 2.2.2, nous permettent de conclure. □

2.3 Processus α -stables

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Définition 2.3.1. On dit que μ est stable si pour tout $a > 0$, il existe un réel $\gamma(a) > 0$ et $\delta(a) \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$(\Phi_\mu(u))^a = e^{i\langle \delta(a), u \rangle} \Phi_\mu(\gamma(a)u).$$

On dit que μ est strictement stable si $\delta(a) = 0$ pour tout $a > 0$. Une variable aléatoire X est dite (strictement) stable si sa loi est (strictement) stable. Par ailleurs, on remarque que toute mesure stable est infiniment divisible.

Un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est dit (strictement) stable, si pour tout $t > 0$, X_t est (strictement) stable. Il est évident que pour qu'un processus de Lévy soit stable, il suffit qu'il le soit pour un entier $t > 0$.

On rappelle qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est dit autosimilaire au sens large, si pour tout $a > 0$ et $t \geq 0$, il existe $b(a) > 0$ et $c(t, a) \geq 0$ tels que

$$(X_{at})_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (b(a)X_t + c(t, a))_{t \geq 0}. \quad (2.7)$$

On dit que $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est autosimilaire si pour tout $t \geq 0$ et $a > 0$, $c(t, a) = 0$.

Dans toute la suite, nous conserverons les notations $\gamma(a)$, $\delta(a)$, $b(a)$ et $c(t, a)$ utilisées dans ces définitions.

Proposition 2.3.2. *Un processus de Lévy $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d est autosimilaire au sens large (respectivement autosimilaire) si et seulement s'il est stable (respectivement strictement stable).*

Démonstration. Supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est autosimilaire au sens large, alors pour tout $a > 0$, les processus $(X_{at})_{t \geq 0}$ et $(b(a)X_t + c(t, a))_{t \geq 0}$ ont même loi. Il est évident que ces deux processus sont de Lévy. On en déduit que :

$$\Phi_{X_a}(u) = (\Phi_{X_1}(u))^a = \Phi_{bX_1 + c(1, a)}(u) = \Phi_{X_1}(b(a)u + c(1, a)).$$

Ceci montre que X_1 est stable.

Supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est stable alors pour tous $a > 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$:

$$(\Phi_{X_1}(u))^a = \Phi_{\gamma(a)X_1 + \delta(a)}(u).$$

Les processus $(X_{at})_{t \geq 0}$ et $(\gamma(a)X_t + t\delta(a))_{t \geq 0}$ sont de Lévy et on a pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\Phi_{X_a}(u) = (\Phi_{X_1}(u))^a.$$

On en déduit que :

$$(X_{at})_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (\gamma(a)X_t + t\delta(a))_{t \geq 0}.$$

□

Théorème 2.3.3. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy stable à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que pour tout $t > 0$, X_t soit non triviale (i.e. la loi de X_t est différent d'une mesure de Dirac). Alors pour tout $a > 0$, $\gamma(a)$ est unique et il existe un unique $\alpha \in]0, 2]$ vérifiant

$$\gamma(a) = a^{1/\alpha}.$$

Le réel α est appelé indice de stabilité du processus.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats préliminaires.

Lemme 2.3.4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , non trivial et soit $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$b_1 X + c_1 \stackrel{\text{loi}}{=} b_2 X + c_2. \quad (2.8)$$

Alors $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$.

Démonstration. L'égalité (2.8) nous donne que :

$$X \stackrel{\text{loi}}{=} b_2^{-1}(b_1 X + c_1 - c_2).$$

Supposons que $X \stackrel{\text{loi}}{=} bX + c$ et montrons que $b = 1$ et $c = 0$. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi que X alors

$$X_1 - X_2 \stackrel{\text{loi}}{=} bX_1 + c - bX_2 - c \stackrel{\text{loi}}{=} b(X_1 - X_2).$$

Si $0 \leq b < 1$, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$b(X_1 - X_2) \stackrel{\text{loi}}{=} b^n(X_1 - X_2).$$

En faisant tendre n vers ∞ , on obtient $b = 0$. On en déduit alors que $(X_1 - X_2) \stackrel{\text{loi}}{=} 0$. Ceci est impossible comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et non triviales. De même, pour tout $b > 1$,

$$\frac{1}{b}(X_1 - X_2) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{b^n}(X_1 - X_2).$$

Ceci montre que $b = 1$. D'autre part, on a pour tout $n \geq 1$

$$X \stackrel{\text{loi}}{=} X + nc.$$

On en déduit que $c = 0$. □

Lemme 2.3.5. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , non trivial et autosimilaire au sens large. Alors pour tous $a > 0$ et $t \geq 0$, les réels $b(a)$ et $c(t, a)$ de l'égalité (2.7) sont uniques.

Démonstration. Soit $a > 0$, supposons pour tous $t \geq 0$, qu'il existe $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c_1(t)$ et $c_2(t) \in \mathbb{R}^d$ vérifiant :

$$(X_{at})_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (b_1 X_t + c_1(t))_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (b_2 X_t + c_2(t))_{t \geq 0}.$$

Dans ce cas, le lemme 2.3 donne que pour tout $t \geq 0$, $b_1 = b_2$ et $c_1(t) = c_2(t)$. □

Grâce à la proposition 2.3.2 et au lemme 2.3.5, il est facile de remarquer que pour tout $a > 0$, $b(a) = \gamma(a)$ et que $c(t, a) = t\delta(a)$ pour tout $t \geq 0$.

Lemme 2.3.6. *Soit Z et W deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d non triviales. Supposons qu'il existe une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , une suite de réels $(a_n)_{n \geq 0}$ et une suite $(b_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{R}^d vérifiant :*

$$Z_n \xrightarrow{\text{loi}} Z \quad \text{et} \quad a_n Z_n + b_n \xrightarrow{\text{loi}} W.$$

Alors il existe un réel b et $c \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$bZ + c \stackrel{\text{loi}}{=} W.$$

Proposition 2.3.7. *Soit l'application $\gamma : a \mapsto \gamma(a)$ définie sur $]0, \infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . Elle vérifie les propriétés suivantes :*

- (1) $\gamma(1) = 1$.
- (2) Pour tout $a > 0$, $\gamma(a^{-1}) = \gamma(a)^{-1}$.
- (3) Pour tous $a > 0$ et $a' > 0$, $\gamma(aa') = \gamma(a)\gamma(a')$.
- (4) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ suite de réels strictements positifs tels qu'il existe un réel $0 < a < \infty$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(a_n) = \gamma(a).$$

Démonstration. Le lemme 2.3.5 montre que γ est bien définie. Remarquons que la propriété (1) est évidente. Étant donné que X est autosimilarité au sens large on a

$$\gamma(a)X_{a^{-1}t} + a^{-1}t\delta(a) \stackrel{\text{loi}}{=} X_t.$$

On en déduit alors que

$$X_{a^{-1}t} \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma^{-1}(a)X_t - a^{-1}t\gamma^{-1}(a)\delta(a) \quad \text{et} \quad X_{a^{-1}t} \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma(a^{-1})X_t + m\delta(a).$$

où m est une constante réelle. Ceci prouve que la propriété (2) est vérifiée. D'autre part, la propriété (3) est vérifiée, en effet on a

$$X_{aa't} \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma(a)X_{a't} + a't\delta(a) \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma(a)\gamma(a')X_t + a't\delta(a) + \gamma(a)t\delta(a'). \quad (2.9)$$

Montrons maintenant la propriété (4). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ suite de réels strictements positifs tels qu'il existe $0 < a < \infty$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$X_{a_n t} \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma(a_n)X_t + t\delta(a_n) \quad \text{et} \quad X_{a_n t} \xrightarrow{\text{loi}} X_{at}.$$

Le lemme 2.3.5 nous permet de conclure que (4) est vérifié. □

Dans tout la suite, pour toute mesure ρ sur \mathbb{R}^d et pour tout $r > 0$, on note par $T_r \rho$ la mesure borélienne sur \mathbb{R}^d vérifiant pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$(T_r \rho)(B) = \rho(r^{-1}B). \quad (2.10)$$

Proposition 2.3.8. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν) alors le processus de Lévy $(a^H X_t + t\delta)_{t \geq 0}$ a pour triplet $(a^{2H}A, b(a), T_{a^H}\nu)$ avec $b(a) \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Calculons la fonction caractéristique de $a^H X_1 + \delta$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$\Phi_{a^H X_1 + \delta}(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle a^H X_1 + \delta, u \rangle}) = e^{i\langle \delta, u \rangle + \eta(a^H u)}.$$

L'exposant de Lévy du processus $(a^H X_t + t\delta)_{t \geq 0}$ est

$$\begin{aligned} i\langle \delta, u \rangle + \eta(a^H u) &= i\langle \delta, u \rangle + i\langle b, a^H u \rangle - \frac{1}{2}\langle Aa^H u, a^H u \rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle a^H u, y \rangle} - 1 - i\langle a^H u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy) \\ &= i\langle ba^H + \delta a^{-H}, u \rangle - \frac{1}{2}\langle Aa^{2H} u, u \rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i\langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] T_{a^H}(dy) + i\langle \beta, u \rangle \end{aligned}$$

avec

$$\beta = \int_{\mathbb{R}^d} y \mathbf{1}_{B(0,1)}(y) T_{a^H}(dy) - \int_{\mathbb{R}^d} y \mathbf{1}_{B(0,1)}(y) \nu(dy).$$

En posant, pour tout $a > 0$, $b(a) = ba^H + \delta a^{-H} + \beta$, on obtient le triplet de Lévy du processus $(a^H X_t + t\delta)_{t \geq 0}$. □

Démonstration du théorème 2.3.3. Posons $H = 1/\alpha$. Il suffit de montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\gamma(a) = a^H.$$

Tout d'abord, la proposition 2.3.7 nous montre que la fonction γ est une fonction continue sur $]0, \infty[$ telle que pour tous $a > 0, a' > 0$:

$$\gamma(aa') = \gamma(a)\gamma(a').$$

Ceci nous permet d'affirmer qu'il existe $H \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\gamma(a) = a^H.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $H \geq 1/2$. Montrons d'abord que si $a > 1$ alors $\gamma(a) > 1$. Supposons que pour un réel $a > 1$ on a $\gamma(a) \leq 1$. Posons $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$, étant donné que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est autosimilaire au sens large on obtient pour tout entier relatif n ,

$$\Phi_{X_{a^n t}}(u) = \Phi_{X_t}(\gamma(a)^n u) e^{\langle u, t\delta(a^n) \rangle}.$$

On en déduit que $|\Phi_{X_{a^n t}}(\gamma(a)^{-n} u)| = |\Phi_{X_t}(u)|$. D'autre part, comme X_0 est constante, $|\Phi_{X_{a^n t}}(u)|$ converge uniformément sur tout compact vers 1 quand $n \rightarrow -\infty$ (Voir [16]). De plus, comme pour tout $n \leq 0$

$$|\gamma(a)^{-n} u| \leq |u|$$

on obtient que :

$$0 \leq 1 - |\Phi_{X_{a^n t}}(\gamma(a)^{-n} u)| \leq \sup_{|z| \leq |u|} (1 - |\Phi_{X_{a^n t}}(z)|) \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow -\infty$. On en déduit que $|\Phi_{X_t}(u)| = 1$. Ceci montre alors que X_t est constante. Comme on a supposé X_t non trivial, on en déduit que $\gamma(a) > 1$. Comme pour tout $a > 0$, on a $\gamma(a) = a^H$, on remarque que $H > 0$.

Soit $a > 0$, supposons que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ a pour triplet de Lévy (A, b, ν) alors $(X_{at})_{t \geq 0}$ a pour triplet $(aA, ab, a\nu)$ et la proposition 2.3.8 nous permet d'affirmer que le processus de Lévy $(a^H X_t + t\delta)_{t \geq 0}$ a pour triplet $(a^{2H} A, b(a), T_{a^H} \nu)$ avec $b(a) \in \mathbb{R}^d$. De plus, on a

$$(X_{at})_{t \geq 0} \stackrel{loi}{=} (a^H X_t + t\delta)_{t \geq 0}.$$

L'unicité du triplet de Lévy donne :

$$a^{2H} A = aA, \quad ab = b(a) \quad \text{et} \quad a\nu = T_{a^H} \nu.$$

Comme pour tout $t > 0$, X_t est non trivial, on a $A \neq 0$ ou $\nu \neq 0$.

Pour $A \neq 0$, on obtient $H = 1/2$.

Pour $\nu \neq 0$, nous remarquons que, pour tous $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, on a

$$T_{r_1} T_{r_2} \nu = T_{r_1 r_2} \nu \quad \text{et} \quad a^{-1} \nu = T_{a^{-H}} \nu.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n \nu = T_{a^{Hn}} \nu. \tag{2.11}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on définit l'ensemble :

$$S_n(a^H) = \{x \in \mathbb{R}^d : a^{nH} < |x| \leq a^{(n+1)H}\}.$$

On remarque que

$$S_n(a^H) = a^{nH} S_0(a^H)$$

et que

$$\nu(S_n(a^H)) = (T_{a^{-nH}} \nu)(S_0(a^H)) = a^{-n} \nu(S_0(a^H)).$$

D'autre part, il est facile de voir que

$$\bar{B}^*(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^d, 0 < |x| \leq 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{-n-1}(a^H) \tag{2.12}$$

et

$$\{x : |x| > 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(a^H).$$

Comme $\nu(\{x : |x| > 1\}) < \infty$, on en déduit que $\nu(S_0(a^H)) \neq 0$. L'égalité (2.11) étant équivalente à :

$$a^n \int \mathbf{1}_B(x) \nu(dx) = \int \mathbf{1}_B(a^{Hn} x) \nu(dx)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que pour tout fonction borélienne positive f :

$$a^n \int f(x) \nu(dx) = \int f(a^{Hn}x) \nu(dx). \quad (2.13)$$

Ceci nous donne

$$\int_{S_n(a^H)} |x|^2 d\nu(dx) = a^{-n(1-2H)} \int_{S_0(a^H)} |x|^2 \nu(dx).$$

Puisque ν vérifie :

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty$$

l'égalité (2.12) nous donne

$$\sum_{n \leq -1} a^{-n(1-2H)} < \infty.$$

On en déduit que $(1 - 2H) < 0$, ce qui montre que $H > 1/2$. □

Remarque. On remarque que les processus stables d'un même indice α possèdent de nombreuses propriétés communes, nous parlerons alors pour chaque $\alpha \in]0, 2]$ de processus α -stables. Par définition de la stabilité, un processus non trivial ne peut pas être à la fois 2-stable et α -stable avec $0 < \alpha < 2$. On a donc

- (i) $A \neq 0$ et $\nu = 0$ si et seulement si $(X_t)_{t \geq 0}$ est 2-stable.
- (ii) $\nu \neq 0$ et $A = 0$ si et seulement si $(X_t)_{t \geq 0}$ est α -stable avec $0 < \alpha < 2$.

D'autre part, la proposition 2.2.2 nous permet d'affirmer que les processus de Lévy 2-stables sont les mouvements browniens avec drift.

Théorème 2.3.9. *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d infiniment divisible de triplet (A, b, ν) et $0 < \alpha < 2$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) μ est α -stable.
- (ii) pour tout $a > 0$, $\nu = a^{-\alpha} T_a(b)$ et $A = 0$.
- (iii) $A = 0$ et il existe une mesure finie λ sur $S(0, 1)$ telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\nu(B) = \int_{S(0,1)} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \mathbf{1}_B(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}}. \quad (2.14)$$

Démonstration. L'équivalence des propriétés (i) et (ii) a déjà été prouvée dans la démonstration du théorème 2.3.3. Supposons maintenant que la propriété (ii) est vérifiée. Soit $E \subset]0, \infty[$ et $C \subset S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| = 1\}$. Soit l'ensemble EC vérifiant :

$$EC = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, |x| \in E, \frac{x}{|x|} \in C \right\}.$$

On définit alors la mesure borélienne sur la sphère unité notée λ vérifiant pour tout $C \in \mathcal{B}(S(0, 1))$ (ensemble des boréliens de la sphère unité) :

$$\lambda(C) = \alpha \nu([1, \infty[C).$$

Soit ν_1 une mesure vérifiant l'équation (2.14). Alors ν_1 est une mesure sur \mathbb{R}^d telle que $\nu_1(\{0\}) = 0$ et vérifiant pour tous $b > 0$ et $C \in \mathcal{B}(S(0, 1))$:

$$\begin{aligned}\nu_1([b, \infty[C]) &= \lambda(C) \int_b^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \\ &= \frac{1}{\alpha b^\alpha} \lambda(C) \\ &= \frac{1}{b^\alpha} \nu([1, \infty[C]) \\ &= \nu([b, \infty[C]) \\ &= \nu([b, \infty[C]).\end{aligned}$$

On en déduit que $\nu = \nu_1$. De plus, par construction de la mesure λ , (iii) implique (ii). \square

Ce théorème nous permet entre autre de déduire que pour toute fonction f borélienne ν -intégrable, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \nu(dx) = \int_{S(0,1)} \lambda(d\xi) \int_0^\infty f(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}}. \quad (2.15)$$

Proposition 2.3.10. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy α -stable et ν la mesure de Lévy associée alors on a :*

$$(i) \int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty \text{ si et seulement si } \alpha < 1.$$

$$(ii) \int_{|x| > 1} |x| \nu(dx) < \infty \text{ si et seulement si } \alpha > 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $a > 1$, nous considérons l'ensemble $S_n(a^{1/\alpha})$ défini comme dans la démonstration du théorème 2.3.3. D'après (2.13) et puisque $\nu(S_n(a^{1/\alpha})) = a^{-n} \nu(S_0(a^{1/\alpha}))$, on obtient que :

$$\int_{S_n(a^{1/\alpha})} |x| \nu(dx) = a^{n \frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \int_{S_0(a^{1/\alpha})} |x| \nu(dx).$$

D'autre part,

$$\nu(S_0(a^{1/\alpha})) \leq \int_{\nu(S_0(a^{1/\alpha}))} |x|^2 \nu(dx) < \infty.$$

Etant donné que $a^{1/\alpha} > 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{|x| \leq 1} |x| \nu dx < \infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty \int S_{-n-1}(a^{1/\alpha}) |x| \nu dx < \infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a^{(-n-1) \frac{(1-\alpha)}{\alpha}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \alpha < 1.\end{aligned}$$

De même, on vérifie que $\int_{|x| > 1} |x| \nu(dx) < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. \square

Théorème 2.3.11. Soit $0 < \alpha < 2$, un processus α -stable $(X_t)_{t \geq 0}$ et μ la loi de X_1 . Si le processus est symétrique (i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a $\phi_\mu(u) = \phi_\mu(-u)$) alors

$$\phi_\mu(u) = \exp\left(- \int_{S(0,1)} |\langle u, \epsilon \rangle|^\alpha \lambda_2(d\epsilon)\right) \quad (2.16)$$

où λ_2 est une mesure finie sur la sphère unité, non nulle et déterminée de manière unique par μ .

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon \in S(0, 1)$. On a pour tout $0 < \alpha < 1$ (voir par exemple [16]),

$$\int_0^\infty (e^{ir\langle u, \epsilon \rangle} - 1)r^{-1-\alpha}dr = c_1(\alpha) |\langle u, \epsilon \rangle|^\alpha (1 - c_2(\alpha) \operatorname{sgn}(\langle u, \epsilon \rangle)) \quad (2.17)$$

avec $c_1(\alpha)$ et $c_2(\alpha)$ des constantes dépendantes de α et sgn la fonction signe et pour tout $1 < \alpha < 2$

$$\int_0^\infty (e^{ir\langle u, \epsilon \rangle} - 1 - ir\langle u, \epsilon \rangle)r^{-1-\alpha}dr = c_1(\alpha) |\langle u, \epsilon \rangle|^\alpha (1 - c_2(\alpha) \operatorname{sgn}(\langle u, \epsilon \rangle)) \quad (2.18)$$

avec $c_1(\alpha)$ et $c_2(\alpha)$ des constantes dépendantes de α .

En appliquant l'égalité (2.15) à la formule de Lévy-Khintchine, (2.17) et (2.18) donnent que pour $\alpha \neq 1$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ le symbole de Lévy η du processus est

$$\eta(u) = - \int_{S(0,1)} |\langle u, \epsilon \rangle|^\alpha (1 - c_2(\alpha) \operatorname{sgn}(\langle u, \epsilon \rangle)) \lambda_2(d\epsilon) + i \langle \beta_\alpha, u \rangle \quad (2.19)$$

avec λ_2 est le produit de λ par une constante et $\beta_\alpha \in \mathbb{R}^d$ dépendant de α .

Soit $\alpha = 1$, $u \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon \in S(0, 1)$. On a (voir par exemple [16]) :

$$\int_0^\infty (e^{ir\langle u, \epsilon \rangle} - 1 - ir\langle u, \epsilon \rangle)r^{-2}dr = -\frac{\pi}{2} |\langle u, \epsilon \rangle| - i \langle u, \epsilon \rangle \ln(|\langle u, \epsilon \rangle|) + ic_1 \langle u, \epsilon \rangle. \quad (2.20)$$

En appliquant (2.15) à la formule de Lévy-Khintchine, l'égalité (2.20) donne que pour $\alpha = 1$ et $u \in \mathbb{R}^d$ le symbole de Lévy η du processus est :

$$\eta(u) = - \int_{S(0,1)} |\langle u, \epsilon \rangle| + \frac{2}{\pi} i \langle u, \epsilon \rangle \ln(|\langle u, \epsilon \rangle|) \lambda_2(d\epsilon) + i \langle \beta_1, u \rangle. \quad (2.21)$$

Comme μ est symétrique, on obtient que $\eta(u) = \eta(-u)$. On en déduit que l'égalité (2.16) est vérifiée. □

Définition 2.3.12. Une mesure μ sur \mathbb{R}^d est invariante par rotation si pour toute matrice orthogonale $U \in M_d(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu(UB) = \mu(B)$.

Un processus X est dit invariant par rotation (ou isotrope), s'il l'est pour tout $t \geq 0$ et dans ce cas, on a UX et X ont même loi.

Remarque. Il est évident de voir qu'une mesure μ est invariante par rotation, si et seulement si,

$$\phi_\mu(u) = \phi_\mu(Uu)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et pour toute matrice orthogonale $U \in M_d(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.3.13. Soit $0 < \alpha \leq 2$. Une mesure μ sur \mathbb{R}^d est α -stable et invariante par rotation, si et seulement s'il existe une constante réelle $\sigma(\alpha)$ vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi_\mu(u) = e^{-\sigma(\alpha)|u|^\alpha}. \quad (2.22)$$

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 2$. L'égalité (2.16) nous donne pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi_\mu(u) = \exp(-|u|^\alpha \int_{S(0,1)} \left| \left\langle \frac{u}{|u|}, x \right\rangle \right|^\alpha \lambda(dx).$$

De plus, $\frac{u}{|u|} \in S(0,1)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. On en déduit que

$$\sigma(\alpha, \epsilon) = \int_{S(0,1)} |\langle \epsilon, x \rangle|^\alpha \lambda(dx)$$

est constante pour tout $\epsilon \in S(0,1)$ et pour tout $0 < \alpha < 2$ puisque la mesure μ est invariante par rotation.

Pour $\alpha = 2$, on sait que la mesure μ est gaussienne. La fonction caractéristique du processus gaussien invariant par rotation vérifie bien (2.22). La réciproque du théorème est, quand à elle, évidente. □

On remarque que multiplier un processus α -stable invariant par rotation ne change pas ses propriétés, nous parlerons du processus α -stable invariant par rotation lorsque $\sigma(\alpha) = 1$.

2.4 Générateur infinitésimal du processus α -stable

Dans toute la suite, on note par $S(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide définie sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{C} .

On rappelle que pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, la transformée de Fourier de f est définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-d/2} e^{-i\langle x, y \rangle} f(y) dy$$

et la formule d'inversion de la transformée de Fourier nous donne pour tout $g \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-d/2} e^{i\langle x, y \rangle} \hat{g}(y) dy.$$

Définition 2.4.1. Soit A un opérateur linéaire défini sur $S(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $S(\mathbb{R}^d)$. A est appelé opérateur pseudo-différentiel, s'il existe une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$Af(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x \rangle} \Lambda(x, u) \hat{f}(u) du$$

pour toute fonction $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ tels que l'intégrale admet un sens. Dans ce cas, Λ est appelé symbole de l'opérateur pseudo-différentiel A .

En appliquant la formule de Lévy-Khintchine et celle de Fourier inverse, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy, $(T_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de Feller associé, A son générateur infinitésimal agissant sur $D_A \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$ et de symbole de Lévy η de triplet (m, b, ν) , avec $m = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$. Alors on a :*

- (i) *Pour tous $t \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$, T_t est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\Lambda(x, u) = e^{t\eta(u)}$.*
- (ii) *$S(\mathbb{R}^d) \subseteq D_A$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\Lambda(x, u) = \eta(u)$.*
- (iii) *Pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{i=1}^d b_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_i \partial_j f(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} [f(x+y) - f(x) + \langle \nabla f(x), y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy). \end{aligned}$$

Lemme 2.4.3. *Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur $C_0(\mathbb{R}^d)$ et A son générateur infinitésimal agissant sur D_A . Si $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t f(x) - f(x)) = g(x) \quad (2.23)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ alors $f \in D_A$ et $Af = g$.

Pour la démonstration de ce lemme se référer au livre de Sato [16] page 209 lemme 31.7.

Démonstration du théorème 2.4.2. Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ comme \hat{f} est intégrable alors pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|e^{i\langle X_t, y \rangle} e^{i\langle x, y \rangle} \hat{f}(y)|) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(y)| dy < \infty.$$

En appliquant la formule d'inversion de la transformée de Fourier et le théorème de Fubini, on obtient que pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= (2\pi)^{-d/2} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle X_t + x, y \rangle} \hat{f}(y) dy \right) \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(e^{i\langle X_t + x, y \rangle}) \hat{f}(y) dy \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{t\eta(y)} e^{i\langle x, y \rangle} \hat{f}(y) dy. \end{aligned}$$

Par suite, l'assertion (i) est prouvée. Pour démontrer (ii), on rappelle (voir [1]) qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$|\eta(u)| \leq K(1 + |u|^2).$$

Ceci nous permet, en appliquant le théorème des accroissements finis et comme $(1 + |u|^2)\hat{f}(u) \in S(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i\langle u, x \rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) \right| du &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq s \leq t} |\eta(u) e^{s\eta(u)}| |\hat{f}(u)| du \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |u|^2) |\hat{f}(u)| du < \infty. \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée, le lemme 2.4.3 et l'assertion (i) nous donne que pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t f(x) - f(x)) &= (2\pi)^{-d/2} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x \rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) du \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t \rightarrow 0} e^{i\langle u, x \rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) du \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\eta(u)} \hat{f}(u) du. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour démontrer l'assertion (iii), on applique la formule de Lévy-Khintchine à (ii) et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} Af(x) &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x \rangle} (i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy)) \hat{f}(u) du. \end{aligned}$$

□

Définition 2.4.4. Soit $0 < \alpha \leq 2$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus de Lévy α -stable invariant par rotation à valeurs dans \mathbb{R}^d . On appelle Laplacien fractionnaire son générateur infinitésimal que l'on note $\Delta^{\alpha/2}$.

En utilisant les formules (ii) et (iii) du théorème 2.4.2, on obtient pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in]0, 2[$:

$$\Delta^{\alpha/2} f(x) := -(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, x \rangle} |u|^\alpha \hat{f}(u) \mathbf{1}_{u \neq 0} du. \tag{2.25}$$

Lorsque $\alpha = 2$ l'opérateur laplacien fractionnaire coïncide avec l'opérateur laplacien classique.

Chapitre 3

Propriété de couplage des processus α -stables

Le but de ce chapitre est d'examiner avec des méthodes probabilistes des propriétés de type Liouville associées aux fonctions α -harmoniques. Plus précisément, nous présenterons une approche basée sur la propriété de couplage des processus α -stables sur \mathbb{R}^d . Nous donnerons une condition suffisante pour qu'un processus de Lévy possède la propriété de couplage.

3.1 Propriété de couplage

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Une variable aléatoire $T : \Omega \mapsto [0, \infty]$ est appelée \mathcal{F}_t -temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$,

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On appelle tribu des événements antérieurs à T la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tous $t \geq s \geq 0$, X_t est intégrable et

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Il est bien connu que tout mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est une martingale. En effet, comme le mouvement brownien est à accroissements indépendants alors pour tous $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s \\ &= B_s. \end{aligned}$$

Pour un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, on définit la variable aléatoire $X_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

Le théorème suivant est le théorème d'arrêt de Doob. Pour une démonstration de ce théorème, le lecteur pourra se référer au livre de D. Applebaum [1].

Théorème 3.1.1. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une \mathcal{F}_t -martingale à trajectoires continues à droite et soit S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S \leq T$ presque sûrement. Alors X_T et X_S sont intégrables et on a :

$$\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_S) = X_S.$$

Dans toute la suite, $(X_t)_{t \geq 0}$ désigne un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que $(X_t)_{t \geq 0}$ est normal et homogène. On définit l'opérateur β vérifiant

$$\beta f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(f(X_t) | X_0 = x) - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que cette limite existe. On note alors par D_β l'ensemble de ces fonctions.

Définition 3.1.2. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite β -harmonique (ou X-harmonique) sur \mathbb{R}^d si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\beta f(x) = 0.$$

Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ la famille de transition associée à $(X_t)_{t \geq 0}$ définie sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ et $\tilde{\beta}$ son générateur infinitésimal. Alors on $\beta = \tilde{\beta}$ sur $D_{\tilde{\beta}} = D_\beta \cap B_b(\mathbb{R}^d)$. On définit l'ensemble

$$\mathcal{H}_b^\beta = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \beta\text{-harmonique bornée sur } \mathbb{R}^d\}$$

Proposition 3.1.3. Soit l'ensemble

$$E = \{f \in B_b(\mathbb{R}^d) : T_t f = f; t \geq 0\}.$$

Alors $\mathcal{H}_b^\beta = E$.

Démonstration. Il est évident que $E \subset \mathcal{H}_\beta$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{H}_\beta$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = 0.$$

Dans ce cas, pour tout $s > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{t+s} f(x) - T_s f(x)}{t} = 0.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ l'application définie sur \mathbb{R}_+ par $t \mapsto T_t f(x)$ est constante sur \mathbb{R}_+ . Par suite, $T_t f = f$ pour tout $t \geq 0$, ce qui signifie que $f \in E$. □

On a pour tous réels $0 \leq s \leq t$ et toute fonction β -harmonique bornée f ,

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_s) = T_t f(X_s) = f(X_s).$$

Cela nous permet d'observer que si f est harmonique alors $(f(X_t))_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

Il est bien connu que $\frac{1}{2}\Delta$ est le générateur infinitésimal associé au mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . De plus, une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est Δ -harmonique sur \mathbb{R}^d si et seulement si $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\Delta f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Le théorème de Liouville classique dit que toute fonction δ -harmonique bornée sur \mathbb{R}^d est nécessairement constante (voir par exemple [2]).

Dans la suite, une fonction f est dite α -harmonique si elle est $\Delta^{\alpha/2}$ -harmonique et on notera $\mathcal{H}_{\Delta^{\alpha/2}}$ par \mathcal{H}_α . On signale que les fonctions 2-harmoniques sont les fonctions δ -harmoniques.

Soit $(p_t)_{t \geq 0}$ la loi de transition du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et soit $x, y \in \mathbb{R}^d$. On note par $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(X_t^y)_{t \geq 0}$ les processus issus respectivement de x et y et possédant les mêmes lois de transition que $(X_t)_{t \geq 0}$, i.e. pour tout $t \geq 0$, X_t^x et X_t^y ont respectivement pour loi $p_t(x, \cdot)$ et $p_t(y, \cdot)$. On appelle temps de couplage des processus $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(X_t^y)_{t \geq 0}$ le temps d'arrêt

$$T_{x,y} = \inf \{t > 0; X_t^x = X_t^y\}.$$

Définition 3.1.4. On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété de couplage si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $T_{x,y}$ est fini presque sûrement.

Le théorème suivant permet d'établir le lien entre la propriété de couplage et la propriété de Liouville.

Théorème 3.1.5. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Markov à trajectoires continues à droite. Si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ possède la propriété de couplage alors la propriété de Liouville a lieu.

Démonstration. Soit x et $y \in \mathbb{R}^d$ et soit une fonction h X -harmonique bornée. Comme les processus $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(X_t^y)_{t \geq 0}$ sont des processus de Markov ayant les mêmes lois de transition que $(X_t)_{t \geq 0}$, il est évident que $(h(X_t^x))_{t \geq 0}$ et $(h(X_t^y))_{t \geq 0}$ sont des martingales. Alors le théorème d'arrêt de Doob (Théorème 3.1.1) donne que pour tout $t > 0$ et pour tout temps d'arrêt fini T , on a

$$h(x) = \mathbb{E}(h(X_{t \wedge T}^x)) \quad \text{et} \quad h(y) = \mathbb{E}(h(X_{t \wedge T}^y)). \quad (3.1)$$

Supposons que la propriété de couplage est vérifiée. Soit $T = T_{x,y}$ le temps de couplage de $(X_t^x)_{t \geq 0}$ et $(X_t^y)_{t \geq 0}$. Alors (3.1) donne pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\mathbb{E}(h(X_{t \wedge T}^x) - h(X_{t \wedge T}^y))| \\ &\leq |\mathbb{E}((h(X_{t \wedge T}^x) - h(X_{t \wedge T}^y))\mathbf{1}_{\{T \leq t\}})| + |\mathbb{E}((h(X_{t \wedge T}^x) - h(X_{t \wedge T}^y))\mathbf{1}_{\{T > t\}})| \\ &= |\mathbb{E}((h(X_t^x) - h(X_t^y))\mathbf{1}_{\{T \leq t\}})| + |\mathbb{E}((h(X_t^x) - h(X_t^y))\mathbf{1}_{\{T > t\}})| \\ &= |\mathbb{E}((h(X_t^x) - h(X_t^y))\mathbf{1}_{\{T > t\}})| \\ &\leq \mathbb{E}(|h(X_t^x)|\mathbf{1}_{\{T > t\}}) + \mathbb{E}(|h(X_t^y)|\mathbf{1}_{\{T > t\}}) \\ &\leq 2 \|h\|_\infty \mathbb{P}(T > t). \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers l'infini et comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, on en déduit que $h(x) = h(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. Ce qui signifie que h est constante. □

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures boréliennes bornées signées sur \mathbb{R}^d . On note par $\|\cdot\|_{var}$ la norme en variation totale définie pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\|\mu\|_{var} = \sup_{\substack{f \in B_b(\mathbb{R}^d) \\ \|f\| \leq 1}} |\mu(f)|$$

où

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu.$$

Il est connu (voir par exemple [16]) qu'il existe $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que les applications

$$A \mapsto \mu_+(A) = \mu(A \cap H) \quad \text{et} \quad A \mapsto \mu_-(A) = -\mu(A \cap H^c)$$

sont des mesures positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En outre,

$$\mu = \mu_+ - \mu_- \quad \text{et} \quad \|\mu\|_{var} = \mu_+(\mathbb{R}^d) + \mu_-(\mathbb{R}^d).$$

Dans le cas où μ à une mesure de masse totale 0, on a $\mu_+(\mathbb{R}^d) = \mu_-(\mathbb{R}^d)$. En considérant μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d et puisque

$$\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \mu(A) = \mu(H) = \mu_+(\mathbb{R}^d),$$

on aura alors

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|.$$

En notant par $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)_+$ on a

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = 2.(1 - (\mu_1 \wedge \mu_2)(\mathbb{R}^d)). \quad (3.2)$$

Théorème 3.1.6. *Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfait la propriété de couplage, si et seulement si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} = 0.$$

Pour la démonstration du théorème voir page 122 du le livre de T. Lindvall [12].

Soit $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeurs dans \mathbb{R} . $(S_t)_{t \geq 0}$ est appelé subordonateur si pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est croissante sur \mathbb{R}_+ . Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Lévy soit un subordonateur.

Théorème 3.1.7. *Soit (A, b, ν) le triplet de Lévy associé à un processus de Lévy $(S_t)_{t \geq 0}$. Alors $(S_t)_{t \geq 0}$ est croissant si et seulement si $A = 0$, $\int_{-\infty}^0 \nu(dx) = 0$, $\int_0^1 x \nu(dx) < \infty$ et $b \geq \int_0^1 x \nu(dx)$.*

Pour la démonstration de ce théorème voir Sato [16, théorème 21.5].

Un subordonateur $(S_t)_{t \geq 0}$ a pour transformée de Laplace pour tout $u \geq 0$, (voir [16]),

$$\mathbb{E}(e^{-uS_t}) = \exp \left[t \left(\int_0^\infty (e^{-ux} - 1) \nu(dx) - b_0 u \right) \right]$$

avec $b_0 = b - \int_0^1 x \nu(dx)$. On note pour tout $u \geq 0$,

$$\Psi(u) = \int_0^\infty (e^{-ux} - 1) \nu(dx) - b_0 u.$$

La fonction Ψ est appelée exposant de Laplace du processus.

Soit $L = (L_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de symbole η et de triplet (A, b, ν) et $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un subordonateur d'exposant de Laplace Ψ . Supposons que $(L_t)_{t \geq 0}$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants. Le processus $X = (X_t)_{t \geq 0} = (L_{S_t})_{t \geq 0}$ est appelé processus subordonné par rapport à $(X_t)_{t \geq 0}$.

Théorème 3.1.8. *Le processus $(X_t)_{t \geq 0} := (L_{S_t})_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathbb{E}(\exp(it \langle X_t, u \rangle)) = \exp(t\Psi(\eta(u))).$$

Démonstration. On note par $C_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Alors l'indépendance de L et S donne

$$\mathbb{E}(f(X_t)) = \mathbb{E}(g(S_t))$$

avec $g(s) = \mathbb{E}(f(L_s))$ pour tout $s \geq 0$.

Soit $0 \leq t_1 < t_2$, alors

$$\mathbb{E}(f(X_{t_2} - X_{t_1})) = \mathbb{E}(h(S_{t_1}, S_{t_2}))$$

avec $h(s_1, s_2) = \mathbb{E}(f(L_{t_2} - L_{t_1}))$. Comme S est croissant et à accroissements stationnaires, on a pour tout $s_1 \leq s_2$

$$h(s_1, s_2) = g(s_2 - s_1).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(f(X_{t_2} - X_{t_1})) = \mathbb{E}(g(S_{t_2} - S_{t_1})) = \mathbb{E}(g(S_{t_2-t_1})) = \mathbb{E}(f(X_{t_2-t_1})).$$

Ce qui montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants.

Soit $n \geq 1$, f_1, \dots, f_n des fonctions de $C_b(\mathbb{R}^d)$ et soit $0 \leq t_1 < \dots < t_n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, on définit de manière similaire à g et h , les fonctions g_j et h_j . Il est alors facile de vérifier que

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \right] = \mathbb{E}(G(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})),$$

où

$$G(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_j(L_{t_{j+1}} - L_{t_j}) \right] \quad \text{pour tous } 0 \leq s_1 < \dots < s_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n h_j(S_{t_j}, S_{t_{j+1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n g_j(S_{t_{j+1}} - S_{t_j}) \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [g_j(S_{t_{j+1}} - S_{t_j})] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [f_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})]. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(X_t)_{t \geq 0}$ est à accroissement indépendant. Comme il est évident que $(X_t)_{t \geq 0}$ est càdlàg, On en déduit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy. Pour tous $z \leq 0$ et $t \geq 0$, l'exposant de Laplace de S vérifie

$$\mathbb{E}(e^{zS_t}) = \int_0^\infty e^{zs} \mathbb{P}_{S_t}(ds) = \exp(t\Psi(z)).$$

Par conséquent, comme $(L_t)_{t \geq 0}$ et $(S_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants, on a pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(e^{i\langle u, X_t \rangle}) = \int_0^\infty \mathbb{E}(e^{i\langle u, L_s \rangle}) \mathbb{P}_{S_t}(ds) = \int_0^\infty e^{s\eta(u)} \mathbb{P}_{S_t}(ds) = \exp(t\Psi(\eta(u))).$$

□

Nous allons maintenant nous intéresser au subordonneur $\alpha/2$ -stable avec $0 < \alpha < 2$. Il s'agit d'un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ strictement $\alpha/2$ -stable et croissant. Un tel subordonneur existe. En effet, comme $0 < \alpha/2 < 1$ la proposition 14 nous donne que $\int_0^1 x\nu(dx) < \infty$. De plus, d'après le théorème 8, on a $A = 0$. Il suffit alors de prendre un réel b et une mesure de Lévy ν tels que $b = \int_0^1 x\nu(dx)$ et $\int_{-\infty}^0 \nu(dx) = 0$ pour pouvoir construire un subordonneur $\alpha/2$ -stable.

L'équation (2.14) nous permet d'observer que pour tout f ν -intégrable :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \alpha\nu([1, \infty[) \int_0^\infty f(r)r^{-1-\alpha}dr.$$

En utilisant l'équation (2.17) et en prenant $f = e^{-u} - 1$, on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ tel que l'exposant de Laplace Ψ du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifie pour tout $u \geq 0$

$$\Phi(u) = -cu^{\alpha/2}.$$

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors $(B_{X_t})_{t \geq 0}$ est un processus α -stable invariant par rotation. En effet, comme $(B_t)_{t \geq 0}$ a pour symbole de Lévy $\eta(u) = -\frac{1}{2}|u|^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, le théorème 3.1.8 nous permet d'affirmer que $(B_{X_t})_{t \geq 0}$ a pour symbole de Lévy $-c\|u\|^{\alpha/2}$. On en déduit grâce au théorème 2.3.13 que $(B_{X_t})_{t \geq 0}$ est α -stable invariant par rotation.

Soit x et $y \in \mathbb{R}^d$ avec $x \neq y$, $(B_t^x)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien issu de x et soit l'hyperplan

$$H_{x,y} = \{u \in \mathbb{R}^d : \langle u - (x+y)/2, x-y \rangle = 0\}.$$

L'application $R_{x,y} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ définie pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ par

$$R_{x,y}z = z - 2\langle z - (x+y)/2, x-y \rangle / |x-y|^2$$

est la réflexion par rapport à l'hyperplan $H_{x,y}$. Soit le temps d'arrêt

$$\tau_{x,y} = \inf \{t > 0 : B_t^x \in H_{x,y}\}$$

On définit le processus $(\hat{B}_t^y)_{t \geq 0}$ vérifiant

$$\hat{B}_t^y = \begin{cases} R_{x,y}B_t^x, & \text{si } t \leq \tau_{x,y}; \\ B_t^x, & \text{si } t > \tau_{x,y}. \end{cases}$$

Le processus $(\hat{B}_t^y)_{t \geq 0}$ correspond à la réflexion de $(B_t^x)_{t \geq 0}$ par rapport à l'hyperplan $H_{x,y}$ avant $\tau_{x,y}$ et coïncide avec $(B_t^x)_{t \geq 0}$ après. Le processus $(\hat{B}_t^y)_{t \geq 0}$ forme un mouvement brownien issu de y (Voir [7]). Il est alors évident que le temps de couplage des deux processus est $\tau_{x,y}$. Etant donné que le mouvement brownien possède la propriété de couplage (voir [12]), on a $\tau_{x,y} < \infty$.

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un subordonateur. Montrons que le temps de couplage des processus $(B_{S_t}^x)_{t \geq 0}$ et $(\hat{B}_{S_t}^y)_{t \geq 0}$ est fini. Soit

$$K_{x,y} = \inf \{t \geq 0 : S_t \geq \tau_{x,y}\}.$$

et soit le temps de couplage

$$T_{x,y} = \inf \{t > 0 : \hat{B}_{S_t}^y = B_{S_t}^x\}.$$

Montrons que $K_{x,y}$ coïncide avec le temps de couplage $T_{x,y}$ de $(B_{S_t}^x)_{t \geq 0}$ et $(\hat{B}_{S_t}^y)_{t \geq 0}$.

Posons $\omega \in \Omega$. Soit $t > 0$ tel que $S_t \geq T_{x,y}$, i.e. $K_{x,y} \leq t$. Comme $\hat{B}_t^y = B_t^x$ pour tout $k \geq \tau_{x,y}$ alors $\hat{B}_{S_t}^y = B_{S_t}^x$. On a donc $T_{x,y} \leq t$ et puisque $t \geq K_{x,y}$ a été choisi arbitrairement, on obtient $T_{x,y} \leq K_{x,y}$.

Reciproquement, supposons $K_{x,y} > 0$. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$ et $S_{t_\epsilon} < T_{x,y}$. On aura alors $S'_{N_{t_\epsilon}} \neq S''_{N_{t_\epsilon}}$, i.e. $\hat{B}_{t_\epsilon}^y \neq B_{t_\epsilon}^x$. Dans ce cas, on aura $T_{x,y} \geq t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $T_{x,y} \geq K_{x,y}$. Or $\tau_{x,y}$ est fini presque surement. Comme le subordonateur tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$, il existe un temps $\tau_0(\omega) < \infty$ vérifiant $S_t(\omega) \geq \tau_{x,y}$ pour tout $t \geq \tau_0(\omega)$. Or par définition de $T_{x,y}$, on a $T_{x,y} \leq \tau_0 < \infty$.

Soit $0 < \alpha < 2$, en remplaçant, le subordonateur par le subordonateur strictement $\alpha/2$ -stable, on en déduit que le processus α -stable possède la propriété de couplage. Ce qui signifie que le laplacien fractionnaire possède la propriété de Liouville.

3.2 Une condition suffisante pour le couplage des processus de Lévy

Dans toute la suite, on note par $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ le processus de Poisson composé issu de $z \in \mathbb{R}^d$ de mesure de Lévy ν . Pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = z + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

avec $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$ et $(Y_k)_{k \geq 1}$ i.i.d de même loi $\nu_0 = \frac{\nu(\cdot)}{\lambda}$ et indépendant de $(N_t)_{t \geq 0}$. Il est connu (voir par exemple [1]) que le générateur infinitésimal du processus de Poisson est pour tout $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$:

$$Af(\cdot) = \lambda \int (f(\cdot + u) - f(u)) \nu_0(du).$$

Pour tout $t \geq 0$ la loi de Z_t est

$$p_t := e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k \nu_0^{*k}}{k!}. \quad (3.3)$$

Dans toute la suite, on notera par $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire définie pour tout $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, $S_0 = 0$ et par $(p_t(z, \cdot))_{t \geq 0}$ la loi de transtion de Z .

Définition 3.2.1. Soit μ une mesure sur \mathbb{R}^d . On dit que μ possède une composante absolument continue si il existe une sous-mesure μ_0 à densité f_0 vérifiant pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mu(A) \geq \mu_0(A) = \int_A f_0(x) dx.$$

Le lemme suivant s'appelle loi du zéro-deux, pour une démonstration de ce résultat voir l'article de T.Lindvall et L. Roger [13].

Lemme 3.2.2 (Loi du zéro-deux, page 123). *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, on a l'une des proposition suivante :*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_x * \mu^{*n} - \mu^{*n}\|_{var} = 0$
- (ii) pour tout $n \geq 1$, $\|\delta_x * \mu^{*n} - \mu^{*n}\|_{var} < 2$.

Proposition 3.2.3. *Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} = 0$$

*si et seulement si il existe $m \geq 1$, tel que $\mathbb{P}_{Y_1}^{*m}$ possède une composante absolument continue.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $m \geq 1$, tel que $\mathbb{P}_{Y_1}^{*m}$ possède une composante absolument continue. Soit f la densité de la sous mesure de probabilité associée. Dans ce cas, comme f est bornée, il existe une suite de fonctions continues bornées $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers f . On aura alors pour tout $n \geq 0$:

$$\|f_n * f - f^{*2}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|f_n - f\|_1.$$

Comme la limite uniforme d'une fonction continue est continue, on obtient en passant à la limite que f^{*2} est continue. On en déduit que pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $P_{Y_1}^{*nm}$ et $\delta_x * P_{Y_1}^{*nm}$ possèdent des composantes absolument continues. En utilisant (3.2), on obtient pour un $n \geq 1$:

$$\|\delta_x * \mathbb{P}_{Y_1}^{*n} - \mathbb{P}_{Y_1}^{*n}\|_{var} = \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} < 2.$$

La loi du zéro-deux donne directement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} = 0.$$

Supposons que pour tout $m \geq 1$, $\mathbb{P}_{Y_1}^{*m}$ ne possède pas de composante absolument continue. Pour tout $n \geq 1$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{X}_n = \{x \in \mathbb{R}^d; \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} < 2\}.$$

Soit pour tout $n \geq 1$ un ensemble borélien $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesgue nulle vérifiant $\mathbb{P}_{Y_1}^{*n}(B_n) = 0$ et soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R}^d . Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\{B_n - x\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, on a :

$$\int \delta_a * \mathbb{P}_{Y_1}^{*n}(B_n) f(a) da = \int \left(\int_{B_n - x} f(a) da \right) \mathbb{P}_{Y_1}^{*n}(dx) = 0.$$

On en déduit que $\delta_x = \mathbb{P}_{Y_1}^{*n}(B_n) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ à l'exception d'un ensemble négligeable. Dans ce cas, $\|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} = 2$.

L'ensemble \mathcal{X}_n est donc de mesure de Lebesgue nulle pour tout $n \geq 1$, on en déduit donc par la loi du zéro-deux que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} = 0$$

est vérifié pour tout $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$. Comme l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ est de mesure nulle, il existe $x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(S_n \in \cdot)\|_{var} \neq 0.$$

□

Proposition 3.2.4. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} \leq e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_n \in \cdot)\|_{var}.$$

Démonstration. Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ la famille de transition associée à Z . Soit $z \in \mathbb{R}^d$, on pose pour tout $n \geq 1$ et $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$;

$$Q_n f(z) = \mathbb{P}_{S_n+z}(f).$$

On obtient alors grâce à (3.3) :

$$\begin{aligned} \|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} &= \sup_{f \in B_b(\mathbb{R}^d); \|f\| \leq 1} |T_t f(x) - T_t f(y)| \\ &= e^{-\lambda t} \left| \sup_{f \in B_b(\mathbb{R}^d); \|f\| \leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k (\delta_x * \nu_0^{*k}(f) - \delta_y * \nu_0^{*k}(f))}{k!} \right| \\ &= e^{-\lambda t} \left| \sup_{f \in B_b(\mathbb{R}^d); \|f\| \leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k (Q_k f(x) - Q_k f(y))}{k!} \right| \\ &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \left| \sup_{f \in B_b(\mathbb{R}^d); \|f\| \leq 1} (Q_k f(x) - Q_k f(y)) \right| \\ &\leq e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_n \in \cdot)\|_{var}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.5. *Supposons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C(x, y) > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$\|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_n \in \cdot)\|_{var} \leq \frac{C(x, y)}{\sqrt{n}}. \quad (3.4)$$

Alors, on a :

$$\|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} \leq 2e^{-\lambda t}(1 - \delta_{x,y}) + \frac{\sqrt{2}C(x, y)(1 - e^{-\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}} \quad (3.5)$$

avec $\delta_{x,y}$ le symbole de Kronecker.

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, il est évident que

$$\|\mathbb{P}(x + S_0 \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_0 \in \cdot)\|_{var} = \|\delta_x - \delta_y\|_{var} = 2(1 - \delta_{x,y}).$$

D'après la proposition 3.2.5 et l'inégalité (3.4) on a :

$$\|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} \leq e^{-\lambda t} \left[2(1 - \delta_{x,y}) + C(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{n}} \right]. \quad (3.6)$$

De plus, l'inégalité de Jensen donne en utilisant la fonction concave $z \mapsto z^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{n}} &\leq (e^{\lambda t} - 1) \left(\frac{(\lambda t)^n}{n \cdot n!} \frac{1}{(e^{\lambda t} - 1)} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t} \right)^{1/2} \sqrt{2} (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}(e^{\lambda t} - 1)}{\sqrt{\lambda t}}. \end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité à (3.6), on obtient (3.5). □

Proposition 3.2.6. *Si la marche aléatoire $S = (S_n)_{n \geq 0}$ vérifie la propriété de couplage alors le processus de Poisson composé $(Z_t)_{t \geq 0}$ la vérifie aussi.*

Démonstration. Soit $(Y''_k)_{k \geq 1}$ et $(Y'_k)_{k \geq 1}$ iid, de même loi que $(Y_k)_{k \geq 1}$ et indépendantes de $(N_t)_{t \geq 0}$. Supposons que S possède la propriété de couplage alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, il existe deux marches aléatoires $S' = \left(x + \sum_{k=1}^n Y'_k \right)_{n \geq 0}$ et $S'' = \left(y + \sum_{k=1}^n Y''_k \right)_{n \geq 0}$ telles que leur temps de couplage

$$T_{x,y}^S = \inf\{k \geq 1 : S'_k = S''_k\} < \infty.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $S'_k = S''_k$ pour tout $k \geq T_{x,y}^S$. On définit alors $(Z'_t)_{t \geq 0}$ et $(Z''_t)_{t \geq 0}$ les processus de Poisson composés issus des marches aléatoires S' et S'' . Pour montrer que Z possède la propriété de couplage montrons que le temps d'arrêt

$$T_{x,y}^Z = K_{x,y} = \inf\{t > 0 : Z'_t = Z''_t\} < \infty.$$

On remarque que $T_{x,y}^Z = \inf\{t > 0 : N_t \geq T_{x,y}^S\}$. En effet, soit $\omega \in \Omega$ fixé et $t > 0$ tel que $N_t \geq T_{x,y}^S$, i.e. $K_{x,y} \leq t$. Comme $S'_k = S''_k$ pour tout $k \geq T_{x,y}^S$ alors $S'_{N_t} = S''_{N_t}$ et par construction $Z'_{N_t} = Z''_{N_t}$. On en déduit que $T_{x,y}^Z \leq t$ et puisque $t \geq K_{x,y}$ a été choisi arbitrairement, on obtient $T_{x,y}^Z \leq K_{x,y}$.

Reciproquement, supposons $K_{x,y} > 0$. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_\epsilon < K_{x,y} - \epsilon$ et $N_{t_\epsilon} \leq T_{x,y}^S - 1$. On aura alors $S'_{N_{t_\epsilon}} \neq S''_{N_{t_\epsilon}}$, i.e. $Z'_{t_\epsilon} \neq Z''_{t_\epsilon}$. Dans ce cas, on aura $T_{x,y}^Z \geq t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $T_{x,y}^Z \geq K_{x,y}$.

Finalement, comme $T_{x,y}^S$ est fini presque sûrement et comme le processus de Poisson tend vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$ alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $t_0(\omega) < \infty$ tel que $N_t(\omega) \geq T_{x,y}^S(\omega)$, pour tout $t \geq t_0(\omega)$. On en déduit directement que $T_{x,y}^Z \leq t_0(\omega) < \infty$. Ce qui démontre la proposition. \square

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν) . On définit pour tout $\epsilon > 0$ par ν_ϵ la mesure vérifiant pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\nu_\epsilon(B) = \begin{cases} \nu(B) & \text{si } \nu(\mathbb{R}^d) < \infty; \\ \nu\{z \in B : |z| > \epsilon\} & \text{si } \nu(\mathbb{R}^d) = \infty. \end{cases}$$

Théorème 3.2.7. *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de mesure de Lévy $\nu \neq 0$. Si il existe $l \geq 1$ et $\epsilon > 0$, ν_ϵ^{*l} possède une composante absolument continue alors X possède la propriété de couplage.*

Démonstration. Tout d'abord supposons que $(X_t)_{t \geq 0}$ est de triplet $(0, 0, \nu)$ avec $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Dans ce cas le processus est un processus de Poisson composé. En conservant les notations utilisées précédemment, on considère la marche aléatoire $S = \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right)_{n \geq 0}$ telle que chacune des variables aléatoires i.i.d. Y_k aient pour loi $\nu_\epsilon / \nu_\epsilon(\mathbb{R}^d)$. D'après la proposition 3.2.6, il suffit de montrer la propriété de couplage pour S pour obtenir celle du processus de Poisson composé. Or la proposition 3.2.3 donne que S possède la propriété de couplage si et seulement si il existe $l \geq 1$ tel que $(\frac{\nu_\epsilon}{\nu_\epsilon(\mathbb{R}^d)})^{*l}$ possède une composante absolument continue. Notre processus de Poisson composé possède donc la propriété de couplage.

Supposons maintenant que $(X_t)_{t \geq 0}$ ait pour triplet de Lévy (A, b, ν) . Alors pour tout $t \geq 0$, on sépare X_t en deux parties indépendantes

$$X_t = X'_t + X''_t$$

où $X' = (X'_t)_{t \geq 0}$ est le processus de Poisson composé de triplet $(0, 0, \nu_\epsilon)$ et $X'' = (X''_t)_{t \geq 0}$ le processus de triplet $(A, b, \nu - \nu_\epsilon)$. Notons pour tout $t \geq 0$, par T'_t et T''_t les opérateurs de transition associés respectivement à X' et à X'' et p'_t et p''_t leurs probabilités de transition. Il est évident dans ce cas de voir que $T_t = T''_t T'_t$ et que $(T''_t)_{t \geq 0}$ forme un semigroupe de contraction sur $B_b(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} &= \sup_{\|f\| \leq 1} |T_t f(x) - T_t f(y)| \\ &= \sup_{\|f\| \leq 1} |T''_t T'_t f(x) - T''_t T'_t f(y)| \\ &\leq \sup_{\|f\| \leq 1} |T'_t f(x) - T'_t f(y)| \\ &\leq \|p'_t(x, \cdot) - p'_t(y, \cdot)\|_{var}. \end{aligned}$$

Ce qui revient à vérifier que le processus de Poisson composé possède la propriété de couplage. \square

Bibliographie

- [1] D. Applebaum. *Levy process and stochastic calculus*. Cambridge, 2009.
- [2] D. Armitage and J. Gardiner. *Classical potential theory*. Springer, 2001.
- [3] V. Bogachev. *Measure Theory, Vol 1 and 2*. Springer, 2007.
- [4] K. Bogdan. The boundary harnack principle for the fractional laplacian. *Studia Mathematica*, 1997.
- [5] K. Bogdan, K. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, and Z. Vondracek. *Potential theory of stable processes and its extension*. Springer, 2009.
- [6] K. Bogdan and T. Byczkowski. Potential theory of the alpha stable schrodinger operator on bounded lipchitz domain. *Studia Mathematica*, 2009.
- [7] B. Bottcher, R. Schilling, and J. Wang. Constructions of coupling processes for levy processes. *arXiv*, 2010.
- [8] W. Chen, X. Cui, R. Zhuo, and Z. Yuan. A liouville theorem for the fractional laplacien. *arXiv*, 2014.
- [9] D. Cohn. *Measure Theory*. Birkhauser, 1980.
- [10] J. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. springer, 1984.
- [11] T. Ligget. *Continuous-time Markov processes : an introduction*. American Mathematical Soc., 2010.
- [12] T. Lindvall. *Lecture on the Coupling Method*. DOVER PUBLICATION, INC., 1992.
- [13] T. Lindvall and L. Roger. *On the coupling of random walks and renewal processes*. appl. probab., 1996.
- [14] S. Port and C. Stone. *Brownian motion and classical potential theory*. Academic press, 1978.
- [15] N. Privault. *Potential theory in classical probability*, 2008.
- [16] K. Sato. *Levy processes and infinitely divisible distribution*. Cambridge, 1999.
- [17] R. Schilling and J. Wang. On coupling property of levy processes. *arXiv*, 2011.
- [18] D. Strook. *Probability theory, an analitic view*. Cambridge, 2010.
- [19] F. Wang. Coupling, convergence rates of markov processes and weak poincare inequalities. *SCIENCE CHINA Mathematic*, 2002.