REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE SOUSSE

ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE DE HAMMAM SOUSSE

MEMOIRE DE MASTERE

Spécialité :

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

Présenté par :

Michael Hédi BEN ALI

Sujet :

Couplage des processus stables et propriété de Liouville

Dirigé par :

Pr. Khalifa EL MABROUK

Soutenu le 24 novembre 2014, devant le jury composé de:

Pr.	Mediouny	BOUHELAL	Président
Pr.	Moez	KHENISSI	Membre
Pr.	Khalifa	EL MABROUK	Directeur

2013-2014

Laboratoire/Unité de recherche : Analyse, Géométrie et Applications (Code : UR/11/ES/51)

Remerciements

En préambule de ce mémoire, je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont apporté leurs soutiens pendant cette année de mastère.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur Professeur Khalifa EL MABROUK pour m'avoir guidé dans ce travail de recherche et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je tiens à le remercier aussi bien pour son écoute, sa gentillesse et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Je présente mes remerciements les plus sincères à monsieur Mediouny BOUHELAL pour m'honorer de présider le jury.

Je souhaitre aussi remercier monsieur Moez Khenissi pour sa présence comme membre du jury.

Enfin, je remercie tous mes amis et toute ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements pendant mes années universitaires.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction

Le théorème de Liouville, qui prend ses origines dans l'analyse complexe, énonce que toute fonction holomorphe bornée $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est nécessairement constante. En la considérant comme la partie réelle d'une fonction holomorphe, nous en déduisons que toute fonction bornée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiables telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0,$$

est constante sur $\mathbb{R}^2$. D'une façon plus générale, soit un entier $d \geq 1$ et considérons l'opérateur de Laplace Δ défini pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

La fonction f est dite Δ-harmonique sur $\mathbb{R}^d$ si $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Ainsi, le célèbre théorème de Liouville (voir par exemple [3]) dit que si f est Δ-harmonique bornée sur $\mathbb{R}^d$ alors elle est constante sur $\mathbb{R}^d$.

Dans plusieurs ouvrages (voir [3, 12, 15]), des études détaillées des fonctions Δ-harmoniques ont été développées en utilisant des outils analytiques inspirés de la théorie du potentiel, de l'analyse harmonique ou des équations aux dérivées partielles. L'opérateur de Laplace Δ peut être considéré comme le générateur infinitésimal d'un mouvement brownien d-dimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Plus précisement, il est bien connu (voir par exemple[11, 15]) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}(f(B_t)|B_0 = x) - f(x)}{t}$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que cette limite existe. D'une façon analogue, en considérant un processus de Lévy $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, une fonction suffisament régulière $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite X-harmonique (ou bien, A-harmonique) sur $\mathbb{R}^d$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$Af(x) = 0.$$

où A est le générateur infintésimal du processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

Dans ce travail, nous étudions les fonctions X-harmoniques où le processus de Lévy $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est supposé α-stable pour $0 < \alpha \leq 2$ et invariant par rotations, i.e., pour tout réel $a > 0$ et pour toute rotation U dans $\mathbb{R}^d$,

$$\left(a^{-1/\alpha} X_{at}\right)_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (X_t)_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (UX_t)_{t\geq 0}.$$

Le générateur infinitésimal de $(X_t)_{t\geq 0}$ noté par $\Delta^{\alpha/2}$ est appelé le laplacien fractionnaire sur $\mathbb{R}^d$. Les fonctions X-harmoniques sont courament dites α-harmoniques. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que la limite existe,

$$\Delta^{\alpha/2} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = x) - f(x)}{t}.$$

Il est à signaler que dans le cas particulier où $\alpha = 2$, le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et par conséquent $\Delta^{\alpha/2}$ coincide avec l'opérateur de Laplace Δ.

L'objectif principal de ce mémoire est de démontrer en utilisant des outils probabilistes que les constantes sont les seules fonctions α-harmoniques bornées sur $\mathbb{R}^d$. D'une autre façon, nous nous proposons de prouver que le laplacien fractionnaire possède la propriété de Liouville. Ceci a déjà été montré par W.Chen, X.Cui, Z.Yuan et R.Zhuo dans [9] par des méthodes analytiques.

La notion de couplage des processus stochastiques est un outils principal pour atteindre notre but. Pour illustrer notre approche, nous désignons par $(X_t^x)_{t\geq 0}$ un processus issu de $x \in \mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire $X_0^x = x$ p.s) de même loi de transition que $(X_t)_{t\geq 0}$. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifie la propriété de couplage si pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ le temps d'arrêt

$$T_{x,y} = \inf\{t > 0; X_t^x = X_t^y\}$$

est fini presque surement. Il a été démontré (voir par exemple [1, 14]) que si la propriété de couplage a lieu alors les fonctions X-harmoniques possèdent la propriété de Liouville. Le problème sera alors résolu dès qu'on montrera que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ possède la propriété de couplage. Pour cela, nous regardons X comme une subordination du mouvement brownien d-dimensionnel. Plus précisement, nous construisons un *"bon"* subordinateur $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = B_{S_t}.$$

On appelle subordinateur tout processus de Lévy $S = (S_t)_{t\geq 0}$ défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ dont les trajectoires sont croissantes. Nous considérons un surbordinateur $S = (S_t)_{t\geq 0}$ qui est $\alpha/2$-stable et nous vérifions que le mouvement brownien subordonné $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy α-stable et invariant par rotations. Ensuite, nous montrons que $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ admet la propriété de couplage.

Le mémoire est organisé comme suit : Le premier chapitre traitera les semi-groupes et les processus de Markov. Il aura pour objectif d'étudier la connection entre ces deux notions. Dans le deuxième chapitre, nous introduirons des généralités sur les processus de Lévy. Ensuite nous définirons les processus de Lévy stables et nous donnerons quelques résultats concernant cette classe de processus. Ce chapitre se terminera par une représentation du laplacien fractionnaire pour les fonctions de la classe de Schwarz. Dans le troisième chapitre, nous développerons la notion d'harmonicité puis nous examinerons le couplage des processus. Nous démontrerons que le laplacien fractionnaire possède la propriété de Liouville. Dans ce dernier chapitre, nous montrerons que l'étude du couplage de certain processus de Lévy peut se faire à partir de celle des marches aléatoires.

Chapitre 1

Semi-groupe associé à un processus de Markov

Dans ce premier chapitre, nous donnerons un aperçu sur la théorie des semi-groupes et des processus de Markov. Nous étudirons la connection entre ces deux notions. Dans toute la suite de ce mémoire, nous considérerons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, d un entier naturel non nul, $B_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $M_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre d à coefficients réels.

1.1 Intégrale de Bochner

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $\mathcal{B}(E)$ la tribu borélienne de E engendrée par les ouverts de la topologie forte. Une application $f : \mathbb{R}_+ \to E$ est dite fortement mesurable si elle est mesurable par rapport à $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(E))$.

Soit une mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}_+$. Une application s définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans E est dite étagée si elle s'écrit sous la forme

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(x) b_i \tag{1.1}$$

où n est un entier naturel non nul, x est un réel positif, et pour tout $1 \leq i \leq n$, $b_i \in E$ et les ensembles A_i sont des boréliens de $\mathbb{R}_+$ deux à deux disjoints tels que $\mu(A_i) < \infty$. Pour une telle fonction, on définit l'intégrale de Bochner de

s par rapport à μ par

$$\int_{\mathbb{R}_+} s(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)b_i.$$

Vu la non unicité de l'écriture (1.1) d'une fonction étagée s, pour que la définition soit cohérente, il est nécessaire que l'intégrale de Bochner de s soit indépendante de son écriture sous la forme (1.1). Pour vérifier ceci, supposons que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(x)b_i = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}_{B_j}(x)c_i$$

où m est un entier naturel non nul et pour tout $1 \leq j \leq m$, $c_j \in E$ et les ensembles B_j sont des boréliens de $\mathbb{R}_+$ deux à deux disjoints tels que $\mu(B_j) < \infty$. On définit

$$A_{n+1} := \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \;\; B_{m+1} := \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

Soit $1 \leq i \leq n$ un indice tel que $b_i \neq 0$. Alors

$$A_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m+1} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m+1} (A_i \cap B_j).$$

On signale que $A_i \cap B_{m+1} = \emptyset$. De même, pour tout $1 \leq j \leq m$, tel que $c_j \neq 0$, on a $B_j = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j)$. Remarquons aussi que si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, on a $b_i = c_j$. Nous obtenons alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)c_j = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_i)c_i.$$

D'autre part, l'intégrale de Bochner d'une application étagée s vérifie

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} s\, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i)b_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \left\| b_i \right\| = \int_{\mathbb{R}_+} \left\| s(x) \right\| \mu(dx). \qquad (1.2)$$

La dernière intégrale étant une intégrale classique par rapport à la mesure μ.

Définition 1.1.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to E$ une application fortement mesurable. On dit que f est μ-Bochner intégrable s'il existe une suite d'applications étagées $(s_n)_{n\geq 1}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans E vérifiant :

(i) $(s_n)_{n\geq 0}$ converge μ-presque partout vers f dans E.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \|f - s_n\| \, d\mu = 0$.

Dans ce cas, on définit l'intégrale de Bochner de f par rapport à μ par

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu. \tag{1.3}$$

La limite dans l'équation (1.3) correspond à la limite par rapport à la norme de E, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu \right\| = 0.$$

La définition 1.1.1 nécéssite quelques justifications. L'espace $(E, \|.\|)$ est complet. Ainsi en démontrant qu'elle est de Cauchy, on en déduit que la suite

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu \right)_{n\geq 1}$$

admet une limite dans E quand n tend vers ∞. Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(\epsilon) > 0$ tel que pour tous $n, m \geq N(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} s_m \, d\mu \right\| &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|s_n - s_m\| \, d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} \|s_n - f\| \, d\mu + \int_{\mathbb{R}_+} \|f - s_m\| \, d\mu \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'intégrale de Bochner de f est indépendante du choix de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une autre suite vérifiant (i) et (ii) de la définition 1.1.1. On a donc $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy. On pose alors

$$s := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} s_n \, d\mu \quad \text{et} \quad r := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} r_n \, d\mu.$$

On définit la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout $k \geq 1$

$$z_{2k} = s_k \quad \text{et} \quad z_{2k+1} = r_{k+1}.$$

Puisque $(z_n)_{n\geq 1}$ vérifie (ii), on conclut que la suite

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} z_n \, d\mu \right)_{n\geq 1}$$

est aussi de Cauchy. Alors elle converge vers un élément $z \in E$. De plus, cette suite admet deux sous-suites convergentes ayant pour limites respectivement r et s. On en déduit alors que $r = s = z$.

Il est facile de vérifier, par passage à la limite, que l'inégalité (1.2) s'étend à toute application μ-Bochner intégrable $s = f$. Autrement dit, si f est μ-Bochner intégrable alors

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|f(x)\| \; \mu(dx). \tag{1.4}$$

Une application $f : \mathbb{R}_+ \to E$ est dite fortement dérivable en un réel $x > 0$ s'il existe un élément $c \in E$ tel que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f(x+h) - f(h)}{h} - c \right\| = 0.$$

Le vecteur c s'appelle la dérivée forte de f au point x. On note

$$c = f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h}. \tag{1.5}$$

Cette application f est dite fortement dérivable à droite en 0, si il existe $c \in E$ tel que

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{f(x+h) - f(h)}{h} - c \right\| = 0.$$

On notera alors $c = f'(0^+)$.

Dans toute la suite, pour tout $x \geq 0$, on notera

$$\int_0^x f \, du = \int_0^x f \mathbf{1}_{[0,x]} \, du$$

l'intégrale de Bochner de f sur $[0, x]$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on dira qu'une application f est Bochner intégrable si elle est Bochner intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème 1.1.2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to E$ une application Bochner intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

(i) L'application $F : \mathbb{R}_+ \to E$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x f(u) \, du \tag{1.6}$$

est fortement dérivable en tout point $x > 0$ et on a $F'(x) = f(x)$. De même, F est fortement dérivable à droite en 0 et $F'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(ii) Soit a, $b > 0$ et soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx. \tag{1.7}$$

Proposition 1.1.3. *Soit $T : E \to E$ un opérateur linéaire continu et soit $f : \mathbb{R}_+ \to E$ une application μ-Bochner intégrable. Alors*

$$T \int_{\mathbb{R}_+} f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} Tf\, d\mu.$$

Démonstration. Considérons tout d'abord une application étagée donnée par (1.1). Par linéarité de l'opérateur T on obtient

$$T \int_{\mathbb{R}_+} s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) T b_i = \int_{\mathbb{R}_+} Ts\, d\mu.$$

Soit maintenant $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications étagées vérifiant (i) et (ii) de la définition 1.1.1. Alors par continuité de l'opérateur T, on a

$$\lim_{n\to\infty} T \int_{\mathbb{R}_+} s_n\, d\mu = T \int_{\mathbb{R}_+} f\, d\mu.$$

De plus, en utilisant (1.4) on en déduit que pour tout $n \geq 1$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+} Ts_n\, d\mu - \int_{\mathbb{R}_+} Tf\, d\mu \right\| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \|T(s_n - f)\|\, d\mu \leq \|T\| \int_{\mathbb{R}_+} \|(s_n - f)\|\, d\mu$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

□

1.2 Semi-groupes et leurs générateurs

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contraction sur E, i.e. $(T_t)_{t\geq 0}$ est une famille d'endomorphisme de E vérifiant :

(i) $T_0 = I$ (où I est l'application identité de E).

(ii) Pour tous réels s, $t \geq 0$, $T_{s+t} = T_s T_t$. (Propriété de semi-groupe)

(iii) Pour tout $t > 0$, $\|T_t\| \leq 1$.

(iv) L'application $t \mapsto T_t$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de E est fortement continue en 0, i.e. pour tout $\psi \in E$,

$$\lim_{t\to 0} \|T_t\psi - \psi\| = 0.$$

On remarque que l'application $t \mapsto T_t$ est fortement continue en tout $t > 0$, i.e. pour tout $\psi \in E$, on a

$$\lim_{s\to t} \|T_t\psi - T_s\psi\| = 0.$$

En effet, pour $h > 0$,

$$\begin{aligned} \|T_{t+h}\psi - T_t\psi\| &= \|T_t(T_h - I)\psi\| \\ &\leq \|T_t\| \, \|(T_h - I)\psi\| \\ &\leq \|(T_h - I)\psi\| \,. \end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on conclut que

$$\lim_{s\to t^+} \|T_t\psi - T_s\psi\| = 0.$$

De même, on vérifie que

$$\lim_{s\to t^-} \|T_t\psi - T_s\psi\| = 0.$$

Soit l'ensemble D défini par

$$D = \left\{ \psi \in E : \exists\, \phi_\psi \in E;\ \lim_{t\to 0} \left\| \frac{T_t\psi - \psi}{t} - \phi_\psi \right\| = 0 \right\}.$$

Il est évident que D est un sous espace vectoriel de E. De plus, pour tout $\psi \in D$, ϕ_ψ est unique.

Définition 1.2.1. L'opérateur linéaire A qui associe à tout élément $\psi \in D$ l'élément ϕ_ψ s'appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$. Le sous espace vectoriel D sera noté par D_A et est appelé le domaine de l'opérateur A.

Soit $\psi \in E$. Considérons l'application $\Psi : t \mapsto T_t\psi$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans E. L'application Ψ est Bochner intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ (voir [10]). Comme pour tout $t > 0$, l'opérateur T_t est continu, la proposition 1.1.3 donne que pour tous réels t, s et $u > 0$:

$$T_s \int_0^t T_u\psi \, du = \int_0^t T_{u+s}\psi \, du. \tag{1.8}$$

Proposition 1.2.2. *Soit $t > 0$ et $\psi \in E$. Alors $\int_0^t T_u\psi\, du \in D_A$ et on a*

$$A\int_0^t T_u\psi\, du = T_t\psi - \psi.$$

Démonstration. Soit $\psi \in E$ et un réel $t > 0$. En utilisant (1.7) et (1.8), on obtient pour tout réel $h > 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{h}\int_0^t T_{u+h}\psi\, du - \frac{1}{h}\int_0^t T_u\psi\, du\right) &= \left(\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T_u\psi\, du - \frac{1}{h}\int_0^t T_u\psi\, du\right)\\ &= \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_u\psi\, du - \frac{1}{h}\int_0^h T_u\psi\, du\right)\\ &= \frac{F(t+h)-F(h)}{h} - \frac{F(h)-F(0)}{h}\end{aligned}$$

où

$$F(x) = \int_0^x T_u\psi\, du \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

En faisant tendre h vers 0, (1.6) donne que

$$A\int_0^t T_u\psi du = T_t\psi - \psi.$$

□

Théorème 1.2.3. *Pour tous $t \geq 0$ et $\psi \in D_A$,*

$$T_t\psi \in D_A \quad \text{et} \quad AT_t\psi = T_tA\psi.$$

Démonstration. Soit $\psi \in D_A$ et $t \geq 0$ et posons $\phi = T_t\psi$. En utilisant le fait que l'opérateur T_t est continu sur E, on a

$$\frac{T_s\phi - \phi}{s} = T_t\left(\frac{T_s\psi - \psi}{s}\right) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} T_tA\psi. \tag{1.9}$$

Par suite, $\phi = T_t\psi \in D_A$ et $A\phi = T_tA\psi$. □

Il est immédiat d'après (1.9), que $t \mapsto T_t\psi$ est fortement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\frac{d}{dt}T_t\psi = AT_t\psi = T_tA.$$

Cette égalité s'appelle équation Forward-Backward.

1.3 Semi-groupe associé à un processus de Markov

Soit X et Y des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit une tribu $\mathcal{B}$ sur Ω telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. On rappelle que l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est la variable aléatoire notée $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ vérifiant :

(i) $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$ mesurable.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_A)$.

On note par $\mathbb{E}(X|Y)$ l'espérance conditionnelle de X sachant à la tribu engendrée par Y.

Une application $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ est appelée probabilité de transition si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

(ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto N(\cdot, A)$ est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$.

Entre autre, si μ est une mesure de probabilité, on note par $\mu \cdot N$ l'application définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tous A, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mu \cdot N(A \times B) = \int_A N(x, B)\mu(dx).$$

Le théorème de Carathéodory (voir par exemple [10]) nous permet de prolonger cette application en une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d}))$ que l'on note encore $\mu \cdot N$.

Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle loi conditionnelle de X sachant Y, la probabilité de transition $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_Y \cdot N. \tag{1.10}$$

On note pour tous $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $y \in \mathbb{R}^d$

$$N(y, A) := \mathbb{P}(X \in A|Y = y).$$

Le théorème de Jirina ([19] page 256) assure l'existance d'une telle loi conditionnelle.

Le théorème suivant est le théorème de Fubini. Pour une démonstration de ce résultat, voir Strook [19].

Théorème 1.3.1. *Soit $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ une application borélienne.*

(i) Supposons que ϕ est positive. Alors l'application

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,y)\mathbb{P}(X \in dx | Y = y)$$

est borélienne positive et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x,y)\mathbb{P}_{(X,Y)}(dx,dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,y)\mathbb{P}(X \in dx | Y = y) \right] \mathbb{P}_Y(dy). \tag{1.11}$$

(ii) Supposons que ϕ est $\mathbb{P}_{(X,Y)}$-intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Alors pour $\mathbb{P}_Y$-presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application $x \mapsto \phi(x,y)$ est $\mathbb{P}(X \in \cdot | Y = y)$ intégrable et l'application

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,y)\mathbb{P}(X \in dx | Y = y)$$

est $\mathbb{P}_Y$ intégrable. De plus, l'égalité (1.11) à lieu.

Proposition 1.3.2. *Soit $\phi \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et soit pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,*

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mathbb{P}(X \in dx | Y = y).$$

Alors $\psi(Y) = \mathbb{E}(\phi(X)|Y)$.

Démonstration. Le théorème de Fubini donne que ψ est borélienne, ce qui entraine que $\psi(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable. Puisque $\mathbb{P}(X \in \cdot | Y = \cdot)$ est une probabilité de transition vérifiant (1.10), on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\psi(Y)\mathbf{1}_{\{Y \in A\}}) &= \int_A \psi(y)\mathbb{P}_Y(dy) \\
&= \int_A \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mathbb{P}_{X|Y=y}(dx)\mathbb{P}_Y(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi(x)\mathbf{1}_A(y)\mathbb{P}_{(X,Y)}(dx,dy) \\
&= \mathbb{E}(\phi(X)\mathbf{1}_{\{Y \in A\}}).
\end{aligned}$$

□

Définition 1.3.3. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit qu'un processus adapté $(X_t)_{t\geq 0}$ est de Markov (il vérifie la propriété de Markov faible) si pour toute fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $t \geq s \geq 0$:

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s). \tag{1.12}$$

Puisque la variable aléatoire $\mathbb{E}(f(X_t)|X_s)$ est $\sigma(X_s)$-mesurable, il est connu qu'il existe une unique fonction $G_f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$G_f(X_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s).$$

On note alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$G_f(x) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s = x).$$

A tout processus de Markov, on associe alors la famille d'opérateurs $(T_{s,t})_{t\geq s\geq 0}$ définie sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $B_b(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$T_{s,t}f(x) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s = x).$$

Cette famille est appelée famille de transition de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Proposition 1.3.4. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov et $(T_{s,t})_{t\geq s\geq 0}$ la famille de transition associée. Alors pour tous réels $t \geq r \geq s \geq 0$, on a*

$$T_{r,s}T_{s,t} = T_{r,t}. \tag{1.13}$$

Démonstration. Soit $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq r \geq s \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} T_{r,t}f(x) &= \mathbb{E}(f(X_t)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X_t)|X_s)|X_r = x) \\ &= \mathbb{E}(T_{s,t}f(X_s)|X_r = x) \\ &= T_{r,s}T_{s,t}f(x). \end{aligned}$$

□

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov et $(T_{s,t})_{t\geq s\geq 0}$ la famille de transition associée. On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est normal, si pour toute fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $t \geq s \geq 0$, la fonction $T_{s,t}f$ est borélienne. On définit pour tous réels $t \geq s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la famille $(p_{s,t})_{t\geq s\geq 0}$ par :

$$p_{s,t}(x, A) = T_{s,t}\mathbf{1}_A(x).$$

Lorsque $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est normal, $p_{s,t}(x, A)$ est une famille de probabilité de transition qui coincide avec la loi conditionnelle de X_t sachant X_s. Dans ce cas, on appelle $(p_{s,t})_{t\geq s\geq 0}$ la loi de transition du processus. On remarque que pour tout $f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$T_{s,t}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p_{s,t}(x, dy).$$

On dit que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est homogène si pour tous $t \geq s \geq 0$,

$$T_{s,t} = T_{0,t-s}.$$

Dans ce cas, on note $T_{0,t}$ par T_t et $p_{0,t}$ par p_t. Ainsi l'égalité (1.13) s'écrit

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad \text{pour tous} \quad t \geq s \geq 0.$$

Dans toute la suite de ce mémoire, on parlera simplement de processus de Markov pour évoquer tout processus de Markov normal et homogène. De plus, on designera par $C_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0.$$

On muni cet espace de la norme uniforme.

Définition 1.3.5 (Processus de Feller)**.** Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov normal homogène et soit $(T_t)_{t\geq 0}$ sa famille de transition. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit de Feller, si pour tout $t \geq 0$ et pour toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$,

(i) $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\lim_{t\to 0} \|T_t f - f\| = 0$.

Il est immédiat que $(T_t)_{t\geq 0}$ forme un semigroupe fortement continu de contraction sur $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 2

Processus de Lévy α-stable

Dans ce chapitre, nous étudirons quelques propriétés élémentaires des processus de Lévy, puis nous introduirons la notion de processus stables. Nous donnerons aussi une représentation du générateur infinitésimal d'un processus de Lévy sous forme d'opérateur pseudo-différentiel. Dans toute la suite, $(X_t)_{t\geq 0}$ designera un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.1 Généralités sur les processus de Lévy

Soit λ et μ deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que leur produit de convolution est défini pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\lambda * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{1}_A(x+y)\lambda(dx)\mu(dy).$$

Autrement dit, pour toute fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu * \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\mu(dx)\lambda(dy).$$

Pour tout $n \geq 1$, on notera par

$$\mu^{*n} = \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{n\, fois}.$$

Définition 2.1.1. On dit que μ est infiniment divisible si pour tout $n \geq 1$, il existe une mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\mu = \mu_n^{*n}.$$

De même, on dit qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est infiniment divisible si sa loi l'est.

On rappelle que la transformé de Fourrier de μ est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\Phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,u\rangle}\mu(dx).$$

Si $Z : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une variable aléatoire de loi μ, la fonction caractéristique de Z sera notée par

$$\Phi_Z = \Phi_\mu.$$

Proposition 2.1.2. *La mesure de probabilité μ est infiniment divisible si et seulement si pour tout $n \geq 1$, il existe une mesure de probabilité μ_n sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\Phi_\mu(u) = (\Phi_{\mu_n}(u))^n.$$

Démonstration. Supposons que μ est infiniment divisible et soit μ_n une mesure de probabilité telle que $\mu = \mu_n^{*n}$ pour tout $n \geq 1$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,u\rangle}\mu_n^{*n}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x_1,u\rangle}\mu_n(dx_1) \times \cdots \times \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x_n,u\rangle}\mu_n(dx_n) \\
&= (\Phi_{\mu_n}(u))^n
\end{aligned}$$

Reciproquement, soit μ_n une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_\mu(u) = (\Phi_{\mu_n}(u))^n$. Il est aussi évident que pour tout $n \geq 1$, $\Phi_\mu = \Phi_{\mu_n^{*n}}$. On en déduit que $\mu = \mu_n^{*n}$.

□

On rappelle qu'une mesure de Lévy ν sur $\mathbb{R}^d$ vérifie

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |y|^2 \ \nu(dy) < \infty.$$

Le théorème suivant (voir [2] pages 30 et 126) donne une caractérisation des mesures infiniments divisibles par la forme de leurs transformés de Fourrier.

Théorème 2.1.3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) μ est infiniment divisible.

(ii) Il existe $A \in M_d(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, un vecteur $b \in \mathbb{R}^d$ et une mesure de Lévy ν sur $\mathbb{R}^d$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\Phi_\mu(u) = \exp\left(i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u,y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy) \right) \tag{2.1}$$

où $B(0,1)$ désigne la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

La formule (2.1) s'appelle la formule de Lévy-Khintchine. L'application η définie pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\eta(u) = i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u,y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy)$$

est appelée symbole de Lévy. Le triplet (A, b, ν) quand à lui est appelé triplet de Lévy.

On rappelle que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous réels $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes et le processus$(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements stationnaires si pour tout réels $t \geq s \geq 0$, les variables aléatoires $X_t - X_s$ et $X_{t-s} - X_0$ ont même loi. Dans toute la suite, nous appellerons P.A.I.S les processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 2.1.4. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy issu de x si

(i) $X_0 = x$.

(ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ est un P.A.I.S.

(iii) $(X_t)_{t\geq 0}$ est à trajectoires continues à droite avec une limite à gauche (càdlàg), i.e. pour tous $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}^+$ et admet une limite à gauche en tout point $s > 0$.

(iv) $(X_t)_{t\geq 0}$ est stochastiquement continu, i.e. pour tous $t \geq 0$ et $\epsilon > 0$,

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|X_t - X_s| > \epsilon) = 0.$$

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy et définissons pour tout entier $1 \leq k \leq n$ et pour tout $t \geq 0$,

$$Y_k^{(n)}(t) = X_{\frac{kt}{n}} - X_{\frac{(k-1)t}{n}}.$$

Ainsi, les variables aléatoires $Y_k^{(n)}(t)$, $1 \leq k \leq n$, sont indépendantes identiquement distribées. De plus, il est trivial que

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(n)}(t).$$

On en conclut alors que X_t est infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.

Théorème 2.1.5. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors pour tout $t \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\Phi_{X_t}(u) = (\Phi_{X_1}(u))^t. \tag{2.2}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Montrons tout d'abord que $t \to \Phi_{X_t}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme l'application $y \mapsto e^{i\langle u,y\rangle}$ défini sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs complexes est continue en 0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\sup_{0\leq|y|<\delta_1} \left|e^{i\langle u,y\rangle} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De plus, puisque $(X_t)_{t\geq 0}$ est stochastiquement continu, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tous $t, s \geq 0$ vérifiant $0 < |t-s| < \delta_2$, on a

$$\mathbb{P}(|X_t - X_s| > \delta_1) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Alors on a pour tous $t, s \geq 0$ vérifiant $0 < |t-s| < \delta_2$

$$\begin{aligned}
|\Phi_{X_t}(u) - \Phi_{X_s}(u)| &= \left|\mathbb{E}\left(e^{i\langle u,X_s\rangle}\left(e^{i\langle u,X_t-X_s\rangle} - 1\right)\right)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i\langle u,x\rangle} - 1\right| \mathbb{P}_{X_t-X_s}(dx) \\
&= \int_{B(0,\delta_1)} \left|e^{i\langle u,x\rangle} - 1\right| \mathbb{P}_{X_t-X_s}(dx) \\
&+ \int_{B^c(0,\delta_1)} \left|e^{i\langle u,x\rangle} - 1\right| \mathbb{P}_{X_t-X_s}(dx) \\
&\leq \sup_{0\leq|y|<\delta_1} \left|e^{i\langle u,y\rangle} - 1\right| + 2\mathbb{P}(|X_t - X_s| > \delta_1)
\end{aligned}$$

$$\leq \epsilon.$$

Ce qui montre que $t \to \Phi_{X_t}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit pour tout $t \geq 0$, η_t le symbole de Lévy de $(X_t)_{t\geq 0}$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$ et posons $\theta(t) = \eta_t(u)$. Alors pour tout $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\theta(t+s) &= \Phi_{X_{t+s}}(u) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\langle X_{t+s}, u\rangle}) \\
&= \mathbb{E}(e^{i\langle X_{t+s}-X_s, u\rangle} e^{\langle X_s, u\rangle}) \\
&= \Phi_{X_{t+s}-X_s}(u)\Phi_{X_s}(u) \\
&= \Phi_{X_t}(u)\Phi_{X_s}(u) \\
&= \theta(t)\theta(s).
\end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que $\Phi_{X_t}(0) = 1$. On en déduit que l'unique solution continue de l'équation vérifiant est $\Phi_{X_t}(u) = e^{t\beta(u)}$ avec $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. D'où $\beta(u) = \eta(u)$.

□

Théorème 2.1.6. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus de Lévy tels que les variables aléatoires X_1 et Y_1 ont même loi. Alors les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ ont même loi.*

Démonstration. D'après la théorème 2.1.5, pour tout $t \geq 0$, $X_t \stackrel{loi}{=} Y_t$. Cela implique que pour tous $t \geq 0$ et $s \geq 0$:

$$X_{t+s} - X_s \stackrel{loi}{=} Y_{t+s} - Y_s.$$

Comme les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont à accroissements indépendants, on a pour tous $n \geq 1$ et $t_n > \cdots > t_1 \geq 0$

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{loi}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}).$$

Vu que la fonction $f : x = (x_1, \cdots, x_d) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_{n-1} + x_n)$ définie sur $\mathbb{R}^{nd}$ à valeurs $\mathbb{R}^{nd}$ est borélienne on en déduit que

$$(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \stackrel{loi}{=} (Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n}).$$

Les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ possèdent alors les mêmes lois finis dimensionnelles. Ce qui signifie qu'ils ont même loi.

□

Lemme 2.1.7. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy issu de $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p_t la loi de X_t pour tout $t > 0$. Alors pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (continue bornée sur $\mathbb{R}^d$), on a*

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}(f(X_t)) = f(x).$$

Démonstration. Il est connu que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est stochastiquement continu en 0. Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et supposons que la fonction f est non identiquement nulle. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\sup_{x\in B(0,\delta)} |f(x) - f(0)| \leq \epsilon/2$$

et il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $0 < t < \delta$ on a

$$\mathbb{P}(|X_t| > \delta) < \epsilon/4M$$

avec $M = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x) - f(0)|$. On aura alors pour tout $0 < t < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(0))\, p_t(dx)\right| &\leq \int_{B(0,\delta)} |f(x) - f(0)|\; p_t(dx) \\ &\quad + \int_{B^c(0,\delta)} |f(x) - f(0)|\; p_t(dx) \\ &\leq \sup_{x\in B(0,\delta)} |f(x) - f(0)| + 2M\mathbb{P}(|X_t| > \delta) \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.8. *Tout processus de Lévy est un processus de Feller.*

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $X_0 = 0$. Montrons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov homogène. Soit $t \geq s \geq 0$ et une fonction $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t - X_s + X_s)|\mathcal{F}_s) = g(X_s) \tag{2.3}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$g(x) = \mathbb{E}(f(X_{t-s} + x)).$$

De même, il est facile de vérifier que

$$\mathbb{E}(f(X_t)|X_s) = g(X_s).$$

Ceci montre que la propriété de Markov est vérifiée. Etant donné que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est a accroissements stationnaires, il est immédiat de remarquer qu'il est homogène. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la famille de transition associée à notre processus. D'après (2.3), on a pour tous $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ et $s \geq 0$:

$$T_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_s = x) = g(x) = \mathbb{E}(f(X_t + x)). \tag{2.4}$$

Soit $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, montrons que pour tout $t \geq 0$, $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R}^d$. Le théorème de convergence dominée donne :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_t f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x_n + y)\mathbb{P}_{X_t}(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y)\mathbb{P}_{X_t}(dy)\\ &= T_t f(x).\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty} |T_t f(x)| &\leq \lim_{|x|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + y)|\, \mathbb{P}_{X_t}(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{|x|\to\infty} |f(x + y)|\, \mathbb{P}_{X_t}(dy)\\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $T_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Comme la continuité uniforme de f donne que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $y \in B(0, r)$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x + y) - f(y)| < \epsilon/2,$$

on en déduit que pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\|T_t f - f\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |T_t f(x) - f(x)|\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y) - f(x) p_t(dy) \right|\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{B(0,r)} |f(x + y) - f(x)|\, p_t(dy) + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{(B(0,r))^c} |f(x + y) - f(x)|\, p_t(dy)\\ &\leq \epsilon/2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{(B(0,r))^c} |f(x + y) - f(x)|\, p_t(dy).\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers 0 dans cette inégalité et en appliquant le lemme 2.1.7 on obtient que l'application $t \mapsto T_t$ est fortement continue en 0.

$\square$

2.2 Processus de Lévy à mesure de Lévy fini

Dans toute la suite, $(B_t)_{t\geq 0}$ désignera un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ i.e. le processus stochastique vérifiant :

(i) $B_0 = 0$ p.s.

(ii) $(B_t)_{t\geq 0}$ est à accroissement indépendant.

(iii) Pour tout $t \geq s \geq 0$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$, où I_d désigne la matrice identité de $M_d(\mathbb{R}^d)$. (i.e. $B_t - B_s$ suit la loi normal de paramètres 0 et $(t-s)I_d$. De plus, par convention $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$.)

(iv) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.

Il est évident que le mouvement brownien standard est un processus de Lévy. De plus, comme $B_1 \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ sa fonction caractéristique est

$$\Phi_{B_1}(u) = e^{-\frac{|u|^2}{2}}.$$

On en déduit alors que le mouvement brownien standard est de symbole de Lévy donné pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ par

$$\eta(u) = -\frac{|u|^2}{2}.$$

Définition 2.2.1. On appelle mouvement brownien avec drift le processus $(D_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ qui s'écrit sous la forme

$$D_t = zt + \sigma B_t$$

où $z \in \mathbb{R}^d$ et $\sigma \in M_d(\mathbb{R})$ vérifiant $A := \sigma^\top \sigma = {}^\top\sigma\sigma$ et telle que la matrice A soit définie positive. Ce processus est de Lévy et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ son symbole de Lévy est :

$$\eta(u) = i\langle z, u\rangle - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle.$$

Proposition 2.2.2. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy de triplet* (A, b, ν)*. Si* $\nu = 0$ *alors* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien avec drift.*

Démonstration. Par définition, $(X_t)_{t\geq 0}$ a pour symbole de Lévy pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\eta(u) = i \langle z, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle .$$

Comme A est une matrice symétrique définie positive, il existe $\sigma \in M_d(\mathbb{R})$ vérifiant $\sigma^\top \sigma = {}^\top\sigma\sigma = A$. On en conclut que $(X_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(bt + \sigma B_t)_{t\geq 0}$.

□

On rappelle que le processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité $\rho > 0$ est un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{N}$, croissant et tel que pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre ρt.

Définition 2.2.3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, un réel $\rho > 0$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On appelle processus de Poisson composé de paramètre (μ, ρ) le processus de Lévy $(Y_t)_{t\geq 0}$ vérifiant pour tout $t \geq 0$:

$$Y_t = x + \sum_{k=0}^{N_t} Z_k$$

où $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité ρ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi μ tels que $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants.

Proposition 2.2.4. *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus de Lévy de triplet* (A, b, ν) *tel que* $0 < \nu(\mathbb{R}^d) < \infty$*. Alors* $(X_t)_{t\geq 0} = (Y_t + D_t)_{t\geq 0}$ *où* $(D_t)_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien avec drift et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Poisson composé de paramètre* $(\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R}^d)}, \nu(\mathbb{R}^d))$ *indépendant de* $(D_t)_{t\geq 0}$*.*

Démonstration. D'après la formule de Lévy-Khintchine, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ le symbole de Lévy de $(X_t)_{t\geq 0}$ est :

$$\eta_X(u) = i \langle b, u \rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i \langle u, y \rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy).$$

Comme $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$, on a

$$\int_{B(0,1)} |x| \, \nu(dx) < \infty.$$

On en déduit alors que

$$\eta_X(u) = i\,\langle b_D, u\rangle - \frac{1}{2}\,\langle Au, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u,y\rangle} - 1]\nu(dy) \tag{2.5}$$

où

$$b_D = b - \int_{B(0,1)} y\,\nu(dy).$$

D'autre part, $(Y_t)_{t\geq 0}$ a pour symbole de Lévy,

$$\eta_Y(u) = \nu(\mathbb{R}^d)\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x,u\rangle} - 1)\frac{\nu(dx)}{\nu(\mathbb{R}^d)}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. La formule (2.5) et la proposition 2.2.2, nous permettent de conclure.

□

2.3 Processus α-stables

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3.1. On dit que μ est stable si pour tout $a > 0$, il existe un réel $\gamma(a) > 0$ et $\delta(a) \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$(\Phi_\mu(u))^a = e^{i\langle\delta(a),u\rangle}\Phi_\mu(\gamma(a)u).$$

On dit que μ est strictement stable si $\delta(a) = 0$ pour tout $a > 0$. Une variable aléatoire X est dite (strictement) stable si sa loi est (strictement) stable. Par ailleurs, on remarque que toute mesure stable est infiniment divisible.

Un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit (strictement) stable, si pour tout $t > 0$, X_t est (strictement) stable. Il est évident que pour qu'un processus de Lévy soit stable, il suffit qu'il le soit pour un entier $t > 0$.

On rappelle qu'un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit autosimilaire au sens large, si pour tout $a > 0$ et $t \geq 0$, il existe $b(a) > 0$ et $c(t,a) \geq 0$ tels que

$$(X_{at})_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (b(a)X_t + c(t,a))_{t\geq 0}. \tag{2.6}$$

On dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est autosimilaire si pour tout $t \geq 0$ et $a > 0$, $c(t,a) = 0$. Dans toute la suite, nous conserverons les notations $\gamma(a)$, $\delta(a)$, $b(a)$ et $c(t,a)$ utilisées dans ces définitions.

Proposition 2.3.2. *Un processus de Lévy $X = (X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est autosimilaire au sens large (respectivement autosimilaire) si et seulement s'il est stable (respectivement strictement stable).*

Démonstration. Supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est autosimilaire au sens large, alors pour tout $a > 0$, les processus $(X_{at})_{t\geq 0}$ et $(b(a)X_t + c(t,a))_{t\geq 0}$ ont même loi. Il est évident que ces deux processus sont de Lévy. On en déduit que :

$$\Phi_{X_a}(u) = (\Phi_{X_1}(u))^a = \Phi_{bX_t+c(1,a)}(u) = \Phi_{X_1}(b(a)u + c(1,a)).$$

Ceci montre que X_1 est stable. Reciproquement, supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est stable alors pour tous $a > 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$:

$$(\Phi_{X_1}(u))^a = \Phi_{\gamma(a)X_t+\delta(a)}(u).$$

Les processus $(X_{at})_{t\geq 0}$ et $(\gamma(a)X_t + t\delta(a))_{t\geq 0}$ sont de Lévy et on a pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\Phi_{X_a}(u) = (\Phi_{X_1}(u))^a.$$

On en déduit que

$$(X_{at})_{t\geq 0} \stackrel{loi}{=} (\gamma(a)X_t + t\delta(a))_{t\geq 0}.$$

□

Théorème 2.3.3. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy stable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $t > 0$, X_t soit non triviale (i.e. la loi de X_t est différent d'une mesure de Dirac). Alors pour tout $a > 0$, $\gamma(a)$ est unique et il existe un unique $\alpha \in]0,2]$ vérifiant*

$$\gamma(a) = a^{1/\alpha}.$$

Le réel α est appelé indice de stabilité du processus.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats préliminaires.

Lemme 2.3.4. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, non trivial et soit $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}^d$ tels que :*

$$b_1X + c_1 \stackrel{loi}{=} b_2X + c_2. \tag{2.7}$$

Alors $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$.

Démonstration. L'égalité (2.7) nous donne que :

$$X \overset{loi}{=} b_2^{-1}(b_1 X + c_1 - c_2).$$

Supposons que $X \overset{loi}{=} bX + c$ et montrons que $b = 1$ et $c = 0$. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi que X alors

$$X_1 - X_2 \overset{loi}{=} bX_1 + c - bX_2 - c \overset{loi}{=} b(X_1 - X_2).$$

Si $0 \leq b < 1$, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$b(X_1 - X_2) \overset{loi}{=} b^n(X_1 - X_2).$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient $b = 0$. On en déduit alors que

$$(X_1 - X_2) \overset{loi}{=} 0.$$

Ceci est impossible comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes et non triviales. De même, pour tout $b > 1$,

$$\frac{1}{b}(X_1 - X_2) \overset{loi}{=} \frac{1}{b^n}(X_1 - X_2).$$

Ceci montre que $b = 1$. D'autre part, on a pour tout $n \geq 1$

$$X \overset{loi}{=} X + nc.$$

On en déduit que $c = 0$.

□

Lemme 2.3.5. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, non trivial et autosimilaire au sens large. Alors pour tous $a > 0$ et $t \geq 0$, les réels $b(a)$ et $c(t, a)$ de l'égalité (2.6) sont uniques.*

Démonstration. Soit $a > 0$, supposons pour tous $t \geq 0$, qu'il existe $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $c_1(t)$ et $c_2(t) \in \mathbb{R}^d$ vérifiant :

$$(X_{at})_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (b_1 X_t + c_1(t))_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (b_2 X_t + c_2(t))_{t\geq 0}.$$

Dans ce cas, le lemme 2.3 donne que pour tout $t \geq 0$, $b_1 = b_2$ et $c_1(t) = c_2(t)$.

□

Grâce à la proposition 2.3.2 et au lemme 2.3.5, il est facile de remarquer que pour tout $a > 0$, $b(a) = \gamma(a)$ et que $c(t, a) = t\delta(a)$ pour tout $t \geq 0$.

Lemme 2.3.6. *Soit Z et W deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ non triviales. Supposons qu'il existe une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}^d$ vérifiant :*

$$Z_n \overset{loi}{\to} Z \quad \text{et} \quad a_n Z_n + b_n \overset{loi}{\to} W.$$

Alors il existe un réel b et $c \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$bZ + c \overset{loi}{=} W.$$

Proposition 2.3.7. *Soit l'application $\gamma : a \mapsto \gamma(a)$ définie sur $]0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\gamma(1) = 1$.

(2) Pour tout $a > 0$, $\gamma(a^{-1}) = \gamma(a)^{-1}$.

(3) Pour tous $a > 0$ et $a' > 0$, $\gamma(aa') = \gamma(a)\gamma(a')$.

(4) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ suite de réels strictements positifs tels qu'il existe un réel $0 < a < \infty$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(a_n) = \gamma(a).$$

Démonstration. Le lemme 2.3.5 montre que γ est bien définie. Remarquons que la propriété (1) est évidente. Étant donné que le procesus $(X_t)_{t\geq 0}$ est autosimilarité au sens large on a

$$\gamma(a) X_{a^{-1}t} + a^{-1} t\delta(a) \overset{loi}{=} X_t.$$

On en déduit alors que

$$X_{a^{-1}t} \overset{loi}{=} \gamma^{-1}(a) X_t - a^{-1} t \gamma^{-1}(a)\delta(a) \quad \text{et} \quad X_{a^{-1}t} \overset{loi}{=} \gamma(a^{-1}) X_t + m\delta(a).$$

où m est une constante réelle. Ceci prouve que la propriété (2) est vérifiée. La propriété (3) est aussi vérifié puisque

$$X_{aa't} \overset{loi}{=} \gamma(a) X_{a't} + a't\delta(a) \overset{loi}{=} \gamma(a)\gamma(a') X_t + a't\delta(a) + \gamma(a) t\delta(a'). \tag{2.8}$$

Montrons maintenant la propriété (4). Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictements positifs tels qu'il existe $0 < a < \infty$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. On a pour tout $n \geq 1$:

$$X_{a_n t} \overset{loi}{=} \gamma(a_n)X_t + t\delta(a_n) \quad \text{et} \quad X_{a_n t} \overset{loi}{\to} X_{at}.$$

Le lemme 2.3.5 nous permet de conclure que l'assertion (4) est vérifiée.

□

Dans tout la suite, pour toute mesure ρ sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $r > 0$, on note par $T_r\rho$ la mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$(T_r\rho)(B) = \rho(r^{-1}B). \tag{2.9}$$

Proposition 2.3.8. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν) alors le processus de Lévy $(a^H X_t + t\delta)_{t\geq 0}$ a pour triplet $(a^{2H}A, b(a), T_{a^H}\nu)$ avec $b(a) \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Calculons la fonction caractéristique de $a^H X_1 + \delta$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$\Phi_{a^H X_1+\delta}(u) = \mathbb{E}(e^{i\left\langle a^H X_1+\delta, u\right\rangle}) = e^{i\langle \delta,u\rangle + \eta(a^H u)}.$$

Le symbole de Lévy du processus $(a^H X_t + t\delta)_{t\geq 0}$ est

$$\begin{aligned} i\langle \delta, u\rangle + \eta(a^H u) &= i\langle \delta, u\rangle + i\left\langle b, a^H u\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle A a^H u, a^H u\right\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\left\langle a^H u, y\right\rangle} - 1 - i\left\langle a^H u, y\right\rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)]\nu(dy) \\ &= i\left\langle b a^H + \delta a^{-H}, u\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle A a^{2H} u, u\right\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - i\langle u, y\rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] T_{a^H}(dy) + i\langle \beta, u\rangle \end{aligned}$$

avec

$$\beta = \int_{\mathbb{R}^d} y\mathbf{1}_{B(0,1)}(y) T_{a^H}(dy) - \int_{\mathbb{R}^d} y\mathbf{1}_{B(0,1)}(y)\nu(dy).$$

En posant, pour tout $a > 0$, $b(a) = ba^H + \delta a^{-H} + \beta$, on obtient le triplet de Lévy du processus $(a^H X_t + t\delta)_{t\geq 0}$.

□

Démonstration du théoreme 2.3.3. Posons $H = 1/\alpha$. Il suffit de montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\gamma(a) = a^H.$$

Tout d'abord, la proposition 2.3.7 nous montre que la fonction γ est une fonction continue sur $]0, \infty[$ telle que pour tous $a > 0, a' > 0$:

$$\gamma(aa') = \gamma(a)\gamma(a').$$

Ceci nous permet d'affirmer qu'il existe $H \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\gamma(a) = a^H.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $H \geq 1/2$. Montrons d'abord que si $a > 1$ alors $\gamma(a) > 1$. Supposons que pour un réel $a > 1$ on a $\gamma(a) \leq 1$. Posons $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$, étant donné que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est autosimilaire au sens large on obtient pour tout entier relatif n,

$$\Phi_{X_{a^n t}}(u) = \Phi_{X_t}(\gamma(a)^n u) e^{\langle u, t\delta(a^n)\rangle}.$$

On en déduit que $|\Phi_{X_{a^n t}}(\gamma(a)^{-n}u)| = |\Phi_{X_t}(u)|$. D'autre part, comme X_0 est constante, $|\Phi_{X_{a^n t}}(u)|$ converge uniformement sur tout compact vers 1 quand $n \to -\infty$. De plus, comme pour tout $n \leq 0$

$$\left|\gamma(a)^{-n}u\right| \leq |u|$$

on obtient que :

$$0 \leq 1 - \left|\Phi_{X_{a^n t}}(\gamma(a)^{-n}u)\right| \leq \sup_{|z|\leq|u|} (1 - |\Phi_{X_{a^n t}}(z)|) \to 0$$

quand $n \to -\infty$. On en déduit que $|\Phi_{X_t}(u)| = 1$. Ceci montre alors que X_t est constante. Comme on a supposé que X_t est non trivial, on en déduit que $\gamma(a) > 1$. Comme pour tout $a > 0$, on a $\gamma(a) = a^H$, on remarque que $H > 0$. Posons maintenant $a > 0$ et supposons que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ a pour triplet de Lévy (A, b, ν). Alors $(X_{at})_{t\geq 0}$ a pour triplet $(aA, ab, a\nu)$ et la proposition 2.3.8 nous permet d'affirmer que le processus $(a^H X_t + t\delta)_{t\geq 0}$ a pour triplet $(a^{2H}A, b(a), T_{a^H}\nu)$ avec $b(a) \in \mathbb{R}^d$. De plus, on a

$$(X_{at})_{t\geq 0} \stackrel{loi}{=} (a^H X_t + t\delta)_{t\geq 0}.$$

L'unicité du triplet de Lévy donne :

$$a^{2H}A = aA, \quad ab = b(a) \quad \text{et} \quad a\nu = T_{a^H}\nu.$$

Comme pour tout $t > 0$, X_t est non trivial, on a $A \neq 0$ ou $\nu \neq 0$.

1. Lorsque $A \neq 0$, on obtient $H = 1/2$.
2. Lorsque $\nu \neq 0$, nous remarquons que, pour tous $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, on a

$$T_{r_1} T_{r_2} \nu = T_{r_1 r_2} \nu \quad \text{et} \quad a^{-1} \nu = T_{a^{-H}} \nu.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$a^n \nu = T_{a^{Hn}} \nu. \tag{2.10}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit maintenant l'ensemble :

$$S_n(a^H) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : a^{nH} < |x| \leq a^{(n+1)H} \right\}.$$

On remarque que

$$S_n(a^H) = a^{nH} S_0(a^H)$$

et que

$$\nu(S_n(a^H)) = (T_{a^{-nH}} \nu)(S_0(a^H)) = a^{-n} \nu(S_0(a^H)).$$

D'autre part, il est facile de voir que

$$\{x :\, 0 < |x| \leq 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{-n-1}(a^H) \quad \text{et} \quad \{x : |x| > 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(a^H). \tag{2.11}$$

Comme $\nu(\{x : |x| > 1\}) < \infty$, on en déduit que $\nu(S_0(a^N)) \neq 0$. L'égalité (2.10) étant équivalente à :

$$a^n \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(a^{Hn} x) \nu(dx)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que pour tout fonction borélienne positive f :

$$a^n \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(a^{Hn} x) \nu(dx). \tag{2.12}$$

Ceci nous donne

$$\int_{S_n(a^H)} |x|^2 \, d\nu(dx) = a^{-n(1-2H)} \int_{S_0(a^H)} |x|^2 \, \nu(dx).$$

Puisque ν vérifie :

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \, \nu(dx) < \infty$$

l'égalité (2.11) nous donne

$$\sum_{n\leq -1} a^{-n(1-2H)} < \infty.$$

On en déduit que $(1-2H) < 0$, ce qui montre que $H > 1/2$.

□

Remarque. On remarque que les processus stables d'un même indice α possèdent de nombreuses propriétés communes, nous parlerons alors pour chaque $\alpha \in]0,2]$ de processus α-stables. Par définition de la stabilité, un processus non trivial ne peut pas être à la fois 2-stable et α-stable avec $0 < \alpha < 2$. On a donc

(i) $A \neq 0$ et $\nu = 0$ si et seulement si $(X_t)_{t\geq 0}$ est 2-stable.

(ii) $\nu \neq 0$ et $A = 0$ si et seulement si $(X_t)_{t\geq 0}$ est α-stable avec $0 < \alpha < 2$.

D'autre part, la proposition 2.2.2 nous permet d'affirmer que les processus de Lévy 2-stables sont les mouvements browniens avec drift.

Théorème 2.3.9. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ infiniment divisible de triplet (A,b,ν) et $0 < \alpha < 2$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) μ est α-stable.

(ii) pour tout $a > 0$, $\nu = a^{-\alpha}T_a(b)$ et $A = 0$.

(iii) $A = 0$ et il existe une mesure finie λ sur $S(0,1)$ telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\nu(B) = \int_{S(0,1)} \lambda(d\xi) \int_0^\infty \mathbf{1}_B(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}}. \tag{2.13}$$

Démonstration. L'équivalence des propriétés (i) et (ii) a déja été prouvée dans la démonstration du théorème 2.3.3. Supposons maintenant que la propriété (ii) est vérifiée. Soit $E \subset]0,\infty[$ et $C \subset S(0,1) = \big\{x \in \mathbb{R}^d,\, |x| = 1\big\}$. Soit l'ensemble EC vérifiant :

$$EC = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}, |x| \in E\,, \frac{x}{|x|} \in C \right\}.$$

On définit alors la mesure borélienne sur la sphère unité notée λ vérifiant pour tout $C \in \mathcal{B}(S(0,1))$ (ensemble des boréliens de la sphère unité) :

$$\lambda(C) = \alpha\nu(]1,\infty[C).$$

Soit ν_1 une mesure vérifiant l'équation (2.13). Alors ν_1 est une mesure sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\nu_1(\{0\}) = 0$ et vérifiant pour tous $b > 0$ et $C \in \mathcal{B}(S(0,1))$:

$$\begin{aligned}
\nu_1(]b, \infty[C) &= \lambda(C) \int_b^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \\
&= \frac{1}{\alpha b^\alpha} \lambda(C) \\
&= \frac{1}{b^\alpha} \nu(]1, \infty[C) \\
&= \nu(b]1, \infty[C) \\
&= \nu(]b, \infty[C).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\nu = \nu_1$. De plus, par construction de la mesure λ, (iii) implique (ii).

□

Ce théorème nous permet entre autre de déduire que pour toute fonction f borélienne ν-intégrable, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\nu(dx) = \int_{S(0,1)} \lambda(d\xi) \int_0^\infty f(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}}. \tag{2.14}$$

Proposition 2.3.10. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy α-stable et ν la mesure de Lévy associée alors on a :*

(i) $\int_{|x|\leq 1} |x| \, \nu(dx) < \infty$ *si et seulement si* $\alpha < 1$.

(ii) $\int_{|x|>1} |x| \, \nu(dx) < \infty$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $a > 1$, nous considérons l'ensemble $S_n(a^{1/\alpha})$ défini comme dans la démonstration du théorème 2.3.3. D'après (2.12) et puisque $\nu(S_n(a^{1/\alpha}))) = a^{-n}\nu(S_0(a^{1/\alpha}))$, on obtient que :

$$\int_{S_n(a^{1/\alpha})} |x| \, \nu(dx) = a^{n\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \int_{S_0(a^{1/\alpha})} |x| \, \nu(dx).$$

D'autre part,

$$\nu(S_0(a^{1/\alpha})) \leq \int_{\nu(S_0(a^{1/\alpha}))} |x|^2 \, \nu(dx) < \infty.$$

Etant donné que $a^{1/\alpha} > 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 1} |x|\,\nu dx < \infty &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int S_{-n-1}(a^{1/\alpha})|x|\,\nu dx < \infty \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^{(-n-1)\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} < \infty \\ &\Leftrightarrow \alpha < 1.\end{aligned}$$

De même, on vérifie que $\int_{|x|>1} |x|\,\nu(dx) < \infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

□

Théorème 2.3.11. *Soit $0 < \alpha < 2$, un processus α-stable $(X_t)_{t\geq 0}$ et μ la loi de X_1. Si le processus est symétrique (i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a $\phi_\mu(u) = \phi_\mu(-u)$) alors*

$$\phi_\mu(u) = \exp(-\int_{S(0,1)} |\langle u, \epsilon\rangle|^\alpha \,\lambda_2(d\epsilon)) \tag{2.15}$$

où λ_2 est une mesure finie sur la sphère unité, non nulle et déterminée de manière unique par μ.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon \in S(0,1)$. On a pour tout $0 < \alpha < 1$ (voir par exemple [17]),

$$\int_0^\infty (e^{ir\langle u,\epsilon\rangle} - 1)r^{-1-\alpha}dr = c_1(\alpha)\,|\langle u, \epsilon\rangle|^\alpha\,(1 - c_2(\alpha)\mathrm{sgn}(\langle u, \epsilon\rangle)) \tag{2.16}$$

avec $c_1(\alpha)$ et $c_2(\alpha)$ des constantes dépendantes de α et sgn la fonction signe et pour tout $1 < \alpha < 2$

$$\int_0^\infty (e^{ir<u,\epsilon>} - 1 - ir)r^{-1-\alpha}dr = c_1(\alpha)\,|\langle u, \epsilon\rangle|^\alpha\,(1 - c_2(\alpha)\mathrm{sgn}(\langle u, \epsilon\rangle)) \tag{2.17}$$

avec $c_1(\alpha)$ et $c_2(\alpha)$ des constantes dépendantes de α. En appliquant l'égalité (2.14) à la formule de Lévy-Khintchine, (2.16) et (2.17) donnent que pour $\alpha \neq 1$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ le symbole de Lévy η du processus est

$$\eta(u) = -\int_{S(0,1)} |\langle u, \epsilon\rangle|^\alpha\,(1 - c_2(\alpha)\mathrm{sgn}(< z, \epsilon >))\lambda_2(d\epsilon) + i\,\langle \beta_\alpha, u\rangle \tag{2.18}$$

avec λ_2 est le produit de λ par une constante et $\beta_\alpha \in \mathbb{R}^d$ dépendant de α. Soit $\alpha = 1$, $u \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon \in S(0,1)$. On a (voir par exemple [17]) :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (e^{ir\langle u,\epsilon\rangle} - 1 - ir\langle u,\epsilon\rangle)r^{-2}dr = -\frac{\pi}{2}\left|\langle u,\epsilon\rangle\right| - i\langle u,\epsilon\rangle \ln(|\langle u,\epsilon\rangle|) \\ + ic_1\langle u,\epsilon\rangle .\end{aligned} \tag{2.19}$$

En appliquant (2.14) à la formule de Lévy-Khintchine, l'égalité (2.19) donne que pour $\alpha = 1$ et $u \in \mathbb{R}^d$ le symbole de Lévy η du processus est :

$$\begin{aligned}\eta(u) = -\int_{S(0,1)} |\langle u,\epsilon\rangle|^\alpha + \frac{2}{\pi} i\langle u,\epsilon\rangle \ln(|\langle u,\epsilon\rangle|)\lambda_2(d\epsilon) \\ + i\langle \beta_1, u\rangle .\end{aligned} \tag{2.20}$$

Comme μ est symétrique, on obtient que $\eta(u) = \eta(-u)$. On en déduit que l'égalité (2.15) est vérifiée.

□

Définition 2.3.12. Une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par rotations si pour toute matrice orthoganale $U \in M_d(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu(UB) = \mu(B)$. Un processus X est dit invariant par rotations (ou isotrope), s'il l'est pour tout $t \geq 0$ et dans ce cas, on a UX et X ont même loi.

Remarque. Il est évident de voir qu'une mesure μ est invariante par rotations, si et seulement si,

$$\phi_\mu(u) = \phi_\mu(Uu)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et pour toute matrice orthoganale $U \in M_d(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.3.13. *Soit $0 < \alpha \leq 2$. Une mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ est α-stable et invariante par rotations, si et seulement s'il existe une constante réelle $\sigma(\alpha)$ vérifiant pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\phi_\mu(u) = e^{-\sigma(\alpha)|u|^\alpha}. \tag{2.21}$$

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 2$. L'égalité (2.15) nous donne pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\phi_\mu(u) = \exp(-|u|^\alpha \int_{S(0,1)} \left|\left\langle \frac{u}{|u|}, x\right\rangle\right|^\alpha \lambda(dx)).$$

De plus, $\frac{u}{|u|} \in S(0,1)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. On en déduit que

$$\sigma(\alpha,\epsilon) = \int_{S(0,1)} |\langle \epsilon, x\rangle|^\alpha \lambda(dx)$$

est constante pour tout $\epsilon \in S(0,1)$ et pour tout $0 < \alpha < 2$ puisque la mesure μ est invariante par rotations. Pour $\alpha = 2$, on sait que la mesure μ est gaussienne. La fonction caractéristique du processus gaussien invariant par rotations vérifie bien (2.21). La réciproque du théorème est, quand à elle, évidente.

$\square$

On remarque que multiplier un processus α-stable invariant par rotations ne change pas ses propriétés, nous parlerons du processus α-stable invariant par rotations lorsque $\sigma(\alpha) = 1$.

2.4 Représentation des générateurs infinitésimaux

Dans toute la suite, on note par $S(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, la transformée de Fourrier de f est définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-d/2} e^{-i\langle x,y\rangle} f(y) dy$$

et la formule d'inversion de la transformée de Fourrier nous donne pour tout $g \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-d/2} e^{i\langle x,y\rangle} \hat{g}(y) dy.$$

Définition 2.4.1. Soit A un opérateur linéaire défini sur $S(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $S(\mathbb{R}^d)$. A est appelé opérateur pseudo-différentiel, s'il existe une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que :

$$Af(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} \Lambda(x,u) \hat{f}(u) du$$

pour toute fonction $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$ tels que l'intégrale admet un sens. Dans ce cas, Λ est appelé symbole de l'opérateur pseudo-différentiel A.

En appliquant la formule de Lévy-Khintchine et celle de Fourrier inverse, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy, $(T_t)_{t\geq 0}$ le semi-groupe de Feller associé, A son générateur infinitésimal agissant sur $D_A \subseteq C_0(\mathbb{R}^d)$ et de symbole de Lévy η de triplet (m, b, ν), avec $m = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ et $b = (b_i)_{1\leq i\leq d}$. Alors on a :*

(i) Pour tous $t \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$, T_t est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\Lambda(x, u) = e^{t\eta(u)}$.

(ii) $S(\mathbb{R}^d) \subseteq D_A$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $\Lambda(x, u) = \eta(u)$.

(iii) Pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_i \partial_j f(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [f(x+y) - f(x) + \langle \nabla f(x), y\rangle \, \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)]\nu(dy). \end{aligned}$$

Lemme 2.4.3. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur $C_0(\mathbb{R}^d)$ et A son générateur infinitésimal agissant sur D_A. Si $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ vérifiant :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) = g(x) \tag{2.22}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ alors $f \in D_A$ et $Af = g$.

Pour la démonstration de ce lemme se référer au livre de Sato [17] page 209 lemme 31.7.

Démonstration du théorème 2.4.2. Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ comme $\hat{f}$ est intégrable alors pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(\left| e^{i\langle X_t, y\rangle} e^{i\langle x, y\rangle} \hat{f}(y) \right|) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \hat{f}(y) \right| dy < \infty.$$

En appliquant la formule d'inversion de la transformée de Fourrier et le théorème de Fubini, on obtient que pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= (2\pi)^{-d/2} \mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle X_t + x, y\rangle} \hat{f}(y) dy) \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(e^{i\langle X_t + x, y\rangle}) \hat{f}(y) dy \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{t\eta(y)} e^{i\langle x, y\rangle} \hat{f}(y) dy. \end{aligned}$$

Par suite, l'assertion (i) est prouvée. Pour démontrer (ii), on rappelle (voir [2]) qu'il existe une constante $K > 0$ vérifiant pour tout $u \in \mathbb{R}^d$

$$|\eta(u)| \leq K(1 + |u|^2).$$

Ceci nous permet, en appliquant le théorème des accroissements finis et comme $(1 + |u|^2)\hat{f}(u) \in S(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, d'obtenir :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i\langle u,x\rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) \right| du &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \eta(u) e^{t\eta(u)} \right| \left| \hat{f}(u) \right| du \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |u|^2) \left| \hat{f}(u) \right| du < \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée, le lemme 2.4.3 et l'assertion (i) nous donne que pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) &= (2\pi)^{-d/2} \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) du \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t \to 0} e^{i\langle u,x\rangle} \frac{e^{t\eta(u)} - 1}{t} \hat{f}(u) du \qquad (2.23) \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\eta(u)} \hat{f}(u) du.\end{aligned}$$

Pour démontrer l'assertion (iii), on applique la formule de Lévy-Khintchine à (ii) et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}Af(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} & e^{i\langle u,x\rangle} (i \langle b, u\rangle - \frac{1}{2} \langle Au, u\rangle \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - i \langle u, y\rangle \mathbf{1}_{B(0,1)}(y)] \nu(dy)) \hat{f}(u) du.\end{aligned}$$

□

Définition 2.4.4. Soit $0 < \alpha \leq 2$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus de Lévy α-stable invariant par rotations à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle Laplacien fractionnaire son générateur infinitésimal que l'on note $\Delta^{\alpha/2}$.

En utilisant les formules (ii) et (iii) du théorème 2.4.2, on obtient pour tous $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in]0, 2[$:

$$\Delta^{\alpha/2} f(x) := -(2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} |u|^{\alpha} \hat{f}(u) \mathbf{1}_{u \neq 0} du. \qquad (2.24)$$

Lorsque $\alpha = 2$ l'opérateur laplacien fractionnaire coincide avec l'opérateur laplacien.

Chapitre 3

Propriété de couplage des processus stables

Le but de ce chapitre est d'examiner avec des méthodes probabilistes des propriétés de type Liouville associées aux fonctions α-harmoniques sur $\mathbb{R}^d$. Plus précisement, nous présenterons une approche basée sur la propriété de couplage des processus α-stables sur $\mathbb{R}^d$. Nous donnerons une condition suffisante pour qu'un processus de Lévy possède la propriété de couplage.

3.1 Propriété de couplage

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Une variable aléatoire $T : \Omega \mapsto [0, \infty]$ est appelée $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$,

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

On appelle tribu des évenements anterieurs à T la tribu

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F},\, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\, \forall t \geq 0\}.$$

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tous $t \geq s \geq 0$, X_t est intégrable et

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s.$$

Il est bien connu que tout mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est une martingale. En effet, comme le mouvement brownien est à accroissements indépendants alors pour tous $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s \\ &= B_s.\end{aligned}$$

Pour un $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt $T : \Omega \to \mathbb{R}_+$, on définit la variable aléatoire $X_T : \Omega \to \mathbb{R}$ pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

Le théorème suivant est le théorème d'arrêt de Doob. Pour une démonstration de ce théorème, le lecteur pourra se référer au livre de D. Applebaum [2].

Théorème 3.1.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une $\mathcal{F}_t$-martingale à trajectoires continues à droite et soit S et T deux temps d'arrêt bornés tels que $S \leq T$ presque surement. Alors X_T et X_S sont intégrables et on a*

$$\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_S) = X_S.$$

Dans toute la suite, $(X_t)_{t\geq 0}$ désigne un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. De plus, on supposera que $(X_t)_{t\geq 0}$ est normal et homogène. On définit l'opérateur β vérifiant

$$\beta f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}(f(X_t)|X_0 = x) - f(x)}{t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que cette limite existe. On note alors par D_β l'ensemble de ces fonctions.

Définition 3.1.2. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite β-harmonique (ou X-harmonique) sur $\mathbb{R}^d$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\beta f(x) = 0.$$

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la famille de transition associée à $(X_t)_{t\geq 0}$ définie sur $B_b(\mathbb{R}^d)$ et $\tilde{\beta}$ son générateur infinitésimal. Alors on $\beta = \tilde{\beta}$ sur $D_{\tilde{\beta}} = D_\beta \cap B_b(\mathbb{R}^d)$. On définit l'ensemble

$$\mathcal{H}_b^\beta = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \ \beta\text{-harmonique bornée sur } \mathbb{R}^d \right\}$$

Proposition 3.1.3. *Soit l'ensemble*

$$E = \left\{ f \in B_b(\mathbb{R}^d) : T_t f = f; t \geq 0 \right\}.$$

Alors $\mathcal{H}_b^\beta = E$.

Démonstration. Il est évident que $E \subset \mathcal{H}_\beta$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{H}_\beta$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} = 0.$$

Dans ce cas, pour tout $s > 0$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{T_{t+s} f(x) - T_s f(x)}{t} = 0.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto T_t f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, $T_t f = f$ pour tout $t \geq 0$, ce qui signifie que $f \in E$.

□

On a pour tous réels $0 \leq s \leq t$ et toute fonction β-harmonique bornée f,

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s) = T_t f(X_s) = f(X_s).$$

Cela nous permet d'observer que si f est harmonique alors $(f(X_t))_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Il est bien connu que $\frac{1}{2}\Delta$ est le générateur infinitésimal associé au mouvement brownien standard $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. De plus, une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est Δ-harmoniques sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\Delta f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Le théorème de Liouville classique dit que toute fonction Δ-harmonique bornée sur $\mathbb{R}^d$ est nécessairement constante (voir par exemple [3]).

Dans la suite, une fonction f de est dite α-harmonique si elle est $\Delta^{\alpha/2}$-harmonique. On signale que les fonctions 2-harmoniques sont les fonctions Δ-harmoniques.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov, $(p_t)_{t\geq 0}$ sa loi de transition et x, $y \in \mathbb{R}^d$. On note par $(X_t^x)_{t\geq 0}$ et $(X_t^y)_{t\geq 0}$ les processus issus respectivement de x et y et possèdant les mêmes lois de transition que $(X_t)_{t\geq 0}$, i.e. pour tout $t \geq 0$, X_t^x et X_t^y ont respectivement pour loi $p_t(x, \cdot)$ et $p_t(y, \cdot)$. On appelle temps de couplage des processus $(X_t^x)_{t\geq 0}$ et $(X_t^y)_{t\geq 0}$ le temps d'arrêt

$$T_{x,y} = \inf \{t > 0; X_t^x = X_t^y\}.$$

Définition 3.1.4. On dit que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ possède la propriété de couplage si pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$, $T_{x,y}$ est fini presque surement.

Le théorème suivant permet d'établir le lien entre la propriété de couplage et la propriété de Liouville.

Théorème 3.1.5. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov à trajectoires continues à droite. Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ possède la propriété de couplage alors la propriété de Liouville a lieu.*

Démonstration. Soit x et $y \in \mathbb{R}^d$ et soit une fonction h X-harmonique bornée. Comme les processus $(X_t^x)_{t\geq 0}$ et $(X_t^y)_{t\geq 0}$ sont des processus de Markov ayant les mêmes lois de transition que $(X_t)_{t\geq 0}$, il est évident que $(h(X_t^x))_{t\geq 0}$ et $(h(X_t^y))_{t\geq 0}$ sont des martingales. Alors le théorème d'arrêt de Doob (Théorème 3.1.1) donne que pour tout $t > 0$ et pour tout temps d'arrêt fini T, on a

$$h(x) = \mathbb{E}(h(X_{t\wedge T}^x)) \quad \text{et} \quad h(y) = \mathbb{E}(h(X_{t\wedge T}^y)). \tag{3.1}$$

Supposons que la propriété de couplage est vérifiée. Soit $T = T_{x,y}$ le temps de couplage de $(X_t^x)_{t\geq 0}$ et $(X_t^y)_{t\geq 0}$. Alors pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= |\mathbb{E}(h(X_{t\wedge T}^x) - h(X_{t\wedge T}^y))| \\
&\leq \left|\mathbb{E}((h(X_{t\wedge T}^x) - h(X_{t\wedge T}^y))\mathbf{1}_{\{T\leq t\}})\right| + \left|\mathbb{E}((h(X_{t\wedge T}^x) - h(X_{t\wedge T}^y))\mathbf{1}_{\{T>t\}})\right| \\
&= \left|\mathbb{E}((h(X_T^x) - h(X_T^y))\mathbf{1}_{\{T\leq t\}})\right| + \left|\mathbb{E}((h(X_t^x) - h(X_t^y))\mathbf{1}_{\{T>t\}})\right| \\
&= \left|\mathbb{E}((h(X_t^x) - h(X_t^y))\mathbf{1}_{\{T>t\}})\right| \\
&\leq \mathbb{E}(|h(X_t^x)|\,\mathbf{1}_{\{T>t\}}) + \mathbb{E}(|h(X_t^y)|\,\mathbf{1}_{\{T>t\}}) \\
&\leq 2\,\|h\|_\infty\,\mathbb{P}(T > t).
\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers l'infini et comme $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$, on en déduit que $h(x) = h(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. Ce qui signifie que h est constante.

□

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures boréliennes bornées signées sur $\mathbb{R}^d$. On note par $\|.\|_{var}$ la norme en variation totale définie pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\|\mu\|_{var} = \sup_{\substack{f \in B_b(\mathbb{R}^d) \\ \|f\| \leq 1}} |\mu(f)|$$

où

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu.$$

Il est connu (voir par exemple [17]) qu'il existe $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que les applications

$$A \mapsto \mu_+(A) = \mu(A \cap H) \quad et \quad A \mapsto \mu_-(A) = -\mu(A \cap H^c)$$

sont des mesures positives sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. En outre,

$$\mu = \mu_+ - \mu_- \quad \text{et} \quad \|\mu\|_{var} = \mu_+(\mathbb{R}^d) + \mu_-(\mathbb{R}^d).$$

Dans le cas où μ à une mesure de masse totale 0, on a $\mu_+(\mathbb{R}^d) = \mu_-(\mathbb{R}^d)$. En considérant μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et puisque

$$\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \mu(A) = \mu(H) = \mu_+(\mathbb{R}^d),$$

on aura alors

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = 2 \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} (\mu_1(A) - \mu_2(A)).$$

En notant par $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)_+$ on a

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{var} = 2.(1 - (\mu_1 \wedge \mu_2)(\mathbb{R}^d)). \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.6. *Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfait la propriété de couplage, si et seulement si, pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$:*

$$\lim_{t \to \infty} \|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} = 0.$$

Pour la démonstration du théorème voir page 122 du le livre de T. Lindvall [14].

Soit $S = (S_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy issu de 0 à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. $(S_t)_{t \geq 0}$ est appelé subordinateur si pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème suivant donne une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un processus de Lévy soit un subordinateur.

Théorème 3.1.7. *Soit (A, b, ν) le triplet de Lévy associé à un processus de Lévy $(S_t)_{t\geq 0}$. Alors $(S_t)_{t\geq 0}$ est croissant si et seulement si $A = 0$, $\int_{-\infty}^{0} \nu(dx) = 0$, $\int_0^1 x\,\nu(dx) < \infty$ et $b \geq \int_0^1 x\,\nu(dx)$.*

Pour la démonstration de ce théorème voir Sato [17, théorème 21.5].

Un subordinateur $(S_t)_{t\geq 0}$ a pour transformée de Laplace pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-uS_t}) = \exp\left[t\left(\int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1)\nu(dx) - b_0 u\right)\right]$$

avec $b_0 = b - \int_0^1 x\nu(dx)$. On note pour tout $u \geq 0$,

$$\Psi(u) = \int_0^{\infty} (e^{-ux} - 1)\nu(dx) - b_0 u.$$

La fonction Ψ est appelée exposant de Laplace du processus de $(S_t)_{t\geq 0}$.

Soit $L = (L_t)_t \geq 0$ un processus de Lévy de symbole η et de triplet (A, b, ν) et $S = (S_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur d'exposant de Laplace Ψ. Supposons que $(L_t)_{t\geq 0}$ et $(S_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants. Le processus $X = (X_t)_{t\geq 0} = (L_{S_t})_{t\geq 0}$ est appelé processus subordonné par rapport à $(S_t)_{t\geq 0}$.

Théorème 3.1.8. *Le processus $(X_t)_{t\geq 0} := (L_{S_t})_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathbb{E}(\exp(it\langle X_t, u\rangle)) = \exp(t\Psi(\eta(u))).$$

Démonstration. On note par $C_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Alors l'indépendance de L et S donne

$$\mathbb{E}(f(X_t)) = \mathbb{E}(g(S_t))$$

avec $g(s) = \mathbb{E}(f(L_s))$ pour tout $s \geq 0$. Soit $0 \leq t_1 < t_2$, alors

$$\mathbb{E}(f(X_{t_2} - X_{t_1})) = \mathbb{E}(h(S_{t_1}, S_{t_2}))$$

avec $h(s_1, s_2) = \mathbb{E}(f(L_{t_2} - L_{t_1}))$. Comme S est croissant et à accroissements stationnaires, on a pour tout $s_1 \leq s_2$

$$h(s_1, s_2) = g(s_2 - s_1).$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(f(X_{t_2} - X_{t_1})) = \mathbb{E}(g(S_{t_2} - S_{t_1}) = \mathbb{E}(g(S_{t_2-t_1})) = \mathbb{E}(f(X_{t_2-t_1})).$$

Ce qui montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants. Soit $n \geq 1$, $f_1, ..., f_n$ des fonctions de $C_b(\mathbb{R}^d)$ et soit $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, on définit de manière similaire à g et h, les fonctions g_j et h_j. Il est alors facile de vérifier que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})\right] = \mathbb{E}(G(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n})),$$

où

$$G(s_1, ..., s_n) = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} f_j(L_{t_{j+1}} - L_{t_j})\right] \quad \text{pour tous}\, 0 \leq s_1 < ... < s_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} h_j(S_{t_j}, S_{t_{j+1}})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} g_j(S_{t_{j+1}} - S_{t_j})\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[g_j(S_{t_{j+1}} - S_{t_j})\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[f_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})\right].
\end{aligned}$$

Ceci montre que $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants. Comme il est évident que $(X_t)_{t\geq 0}$ est càdlàg, on en déduit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy. Pour tous $z \leq 0$ et $t \geq 0$, l'exposant de Laplace de S vérifie

$$\mathbb{E}(e^{zS_t}) = \int_0^\infty e^{zs}\, \mathbb{P}_{S_t}(ds) = \exp(t\Psi(z)).$$

Par conséquant, comme $(L_t)_{t\geq 0}$ et $(S_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants, on a pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}(e^{i\langle u, X_t\rangle}) = \int_0^\infty \mathbb{E}(e^{i\langle u, L_s\rangle})\mathbb{P}_{S_t}(ds) = \int_0^\infty e^{s\eta(u)}\mathbb{P}_{S_t}(ds) = \exp(t\Psi(\eta(u))).$$

□

Théorème 3.1.9. *Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur et désignons par $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. Alors le mouvement brownien subordonné $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ possède la propriété de couplage.*

Démonstration. Soit x et $y \in \mathbb{R}^d$ tels que $x \neq y$ et définissons l'hyperplan

$$H_{x,y} = \left\{ u \in \mathbb{R}^d : \langle u - (x+y)/2, x - y \rangle = 0 \right\}.$$

L'application $R_{x,y} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ définie pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ par

$$R_{x,y}z = z - 2\frac{\langle z - (x+y)/2, x-y \rangle}{|x-y|^2}$$

est la réflection par rapport à l'hyperplan $H_{x,y}$. Soit $(B_t^x)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien issu de x et considérons le temps d'arrêt

$$\tau_{x,y} = \inf\left\{t > 0 : B_t^x \in H_{x,y}\right\}$$

On définit le processus $(\hat{B}_t^y)_{t\geq 0}$ par

$$\hat{B}_t^y = \begin{cases} R_{x,y}B_t^x, & \text{si } t \leq \tau_{x,y}; \\ B_t^x, & \text{si } \ t > \tau_{x,y}, \end{cases}$$

qui correspond à la réflection de B_t^x avant $\tau_{x,y}$ et coincide avec B_t^x pour $t > \tau_{x,y}$. Le processus $(\hat{B}_t^y)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien issu de y (voir [8]). Il est alors évident que $\tau_{x,y}$ est le temps de couplage des deux processus $(B_t^x)_{t\geq 0}$ et $(\hat{B}_t^y)_{t\geq 0}$. Par suite, comme

$$\tau_{x,y} < \infty \quad p.s$$

le mouvement brownien possède la propriété de couplage. La démonstration sera complète si on démontre que temps de couplage

$$T_{x,y} = \inf\{t > 0 : \hat{B}_{S_t}^y = B_{S_t}^x\}$$

des processus $(B_{S_t}^x)_{t\geq 0}$ et $(\hat{B}_{S_t}^y)_{t\geq 0}$ est fini. Pour cela, on observe que $T_{x,y}$ coincide avec

$$K_{x,y} = \inf\left\{t > 0 : S_t \geq \tau_{x,y}\right\}.$$

En effet, soit $t > 0$ tel que $S_t \geq \tau_{x,y}$, i.e. $K_{x,y} \leq t$. Comme $\hat{B}_t^y = B_t^x$ pour tout $t \geq \tau_{x,y}$ alors $\hat{B}_{S_t}^y = B_{S_t}^x$. On a donc $T_{x,y} \leq t$ et puisque $t \geq K_{x,y}$ a été choisi arbitrairement, on obtient $T_{x,y} \leq K_{x,y}$. Reciproquement, supposons

$K_{x,y} > T_{x,y}$. Par définition de la borne inférieure d'un ensemble, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$ tel que $S_{t_\epsilon} < T_{x,y}$. On aura alors $S'_{N_{t_\epsilon}} \neq S''_{N_{t_\epsilon}}$, i.e. $\hat{B}^y_{t_\epsilon} \neq B^x_{t_\epsilon}$. Dans ce cas, on aura $T_{x,y} \geq t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $T_{x,y} \geq K_{x,y}$. Or pour presque tout ω, $\tau_{x,y}(\omega)$ est fini. Comme le subordinateur tend vers l'infini lorsque $t \to \infty$, il existe un temps $\tau_0(\omega) < \infty$ vérifiant $S_t(\omega) \geq \tau_{x,y}(\omega)$ pour tout $t \geq \tau_0(\omega)$. Or par définition de $T_{x,y}$, on a $T_{x,y} \leq \tau_0 < \infty$.

□

Théorème 3.1.10. *Pour tout $0 < \alpha < 2$, le processus α-stable invariant par rotations admet la propriété de Liouville, i.e. toute fonction α-harmonique bornée sur $\mathbb{R}^d$ est constante.*

Démonstration. Soit $0 < \alpha < 2$ et soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur $\alpha/2$-stable. Un tel subordinateur existe. En effet, comme $0 < \alpha/2 < 1$ la proposition 14 nous donne que $\int_0^1 x\nu(dx) < \infty$. De plus, d'après le théorème 8, on a $A = 0$. Pour construire $(S_t)_{t\geq 0}$, il suffit alors de prendre un réel b et une mesure de lévy ν tels que

$$b = \int_0^1 x\nu(dx) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \nu(dx) = 0.$$

L'équation (2.13) nous permet d'observer que pour tout f ν-intégrable,

$$\int_0^\infty f(x)dx = \alpha\nu(]1,\infty[) \int_0^\infty f(r) r^{-1-\alpha} dr.$$

En utilisant l'équation (2.16) et en prenant $f : r \mapsto e^{-ur} - 1$, on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ tel que l'exposant de Laplace Ψ du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifie pour tout $u \geq 0$

$$\Psi(u) = -cu^{\alpha/2}.$$

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ est un processus α-stable invariant par rotations. En effet, comme $(B_t)_{t\geq 0}$ a pour symbole de Lévy $\eta(u) = -\frac{1}{2}|u|^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, le théorème 3.1.8 nous permet d'affirmer que $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ à pour symbole de Lévy

$$u \mapsto -c\,|u|^{\alpha/2}.$$

On en déduit grâce au théorème 2.3.13 que $(B_{S_t})_{t\geq 0}$ est α-stable invariant par rotations. La proposition 3.1.9 permet d'affimer que le processus possède la propriété de couplage. Ce qui entraîne que toute fonction α-harmonique bornée sur $\mathbb{R}^d$ est constante.

□

3.2 Une condition suffisante

Nous allons montrer dans cette section que l'on peut déduire de la propriété de couplage d'une marche aléatoire celle d'un processus de Lévy. Dans toute la suite, on note par $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ le processus de Poisson composé issu de $z \in \mathbb{R}^d$ de mesure de Lévy ν. Pour tout $t \geq 0$,

$$Z_t = z + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

avec $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$ et une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de même loi $\nu_0 = \frac{\nu}{\lambda}$ et indépendant de $(N_t)_{t\geq 0}$. Il est connu (voir par exemple [2]) que le générateur infinitésimal du processus de Poisson est donnée pour tout $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$

$$Af(\cdot) = \lambda \int (f(\cdot + u) - f(u))\nu_0(du).$$

Pour tout $t \geq 0$ la loi de Z_t est

$$p_t = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k \nu_0^{*k}}{n!}. \tag{3.3}$$

Dans toute la suite, on notera par $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire définie pour tout $n \geq 1$ par $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

et désignerons par $(p_t(z, \cdot))_{t\geq 0}$ la loi de transition du processus Z.

Définition 3.2.1. On dit que la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ possède la propriété de couplage si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_n \in \cdot)\|_{var} = 0.$$

Proposition 3.2.2. *Pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\|p_t(x, \cdot) - p_t(y, \cdot)\|_{var} \leq e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \|\mathbb{P}(x + S_n \in \cdot) - \mathbb{P}(y + S_n \in \cdot)\|_{var}.$$

Démonstration. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ la famille de transition associée au processus Z et soit $z \in \mathbb{R}^d$. On pose pour tout $n \geq 1$ et $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$

$$Q_n f(z) = \mathbb{P}_{S_n+z}(f).$$

On obtient alors grâce à (3.3) :

$$\begin{aligned}
\|p_t(x,\cdot) - p_t(y,\cdot)\|_{var} &= \sup_{f\in B_b(\mathbb{R}^d);\|f\|\leq 1} |T_t f(x) - T_t f(y)| \\
&= e^{-\lambda t}\left|\sup_{f\in B_b(\mathbb{R}^d);\|f\|\leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n(\delta_x * \nu_0^{*n}(f) - \delta_y * \nu_0^{*n}(f))}{n!}\right| \\
&= e^{-\lambda t}\left|\sup_{f\in B_b(\mathbb{R}^d);\|f\|\leq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n(Q_n f(x) - Q_n f(y))}{n!}\right| \\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\left|\sup_{f\in B_b(\mathbb{R}^d);\|f\|\leq 1} (Q_n f(x) - Q_n f(y))\right| \\
&\leq e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\|\mathbb{P}(x+S_n\in\cdot) - \mathbb{P}(y+S_n\in\cdot)\|_{var}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.3. *Supposons que pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C(x,y) > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$\|\mathbb{P}(x+S_n\in\cdot) - \mathbb{P}(y+S_n\in\cdot)\|_{var} \leq \frac{C(x,y)}{\sqrt{n}}. \tag{3.4}$$

Alors, on a :

$$\|p_t(x,\cdot) - p_t(y,\cdot)\|_{var} \leq 2e^{-\lambda t}(1-\delta_{x,y}) + \frac{\sqrt{2}C(x,y)(1-e^{-\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}} \tag{3.5}$$

où $\delta_{x,y}$ désigne le symbole de Kronecker.

Démonstration. Soit x, $y \in \mathbb{R}^d$, il est évident que

$$\|\mathbb{P}(x+S_0\in\cdot) - \mathbb{P}(y+S_0\in\cdot)\|_{var} = \|\delta_x - \delta_y\|_{var} = 2(1-\delta_{x,y}).$$

D'après la proposition 3.2.3 et l'inégalité (3.4) on a :

$$\|p_t(x,\cdot) - p_t(y,\cdot)\|_{var} \leq e^{-\lambda t}\left[2(1-\delta_{x,y}) + C(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!\sqrt{n}}\right]. \tag{3.6}$$

De plus, l'inégalité de Jensen donne en utilisant la fonction concave $z \mapsto z^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!\sqrt{n}} &\leq (e^{\lambda t} - 1) \left(\frac{(\lambda t)^n}{n \cdot n!} \frac{1}{(e^{\lambda t} - 1)} \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda t} \right)^{1/2} \sqrt{2} \left(e^{\lambda t} - 1 - \lambda t \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}(e^{\lambda t} - 1)}{\sqrt{\lambda t}}.
\end{aligned}$$

En appliquant cette inégalité à (3.6), on obtient (3.5).

□

Proposition 3.2.4. *Si la marche aléatoire $S = (S_n)_{n \geq 0}$ vérifie la propriété de couplage alors le processus de Poisson composé $(Z_t)_{t \geq 0}$ la vérifie aussi.*

Démonstration. Soit $(Y''_k)_{k \geq 1}$ et $(Y'_k)_{k \geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées, de même loi que $(Y_k)_{k \geq 1}$ et indépendantes de $(N_t)_{t \geq 0}$. Supposons que S possède la propriété de couplage alors pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$, il existe deux marches aléatoires $S' = \left(x + \sum_{k=1}^{n} Y'_k \right)_{n \geq 0}$ et $S'' = \left(y + \sum_{k=1}^{n} Y''_k \right)_{n \geq 0}$ telles que leur temps de couplage

$$T^S_{x,y} = \inf\{k \geq 1 : S'_k = S''_k\} < \infty.$$

Sans perte de généralité, on suppose que $S'_k = S''_k$ pour tout $k \geq T^S_{x,y}$. On définit alors $(Z'_t)_{t \geq 0}$ et $(Z''_t)_{t \geq 0}$ les processus de Poisson composés issus respectivement des marches aléatoires S' et S''. Pour montrer que Z possède la propriété de couplage, il suffit de montrer que le temps d'arrêt

$$T^Z_{x,y} = K_{x,y} = \inf\{t > 0 : Z'_t = Z''_t\} < \infty.$$

On remarque que

$$T^Z_{x,y} = \inf\{t > 0 : N_t \geq T^S_{x,y}\}.$$

En effet, soit $t > 0$ tel que $N_t \geq T^S_{x,y}$, i.e. $K_{x,y} \leq t$. Comme $S'_k = S''_k$ pour tout $k \geq T^S_{x,y}$ alors $S'_{N_t} = S''_{N_t}$ et par construction $Z'_{N_t} = Z''_{N_t}$. On en déduit que $T^Z_{x,y} \leq t$ et puisque $t \geq K_{x,y}$ a été choisi arbitrairement, on obtient

$T^Z_{x,y} \leq K_{x,y}$. Reciproquement, supposons $K_{x,y} > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_\epsilon < K_{x,y} - \epsilon$ et $N_{t_\epsilon} \leq T^S_{x,y} - 1$. On aura alors $S'_{N_{t_\epsilon}} \neq S''_{N_{t_\epsilon}}$, i.e. $Z'_{t_\epsilon} \neq Z''_{t_\epsilon}$. Dans ce cas, on aura $T^Z_{x,y} \geq t_\epsilon > K_{x,y} - \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $T^Z_{x,y} \geq K_{x,y}$. Finalement, comme $T^S_{x,y}$ est fini presque surement et puisque le processus de Poisson tend vers l'infini quand $t \to \infty$, pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $t_0(\omega) < \infty$ tel que $N_t(\omega) \geq T^S_{x,y}(\omega)$, pour tout $t \geq t_0(\omega)$. On en déduit alors que $T^Z_{x,y} \leq t_0(\omega) < \infty$. Ce qui démontre la proposition.

□

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de triplet (A, b, ν). Dans la suite, nous considérerons une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$ notée ν_1 dépendante de la mesure de Lévy ν. Lorsque $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$, nous poserons $\nu = \nu_1$. Lorsque $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$, on pose

$$\nu_1 : A \mapsto \nu(A \cap B^c(0,1)) \quad \text{pour tout} A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Soit la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

où $(Y_k)_{k\geq 0}$ est une suite de variable aléatoire indépendantes identiquement distribuées de loi $\frac{\nu_1}{\nu_1(\mathbb{R}^d)}$.

Théorème 3.2.5. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de mesure de Lévy $\nu \neq 0$. Si la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété de couplage alors X la vérifie aussi.*

Démonstration. Tout d'abord supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est de triplet $(0, 0, \nu)$ avec $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Dans ce cas le processus est un processus de Poisson composé. D'après la proposition 3.2.4, ce processus de Poisson composé possède donc la propriété de couplage.Supposons maintenant que $(X_t)_{t\geq 0}$ a pour triplet de Lévy (A, b, ν). Alors pour tout $t \geq 0$, on décompose X_t en deux parties indépendantes

$$X_t = X'_t + X''_t$$

où $X' = (X'_t)_{t\geq 0}$ est le processus de Poisson composé de triplet $(0, 0, \nu_1)$ et $X'' = (X''_t)_{t\geq 0}$ est le processus de triplet $(A, b, \nu - \nu_1)$. Notons pour tout $t \geq 0$, par T'_t et T''_t les opérateurs de transition associés respectivement à X' et X'' et soit $(p'_t)_{t\geq 0}$ et $(p''_t)\geq 0$ leurs lois de transition. Il est évident que $T_t = T''_t T'_t$ et que $(T''_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe de contraction sur $B_b(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\|p_t(x,\cdot) - p_t(y,\cdot)\|_{var} = \sup_{\|f\|\leq 1} |T_t f(x) - T_t f(y)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|f\|\leq 1} |T_t''T_t'f(x) - T_t''T_t'f(y)| \\
&\leq \sup_{\|f\|\leq 1} |T_t'f(x) - T_t'f(y)| \\
&\leq \|p_t'(x,\cdot) - p_t'(y,\cdot)\|_{var}\,.
\end{aligned}
$$

Ce qui revient à vérifié que le processus de Poisson composé possède la propriété de couplage.

□

Bibliographie

[1] D. Aldous and H. Thorisson. Shift-coupling. *Stoch. Proc. Appl.*, 1993.

[2] D. Applebaum. *Lévy process and stochastic calculus*. Cambridge, 2009.

[3] D. Armitage and J. Gardiner. *Classical potential theory*. Springer, 2001.

[4] V. Bogachev. *Measure Theory,Vol 1 and 2*. Springer, 2007.

[5] K. Bogdan. The boundary harnack principle for the fractional laplacian. *Studia Mathematica*, 1997.

[6] K. Bogdan, K. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, and Z. Vondracek. *Potential theory of stable processes and its extension*. Springer, 2009.

[7] K. Bogdan and T. Byczkowski. Potential theory of the alpha stable schrodinger operator on bounded lipchitz domain. *Studia Mathematica*, 2009.

[8] B. Bottcher, R. Schilling, and J. Wang. Constructions of coupling processes for levy processes. *arXiv*, 2010.

[9] W. Chen, X. Cui, R. Zhuo, and Z. Yuan. A liouville theorem for the fractional laplacien. *arXiv*, 2014.

[10] D. Cohn. *Measure Theory*. Birkhauser, 1980.

[11] J. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. springer, 1984.

[12] D. Gilbarg and N. Trundinger. *Eliptic partial differential equation of second order*. springer, 2001.

[13] T. Ligget. *Continuous-time Markov processes : an introduction*. American Mathematical Soc., 2010.

[14] T. Lindvall. *Lecture on the Coupling Method*. DOVER PUBLICATION, INC., 1992.

[15] S. Port and C. Stone. *Brownian motion and classical potential theory.* Academic press, 1978.

[16] N. Privault. Potential theory in classical probability, 2008.

[17] K. Sato. *Levy processes and infinitely divisible distribution.* Cambridge, 1999.

[18] R. Schilling and J. Wang. On coupling property of lévy processes. *arXiv*, 2011.

[19] D. Strook. *Probability theory,an analitic view.* Cambridge, 2010.

[20] F. Wang. Coupling, convergence rates of markov processes and weak poincaré inequalities. *SCIENCE CHINA Mathematic*, 2002.