

Tema 3. ESPACIO DE PROBABILIDAD: DEFINICIÓN AXIOMÁTICA Y PROPIEDADES BÁSICAS DE LA PROBABILIDAD

En este tema se va a estudiar lo que es un espacio de probabilidad para lo cual habrá que definir previamente lo que es la probabilidad. En particular se van a estudiar la definición clásica, frecuentista y axiomática de la probabilidad así como sus propiedades básicas. Previo a ello se van a introducir una serie de conceptos necesarios para el tema.

- 1 Conceptos previos.
- 2 Definición axiomática de probabilidad.
- 3 Propiedades básicas de la probabilidad.

■ Suceso

Es cualquier resultado del experimento. Está compuesto por uno o más sucesos elementales.

■ Suceso seguro (Ω)

Es el formado por todos los resultados posibles del experimento, es decir, el propio espacio muestral Ω .

■ Suceso imposible (\emptyset)

Es aquel que no contiene ningún resultado, es decir, el conjunto vacío \emptyset .

Ejemplo

Se considera el experimento del lanzamiento de un dado y la observación del número que aparece. Indica el espacio muestral. Indica un suceso elemental, otro compuesto y uno imposible.

Operaciones con sucesos

■ Unión ($A \cup B$)

Si A y B son dos sucesos, el suceso unión $A \cup B$ es el conjunto de todos los sucesos elementales de A y los de B .

Si A y B son dos sucesos, el suceso intersección $A \cap B$ es el formado por todos los sucesos elementales que pertenecen simultáneamente a A y B .

2 Diferencia ($A - B$): Si A y B son dos sucesos, el suceso diferencia es el formado por todos los sucesos elementales de A que no son sucesos de B . Se tiene, por tanto, que $A - B = A - A \cap B = A \cap \bar{B}$.

3 Complementación (\bar{A} o A^c): Dado un suceso A , se define el complementario de dicho suceso, como el suceso formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles** si al ocurrir uno no puede ocurrir el otro, es decir $A \cap B = \emptyset$.

Si A y B son dos sucesos, se dice que el suceso A **está contenido** en el suceso B , y se denota por $A \subseteq B$, si todos los sucesos elementales de A también están en B .

Propiedades: Con las operaciones anteriores, puede demostrarse que se verifican las siguientes propiedades.

	$\bar{\emptyset} = \Omega$	$\bar{\Omega} = \emptyset$
	Unión	Intersección
Idempotente	$A \cup \bar{A} = \Omega$ $A \cup A = A$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cap A = A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Leyes de De Morgan	$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

Sean A, B, C tres sucesos de un espacio muestral Ω . Expresar los siguientes sucesos en términos de ellos:

- 1 *Los tres sucesos ocurren.*
- 2 *No ocurre ninguno de los tres.*
- 3 *Exactamente ocurre uno.*
- 4 *Exactamente ocurren dos.*
- 5 *Ocurren A y B o C , pero no ambos.*
- 6 *Ocurre B o C pero no A .*

Es el conjunto formado por todos los subconjuntos de Ω :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A/A \subseteq \Omega\} \text{ o, equivalentemente, } A \in \mathcal{P}(\Omega) \Leftrightarrow A \subseteq \Omega.$$

Cualquier subconjunto de $\mathcal{P}(\Omega)$ se denomina una clase de conjuntos de Ω :

$$C \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$

Una clase de conjuntos C es cerrada para una determinada operación (unión, intersección,...) si al efectuar esa operación con elementos de C , el conjunto resultante está también en C .

- Álgebra de conjuntos de Ω

Una clase no vacía de conjuntos de Ω ($C \subseteq \mathcal{P}(\Omega), C \neq \emptyset$) tiene estructura de álgebra si:

- Es cerrada para uniones finitas: $A_1, \dots, A_n \in C \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in C$.
- Es cerrada para la formación de complementarios: $A \in C \Rightarrow \bar{A} \in C$.

Propiedades: Si $C \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un álgebra de conjuntos de Ω , se tiene:

- Es cerrada para intersecciones finitas: $A_1, \dots, A_n \in C \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in C$.
- $\Omega \in C, \emptyset \in C$.
- Es cerrada para diferencias: $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A_1 - A_2 \in C$.

- σ -Álgebra de conjuntos de Ω

Una clase no vacía de conjuntos de Ω ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{A} \neq \emptyset$) tiene estructura de σ -álgebra si:

- Es cerrada para uniones numerables: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- Es cerrada para la formación de complementarios: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$.

Propiedades: Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un σ -álgebra de conjuntos de Ω , se tiene:

- Es cerrada para intersecciones finitas: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- $\Omega \in \mathcal{A}, \emptyset \in \mathcal{A}$.
- Es un álgebra, es decir, es cerrada para uniones e intersecciones finitas y para diferencias.

■ (Ω, \mathcal{A}) espacio medible

Todo par (Ω, \mathcal{A}) formado por un conjunto arbitrario y una clase $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ con estructura de σ -álgebra se denomina un **espacio medible**.

Por lo tanto, un par (Ω, \mathcal{A}) , donde Ω es el espacio muestral asociado a un experimento y \mathcal{A} es una clase de subconjuntos de Ω con estructura de σ -álgebra, que contiene a todos los sucesos de interés en el experimento, es un conjunto medible y tiene sentido cuantificar la incertidumbre acerca de la posibilidad de ocurrencia de cada suceso mediante una medida, la **probabilidad**.

Definición frecuentista de probabilidad

Sea un experimento aleatorio con espacio muestral arbitrario, Ω , y que se puede repetir indefinidamente bajo idénticas condiciones.

Definición

Se define la **frecuencia relativa** de un suceso $A \subseteq \Omega$ en N repeticiones, bajo idénticas condiciones, como la fracción:

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$$

donde N_A es el número de veces que ocurre A en las N repeticiones del experimento.

En este caso, la probabilidad de cualquier suceso A se define de la siguiente forma:

$$P : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A).$$

Propiedades:

- 1 Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ entonces $P(A) \geq 0$.
- 2 $P(\Omega) = 1$.
- 3 Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)$, es cualquier sucesión numerable de sucesos incompatibles, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Ejemplo

He lanzado una moneda una serie de veces y he obtenido los siguientes resultados:

<i>n^o de lanzamientos</i>	<i>10</i>	<i>100</i>	<i>1000</i>	<i>10000</i>
<i>n^o de caras</i>	<i>6</i>	<i>47</i>	<i>517</i>	<i>4986</i>

Determina las frecuencias relativas del suceso $A = \{\text{salir cara}\}$ y define, a partir de ellas, su probabilidad.

Sea (Ω, \mathcal{A}) un espacio medible. Se define la probabilidad como una función $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica los siguientes axiomas:

- 1 Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $P(A) \geq 0$.
- 2 $P(\Omega) = 1$.
- 3 Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, es cualquier sucesión infinita numerable de sucesos incompatibles, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j)$ entonces

Nota: La definición axiomática de la probabilidad generaliza las dos definiciones anteriores ya que ambas cumplen los tres axiomas considerando como σ -álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

A $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ se le denomina **espacio de probabilidad** y $P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, se interpreta como la probabilidad de que ocurra el suceso A .

vi) Subaditividad finita: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

En general, sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

vii) Subaditividad numerable: Dada una colección numerable de sucesos

$A_i \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

viii) Principio de inclusión-exclusión: $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1 < i_2}}^{n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_1 < i_2 < i_3}}^{n-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

La propiedad anterior para tres sucesos sería: Si $A, B, C \in \mathcal{A}$ entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

ix) Desigualdad de Boole. Dados $A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$P(A \cup B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B})$$



Ejemplo

Se sabe que la probabilidad de que ocurra el suceso A es de 0.6, la de que ocurra el suceso B es de 0.7 y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es de 0.4. Se pide calcular:

- a) *La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos.*
- b) *La probabilidad de no ocurra el suceso A .*
- c) *La probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el A .*