Examen de Geometría I

Convocatoria Ordinaria - 15 de enero de 2020

1. **[3 puntos].** Razónese si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

   a) Dado $p(x) \in \mathbb{R}_4[x]$ distinto del polinomio nulo, existe una base ordenada B de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que las coordenadas de $p(x)$ en B son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es inyectiva si y sólo si f^t es inyectiva.

2. **[4 puntos].** Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera el endomorfismo $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base usual es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & \lambda - 1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda^2/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (i) Hallar $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ y $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$, según los valores del parámetro λ. Decidir si f_λ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

   (ii) Obtener, según los valores de λ, una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigcap \mathrm{Im}(f_\lambda)$ y de $\mathrm{Ker}(f_\lambda) + \mathrm{Im}(f_\lambda)$. ¿Para qué valores $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f_\lambda) \bigoplus \mathrm{Im}(f_\lambda)$?.

   (iii) Para los valores de λ que sea posible, encontrar bases de $\mathbb{R}^3$ tales que la matriz asociada a f_λ en esas bases sea la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **[3 puntos].** Calcúlese un endomorfismo f de $M_2(\mathbb{R})$ que verifique las siguientes tres propiedades:

   - $f \circ f = f$,
   - $\mathrm{Im}\ f^t = \mathrm{an}(S_2(\mathbb{R}))$, y
   - $\mathrm{Ker}\ f^t = \mathrm{an}(A_2(\mathbb{R}))$,

   donde $S_2(\mathbb{R})$ y $A_2(\mathbb{R})$ son los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente, del espacio vectorial real $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas 2×2.

Duración: 3 horas.