

---

**Cálculo II**  
**(Grupo 1º A)**  
**Relación de Ejercicios nº 7**

---

**Ejercicio 7.1:** Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones dadas por  $f(x) = 3x$  y por  $g(x) = x^2$ .

**Ejercicio 7.2:** Calcular mediante integración, el área de un triángulo y de un trapecio.

**Ejercicio 7.3:** Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función  $f(x) = x^3$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$ .

**Ejercicio 7.4:** Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación  $f(x) = \frac{x-2}{(x-4)(x+2)}$ , el eje de abscisas y las rectas  $x = -1$  y  $x = 3$ .

**Ejercicio 7.5:** Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación  $y^2 - 2x = 0$  y la recta que une los puntos  $(2, -2)$  y  $(4, 2\sqrt{2})$ .

**Ejercicio 7.6:** Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación  $f(x) = 4x - x^2$  y el eje de abscisas.

**Ejercicio 7.7:** Calcular el área de los recintos limitados por la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  y la recta de ecuación  $x + y = 1$ .

**Ejercicio 7.8:** Calcular el área comprendida entre las curvas  $x^2 + y^2 = 2$  y  $2y = x^2 + 1$ .

**Ejercicio 7.9:** Calcular el área de la región acotada delimitada por la gráfica de la función  $f(x) = x^2 \ln x$ , la recta  $x = e$ , y el eje  $OX$ .

**Ejercicio 7.10:** Calcular el área limitada por la curva  $y(x) = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ , los ejes coordenados y la recta  $x = a$ , siendo  $a > 0$ .

**Ejercicio 7.11:** Calcular el área de cada una de las regiones del plano que delimitan conjuntamente las funciones  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  y  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$  en el primer cuadrante.

**Ejercicio 7.12:** Calcular el área de las dos partes en que la parábola  $y^2 = 4x$  divide al círculo  $x^2 + y^2 = 8$ .

**Ejercicio 7.13:** Calcular el valor de  $\lambda$  para el cual la curva  $y = \lambda \cos x$  divide en dos partes de igual área a la región limitada por la curva  $y = \sin x$  y el eje de abscisas cuando  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Ejercicio 7.14:** Calcular el área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

**Ejercicio 7.15:** Calcular el área comprendida entre las elipses  $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$  y  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

**Ejercicio 7.16:** Calcular el área encerrada por el bucle de la curva de ecuación  $y^2 = x(x-1)^2$ .

**Ejercicio 7.17:** Dados  $a > 0$  y  $b > 0$ , calcular el área encerrada por la curva  $x^4 - ax^3 + by^2 = 0$ .

**Ejercicio 7.18:** Sea  $a > 0$ . Calcular el área comprendida entre el esferoide  $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ , y su asíntota vertical.

**Ejercicio 7.19:** Calcular la longitud de la curva  $y(x) = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$  entre  $x = 1$  y  $x = 2$ .

**Ejercicio 7.20:** Calcular la longitud de arco de la curva  $y(x) = \sqrt{8} \ln x$  entre los puntos  $(1,0)$  y  $(8, \sqrt{8} \ln 8)$ .

**Ejercicio 7.21:** Hallar la longitud de arco de la curva  $y(x) = 2\sqrt{x}$ , entre los puntos  $x = 1$  y  $x = 2$ .

**Ejercicio 7.22:** Calcular la longitud de arco de la curva  $y(x) = \ln x$ , entre los puntos  $x = \sqrt{3}$  y  $x = \sqrt{8}$ .

**Ejercicio 7.23:** Sea  $a > 0$ . Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica de ecuación  $ay^2 = x^3$  comprendido entre el origen de coordenadas y el punto  $x = 5a$ .

**Ejercicio 7.24:** Calcular la longitud de arco de la curva dada por la ecuación  $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$ .

**Ejercicio 7.25:** Sea  $a > 0$ . Hallar la longitud de arco de la catenaria de ecuación  $y(x) = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  entre el origen de coordenadas y el punto  $(x_0, y_0)$ .

**Ejercicio 7.26:** Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar sobre el eje  $OX$  la superficie limitada por parábola  $y = ax - x^2$  (siendo  $a > 0$ ) y el eje de abscisas.

**Ejercicio 7.27:** Calcular el volumen del sólido obtenido al girar sobre el eje  $OX$ , la región limitada por la gráfica de curva  $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ , el eje de abscisas en el intervalo  $[0, \pi]$ .

**Ejercicio 7.28:** Para cada  $x > 0$ , sea  $V(x)$  el volumen del sólido obtenido al girar sobre el eje  $OX$ , la superficie determinada por la gráfica de la función  $y(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$  cuando  $t$  recorre el intervalo  $[0, x]$ . Determinar el valor de  $a > 0$  tal que  $V(a) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} V(x)$ .

**Ejercicio 7.29:** Un sólido de revolución está generado por la rotación alrededor del eje  $OX$ , de la superficie determinada por gráfica de la función positiva  $y = f(x)$  sobre el intervalo  $[0, a]$ . Si para  $a > 0$  el volumen de dicho sólido es  $a^3 + a$ , ¿Quién es la función  $f$ ?

**Ejercicio 7.30:** Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje  $OY$  la superficie de la región acotada determinada por las parábolas  $y = ax^2$  e  $y = b - cx^2$ , siendo  $a, b, c > 0$ .

**Ejercicio 7.31:** Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar la curva  $y^2 = 8x$ , para valores de  $x$  en el intervalo  $[0, 2]$  cuando la curva gira sobre: (i) el eje  $OX$ , (ii) el eje  $OY$ , (iii) la recta  $x = 2$ .

**Ejercicio 7.32:** Determinar el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje  $OX$  la región acotada determinada por las parábolas  $y^2 = 2px$ , y  $x^2 = 2py$ , siendo  $p > 0$ .

**Ejercicio 7.33:** Calcular el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje  $OX$  la región acotada limitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \cos(x)$  en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Ejercicio 7.34:** Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada limitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ , y  $g(x) = 4 - x$ , cuando dicha región gira alrededor de la recta  $y = -1$ .

**Ejercicio 7.35:** Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje  $OX$  la región que en el primer cuadrante delimitan las curvas  $y = \frac{1}{x^2}$  e  $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ , y las rectas  $x = 0$  e  $y = e$ .

**Ejercicio 7.36:** Calcular el volumen generado cuando la superficie acotada limitada por la parábola de ecuación  $y = 4x - x^2$  y el eje  $OX$ , se hace girar alrededor de la recta  $y = 6$ .

**Ejercicio 7.37:** Calcular el volumen del toro. Esto es el sólido de revolución generado por un círculo de radio  $r$  que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano del círculo, a una distancia  $a$  del centro del círculo, con  $a > r$ .

**Ejercicio 7.38:** Calcular la superficie de la esfera de radio  $r$ .

**Ejercicio 7.39:** Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva  $y = \sqrt{1 - x^2}$  alrededor del eje  $OX$  entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .

**Ejercicio 7.40:** Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva  $8y^2 = x^2 - x^4$  alrededor del eje  $OX$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

**Ejercicio 7.41:** Calcular el área lateral de la superficie de revolución engendrada al girar la curva  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  alrededor del eje  $OX$  entre  $x = -1$  y  $x = 1$ .

**Ejercicio 7.42:** Calcular el área lateral de superficie de revolución engendrada al girar la curva  $(x - 4)^2 + y^2 = 1$  alrededor del eje  $OX$ .

**Ejercicio 7.43:** Calcular el área lateral de superficie la superficie de revolución engendrada por la curva  $y^2 = 4x$  cuando gira alrededor del alrededor del eje  $OX$  en el intervalo  $[0, 3]$ .