GEOMETRÍA I

GRADO DE MATEMÁTICAS
DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS e INFORMÁTICA
26 de enero de 2021 online

Preguntas test: (2 puntos)

1.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ una aplicación lineal

a. Existe la posibilidad de que $\ker(f^t) = \mathrm{Im}(f)$

b. Existe la posibilidad de que $an(\ker(f^t)) = an(\mathrm{Im}(f))$

c. Ninguna de las otras respuestas es correcta

d. Existe la posibilidad de que $\mathrm{Im}(f^t) = an(\ker(f))$

e. Existe la posibilidad de que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$

2.- Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de V de forma que $\overline{B} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ con $r < n$ es una base del núcleo de f. Entonces:

a. $\{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$ es siempre una base de V

b. $\{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$ es una base de V'

c. $\{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$ es un sistema de generadores de V'

d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

e. $\{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente

3.- Sean $f, g : V \to V'$ aplicaciones lineales. El rango de la aplicación suma, $r(f+g)$, cumple:

a. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

b. $r(f+g) = r(f) + r(g)$

c. $r(f+g) = r(f)$

d. $r(f+g) = r(g)$

e. $r(f+g) \leq r(f) + r(g)$

4.- Si U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, y W_1, W_2 son complementarios de U en $\mathbb{R}^3$, es cierto que:

a. Si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, entonces $W_1 = W_2$

b. Si $\dim(U) = 2$, y $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, entonces $W_1 = W_2$

c. Si $\dim(U) = 1$, y $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, entonces $W_1 = W_2$

d. W_1 y W_2 coinciden

e. W_1 y W_2 nunca coinciden

5.- Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de un espacio vectorial V y $f : V \to V$ aplicación lineal tal que
$f(u_1 + u_2) = u_1$, $f(u_2 + u_3) = u_2$, $f(u_1 + 2u_2 + u_3) = u_1 + u_2$

Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

a. Existe un único endomorfismo de V cumpliendo los requisitos que cumple f

b. Ninguna de las otras respuesta es correcta

c. No existe ninguna aplicación lineal cumpliendo las requisitos del enunciado

d. La existencia de f depende de cuál sea el espacio vectorial V

e. Existen infinitos endomorfismos de V cumpliendo lo mismo que f

6.- Sea V un espacio vectorial finitamente generado y supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo que satisface que $f \circ f = 0$.

Decide cual de las siguientes afirmaciones es cierta.

a. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

b. Necesariamente $f = 0$

c. Si $v \in \mathrm{Im}(f)$ entonces $f(v) = v$

d. $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$

e. $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$

7. Sea $S = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$

a. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$

b. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ si y solamente si $e_{n+1} = 0$

c. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ pero puede que no sea base de $\mathbb{R}^n$

d. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{R}^n$ si y solamente si $e_{n+1} = 0$, pero podría no ser base de $\mathbb{R}^n$

e. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta.

8. Sea $V(K)$ un espacio vectorial finitamente generado, $B, \overline{B}$ dos bases (ordenadas) de $V(K)$, $B^*, \overline{B}^*$ sus bases duales (incluidas en $V^*(K)$) y $B^{**}, \overline{B}^{**}$ las duales de las anteriores (incluidas en $V^{**}(K)$).

a. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta.

b. La única aplicación lineal $f : V \to V^*$ que aplica ordenadamente los elementos de la base B en la base B^*, es igual a: la única aplicación lineal $\bar{f} : V \to V^*$ que aplica ordenadamente los elementos de la base $\overline{B}$ en la base $\overline{B}^*$

c. La única aplicación lineal $F : V \to V^{**}$ que aplica ordenadamente los elementos de la base B en la base B^{**}, es igual a: la única aplicación lineal $\bar{F} : V \to V^{**}$ que aplica ordenadamente los elementos de la base $\overline{B}$ en la base $\overline{B}^{**}$

d. Existe un único isomorfismo vectorial de $V(K)$ en $V^*(K)$

e. Existe un único isomorfismo vectorial de $V(K)$ en $V^{**}(K)$

9. Sean V y V' espacios vectoriales con $\dim(V) = n$ y $\dim\left(V'\right) = m$. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y sean $n(f)$ y $n(f^t)$ las nullidades de f y de la aplicación traspuesta f^t de f.

Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a. $n(f) + n(f^t) = n + m$

b. $n(f) + n = n(f^t) + m$

c. Ninguna de las fórmulas es correcta en general

d. $n(f) + m = n(f^t) + n$

e. $n(f) + n(f^t) = máx\{n. m\}$

10. Sea $V(K)$ un espacio vectorial finitamente generado, $\psi, \phi \in V^*$ y $\ker(\psi)$, $\ker(\phi)$ los núcleos de ϕ y ψ respectivamente:

a. Si $\ker(\phi) \subset \ker(\psi)$ entonces $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente

b. Si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente entonces $\ker(\phi) = \ker(\psi)$

c. Si $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente entonces $\ker(\phi) \subset \ker(\psi)$

d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

e. Si $\ker(\phi) \not\subset \ker(\psi)$ entonces $\{\phi, \psi\}$ es linealmente dependiente

11. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ aplicaciones lineales donde U, V y W son espacios vectoriales

finitamente generados. El rango de la aplicación composición, $r(g \circ f)$, cumple:
a. $r(g \circ f) = r(g) + r(f)$
b. $r(g \circ f) = r(f)$
c. $r(g \circ f) = r(g)$
d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta
e. $r(g \circ f) \leq \min\{r(g), r(f)\}$

12. $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real de dimensión 2 que contiene a $\mathbb{Q}^2$ como subconjunto. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es correcta
a. $\mathbb{Q}^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 2
b. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta
c. $\mathbb{Q}^2$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$
d. $\mathbb{Q}^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión infinita
e. $\mathbb{Q}^2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1

13. Sean $f, g : V \to V'$ aplicaciones lineales. Es cierto que:
a. Si f y g son monomorfismos lo es $f + g$
b. Si f y g son epimorfismos lo es $f + g$
c. Si f y g son monomorfismos lo es $f - g$
d. Si f y g son isomorfismos lo es $f + g$
e. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y U un subespacio vectorial cuyas ecuaciones cartesianas están formadas por cuatro ecuaciones independientes.
a. En U podemos encontrar $n - 3$ vectores linealmente independientes
b. U admite una base formada por $n - 3$ vectores
c. Podemos encontrar $n - 5$ vectores que generen U
d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta
e. Podemos generar el anulador de U a partir de cinco formas lineales

15. Sea V un espacio vectorial, S un subconjunto suyo y $\Phi : V \to V^{**}$ el isomorfismo del teorema de reflexividad, entonces es cierto que:
a. $\Phi(L(S))$ es un subespacio propio de $an(an(S))$
b. $an(an(S))$ es un subespacio vectorial propio de $\Phi(L(S))$
c. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta
d. $an(an(S)) = \Phi(L(S))$
e. No hay ninguna relación entre $\Phi(L(S))$ y $an(an(S))$

16. Sean $A, C \in M_n(K)$ dos matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:
a. Si son semejantes tiene el mismo núcleo
b. Si tienen el mismo núcleo son equivalentes
c. Ninguna de las otras afirmaciones es cierta
d. Si tienen el mismo rango, traza, núcleo y determinante son semejantes
e. Si son equivalentes tienen igual traza y determinante

17. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial V y $f : V \to V$ aplicación lineal tal que

$f(u_1 + 2u_2) = u_1,\ f(u_2 + u_3) = u_2,\ f(u_3 - u_4) = u_3$

Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a. Existe un único endomorfismo de V cumpliendo los requisitos que cumple f

b. No existe ninguna aplicación lineal cumpliendo los requisitos del enunciado

c. Existen infinitos endomorfismos de V cumpliendo lo mismo que f

d. Ninguna de las otras respuestas en correcta

e. La existencia de f depende de cuál sea el espacio vectorial V

18. Sea V un espacio vectorial finitamente generado y supongamos que $f : V \to V$ es un endomorfismo que satisface que $f \circ f = Id_V$. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

a. $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$

b. Si $v \in \operatorname{Im}(f)$ entonces $f(v) = v$

c. $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$

d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

e. Necesariamente $f = Id_V$

19. Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V finitamente generado. Si B_1, B_2 y B son bases de U_1, U_2 y $U_1 \cap U_2$, respectivamente, entonces:

a. $B \cup B_1$ es un sistema de generadores de $U_1 + U_2$

b. $B_1 \cup B_2$ es una base de $U_1 + U_2$

c. $(B_1 \cup B_2) \setminus B$ es una base de $U_1 + U_2$

d. $B \cup B_2$ es un sistema de generadores de $U_1 + U_2$

e. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

20. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ dos aplicaciones lineales donde U, V y W son espacios vectoriales finitamente generados. La nulidad de la aplicación composición $n(g \circ f)$, cumple:

a. $n(g \circ f) = n(f)$

b. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

c. $n(g \circ f) = n(g)$

d. $n(g \circ f) \leq n(f)$

e. $n(g \circ f) \leq n(g) + n(f)$

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $W_1,\ W_2,\ W_3$ subespacios vectoriales de V tales que $(W_1 \oplus W_2) \cap W_3 = \{0\}$, es cierto que

a. $\dim(W_1 + W_2 + W_3) < \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3)$

b. $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3)$

c. $\dim(W_1 + W_2 + W_3) > \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3)$

d. $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_3)$

e. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

22. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V y $f : V \to V$ aplicación lineal tal que

$f(u_1 + u_2) = u_1,\ f(u_2 + u_3) = u_2,\ f(u_3) = u_3$

Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a. Existen infinitos endomorfismos de V cumpliendo lo mismo que f

b. La existencia de f depende de cuál sea el espacio vectorial V

c. No existe ninguna aplicación lineal cumpliendo los requisitos del enunciado

d. Ninguna de las otras respuestas en correcta

e. Existe un único endomorfismo de V cumpliendo los requisitos que cumple f

23. Se tiene un SEL homogéneo de m ecuaciones y n incognitas. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

a. Sus soluciones son un subespacio vectorial de dimensión $\geq n - m$

b. Sus soluciones son un subespacio vectorial de dimensión $n - m$

c. Si el SEL es determinado entonces $n = m$

d. Si $n = m$ entonces el SEL es determinado

el El SEL puede no tener ninguna solución

24. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, U_4\}$ una base de un espacio vectorial V y $f : V \to V$ aplicación lineal tal que $f(u_1 + 2u_2) = u_1 + u_3,\ f(u_2 + 4u_3) = u_2,\ f(u_3 - u_4) = u_1 + u_2 + u_3,\ f(u_4) = 0$

Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a. La existencia de f depende de cuál sea el espacio vectorial V

b. Existen infinitos endomorfismos de V cumpliendo lo mismo que f

c. Existe un único endomorfismo de V cumpliendo los requisitos que cumple f

d. Ninguna de las otras respuestas en correcta

e. No existe ninguna aplicación lineal cumpliendo los requisitos del enunciado

25. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ aplicaciones lineales donde U, V y W son espacios vectoriales finitamente generados y f es un epimorfismo. El rango de la aplicación composición, $r(g \circ f)$, cumple:

a. $r(g \circ f) = r(g) + r(f)$

b. $r(g \circ f) = r(g) - r(f)$

c. $r(g \circ f) = r(f)$

d. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

e. $r(g \circ f) = r(g)$

26. Sea $V(K)$ un espacio vectorial finitamente generado y U, W dos subespacios suyos.

a. Ninguna de las otras afirmaciones es correcta

b $\dim(an(U + W)) \leq \dim(U + W)$

c. $\dim(an(U + W)) \leq \dim(an(U))$

d. $\dim(an(U + W)) \geq \dim(an(U))$

e.$\dim(an(U + W)) \geq \dim(U + W)$

Problemas

1. Se consideran en $M_2(\mathbb{R})$ los subespacios vectoriales

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\} \text{ y}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} : a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Calcular un endomorfismo $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ que verifique $f(U) = W$ y $f \circ f = f$
2. Calcular una base de la imagen por la aplicación traspuesta f^t del anulador de U

2. Sea $f_\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases usuales es

$$\begin{pmatrix} 3 & \mu + 8 & -2\mu - 4 \\ -1 & -\mu & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde μ es un número real

1. Para cada valor de μ, hallar la imagen $\mathrm{Im}(f_\mu)$ y el núcleo $\ker(f_\mu)$ de f_μ. Determinar los valores de μ para los que f_μ es un isomorfismo.
2. Para cada valor de μ, orbener una base de $\mathrm{Im}(f_\mu) \cap \ker(f_\mu)$ y de $\mathrm{Im}(f_\mu) + \ker(f_\mu)$. Determinar los valores de μ para los que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_\mu) \oplus \ker(f_\mu)$.
3. Determinar una base de $\mathrm{Im}(f^t_\mu)$ y de $\ker(f^t_\mu)$, donde f^t_μ es la aplicación traspuesta de f_μ