GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Examen final (primera y segunda parte) 22/01/2018

1. Determinar si son verdaderos o falsos los siguientes asertos:

   a) Sea una matriz $A \in M_4(K)$ cuyas cuatro columnas, consideradas como un subconjunto C del e.v. $K^4(K)$, verifican: cualquier subconjunto de tres elementos de C es linealmente independiente. Entonces, C es linealmente independiente.

   b) Sean $S = \{u, v\}$, $S' = \{u', v'\}$ dos subconjuntos de un espacio vectorial $V(K)$ tales que:

   - Cada subconjunto S y S' es linealmente independiente.
   - Ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal de vectores de S', ni ninguno de S' como combinación lineal de los de S.

   Entonces, $S \cup S'$ es linealmente independiente.

2. Se considera, en el espacio de las matrices simétricas $S_2(\mathbb{R})$, los subespacios vectoriales:

$$U_\lambda = L\left\{\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}\right\}, \qquad W_\lambda = L\left\{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

   Calcular, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensión de $U_\lambda \cap W_\lambda$.

3. Se considera, en el espacio vectorial de matrices cuadradas $M_2(\mathbb{R})$, la aplicación lineal:

$$F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad F(A) = A - \frac{1}{2}A^t, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}).$$

   Determinar, en el caso de que sea posible (o, en caso contrario, justificar la imposibilidad):

   a) Dos bases, B y B', de $M_2(\mathbb{R})$ tales que la matriz de F en esas bases sea diagonal y con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.

   b) Una base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz de F en esa base sea diagonal con todos sus elementos pertenecientes a $\{0, 1\}$.

4. Se considera, en el espacio de polinomios $\mathbb{R}_3[x]$:

   - Las formas lineales: $\phi(p(x)) = p(1), \psi(p(x)) = p'(1) - p(0)$.
   - El subespacio vectorial $U = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_1 = 0, a_3 = -2a_2\}$

   Determinar, calculando su matriz en la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$, un endomorfismo f de $\mathbb{R}_3[x]$ cuyo traspuesto verifique: Nuc $f^t = L\{\phi, \psi\}$, Im $f^t = $ an U.

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación.
Duración: 3 horas.