ALGEBRA I, **GRUPO A**
Convocatoria ordinaria 01-02-2021 Profesor: Torrecillas

1. Consideremos el conjunto de anillos

$$A = \left\{\mathbb{Z}_7[X],\ \mathbb{Z}[i][X],\ \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)[X],\ \mathbb{Z}\left[\sqrt{-2}\right]\big/\left\langle 1+\sqrt{-2}\right\rangle,\ \mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle\right\}$$

El número de dominios de ideales principales en A es ——
El número de dominios de integridad en A es ——
El número de cuerpos en A es ——
El número de dominios de factorización única en A es ——

2. Sean $f(X), g(X), h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ determinados por las siguientes condiciones:
$f(X)$ es de grado 2, sus raíces son $-\frac{1}{2}$, 1 y su coeficiente director es 2
$g(X)$ es de grado 2, sus raíces son $-\frac{1}{2}$, -1 y su coeficiente director es 2
$h(X) = f(X)g(X)$
Calcular $h(2) + h'\left(-\frac{1}{2}\right) + f''(2) + g''(2)$

3. Si A es un anillo conmutativo, diremos que un elemento $e \in A$ es idempotente si $e^2 = e$. Recordemos, por otra parte, que un elemento de A es una unidad si tiene inverso en A para el producto.
El número de elementos idempotentes de $\mathbb{Z}_{900}$ es
El número de elementos idempotentes de $\mathbb{Z}_{25}$ es
El número de unidades de $\mathbb{Z}_{900}$ es

4. Sea X un conjunto con cuatro elementos y X_0 un subconjunto de X de cardinal 2. En $P(X)$ definimos una relación de equivalencia R declarando, para subconjuntos A, B de X, que ARB si

$$card(A) + card(B \cap X_0) = card(B) + card(A \cap X_0)$$

El cardinal de la clase de equivalencia del conjunto vacío $\varnothing$ bajo R es
El número de clases de equivalencia en $P(X)/R$ de cardinal 12 es

Problemas:

1. Estudiar razonadamente si el siguiente polinomio es o no irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 2$$

2. Resolver en $\mathbb{Z}_3[x]$

$$p(x) \equiv 1 \mod\left(2x^2 + x\right)$$
$$p(x) \equiv x + 1 \mod\left(x^2 + 2\right)$$