Álgebra I. Grupo B. Grado en Matemáticas.

Examen ordinario. Curso 2020-2021.

01 de febrero de 2021.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.**

1. (1 punto) Un cocinero de un barco relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste, murieron cinco de los piratas que aun quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación y sobraron 3 para mi.*

   Sabiendo que en el cofre no caben mas de dos mil monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?

2. (1 punto) Calculad el resto de dividir 2019^{9102} entre 12.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.**

1. (1 punto) Factorizar en irreducibles los siguientes polinomios en $\mathbb{Z}[x]$

   a) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$.

   b) $3x^6 + 12x^5 - 21x^4 - 24x^3 - 6x^2 - 24x - 3$.

2. (1 punto) Factorizar 1800 en producto de irreducibles no asociados en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.**

1. (0.75 puntos) Un elemento a de un anillo A se dice un **divisor de cero** si existe un elemento $b \in A$ con $b \neq 0$ y $ab = 0$. Demostrad que si A es un anillo finito no trivial y $a \in A$ no es un divisor de cero entonces $a \in U(A)$.

2. (0.75 puntos) Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y sea I un ideal del anillo $\mathbb{C}[x]$. Demostrad

$$\mathbb{C}[x]/I \text{ es un cuerpo } \Leftrightarrow \mathbb{C}[x]/I \cong \mathbb{C}.$$

3. (0.5 puntos) Sean A, B dos anillos conmutativos e I un ideal de A. Demostrad que $I \times B$ es un ideal del anillo producto $A \times B$ y existe un isomorfismo $A \times B / I \times B \cong A/I$.