Álgebra I (Matemáticas, grupo B)

Curso 21-22.

Relación 4

1. Argumenta si los siguientes anillos son, o no, Dominios de Integridad:
$$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ \mathbb{Z}_3,\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}_6[X],\ \mathbb{Z}[i],\ \mathbb{Z}_5[X].$$
2. ¿Es el anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ con las operaciones $(a,a')+(b,b')=(a+b,a'+b')$ y $(a,a')(b,b')=(ab,ab'+a'b)$ un Dominio de Integridad? (ver el Ejercicio 3 de la Relación 3)
3. ¿Es el anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con las operaciones $a\oplus b=a+b-1$ y $a\otimes b=a+b-ab$ un Dominio de Integridad? (ver el Ejercicio 2 de la Relación 3)
4. Demuestra que un Dominio de Integridad finito es un cuerpo.
5. Sea $n\in\mathbb{Z}$ un entero no cuadrado en $\mathbb{Z}$. Demuestra que el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ es $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.
6. Se define el cuerpo $\mathbb{Q}(x)$ como el cuerpo de fracciones del anillo $\mathbb{Z}[x]$, esto es $\mathbb{Q}(x):=\mathbb{Q}(\mathbb{Z}[x])$. Demuestra que $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ tienen el mismo cuerpo de fracciones. Esto es,
$$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}[x])=\mathbb{Q}(x).$$
7. Sea $A=\{\frac{m}{2^k}\in\mathbb{Q}\mid m\in\mathbb{Z} \text{ y } k\geq 0\}$. Argumentar que
   (a) A es subanillo de $\mathbb{Q}$.
   (b) $\mathbb{Z}\subsetneq A$.
   (c) El cuerpo de fracciones de A es el mismo que el de $\mathbb{Z}$, o sea $\mathbb{Q}$.
8. Argumentar la veracidad o falsedad de las siguientes porposiciones referidas a elementos de un Dominio de Integridad
   (a) $a\,|\,b\wedge a\nmid c\Rightarrow a\nmid b+c$.
   (b) $a\nmid b\wedge a\nmid c\Rightarrow a\nmid b+c$.
9. Sea A un DE y $a,b\in A-\{0\}$. Demuestra que son equivalentes las siguientes afirmaciones:
   (i) $a|b$.
   (ii) Todo resto de dividir b entre a es 0.
   (iii) 0 es un resto de dividir b entre a.
10. Para n un número natural, calcular $mcd(n,n^2)$, $mcd(n,n+1)$ y $mcd(n,n+2)$.
11. ¿Podremos rellenar con precisión un depósito de 5.388.033 litros usando un recipiente de 371? En caso afirmativo ¿Cuantas veces usaremos el recipiente?
12. Determinar, si existe, un polinomio $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ tal que
$$\Big(\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\Big)p(x)=\frac{9}{20}x^5+\frac{147}{40}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+\frac{11}{3}.$$
13. Calcular el cociente y el resto de dividir, en el anillo $\mathbb{Q}[x]$, el polinomio $\frac{9}{20}x^5+\frac{147}{40}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{4}x+\frac{17}{3}$ entre el polinomio $\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$.
14. Determinar, si existe, un polinomio $p(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$ tal que
$$(2x^2+x+2)p(x)=2x^7+x^6+2x^4+2.$$
15. En el anillo $\mathbb{Z}[i]$, calcular cociente y resto de dividir $1+15i$ entre $3+5i$.
16. ¿Es $2+5\sqrt{3}$ un divisor de $39-9\sqrt{3}$ en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?
17. Resolver en $\mathbb{Z}$ las ecuaciones diofánticas
$$10x+46y=4050,\ 60x+36y=12,\ 35x+6y=8,\ 12x+18y=11.$$

18. "Cuarenta y seis náufragos cansados arribaron a una bella isla. Allí encontraron ciento veintiséis montones de cocos, de no más de cincuenta cada uno, y catorce cocos sueltos, y se los repartieron equitativamente . . ." (cuento oriental del año 850 a.c.) ¿Cuántos cocos había en cada montón?
19. Disponemos de 15 euros para comprar 40 sellos de correos, de 10, 40, y 60 céntimos y, al menos, necesitamos 2 de cada tipo ¿Cuántos sellos de cada clase podremos comprar?
20. En una torre eléctrica, se nos ha roto una pata de 4 m de altura. Para equilibrarlo provisionalmente, disponemos de 7 discos de madera de 50 cm de grosor y de otros 12 de 30 cm. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
    - ☐ No podremos equilibrar la torre.
    - ☐ Podremos equilibrar la torre, y de una única manera.
    - ☐ Podremos equilibrar la torre, y de dos únicas maneras.
    - ☐ Podremos equilibrar la torre, y de más de 2 maneras distintas.
21. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{R}[x]$, de los polinomios $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y $x^3 - 3x^2 - x + 3$. Encontrar todos los polinomios $P(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, ambos de grado 3, tales que
$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)p(x) + (x^3 - 3x^2 - x + 3)g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$
22. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo $\mathbb{Z}_3[x]$, de los polinomios $x^4 + x^3 - x - 1$ y $x^5 + x^4 - x - 1$.Encontrar todos los polinomios $P(x)$ y $g(x)$ en $\mathbb{Z}_3[x]$, con grado de $g(x)$ igual a 7, tales que
$$(x^4 + x^3 - x - 1)p(x) + (x^5 + x^4 - x - 1)g(x) = x^4 + x^2 + 1.$$
23. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, calcular
$$mcd(2 - 3\sqrt{-2}, 1 + \sqrt{-2}), \text{ y } mcm(2 - 3\sqrt{-2}, 1 + \sqrt{-2}).$$
24. En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, calcula $mcd(3 + \sqrt{3}, 2)$ y $mcm(3 + \sqrt{3}, 2)$.
25. Determina los enteros $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que, en el anillo $\mathbb{Z}[i]$, se verifique la ecuación
$$(-2 + 3i)x + (1 + i)y = 1 + 11i.$$
26. Resolver la siguiente ecuación en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$:
$$(4 + \sqrt{2})x + (6 + 4\sqrt{2})y = \sqrt{2}.$$