CURSOS 0
MATEMÁTICAS

Derivadas

Esther Gil Cid
Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales

UNED

CURSOS 0

Índice general

1. Introducción y objetivos

La forma en la que se estudia inicialmente una función es estática: ¿cuánto vale $f(x)$ si x toma este valor?). Pero también podemos estudiar las funciones de forma dinámica: ¿con qué rapidez se produce la variación de $f(x)$?. Podemos, por ejemplo, estudiar la variación media de una función, es decir, cuánto varía f entre a y b. O la pendiente (o inclinación) de la recta tangente a la curva en un punto, que representa la rapidez de cambio instantáneo, y se llama derivada de la función en un punto.

A veces podemos necesitar conocer la función derivada de una función. Aunque teóricamente la derivada se determina a través del cálculo de límites, esto puede resultar bastante engorroso. Por esto, es más sencillo utilizar reglas para derivar.

Utilizando las derivadas se pueden estudiar algunas propiedades de carácter local de las funciones, lo que ayudará para su representación gráfica: se trata de obtener información de las funciones a partir de su derivada.

Los contenidos de este tema son necesarios para el primer curso de cualquier Ingeniería o carrera de ciencias.

Objetivos

- Entender qué es la derivada de una función en un punto y la derivada de una función.
- Poder derivar cualquier función.
- Poder encontrar los máximos y mínimos relativos de una función.
- Poder determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de una función.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.	**Verdadero**	**Falso**
La tangente sólo corta a la gráfica de la función en un punto.	**Verdadero**	**Falso**
Siempre hay que determinar la derivada de una función como un límite.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = 2\sqrt[4]{x^3}$ es $f'(x) = \frac{8}{3\sqrt[4]{x^3}}$.	**Verdadero**	**Falso**
Si $f(x) = x^9 - x^2 + 1$, entonces $f'(x) = 9x^8 - 2x$.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = \left(x^2+1\right)^2 - (x-1)^2$ es $4x\left(x^2+1\right) + 2x(x-1)$.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = \frac{1}{x^6+x^2+3}$ es $f'(x) = -\frac{6x^5+2x}{\left(x^6+x^2+3\right)^2}$.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = \frac{1}{\cos 2x}$ es $f'(x) = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x}$.	**Verdadero**	**Falso**
Las derivadas no dan información de cómo es la función.	**Verdadero**	**Falso**
Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ la función tiene un mínimo en x.	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido muchas dificultades y el número de respuestas correctas no le parece aceptable, debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.

Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas. Si ha respondido todo correctamente puede pasar a otro bloque.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: ¿Qué es la derivada?

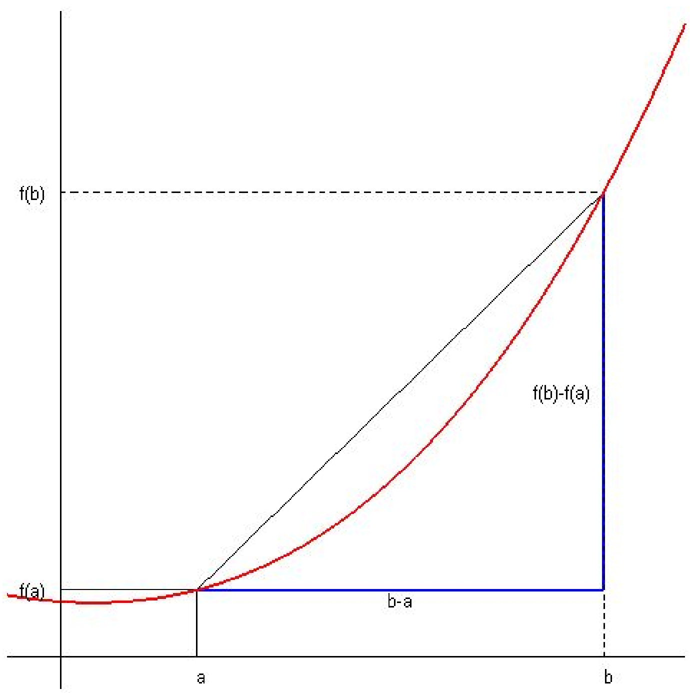
Consideremos una función $f(x)$, continua. Supongamos que queremos estudiar cómo varía la función, expresado de otra forma, su "velocidad de cambio" o cómo varía una variable respecto a la otra.

Variación media

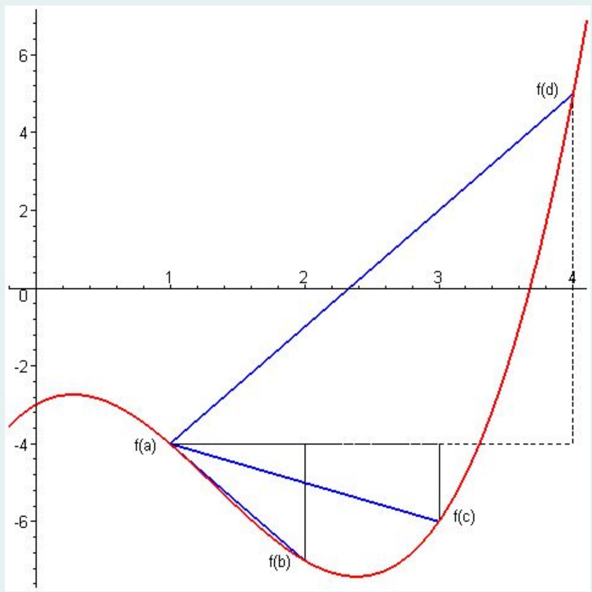
La Variación media (V.M) nos dice cómo varía la función por unidad de tiempo, en un intervalo (a, b):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Gráficamente, la V.M. es la pendiente de la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. La vamos a denotar $V.M((a, b)$.



Ejemplo 1. La variación media depende del intervalo considerado:



Observamos que la variación media puede cambiar de signo, según cómo sea la función y cuáles sean los puntos a y b. En este ejemplo, los valores de x y de $f(x)$ son:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-7	-6	5

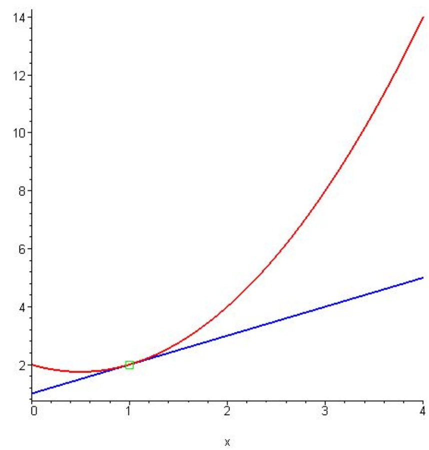
y la variación media es

$$V.M(1,2) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{-7-(-4)}{1} = -3,$$
$$V.M(1,3) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{-6-(-4)}{2} = -1,$$
$$V.M(1,4) = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{5-(-4)}{3} = 3.$$

Var. instantánea Si hacemos que el intervalo sea cada vez más pequeño, hasta que se "junten" los dos puntos a y b, tenemos la Variación instantánea. Es el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Tangente La tangente a una curva en un punto es la recta que sigue la dirección de la curva en ese punto.



La tangente a una curva en a se puede determinar considerando la recta que corta a la curva en a y otro punto b y haciendo que b se acerque a a todo lo que se pueda.

(anima1.gif)

Deriv. en un punto La pendiente de la recta secante es la variación media

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

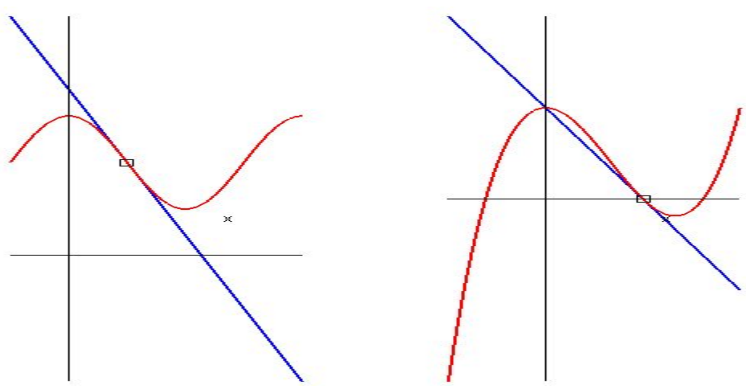
y su límite es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, que llamamos derivada de la función f **en el punto** a y se representa por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Coincide con la variación instantánea.

Observaciones:

- La tangente a una función en un punto puede "atravesar" la curva o cortarla en más de un punto:



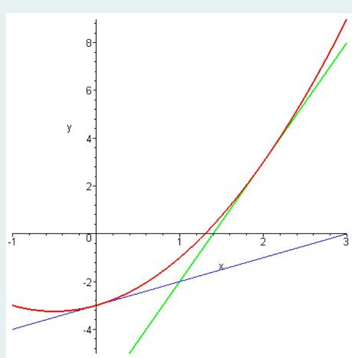
- Si el límite anterior es infinito o no existe, se dice que la función no tiene derivada en a.
- Para que una función tenga derivada en un punto debe estar definida en él. El recíproco no es cierto.

- Para que una función tenga derivada en un punto debe ser continua en él. El recíproco no es cierto.

Ejemplo 2. Las derivadas de la función $f(x) = x^2 + x - 3$ en $x = 0$ y $x = 2$ son los límites

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + h - 3 - (-3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} (h+1) = 1, \\
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) - 3 - \left(2^2 + 2 - 3\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2^2 + 4h + h^2 + 2 + h - 3 - 2^2 - 2 + 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \lim_{h\to 0} (h+5) = 5.
\end{aligned}$$

$f'(0)$ y $f'(2)$ son las pendientes de las rectas tangentes a f en $x = 0$ y $x = 2$. Coinciden con la variación instantánea:



Ejemplo 3. La función $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$ porque no existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

Para demostrarlo, escribimos f como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Entonces el límite depende de si nos acercamos a 0 por la derecha o por la izquierda

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(0+h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Como los límites anteriores no coinciden, no existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

que es la derivada.

Derivada

La derivada de una función $f : I \to \mathbb{R}$ en un punto $x \in I$, es el límite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si existe la derivada en un subconjunto S de I, entonces la función que asigna a cada x su derivada $f'(x)$, en S, se llama función derivada o simplemente derivada.

Ejemplo 4. La función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, para $x > 0$, es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, f no tiene derivada, porque

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \end{aligned}$$

y entonces no existe derivada.

Deriv. sucesivas

Como la derivada de una función es a su vez una función y, se puede derivar. Las derivadas sucesivas se llaman derivada segunda, tercera, cuarta, etc y se denotan $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{4)}(x)$, etc, respectivamente.

Ejemplo 5. La derivada segunda de $f(x) = \sqrt{x}$ es la derivada de $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Hállese la pendiente de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 2. Calcúlese la derivada de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ en $x = 0$ y en $x = 1$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 3. Calcúlese la función derivada de $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 4. Calcúlese la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 1.

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es su derivada, que se puede calcular como el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2-(2+h)}{(2+h)\,2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-(2+h)}{2(2+h)\,h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{h}{2(2+h)\,h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{2(2+h)} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces, la pendiente buscada es $-\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 2.

La derivada de una función $f(x)$ en el punto x_0 es el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Como $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$, tenemos que hacer

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^3 + 2(0+h)^2 - (0+h) - \left(0^3 + 2\cdot 0^2 - 0\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 2h^2 - h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 + 2h - 1 = -1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3+2(1+h)^2-(1+h)-\left(1^3+2\cdot 1^2-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+3h+3h^2+h^3+2\left(1+2h+h^2\right)-1-h-2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h+3h^2+h^3+2+4h+2h^2-h-2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^3+5h^2+6h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(h^2+5h+6\right) = 6.
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio 3.
La función derivada se calcula por medio de límites:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+3(x+h)-1-\left(x^2+3x-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-1-x^2-3x+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2+3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h+3 = 2x+3.
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio 4.

La función derivada se calcula mediante el límite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x}{(x+h)x}-\dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-x-h}{h(x+h)x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Así, la derivada de f es $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

3.2. Ficha 2: Reglas elementales de derivación

Para calcular la derivada de cualquier función (sin necesidad de hacerlo a través de la definición) es necesario aprenderse las derivadas de unas pocas funciones y aplicar posteriormente unas reglas.

Notación: $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, a es una constante (un número real).

Primeras reglas de derivación

$\boxed{f(x) = a}$ **Regla 1. Derivada de una constante**. Si $f(x) = a$, entonces $f'(x) = 0$.

$\boxed{f(x) + g(x)}$ **Regla 2. Derivada de una suma**. La derivada de $f(x) + g(x)$ es $f'(x) + g'(x)$.

$\boxed{f(x) = x^a}$ **Regla 3. Derivada de una potencia**. Si $f(x) = x^a$, su derivada es $f'(x) = ax^{a-1}$.

$\boxed{af(x)}$ **Regla 4. Derivada del producto de una constante por una función**. La derivada de $af(x)$ es $af'(x)$.

Ejemplo 6. Para calcular la derivada de $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x - 3$ hacemos:

1. Si conocemos las derivadas de $4x^3$, $-x^2$, $2x$ y -3 podemos luego aplicar la regla de la suma (regla 2).

2. La derivada de -3 es 0, porque es una constante (regla 1).

3. Como x se puede escribir como x^1, su derivada se calcula como la de una potencia: $1 \cdot x^{1-1} = 1$ (regla 3).

4. $2x$ se deriva con la regla 4: $2 \cdot (x)' = 2$.
5. La derivada de x^2 es $2 \cdot x^{2-1} = 2x$, porque es la derivada de una potencia.
6. Aplicamos la regla 4 y tenemos que la derivada de $-x^2$ es $-2x$.
7. La derivada de $4x^3$ es $4 \cdot 3x^{3-1} = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$, si aplicamos las reglas 3 y 4.
8. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 12x^2 - 2x + 2$.

Ejemplo 7. La derivada de $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{8}{x}$ se calcula:

1. $\sqrt[3]{x^2}$ se puede escribir como $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Entonces es fácil obtener su derivada como la derivada de una potencia (regla 3): $g'(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
2. Según la regla 4, la derivada de $3\sqrt[3]{x^2}$ es $3\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$.
3. De la misma forma obtenemos la derivada de $h(x) = \dfrac{8}{x}$ si reescribimos $h(x) = 8x^{-1}$. Su derivada es $h'(x) = 8\left(x^{-1}\right)' = 8\left(-1x^{-2}\right) = -\dfrac{8}{x^2}$.
4. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{8}{x^2}$.

Más reglas de derivación

$\boxed{\text{Regla del producto}}$ La derivada de $f(x) \cdot g(x)$ es $f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

$\boxed{\text{Regla del cociente}}$ La derivada de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es

$$\frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

$\boxed{\text{Regla de la cadena}}$ La derivada de $g \circ f(x) = g(f(x))$ es $g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Ejemplo 8. La derivada de $F(x) = (x-1)\left(3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{8}{x}\right)$ se calcula aplicando la regla del producto.

1. Primero calculamos la derivada de $f(x) = x - 1$ que es $f'(x) = 1$.
2. $g(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{8}{x}$ y su derivada es $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{8}{x^2}$.
3. Como $F(x)$ es el producto de f y g: $F(x) = f(x)\, g(x)$, obtenemos su derivada aplicando la regla del producto:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \\ &= 1 \cdot \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{8}{x}\right) + (x-1)\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{8}{x^2}\right) \\ &= \frac{5x^3 - 2x^2 + 8\sqrt[3]{x}}{x^2\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Derivamos $\dfrac{3x}{x^2-1}$ con la regla del cociente:

1. Escribimos la función como $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^2 - 1$.
2. La derivada de f es $f'(x) = 3 \cdot 1 = 3$.
3. La derivada de g es suma de las derivadas de x^2 y -1. La primera es $2x$ y la segunda es 0.
4. Obtenemos la derivada de $F(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{0 \cdot \left(x^2-1\right) - 1 \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} \\ &= -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Para derivar $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ hacemos:

1. Escribimos $F(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, si $f(x) = x^2+1$ y $g(y) = \sqrt{y}$.
2. $f'(x) = 2x$.
3. $g(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$. Su derivada es la de una potencia: $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.
4. Ya podemos aplicar la regla de la cadena para obtener F'

$$\begin{aligned} F'(x) &= g'(f(x))\, f'(x) = g'\left(x^2+1\right) \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 11. La derivada de $F(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right)^{30}$ se puede obtener desarrollando la potencia y derivando cada término (que resulta muy laborioso) o aplicando la regla de la cadena a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ y $g(y) = y^{30}$:

1. Primero derivamos f: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$.
2. A continuación, calculamos $g'(y) = 30y^{29}$.
3. Finalmente, como $F(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, aplicamos la regla de la cadena a esta composición de funciones

$$\begin{aligned} F'(x) &= g'(f(x))\, f'(x) = g'\left(x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right)\left(3x^2 - 4x + 3\right) \\ &= 30\left(x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right)^{29}\left(3x^2 - 4x + 3\right). \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5. Calcúlese la derivada de $f(x) = x^7 - 2x^4 + x - 3 + \sqrt{x}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 6. Calcúlese la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[5]{x^8} - 3x^2 + 2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar la primera parte de esta ficha.

Ejercicio 7. Calcúlese la derivada de $f(x) = \left(x^7 - 3x^2 + 1\right)\sqrt{x^3}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 8. Calcúlese la derivada de $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 - 3}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 9. Calcúlese la derivada de $\dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 + 2x}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar la segunda parte de esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 5.

La derivada de f se obtiene sumando la derivada de cada uno de sus sumandos.

1. x^7 es una potencia: su derivada es $7x^6$: el orden de la potencia (7) multiplicado por x elevado a uno menos (6).

2. La derivada de $-2x^4$ es -2 multiplicado por la derivada de x^4. x^4 es de nuevo una potencia, y su derivada es $4x^3$. Así, la derivada de $-2x^4$ es
$$-2\left(4x^3\right) = -8x^3.$$

3. La derivada de x es 1.

4. Como -3 es una constante, su derivada es 0.

5. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ es una potencia y su derivada es
$$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Entonces, la derivada de f es $f'(x) = 7x^6 - 8x^3 + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solución del ejercicio 6.

Para obtener la derivada de f, primero calculamos la derivada de sus sumandos:

1. Como $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, su derivada es la derivada de una potencia:
$$-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

2. $2\sqrt[5]{x^8} = 2x^{\frac{8}{5}}$ y su derivada es

$$2 \cdot \frac{8}{5} x^{\frac{8}{5}-1} = \frac{16}{5} x^{\frac{3}{5}} = \frac{16}{5} \sqrt[5]{x^3}.$$

3. La derivada de $-3x^2$ es -3 multiplicado por la derivada de x^2, que es $2x$. Entonces, la derivada de $-3x^2$ es $-6x$.

4. La derivada de 2 es 0, porque es una constante.

Entonces $f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} + \dfrac{16}{5}\sqrt[5]{x^3} - 6x.$

Solución del ejercicio 7.

La derivada de $F(x) = \left(x^7 - 3x^2 + 1\right)\sqrt{x^3}$ se calcula aplicando la regla del producto.

1. La derivada de $f(x) = x^7 - 3x^2 + 1$ es

$$f'(x) = 7x^{7-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 7x^6 - 6x.$$

2. Como $g(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$, su derivada es

$$g'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3. Entonces

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\, \frac{3}{2}\sqrt{x} \\
&= \left(7x^6 - 6x\right) x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\left(x^7 - 3x^2 + 1\right)\sqrt{x} \\
&= \left(7x^7 - 6x^2 + \frac{3}{2}\left(x^7 - 3x^2 + 1\right)\right)\sqrt{x} \\
&= \left(\frac{17}{2}x^7 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 8.

Se puede aplicar la regla de la cadena a $f(x) = G(F(x))$, en donde

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 - 4x^2 - 3, \\ G(y) &= \sqrt{y}. \end{aligned}$$

1. La derivada de G es $G'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

2. La derivada de $F(x)$ es $F'(x) = 3x^{3-1} - 4 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 3x^2 - 8x$.

3. Ya podemos aplicar la regla de la cadena para obtener f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(F(x))\,F'(x) = G'\left(x^3 - 4x^2 - 3\right) \cdot \left(3x^2 - 8x\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 - 3}} \cdot \left(3x^2 - 8x\right) = \frac{3x^2 - 8x}{2\sqrt{x^3 - 4x^2 - 3}}. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 9.

Podemos derivar la función $F(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^4 + 2x}$ aplicando la regla del cociente:

1. Escribimos la función como $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^4 + 2x$.

2. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^{3-1} + 2x^{2-1} - 1 + 0 = 3x^2 + 2x - 1.$$

3. La derivada de g es

$$g'(x) = 4x^{4-1} + 2 \cdot 1 = 4x^3 + 2.$$

4. Obtenemos la derivada de $F(x)$ aplicando la regla del cociente

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)} \\
&= \frac{\left(3x^2 + 2x - 1\right) \cdot \left(x^4 + 2x\right) - \left(x^3 + x^2 - x + 1\right) \cdot \left(4x^3 + 2\right)}{\left(x^4 + 2x\right)^2} \\
&= \frac{3x^6 + 2x^5 - x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x}{\left(x^4 + 2x\right)^2} \\
&- \frac{\left(4x^6 + 4x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 2x + 2\right)}{\left(x^4 + 2x\right)^2} \\
&= \frac{-x^6 - 2x^5 + 2x^2 + 3x^4 - 2}{\left(x^4 + 2x\right)^2} \\
&= -\frac{x^6 + 2x^5 - 2x^2 - 3x^4 + 2}{\left(x^4 + 2x\right)^2}.
\end{aligned}$$

3.3. Ficha 3: Derivación de las funciones trascendentes

Func. trigon. **Derivada de las funciones trigonométricas**

- Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x) = \cos x$.
- Si $f(x) = \cos x$ entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.
- Si $f(x) = \operatorname{tg} x$ entonces $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Ejemplo 12. Derivamos $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x + \cos^3 x - \operatorname{tg}\left(x^2+1\right)$:

1. Derivamos $3 \operatorname{sen} 2x$, $\cos^3 x$ y $\operatorname{tg}\left(x^2+1\right)$ y aplicamos la regla de la suma.
2. $3 \operatorname{sen} 2x$ es el producto de 3 por $\operatorname{sen} 2x$:
$$(3 \operatorname{sen} 2x)' = 3 (\operatorname{sen} 2x)'.$$
   a) Derivamos $\operatorname{sen} 2x$ aplicando la regla de la cadena a sen y a $2x$
$$(\operatorname{sen} 2x)' = (\cos 2x)(2x)' = 2\cos 2x.$$
   b) La derivada es $3 \cdot 2\cos 2x = 6 \cos 2x$.
3. Derivamos $\cos^3 x$ aplicando la regla de la cadena a $F(x) = \cos x$ y $G(y) = y^3$
$$F'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad G'(y) = 3y^2$$
$$\begin{aligned}\left(\cos^3 x\right)' &= (G \circ F)'(x) = G'(F(x))\,F'(x)\\ &= 3\cos^2 x\,(-\operatorname{sen} x) = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

4. $\operatorname{tg}\left(x^2+1\right)$ se deriva aplicando de nuevo la regla de la cadena a $F(x) = x^2+1$ y $G(y) = \operatorname{tg} y$:

$$F'(x) = 2x \qquad G'(y) = 1+\operatorname{tg}^2 y$$

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{tg}\left(x^2+1\right)\right)' &= (G\circ F)'(x) = G'(F(x))\,F'(x)\\ &= \left(1+\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right)\right)2x = 2x\left(1+\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right)\right).\end{aligned}$$

5. Ya podemos sumar las derivadas anteriores:

$$f'(x) = 6\cos 2x - 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - 2x\left(1+\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right)\right).$$

Func. exponenciales **Derivada de las funciones exponenciales**:

- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$.
- Si $f(x) = a^x$ y a es una constante, entonces $f'(x) = a^x \ln a$. ln es el logaritmo neperiano.

Ejemplo 13. Para determinar la derivada de $f(x) = 2^x e^{x^3-2x+1}$ seguimos los siguientes pasos:

1. Hay que aplicar la regla del producto a 2^x y e^{x^3-2x+1}. Por eso, primero hay que derivarlas.
2. Como 2 es una constante, entonces la derivada de 2^x es $2^x \ln 2$.
3. Para derivar e^{x^3-2x+1} tenemos que aplicar la regla de la cadena a $F(x) = x^3 - 2x + 1$ y $G(y) = e^y$:
   a) $F'(x) = 3x^2 - 2$ y $G'(y) = e^y$.
   b) $(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) F'(x) = e^{x^3-2x+1}\left(3x^2 - 2\right)$.
4. Según la regla del producto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2^x)' \left(e^{x^3-2x+1}\right) + (2^x)\left(e^{x^3-2x+1}\right)' \\ &= 2^x \ln 2 e^{x^3-2x+1} + 2^x e^{x^3-2x+1}\left(3x^2 - 2\right). \end{aligned}$$

Func. logarítmicas

Derivada de las funciones logarítmicas. Si log es el logaritmo en cualquier base:

- Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Si $f(x) = \log x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log e$.

Ejemplo 14. Si $f(x) = \ln(\cos e^x)$, entonces su derivada se calcula con los siguientes pasos:

1. Hay que aplicar la regla de la cadena a $F(x) = \cos e^x$ y $G(y) = \ln y$, porque $f(x) = G(F(x))$. Será $f'(x) = G'(F(x))\, F'(x)$.

2. La derivada de $F(x)$ se calcula aplicando de nuevo la regla de la cadena a $H(x) = e^x$ y $J(t) = \cos t$.

   Como $H'(x) = e^x$ y $J'(t) = -\operatorname{sen} t$, entonces

$$F'(x) = (J \circ H)'(x) = J'(H(x))\, H'(x) = -\operatorname{sen}(e^x)\, e^x.$$

3. $G'(y) = \dfrac{1}{y}$.

4. Ya podemos hacer

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(F(x))\, F'(x) = \frac{1}{F(x)} F'(x) \\ &= \frac{1}{\cos e^x}\left(-\operatorname{sen}(e^x)\, e^x\right) = -e^x \operatorname{tg} e^x. \end{aligned}$$

Ejemplo 15. La derivada de $f(x) = (\cos x)^x$ no se puede calcular aplicando ninguna de las reglas que conocemos: no es una potencia de una constante ni una función elevada a una constante. Sin embargo, podemos utilizar un truco:

1. Podemos escribir

$$g(x) = \ln f(x) = \ln\left((\cos x)^x\right) = x \ln(\cos x).$$

2. Entonces, por un lado

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^x} f'(x),$$

y por otro, aplicando la regla del producto

$$g'(x) = \ln(\cos x) + x \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = \ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x.$$

3. Igualando ambas expresiones, resulta

$$\frac{1}{(\cos x)^x} f'(x) = \ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x$$
$$\Longrightarrow f'(x) = (\cos x)^x \left(\ln(\cos x) - x \operatorname{tg} x\right).$$

Función inversa

Derivada de la función inversa. Si f es una función inyectiva y continua en un intervalo, es derivable en un punto x_0 interior a este intervalo y $f'(x_0) \neq 0$, entonces su función inversa es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y su derivada es:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Ejemplo 16. 1. Si n es un número natural par, entonces $y = f(x) = x^n$ es creciente y continua en $[0, \infty)$.

2. Su derivada es $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. Su función inversa es $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$.

4. Podemos calcular $\left(f^{-1}\right)'$ como la de la inversa de f:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}}.$$

5. Como $y = f(x) = x^n$, entonces $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ y

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n}y^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

Esta derivada coincide con la calculada en el ejemplo de la página 19.

6. En un caso concreto, si $f^{-1}(y) = x = \sqrt[4]{y}$, su función inversa es $f(x) = x^4$ y su derivada se puede calcular a partir de derivada de su inversa.

   a) $f'(x) = 4x^3$.

   b) $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{4x^3}$.

   c) Como $x = \sqrt[4]{y}$, entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{4x^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} = \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}.$$

Ejemplo 17. Con la derivada de la función inversa, podemos calcular derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, su inversa es $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y$, que está definida para $y \in [-1, 1]$

1. $f'(x) = \cos x$.

2. La derivada de f^{-1} es

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

3. Como $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = (\operatorname{arcsen} y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2.}}$$

Ejemplo 18. Conociendo la derivada del $\operatorname{arcsen} x$ se puede calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen}^2 (e^x + 3x)$:

1. Podemos escribir $f(x) = H(G(F(x)))$, donde $H(t) = t^2$, $G(y) = \operatorname{arcsen} y$ y $F(x) = e^x + 3x$.
2. Las derivadas de estas funciones son:
$$H'(t) = 2t,$$
$$G'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$
$$F'(x) = e^x + 3.$$
3. Entonces, aplicando la regla de la cadena, tenemos
$$\begin{aligned} f'(x) &= H'(G(F(x)))\, G'(F(x))\, F'(x) \\ &= 2\operatorname{arcsen}(e^x + 3x) \frac{1}{\sqrt{1-(e^x+3x)^2}} (e^x + 3). \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 10. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \operatorname{sen}\left(2 + \cos^3 x\right)$, b. $g(x) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2+3}\right)$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 11. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \operatorname{sen}\left(2^x\right)$, b. $g(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$, c. $h(x) = \dfrac{1+e^{3x}}{\operatorname{sen}^2 x + 3}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 12. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln\left(x^3+x\right)}$, b. $g(x) = \ln\left(\operatorname{sen}^3 x\right)$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 13. Calcúlense, a partir de la derivada de la función inversa, las derivadas de $g(x) = \arccos x$ y $h(x) = \operatorname{arctg} x$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 14. Aplicando la regla de la cadena, calcular la derivada de f si:

a. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(2x^3+3x\right)$, b. $f(x) = \arccos(\ln x)$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 10.

a. $\operatorname{sen}\left(2+\cos^3 x\right)$ se deriva aplicando la regla de la cadena a $F(x)=2+\cos^3 x$ y $G(y)=\operatorname{sen} y$. Se puede escribir $f(x)=G(F(x))=G\circ F(x)$.

1. La derivada de $F(x)=2+\cos^3 x$ es la suma de las derivadas de 2 (que es 0) y $\cos^3 x$. Como la derivada de $\cos x$ es $-\operatorname{sen} x$ y el coseno está elevado a 3, entonces
$$\left(\cos^3 x\right)'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=-3\cos^2 x\operatorname{sen} x.$$
2. Así, $F'(x)$ es
$$F'(x)=-3\cos^2 x\operatorname{sen} x.$$
3. La derivada de $G(x)$ es
$$G'(x)=\cos y.$$
4. Ahora tenemos que aplicar la regla de la cadena
$$\begin{aligned}f'(x)&=G'(F(x))\cdot F'(x)=\cos\left(2+\cos^3 x\right)\cdot\left(-3\cos^2 x\operatorname{sen} x\right)\\&=-3\cos\left(2+\cos^3 x\right)\cos^2 x\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

b. La derivada de $g(x)=\operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2+3}\right)$ se calcula con la regla de la cadena:

1. Podemos escribir $g(x)=G(F(x))=G\circ F(x)$, donde $F(x)=\sqrt{x^2+3}$ y $G(y)=\operatorname{tg}(y)$.
2. Entonces,
$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}2x=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}x,\\G'(x)&=1+\operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

3. Y, así
$$g'(x) = G'(F(x)) \cdot F'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x^2+3}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} x.$$

Solución del ejercicio 11.
a. La derivada de $f(x)$ se calcula con la regla de la cadena.

1. $f(x) = \operatorname{sen}(2^x) = G(F(x))$, con $F(x) = 2^x$ y $G(y) = \operatorname{sen} y$.
2. Las derivadas de F y G son
$$F'(x) = 2^x \ln 2,$$
$$G'(y) = \cos y.$$
3. Y con la regla de la cadena
$$f'(x) = G'(F(x)) \cdot F'(x) = (\cos 2^x)\, 2^x \ln 2.$$

b. Como
$$g(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$$
entonces
$$g'(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x} \left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = 2\operatorname{sen} x \cos x e^{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} 2x e^{\operatorname{sen}^2 x}.$$

c. Hay que aplicar la regla del cociente a $F(x) = 1 + e^{3x}$ y $G(x) = \operatorname{sen}^3 x + 3$.

1. La derivada de $F(x)$ es la derivada de 1 (que es 0) más la derivada de e^{3x}
$$F'(x) = 0 + \left(e^{3x}\right)' = e^{3x}(3x)' = 3e^{3x}.$$

2. La derivada de $G(x)$ es

$$G'(x) = \left(\operatorname{sen}^3 x\right)' + (3)' = 2\operatorname{sen}^{3-1} x\,(\operatorname{sen} x)' + 0$$
$$= 2\operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

3. Entonces

$$h'(x) = \frac{F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x)}{G^2(x)}$$
$$= \frac{3e^{3x}\left(\operatorname{sen}^2 x + 3\right) - \left(1 + e^{3x}\right) 2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\left(\operatorname{sen}^2 x + 3\right)^2}.$$

Solución del ejercicio 12.

a. Tenemos que derivar f como la derivada de una cociente, con $F(x) = 1 + e^{3x}$ y $G(x) = \ln\left(x^3 + x\right)$.

1. La derivada de $F(x)$ es

$$F'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. La derivada de $G(x)$ es

$$G'(x) = \left(\ln\left(x^3 + x\right)\right)' = \frac{1}{x^3 + x}\left(x^3 + x\right)'$$
$$= \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x}.$$

3. Entonces
$$f'(x) = \frac{F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x)}{G^2(x)}$$
$$= \frac{\frac{1}{x}\ln\left(x^3+x\right) - \frac{3x^2+1}{x^3+x}\ln x}{\ln^2\left(x^3+x\right)}$$
$$= \frac{\frac{x^2+1}{x^3+x}\ln\left(x^3+x\right) - \frac{3x^2+1}{x^3+x}\ln x}{\ln^2\left(x^3+x\right)}$$
$$= \frac{\left(x^2+1\right)\ln\left(x^3+x\right) - \left(3x^2+1\right)\ln x}{\left(x^3+x\right)\ln^2\left(x^3+x\right)}.$$

b. $g(x) = \ln\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$ se deriva aplicando la regla de la cadena a $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $G(y) = \ln y$:
$$g'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\left(\operatorname{sen}^2 x\right)' = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\operatorname{cotg} x.$$

Solución del ejercicio 13.

Si $f(y) = \cos y$, su inversa es $g(x) = f^{-1}(x) = \arccos x$, que está definida para $x \in [-1,1]$. Entonces:

1. $f'(y) = -\operatorname{sen} y$.
2. Según la derivada de la función inversa
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}.$$
3. Por otro lado, $x = f(y) = \cos y$, y $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ y
$$g'(x) = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Para calcular la derivada del arcotangente, procedemos de la misma forma:

1. Llamamos $f(y) = \operatorname{tg} y$ y su inversa es $h(x) = f^{-1}(x) = a \operatorname{arctg} x$.
2. $f'(y) = 1 + \operatorname{tg}^2 y$.
3. La derivada de h es
$$h'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$
4. Pero como $x = f(y) = \operatorname{tg} y$, entonces
$$h'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Solución del ejercicio 14.

a. Sabemos que la derivada del $\operatorname{arctg} y$ es $\dfrac{1}{1+y^2}$. Entonces
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (2x^3 + 3x)^2}\left(2x^3 + 3x\right)' \\ &= \frac{6x^2 + 3}{1 + (2x^3 + 3x)^2}. \end{aligned}$$

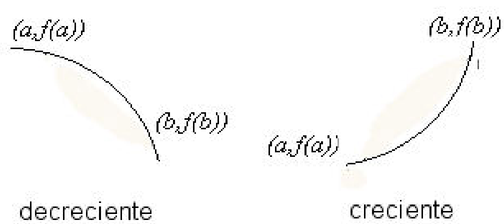
b. Como la derivada del $\arccos y$ es $-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, entonces
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}}(\ln x)' \\ &= -\frac{1}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}. \end{aligned}$$

3.4. Ficha 4: Aplicaciones de la derivada

(De)crecimiento

Una función es monótona creciente (*decreciente*) si para $a \leq b$ cualesquiera, se verifica que $f(a) \leq f(b)$ (*respectivamente* $f(a) \geq f(b)$). Significa que si a es menor o igual (*mayor o igual*) que b, entonces la imagen de a va a ser menor o igual (*mayor o igual*) que la de b.

Una función es estrictamente creciente (*estrictamente decreciente*) si para $a < b$ cualesquiera, se verifica que $f(a) < f(b)$ (*respectivamente* $f(a) > f(b)$). Significa que si a es menor (*mayor*) que b, entonces la imagen de a va a ser menor (*mayor*) que la de b.



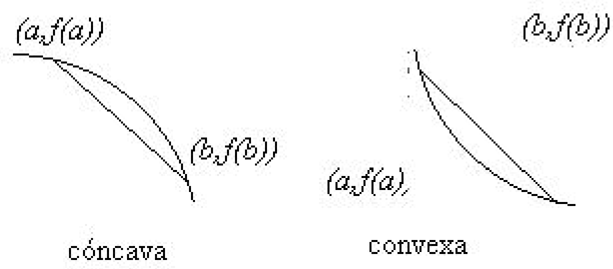
Máximo y mínimo

Una función f tiene un máximo (mínimo) relativo en $x = a$ si en un entorno A de a se verifica que $f(a) \geq f(x)$ ($f(a) \leq f(x)$). Se llaman *extremos relativos*.

El máximo (mínimo) es estricto en $x = a$ si $f(a) > f(x)$ ($f(a) < f(x)$) para todo $x \neq a$, en un entorno de a.

Función cóncava

Una función es cóncava en un intervalo si, intuitivamente, se ve como una "cueva" mirando la función "desde abajo". Esto es lo mismo que decir que si tomamos 2 puntos a y b cualesquiera de la función en este intervalo, al unirlos en la



gráfica por un segmento, la función queda por encima de este segmento. Analíticamente, esto se expresa como

$$f\left(ta+(1-t)\,b\right) > tf\left(a\right)+(1-t)\,f\left(b\right).$$

Función convexa Cuando el segmento queda por encima de la gráfica, la función es convexa. Esto es lo mismo que decir que se verifica

$$f\left(ta+(1-t)\,b\right) < tf\left(a\right)+(1-t)\,f\left(b\right).$$

Punto inflexión Puntos de inflexión son los puntos en los que la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

Determinación de caracaterísticas de la función

Extremos relat. f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Los máximos y mínimos relativos de f son los puntos x_i en los que $f'(x_i)=0$.

- Si $f''(x_i)<0$, entonces es un máximo relativo.
- Si $f''(x_i)>0$, entonces es un mínimo relativo.

- Si $f''(x_i) = 0$, entonces no podemos decir si hay un máximo o mínimo relativo.

Si la función no es derivable, puede haber un máximo o un mínimo y no se puede encontrar por este método.

Ejemplo 19. Consideramos la función $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 3$. Vamos a calcular sus extremos (máximos y mínimos) relativos en $\mathbb{R}$.

1. Derivamos la función:
$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24.$$

2. Igualamos la derivada a 0 y calculamos las raíces de esta ecuación (por Ruffini):
$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 0 \Longleftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2.$$
Estos son los posibles candidatos a extremo.

3. Calculamos la derivada segunda y estudiamos su valor en los puntos anteriores:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 36x^2 + 48x - 12 \\ f''(x_1) &= f''(1) = 72\text{: es mínimo relativo,} \\ f''(x_2) &= f''(-1) = -24\text{: es máximo relativo,} \\ f''(x_3) &= f''(-2) = 36\text{: es mínimo relativo.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Crecim.-decrecim.}}$ f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

- Si $f' > 0$ en un intervalo, la función es creciente en este intervalo.
- Si $f' < 0$ en un intervalo, la función es decreciente en este intervalo.

Ejemplo 20. Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 3$.

1. Por el ejemplo anterior, sabemos que:

   $$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 12(x-1)(x+1)(x+2)$$

   y que sus raíces son $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$.

2. Para estudiar el signo de la derivada, completamos su tabla de signos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

   Esta tabla se construye con los intervalos que determinan las raíces de f' (es decir, $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$). En ella, a partir del signo de los factores de f' (que son $x-1$, $x+1$ y $x+2$) se determina el signo de f'.

3. Podemos concluir que la función es creciente en $(-2,-1)$ y $(1,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2)$ y $(-1,1)$.

Concav.-convex. f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

- Si en un intervalo $f''(x) < 0$, entonces en ese intervalo la función es **cóncava**.
- Si en un intervalo $f''(x) > 0$, entonces en ese intervalo la función es **convexa.**

Ejemplo 21. Estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 3$.

1. Procedemos con la derivada segunda, que es:

$$f''(x) = 36x^2 + 48x - 12 = 12\left(3x^2 + 4x - 1\right).$$

Sus raíces son $x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$ y $x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$ y se puede escribir $f''(x) = \left(x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)\left(x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)$.

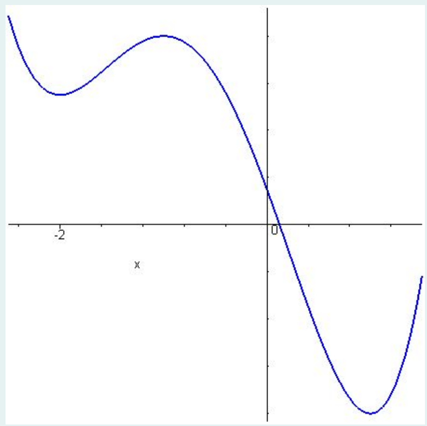
2. Para estudiar el signo de la derivada segunda, completamos su tabla de signos:

	$(-\infty, x_2)$	(x_2, x_1)	(x_1, ∞)
$x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$	$-$	$+$	$+$
$x + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Esta tabla se construye como en el ejemplo anterior.

3. Podemos concluir que la función es cóncava en $\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)$ y convexa en $\left(-\infty, -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right)$ y $\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}, \infty\right)$.

4. La representación gráfica de f es



Punto inflexión

En los puntos de inflexión x_i debe ocurrir $f''(x_i) = 0$. Puede suceder que $f''(x) = 0$ y que x no sea un punto de inflexión. En este último caso podemos estudiar si la función pasa de cóncava a convexa en un entorno de x.

Ejemplo 22. ¿Tiene $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 3$ puntos de inflexión?

1. Igualando a 0 la derivada segunda:

$$f''(x) = 36x^2 + 48x - 12 = 12\left(3x^2 + 4x - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7},\ x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}.$$

2. Estos puntos son de inflexión si f cambia de cóncava a convexa o viceversa. Por el ejemplo anterior, sabemos que sí cambia. Luego x_1 y x_2 son puntos de inflexión.

Ejemplo 23. Vamos a estudiar máximos y mínimos relativos, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y puntos de inflexión de $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.

1. La derivada de la función es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12\left(x^3 - 2x^2 + x\right) \\ &= 12(x-1)^2 x. \end{aligned}$$

2. Esta derivada se anula en $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Estos puntos son los candidatos a extremos relativos.

3. La derivada segunda es

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12\left(3x^2 - 4x + 1\right) = 12(3x-1)(x-1) \\ &= 36\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1). \end{aligned}$$

En x_1 y x_2, la derivada segunda vale:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 12\text{: es mínimo relativo,} \\ f''(x_2) &= f''(1) = 0\text{: no sabemos qué es.} \end{aligned}$$

4. El crecimiento y decrecimiento se estudia con la tabla de signos de f'

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$

5. Entonces la función es creciente $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$.

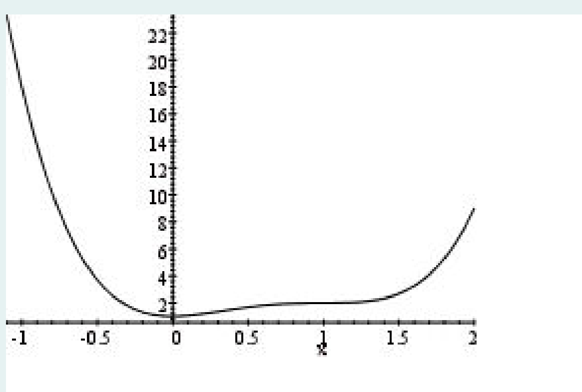
6. La concavidad y convexidad se estudia con la tabla de signos de f'':

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$x - \frac{1}{3}$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

7. Entonces la función es convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y $(1, \infty)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

8. En los puntos de inflexión se debe anular la derivada segunda. Los posibles puntos de inflexión son $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = 1$.

9. En ambos puntos la función cambia de cóncava a convexa o viceversa, por lo que ambos son puntos de inflexión. Así queda despejada la duda sobre si $x = 1$ es máximo o mínimo. La representación gráfica de la función es



Ejercicios propuestos

Ejercicio 15. Calcúlense los máximos y mínimos relativos de $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 80x^3 + 120x^2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 16. Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 80x^3 + 120x^2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 17. Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = x^3 + 3x^2$. ¿Tiene puntos de inflexión? Si es así, ¿dónde?

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 18. Calcúlense los máximos y mínimos relativos de $f(x) = 4x^4 - 2x$. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 15.

Los máximos y mínimos relativos están entre los puntos donde se anula la derivada primera. Según el signo de la derivada segunda, serán de un tipo u otro. Para calcularlos, hacemos:

1. Derivamos $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12 \cdot 5x^4 - 15 \cdot 4x^3 - 80 \cdot 3x^2 + 120 \cdot 2x \\ &= 60x^4 - 60x^3 - 240x^2 + 240x \\ &= 60x\left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right). \end{aligned}$$

2. Estudiamos dónde se anula $f'(x)$. Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= 60x\left(x^3 - x^2 - 4x + 4\right) \\ &= 60x(x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

entonces

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ ó } x_3 = -2.$$

Los posibles extremos relativos son estos puntos.

3. Obtenemos

$$\begin{aligned} f''(x) &= 60 \cdot 4x^3 - 60 \cdot 3x^2 - 240 \cdot 2x + 240 \\ &= 60\left(4x^3 - 3x^2 + 8x + 4\right) \end{aligned}$$

porque estos puntos van a ser máximos o mínimos, según sea su signo.

4. Entonces
$$\begin{aligned} f''(0) &= 60\left(4\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 - 8\cdot 0 + 4\right) \\ &= 60\cdot 4 = 240 > 0\text{: es mínimo relativo,} \\ f''(1) &= 60\left(4\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + 4\right) \\ &= 60\cdot(-3) = -180 < 0\text{: es máximo relativo,} \\ f''(2) &= 60\left(4\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 4\right) \\ &= 60\cdot 8 = 480 > 0\text{: es mínimo relativo,} \\ f''(-2) &= 60\left(4\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 - 8\cdot(-2) + 4\right) \\ &= 60\cdot(-24) = -144 < 0\text{: es máximo relativo.} \end{aligned}$$
Y hay un mínimo donde la derivada segunda es positiva (es decir, en $x_0 = 0$ y $x_2 = 2$) y un máximo donde es negativa: en $x_1 = 1$ y $x_3 = -2$.

Solución del ejercicio 16.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función se determinan a partir del signo de la derivada primera.

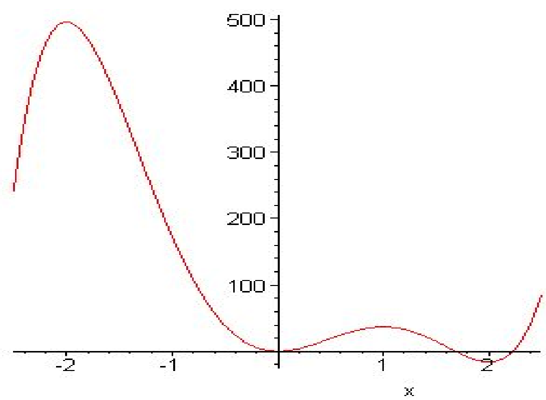
1. Por el ejercicio anterior, sabemos que:
$$f'(x) = 60x(x-1)(x-2)(x+2)$$
y sus raíces son $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ y $x_3 = -2$.

2. Para estudiar el signo de la derivada, completamos su tabla de signos:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

3. Como la derivada primera es positiva en $(-\infty, -2)$, $(0,1)$ y $(2, \infty)$, entonces allí la función es estrictamente creciente. Y es estrictamente decreciente en $(-2, 0)$ y $(1, 2)$.

4. La representación gráfica de f es



Solución del ejercicio 17.

La concavidad y convexidad se determinan con el signo de la derivada segunda.

1. La derivada segunda de f es

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x,$$
$$f''(x) = 3 \cdot 2x + 6 = 6x + 6 = 6(x+1).$$

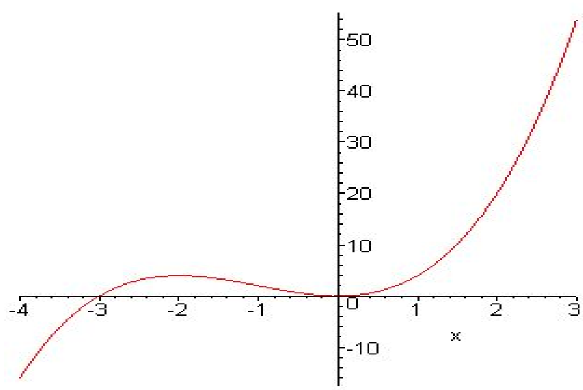
2. La única raíz de f'' es $x_0 = -1$, y se cumple

$$f''(x) > 0 \text{ si } x > -1,$$
$$f''(x) < 0 \text{ si } x < -1.$$

3. Un función es cóncava cuando su derivada segunda es negativa y convexa cuando es positiva. Entonces f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, \infty)$.

4. Una función tiene un punto de inflexión cuando cambia de cóncava a convexa o viceversa. Por tanto, f tiene un punto de inflexión en $x_0 = -1$.

5. La representación gráfica de f es



Solución del ejercicio 18.

1. La derivada de la función es

$$f'(x) = 4 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x = 16x^3 - 4x = 4x(2x-1)(2x+1).$$

2. La derivada se anula en $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$ y $x_3 = -\dfrac{1}{2}$. Estos puntos son los candidatos a extremos relativos.

3. La derivada segunda es

$$f''(x) = 16 \cdot 3x^2 - 4 = 4\left(12x^2 - 1\right).$$

4. En x_1, x_2 y x_3 la derivada segunda vale:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 4\left(12\cdot 0^2 - 1\right) \\ &= -4 < 0\text{: es máximo relativo,} \\ f''(x_2) &= f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) \\ &= 8 > 0\text{: es mínimo relativo,} \\ f''(x_3) &= f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) \\ &= 8 > 0\text{: es mínimo relativo.} \end{aligned}$$

5. El crecimiento y decrecimiento se estudia con la tabla de signos de la derivada primera

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es creciente $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

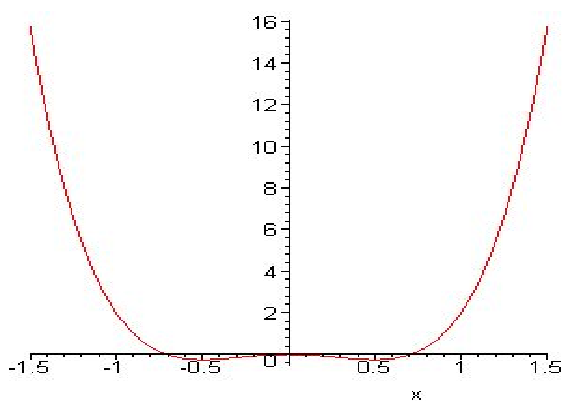
6. La concavidad y convexidad se estudia con la tabla de signos de la derivada segunda. Como podemos escribir $f''(x) = 48\left(x-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, hacemos:

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\infty\right)$
$x-\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-$	$-$	$+$
$x+\frac{\sqrt{3}}{6}$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

7. Entonces la función es convexa en $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

8. Los puntos de inflexión son aquellos donde la función cambia de cóncava a convexa o al revés. Entonces, son $x_4=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ y $x_5=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

9. La representación gráfica de la función es



4. Prueba de autoevaluación

Realice la siguiente prueba para ver si ha asimilado correctamente los contenidos de este módulo.

La derivada no tiene interpretación geométrica.	**Verdadero**	**Falso**
Lo más sencillo para derivar es conocer algunas derivadas y aplicar unas reglas generales.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} + 8x$ es $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + 8$.	**Verdadero**	**Falso**
Si $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2\dfrac{1}{x^3} - 3\dfrac{1}{x^4}$.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $f(x) = \cos(\ln x)$ es $f'(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.	**Verdadero**	**Falso**
Si $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, entonces $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.	**Verdadero**	**Falso**
La derivada de $h(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{tg} x)$ es $h'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$.	**Verdadero**	**Falso**
Si $h(x) = \ln\left(\log\left(x^4\right)\right)$ entonces $h'(x) = \dfrac{4\log e}{x\log x^4}$.	**Verdadero**	**Falso**
La función $f(x) = x^2 - 2x$ tiene un máximo en $x = -1$.	**Verdadero**	**Falso**
La función $f(x) = x^2 - 2x$ es decreciente en $(-\infty, 1)$.	**Verdadero**	**Falso**

Bibliografía

[1] Ballvé, M. E.; Delgado, M.; Porto, A. M.; Ulecia, T.: Problemas de Matemáticas especiales. 2.a ed. Editorial Sanz y Torres: Libro de ejercicios correspondiente al libro de "Matemáticas especiales". Muchos ejercicios resueltos.

[2] Bujalance, E.; Bujalance, J. A.; Costa, A.; Fernández, V.; Fernández, J.; Jiménez, P.; María, J. L. de; Martínez, E.: Matemáticas especiales. 2.a ed. Editorial Sanz y Torres: Libro para el acceso a la Universidad para mayores de 25 años, donde no se requiere base matemática previa. Ejemplos resueltos y ejercicios propuestos no resueltos.

[3] http://w3.cnice.mec.es/Descartes/index.html. Páginas elaboradas dentro del Proyecto Descartes, desarrollado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Es una herramienta capaz de generar materiales interactivos con la que se han construido más de cien unidades didácticas de los distintos cursos de la enseñanza secundaria, accesibles a través de esta página.

[4] Hernández Morales, V.; Ramon Méndez, E.; Vélez Ibarrola, R.; Yáñez de Diego, I.; 2002. Introducción a las Matemáticas. Ediciones Académicas. Madrid: En este libro

están explicadas de forma clara las derivadas, en el Capítulo 7. Se acompaña de numerosos ejemplos y ejercicios.

[5] http://personales.unican.es/gonzaleof/. Página web con 4 cursos de Matemáticas (Primero y Segundo de Bachillerato, Ciencias y Sociales). Material de exposición clara, con numerosos ejemplos y ejercicios.

Índice alfabético