ÁLGEBRA I DOBLE GRADO MATEMÁTICAS - INFORMÁTICA
CONVOCATORIA ORDINARIA Profesor: Bullejos
1-02-2021

1. (1 pto) Denotamos por φ a la función totient de Euler
Calcula $\varphi(230)$ y $19^{-1234567} \mod(230)$

2. (1 pto) Considera la aplicación $f : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11} \quad f(x) = x^4 \mod 11$ y la relación de equivalencia R_f asociada a f

- ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
- Calcula el conjunto cociente $\mathbb{Z}_{11}/R_f$
- ¿Puedo definir $g : \mathbb{Z}_{11}/R_f \to \mathbb{Z}_{11}$ por la fórmula $g(\bar{x}) = x^2 \mod 11$? donde $\bar{x}$ indica la clase de x en el cociente

otro examen igual en $\mathbb{Z}_{10}$.

3. (1 pto) Encuentra el menor entero x mayor que 14535 cuyo doble dea congruente con 69 módulo 153 y cuyo triple sea congruente con 48 módulo 95

4. En $\mathbb{Z}[X]$ factorizar, si es posible, el polinomio $f(x) = x^6 - 3x^4 + 6x^2 + 6x + 1$ como producto de polinomios irreducibles

5. En $\mathbb{Z}[i]$ factorizar como producto de irreducibles $-8 - i; \quad 7 - 6i; \quad -5 - 14i;$ (distintos exámenes)

Test

1. El anillo $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$
a. Tiene característica 9, 9 elementos y 6 unidades
b. Tiene característica 3, 9 elementos y es un cuerpo y por tanto tiene 8 unidades
c. Tiene característica 3, 9 elementos y 6 unidades

2. Considera losideales $I = \langle 5 \rangle$, $J = \langle 1 + 3i \rangle$ de $\mathbb{Z}[i]$ Entonces
a. Ninguna de las otras opciones es cierta
b. $-1 + 2i \in I + J$ y $5 + 5i \in I \cap J$
c. $-1 + 2i \in I + J$ y $5 + 5i \in I$ pero $5 + 5i \notin J$

3. La aplicación $f : A[x] \to A$ que asocia a cada polinomio su coeficiente líder
a. no es morfismo de anillos pero si es sobreyectiva aunque no inyectiva
b. es morfismo de anillos y su núcleo es trivial ya que el único polinomio con coeficiente líder cero es el cero
c. es morfismo de anillos sobreyectivo pero no inyectivo

4. El conjunto $\Delta = \{(n,n);\ n \in \mathbb{Z}\}$
a. no es un ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
b. es un ideal principal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por el elemento $(1,1)$ ya que todo elemento se puede poner como $n \cdot (1,1)$

c. es un ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pero no es principal

5. La aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definida como $f(\frac{n}{m}) = n \cdot m$
a. no está bien definida por lo tanto no tiene sentido preguntarse si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva
b. está bien definida pero no es inyectiva pero si sobreyectiva
c. está bien definida y es inyectiva y sobreyectiva por tanto es una biyección

6.- La aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ definida como $f(n) = (R_4(n), R_9(n))$, donde $R_4(n)$ y $R_9(n)$ son los restos de dividir n entre 4 y 9 respectivamente
a. Es un morfismo de anillos que no es inyectivo pero si sobreyectico
b. Es un morfismo de anillos pero no es sobreyectivo y tampoco inyectivo
c. No es un morfismo de anillos pero si es sobreyectivo aunque no es inyectivo

7. Se considera el conjunto $X = \{a, \{a,b,c\}\}$. Entonces
a. $a \in P(X)$, $\{a,b,c\} \notin P(X)$ y $\{a,b,c\} \subset P(x)$
b. $a \notin P(X)$, $\{a,b,c\} \in P(X)$ y $\{a,b,c\} \not\subset P(x)$
c. $a \notin P(X), \{a,b,c\} \notin P(X)$ y $\{a,b,c\} \not\subset P(x)$

8. Elige la respuesta correcta
a. Todo ideal de un *DE* es principal, pero $\mathbb{Q}[x]$ tiene ideales que no son principales
b. Todo *DE* es un *DFU*, $\mathbb{Z}[x]$ es un *DFU* que no es un *DE*
c. Para todo $n \neq 0$, $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ es un *DFU* y por lo tanto también lo es $\mathbb{Z}[\sqrt{n}][x]$

9. El anillo cociente $\mathbb{Z}[x] / \langle x^2 - 1 \rangle$
a. es finito y por tanto no puede tener característica cero y su cuerpo de fracciones es también finito
b. tiene característica cero pero no es un *DI* y por tanto no tiene cuerpo de fracciones
c. tiene característica cero y por tanto podemos hablar de su cuerpo de fracciones pero este no es $\mathbb{Q}[x] / \langle x^2 - 1 \rangle$

10. Elige la respuesta correcta
a. Podemos hablar del cuerpo de fracciones de cualquier anillo pero el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
b. El cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
c. No podemos hablar del cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

11. Considera los anillos de polinomios $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$ Entonces
a. $\mathbb{Z}_3[x]$ es un subanillo y un cociente de $\mathbb{Z}[x]$
b. $\mathbb{Z}_3[x]$ no es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$ pero si es un cociente de $\mathbb{Z}[x]$
c. $\mathbb{Z}_3[x]$ no es un subanillo de $\mathbb{Z}[x]$ y tampoco un cociente de $\mathbb{Z}[x]$

12. Considera el morfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ definida como $f(x) = (R_4(x), R_6(x))$, donde $R_4(x)$ y $R_6(x)$ indican los restos de dividir x entre 4 y 6 respectivamente. Entonces:
a. f es sobreyectiva y por tanto $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 = \mathrm{Im}(f)$ y un elemento está en el núcleo si y solo si es un múltiplo de 12

b. Un elemento $(a,b) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ está en la imagen de f si solo si los elementos a y b tienen la misma paridad (esto es son los dos pares o los dos impares) y un elemento está en el núcleo de f si y solo si es un múltiplo de 12

c. f es sobreyectiva y por tanto $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 = \mathrm{Im}(f)$ además los múltiplos de 12 están en el núcleo de f pero puede haber otros elementos en el núcleo que no sean múltiplos de 12

13. Considera el ideal $I \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ generado por el elemento $(1,2)$

a. $(3,4) \notin I$ y el cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / I$ tiene infinitos elementos

b. $(3,4) \in I$ pero el cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / I$ tiene infinitos elementos

c. $(3,4) \in I$ y el cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / I$ tiene solo 2 elementos

14. Elige la correcta

a. $\mathbb{Z}[i]$ es un DFU pero $\mathbb{Z}[i][x]$ no lo es

b. $\mathbb{Z}[i]$ es un DE pero $\mathbb{Z}[i][x]$ no lo es

c. $\mathbb{Z}[i]$ es un DE y por lo tanto también lo es $\mathbb{Z}[i][x]$

15. Si A y B son

a. ninguna de las otras opciones es correcta

b. DE entonces el producto $A \times B$ es un DE con función Euclídea el producto de las dos

c. DFU entonces el producto $A \times B$ es un DFU, donde un par factoriza factorizando su componente en A y su componente en B

16. Sea A un DE y $p \in A$ un elemento irreducible. Entonces

a. El anillo cociente A/pA es siempre un cuerpo y tiene la misma característica que A

b. El anillo cociente A/pA es siempre un cuerpo pero su característica no tiene que coincidir con la de A

c. El anillo cociente A/pA puede no ser un DI y por tanto puede no ser cuerpo

17. Considera el conjunto $X = \{a, \{a,b,c\}\}$ Entonces

a. X tiene dos elementos, $a \in X$, $c \notin X$ y $a \subset X$

b. X tiene dos elementos, $a \in X$, $c \notin X$ y $a \not\subseteq X$

c. X tiene tres elementos, $a \in X$, $c \in X$ y $a \not\subseteq X$

18. El anillo cociente $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}}$

a. tiene $12 = mcm(4,6)$ elementos

b. tiene $24 = 4 \cdot 6$ elementos

c. tiene $2 = mcd(4,6)$ elementos

19. Considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(a) = a^2$ y sea R_f la relación de equivalencia asociada a f

a. R_f es una congruencia de anillos y el anillo cociente $\mathbb{Z}/R_f$ es isomorfo a la imagen de f

b. R_f no es una congruencia de anillos y cada clase de equivalencia tiene dos elementos (salvo la del cero que tiene solo uno)

c. R_f es una congruencia de anillos, cada clase de equivalencia tiene dos elementos (salvo la del cero que tiene solo uno) y por tanto el anillo cociente $\mathbb{Z}/R_f$ tiene característica 2

20. Dado K un cuerpo

a. Si K es infinito puede haber un número infinito de anillos cocientes en K

b. Si K es finito solo hay un número finito de anillos cocientes de K pero puede haber más de dos

c. Solo hay dos anillos cocientes en K