Se consideran en $M_2(\mathbb{R})$ los subespacios vectoriales

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : \, a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} : \, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Calcular un endomorfismo $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ que verifique $f(U) = W$ y $f \circ f = f$.
2. Calcular una base de la imagen por la aplicación traspuesta f^t del anulador de U.

Sea $f_\mu\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases usuales es

$$\begin{pmatrix} 3 & \mu+8 & -2\mu-4 \\ -1 & -\mu & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde μ es un número real.

1. Para cada valor de μ, hallar la imagen $\mathbf{Im}(f_\mu)$ y el núcleo $\mathbf{ker}(f_\mu)$ de f_μ. Determinar los valores de μ para los que f_μ es un isomorfismo.
2. Para cada valor de μ, obtener una base de $\mathbf{Im}(f_\mu) \cap \mathbf{ker}(f_\mu)$ y de $\mathbf{Im}(f_\mu) + \mathbf{ker}(f_\mu)$. Determinar los valores de μ para los que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{Im}(f_\mu) \oplus \mathbf{ker}(f_\mu)$.
3. Determinar una base de $\mathbf{Im}(f^t_\mu)$ y de $\mathbf{ker}(f^t_\mu)$, donde f^t_μ es la aplicación traspuesta de f_μ.

Para la siguiente afirmación proporciona una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa:

Sea $V(K)$ un espacio vectorial y v_1, v_2 y v_3 vectores de $V(K)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes.
- $\{v_1 + v_2, v_2, v_2 + v_3\}$ son linealmente independientes.
- $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ son linealmente independientes.

Para la siguiente afirmación proporciona una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa:

Sean $f, g : V \longrightarrow V'$ aplicaciones lineales. Entonces, el rango de la aplicación suma, $r(f+g)$, cumple que $r(f+g) \leq r(f) + r(g)$.

Sean $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 y $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Definimos

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \colon AC = CA\}.$$

1. Probar que U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Encontrar base, ecuaciones cartesianas y dimensión de U.
3. Hallar un subespacio complementario de U.
4. Dado el siguiente subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \colon \mathrm{tr}(A) = 0\},$$

   es decir, el subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices con traza nula, calcular $W + U$ y $W \cap U$.
5. Hallar una forma lineal no nula $\phi \in M_2(\mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ tal que $U \subset \ker(\phi)$ y obtener un base B de $M_2(\mathbb{R})$ tal que ϕ sea la primera forma lineal de B^*.

Sean $S_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2×2 con coeficientes reales y $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de orden menor o igual que 2. Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y sea $f\colon S_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal dada por

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 + 4x, \quad f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 + 2\mu x^2, \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 2(\mu+1)x + 2\mu x^2.$$

1. Para todo valor de μ, calcular bases de $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.
2. Para el mayor valor de μ que sea posible, encontrar bases B de $S_2(\mathbb{R})$ y B' de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que

$$M(f\,,\, B' \leftarrow B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Dados los subespacios $U = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ y $W = L(\{2+2x, -x+x^2\})$, calcular $\operatorname{an}(U)$ y $f^t(\operatorname{an}(W))$ para todo valor de μ.