

Introducción al cálculo vectorial

-
1. Definición de vector
 2. Operaciones con vectores
 3. Expresión en función de los vectores unitarios
 4. Descomposición de un vector en componentes
-

1. Definición de vector

1.1. Necesidad de utilizar vectores

Desde el principio de los tiempos el hombre ha tenido la necesidad de indicar lugares; hacia donde se encontraba el río, en qué dirección estaba la caza o a qué distancia se encontraba una ciudad. Para ello fue necesario llegar a una serie de acuerdos para que todo el mundo interpretase del mismo modo las indicaciones o los mapas; se debe establecer una dirección de referencia (el Norte, el lugar por donde sale el Sol, ...) y una unidad de medida (kilómetros, millas, ...). En física se utilizan los vectores para señalar posiciones, direcciones de movimiento, sentido en que actúan fuerzas, etc. En primer lugar se va a establecer el concepto de **dimensión** y su relación con la cantidad de números necesarios para indicar posiciones.

Supongamos que estamos en una carretera y el coche ha sufrido una avería. Para indicar a la grúa donde debe auxiliarnos basta dar el kilómetro en que nos encontremos. Dicho número indica la distancia desde el principio de la carretera. Somos capaces de determinar exactamente y sin confusión un punto indicando un solo número. Se dice que estamos en una dimensión, es decir en una línea. Matemáticamente una dimensión se representa mediante la recta numérica, donde existen números positivos, negativos y el cero.

Supongamos ahora que estamos en el mar. Para conocer la posición exacta de un barco es necesario dar dos coordenadas que indican la abertura en grados desde dos líneas imaginarias comunes para todo el mundo, el Ecuador y el meridiano de Greenwich. Son necesarios dos números y estamos en dos dimensiones es decir en un plano. En un plano ideal los ejes coordenados actúan como referencia y un punto está claramente definido por sus **coordenadas** que son un par de números.

Supongamos ahora que necesitamos conocer la posición de un avión. Se podría indicar su posición como en el caso del barco pero no se sabría exactamente donde está puesto que

no se conocería su altitud. En este caso se necesitan tres números y por eso estamos en tres dimensiones, es decir en el espacio. Para determinar un punto en el espacio tridimensional se usan tres ejes (X, Y, Z), y por lo tanto son necesarias tres coordenadas.

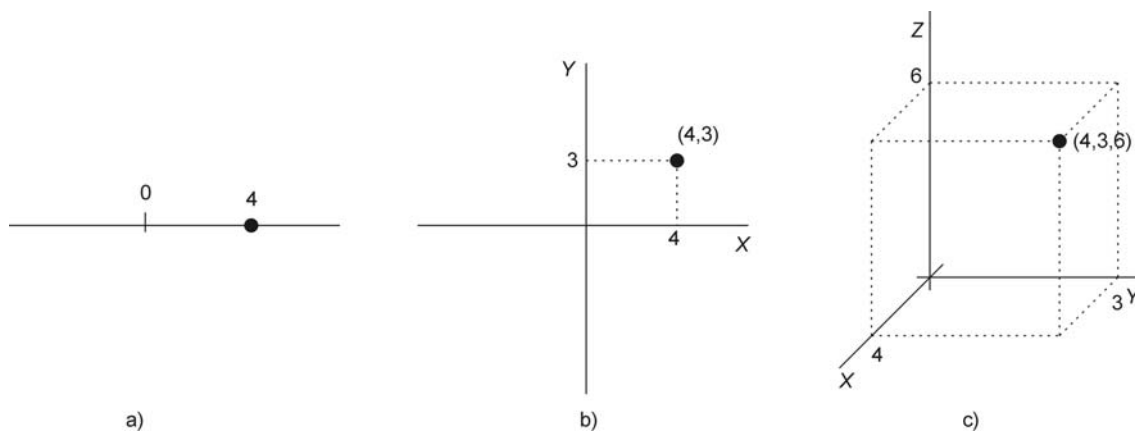


Figura 1. Representación en una, dos y tres dimensiones

1.2. Definición de vector

Se define **vector** como un segmento orientado. Un vector tiene las siguientes características:

- **módulo**: indica la longitud del vector;
- **dirección**: es la inclinación respecto del eje x de la línea recta sobre la que se apoya;
- **sentido**: dentro de la dirección, una de las dos posibles orientaciones;
- **origen y extremo**: son los dos extremos del vector (principio y fin respectivamente);

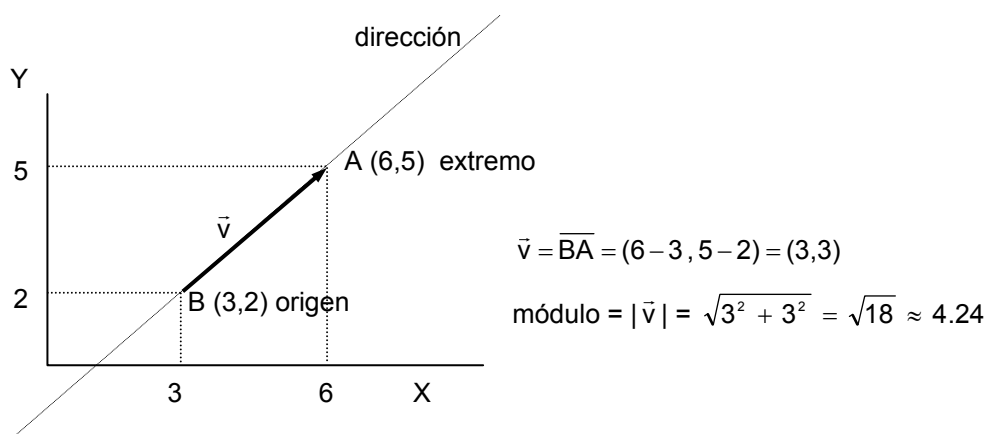


Figura 2. Elementos que caracterizan un vector

Las **componentes** de un vector se definen como la diferencia entre las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen. Dos vectores con las mismas componentes son idénticos en módulo dirección y sentido.

Existen dos tipos de vectores:

- **fijos**: son aquellos que tienen un origen y un extremo fijos, que son los que lo determinan.
- **libres**: son aquellos que se pueden mover por el plano (o el espacio). Son los que generalmente se usan y están determinados por sus componentes.

Se dice que un vector es **unitario** cuando su módulo vale la unidad.

2. Operaciones con vectores

2.1. Módulo de un vector

Para calcular el módulo de un vector se calcula la raíz cuadrada de los cuadrados de cada una de sus componentes. El módulo de un vector siempre es mayor que cero.

Ejemplos:

$$\vec{u} = (4, 3) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{v} = (2, -4, 5) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 6.08...$$

Para convertir un vector en unitario se dividen las componentes del vector entre su módulo.

Ejemplo:

$$\vec{u} = (7, 3, -4) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{74}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{3}{\sqrt{74}}, \frac{-4}{\sqrt{74}} \right)$$

2.2. Suma y resta numérica

Para sumar dos vectores numéricamente se suman las primeras componentes entre sí, las segundas entre sí, etc. La resta se hace de forma similar pero restando las componentes. No es posible sumar o restar vectores que tienen diferentes dimensiones. El módulo de la suma de vectores no es la suma de los módulos de los vectores.

Ejemplos:

$$(3, 5, 0) + (6, -9, -2) = (3+6, 5-9, 0-2) = (9, -4, -2)$$

$$(-4, 7) + (1, 6) + (8, -5) = (-4+1+8, 7+6-5) = (5, 8)$$

$$(4, -5, 3) - (1, -6, -2) = (4-1, -5+6, 3+2) = (3, 1, 5)$$

2.3. Suma y resta gráfica

En lo que sigue hay que tener en cuenta que se está trabajando con vectores libres y por lo tanto se pueden desplazar libremente por el plano siempre que conserven el módulo, la

dirección y el sentido. La suma y la resta de vectores dan como resultado otro vector de la misma dimensión. No se pueden sumar ni restar vectores de dimensión diferente.

Para sumar dos vectores gráficamente se unen el origen de uno en el extremo del otro. El vector suma se obtiene uniendo el origen y el extremo de los vectores que quedan libres (figura 3b). Otra alternativa es aplicar la **regla del paralelogramo**; se unen los orígenes y se forma un paralelogramo. El vector suma tiene su origen en los orígenes de los vectores que se suman y su extremo en el vértice opuesto del paralelogramo (figura 3c). Para restar vectores se unen los orígenes de ambos y el vector diferencia es aquel que tiene su origen en el

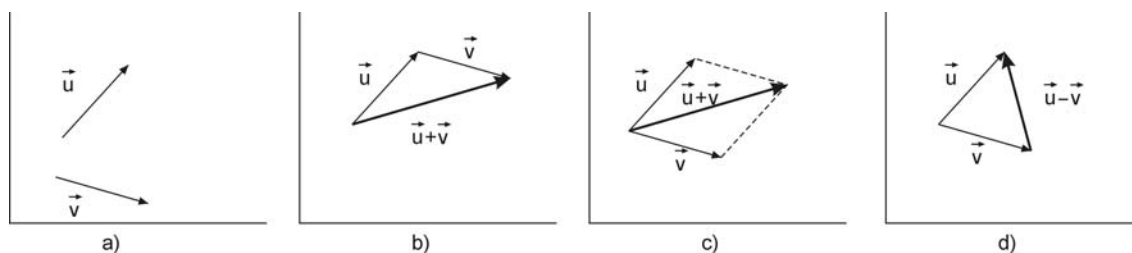


Figura 3. a) vectores libres, b) suma, c) regla del paralelogramo, d) diferencia

sustraendo y su extremo en el minuendo.

2.4. Producto de un número por un vector

Para multiplicar un número por un vector se multiplica el número por cada uno de las componentes del vector. El resultado es otro vector con la misma dirección y, generalmente, módulo y sentido diferentes. Si el escalar es positivo se conserva el sentido (figura 4b y 4d) y si es negativo el sentido cambia (figura 4c). Si el valor absoluto del número es mayor que la unidad aumenta el módulo (figuras 4b y 4c) y si es menor que la unidad el módulo disminuye.

Ejemplos:

$$3 \cdot (2, 5) = (6, 15)$$

$$-4 \cdot (7, 0, -3) = (-28, 0, 12)$$

$$0.5 \cdot (4, -6) = (2, -3)$$

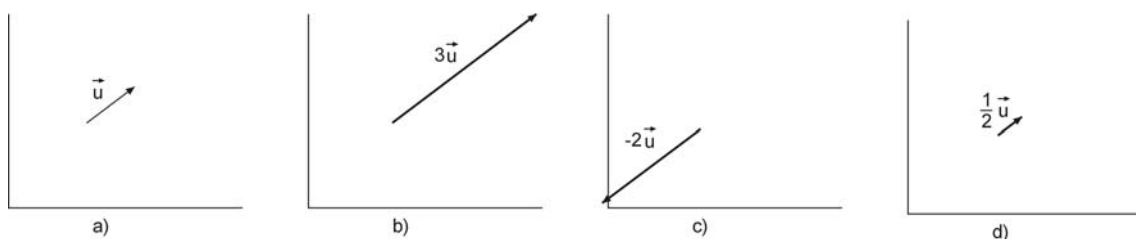


Figura 4. Producto de un número por un vector

2.5. Producto escalar de vectores

El producto escalar de dos vectores se representa con el símbolo ' \circ ', y se calcula multiplicando las componentes entre sí (primera por primera, segunda por segunda, ...) y sumando los resultados. Es importante tener muy en cuenta que el resultado de un producto escalar es un número y no un vector.

Ejemplo:

$$(3, 4) \circ (5, 2) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23$$

$$(6, 0, -2) \circ (3, 9, 5) = 6 \cdot 3 + 0 \cdot 9 + (-2) \cdot 5 = 18 + 0 - 10 = 8$$

Otra forma de calcular el producto escalar es multiplicando los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre vale cero al ser $\cos 90^\circ = 0$.

Para averiguar el ángulo que forman dos vectores se emplea el producto escalar de la forma:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Ejemplo:

Siendo $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (6, 1)$, el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} es:

$$|\vec{u}| = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{37}$$

$$\cos \alpha = \frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 1}{5\sqrt{37}} = 0.8878$$

$$\alpha = 27.41^\circ$$

3. Expresión en función de los vectores unitarios

En muchas ocasiones conviene poder expresar un vector como una suma de vectores. Para ello se emplean tres vectores muy sencillos que representan las direcciones de los ejes coordenados. Estos vectores se denominan **vectores unitarios** porque su módulo vale la unidad y son perpendiculares entre sí. Al vector en el eje x se le llama \hat{i} , el del eje y es \hat{j} y el del eje z es \hat{k} . A continuación se va a demostrar cómo se puede pasar de un modo de representación a otro:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (4, -6, 10) \\ &= (4, 0, 0) + (0, -6, 0) + (0, 0, 10) \\ &= 4(1, 0, 0) - 6(0, 1, 0) + 10(0, 0, 1) \\ &= 4\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}\end{aligned}$$

En lo sucesivo el cambio se realizará de manera inmediata:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (2, -3, 8) = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k} \\ \vec{u} &= (1, 0, -4) = \hat{i} - 4\hat{k}\end{aligned}$$

4. Descomposición de un vector en componentes

4.1 Definición de las funciones seno y coseno

Se van a estudiar ahora dos funciones, **seno** y **coseno**, que son fundamentales en física. Parte de su interés radica en que intervienen en las descomposiciones vectoriales que permiten resolver gran cantidad de situaciones.

Supóngase que se tiene una circunferencia de radio '**R**' y cuyo centro está en el origen de un sistema de referencia. Se traza un radio que formará un ángulo ' α ' con la horizontal. Este radio define dos segmentos '**a**' y '**b**'. Se ve claramente que la longitud de **a** y de **b** depende del radio **R** y del ángulo α . Es más, **a** comienza valiendo cero y aumenta, conforme aumenta α , hasta valer **R**, al tiempo que **b** comienza valiendo **R** y disminuye hasta cero. Estos cambios se recogen en dos funciones, el seno para **a** (cateto opuesto) y el coseno para **b** (cateto contiguo).

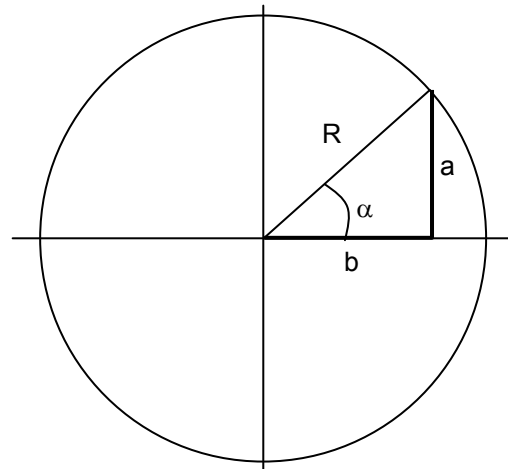


Figura 5. Definición de seno y coseno

Se definen las funciones seno y coseno de la siguiente manera:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{R}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{R}$$

Despejando **a** y **b** se obtiene:

$$a = R \sin \alpha$$

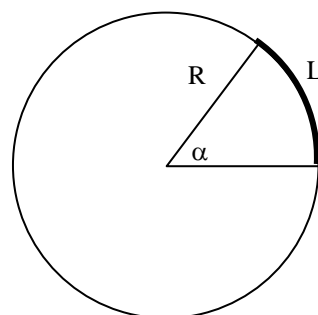
$$b = R \cos \alpha$$

Con lo anterior se puede averiguar cuánto miden **a** y **b** a partir del valor de **R** y α . Esto resulta ser muy práctico para averiguar las componentes de un vector a partir de su módulo y el ángulo que forma con cualquiera de los ejes.

4.2. Medida de ángulos

En física los ángulos se suelen medir en radianes, que su unidad en el sistema internacional. El valor en radianes de un ángulo equivale a la longitud del arco subtendido por dicho ángulo en una circunferencia de radio unidad. En la siguiente tabla se relacionan los valores de ángulos en grados y radianes:

Grados	Radianes
0°	0
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π
x°	$x \cdot \frac{2\pi}{360}$
$x \cdot \frac{360}{2\pi}$	$x \text{ rad}$



$$\alpha = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \alpha \cdot R$$

Figura 6. Definición del ángulo en radianes

Es importante configurar la calculadora en función del tipo de ángulo con el que se va a trabajar. En la pantalla aparecerá "DEG" si la calculadora opera con grados y "RAD" si está en radianes.

4.3. Descomposición de vectores

En muchas ocasiones interesa expresar un vector como suma de dos componentes que estarán en direcciones que resultarán cómodas para trabajar. Supóngase que se tiene un vector e interesa descomponerlo como suma de otros dos que están en la dirección de los ejes 'x' e 'y'. El vector forma un ángulo α con la horizontal como se muestra en la figura 5.

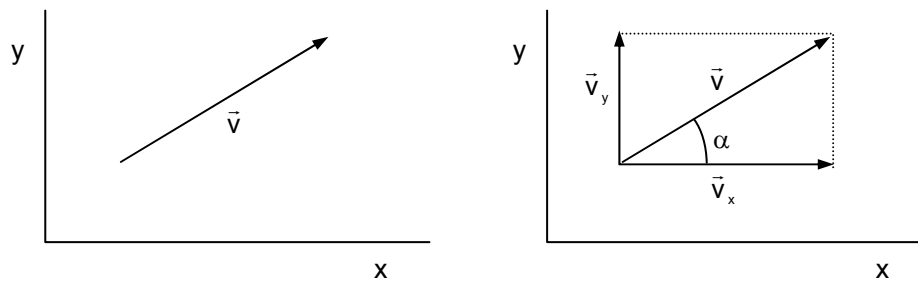


Figura 7. Descomposición de un vector

Se puede ver fácilmente que $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, pero, ¿cuánto valen \vec{v}_x y \vec{v}_y ?

Si se conocen las componentes de \vec{v} es muy sencillo;

$$\vec{v} = (a, b) = a\hat{i} + b\hat{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_x = (a, 0) = a\hat{i} \\ \vec{v}_y = (0, b) = b\hat{j} \end{array} \right.$$

Si se conocen el módulo y el ángulo que forma con la horizontal de \vec{v} ;

$$\begin{aligned} \vec{v}_x &= |\vec{v}| \cos \alpha \hat{i} && \rightarrow \text{solo componente 'x'} \\ \vec{v}_y &= |\vec{v}| \sin \alpha \hat{j} && \rightarrow \text{solo componente 'y'} \end{aligned}$$

Esto último es muy práctico para sumar vectores cuando no se conocen las componentes de dichos vectores.

Si se quieren obtener los valores del ángulo y del módulo a partir de las componentes:

$$\vec{v} = (a, b) = a\hat{i} + b\hat{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{array} \right.$$

Como ejemplo vamos a sumar los vectores de la siguiente figura de los que sólo conocemos su módulo y los ángulos que forman con el eje x. En primer lugar se descomponen los vectores \vec{u} y \vec{v} en los ejes 'x' e 'y' de esta manera se hace que las componentes \vec{u}_x y \vec{v}_x

sean paralelas en el eje 'x' y lo mismo ocurre con las componentes \vec{u}_y y \vec{v}_y en el eje 'y'. Hay que tener en cuenta que a veces las componentes de un vector pueden ser negativas, tal como ocurre con la componente 'x' del vector \vec{v} . Al calcular el valor del seno o coseno en la calculadora aparece automáticamente el signo correspondiente. Atendiendo a los ángulos de este ejemplo se obtiene lo siguiente:

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} = u \cos \alpha \hat{i} + u \sin \alpha \hat{j} = (u \cos \alpha, u \sin \alpha)$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = v \cos \beta \hat{i} + v \sin \beta \hat{j} = (v \cos \beta, v \sin \beta)$$

En este caso el término 'cos β ' es negativo al ser $\beta > 90^\circ$. Sumando los vectores componente a componente se obtiene que el vector suma, al que llamaremos \vec{w} , será:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u \cos \alpha + v \cos \beta, u \sin \alpha + v \sin \beta) = (u \cos \alpha + v \cos \beta) \hat{i} + (u \sin \alpha + v \sin \beta) \hat{j}$$

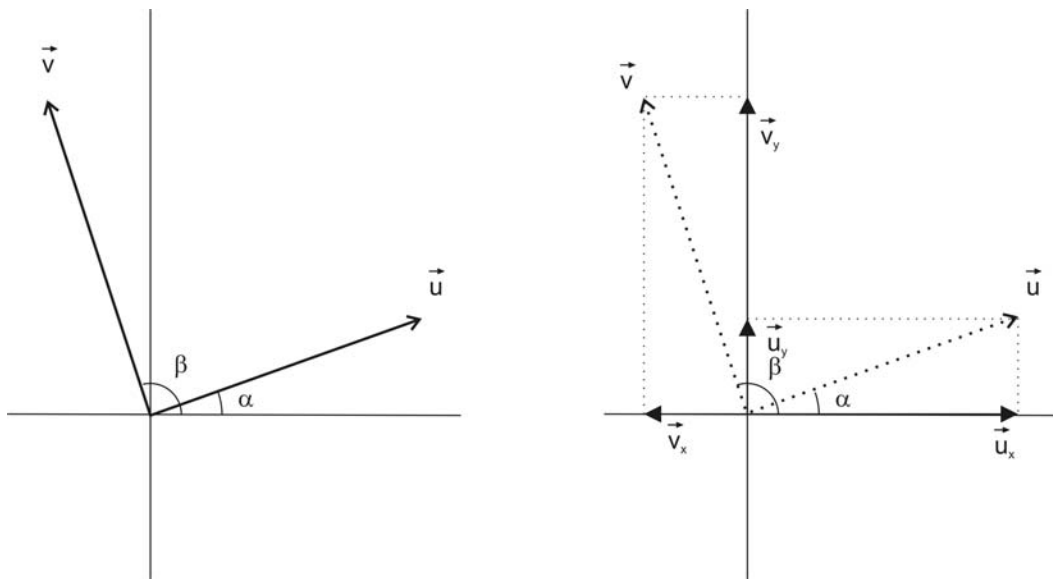


Figura 8. Descomposición de vectores.

Ejercicios

- Un vector tiene su origen en el punto $(3, -4)$ y su extremo en el punto $(-2, 1)$.
 - representa gráficamente el vector.
 - calcula las componentes del vector
 - calcula el módulo, y comprueba con una regla que mide lo que has calculado

2. Completa

Vector	Extremo	Origen	Módulo
	$(3, 2)$	$(0, 6)$	
$(8, 3)$	$(-4, 5)$		
$(-2,)$	$(4, 1)$	$(, 5)$	
$(-6, -7)$		$(-4, 2)$	

3. Realiza las siguientes operaciones con vectores numéricamente:

- $(2, 3, 0) + (5, -3, -7) + (-2, 0, 6)$
- $(4, 1, 13, -18) + (3, 0, -43, 19) - (20, -23, 5, -6)$
- $3(2, -5) + 2(-8, 0) - 7(1, 2)$

4. Sabiendo que $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{k}$ determina numéricamente las siguientes operaciones: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $2\vec{u} + 4\vec{v}$, $3\vec{u} - 2\vec{v} + \hat{k}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|6\vec{u}|$

5. Calcula numérica y gráficamente los resultados de las siguientes operaciones. Comprueba que ambas soluciones son el mismo vector.

- $(2, 3) + (4, -2)$
- $(-4, 4) + (5, 4)$
- $(-2, -5) - (6, 1)$
- $(1, 5) - (4, 2)$

6. De los vectores $(3, 5, -2)$ y $(9, 0, 5)$.

- calcula los módulos
- calcula el producto escalar
- calcula numéricamente mediante el producto escalar el ángulo que forman.

7. Representa el vector $(4, 3)$

- descomponlo gráficamente en dos vectores uno sobre el eje 'x' y el otro sobre el eje 'y'
- calcula numéricamente el valor de las dos componentes
- calcula numéricamente el módulo de las componentes
- calcula numéricamente el ángulo que forma el vector con el eje 'x'

e) usa regla y transportador para comprobar que coinciden las medidas del dibujo y los resultados de los apartados anteriores

8. El módulo de un vector vale 35, y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Expresar dicho vector en sus componentes.

9. Calcular el módulo y el ángulo que forma con la horizontal de un vector cuyas componentes son $(6, -4)$.

10. Calcula qué ángulo forman los vectores $(-3, 5)$ y $(6, 8)$

11. Calcula cuánto tiene que valer A para que los vectores $(A, 3)$ y $(-9, -6)$ sean perpendiculares. Representa ambos vectores.

12. Expresa en componentes los siguientes vectores.

a) módulo = 12 y $\alpha = 20^\circ$ con el eje x

b) módulo = 50 y $\alpha = -74^\circ$ con el eje x

c) módulo = 30 y $\alpha = 16^\circ$ con el eje y

13. Calcula las componentes de dos vectores cuyos módulos valen 15 y 25 y que forman ángulos de 30° y 80° respectivamente con el eje x. Suma ambos vectores.

14. Calcula la suma de tres vectores cuyos módulos valen 5, 10 y 20 y los ángulos 15° , 35° y 150° con el eje x.

15. Dos vectores de módulo 20 forman entre sí 50° de ángulo. Sitúalos en los ejes coordenados y súmalos.