GEOMETRIA I

GRADO DE MATEMÁTICAS
DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS e INFORMÁTICA
24 de enero de 2022 Convocatoria ordinaria

1. (2 ptos) Sean $U_1,\ldots,U_n$ una familia finita de subespacios vectoriales de un espacio vectorial V. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \left\{u_1 + \ldots + u_n \,:\, u_i \in U_i \;\; \forall i \in \{1,\ldots,n\}\right\}$$

Por definición $\sum_{i=1}^{n} U_i = L\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)$

2. (2 ptos) Sean V y V' espacios vectoriales finito generados y sean $\Phi : V \to V^{**}$, y $\Phi' : V' \to V'^{**}$ los correspondientes isomorfismos del Teorema de Reflexividad. Demostrar que si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal entonces $\Phi' \circ f = (f^t)^t \circ \Phi$.

3. (3 ptos) En el espacio vectorial $A_3(\mathbb{R})$ de las matrices antisimétricas de orden 3 con coeficientes reales, se considera el subespacio vectorial

$$U = \left\{A \in A_3(\mathbb{R}) \,:\, traz(A \cdot M) = 0\right\}$$

siendo $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcular un subespacio complemetario de U en $A_3(\mathbb{R})$

(b) Calcular un subespacio complementario de $L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + U\right\}\right)$ en $A_3(\mathbb{R})/U$

(c) Sea $f : A_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(A) = traz(AM)$, comprobar que $f \in A_3(\mathbb{R})^*$ y calcular una base de $A_3(\mathbb{R})^*$ que contenga a f.

4. (3 ptos) Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular, en caso de que existan, bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de f en esas bases sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Determinar si es posible resolver el apartado anterior con una única base $\left(B = B'\right)$, y si es posible calcular dicha base.