Álgebra Lineal y Geometría I – Grado en Física. 2020-21

Ejercicios del Tema 2 - Aplicaciones lineales

1. Decidir si son aplicaciones lineales las siguientes aplicaciones:

    a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = |t|$
    b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{x-y}{3}$
    c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad h(s,t) = \left(\begin{smallmatrix} s+2t & s-t \\ -t & s+t \end{smallmatrix}\right)$
    d) $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad l(s,t) = x^2 + (2s-t)x + (s-2t)$

2. Hallar el núcleo y la imagen de cada una de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, definidas por las siguientes expresiones:

    a) $f(x,y) = (3x-2y, x+4y)$
    b) $g(x,y) = (x-y, 0)$
    c) $h(x,y) = (x+2y, 3x+6y)$
    d) $f_0(x,y) = (0,0)$

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal definida por

    $$f(1,0,0) = (2,1), \quad f(0,1,0) = (3,2), \quad f(0,0,1) = (-1,1).$$

    Llamando $(x', y') = f(x,y,z)$, escribir las ecuaciones de f, que relacionan las x', y' con las x, y, z. Escribir la matriz asociada a f y la ecuación matricial correspondiente. Hallar una base de $\ker(f)$. ¿Es $B_u = \{(1,0),(0,1)\}$ una base de $\mathrm{im}(f)$?

4. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que verifican

    $$f(1,0) = (2,2,0), \quad f(0,1) = (-1,1,1)$$
    $$g(1,1) = (1,3,1), \quad g(1,-1) = (3,1,-1).$$

    Probar que $f(x,y) = g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Hallar la matriz asociada y el rango de la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z,t) = (2x-2y-2z+2t\,,\ x-y-z+t\,,\ x+y+2z-t)$. Discutir si f es inyectiva o sobreyectiva.

6. Dar un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el plano dado por la ecuación $2x+2y-z=0$ y cuyo núcleo contenga al vector $(0,0,1)$.

7. Dar una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, cuyo núcleo sea el plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}$ y cuya imagen sea la recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - 2y = 0\}$.

8. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

    $$f(1,0,1) = (1,1), \quad f(1,0-1) = (0,1), \quad f(1,1,1) = (1,0)$$

    Hallar la matriz de f respecto a las bases usuales. Encontrar unas bases del núcleo y de la imagen de f.

9. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, con $f(x,y,z) = (x-z, y-x, z-y)$. Hallar una base de $f(W)$, siendo W el subespacio definido por la ecuación $y+z=0$.

10. Sean $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to W$ dos aplicaciones lineales. Probar que $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$ si y sólo si $g \circ f$ es igual a la aplicación nula.

11. Probar que la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (2x-y, x-2y)$ es un isomorfismo. Hallar g^{-1}.

12. Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_a(x,y) = (ax+y, x+ay, ax+ay)$. Hallar los valores de a para los que f_a es inyectiva.

13. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de manera que $f(U) = W$, siendo U y W los subespacios definidos por

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}, \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\}.$$

14. Sean U y V dos espacios vectoriales y $f\colon U \to V$ una aplicación lineal. Razonar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

    a) Si $\operatorname{rango}(f) \geq \dim(V)$ entonces $\operatorname{rango}(f) = \dim(V)$.
    b) Si $\operatorname{rango}(f) = \dim(\ker(f))$ entonces $\dim(U)$ es par.
    c) Si $\operatorname{rango}(f) \geq \dim(U)$ entonces f es inyectiva.

15. Sean U, V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Probar que si $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to W$ son dos aplicaciones lineales entonces la composición

$$g \circ f\colon U \to W$$

es una aplicación lineal.

16. Sean $B = \{b_1, b_2\}$ y $C = \{c_1, c_2\}$ dos bases de un espacio vectorial U, tales que

$$c_1 = 2b_1, \qquad c_2 = b_1 - b_2.$$

Si un endomorfismo f de U tiene por matriz asociada $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ respecto a la base B, ¿cuál es la matriz asociada a f respecto a la base C?

17. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (2x+y-z, -x-2y+z, x-5y-2z)$. Hallar la matriz asociada a f respecto a la base

$$B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

18. Deducir razonadamente si son verdaderas las siguientes afirmaciones:

    a) Todo endomorfismo inyectivo es sobreyectivo.
    b) La composición de monomorfismos es un monomorfismo.
    c) La imagen de un subespacio de dimensión 1 es un subespacio de la misma dimensión.

19. Sea $f\colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}'$ una aplicación lineal con $\ker(f) = \{\bar{0}\}$. Probar que si $f(\bar{u})$, $f(\bar{v})$ y $f(\bar{w})$ son linealmente dependientes entonces también $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son linealmente dependientes.

20. Sabemos que $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas reales de orden 2. Justificar que existe una y solo una aplicación $f\colon \mathbf{S}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que es lineal y verifica:

$$f\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\big) = (2,0,1), \quad f\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = (1,1,1) \quad \text{y} \quad f\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\big) = (1,0,2).$$

Hallar $M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}_\circ)$, es decir, la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ y de la base estándar $\mathcal{B}_\circ$ de $\mathbb{R}^3$.

21. Responde razonadamente si es cierto o no que para cualquier endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ se verifica que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

22. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (2x-y-z, -x+y+2z, x-y-2z)$. Hallar una base del núcleo de f y una base de la imagen de f. Comprobar si $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

23. Sea $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión n. Supongamos que existe un endomorfismo, $f \in \operatorname{End}(\mathbf{V})$, que verifica: $f^2 = f \circ f = -\mathbf{I_V}$ ($\mathbf{I_V}$ es la identidad en $\mathbf{V}$). Comprueba entonces que f es un isomorfismo y que la dimensión n debe ser par.

24. Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$f(x,y,z,t) = (2x-y-2z+t\,,\, x-y-z+t\,,\, x-2y-z+2t).$$

   a) Halla, si existen, unas bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $M(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   b) Sea $\mathbf{U}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación implícita es $x - z + t = 0$. Determina $\mathbf{U} + \ker(f)$ y $\mathbf{U} \cap \ker(f)$.

   c) Encuentra un subespacio vectorial, $\mathbf{W}$, de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{W} \oplus \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$.

25. Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{S}_2$ de las matrices reales simétricas de orden 2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbf{S}_2$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x+y+\alpha z & y-z \\ y-z & x-y+2z \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular la imagen y el núcleo de f según los valores de α y discute en cada caso si la aplicación f es un isomorfismo.

   b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{S}_2$ cuyos dos primeros vectores sean $f(1,0,0)$ y $f(0,1,0)$ y calcula la matriz $M(f,\mathcal{B}_\circ,\mathcal{B})$, siendo $\mathcal{B}_\circ$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

26. En el espacio vectorial $\mathbf{A}_3(\mathbb{R})$ de las matrices reales y antisimétricas de orden 3, demuestra que existe una y sólo una aplicación lineal $f\colon \mathbf{A}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$f\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = (2,0,-1), \quad f\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = (0,-2,1) \quad \text{y} \quad f\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\Big) = (1,1,-1).$$

Calcula el núcleo y la imagen de f. Halla $M(f,B_u,B_\circ)$, es decir, la matriz de f respecto de la base $B_u = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ de $\mathbf{A}_3(\mathbb{R})$ y la base canónica $B_\circ$ de $\mathbb{R}^3$.

27. Sea V el conjunto de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que coinciden con la traspuesta de su conjugada y además tienen traza cero, es decir

$$V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,:\, A = \bar{A}^t,\ \text{traza}(A) = 0\}.$$

a) Prueba que V es un espacio vectorial real y calcula su correspondiente dimensión.

b) Construye un epimorfismo de V en $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ (matrices simétricas reales de orden dos). Calcula también el núcleo del mismo.

28. Sea M una matriz fija en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se define la aplicación $f_M : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ por

$$f_M(A) = M \cdot A, \qquad \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

a) Comprueba que f_M es lineal cualquiera que sea M.

b) Calcula el núcleo y la imagen de f_M en los casos siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

c) ¿Cómo tiene que ser M para que f_M no sea un automorfismo?

29. Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2a - b - 2c + d,\ a - b - c + d,\ a - 2b - c + 2d).$$

a) Calcula el núcleo y la imagen de dicha aplicación lineal

b) Calcula complementarios de dichos subespacios vectoriales en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

30. Sean $\mathbf{A}_3(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas de orden 3, y $\mathbb{R}_2[x]$, los polinomios de grado menor o igual que dos, con coeficientes reales. Calcular un isomorfismo $f : \mathbf{A}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$f\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2.$$

31. Hallar la base dual $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B} = \{(1,2), (-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

32. Se tienen las tres formas lineales de $\mathbb{R}^3$ definidas por:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y,z) &= x - y \\ \psi_2(x,y,z) &= y - z \\ \psi_3(x,y,z) &= 2x - z \end{aligned}$$

a) Expresar cada forma lineal como combinación lineal de la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Comprobar que $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^{3*}$.

c) Hallar la base de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual es la base que se ha dado.

d) Hallar las coordenadas, en la base dual canónica y en la base dada, de la forma lineal α definida por $\alpha(x,y,z) = x - y - z$.

33. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,1,-2),(1,0,1)\}$. Sin calcular su base dual, calcula las coordenadas en ella de la forma lineal $\phi \in \mathbb{R}^{3*}$, definida por $\phi(x,y,z) = 2x + y + z$.

34. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2, se consideran los polinomios $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = t + t^2$ y $p_3(t) = 2 + 2t + t^2$.

   a) Sabemos que $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Calcular su base dual $\mathcal{B}^*$.

   b) Calcular las coordenadas en $\mathcal{B}^*$ de las formas lineales ω, ϕ, ψ dadas por:

$$\omega(a + bt + ct^2) = 3a - c, \quad \phi\big(p(t)\big) = \int_0^1 6\,p(t)\,dt, \quad \psi\big(p(t)\big) = p(-1).$$

35. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (polinomios con grado menor o igual a dos y coeficientes reales) se considera la siguiente base

$$\mathcal{B} = \{P_1(t) = 1 - t^2; P_2(t) = 2 + t^2; P_3(t) = t - 2t^2\}.$$

   a) Calcula la base dual de $\mathcal{B}$

   b) Calcula las coordenadas, en dicha base dual, de la forma lineal, ψ, en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$\psi(P(t)) = \int_0^2 P(t)\,dt.$$

36. Considera los vectores $v_1 = (0,1,2)$ y $v_2 = (2,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcula una forma lineal, no nula, $\varphi_3 \in \mathbb{R}^{3*}$ tal que $\varphi_3(v_1) = \varphi_3(v_2) = 0$. Encuentra un vector v_3 y dos formas lineales φ_1 y φ_2, de tal manera que $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

37. Sobre el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden dos, se definen las formas lineales φ y ψ por:

$$\varphi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + t \qquad \text{y} \qquad \psi\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x + y + z + t.$$

   a) Ampliar $\{\varphi, \psi\}$ a una base del espacio dual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Hallar la matriz de cambio de base entre la base obtenida en el apartado anterior y la base dual de la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

38. Sabemos que $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas reales de orden 2.

   a) Hallar su base dual $\mathcal{B}^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (Nota: Expresar cada $\omega_i \colon \mathbf{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como aplicación que actúa sobre $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$).

   b) Hallar la forma lineal $\psi \in \mathbf{S}_2(\mathbb{R})^*$ cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}^*$ son $(2,1,3)$.

39. En el espacio vectorial $\mathbf{S}_2(\mathbb{R})$ (matrices reales y simétricas de orden dos) se considera la base siguiente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

   Calcula su base dual, $\mathcal{B}^*$. Halla (respecto a la base $\mathcal{B}^*$) las coordenadas de la forma lineal, $\psi \colon \mathbf{S}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, que lleva cada matriz simétrica en su traza.

40. En $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que uno. se considera, para cada número real a, la forma lineal:

$$\phi_a \colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \phi_a(p(t)) = p(a).$$

Probar que ϕ_a y ϕ_b forman una base del espacio dual $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})^*$ si y sólo si $a \neq b$.

41. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de los polinomios con grado menor o igual que dos. Se pide:

   a) Calcula una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en la que los polinomios $P_1(t) = 1 + t^2$ y $P_2(t) = 1 + t - t^2$ tengan coordenadas $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, respectivamente.

   b) Sin calcular la base dual $\mathcal{B}^*$, de la base anterior, calcula las coordenadas en ella de las formas lineales $\varphi, \psi \in (\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))^*$ definidas por

$$\varphi(P(t)) = \int_0^1 P(t)\, dt \qquad \psi(P(t)) = P(3)$$

42. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las 2 formas lineales:

$$\varphi(\vec{v}) = \varphi(x, y, z) = 2x - y, \qquad \psi(\vec{v}) = \psi(x, y, z) = y - 3z.$$

   a) Calcula la matriz que representa, en la base canónica, al endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$f(\vec{v}) = (\varphi(\vec{v}) - \psi(\vec{v})\, ,\, \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v})\, ,\, 2\varphi(\vec{v}) - \psi(\vec{v})).$$

   b) Calcula también el núcleo, la imagen, el determinante y la traza de dicho endomorfismo.

43. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las formas lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y, \qquad \varphi_2(x, y, z) = x + z, \qquad \varphi_3(x, y, z) = x + 2z.$$

   a) Comprueba que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ forman una base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

   b) Calcula la base B de $\mathbb{R}^3$ cuya base dual es $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

   c) Sea $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3$. Calcula la matriz de la aplicación traspuesta de ψ en las bases B^* y la base dual de la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ (considerando $\mathbb{R}$ como espacio vectorial de dimensión 1).

   d) Obtener también la imagen de g por la traspuesta de ψ, siendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = 3t$ (considerando g como forma lineal sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}$).

44. En $\mathbb{R}^4$ se consideran las cuatro formas lineales $\varphi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dadas por

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -y - t,\ \varphi_2(x, y, z, t) = x + z,\ \varphi_3(x, y, z, t) = 2x + t,\ \varphi_4(x, y, z, t) = 2y - z.$$

   a) Probar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ forman base de $(\mathbb{R}^4)^*$.

   b) Calcular la base B cuya base dual es $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$.

   c) Dada $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 - \varphi_4$, calcular la matriz de la aplicación traspuesta de ψ con respecto a la base B^* y también con respecto a la base dual de la base usual de $\mathbb{R}^4$.