GEOMETRÍA I
(Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)

Examen cuatrimestral, 2ª parte
(27/01/2017)

1. [**2,5 puntos**]. Sean $V(K), V'(K)$ dos espacios vectoriales finitamente generados, y $f : V \to V'$ una aplicación lineal.

   a) Demostrar: $\mathrm{an}(\mathrm{Im} f) = \mathrm{Nuc}\ f^t$.

   b) Razonar que los rangos de f y f^t coinciden.

2. [**4 puntos**]. Se considera el espacio vectorial de las matrices antisimétricas $A_3(\mathbb{R})$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to A_3(\mathbb{R})$ que se obtiene extendiendo por linealidad las igualdades:

$$f(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinar una base ordenada B de $\mathbb{R}^4$ y otra B' de $A_3(\mathbb{R})$ tales que la matriz de f en estas bases sea del tipo: $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, para ciertos números naturales m, n, r.

3. [**3,5 puntos**]. Se considera el espacio vectorial de polinomios $\mathbb{R}_2[x]$ y los conjuntos ordenados de formas lineales $C = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$ y $C' = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ definidos por:

$$\phi^1(p(x)) = p(-1), \qquad \phi^2(p(x)) = p(1), \qquad \phi^3(p(x)) = p(2);$$

$$\psi^1(p(x)) = 3\int_{-1}^{1} p(x)dx, \qquad \psi^2(p(x)) = p'(1), \qquad \psi^3(p(x)) = p''(1).$$

   donde $p'(1)$ y $p''(1)$ denotan, respectivamente, primera y segunda derivada del polinomio $p(x)$ evaluada en 1.

   a) Demostrar que C y C' son bases de $\mathbb{R}_2[x]^*$.

   b) Calcular la matriz de cambio de base (matriz de paso) de C a C'.

   c) Calcular dos bases, B y B', de $\mathbb{R}_2[x]$ tales que $B^* = C$ y $B'^* = C'$.

Duración: 1:30 min.