Topología I – Resolución examen convocatoria extraordinaria

1.- En $\mathbb{R}^2$ se considera la familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{U \times \{y\} \mid U \in \mathcal{T}_u, y \in \mathbb{R}\} .$$

a) **Prueba que $\mathcal{B}$ es una base para alguna topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.**
En primer lugar observemos que $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{y\in\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \{y\})$. Además para $U \times \{y\}$, $U' \times \{y'\}$ $\in \mathcal{B}$ tenemos que

$$(U \times \{y\}) \cap (U' \times \{y'\}) = (U \cap U') \times (\{y\} \cap \{y'\})$$

Es claro que

$$(U \times \{y\}) \cap (U' \times \{y'\}) = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad y \neq y' \\ (U \cap U') \times \{y\} & \text{si} \quad y = y' \end{cases}$$

por lo que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ es otro elemento de $\mathcal{B}$.

Otra forma: Observemos que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\} ,$$

donde $\mathcal{B}_1 = \mathcal{T}_u$ es una base de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $\mathcal{B}_2 = \{\{y\} \mid y \in \mathbb{R}\}$ es una base de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$, $\mathcal{T}_D$ la topología discreta. Por lo visto en clase sabemos que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_D$.

b) **Prueba que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ verifica el primer axioma de numerabilidad (encontrando en cada punto una base de entornos adecuada) pero no el segundo.**
Veamos que $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \times \{y\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en (x, y) de $\mathcal{T}$. Es claro que los elementos de $\mathcal{B}_{(x,y)}$ son entornos de (x, y) porque son abiertos básicos que contienen a (x, y). Consideremos ahora $V \in \mathcal{N}^{\mathcal{T}}_{(x,y)}$ entonces sabemos que existe $\widetilde{U} \in \mathcal{T}$ tal que $(x, y) \in \widetilde{U} \subset V$. Pero entonces como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ tenemos que existe $U \in \mathcal{T}_u$ tal que $(x, y) \in U \times \{y\} \subset \widetilde{U} \subset V$. Basta observar ahora que $\mathcal{B}_x = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en x de $\mathcal{T}_u$.
Veamos que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no verifica el segundo axioma de numerabilidad. Para ello basta observar que si denotamos $S = \{0\} \times \mathbb{R}$ se tiene que $\mathcal{T}_{|S} = \mathcal{T}_D$, donde $\mathcal{T}_D$ es la topología discreta. Como $(S, \mathcal{T}_D)$ no verifica el segundo axioma de numerabilidad y esta propiedad es hereditaria concluimos que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no puede verificar este axioma.

Otra forma de comprobar que no es 2AN: Del apartado a) tenemos que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_D)$. Por tanto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no es 2AN porque uno de los factores del producto $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$ no es 2AN.

c) **¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ un espacio Hausdorff?**
Es Hausdoff por ser producto de dos espacios topológicos Hausdorff.

d) Calcula las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

Observemos que $\{\mathbb{R} \times \{y\}\}_{y \in \mathbb{R}}$ es una partición por abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$. Por un ejercicio visto en clase tenemos que esas son las componentes conexas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

e) Dado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ identifica la topología $\mathcal{T}_{|A}$.

Comprobemos que $\mathcal{T}_{|A} = \mathcal{T}_D$. Para ello basta observar que para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap A = \{(y, y)\}$$

y por tanto todos los puntos de A pertenecen a $\mathcal{T}_{|A}$.

f) Describe los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

Veamos que los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ son de la forma

$$\left\{ K \subset \mathbb{R}^2 \;\middle|\; K = \bigcup_{i=1}^{n} (K_i \times \{y_i\}), K_i \text{ compacto de } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es claro que los subconjuntos de esa forma son compactos en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ ya que son unión finita de subconjuntos de la forma $K_i \times \{y_i\}$ que son compactos por ser producto de compactos.

Por otra parte, como hemos comentado en el apartado d) se tiene que $\{\mathbb{R} \times \{y\}\}_{y \in \mathbb{R}}$ es una partición por abiertos de $\mathbb{R}^2$, en particular un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{R}^2$. Por tanto si K es un compacto de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ debe estar contenido en una cantidad finita de esta rectas horizontales, es decir $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \times \{y_i\})$, para $n \in \mathbb{N}$. Además $K \cap (\mathbb{R} \times \{y_i\}) = K_i \times \{y_i\}$ es un cerrado de K que es compacto y por tanto debe ser un compacto de $(\mathbb{R} \times \{y_i\}, \mathcal{T}_{|\mathbb{R} \times \{y_i\}})$. De aquí si denotamos p_1 la proyección en el primer factor del producto tenemos que $K_i = p_1(K_i \times \{y_i\})$ debe ser un compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.

3.- Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:

a) En $\mathbb{R}$ consideramos la topología $\mathcal{T}$ dada por la base $\mathcal{B} = \{[x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Prueba que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es una aplicación continua si y solo si es creciente.

Observemos que una base de entornos en $x \in \mathbb{R}$ para esta topología es $\mathcal{B}_x = \{[x, +\infty[\}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que f es continua y sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$. Por ser f continua tenemos que $f^{-1}([f(a), +\infty[)$ es un abierto que contiene a a. Por tanto $[a, +\infty[\subset f^{-1}([f(a), +\infty[)$ y como $b \in [a, +\infty[$ tenemos que $f(b) \in f(f^{-1}([f(a), +\infty[)) \subset [f(a), +\infty[$. Así $f(a) \leqslant f(b)$ y f es creciente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que f es creciente. Veamos que f es continua en $a \in \mathbb{R}$. Consideremos $[f(a), +\infty[$ que es el único elemento de la base de entornos $\mathcal{B}_{f(a)}$. Basta ver que $f([a, +\infty[) \subset [f(a), +\infty[$. Efectivamente, si $b \in [a, +\infty[$ tenemos $f(a) \leqslant f(b)$ por ser la aplicación creciente. De aquí $f(b) \in [f(a), +\infty[$ y se tiene la inclusión buscada.

b) **En** $X = [0,1] \times \{-1,1\}$ **se considera la relación de equivalencia**

$$(x,t)R(y,s) \quad \textbf{si y solo si} \quad (x,t) = (y,s) \quad \textbf{o} \quad x = y = 0 \quad \textbf{o} \quad x = y = 1\ .$$

Prueba que $(X/R, \mathcal{T}_{u|X}/R)$ **es homeomorfo a** $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$**.**

Definimos la aplicación $f : X \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$f(x,t) = \begin{cases} (\cos(\pi(1-x)), \operatorname{sen}(\pi(1-x)) & \text{si} \quad t = 1 \\ (\cos(\pi(1+x)), \operatorname{sen}(\pi(1+x)) & \text{si} \quad t = -1 \end{cases}$$

Es claro que esta aplicación es sobreyectiva y continua por el Lema del pegado. Además es cerrada por el Lema de la aplicación cerrada (va de un compacto en un Hausdorff). Por tanto tenemos que f es una identificación. Por otra parte es fácil comprobar que dos puntos se relacionan si y solo si tienen la misma imagen por f y así $R = R_f$. Por tanto la aplicación inducida $\widetilde{f} : (X/R, \mathcal{T}_{u|X}/R) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u|\mathbb{S}^1})$ es un homeomorfismo.

c) **Sea** $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ **una aplicación entre espacios topológicos tal que** $f(A)$ **es compacto en** $(Y, \mathcal{T}')$ **para cada** A **compacto en** $(X, \mathcal{T})$**. ¿Es** f **continua?**

No, es fácil construir un contraejemplo. Podemos considerar el espacio de Sierpinski, es decir $(\{0,1\}, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$. Como la topología es finita todo subconjunto es compacto y por tanto toda aplicación $f : (\{0,1\}, \mathcal{T}) \to (\{0,1\}, \mathcal{T})$ lleva compactos en compactos. Sin embargo la aplicación f dada por $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$ no es continua puesto que $f^{-1}(\{0\}) = \{1\}$ que no es un abierto de $\mathcal{T}$.