Ejercicios de topología on line

Tema 1

Ejercicio 26

Un espacio topológico es *regular* cuando es posible separar todo conjunto cerrado de cualquiera de sus puntos exteriores.

Sea F un cerrado y $x \notin F$. Como Fes un cerrado, entonces $X - F$ es un abierto que contiene a x, existe un entorno cerrado U de x, $x \in U \subset X - F$. Sea $O = X - U$ que es abierto, y que además que contiene a $F \subset O$, F, verificando que $O \cap U = \emptyset$. En consecuencia, el espacio es regular.

Ejercicio 27

Un espacio topológico es *normal* cuando dado cualquier par de cerrados, $E \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$, $E \cap F = \emptyset$, existen dos entornos, $E \subset U$ y $F \subset V$, tal que $U \cap V = \emptyset$.

$$\beta = \{B_a : a \in R\} \qquad B_a = \{(x, y) \in R^2 : x \geq a\}$$

La familia de abiertos es

$$\tau = \{\emptyset, R^2\} \cup \beta \cup \{]a, +\infty[xR : a \in R\}$$

La familia de cerrados está construida por los conjuntos complementarios de los anteriores:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, R^2\} \cup \{\overline{B_a} : a \in R\} \cup \{]-\infty, a]xR : a \in R\} \quad B_a = \{(x, y) \in R^2 : x < a\}$$

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, R^2\} \cup \{]-\infty, a[xR : a \in R\} \cup \{]-\infty, a]xR : a \in R\}$$

Por tanto, dos cerrados distintos del vacío su intersección es siempre distinta del vacía, es decir, siempre se intersecan, se tiene que el espacio es normal.

Ejercicio 28

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{O \subset R : Q \subset O\}$$

Sea $x \in R$, una base de entornos de x es:

$$\beta_x = \left\{\{x\} \cup Q\right\} \neq \emptyset \quad x \in \{x\} \cup Q \in \tau$$

Para cualquier entorno de x, U, $\exists O \in \tau : x \in O \subset U$, y como $Q \subset O$, se tiene que

$$x \in \{x\} \cup Q \subset O \subset U$$

Y como β_x solo tiene un elemento (es finito) es numerable, es cierto para cualquier $x \in R$, el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad, es IAN.

Sea la familia $\beta = \left\{Q, \left\{\{x\} \cup Q : x \in R - Q\right\}\right\}$ es una base de abiertos de la topología. Si el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad, entonces existe $\beta' \subset \beta$ numerable.

$$\beta' = \left\{Q, \left\{\{x_n\} \cup Q : x_n \in R - Q \;\; n \in N\right\}\right\}$$

Sea $x \neq x_n \quad \forall n \in N \;\; x \in R - Q$*, entonces* $x \in \{x\} \cup Q$*, existe* $m \in N$ *tal que*

$$x \in \{x_m\} \cup Q \subset \{x\} \cup Q$$

Como x_m y x son irracionales, $x = x_m$, absurdo. Por lo tanto, el espacio NO satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Ejercicio 29

$$X =]0,1[\quad \tau = \{\emptyset, X\} \cup \left\{\left]0,1 - \frac{1}{n}\right[: n \in N\right\}$$

Sean $x, y \in X$*, y sean* $A, B \in \tau$ *tales que* $x \in A \;\; y \in B$*:*

Caso 1: Si $A = X$ *ó* $B = X$*, entonces claramente* $A \cap B \neq \emptyset$*.*

Caso 2: existen $n, m \in N$ tales que

$$A = \left]0,1 - \frac{1}{n}\right[\quad B = \left]0,1 - \frac{1}{m}\right[\Longrightarrow A \cap B = \left]0,1 - \frac{1}{m\acute{\imath}n\{n,m\}}\right[\neq \emptyset$$

Por lo tanto, (X, τ) NO es de Hausdorff.

Sea para $n = 2$*,* $O =]0, {}^{1}/_{2}[\in \tau$*, entonces su complementario es cerrado*

$$F = [{}^{1}/_{2}, 1[\;\; y \;\; x = {}^{1}/_{4} \notin F$$

Hay que encontrar dos entornos U y V tales que $F \subset U \quad x = {}^{1}/_{4} \in V \Longrightarrow U \cap V = \emptyset$. Pero el único abierto que contiene a F es $U = X =]0,1[$, es decir, $U \cap V \neq \emptyset$, para cualquier entorno de x. Por lo tanto, (X, τ) NO es regular.

Tema 2 aplicaciones

Ejercicio -6-

Se considera N con la topología τ de los divisores, esto es, $\mathfrak{B} = \{U_n : n \in N\}$ es base de τ, con U_n el conjunto de los divisores de $n \in N$. Probar que una aplicación $f: N \to N$ es continua si y solo si f respeta la divisibilidad (esto, es si m divide a n entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

Solución

$\Longrightarrow$) Si f es una aplicación continua en $n \in N$:

$$\forall B' \in \mathfrak{B} \;\; f(n) \in B' \;\; \exists B \in \mathfrak{B} \;\; n \in B \; tal \; que \; f(B) \subset B' \Longrightarrow f(U_n) \subset U_{f(n)}$$

$Dado \; m \; divide \; a \; n \Longrightarrow m \in U_n \Longrightarrow f(m) \in f(U_n) \subset U_{f(n)} \Longrightarrow f(m) \; divide \; a \; f(n)$

Y esto es cierto para todo divisor de n y para todo $n \in N$, por lo tanto, f respeta la divisibilidad.

$\Longleftarrow$) Si f respeta la divisibilidad, sea $n \in N$ y sea $m \in N$ que divide a $n \Longrightarrow m \in U_n$

$\Longrightarrow f(m)$ divide a $f(n) \Longrightarrow f(m) \in U_{f(n)} \; \forall m \in N \;\; con \; m \; diviendo \; a \; n \Longrightarrow f(U_n) \subset U_{f(n)}$

$$\Longrightarrow f \; es \; continua \; en \; n \quad \forall n \in N \Longrightarrow f \; es \; continua$$

Ejercicio -7-

Encontrar una aplicación $g: (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ y un conjunto denso $A \subset X_1$ tal que $g_{/A}$ es continua, aunque g no sea continua en ningún punto de A.

Solución

Sean $X_1 = X_2 = R$ y $A = Q$ que es un subconjunto denso de R:

$$g: (R, \tau_u) \to (R, \tau_u) \qquad g(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \; x \in Q \\ 1 \; si \; x \in R - Q \end{cases}$$

Sea la aplicación restringida en $A = Q$:

$g_{/Q}(x) = 0 \quad \forall x \in Q \Longrightarrow g_{/Q} \; es \; continua$

$Sea \; x \in Q, \; g(x) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in Q}} 0 = 0 \quad \neq \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in R-Q}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in R-Q}} 1 = 1$$

Por lo tanto, g no es continua en $x \in Q$, es decir, g no sea continua en ningún punto de Q.

Ejercicio -8-

Probar que las aplicaciones continuas y sobreyectivas aplican conjuntos densos en conjuntos densos. Comprobar que la parte entera $\boldsymbol{E}: (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_u}) \rightarrow (\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\tau_{u/Z}})$ conserva los conjuntos densos, aunque no es continua.

Solución

Sea una aplicación $f: X \rightarrow Y$ continua y sobreyectiva, y sea $D \subset X$ denso en $X: \overline{D} = X$.

Como f es sobreyectiva: $Y = f(X) = f(\overline{D})$, y como es continua $f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$:

$$Y = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq Y \Longrightarrow \overline{f(D)} = Y \Longrightarrow f(D)\ es\ denso\ en\ Y$$

Por lo tanto, las aplicaciones continuas y sobreyectivas aplican conjuntos densos en conjuntos densos.

Sea $E: (R, \tau_u) \rightarrow (Z, \tau_{u/Z})$ veamos que conserva los conjuntos densos, y sea $D \subset R$ denso en $R, \overline{D} = R$.

$$]z, z+1[\, \cap D \neq \emptyset \ \ \forall z \in Z \Longrightarrow \exists x \in D: E[x] = z \ \ \forall z \in Z \Longrightarrow Z \subseteq E[D]$$

Pero por otro lado, $E[D] \subseteq Z$, se decir, $E[D] = Z$, tomando adherencias, $\overline{E[D]} = \bar{Z} = Z$, entonces $E[D]$ es denso en Z.

Veamos que no es continua, sea $\{2\} =]1.5,2,5[\, \cap Z \in \tau_{u/Z}$

$$\Longrightarrow E^{-1}[\{2\}] = [2,3[\, \notin \tau_u$$

Examen tema 2 13-12-2021

2.- Sea $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ un espacio topológico. Prueba que $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}$ es abierto en $(\boldsymbol{XxX}, \boldsymbol{\tau x \tau})$ si y solo si $\boldsymbol{\tau}$ es la topología discreta.

$\Longrightarrow$) *Sea $A = \{(x, x) : x \in X\}$ abierto en $(XxX, \tau x\tau)$. Sea $(x, x) \in A = A^\circ$, existe $O_1 x O_2 \in \tau x \tau$:*

$$(x, x) \in O_1 x O_2 \subseteq A \Longrightarrow x \in O_1 \quad x \in O_2$$

Sean $x \in O_1$ e $y \in O_2$, con $x \neq y$, entonces $(x, y) \in O_1 x O_2 \subseteq A \Longrightarrow (x, y) \in A$ absurdo, se tiene que $O_2 = \{x\}$, y de la misma forma $O_1 = \{x\}$.

Luego la única posibilidad es que $O_1 x O_2 = \{(x, x)\}$, es decir, se tiene una base de abiertos:

$$B_\tau = \{\{x\} : x \in X\}$$

Para cualquier $O \in \tau$ que $x \in O$, se verifica que $x \in \{x\} \subseteq O$. Por lo tanto, τ es la topología discreta.

$\Longleftarrow$) Sea τ la topología discreta, una base de abiertos de τ:

$$B_\tau = \{\{x\} : x \in X\}$$

Y por definición: $\tau x \tau = \{O_1 x O_2 : O_1 \in \tau, O_2 \in \tau\}$ y una base de $\tau x \tau$:

$$B_{\tau x \tau} = \{\{(x, y)\} : x \in X, y \in X\}$$

Para cada $(x, x) \in A$, $(x, x) \in \{(x, x)\} \subseteq A$ donde $\{(x, x)\} \in B_{\tau x \tau}$, es decir, $(x, x) \in A^\circ$, es decir, $A \subseteq A^\circ$ y como $A^\circ \subseteq A$, en consecuencia, $A = A^\circ$, es abierto.

Ejercicio -12-

Un conjunto no vacío $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{R}$ es simétrico si para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ se cumple $-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$. Sea la topología:

$$\boldsymbol{\tau} = \{\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{R} : \boldsymbol{U\ es\ simétrico}\} \cup \{\emptyset\}$$

Demostrar que si $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}) \longrightarrow (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau})$ es una función impar (es decir, $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$) entonces es continua y abierta.

Solución

Veamos que es continua, sea $U' \in \tau$, entonces tiene que ocurrir $f^{-1}(U') \in \tau$:

Si $U' = \emptyset \Longrightarrow f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. *Si* U' *es simétrico:*

$$x \in f^{-1}(U') \overset{f}{\Rightarrow} f(x) \in U' \xRightarrow{U'\ es\ simétrico} -f(x) \in U' \xRightarrow{f\ es\ impar} f(-x) \in U' \overset{f^{-1}}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{f^{-1}}{\Longrightarrow} -x \in f^{-1}(U') \Longrightarrow f^{-1}(U')\ es\ simétrico \Longrightarrow f^{-1}(U') \in \tau$$

Veamos que es abierta, sea $U \in \tau$, entonces tiene que ocurrir $f(U) \in \tau$:

Si $U = \emptyset \Longrightarrow f(\emptyset) = \emptyset \in \tau$. *Si* U *es simétrico:*

$$y \in f(U) \Longrightarrow \exists x \in U : f(x) = y \xRightarrow{U\ es\ simétrico} -x \in U \xRightarrow{f\ es\ impar} f(-x) = -f(x) = -y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -y \in f(U) \Longrightarrow f(U)\ es\ simétrico \Longrightarrow f(U) \in \tau$$

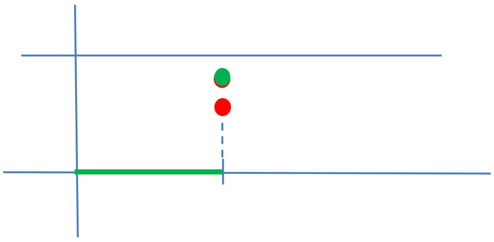
Tema 3 conexión y compacidad

Ejercicio 1

Estudiar conexión, componentes conexas y conexión local del conjunto de R^2:

$$\boldsymbol{X = ([0,1]x\{0\}) \cup \bigcup_{n\in N}\left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}}$$

Solución



Se considera $(X, \tau_{u/X})$ el espacio topológico con la topología inducida en la usual. El conjunto no es conexo, porque tiene más de una componente conexa. Las componentes conexas son: el segmento $[0,1]x\{0\}$ y los puntos $\left(1,\frac{1}{n}\right)$ para cada $n \in N$.

Como la aplicación $f: \left([0,1]x\{0\}, \tau_{u/[0,1]x\{0\}}\right) \to \left([0,1], \tau_{u/[0,1]}\right)$ $\quad f(x,0) = x$ es un homeomorfismo, entonces el conjunto $[0,1]x\{0\}$ es homeomorfo a $[0,1]$, y como $[0,1]$ es conexo en (R, τ_u), se tiene que $[0,1]x\{0\}$ es conexo. Y los $\left(1,\frac{1}{n}\right)$ son puntos aislados son conexos.

Sea $(0,0) \in [0,1]x\{0\}$ y supongamos que $[0,1]x\{0\} \subset C_{(0,0)}$ donde $[0,1]x\{0\} \neq C_{(0,0)}$, entonces existe $n \in N$ tal que

$$\left(1,\frac{1}{n}\right) \in C_{(0,0)} - \{[0,1]x\{0\}\}$$

Sea $y_0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big/ 2 \in R$, y se tiene la siguiente descomposición de abiertos:

$$C_{(0,0)} = \left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \cup \left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right)$$

$$\left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \in \tau_{u/C_{(0,0)}}$$
$$\left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right) \in \tau_{u/C_{(0,0)}}$$

$$\left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \cap \left(C_{(0,0)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right) = \emptyset$$

Es decir, $C_{(0,0)}$ no es un conjunto conexo, absurdo, luego $C_{(0,0)} = [0,1]x\{0\}$.

Para cada $n \in N$, supongamos

$$\left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\} \in C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \; y \; \left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\} \neq C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}$$

Entonces existe $m \in N$ tal que $m \neq n$:

$$\left(1,\frac{1}{m}\right) \in C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} - \left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}$$

Sea $y_0 = \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big/2 \in R$, y se tiene la siguiente descomposición de abiertos:

$$C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} = \left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \cup \left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right)$$

$$\left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \in \tau_{u/C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}}$$

$$\left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right) \in \tau_{u/C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}}$$

$$\left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \cap \left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right) = \emptyset$$

Además

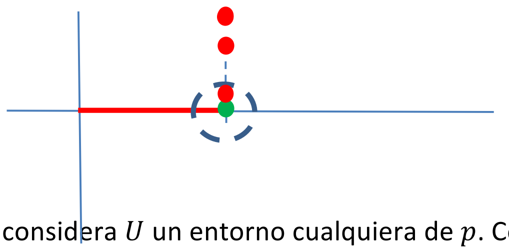
$$\left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y < y_0\}\right) \neq C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}, \emptyset \quad \left(C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} \cap \{(x,y) \in R^2 : y > y_0\}\right) \neq C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}, \emptyset$$

Es decir, $C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}$ no es un conjunto conexo, absurdo, luego $C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)} = \left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}$, para cada $n \in N$.

$$X = C_{(0,0)} \cup \bigcup_{n\in N} C_{\left(1,\frac{1}{n}\right)}$$

El conjunto X no es conexo, porque tiene más de una componente conexa.

Además, el conjunto X tampoco es localmente conexo.



Sea el punto $p = (1,0)$, y se considera U un entorno cualquiera de p. Como la sucesión $\left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}$ converge a $p = (1,0)$ se tiene que:

$$p \in U \Longrightarrow \exists r > 0 : p \in B(p,r) \cap X \subseteq U$$

Además, existe $m \in N : n \geq m$

$$\left(1,\frac{1}{n}\right) \in B(p,r) \cap X \subseteq U$$

Y por lo tanto, el entorno U tendría más de una componente conexa, es decir, no es conexo. Por lo tanto, no se puede encontrar un entorno conexo del punto p.

Ejercicio 2

Sea (N,τ) $\quad \tau = \{A_n : n \in N\} \cup \{\emptyset, N\}$, con $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Estudiar qué subconjuntos son conexos y cuáles son compactos.

Solución

Todo subconjunto B de N es conexo. Sea $B \subset N$, se sabe que B está acotado inferiormente y existe el $mínB = m$. Sean $A_{n_1}, A_{n_2} \in \tau$ verificando:

$$A_{n_1} \cap B, A_{n_2} \cap B \in \tau_B \quad B = \left(A_{n_1} \cap B\right) \cup \left(A_{n_2} \cap B\right) \quad \left(A_{n_1} \cap B\right) \cap \left(A_{n_2} \cap B\right) = \emptyset$$

Como $m \in B \Longrightarrow m \in A_{n_1} \cap B$ ó $m \in A_{n_2} \cap B$.

$$\Longrightarrow m \in A_{n_1} \cap B \Longrightarrow supongamos\ que\ A_{n_2} \cap B \neq \emptyset \quad m + k \in A_{n_2} \cap B$$

$$\Longrightarrow m \in A_{n_2} \cap B \Longrightarrow \left(A_{n_1} \cap B\right) \cap \left(A_{n_2} \cap B\right) \neq \emptyset \Longrightarrow A_{n_2} \cap B = \emptyset \Longrightarrow A_{n_1} \cap B = B$$

$$\Longrightarrow m \in A_{n_2} \cap B \Longrightarrow supongamos\ que\ A_{n_1} \cap B \neq \emptyset \quad m + k \in A_{n_1} \cap B$$

$$\Longrightarrow m \in A_{n_1} \cap B \Longrightarrow \left(A_{n_1} \cap B\right) \cap \left(A_{n_2} \cap B\right) \neq \emptyset \Longrightarrow A_{n_1} \cap B = \emptyset \Longrightarrow A_{n_2} \cap B = B$$

Por lo tanto, B es conexo.

Los subconjuntos $B \subset N$ y se considera un recubrimiento infinito de abiertos:

$$B \subseteq \bigcup_{k \in I} (A_k \cap B) \qquad I\ infinito$$

Si B fuera compacto, existe $J \subset I$ finito, es decir, existe un recubrimiento finito de abiertos:

$$B \subseteq \bigcup_{k \in J} (A_k \cap B)$$

Sea $m = máx\{k : k \in J\}$*, entonces:*

$$B \subseteq A_m \cap B$$

Y como A_m es un conjunto finito, entonces B es un conjunto finito.

Los únicos compactos de N en (N, τ) son los conjuntos finitos.

Ejercicio 3

En la recta de Sorgenfrey $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_S})$, estudiar si $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ es conexo y si es compacto.

Solución

El conjunto $A = [0,1]$ no es conexo en (R, τ_S):

$$A = [0,1] = \left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\cap A\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, 2\right[\cap A\right)$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right[\cap A \in \tau_{S_{/A}} \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right[\cap A \in \tau_{S_{/A}} \quad \left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\cap A\right) \cap \left(\left[\frac{1}{2}, 2\right[\cap A\right) = \emptyset$$

Y además, no es la partición trivial.

$$\left(\left[0, \frac{1}{2}\right[\cap A\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right[\neq \emptyset, A \quad \left(\left[\frac{1}{2}, 2\right[\cap A\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \neq \emptyset, A$$

Por lo tanto, $A = [0,1]$ no es conexo.

Ahora, el conjunto $A = [0,1]$ no es compacto, sea el recubrimiento de abiertos infinito siguiente:

$$A = [0,1] \subseteq \bigcup_{n \in N} \left(\left[0,1 - \frac{1}{n} \right[\cap A \right) \cup ([1,2[\cap A)$$

Supongamos que $A = [0,1]$ es compacto, entonces existe un recubrimiento finito:

$$A = [0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\left[0,1 - \frac{1}{n_i} \right[\cap A \right) \cup ([1,2[\cap A)$$

Sea $n_k = máx\{n_i : i = 1, \dots, m\}$*:*

$$A = [0,1] \nsubseteq \left(\left[0,1 - \frac{1}{n_k} \right[\cap A \right) \cup ([1,2[\cap A)$$

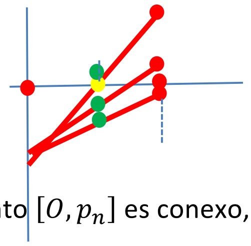
Entonces $1 - \frac{1}{n_k + 1} \in A$ *pero* $1 - \frac{1}{n_k + 1} \notin \left(\left[0,1 - \frac{1}{n_k} \right[\cap A \right) \cup ([1,2[\cap A)$.

Por lo tanto, $A = [0,1]$ no es compacto.

Ejercicio 4 **muy importante**

Sea $O = (0,0), p_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ $n \in N$ y $X = \{(1,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n]$. Estudiar si es conexo y si es compacto.

Solución



Para cada $n \in N$, el segmento $[O, p_n]$ es conexo, por ser arcoconexo, y sea la intersección:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[O, p_n] = \{0\} = \{(0,0)\}$$

Por lo tanto, el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n]$ es conexo. Por otro lado, se tiene que

$$p_n = \left(1, \frac{1}{n}\right) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n] \xrightarrow{n\to\infty} (1,0) \Rightarrow (1,0) \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n]}$$

Si un conjunto es conexo y se le añade puntos adherentes, sigue siendo conexo. Es decir:

$$X = \{(1,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n] \quad es\ conexo$$

Como $X \subset R^2$ con la topología usual, para que sea compacto tiene que ser cerrado y acotado. Y como $X \subseteq \bar{B}\big((0,0), 2\big)$, entonces X es acotado. Veamos si X es cerrado.

Sea $\left({}^{1}/_{2}, 0\right) \notin X$, y consideramos la sucesión de puntos siguientes:

$$q_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[O, p_n] \subseteq X \xrightarrow{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \in \bar{X}$$

Luego $\bar{X} \neq X$, luego no es cerrado, y por lo tanto, X no es compacto.

Ejercicio 5

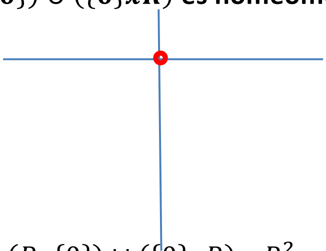
Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

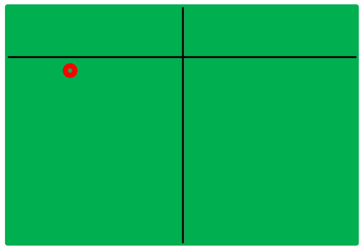
$(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{Rx}\{\mathbf{0}\}) \cup (\{\mathbf{0}\}\boldsymbol{xR})$ **es homeomorfo a** $\boldsymbol{R^2}$**.**

$(\boldsymbol{b})$ **En un espacio** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$**, si** $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ **es conexo, también lo es** $\boldsymbol{A}^\circ$ **.**

Solución

a.- $(\boldsymbol{Rx}\{\mathbf{0}\}) \cup (\{\mathbf{0}\}\boldsymbol{xR})$ **es homeomorfo a** $\boldsymbol{R^2}$**.**

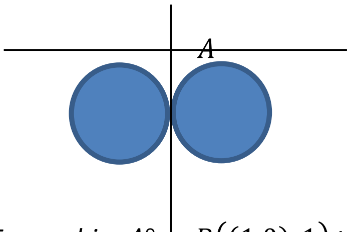


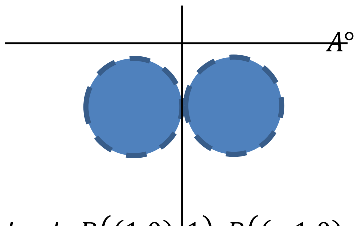


Sea $X = (Rx\{0\}) \cup (\{0\}xR)$ y R^2 que son conjuntos conexos, por ser arcoconexos. Supongamos que son homeomorfos, es decir, $X \cong R^2$, entonces $X - \{(0,0)\} \cong R^2 - \{(a,b)\}$, absurdo, porque $R^2 - \{(a,b)\}$ sigue siendo conexo, en cambio, X no es conexo, tendría cuatro componentes conexas. FALSO.

b.- En un espacio $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$**, si** $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ **es conexo, también lo es** $\boldsymbol{A}^\circ$ **.**

FALSO, en (R^2, τ_u)*, y sea* $A = \bar{B}\big((1,0),1\big) \cup \bar{B}\big((-1,0),1\big)$*, como* $\bar{B}\big((1,0),1\big), \bar{B}\big((-1,0),1\big)$ *son conjuntos conexos y* $\bar{B}\big((1,0),1\big) \cap \bar{B}\big((-1,0),1\big) = \{(0,0)\}$*, entonces* A *es conexo.*





En cambio, $A^\circ = B\big((1,0),1\big) \cup B\big((-1,0),1\big)$*, donde* $B\big((1,0),1\big), B\big((-1,0),1\big) \in \tau_u$*, además*

$$B\big((1,0),1\big) \cap B\big((-1,0),1\big) = \emptyset$$

En consecuencia se trata de una partición por abiertos no trivial de A°, por lo tanto, A° no es conexo.

Ejercicio 6

Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):

$(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{Q}$.

$(\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{A} =]-\mathbf{1},\mathbf{0}[\cup]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ y $\boldsymbol{B} =]-\mathbf{1},\mathbf{0}[\cup]\mathbf{0},\mathbf{1}]$

$(\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \leq \mathbf{1}\}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \geq \mathbf{1}\}$

Solución

a.- N tiene la topología discreta, $\tau_{u/N} = \tau_D$, porque $\left]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right[\in \tau_u$ entonces

$$\left]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right[\cap N \in \tau_{u/N} \Longrightarrow \{n\} \in \tau_{u/N} \quad \forall n \in N \Longrightarrow \tau_{u/N} = \tau_D$$

Supongamos que $N \cong Q$, entonces sea $f: N \to Q$ un homeomorfismo, como $\{n\} \in \tau_{u/N}$, se tendría $\{f(n)\} \in \tau_{u/Q}$, absurdo, puesto que los puntos aislados de Q no son abiertos.

Supongamos que si lo fueran, sea $q \in Q$, y que $\{q\} \in \tau_{u/Q}$:

$$q \in \{q\}^\circ \overset{\exists r>0}{\Longrightarrow} q \in \big((q-r, q+r) \cap Q\big) \subseteq \{q\} \Longrightarrow (q-r, q+r) \cap Q = \{q\}$$

$$absurdo\ por\ la\ densidad\ de\ Q\ en\ R$$

Por lo tanto, N y Q no son homeomorfos.

b.- Sean $A =]-1,0[\cup]0,1[$ y $B =]-1,0[\cup]0,1]$, se tiene que ambos conjuntos no son conexos, por ser unión de dos abiertos disjuntos, pero ambos tienen dos componentes conexas. Supongamos que $A \cong B$, cada componente sería homeomorfa a otra componente.

Supongamos $]-1,0[\cong]0,1]$ ambos son conexos, por ser arcoconexos, entonces

$$]-1,0[- \{a\} \cong]0,1] - \{1\}$$

Absurdo porque $]0,1] - \{1\} =]0,1[$ que es conexo, en cambio, $]-1,0[- \{a\} =]-1,a[\cup]a,0[$, que se trata de una partición de abiertos no trivial, es decir, no es conexo.

Por lo tanto, $]-1,0[\ncong]0,1]$, luego $]0,1[\cong]0,1]$, ambos son conexos, por ser arcoconexos, entonces

$$]0,1] - \{a\} \cong]0,1] - \{1\}$$

Absurdo porque $]0,1] - \{1\} =]0,1[$ que es conexo, en cambio, $]0,1] - \{a\} =]0,a[\cup]a,1[$, que se trata de una partición de abiertos no trivial, es decir, no es conexo.

En consecuencia, A y B no son homeomorfos.

(c) $A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

Como en (R^2, τ_u) los conjuntos compactos son los cerrados y acotados.

Claramente $A = \bar{B}\big((0,0), 1\big)$ que es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto, compacto en (R^2, τ_u).

En cambio, el conjunto B no está acotado, no existe ninguna bola que lo contenga, es decir, no es compacto. Como los homeomorfismos conservan la compacidad, entonces, $A\ y\ B$ no son homeomorfos.

Ejercicio 7

Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{R^2\ y\ RP^2.}$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{A} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R^2}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\right\}\ \boldsymbol{y\ B} = \boldsymbol{A} \cup \{(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\}$

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{A} = (\{\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}]) \cup ([\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]\boldsymbol{x}\{\boldsymbol{0}\})\ \boldsymbol{y\ B} = (\{\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}[) \cup ([\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]\boldsymbol{x}\{\boldsymbol{0}\})$

$(\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{S^1x}[\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S^1x}]\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}[.$

Solución

a.- Se sabe que R^2 no es un conjunto compacto porque no es acotado, en (R^2, τ_u). Y el plano proyectivo RP^2 es compacto al ser cociente de S^2 con la relación de los antípodas. Por lo tanto, $R^2\ y\ RP^2$, no son homeomorfos.

Ejercicio 15

Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:

a.- ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto?

FALSO. Sea la topología trivial en R, los únicos abiertos son $\tau_T = \{\emptyset, R\}$ y sea $A = \{1,2,3,4\}$ que es finito y se tiene que $\tau_A = \{\emptyset \cap A, R \cap A\} = \{\emptyset, A\}$, por lo tanto, A no es un subconjunto discreto.

¿Y si el espacio es metrizable?

Un espacio metrizable es un espacio topológico que es homeomorfo a un espacio métrico.

VERDADERO. Sea un espacio metrizable, (X, τ_d) y sea $F = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ finito. Para ver que F es discreto en (X, τ_d) solo es necesario comprobar que $\{x_i\} \in \tau_{d/_F}$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Se considera $\varepsilon = min\{d(x_i, x_j): i \neq j, i, j = 1, \dots, n\} > 0$ *y se verifica* $B(x_i, \varepsilon) \cap F = \{x_i\}$ $\forall i = 1, \dots, n$*, donde* $B(x_i, \varepsilon) \in \tau_d$*, luego* $B(x_i, \varepsilon) \cap F \in \tau_{d/_F}$*, es decir,* $\{x_i\} \in \tau_{d/_F}$*, luego* F *es discreto.*

b.- Sea $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_S})$ la recta de $\boldsymbol{Sorgenfrey}$. Definamos $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{RxR}, \boldsymbol{\tau_S x \tau_S}) \longrightarrow (\boldsymbol{RxR}, \boldsymbol{\tau_S x \tau_S})$ como $\boldsymbol{f(x,y) = (x, -y^3)}$. Analizar si $\boldsymbol{f}$ es continua, abierta o cerrada.

$$f_1: (R, \tau_S) \to (R, \tau_S) \quad f_1(x) = x$$

Claramente f_1 es continua y abierta.

$$f_2: (R, \tau_S) \to (R, \tau_S) \quad f_2(y) = -y^3$$

$$[1,2[\in \tau_S \Longrightarrow f_2([1,2[) =]-8,-1] \notin \tau_S$$

$$[1,8[\in \tau_S \Longrightarrow f_2^{-1}([1,8[) =]-2,-1] \notin \tau_S$$

Luego f_2 no es continua, ni abierta. Y como $f = f_1 x f_2$ tampoco es continua ni abierta.
Veamos que f no es cerrada. Sea $F = Rx[1,2[$ cerrado en $(RxR, \tau_S x \tau_S)$

$$f(F) = Rx]-8,-1] \notin cerrados\ en\ \tau_S x \tau_S \ \ porque\ \ ]-8,-1] no\ es\ cerrado\ en\ \tau_S$$

c.- Un aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau}) \longrightarrow (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau'})$ es propia si para cada $\boldsymbol{C'}$ compacto de $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau'})$ se verifica que $\boldsymbol{f^{-1}(C')}$ es compacto en $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$. Probar que si $\boldsymbol{f}$ es propia, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ es de Hausdorff e $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau'})$ es compacto, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua.

Sea F' cerrado en (Y, τ'), y como es compacto, F' compacto en (Y, τ') y como f es propia, $f^{-1}(F')$ es compacto en (X, τ) y como (X, τ) es de Hausdorff, $f^{-1}(F')$ es cerrado en (X, τ), es decir, f es continua.

Ejercicio 16

En R se considera la topología dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}: \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\tau_u}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{Q}\}$$

a.- Para cada $x \in R$ obtener una base de entornos de x en (R, τ).

Distinguimos dos casos:

Caso I: Sea $x \in Q$, entonces $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de $x \in Q$, ya que sea U entorno de x: $x \in U$, y se verifica que $x \in \{x\} \subset U$ donde $\{x\} \in \tau$, puesto que $\{x\} = \{x\} \cup \emptyset$, $\emptyset \in \tau_u$ y $\{x\} \subseteq Q$.

Caso II: Sea $x \in R/Q$, entonces se define $\beta_x = \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[: \varepsilon > 0\} \subseteq \tau$, y para cada $\varepsilon > 0$, es un entorno de x, veamos que es base:

Sea U entorno de x, $x \in U$, existe $O \in \tau$, tal que $x \in O \subseteq U$, donde $O = A \cup B$, con $A \in \tau_u$, $B \subseteq Q$, pero como $x \in R/Q$, $x \in A \in \tau_u$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x \in\,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq A \subseteq A \cup B = O \subseteq U$$

Por lo tanto, β_x es una base de entornos de x.

b.- Calcular la clausura y el interior de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ en $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau})$. ¿Es $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}$ denso en $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau})$?

$$[a,b[^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\cup \{b\}$$

Si $b \in Q$, como $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\in \tau_u$ y $\{b\} \subseteq Q$, entonces $[a,b[^c \in \tau$, $[a,b[$ es cerrado en τ, luego $\overline{[a,b[} = [a,b[$.

Si $b \in R/Q$, se tiene que $[a,b[\subseteq \overline{[a,b[}$, para cada $\varepsilon > 0$, $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in \tau$, y sea:

$$]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap [a,b[=]b-\varepsilon, b[\neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow b \in \overline{[a,b[}$$

Sea $x \notin [a,b]$ si

$$\begin{cases} x \in Q: \{x\}\ entorno\ de\ x\ tal\ que\ \{x\} \cap [a,b[= \emptyset \\ x \in R/Q: \varepsilon = \dfrac{min\{|x-a|, |x-b|\}}{2} \quad x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ y\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [a,b[= \emptyset \end{cases}$$

Luego $x \notin \overline{[a,b[}$, resumiendo:

$$\overline{[a,b[} = \begin{cases} [a,b[\ si\ b \in Q \\ [a,b]\ si\ b \in R/Q \end{cases}$$

Veamos ahora el conjunto interior.

Si $a \in Q$, entonces $[a,b[=]a,b[\cup \{a\} \in \tau$, luego $[a,b[^\circ = [a,b[$.

Si $a \in R/Q$, se tiene que para $\varepsilon > 0$, $a \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\in \tau$, y $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\not\subset [a,b[$, es decir, $a \notin [a,b[^\circ$.

Sea $x \in]a,b[$ si

$$\begin{cases} x \in Q: x \in \{x\} \subseteq [a,b[\\ x \in R/Q: \varepsilon = \dfrac{min\{|x-a|, |x-b|\}}{2} \quad x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\ \subseteq [a,b[\end{cases}$$

Luego $x \in [a,b[^\circ$, resumiendo:

$$[a,b[^\circ = \begin{cases} [a,b[\ \ si\ a \in Q \\ ]a,b[\ \ si\ a \in R/Q \end{cases}$$

$$(R/Q)^c = Q \in \tau \Longrightarrow R/Q \ \ cerrado\ en\ \tau \Longrightarrow \overline{R/Q} = R/Q \neq R \ \ \ no\ es\ denso$$

c.- Probad que si $C \subseteq R$ es compacto en (R, τ) entonces C es compacto en (R, τ_u). ¿Es cierto el enunciado recíproco?

Sea $C \subseteq R$ es compacto en (R, τ), veamos que C es compacto en (R, τ_u). Se considera un recubrimiento infinito de abiertos de C:

$$C \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \quad \ con\ O_i \in \tau_u\ \forall i \in I \Longrightarrow O_i \in \tau\ \forall i \in I \ \ ya\ que\ \tau_u \ \leq \tau$$

Como C es compacto en (R, τ), existe $J \subset I$ finito tal que:

$$C \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j \Longrightarrow C\ es\ compacto\ en\ (R, \tau_u)$$

El recíproco no es cierto, veamos un contraejemplo.

Sea $C = \{{}^1/_m : m \in N\} \cup \{0\} \in F_u$ *y además* $C \subseteq B(0,2)$ *es acotado, luego* C *es compacto en* (R, τ_u).

$$C^c =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \left(\bigcup_{m \in N} \left] \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right[\right) \in \tau_u \Longrightarrow C \in F_u$$

Supongamos C es compacto en (R, τ), como $C \subseteq Q$, entonces C es compacto en (Q, τ_Q), luego C es compacto en (Q, τ_D), entonces C es finito absurdo.

$$C \subseteq \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in \tau \quad \ con\ x_i \in Q\ \ \forall i \in I$$

Supongamos que es compacto, existe $J \subset I$ finito tal que:

$$C \subseteq \bigcup_{j \in J} \{x_j\} \Longrightarrow C\ es\ finito, absurdo.$$

d.- Probad que si $\boldsymbol{C \subseteq R}$ es conexo en $\boldsymbol{(R, \tau)}$ entonces $\boldsymbol{C = \{x\}}$ con $\boldsymbol{x \in R}$.

Supongamos que en C hay más de un elemento.

Si $C \nsubseteq R/Q$, existe $q \in C \cap Q: q \in \{q\} \in \tau,\ \{q\}$ es conexo en τ_u, como $\tau_u \leq \tau$, que es conexo en τ y también $\{q\} \cap C = \{q\} \in \tau_c$ y $\{q\}$ conexo en τ_c, lo que contradice que C es conexo entonces $C = \{q\}$ de un solo elemento. Absurdo.

Luego $C \subseteq R/Q$:

C es conexo en $(R, \tau) \Leftrightarrow$ C es conexo en $\left({}^{R}\!/_{Q}, \tau_{{}^{R}\!/_{Q}}\right) \Leftrightarrow C$ es conexo en $\left({}^{R}\!/_{Q}, {\tau_u}_{/{}^{R}\!/_{Q}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ C es conexo en $(R, \tau_u) \Leftrightarrow C$ es un intervalo

Luego por la densidad de Q en R, los únicos intervalos que no contienen racionales, son los degenerados, $C = \{x\}$ $x \in {}^{R}\!/_{Q}$.

Y por lo anterior en $C \subseteq Q$, como se trata de $\left(Q, \tau_Q\right)$ que es (Q, τ_D), se tiene que $C = \{q\}$ con $q \in Q$.

Ejercicio de entrega

Sea $I_0 = [0,1] \subset R$. Se define I_n inductivamente por la igualdad:

$$I_n = I_{n-1} \Big/ \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left] \frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right[$$

1.- Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/_{3^n}$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a I_n.

Para $n = 0$, $I_0 = [0,1]$

Para $n = 1$,

$$I_1 = [0,1] - \left\{ \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\right\} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = F_{11} \cup F_{12}$$

$$I_1 \; es \; unión \; de \; 2 \; intervalos \; cerrados \Longrightarrow I_1 = \bigcup_{i=1}^{2} F_{1i}$$

$$con \; longitudes: l(F_{1i}) = \frac{1}{3} \quad i = 1,2$$

Para $n = 2$,

$$I_2 = \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right) - \left\{ \left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[\cup \left] \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right[\cup \left] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right[\right\} =$$

$$= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = F_{21} \cup F_{22} \cup F_{23} \cup F_{24}$$

$$I_2 \; es \; unión \; de \; 2^2 = 4 \; intervalos \; cerrados \Longrightarrow I_2 = \bigcup_{i=1}^{2^2} F_{2i}$$

$$con \; longitudes: l(F_{2i}) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} \quad i = 1, \dots, 2^2$$

La construcción de los I_n consiste en cada intervalo, se divide en tres partes iguales y se elimina el intervalo abierto central, obteniéndose de forma inductiva que:

$$I_n \; es \; unión \; de \; 2^n \; intervalos \; cerrados \Longrightarrow I_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} F_{ni}$$

$$con \; longitudes: l(F_{ni}) = \frac{1}{3^n} \quad i = 1, \dots, 2^n$$

Además, se tiene que $\{0,1\} \in I_n \;\; \forall n \in N$. Es decir, I_n es unión finita de intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/_{3^n}$.

2.- Probar que $I_n \subset I_{n-1}$ $\forall n \in N$.

$$I_n = I_{n-1} / \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left]\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right[$$

Para cada $n \in N$, se considera

$$F_{n,1} = \left[0, \frac{1}{3^{n-1}}\right] \subset I_{n-1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^n} < \frac{2}{3^n} < \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow \left]\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right[\subset F_{n,1} \subset I_{n-1}$$

Es decir

$$\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left]\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right[\cap I_{n-1} \neq \emptyset \Rightarrow I_{n-1} / \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left]\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right[\subset I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n \subset I_{n-1} \quad \forall n \in N$$

3.- Probar que $C = \bigcap_{n\in N} I_n$ es un conjunto compacto no vacío.

Como $\{0,1\} \in I_n \quad \forall n \in N$*, entonces* $\{0,1\} \in \bigcap_{n\in N} I_n = C$*, es decir,* $C \neq \emptyset$*.*

Para cada $n \in N$, I_n es cerrado por ser unión numerable de intervalos cerrados, y es acotado porque está contenido en un conjunto acotado ($[0,1]$), luego I_n es compacto en (R, τ_u).

Como C es cerrado por ser intersección numerable de cerrados y $C \subset I_n$ que es compacto, entonces C es compacto en (R, τ_u).

4.- Probar que C es totalmente disconexo (las únicas componentes conexas son puntos).

Sea $A \subset C$ una componente conexa, con más de un punto. Sean $x, y \in A$, $x < y$ y $n \in N$ verificando

$$|x - y| > \frac{1}{3^n}$$

Entonces existe $z \notin I_n$, es decir, $z \in R/_C$ tal que $x < z < y$. Consideramos

$$]-\infty, z[\cap A,]z, +\infty[\cap A \in \tau u/_A$$

$$(]-\infty, z[\cap A) \cup (]z, +\infty[\cap A) = A \quad (]-\infty, z[\cap A) \cap (]z, +\infty[\cap A) = \emptyset$$

Es decir, hay una partición de abiertos relativos de A no trivial, por lo tanto, A no es conexo ¡¡¡¡

Luego las únicas componentes conexas son puntos, C es totalmente disconexo.

Al conjunto C se le denomina el conjunto de Cantor.

Ejercicio 17

Si $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua, donde (X, τ) es compacto e (Y, τ') es de Hausdorff, entonces $f^{-1}(C')$ es compacto en (X, τ) para cada C' compacto en (Y, τ').

Sea $C' \subseteq Y$ compacto en (Y, τ'), $C' \in F_{\tau'}$, ya que (Y, τ') es de Hausdorff, $f^{-1}(C')$ es cerrado en (X, τ), por ser f continua, y como (X, τ) es compacto, $f^{-1}(C')$ es compacto en (X, τ).

Ejercicio 18

Sea $X = R \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin R$. En X se considera la topología τ de la que conocemos una base $\mathfrak{B}$ dada por:

$$\mathfrak{B} = \{]a, b[: a, b \in R, a < b\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$$

a.- Decidir si (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Veamos que para $x = 0$ e $y = \alpha$ no se pueden separar por abiertos disjuntos.

Sean $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $x = 0 \in O_1$ y $y = \alpha \in O_2$: existen $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ verificando:

$$x = 0 \in B_1 \subseteq O_1 \quad y = \alpha \in B_2 \subseteq O_2$$

$$B_1 =]a, b[: a, b \in R, a < 0 < b \quad B_2 =]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[\quad \varepsilon > 0$$

$$]a, b[\cap (]-\varepsilon, \varepsilon[- \{0\}) \neq \emptyset \Longrightarrow B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$$

Es decir, (X, τ) NO es un espacio de Hausdorff.

b.- Probar que $\tau_{X-\{\alpha\}} = \tau_u$ y que $(X - \{0\}, \tau_{X-\{0\}})$ es homeomorfo a (R, τ_u).

Como $\mathfrak{B}$ es una base de (X, τ), entonces $\mathfrak{B}_R = \{B \cap R: B \in \mathfrak{B}\}$ es una base (R, τ_R).

$$\mathfrak{B} = \{]a, b[: a, b \in R, a < b\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$$

$$\mathfrak{B}_R = \{]a, b[: a, b \in R, a < b\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$$

Es decir, $\mathfrak{B}_u \subseteq \mathfrak{B}_R$, luego $\tau_u \leq \tau_{X-\{\alpha\}} = \tau_R$.

Por otro lado $]a, b[\in \mathfrak{B}_u$ $a, b \in R, a < b$ $]-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon[\in \mathfrak{B}_u$ $\varepsilon > 0$, se tiene que

$\mathfrak{B}_R \subseteq \mathfrak{B}_U$, luego $\tau_R \leq \tau_u$

Se define $f: (X - \{0\}, \tau_{X-\{0\}}) \to (R, \tau_u)$

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in R - \{0\} \\ 0 & si\ x = \alpha \end{cases} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & si\ x \in R - \{0\} \\ \alpha & si\ x = 0 \end{cases}$$

Claramente f es biyectiva.

Sea $\mathfrak{B}_u = \{]a, b[: a, b \in R, a < b\}$ la base usual de (R, τ_u), entonces

$$f^{-1}(]a, b[) = \begin{cases}]a, b[& si\ 0 \notin]a, b[\\ ]a, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, b[& si\ 0 \in]a, b[\end{cases} \in \tau_{X-\{0\}}$$

Por lo tanto, f es continua en $(X - \{0\}, \tau_{X-\{0\}})$.

$$\mathfrak{B}_{X-\{0\}} = \{]a, b[: a, b \in R, a < b, 0 \notin]a, b[\} \cup \{]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0\}$$

$$f(]a, b[) =]a, b[\in \tau_u$$
$$f(]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[) =]-\varepsilon, \varepsilon[\in \tau_u$$

Por lo tanto, f es abierta, y se trata de un homeomorfismo, $(X - \{0\}, \tau_{X-\{0\}})$ es homeomorfo a (R, τ_u).

c.- Estudiar la conexión en (X, τ) del conjunto $A =]a, b[\cup \{\alpha\}$.

Caso I: Si $0 \in]a, b[$*, sea* $B \in \mathfrak{B}$ *con* $\alpha \in B \Longrightarrow B =]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[\quad \varepsilon > 0$ *y* $B \cap]a, b[\neq \emptyset$*, porque* $0 \in]a, b[$*. Y como* $]a, b[$ *es conexo en* (X, τ)*, como* $\tau_R = \tau_u$*,*

$]a, b[$ es conexo en $(R, \tau_u) \Longleftrightarrow]a, b[$ es conexo en (X, τ) y como $\alpha \in \overline{]a, b[}$, entonces $A =]a, b[\cup \{\alpha\}$ es conexo.

$$\alpha \in \overline{]a, b[} \Longleftrightarrow \forall B \in \mathfrak{B}: \alpha \in B =]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[\Longleftrightarrow B \cap]a, b[\neq \emptyset$$

Caso II: Si $0 \notin]a, b[$. Veamos que en este caso A no es conexo.

$$O_1 =]a, b[\in \mathfrak{B} \quad O_2 =]-\varepsilon, 0[\cup \{\alpha\} \cup]0, \varepsilon[\in \mathfrak{B} \quad \varepsilon = \frac{min\{|a|, |b|\}}{2}$$

$$O_1 \cap A =]a, b[\in \mathfrak{B}_A \quad O_2 \cap A = \{\alpha\} \in \mathfrak{B}_A$$

$$(O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A) = A \quad (O_1 \cap A) \cap (O_2 \cap A) = \emptyset$$

Hay una partición de abiertos relativos no trivial de A, A no es conexo.
d.- ¿Es el conjunto $\boldsymbol{C} = [\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$ cerrado en $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$? ¿Es compacto en $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$?

$$C = [-1,1] \Longrightarrow C^c =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\cup \{\alpha\} \notin \tau$$

Por lo tanto, $= [-1,1]$ no es cerrado en (X, τ),

Como $C = [-1,1] \subset R$ y $\tau_R = \tau_u$, por el teorema de Heine-Borel, C es compacto en $(R, \tau_u) \Longleftrightarrow$ C es compacto en (X, τ).

Ejercicio 19

Sea (X,τ) un espacio compacto y $A \subseteq X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A en (X,τ).

Por reducción al absurdo, supongamos que $A' = \emptyset$, entonces $\forall x \in X \;\; \exists O_x \in \tau$:

$$(O_x - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

Se considera $\{O_x\}_{x\in X} \subset \tau$ y

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} O_x$$

Como (X,τ) un espacio compacto, existe $J \subset X$ finito tal que

$$X \subseteq \bigcup_{x\in J} O_x \Rightarrow A \subseteq X \subseteq \bigcup_{x\in J} O_x \;\; y \;\; (O_x - \{x\}) \cap A = \emptyset \;\; \forall x \in X \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{x\in J}\{x\}$$

$$\Rightarrow A \; es \; finito \;\; ¡¡¡¡ \Rightarrow A' \neq \emptyset$$

Ejercicio 20

Sea (R,τ_S), estudiar la continuidad de $f\colon (R,\tau_S) \to (R,\tau_S)$, $f(x) = senx$. Estudiar cuando un subconjunto A de (R,τ_S) es conexo.

Un base de entornos de $x \in R$ es:

$$\beta_x = \{[x, x+r[: r > 0\}$$

La aplicación f es continua en x si para todo $\varepsilon > 0 \;\; \exists r > 0$ tal que si $y \in [x, x+r[$ entonces $f(y) = seny \in [senx, senx + \varepsilon[$,es decir, $senx \le seny < senx + \varepsilon$.

$$x \le y \Rightarrow senx \le seny$$

Se pretende ver si f es creciente en x: existe $\delta > 0$ tal que $x \le y \Rightarrow senx \le seny$.

Por lo tanto, f es continua en los intervalos de la forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \quad k \in Z$.

Sea A de (R,τ_S) conexo, tiene que ser un intervalo. Si no es un intervalo, existen $a, b \in A$ y $c \notin A$ verificando $a < c < b$, entonces:

$$A = (]-\infty, c[\cap A) \cup (]c, +\infty[\cap A) \qquad (]-\infty, c[\cap A) \cap (]c, +\infty[\cap A) = \emptyset$$

$$]-\infty, c[\in \tau_u \Rightarrow]-\infty, c[\in \tau_S \Rightarrow]-\infty, c[\cap A \in \tau_S/_A$$
$$]c, +\infty[\in \tau_u \Rightarrow]c, +\infty[\in \tau_S \Rightarrow]c, +\infty[\cap A \in \tau_S/_A$$

Hay una partición de abiertos relativos no trivial de A, A no es conexo, absurdo.

Además, si $[a, b[\in \tau_S$, y es cerrado, $[a, b[^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[\in \tau_S$ porque

$$]-\infty, a[\in \tau_u \Rightarrow]-\infty, a[\in \tau_S \quad [b, +\infty[= \bigcup_{n\in N} [b, b+n[\in \tau_S$$

Por lo tanto, $[a, b[$ es un conjunto abierto y cerrado en (R,τ_S), luego si A es un intervalo que contiene a un intervalo de la forma $[a, b[$, no es conexo. Luego los únicos conexos de X, los intervalos degenerados, es decir, $A = \{x\}$ con $x \in X$.

Ejercicio 21

Componentes conexas de $\{^{1}/_{n}: n \in N\}$ ***y*** $R^2 - \{(x,y) \in R^2: y \in \{-1,1\}\}$.

Sea $A = \{^{1}/_{n}: n \in N\}$ en (R, τ_u), como en (R, τ_u) los conjuntos conexos son los intervalos, luego los intervalos incluidos en A, los degenerados, es decir, $\{^{1}/_{n}\}$ para cada $n \in N$. Por lo tanto, las componentes conexas son los puntos.

Sea $B = R^2 - \{(x,y) \in R^2: y \in \{-1,1\}\}$ *en* (R^2, τ_u), *se tiene que:*

$$B = (Rx]-\infty,-1[) \cup (Rx]-1,1[) \cup (Rx]1,+\infty[)$$

Es una partición de B de conjuntos disjuntos dos a dos.

Cada uno de los conjuntos es conexo por ser producto de conexos. También es abierto, al ser producto de abiertos. Por lo tanto, B tiene tres componentes conexas, que son:

$$(Rx]-\infty,-1[), (Rx]-1,1[), (Rx]1,+\infty[)$$

Ejercicio 22

Estudiad la compacidad de (R, τ_d). Caracterizar los subconjuntos compactos.

El espacio (R, τ_d) no es compacto, sea el recubrimiento infinito de abiertos de R:

$$R \subseteq \bigcup_{a \in R} [a,+\infty[\qquad [a,+\infty[\in \tau_d \quad \forall a \in R$$

Si fuese compacto, existe $A \subset R$ finito:

$$R \subseteq \bigcup_{a \in A} [a,+\infty[= [min\{a: a \in A\},+\infty[= [b,+\infty[\quad ¡¡¡¡$$

Por lo tanto, (R, τ_d) no es compacto.

Una caracterización de los conjuntos compactos en (R, τ_d) es:

$$A\ es\ compacto \Leftrightarrow A\ es\ finito$$

Por ser $\{a\} \in \tau_d$, entonces todo conjunto infinito A tiene como recubrimiento:

$$A \subseteq \bigcup_{a \in X} \{a\}$$

Luego si es compacto al extraer uno finito, se concluye con que A es finito, absurdo.

Por lo tanto, todo conjunto compacto en (R, τ_d) tiene que ser finito.

La otra implicación es trivial, todo conjunto finito es compacto.

Ejercicio 23

Sea $\boldsymbol{p \notin R}$. En $\boldsymbol{X = R \cup \{p\}}$ se considera la topología $\boldsymbol{\tau}$ que tiene por base

$$\boldsymbol{\beta = \beta_u \cup \{]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[\, \cup \{p\} : a < b\}}$$

Estudiar la conexión y compacidad de $\boldsymbol{(X, \tau)}$.

Se tiene que $\tau_u \leq \tau$ y $\tau_R = \tau_u$, por lo tanto se tiene que:

R es conexo en $(R, \tau_u) \Leftrightarrow R$ es conexo en (X, τ) y como $p \in \bar{R}$, entonces $X = R \cup \{p\}$ es conexo.

Veamos que $p \in \bar{R}$: Sea $B \in \beta$ con $p \in B \Longrightarrow B =]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[\, \cup \{p\}$ y $B \cap R \neq \emptyset$. Por lo tanto, $p \in \bar{R}$.

Veamos que (X, τ) es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de X:

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \qquad O_i \in \tau \quad \forall i \in I$$

Como $p \in X$, entonces

$$p \in \bigcup_{i \in I} O_i \Longrightarrow \exists i_0 \in I : p \in O_{i_0}$$

Se tiene que $O_{i_0} =]-\infty, a[\, \cup\,]b, +\infty[\, \cup \{p\}$, luego

$$X - O_{i_0} = [a, b]$$

$$[a, b]\ compacto\ en\ (R, \tau_u) \overset{\tau_u = \tau_R}{\Longleftrightarrow} [a, b]\ compacto\ en\ (X, \tau)$$

$$[a, b] = X - O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$$

Se puede extraer uno finito, existe $J \subset I$:

$$X - O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i \Longrightarrow X \subseteq \bigcup_{i \in J} O_i \cup O_{i_0}$$

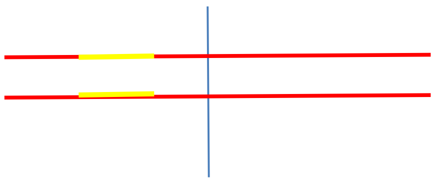
Es decir, (X, τ) es compacto.

Ejercicio 29

En $X = Rx\{0,1\}$ se consideran la familia de subconjuntos

$$\boldsymbol{\beta = \{]a,b[x\{0,1\}: a,b \in R, a < b\}}$$

a.- Demostrar que β es base de una topología τ sobre X.



$$(i)\ X = \bigcup_{\substack{a,b \in R \\ a<b}} (]a,b[x\{0,1\})$$

$$\bigcup_{\substack{a,b \in R \\ a<b}} (]a,b[x\{0,1\}) = \left(\bigcup_{\substack{a,b \in R \\ a<b}}]a,b[\right) x\{0,1\} = Rx\{0,1\} = X$$

(ii) *Sean* $B_1, B_2 \in \beta$*, entonces* $\exists B_3 \in \beta: B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

$$B_1, B_2 \in \beta \Longrightarrow B_1 =]a,b[x\{0,1\} \quad a < b \quad B_2 =]c,d[x\{0,1\} \quad c < d$$

Se considera $B_3 =]\text{máx}\{a,c\}, \text{mín}\{b.d\}[x\{0,1\} \in \beta$ *y verifica que:*

$$B_3 =]\text{máx}\{a,c\}, \text{mín}\{b.d\}[x\{0,1\} \subset B_1 \cap B_2$$

Por lo tanto, β *es base de una topología* τ *sobre* X.

b.- Estudiar si los conjuntos

$$\boldsymbol{A} = [\mathbf{2},\mathbf{3}]\boldsymbol{x}\{\mathbf{0}\} \cup]\mathbf{2},\mathbf{3}[\boldsymbol{x}\{\mathbf{1}\} \quad \boldsymbol{B} =]\mathbf{2},\mathbf{3}[\boldsymbol{x}\{\mathbf{0}\} \cup [\mathbf{2},\mathbf{3}]\boldsymbol{x}\{\mathbf{1}\}$$

Y $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} =]\mathbf{2},\mathbf{3}[\boldsymbol{x}\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ **son compactos en** $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}\{\mathbf{0},\mathbf{1}\},\boldsymbol{\tau})$**.**

Veamos si $A = [2,3]x\{0\} \cup]2,3[x\{1\}$ es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de A:

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i \qquad O_i \in \tau \ \ \forall i \in I$$

Para cada $a \in A \; \exists i \in I$ *y* $\exists B_i \in \beta: a \in B_i \subseteq O_i$*:*

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i \quad B_i \in \beta \ \forall i \in I$$

$$[2,3]x\{0\} \cup]2,3[x\{1\} \subseteq \bigcup_{i\in I} (]a_i,b_i[x\{0,1\}) \quad a_i < b_i \ \ \forall i \in I$$

Entonces se tiene que

$$[2,3] \subseteq \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[\qquad]a_i,b_i[\in \tau_u$$

Y como $[2,3]$ es compacto en (R,τ_u), existe $J \subset I$ finito, tal que:

$$[2,3] \subseteq \bigcup_{j\in J}]a_j,b_j[\Longrightarrow [2,3]x\{0\} \cup]2,3[x\{1\} \subseteq \bigcup_{j\in j} (]a_j,b_j[x\{0,1\})$$

Es decir, $A = [2,3]x\{0\} \cup]2,3[x\{1\}$ es compacto. De la misma forma B es compacto.

Veamos si $A \cap B =]2,3[x\{0,1\}$ NO es compacto. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de $A \cap B$:

$$A \cap B =]2,3[x\{0,1\} \subseteq \bigcup_{n\in N} \left(\left]2+\frac{1}{n},3\right[x\{0,1\} \right) \qquad \left]2+\frac{1}{n},3\right[x\{0,1\} \in \tau \ \ \forall n \in N$$

Supongamos que $A \cap B$ es compacto, entonces existe $J \subset N$ finito:

$$A \cap B =]2,3[x\{0,1\} \subseteq \bigcup_{n\in J} \left(\left]2+\frac{1}{n},3\right[x\{0,1\} \right) = \left]2+\frac{1}{m},3\right[x\{0,1\} \ \ ¡¡¡¡¡$$

Donde $m = \max_{n\in J}\{n\}$. Por lo tanto, $A \cap B$ NO es compacto.

c.- Calcular las componentes conexas de $(Rx\{0,1\},\tau)$.

Veamos si $(Rx\{0,1\},\tau)$ es conexo. Sean $A,B\in\tau$, tal que $A\cup B=Rx\{0,1\}\quad A\cap B=\emptyset$.

Como $A,B\in\tau$, entonces: $A=O_1x\{0,1\}\quad B=O_2x\{0,1\}\qquad O_1,O_2\in\tau_u$, luego

$$Rx\{0,1\}=A\cup B=(O_1x\{0,1\})\cup(O_2x\{0,1\})=\big((O_1\cup O_2)x\{0,1\}\big)$$

$$\emptyset=A\cap B=(O_1x\{0,1\})\cap(O_2x\{0,1\})=\big((O_1\cap O_2)x\{0,1\}\big)$$

Se tiene que $O_1,O_2\in\tau_u$ verificando que $O_1\cup O_2=R$ y $O_1\cap O_2=\emptyset$, y como (R,τ_u) es conexo, entonces $O_1=R\ O_2=\emptyset$ ó $O_1=\emptyset\ O_2=R$.

En consecuencia: $A=O_1x\{0,1\}=Rx\{0,1\}\quad B=O_2x\{0,1\}=\emptyset$ ó $A=\emptyset\qquad B=Rx\{0,1\}$.

Es decir, $(Rx\{0,1\},\tau)$ es conexo , y sólo tiene una componente conexa.

Ejercicio 27

a.- Razonar si puede existir una biyección abierta del plano (R^2,τ_u) en la esfera $\left(S^2,\tau u_{/S^2}\right)$.

Supongamos que existe $f\colon(R^2,\tau_u)\to\left(S^2,\tau u_{/S^2}\right)$ biyectiva y abierta. Sea un recubrimiento infinito de abiertos de R^2:

$$R^2\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i\qquad O_i\in\tau_u\quad\forall i\in I\xRightarrow{f\ biyectiva}f(R^2)=S^2\subseteq\bigcup_{i\in I}f(O_i)$$

Y como f es abierta, $f(O_i)\in\tau u_{/S^2}\ \ \forall i\in I$, es decir, es un recubrimiento infinito de abiertos de S^2, y como $\left(S^2,\tau u_{/S^2}\right)$ es compacto, entonces existe $J\subset I$ finito:

$$S^2\subseteq\bigcup_{j\in J}f(O_J)\overset{f^{-1}}{\Longrightarrow}R^2\subseteq\bigcup_{j\in J}O_J$$

Se tiene que (R^2,τ_u) es compacto, absurdo, no puede existir una biyección abierta del plano (R^2,τ_u) en la esfera $\left(S^2,\tau u_{/S^2}\right)$.

b.- Probar que si $\boldsymbol{\beta}$ es base de $(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{\tau_u})$, entonces las componentes conexas de los elementos de $\boldsymbol{\beta}$ forman otra base de $(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{\tau_u})$.

Sea $B \in \beta$ y sea C_B el conjunto de componentes conexas de B:

$$B = \bigcup_{i \in I_B} C_B^i \qquad C_B^i \in C_B \;\; \forall i \in I_B \;\; conexos\; C_B^i \in \tau u_{/_B}\; disjuntos\; dos\; a\; dos$$

Se considera $\beta_1 = \left\{C_B^i : \forall i \in I_B\; \forall B \in \beta\right\}$ $C_B^i \in \tau_u$ $\forall i \in I_B\; \forall B \in \beta$. Todo $O \in \tau_u$, por β base de la topología se pone como unión de elementos de β:

$$O = \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} \left[\bigcup_{i \in I_{B_j}} C_{B_j}^i \right] = \bigcup_{\substack{i \in I_{B_j} \\ j \in J}} C_{B_j}^i$$

Es decir, todo $O \in \tau_u$ se pone como unión de elementos de β_1. Se trata de una base de abiertos de τ_u.