Tema 11

Cálculo de integrales simples

Abordamos ahora el estudio de los tres métodos más útiles para el cálculo de integrales de funciones de una variable, también llamadas *integrales simples*. En primer lugar estudiamos la que se conoce como *regla de Barrow*, directamente relacionada con el teorema fundamental del cálculo. Permite obtener la integral de cualquier función integrable en un intervalo no trivial, para la que se disponga de una *primitiva*. De dicha regla deducimos fácilmente la *fórmula de integración por partes*, especialmente indicada cuando el integrando viene dado como producto de dos funciones. Finalmente analizamos la *fórmula de cambio de variable* que permite calcular una integral modificando la función integrando, típicamente para sustituirla por otra función para la que se conozca una primitiva.

11.1. Regla de Barrow

En lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$. Recordemos que una **primitiva** de una función $f : J \to \mathbb{R}$ es otra función $G : J \to \mathbb{R}$, que es derivable en J con $G' = f$. Repasamos la versión elemental de la llamada *regla de Barrow*:

- *Si $f : J \to \mathbb{R}$ es una función continua y G una primitiva de f, se tiene:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \qquad \forall\, a,b \in J$$

Fijados $a,b \in J$, sea F la integral indefinida de f con origen en a. La versión elemental del teorema fundamental del cálculo nos dice que F también es una primitiva de f, es decir, F es derivable en J con $F' = f = G'$. Del teorema del valor medio deducimos que $F - G$ es constante, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + c$ para todo $x \in J$. Como $F(a) = 0$, tomando $x = a$ obtenemos que $c = -G(a)$, de donde

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) + c = G(b) - G(a) \qquad \blacksquare$$

En la práctica, es costumbre escribir $\big[G(x)\big]_a^b = G(b) - G(a)$, con lo que la regla anterior se resume en la igualdad

$$\int_a^b G'(x)\,dx = \big[G(x)\big]_a^b \tag{1}$$

válida para toda función G que sea de clase C^1 en un intervalo que contenga los puntos a y b.

Mejoraremos el resultado anterior en dos sentidos. Por una parte, obtendremos la misma conclusión, suponiendo sólo que f es localmente integrable en J, aunque no sea continua. Por otra, veremos si la primitiva G permite de hecho estudiar la integrabilidad de f en J y calcular la correspondiente integral. La respuesta en general es negativa, pero es afirmativa cuando la función f no toma valores negativos. Preparamos el terreno resolviendo una cuestión de medibilidad: toda función definida en un intervalo, que admita una primitiva, es medible.

- *Si $G: J \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces G' es una función medible.*

Fijamos $c \in J^\circ$ y $\delta > 0$ con $[c-\delta, c+\delta] \subset J$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $G_n : J \to \mathbb{R}$ por

$$G_n(x) = \frac{G\big(x + (\delta/n)\big) - G\big(x\big)}{\delta/n} \qquad \forall x \in J \cap \,]-\infty, c] \qquad \text{y}$$

$$G_n(x) = \frac{G(x) - G\big(x - (\delta/n)\big)}{\delta/n} \qquad \forall x \in J \cap \,]c, +\infty[$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, el carácter local de la continuidad nos dice que G_n es continua en $J \setminus \{c\}$, de donde se deduce que G_n es medible. Por definición de derivada, la sucesión $\{G_n\}$ converge a G' puntualmente en J, así que G' es medible, por ser el límite puntual de una sucesión de funciones medibles. ■

El siguiente es el resultado clave de nuestra discusión, pues permitirá estudiar la continuidad absoluta de la primitiva de una función.

- *Dados $c, d \in \mathbb{R}$ con $c < d$, sea $G : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces se tiene:*

$$\big|G(d) - G(c)\big| \leqslant \int_a^b \big|G'(t)\big|\,dt \tag{2}$$

Resaltamos que, por el resultado previo, $|G'|$ es una función medible positiva, luego tiene sentido la integral que aparece en el segundo miembro de (2). Obviamente, la desigualdad sólo tiene interés cuando dicha integral es finita.

Fijado $\varepsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos $\rho_n = n\varepsilon/(d-c)$ y consideramos los conjuntos

$$E_n = \big\{t \in [c, d] \,:\, \rho_{n-1} \leqslant |G'(t)| < \rho_n\big\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser G' medible, vemos que $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles, que claramente verifica: $[c, d] = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$. Se tiene por tanto que $d - c = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$. Por otra parte es claro que

$$\rho_n \lambda(E_n) = \rho_{n-1}\lambda(E_n) + \frac{\varepsilon\lambda(E_n)}{d-c} \leqslant \int_{E_n} |G'| + \frac{\varepsilon\lambda(E_n)}{d-c} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La σ-aditividad de la integral de la función medible positiva $|G'|$ permite entonces obtener:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |G'| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \lambda(E_n)}{d-c} = \int_c^d |G'(t)|\, dt + \varepsilon \tag{3}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la regularidad exterior de la medida de Lebesgue nos permite escribir

$$E_n \subset A_n^\circ = A_n \subset \mathbb{R} \quad \text{con} \quad \lambda(A_n) < \lambda(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n \rho_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Definimos entonces una función creciente $H : [c, d] \to [0, \infty]$ dada por

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda\big(A_n \cap [c, t]\big) \qquad \forall t \in [c, d]$$

y consideramos el conjunto $D = \sup \big\{ x \in [c, d] \, : \, |G(x) - G(c)| \leqslant H(x) \big\}$, que no es vacío, ya que $c \in D$. Tomando $x_0 = \sup D$, pretendemos probar que $x_0 = d$. Suponiendo por el contrario que $x_0 < d$, llegaremos a una contradicción.

En primer lugar, para todo $x \in D$ se tiene $|G(x) - G(c)| \leqslant H(x) \leqslant H(x_0)$, y por ser G continua en el punto x_0 deducimos que

$$|G(x_0) - G(c)| \leqslant H(x_0) \tag{5}$$

Por otra parte, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in E_k$, con lo que $|G'(x_0)| < \rho_k$. Usando que A_k es abierto, y la definición de derivada, encontramos $x \in]x_0, d]$ verificando que

$$[x_0, x] \subset A_k \qquad \text{y} \qquad |G(x) - G(x_0)| < \rho_k (x - x_0) \tag{6}$$

En vista de la primera inclusión, tenemos que $]x_0, x] \uplus \big(A_k \cap [c, x_0]\big) \subset A_k \cap [c, x]$, de donde deducimos que $(x - x_0) + \lambda\big(A_k \cap [c, x_0]\big) \leqslant \lambda\big(A_k \cap [c, x]\big)$. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq k$ tenemos simplemente que $A_n \cap [c, x_0] \subset A_n \cap [c, x]$, luego usando la definición de H concluimos que

$$\rho_k (x - x_0) + H(x_0) \leqslant H(x)$$

Usando ahora (5), (6) y esta última igualdad, obtenemos que

$$|G(x) - G(c)| \leqslant |G(x) - G(x_0)| + |G(x_0) - G(c)| < \rho_k (x - x_0) + H(x_0) \leqslant H(x)$$

Esto significa que $x \in D$, lo cual es una contradicción, ya que $x > x_0 = \sup D$.

Así pues, tenemos $x_0 = d$, y usando otra vez (5) junto con (4) y (3) obtenemos que

$$\begin{aligned} |G(d) - G(c)| \leqslant H(d) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \frac{\varepsilon}{2^n \rho_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \lambda(E_n) + \varepsilon < \int_c^d \big|G'(t)\big|\, dt + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, hemos probado la desigualdad (2), como se quería. ■

Podemos ya probar la versión general del resultado que estamos estudiando. Para nuestro intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, en lo que sigue escribiremos $\alpha = \inf J$, entendiendo que $\alpha = -\infty$ cuando J no está minorado. Del mismo modo, tomamos $\beta = \sup J$ o $\beta = +\infty$ según que J esté o no mayorado.

Regla de Barrow. *Si $f \in \mathcal{L}_1(J)$ y $G : J \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces G tiene límite, tanto en α como en β, y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta} G(x) - \lim_{x\to\alpha} G(x) \tag{7}$$

Demostración. Trabajamos primero en un intervalo compacto $K = [a,b] \subset J$ con $a < b$. La cuestión clave es comprobar que $G\big|_K$ es absolutamente continua, para poder usar el teorema fundamental del cálculo.

Para ello, sea $F : K \to \mathbb{R}$ la integral indefinida de $|f|$ con origen en a, es decir,

$$F(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt \qquad \forall x \in K$$

y recordemos que F sí es absolutamente continua.

Para cualesquiera $c,d \in K$ con $c < d$ el resultado anterior nos dice que

$$\big|G(d) - G(c)\big| \leqslant \int_c^d \big|G'(t)\big|\,dt = \int_c^d \big|f(t)\big|\,dt = F(d) - F(c) = \big|F(d) - F(c)\big|$$

Fijado ahora $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la continuidad absoluta de F. Dado $n \in \mathbb{N}$ y una familia $\big\{\,]a_k, b_k[\,:\, k \in \Delta_n\big\}$ de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, tales que $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, usando la desigualdad anterior obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \big|G(b_k) - G(a_k)\big| \leqslant \sum_{k=1}^n \big|F(b_k) - F(a_k)\big| < \varepsilon$$

luego $G\big|_K$ es absolutamente continua. El teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \tag{8}$$

Aunque hemos supuesto que $a < b$, está claro ahora que la igualdad anterior es válida para cualesquiera $a,b \in J$.

Para obtener (7) bastará ahora tomar límites en (8), con $a \searrow \alpha$ y $b \nearrow \beta$. Previamente fijamos $c \in J^\circ$ con lo que f es integrable, tanto en $]\alpha, c]$ como en $[c, \beta[$. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de puntos de J tales que $\{a_n\} \searrow \alpha$ y $\{b_n\} \nearrow \beta$. Como $\big\{\,]a_n, c]\,\big\} \nearrow\,]\alpha, c]$, usando la continuidad creciente de la integral de f en $]\alpha, c]$, junto con (8), obtenemos que

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \big(G(c) - G(a_n)\big)$$

Esto prueba que G tiene límite en α y se verifica que

$$\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx = G(c) - \lim_{x \to \alpha} G(x) \tag{9}$$

Trabajando análogamente en el intervalo $[c, \beta[$ obtenemos

$$\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{c}^{b_n} f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \big(G(b_n) - G(c) \big)$$

y esto prueba que G tiene límite en β con

$$\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x \to \beta} G(x) - G(c) \tag{10}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades (9) y (10) obtenemos claramente (7). ■

Conviene aclarar que el resultado anterior generaliza la versión elemental que habíamos repasado previamente, pues de él deducimos de inmediato lo siguiente:

- *Si $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(J)$ y $G : J \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces se tiene:*

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall\, a,b \in J$$

En efecto, dados $a,b \in J$, y suponiendo sin perder generalidad que $a < b$, podemos usar el resultado anterior, para el intervalo compacto $[a, b]$, en el que f es integrable. Obtenemos la igualdad buscada, ya que $\lim_{x \to b} G(x) = G(b)$ y $\lim_{x \to a} G(x) = G(a)$. ■

La generalización mencionada es ahora evidente, puesto que, en vez de suponer que f sea continua en J, ahora suponemos solamente que f es localmente integrable en J, para llegar a la misma conclusión. Pero además, a diferencia de la versión elemental y del enunciado anterior, la versión general de la regla de Barrow que hemos obtenido, permite calcular integrales sobre intervalos no compactos.

Cuando se usa en la práctica la regla de Barrow, como hacíamos con la versión elemental, es costumbre escribir $\big[G(x)\big]_{\alpha}^{\beta} = \lim_{x \to \beta} G(x) - \lim_{x \to \alpha} G(x)$, con lo que la regla se resume en la igualdad

$$\int_{\alpha}^{\beta} G'(t)\,dt = \big[G(x)\big]_{\alpha}^{\beta}$$

cuya similitud con (1) es más que evidente. La diferencia entre las dos versiones se aprecia aquí muy bien, pues ahora no es necesario que G sea de clase C^1 en un intervalo que contenga a los puntos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, basta con que G sea derivable en el intervalo abierto $]\alpha, \beta[$, con G' integrable en dicho intervalo, pudiendo ser $\alpha = -\infty$ o $\beta = +\infty$.

Resaltamos ahora que la regla de Barrow nos da una condición necesaria para que una función $f : J \to \mathbb{R}$, que admita una primitiva, sea integrable en J: cualquier primitiva debe tener límite en α y β. Con frecuencia, esto permite probar que f no es integrable en J, encontrando una primitiva que no tenga límite en α o en β.

Es natural preguntarse si la mencionada condición necesaria es también suficiente, es decir, si disponiendo de una primitiva de f que tenga límite en α y β, podemos asegurar que f es integrable en J. La respuesta en general es negativa, como veremos más adelante. Pero vamos a probar ahora que la respuesta es afirmativa cuando f no toma valores negativos:

Criterio de integrabilidad. *Dada una función $f : J \to \mathbb{R}_0^+$, sea G una primitiva de f. Entonces $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, G tiene límite en α y β, en cuyo caso se tiene:*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \big[G(x)\big]_\alpha^\beta$$

Demostración. Sólo queda probar que, si G tiene límite en α y β, entonces $f \in \mathcal{L}_1(J)$. De entrada, sabemos por un resultado previo que f es medible. Por otra parte, como f no toma valores negativos, su primitiva G es una función creciente, luego usando el teorema de integración de derivadas, obtenemos que $G' = f$ es localmente integrable en J. Para probar que de hecho f es integrable en J, podemos obviamente suponer que $J =]\alpha, \beta[$.

Fijamos dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en J con $\{a_n\} \searrow \alpha$ y $\{b_n\} \nearrow \beta$, de forma que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga $a_n < b_n$ y así considerar la función característica de $[a_n, b_n]$, que denotaremos por χ_n. Como $\big\{[a_n, b_n]\big\} \nearrow]\alpha, \beta[= J$, para todo $x \in J$ tenemos $\{\chi_n(x)\} \nearrow 1$, y por tanto $\big\{\chi_n(x)\,f(x)\big\} \nearrow f(x)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que f es integrable en $[a_n, b_n]$ lo que nos permite usar la regla de Barrow en dicho intervalo. Usando también el teorema de la convergencia monótona, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \chi_n(x)\,f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(G(b_n) - G(a_n)\big) = \lim_{x\to\beta} G(x) - \lim_{x\to\beta} G(x) < \infty\end{aligned}$$

Esto prueba que $f \in \mathcal{L}_1(J)$ como se quería. ■

11.2. Funciones potenciales y exponenciales

Para ilustrar el uso de los últimos resultados consideremos por ejemplo la función potencia de exponente $s \in \mathbb{R}$, es decir,

$$f_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f_s(x) = x^s \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Se trata de una función continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}^+$. Suponiendo primeramente que $s \neq -1$, vemos que f_s admite una primitiva $G_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$G_s(x) = \frac{x^{s+1}}{s+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$ la regla de Barrow nos dice que

$$\int_a^b x^s dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_a^b = \frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}$$

En el caso $s < -1$, la función G_s no tiene límite en 0 pero sí en $+\infty$, luego dado $c \in \mathbb{R}^+$, el criterio de integrabilidad nos dice que f_s no es integrable en $]0, c[$, pero sí lo es en $]c, +\infty[$, y podemos escribir:

$$\int_c^{+\infty} x^s\, dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_c^{+\infty} = -\frac{c^{s+1}}{s+1} \qquad \forall c \in \mathbb{R}^+, \ \forall s \in]-\infty, -1[$$

Por el contrario, si $s > -1$, la función G_s tiene límite en 0 pero no en $+\infty$, luego dado otra vez $c \in \mathbb{R}^+$, vemos que f_s no es integrable en $]c, +\infty[$, pero sí lo es en $]0, c[$ y tenemos

$$\int_0^c x^s\, dx = \left[\frac{x^{s+1}}{s+1}\right]_0^c = \frac{c^{s+1}}{s+1} \qquad \forall c \in \mathbb{R}^+, \ \forall s \in]-1, +\infty[$$

En el caso $s = -1$ la función logaritmo es una primitiva de la función $x \mapsto 1/x$, luego la regla de Barrow nos dice que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \big[\log x\big]_a^b = \log \frac{b}{a} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

Como el logaritmo no tiene límite en 0 ni en $+\infty$, deducimos que, para cualquier $c \in \mathbb{R}^+$, la función $x \to 1/x$ no es integrable en $]0, c[$ y tampoco en $]c, +\infty[$. Resaltamos los resultados obtenidos sobre la integrabilidad de las funciones potenciales.

- *Dados* $s \in \mathbb{R}$ *y* $c \in \mathbb{R}^+$, *la función* $x \mapsto x^s$ *es*
  (i) *integrable en* $]0, c[$ *si y sólo si* $s > -1$
  (ii) *integrable en* $]c, +\infty[$ *si y sólo si* $s < -1$

Vemos que, cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$, la función potencia $x \mapsto x^s$ nunca es integrable en $\mathbb{R}^+$.

Nótese que, en un conjunto de medida finita, como el intervalo $]0, 1[$, hemos encontrado abundantes ejemplos de funciones integrables, que no están acotadas. Pero del estudio anterior cabe destacar otros hechos interesantes, que habíamos anunciado anteriormente. Para concretar, nos centramos en el caso $s = -1/2 > -1$ y definimos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ escribiendo $f(0) = 0$ y

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \forall t \in]0, 1]$$

Según hemos visto, f es integrable en $[0, 1]$ y se tiene

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sqrt{x} \qquad \forall x \in [0, 1]$$

Dicho de otra forma, la función raíz cuadrada $x \mapsto \sqrt{x}$, de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$, es la integral indefinida de f con origen en 0, luego es absolutamente continua. Pero la raíz cuadrada no es lipschitziana en $]0, 1[$ puesto que es derivable en dicho intervalo pero su derivada no está acotada. Tenemos así un ejemplo de *una función absolutamente continua que no es lipschitziana*.

Por otra parte tenemos $f(t)^2 = 1/(4t)$ para todo $t \in]0, 1[$ luego, según hemos visto para el caso $s = -1$, la función f^2 no es integrable en $]0, 1[$, a pesar de que f sí lo es. En particular, queda claro que *el producto de dos funciones integrables puede no ser integrable*.

Estudiemos ahora la integrabilidad de ciertas funciones racionales. Fijados $x_0 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$$

Tenemos claramente $f = G'$ donde G viene dada, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, por

$$G(x) = \frac{1}{(1-k)\,(x-x_0)^{k-1}} \quad (\text{si } k > 1), \qquad G(x) = \log|x-x_0| \quad (\text{si } k = 1)$$

Como f es continua, luego localmente integrable, en las semirrectas $]-\infty, x_0[$ y $]x_0, +\infty[$, la regla de Barrow nos dice que para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b < x_0$, o bien $x_0 < a < b$, se tiene

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{1-k}\left(\frac{1}{(b-x_0)^{k-1}} - \frac{k}{(a-x_0)^{k-1}}\right) \quad (k > 1), \qquad \int_a^b \frac{dx}{x-x_0} = \log\frac{|b-x_0|}{|a-x_0|}$$

Por otra parte, vemos que G nunca tiene límite en el punto x_0, tiene límite 0, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ cuando $k > 1$, pero si $k = 1$, no existe ninguno de esos límites. Deducimos que f no es integrable en ningún intervalo no trivial I que verifique $x_0 \in \overline{I}$. En el caso $k = 1$, vemos también que f no es integrable en ningún intervalo no acotado.

Cuando $k > 1$, observamos que f tiene signo constante en todo intervalo I tal que $x_0 \notin I$, lo que nos permite usar el criterio de integrabilidad. Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $b < x_0 < a$, obtenemos que f es integrable en $]-\infty, b[$ y en $]a, +\infty[$ con

$$\int_{-\infty}^b \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{(1-k)\,(b-x_0)^{k-1}}, \qquad \int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \frac{1}{(k-1)\,(a-x_0)^{k-1}}$$

Más adelante estudiaremos la integrabilidad de otras funciones racionales, pero veamos ahora ciertas funciones exponenciales. Concretamente, fijado $s \in \mathbb{R}$ con $s \neq 0$, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$f_s(x) = e^{sx} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

que es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}$. Es claro que la función $G_s = (1/s)\,f_s$ es una primitiva de f_s luego se tiene

$$\int_a^b e^{sx}\,dx = \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Para $s > 0$ es claro que G_s tiene límite 0 en $-\infty$, pero diverge en $+\infty$, mientras que si $s < 0$ vemos que G_s tiene límite 0 en $+\infty$ y diverge en $-\infty$. Por tanto, fijado $c \in \mathbb{R}$, el criterio de integrabilidad nos dice que f_s es integrable en $]-\infty, c[$ si, y sólo si, $s > 0$, mientras que es integrable en $]c, +\infty[$ si, y sólo si $s < 0$. De hecho se tiene

$$\int_{-\infty}^c e^{sx}\,dx = \frac{e^{sc}}{s} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \int_c^{+\infty} e^{sx}\,dx = -\frac{e^{sc}}{s} \quad \forall s \in \mathbb{R}^-$$

Deducimos que f_s nunca es integrable en $\mathbb{R}$. Sin embargo, es ahora fácil mostrar un ejemplo que hasta ahora no había aparecido: una función continua, que es integrable en $\mathbb{R}$ pero no tiene soporte compacto. Es lo que le ocurre a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = e^{-\rho|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$, pues usando las integrales recién calculadas, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{\rho x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-\rho x}\,dx = \frac{2}{\rho}$$

11.3. Criterio de comparación

Es muy habitual estudiar la integrabilidad de una función comparándola con otra conocida. Por ejemplo, es obvio que si f y g son funciones medibles tales que $|f| \leqslant |g|$, entonces f será integrable dondequiera que lo sea g. Para ver un caso sencillo, podemos escribir

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

y esto prueba que la función $x \mapsto \cos x/x^2$ es integrable en $]1, +\infty[$, aunque no nos permita calcular su integral. Frecuentemente, no es necesario disponer de una desigualdad que sea válida en todo el intervalo de integración, como pasamos a explicar.

Si queremos estudiar la integrabilidad en $J =]\alpha, \beta[$ de una función $f : J \to \mathbb{R}$, podemos fijar $c \in J$, y es claro que f será integrable en J si, y sólo si, lo es en $]\alpha, c[$ y en $]c, \beta[$, luego bastará disponer de una comparación adecuada en cada uno de esos intervalos, y la función con la que comparamos no tiene por qué ser la misma en ambos. Como ejemplo ilustrativo, consideremos la función continua $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x - x^2}} \qquad \forall x \in]0, 1[$$

Para $0 < x < 1/2$ tenemos $\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x} \geqslant \sqrt{x}/\sqrt{2}$, de donde

$$\int_0^{1/2} |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{2}\,\big[\sqrt{x}\,\big]_0^{1/2} = 2$$

Por otra parte, para $1/2 < x < 1$ se tiene $\sqrt{x - x^2} \geqslant \sqrt{1-x}/\sqrt{2}$ y obtenemos

$$\int_{1/2}^1 |f(x)|\,dx \leqslant \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{2}\,\big[\sqrt{1-x}\,\big]_{1/2}^1 = 2$$

Así pues, hemos probado que f es integrable en $]0, 1[$.

Volviendo al caso general, supongamos que f es localmente integrable en J, condición que es necesaria para que sea integrable. Tomando $a, b \in J$ con $b < a$, como f es integrable en $[b, a]$, será integrable en J si, y sólo si, lo es en $]\alpha, b[$ y en $]a, \beta[$. La ventaja es que podemos elegir a y b para facilitar las acotaciones que necesitemos. De hecho, no es necesario concretarlos, basta saber que podemos elegirlos de forma que se verifiquen las acotaciones que nos interesen. Esto permite hacer una comparación *por paso al límite*, en la forma que se describe en el siguiente resultado. Lo enunciamos para el intervalo $[a, \beta[$, y obviamente se tiene un resultado análogo para el intervalo $]\alpha, b]$.

Criterio de comparación. *Dado un intervalo $I = [a, \beta[$ con $a \in \mathbb{R}$ y $a < \beta \leqslant +\infty$, y dos funciones $f, g \in \mathcal{L}_1^{loc}(I)$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, se tiene:*

(*i*) *Si $\lim_{x\to\beta} \big|f(x)/g(x)\big| = L \in \mathbb{R}^+$, entonces $f \in \mathcal{L}_1(I)$ si, y sólo si, $g \in \mathcal{L}_1(I)$.*

(*ii*) *Si $\lim_{x\to\beta} \big|f(x)/g(x)\big| = 0$, y $g \in \mathcal{L}_1(I)$, entonces $f \in \mathcal{L}_1(I)$.*

(*iii*) *Si la función $|f/g|$ diverge en β, y $g \notin \mathcal{L}_1(I)$, entonces $f \notin \mathcal{L}_1(I)$.*

Demostración. Para probar (i), usamos la definición de límite, obteniendo $b \in I$ tal que,

$$(L/2)\,|g(x)| < |f(x)| < (3L/2)\,|g(x)| \qquad \forall x \in [b, \beta[\tag{11}$$

Si $g \in \mathcal{L}_1(I)$, entonces g es integrable en $[b, \beta[$ y la segunda desigualdad nos dice que f es integrable en $[b, \beta[$, pero también lo es en $[a, b]$, así que $f \in \mathcal{L}_1(I)$. Como $L > 0$, podemos usar análogamente la primera desigualdad de (11), y de $f \in \mathcal{L}_1(I)$ deducimos que $g \in \mathcal{L}_1(I)$.

En el caso (ii) tomamos $b \in I$ de forma que se tenga $|f(x)| < |g(x)|$ para todo $x \in [b, \beta[$, y razonando igual que antes, de $g \in \mathcal{L}_1(I)$ deducimos que $f \in \mathcal{L}_1(I)$. Finalmente en (iii) elegimos $b \in I$ de forma que $|f(x)| > |g(x)|$ para todo $x \in [b, \beta[$, y razonando como antes, si fuese $f \in \mathcal{L}_1(I)$, obtendríamos que $g \in \mathcal{L}_1(I)$. ■

Consideremos por ejemplo una función racional, de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde P, Q son polinomios de grados respectivos $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $P \neq 0$ y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De entrada, f es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}$, pero queremos estudiar su integrabilidad en $\mathbb{R}$. Es bien sabido que

$$\lim_{x \to -\infty} |x^{q-p}|\,|f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |x^{q-p}|\,|f(x)| = L \in \mathbb{R}^+$$

luego, para aplicar el criterio anterior, conviene usar la función $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = x^{p-q} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Podemos hacerlo, por ejemplo, en el intervalo $I_1 = [1, +\infty[$, puesto que f y g son localmente integrables en I_1, con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I_1$. Recordando que g es integrable en I_1 si, y sólo si, $q - p > 1$, deducimos que igual ocurre con f. Usando el resultado análogo al anterior para el intervalo $I_2 =]-\infty, -1]$, deducimos de la misma forma que f es integrable en I_2 si, y sólo si, $q - p > 1$. Por tanto, si $q - p > 1$, se tiene que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, mientras que si $q - p \leqslant 1$, vemos que f es integrable en un intervalo no trivial I, si, y sólo si, I está acotado.

Otro ejemplo destacable puede ser la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

que podemos comparar con la función ya estudiada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $g(x) = e^{-|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vemos claramente que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^2}}{e^{-|x|}} = \lim_{x \to +\infty} e^{|x| - x^2} = 0$$

lo que permite usar el criterio de comparación en los intervalos $\mathbb{R}_0^+$ y $\mathbb{R}_0^-$. Como ya sabemos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, deducimos que también $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

11.4. Integración por partes

Veamos un segundo método de cálculo de integrales simples, que resulta muy útil cuando el integrando viene dado como un producto de dos funciones, lo que en realidad no es restrictivo, pues siempre podemos usar un factor constantemente igual a 1. Igual que hicimos con la regla de Barrow, empezamos con una versión elemental del resultado que buscamos.

- *Si $F,G : J \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 en J, se tiene:*

$$\int_a^b F(t)\, G'(t)\, dt \,=\, [F(x)\, G(x)]_a^b - \int_a^b F'(t)\, G(t)\, dt \qquad \forall\, a,b \in J \tag{12}$$

En efecto, la función producto $F\,G$ es de clase C^1 en J, luego fijados $a,b \in J$, la regla de Barrow nos permite escribir:

$$\int_a^b \big(F'(t)\, G(t) + F(t)\, G'(t)\big)\, dt \,=\, \int_a^b \big(F\,G\big)'(t)\, dt \,=\, \big[F(x)\, G(x)\big]_a^b$$

Usando la linealidad de la integral, deducimos claramente la igualdad (12). ■

Obtendremos dos versiones más generales de este resultado. La primera se deducirá del teorema fundamental del cálculo, mediante la siguiente observación:

- *Dado un intervalo compacto $K \subset \mathbb{R}$, si dos funciones $F,G : K \to \mathbb{R}$ son absolutamente continuas, entonces la función producto $F\,G$ también lo es.*

Puesto que F y G son continuas, ambas están acotadas, luego existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|F(x)| \leqslant M \quad \text{y} \quad |G(x)| \leqslant M \qquad \forall\, x \in K$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ la continuidad absoluta de F y G nos permite encontrar $\delta > 0$ verificando la siguiente condición: si $n \in \mathbb{N}$ y $\big\{\,]\, a_k\,,\, b_k\,[\; :\; k \in \Delta_n \big\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en K, tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \,<\, \delta$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \big|\, F(b_k) \,-\, F(a_k) \,\big| \,<\, \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} \big|\, G(b_k) \,-\, G(a_k) \,\big| \,<\, \frac{\varepsilon}{2M}$$

Para una tal familia de intervalos, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \big|F(b_k)\, G(b_k) - F(a_k)\, G(a_k)\big| \,&=\, \sum_{k=1}^{n} \big|\, \big(F(b_k) - F(a_k)\big)\, G(b_k) \,+\, F(a_k)\, \big(G(b_k) - G(a_k)\big)\,\big| \\ &\leqslant\, M \sum_{k=1}^{n} \big|F(b_k) - F(a_k)\big| + M \sum_{k=1}^{n} \big|G(b_k) - G(a_k)\big| \,<\, \varepsilon\end{aligned}$$

y esto prueba que $F\,G$ es absolutamente continua. ■

Fórmula de integración por partes (primera versión). *Dadas $F, G : J \to \mathbb{R}$, supongamos que, para cada intervalo compacto $K \subset J$, las restricciones $F\big|_K$ y $G\big|_K$ son absolutamente continuas. Entonces, las funciones $F\,G'$ y $G\,F'$ son localmente integrables en J y se tiene:*

$$\int_a^b F(t)\,G'(t)\,dt = \big[F(x)\,G(x)\big]_a^b - \int_a^b F'(t)\,G(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in J$$

Demostración. Por la observación previa, sabemos que $(F\,G)\big|_K$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $K \subset J$, luego por el teorema fundamental del cálculo, $\big(F\,G\big)'$ es localmente integrable en J y se tiene

$$\int_a^b \big(F\,G\big)'(t)\,dt = \big[F(x)\,G(x)\big]_a^b \qquad \forall\, a, b \in J \tag{13}$$

Como F y G son derivables c.p.d. en J, existe un conjunto $E \subset J$ con $\lambda(J \setminus E) = 0$, tal que F y G son derivables en E, luego $F\,G$ también es derivable en E, y podemos usar la regla para la derivada de un producto. Por tanto, tenemos

$$\big(F\,G\big)'(t) = F'(t)\,G(t) + F(t)\,G'(t) \qquad \text{p.c.t. } t \in J$$

con lo que la igualdad (13) toma la forma:

$$\int_a^b \big(F'(t)\,G(t) + F(t)\,G'(t)\big)\,dt = \big[F(x)\,G(x)\big]_a^b \qquad \forall\, a, b \in J \tag{14}$$

Además, para cada intervalo compacto $K \subset J$, las funciones continuas F y G están acotadas en K, luego existe una constante $M > 0$ verificando que

$$|F'(t)\,G(t)| \leqslant M\,\big|F'(t)\big| \quad \text{y} \quad |F(t)\,G'(t)| \leqslant M\,\big|G'(t)\big| \qquad \text{p.c.t. } t \in K$$

Como $F', G' \in \mathcal{L}_1(K)$, de estas desigualdades deducimos que también $F'G, F\,G' \in \mathcal{L}_1(K)$. Esto prueba que $F'G$ y $F\,G'$ son localmente integrables en J, lo que permite usar en (14) la linealidad de la integral, para obtener la igualdad buscada. ■

Hemos generalizado así la versión elemental antes obtenida, pues si $H : J \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y fijamos un intervalo compacto $K \subset J$, entonces H' está acotada en K, así que $H\big|_K$ es lipschitziana, luego absolutamente continua. Esta versión más general de la fórmula tiene la ventaja de asegurar la existencia de las dos integrales que en ella aparecen, pero no permite trabajar con integrales sobre J, sino solamente sobre intervalos compactos contenidos en J. Podríamos usar un paso al límite análogo al usado con la regla de Barrow, pero eso requiere suponer la existencia de las dos integrales sobre J que van a aparecer en la fórmula. Entonces, es preferible suponer que F y G son derivables en J, evitando así la hipótesis de continuidad absoluta. De esta forma obtenemos otra versión de la fórmula, que en la práctica es la más útil.

Fórmula de integración por partes (segunda versión). *Sean $F, G : J \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en J, tales que $F'G$ y $F\,G'$ son integrables en J. Entonces $F\,G$ tiene límite, tanto en α como en β, y se verifica que:*

$$\int_\alpha^\beta F(t)\,G'(t)\,dt = \big[F(x)\,G(x)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F'(t)\,G(t)\,dt \tag{15}$$

Demostración. El razonamiento es enteramente análogo al usado para probar la versión elemental de la fórmula. La función producto FG es derivable en J y su derivada viene dada por $(FG)' = F'G + FG'$, que por hipótesis, es una función integrable en J. Por tanto, la regla de Barrow nos dice directamente que (FG) tiene límite en α y β, verificándose que

$$\int_\alpha^\beta \big(F'(t)\,G(t) + F(t)\,G'(t)\big)\,dt = \int_\alpha^\beta \big(F\,G\big)'(t)\,dt = \big[F(x)\,G(x)\big]_\alpha^\beta$$

Usando de nuevo la linealidad de la integral, obtenemos (15). ■

11.5. Ejemplos de integración por partes

Para ilustrar el método de integración por partes, lo usamos para calcular algunas de las integrales de funciones racionales antes estudiadas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la integral indefinida con origen en 0, de la función racional $t \mapsto \big(1 + t^2\big)^{-n}$, que según hemos visto anteriormente, es integrable en $\mathbb{R}$. Así pues:

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{\big(1+t^2\big)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vamos a obtener una relación de recurrencia que, para cada $n \in \mathbb{N}$, permite obtener F_{n+1} a partir de F_n. Para ello empezamos observando que, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{\big(1+t^2\big)^{n+1}}\,dt = F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2\,dt}{\big(1+t^2\big)^{n+1}} \tag{16}$$

Para calcular la última integral que ha aparecido, usamos la fórmula de integración por partes, para las funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(t) = t \quad \text{y} \quad G(t) = -\frac{1}{2n\,(1+t^2)^n} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

que son de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y G se ha elegido para que verifique

$$G'(t) = \frac{t}{\big(1+t^2\big)^{n+1}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

De esta forma, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^2\,dt}{\big(1+t^2\big)^{n+1}} &= \int_0^x F(t)\,G'(t)\,dt = \big[F(t)\,G(t)\big]_0^x - \int_0^x F'(t)\,G(t)\,dt \\ &= -\frac{x}{2n\big(1+x^2\big)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x)\end{aligned} \tag{17}$$

Usando esta igualdad, de (16) obtenemos que

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + \frac{x}{2n\big(1+x^2\big)^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fórmula de recurrencia anterior permite calcular explícitamente F_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, teniendo en cuenta que, para $n = 1$ se tiene

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \big[\operatorname{arc\,tg} t\big]_0^x = \operatorname{arc\,tg} x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, hemos probado que

$$\int_0^x \frac{dt}{\big(1+t^2\big)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2\big(1+x^2\big)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nótese que sólo hemos usado la versión elemental de la fórmula de integración por partes. Si queremos calcular las integrales de las mismas funciones sobre algún intervalo no acotado, sin necesidad de calcular las integrales indefinidas, podemos usar directamente la última versión general de dicha fórmula. Calculemos por ejemplo la sucesión de integrales dada por

$$\rho_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\big(1+x^2\big)^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Igual que en (16), para cada $n \in \mathbb{N}$, empezamos escribiendo

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\big(1+x^2\big)^{n+1}} \tag{18}$$

y ahora recurrimos a la fórmula de integración por partes. Para las mismas funciones F y G antes usadas, sabemos que $F\,G'$ y $F'\,G$ son integrables en $\mathbb{R}$, por ser funciones racionales, en las que la diferencia entre los grados de denominador y numerador es mayor o igual que 2. Razonando como en (17), puesto que F y G tienen límite 0 tanto en $-\infty$ como en $+\infty$, ahora obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\big(1+x^2\big)^{n+1}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,G'(x)\,dx = \big[F(x)\,G(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x)\,G(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n\big(1+t^2\big)^n} = \frac{1}{2n}\,\rho_n\end{aligned}$$

y en vista de (18) la fórmula de recurrencia es ahora mucho más sencilla:

$$\rho_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,\rho_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta que $\rho_1 = \pi$, es ahora fácil comprobar por inducción que

$$\rho_n = \frac{(2n-2)!\,\pi}{\big((n-1)!\big)^2\,4^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando también el método de integración por partes, podemos ahora comprobar algo que habíamos anunciado anteriormente: el criterio de integrabilidad, válido para funciones medibles positivas, no se verifica en general para funciones medibles.

Consideremos la función $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad f(0) = 1$$

que es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}_0^+$. Si Φ es la integral indefinida de φ con origen en 0, la versión elemental del teorema fundamental del cálculo nos dice que Φ es una primitiva de φ. Pues bien, vamos a probar que Φ tiene límite en $+\infty$, y obviamente también lo tiene en 0, pero φ no es integrable en $\mathbb{R}^+$.

Consideramos las funciones $F, G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

$$F(t) = 1/t \quad \text{y} \quad G(t) = -\cos t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

que son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^+$. La versión elemental de la fórmula de integración por partes nos dice que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(a) &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_a^b F(t)\, G'(t)\, dt \\ &= \big[F(t)\, G(t)\big]_a^b - \int_a^b F'(t)\, G(t)\, dt = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos t}{t^2}\, dt\end{aligned}$$

de donde, suponiendo que $a < b$, deducimos que

$$\begin{aligned}\big|\Phi(a) - \Phi(b)\big| &\leqslant \left|\frac{\cos a}{a}\right| + \left|\frac{\cos b}{b}\right| + \int_a^b \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \left[-\frac{1}{t}\right]_a^b = \frac{2}{a}\end{aligned}$$

En el caso $b < a$ intercambiamos los papeles de a y b. Tenemos por tanto

$$\big|\Phi(a) - \Phi(b)\big| \leqslant \frac{2}{\min\{a, b\}} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

Si ahora $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^+$, con $\{x_n\} \to +\infty$, fijado $\varepsilon > 0$ tomamos $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$ se tenga $x_n > 2/\varepsilon$. Entonces, para $p, q \in \mathbb{N}$ con $p, q \geqslant m$ se tiene

$$\big|\Phi(x_p) - \Phi(x_q)\big| \leqslant \frac{2}{\min\{x_p, x_q\}} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon$$

con lo que $\big\{\Phi(x_n)\big\}$ es una sucesión de Cauchy, luego convergente. Esto prueba que Φ tiene límite en $+\infty$, y es evidente que $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = 0$.

Para ver que φ no es integrable en $\mathbb{R}^+$, observamos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\, dt &\geqslant \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} t|\, dt = \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \operatorname{sen} t\; dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k\pi} \big[\cos t\big]_{(k-1)\pi}^{k\pi} = \frac{1}{k\pi} \big[\cos t\big]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{k\pi}\end{aligned}$$

Usando ahora que $\mathbb{R}^+ = \biguplus\limits_{k=1}^{\infty} \big]\,(k-1)\pi, k\pi\big]$, concluimos que

$$\int_0^{+\infty} \big|\varphi(t)\big|\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} t|}{t}\, dt \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

11.6. Cambio de variable

Como introducción a este tercer método de cálculo de integrales, probamos su versión más elemental, que como en otros casos, se refiere a la integral de una función continua en un intervalo compacto.

- *Dados dos intervalos no triviales* $I, J \subset \mathbb{R}$, *sea* $\varphi : I \to J$ *una función de clase* C^1 *en* I. *Si* $f : J \to \mathbb{R}$ *es una función continua, para cualesquiera* $a, b \in I$ *se tiene:*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{19}$$

Si $F : J \to \mathbb{R}$ es cualquier integral indefinida de f, sabemos que F es una primitiva de f, y como $\varphi(I) \subset J$, podemos considerar la composición $F \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$. La regla de la cadena nos dice que $F \circ \varphi$ es una primitiva de la función $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$, que es continua en I. Por tanto, usando la versión elemental de la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \big(F \circ \varphi\big)(b) - \big(F \circ \varphi\big)(a) = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \blacksquare$$

Pretendemos probar la igualdad (19), conocida como *fórmula de cambio de variable*, con hipótesis mucho más generales que las del resultado anterior, trabajando por ahora en intervalos compactos. Empezamos con un resultado que salvará la dificultad que aparece al intentar usar la regla de la cadena, con funciones que sólo son derivables c.p.d.

- *Dado un intervalo compacto* $H \subset \mathbb{R}$, *sea* $\varphi : H \to \mathbb{R}$ *una función derivable c.p.d. en* H. *Si un conjunto* $E \subset H$ *verifica que* $\lambda\big(\varphi(E)\big) = 0$, *entonces* $\varphi'(x) = 0$ *p.c.t.* $x \in E$.

Si B es el conjunto de puntos de E en los que φ es derivable con derivada no nula, bastará probar que $\lambda(B) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto

$$B_n = \big\{ x \in E \;:\; n\,|\varphi(y) - \varphi(x)| > |y - x| \quad \forall y \in H \cap \,]x - (1/n), x + (1/n)[\, \big\}$$

y vamos a comprobar que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

En efecto, dado $x \in B$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi'(x)| > 1/k$, y por definición de derivada, existe un $\delta > 0$ tal que, para $y \in H$ con $|y - x| < \delta$, se tiene $k\,|\varphi(y) - \varphi(x)| > |y - x|$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ con $n > k$ y $1/n < \delta$, se tiene claramente que $x \in B_n$. Bastará por tanto probar que $\lambda(B_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, como B_n está acotado, se puede recubrir por una familia finita de intervalos de longitud menor que $1/n$, luego si A es la intersección de B_n con uno de esos intervalos, bastará ver que $\lambda(A) = 0$. Como $\varphi(A) \subset \varphi(E)$, tenemos $\lambda\big(\varphi(A)\big) = 0$, luego fijado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{J_k\}$ de intervalos acotados, tal que

$$\varphi(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, escribimos $A_k = A \cap \varphi^{-1}(J_k)$ y, suponiendo que $A_k \neq \emptyset$, para $x, y \in A_k$, usamos que $A_k \subset B_n$ obteniendo que

$$|y - x| < n\,|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant n\,\lambda(J_k)$$

Deducimos que $\lambda^*(A_k) \leqslant \sup A_k - \inf A_k \leqslant n\lambda(J_k)$, desigualdad que es trivial si $A_k = \emptyset$.

Finalmente, como $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(A \cap \varphi^{-1}(J_k)\big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, concluimos que

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(A_k) \leqslant n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) < \varepsilon$$

y en vista de la arbitrariedad de ε, tenemos $\lambda(A) = 0$ como se quería. ■

Podemos ya probar el resultado clave, que nos da una condición necesaria y suficiente para que se verifique la fórmula de cambio de variable.

- *Dados dos intervalos compactos $H, K \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : H \to K$, una función derivable c.p.d. en H. Si $f \in \mathcal{L}_1(K)$ y $F : K \to \mathbb{R}$ es cualquier integral indefinida de f, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *La función $F \circ \varphi$ es absolutamente continua*
  - (ii) *La función $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en H y se verifica que:*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in H \tag{20}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fijado $a \in H$, sabemos que F, y la integral indefinida de f con origen en $\varphi(a)$, difieren en una constante $C \in \mathbb{R}$. Usando (20) vemos entonces que, para todo $b \in H$, se tiene

$$F\big(\varphi(b)\big) = C + \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = C + \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

Por tanto, la función $F \circ \varphi$ se obtiene sumando una constante a la integral indefinida con origen en a de la función $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ que, por hipótesis, es integrable en H. Por tanto $F \circ \varphi$ es absolutamente continua, como queríamos demostrar.

$(i) \Rightarrow (ii)$. El teorema fundamental del cálculo nos dice que $F \circ \varphi$ es derivable c.p.d. en H, que $\big(F \circ \varphi\big)'$ es integrable en H y se verifica que

$$\int_a^b \big(F \circ \varphi)'(t)\,dt = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Por tanto, sólo queda probar que la igualdad

$$\big(F \circ \varphi\big)'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \tag{21}$$

se verifica p.c.t. $t \in K$, y aquí entra en juego el resultado probado previamente. Teniendo en cuenta la regla de la cadena, se trata de analizar los motivos para que no se verifique (21).

Sea U el conjunto de puntos de H en los que φ no es derivable, que verifica $\lambda(U) = 0$. También tenemos $\lambda(W) = 0$, donde W es el conjunto de puntos de K en los que F no es derivable. El problema es el conjunto $E = (K \setminus U) \cap \varphi^{-1}(W)$, pues para $t \in E$ se tiene que φ es derivable en t, pero F no es derivable en $\varphi(t)$, lo que impide usar la regla de la cadena.

Pues bien, como $\varphi(E) \subset W$, tenemos $\lambda\big(\varphi(E)\big) = 0$, luego el resultado previo nos da un conjunto $B_1 \subset E$ con $\lambda(E \setminus B_1) = 0$ tal que $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \in B_1$. Además, por ser absolutamente continua, F preserva los conjuntos de medida nula, luego $\lambda\big((F \circ \varphi)(E)\big) = 0$, y podemos volver a usar el resultado previo, ahora para la función $F \circ \varphi$. Obtenemos otro conjunto $B_2 \subset E$ con $\lambda(E \setminus B_2) = 0$, tal que $\big(F \circ \varphi\big)'(t) = 0$ para todo $t \in B_2$. Tomando ahora $B = B_1 \cap B_2$ tenemos $\lambda(E \setminus B) = 0$ y $\big(F \circ \varphi\big)'(t) = \varphi'(t) = 0$ para todo $t \in B$, luego se verifica (21) para todo $t \in B$.

Finalmente si $A = K \setminus \big(U \cup (E \setminus B)\big)$, es claro que $\lambda(K \setminus A) = 0$, y para cada $t \in A$ probamos (21). Tenemos $t \in K \setminus U$, luego φ es derivable en t, y se pueden dar dos casos. Cuando $t \notin E$, tenemos $\varphi(t) \notin W$, luego F es derivable en $\varphi(t)$ y usamos la regla de la cadena. En otro caso, tenemos $t \in E$ pero $t \notin E \setminus B$, luego $t \in B$ y de nuevo se verifica (21). ■

Puesto que toda función de clase C^1 en un intervalo no trivial $I \subset \mathbb{R}$ es absolutamente continua en cada intervalo compacto $H \subset I$, del resultado anterior se deduce claramente la versión elemental probada al principio. De hecho, para una función integrable f en un intervalo compacto $K \subset \mathbb{R}$, este resultado es inmejorable, puesto que nos da una condición necesaria y suficiente para que se verifique la fórmula de cambio de variable. Sin embargo, dicha condición, consistente en que la función $F \circ \varphi$ sea absolutamente continua, no es fácil de comprobar, por lo que conviene buscar hipótesis más sencillas, que nos aseguren dicha condición, como vamos a hacer en lo que sigue.

Manteniendo la notación del teorema anterior, en primer lugar es natural suponer que φ es absolutamente continua, pues tomando $f(x) = 1$ para todo $x \in K$, es claro que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = x + c$ para todo $x \in K$, con lo que $F \circ \varphi = \varphi + c$ es absolutamente continua si, y sólo si, lo es φ.

Pues bien, suponiendo que φ es absolutamente continua, como F siempre lo es, todo iría muy bien si la composición de dos funciones absolutamente continuas también lo fuese, pero esto no es verdad:

Ejemplo. *Dos funciones absolutamente continuas, cuya composición no lo es.*

Consideremos las funciones $F, \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(t) = \big(t \cos(\pi/t)\big)^2 \quad \forall t \in]0,1], \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad F(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in [0,1]$$

Es fácil comprobar que φ es derivable en $[0,1]$, con derivada acotada en dicho intervalo, de donde deducimos que φ es lipschitziana, luego absolutamente continua. Por otra parte vimos anteriormente que F también es absolutamente continua. Sin embargo, $F \circ \varphi = |g|$ donde

$$g(t) = t \cos(\pi/t) \quad \forall t \in]0,1], \quad g(0) = 0$$

Vimos anteriormente que g no tiene variación acotada en $[0,1]$, y razonando de manera muy similar, se comprueba que $|g|$ tampoco es una función de variación acotada, luego $|g|$ no puede ser absolutamente continua.

Así pues, aparte de que φ sea absolutamente continua, debemos suponer algo más. Vamos a probar dos resultados en esta línea, que nos dan otras dos condiciones suficientes, aunque ya no sean necesarias, para que se verifique la fórmula de cambio de variable:

- *Dados dos intervalos compactos $H,K \subset \mathbb{R}$, sean $\varphi : H \to K$ una función absolutamente continua, $f \in \mathcal{L}_1(K)$ y $F : K \to \mathbb{R}$ una integral indefinida de f. Supongamos que se verifica una de las siguientes condiciones:*

  (i) *Que φ sea monótona*
  (ii) *Que f esté acotada en K*

  Entonces $F \circ \varphi$ es absolutamente continua, luego $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en H con

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a,b \in H$$

Supongamos en primer lugar que se verifica (i). Fijado $\varepsilon > 0$, tomemos $\eta > 0$ dado por la continuidad absoluta de F. Para dicho número positivo η, obtenemos a su vez $\delta > 0$ dado por la continuidad absoluta de φ. Sea entonces $n \in \mathbb{N}$ y $\big\{\,]a_k\,,b_k[\,: k \in \Delta_n\big\}$ una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en H, tales que $\sum_{k=1}^{n}\big(b_k - a_k\big) < \delta$. Por la elección de δ tenemos que $\sum_{k=1}^{n}\big|\,\varphi(b_k) - \varphi(a_k)\big| < \eta$.

Sea ahora $\Delta = \{\, j \in \Delta_n \ : \ \varphi(a_j) \neq \varphi(b_j)$ y para cada $j \in \Delta$ sea $]c_j\,,d_j[$ el intervalo abierto de extremos $\varphi(a_j)$ y $\varphi(b_j)$. Así pues, si φ es creciente, estamos tomando $c_j = \varphi(a_j)$ y $d_j = \varphi(b_j)$, mientras que $c_j = \varphi(b_j)$ y $d_j = \varphi(a_j)$ cuando φ es decreciente. En cualquier caso tenemos una familia $\big\{\,]c_j\,,d_j[\,:\ j \in \Delta\big\}$ de intervalos abiertos no vacíos, y todos ellos están contenidos en K, ya que $\varphi(a_j)\,,\,\varphi(b_j) \in K$, es decir, $c_j\,,\,d_j \in K$.

La monotonía de φ nos hará ver que los intervalos anteriores son dos a dos disjuntos. En efecto, dados $i,j \in \Delta$ con $i \neq j$, podemos suponer que $a_i < a_j$, y de $]a_i\,,b_i[\,\cap\,]a_j\,,b_j[\,= \emptyset$ deducimos que $b_i \leqslant a_j$. Entonces, si φ es creciente, obtenemos que $d_i = \varphi(b_i) \leqslant \varphi(a_j) = c_j$, mientras que si φ es decreciente, se tendrá $d_j = \phi(a_j) \leqslant \phi(b_i) = c_i$. En ambos casos, vemos que $]c_i\,,d_i[\,\cap\,]c_j\,,d_j[\,= \emptyset$. La elección de δ nos dice ahora que

$$\sum_{j\in\Delta}\big(d_j - c_j\big) = \sum_{j\in\Delta}\big|\,\varphi(b_j) - \varphi(a_j)\big| = \sum_{k=1}^{n}\big|\,\varphi(b_k) - \varphi(a_k)\big| < \eta$$

lo que permite usar la elección de η para obtener que

$$\sum_{k=1}^{n}\big|\,\big(F\circ\varphi\big)(b_k) - \big(F\circ\varphi\big)(a_k)\big| = \sum_{j\in\Delta}\big|F(d_j) - F(c_j)\big| < \varepsilon$$

Esto prueba que $F \circ \varphi$ es absolutamente continua, como se quería.

Supongamos ahora que se verifica (ii) y sea $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\,f(x)\,| \leqslant M$ para todo $x \in K$. Dados $u,v \in K$ con $u < v$, se tiene claramente que

$$\big|\,F(u) - F(v)\big| = \left|\int_u^v f(x)\,dx\right| \leqslant \int_u^v |\,f(x)\,|\,dx \leqslant M\,(v-u) = M\,|\,u-v\,|$$

La desigualdad anterior es trivial cuando $u = v$, y no se altera al intercambiar u, con v, luego es válida para cualesquiera $u, v \in K$, de modo que F es lipschitziana.

Fijado $\varepsilon > 0$ tomamos ahora $\eta = \varepsilon / M$ y para este η, obtenemos de nuevo $\delta > 0$, dado por la continuidad absoluta de φ. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\big\{]\,a_k\,, b_k\,[\,:\; k \in \Delta_n \big\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos y contenidos en H, verificando que $\sum_{k=1}^{n} (\,b_k - a_k\,) < \delta$, la elección de δ nos dice que

$$\sum_{k=1}^{n} \big|\, \big(F \circ \varphi\big)(b_k) - \big(F \circ \varphi\big)(a_k) \,\big| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \big|\, \varphi(b_k) - \varphi(a_k) \,\big| < M\eta = \varepsilon$$

y de nuevo hemos probado que $F \circ \varphi$ es absolutamente continua. La última afirmación del enunciado es consecuencia de la equivalencia probada en el teorema anterior. ■

Obtenemos ahora una consecuencia del resultado anterior que en realidad lo mejora, pues utiliza una hipótesis más débil que las dos anteriores. Nótese que, con cualquiera de esas dos hipótesis, hemos probado que la función $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en H. Pues bien, precisamente esta última condición es suficiente para que se verifique la fórmula de cambio de variable. Esto nos da ya un resultado más que satisfactorio, pues nos asegura que se verifica la fórmula, siempre que existan todas las integrales que en ella aparecen. Sin esfuerzo adicional, podemos trabajar con funciones localmente integrables en intervalos no triviales arbitrarios.

Fórmula de cambio de variable. *Dados dos intervalos no triviales y $I, J \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to J$ tal que $\varphi\big|_H$ es absolutamente continua, para todo intervalo compacto $H \subset I$. Si $f : J \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable en J, verificando que $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ también es localmente integrable en I, entonces se tiene que:*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, a, b \in I$$

Demostración. Dados $a, b \in I$, y suponiendo sin perder generalidad que $a < b$, trabajamos con los intervalos compactos $H = [\,a\,,b\,] \subset I$ y $K = \varphi(H) \subset J$. Sabemos que f es integrable en K y que $\big(f \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en H, y se trata de probar que ambas integrales coinciden.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto medible $E_n = \big\{ x \in K : |\,f(x)\,| \leqslant n \big\}$, cuya función característica denotaremos por χ_n, y definimos

$$f_n(x) = \chi_n(x)\,f(x) \qquad \forall\, x \in K$$

Es claro que $|\,f_n(x)\,| \leqslant n$ para todo $x \in K$, luego f_n está acotada. Esto permite usar el resultado anterior, para obtener que $\big(f_n \circ \varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en H y se tiene que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_n(x)\,dx = \int_a^b f_n\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{22}$$

igualdad que es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observamos ahora que $\{E_n\} \nearrow K$, de donde deducimos que $\{\chi_n(x)\} \nearrow 1$ para todo $x \in K$, luego la sucesión $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en K. Además se tiene $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ para cualesquiera $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, y como $|f|$ es integrable en K, podemos usar el teorema de la convergencia dominada para obtener que

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f_n(x)\,dx \tag{23}$$

Usaremos ahora un razonamiento análogo con el segundo miembro de (22). Si $E \subset K$ es el conjunto de puntos en los que φ es derivable, tenemos $\lambda(H \setminus E) = 0$, y extendemos φ', tomando $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \in H \setminus E$. De esta forma, la sucesión $\{(f_n \circ \varphi)\,\varphi'\}$ converge puntualmente en H a la función $(f \circ \varphi)\,\varphi'$. Además, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $t \in H$ se tiene que $\left|f_n(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right| \leqslant \left|f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right|$. Como $\left|(f \circ \varphi)\,\varphi'\right|$ es integrable en H, podemos usar de nuevo el teorema de la convergencia dominada, para obtener que

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

En vista de esta igualdad y la obtenida en (23), pasando al límite en (22) obtenemos la conclusión buscada. ■

El resultado anterior no permite usar un cambio de variable para estudiar la integrabilidad de una función en un intervalo arbitrario. Para ello, sería necesario que la existencia de una de las integrales que aparecen en la fórmula fuese equivalente a la de la otra, pero eso requiere condiciones más restrictivas sobre la función φ que usamos al cambiar de variable. Enunciamos el correspondiente resultado, bastante análogo al que más adelante estudiaremos para funciones de varias variables.

Teorema de cambio de variable. *Dado un intervalo abierto no vacío $I \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en I, con $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y sea $J = \varphi(I)$. Entonces, una función $f : J \to \mathbb{R}$ es integrable en J si, y sólo si, $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ es integrable en I, en cuyo caso se tiene:*

$$\int_J f = \int_I (f \circ \varphi)\,|\varphi'| \tag{24}$$

Demostración. Para cada intervalo compacto $H \subset I$, la función φ es derivable en H con derivada acotada, así que $\varphi\big|_H$ es lipschitziana, luego absolutamente continua. Por otra parte, como φ' es continua y no se anula, se deberá tener $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in I$, con lo que φ es estrictamente creciente, o bien $\varphi'(t) < 0$ para todo $t \in I$, en cuyo caso φ es estrictamente decreciente. En cualquier caso, φ es estrictamente monótona.

Empecemos suponiendo que $g \in \mathcal{L}_1(J)$ verifica que $g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in J$. Fijado un intervalo compacto $H = [a, b] \subset I$, como $\varphi\big|_H$ es absolutamente continua y monótona, mientras que g es integrable en el intervalo $K = \varphi(H)$, uno de los resultados previos nos dice que $(g \circ \varphi)\,\varphi'$ es integrable en H y se verifica la fórmula de cambio de variable. Cuando φ es creciente, se tiene $|\varphi'| = \varphi'$ y $K = [\varphi(a), \varphi(b)]$, luego podemos escribir:

$$\int_K g = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x)\,dx = \int_a^b (g \circ \varphi)\,\varphi'(t)\,dt = \int_H (g \circ \varphi)\,|\varphi'| \tag{25}$$

Cuando φ es decreciente, tenemos $|\varphi'| = -\varphi'$ y $K = \big[\varphi(b), \varphi(a)\big]$, con lo que llegamos a la misma igualdad:

$$\int_K g = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} g(x)\,dx = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x)\,dx = -\int_a^b g\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \int_H \big(g\circ\varphi\big)\,|\varphi'|$$

Sea ahora $\{H_n\}$ una sucesión de intervalos compactos, verificando que $\{H_n\} \nearrow I$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por χ_n a la función característica de H_n, y tomamos $K_n = \varphi(H_n)$, con lo que también tenemos $\{K_n\} \nearrow J$. Para cada $n \in N$ sabemos que la restricción a H_n de la función $\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'|$ es integrable en H_n, y en particular medible. Deducimos fácilmente que la función $\chi_n\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'|$ también es medible. Además, la sucesión $\big\{\chi_n\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'|\big\}$ es creciente y converge a $\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'|$ puntualmente en I. Por tanto, $\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'|$ es medible, y podemos calcular su integral usando el teorema de la convergencia monótona. Teniendo en cuenta que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos usar (25) con $H = H_n$, y usando también la continuidad creciente de la integral de g, obtenemos

$$\int_I \big(g\circ\varphi\big)|\varphi'| = \lim_{n\to\infty}\int_{H_n}\big(g\circ\varphi\big)|\varphi'| = \lim_{n\to\infty}\int_{K_n} g = \int_J g$$

En particular, vemos que $\big(g\circ\varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en I.

Dada ahora una función $f \in \mathcal{L}_1(J)$, podemos usar lo anterior, con $g = f^+$, y con $g = f^-$. Obtenemos que tanto $\big(f^+\circ\varphi\big)\,\varphi'$ como $\big(f^-\circ\varphi\big)\,\varphi'$ son integrables en I, luego $\big(f\circ\varphi\big)\,\varphi'$ también lo es, y se tiene:

$$\int_I \big(f\circ\varphi\big)|\varphi'| = \int_I \big(f^+\circ\varphi\big)|\varphi'| - \int_I \big(f^-\circ\varphi\big)|\varphi'| = \int_J f^+ - \int_J f^- = \int_J f$$

Sólo queda probar que, recíprocamente, si la función $h = \big(f\circ\varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en I, entonces f es integrable en J. Para ello usamos la función inversa $\psi = \varphi^{-1}$, que por la regla de derivación de la función inversa, es de clase C^1 en J, con $\psi'(x) = 1/\varphi'\big(\psi(x)\big) \neq 0$ para todo $x \in J$, luego ψ cumple las mismas hipótesis que φ. Si $h \in \mathcal{L}_1(I)$, usando lo ya demostrado obtenemos que la función $\big(h\circ\psi\big)\,\psi'$ es integrable en J. Ahora bien, para todo $x \in J$ se tiene

$$h\big(\psi(x)\big)\,\psi'(x) = \big(f\circ\varphi\big)\big(\psi(x)\big)\,\varphi'\big(\psi(x)\big)\,\psi'(x) = f(x)$$

luego f es integrable en J como queríamos demostrar. ■

Conviene comentar que en (24) hemos escrito la fórmula de cambio de variable, para no distinguir los dos casos que pueden darse, según que φ sea creciente o decreciente. Además, así conseguimos que el teorema anterior tenga la misma forma que más adelante estudiaremos para funciones de varias variables. Sin embargo, en la práctica, la fórmula suele escribirse como hasta ahora veníamos haciéndolo, sin necesidad de usar la función $|\varphi'|$.

Concretamente, pongamos $I =]\alpha,\beta[$ con $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, y sea $\varphi(I) = J =]\gamma,\delta[$, también con $-\infty \leqslant \gamma < \delta \leqslant +\infty$. Si φ es creciente, es claro que se ha de tener $\varphi(t) \to \gamma$ cuando $t \to \alpha$ y $\varphi(t) \to \delta$ cuando $t \to \beta$. Definimos entonces $\widetilde{\alpha} = \gamma$ y $\widetilde{\beta} = \delta$. De esta forma tenemos $J = \big]\,\widetilde{\alpha}\,,\,\widetilde{\beta}\,\big[$ y la igualdad (24) toma la siguiente forma:

$$\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{26}$$

Si por el contrario φ es decreciente, se ha de tener $\varphi(t) \to \delta$ cuando $t \to \alpha$ y $\varphi(t) \to \gamma$ cuando $t \to \beta$. Definimos entonces $\widetilde{\alpha} = \delta$ y $\widetilde{\beta} = \gamma$. Ahora tenemos $J = \left]\, \widetilde{\beta}\,, \widetilde{\alpha}\, \right[$, pero vemos también que $|\varphi'| = -\varphi'$, con lo que volvemos a obtener la misma igualdad:

$$\int_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} f(x)\,dx = -\int_J f = -\int_I \big(f\circ\varphi\big)\,|\varphi'| = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt$$

Así pues, en la práctica podemos usar siempre la igualdad (26), teniendo en cuenta que la definición de $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ depende de que φ sea creciente o decreciente, pero es bien fácil de recordar, pues siempre se tiene que $\varphi(t) \to \widetilde{\alpha}$ cuando $t \to \alpha$ y $\varphi(t) \to \widetilde{\beta}$ cuando $t \to \beta$.

11.7. Ejemplos de cambio de variable

En el estudio del teorema fundamental del cálculo se usó un cambio de variable, que por supuesto es caso particular del teorema anterior, el caso en que I es un intervalo compacto y φ es una traslación. De manera más general, dado $I = \left]\,\alpha, \beta\,\right[\subset \mathbb{R}$, con $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, fijamos $c \in \mathbb{R}$ y tomamos $\varphi(t) = t + c$ para todo $t \in I$. Para tener una notación intuitiva, escribimos $J = \varphi(I) = \left]\,\alpha + c\,, \beta + c\,\right[$, siendo $\alpha + c = -\infty$ cuando $\alpha = -\infty$ y $\beta + c = +\infty$ cuando $\beta = +\infty$. Dada una función $f : J \to \mathbb{R}$ el teorema anterior nos dice que $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, la función $t \mapsto f(t+c)$ es integrable en I, en cuyo caso se tiene

$$\int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t+c)\,dt$$

Este cambio de variable se aprovecha para obtener una propiedad típica de las funciones periódicas. Recordemos que, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y $T \in \mathbb{R}^+$, decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **periódica** con periodo T, o abreviadamente T-periódica, cuando, para todo $x \in A$ se tiene que $x \pm T \in A$ y $f(x+T) = f(x)$. Para cualesquiera $x \in A$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene entonces que $x + kT \in A$ con $f(x + kT) = f(x)$.

Pues bien, supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función T-periódica, y consideremos un intervalo abierto $I =]\alpha, \beta[\subset A$. Para $k \in \mathbb{Z}$, se tiene también $J =]\alpha + kT\,, \beta + kT\,[\subset A$, y vemos que $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, $f \in \mathcal{L}_1(I)$, en cuyo caso se tiene

$$\int_{\alpha+kT}^{\beta+kT} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Como consecuencia vamos a ver que, a efectos de integración, f se comporta de igual forma en todos sus intervalos de periodo, que son los intervalos de longitud T contenidos en A. Concretamente, si $a, b \in \mathbb{R}$ verifican que $J_a =]a\,, a+T\,[\subset A$ y $J_b =]b\,, b+T\,[\subset A$, entonces se tiene $f \in \mathcal{L}_1(J_a)$ si, y sólo si, $f \in \mathcal{L}_1(J_b)$ en cuyo caso,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ la parte entera de $(b-a)/T$ con lo que $a + kT \leqslant b < a + (k+1)T \leqslant b + T$. Si $a + kT = b$, el resultado es consecuencia de lo ya dicho, tomando $\alpha = a$ y $\beta = a + T$, pues entonces $\alpha + kT = b$ y $\beta + kT = b + T$.

Supongamos que $a + kT < b$. También por lo dicho anteriormente, sabemos que f es integrable en $\left]a, b - kT\right[$ si y sólo si, lo es en $\left]a + (k+1)T, b + T\right[$, en cuyo caso, las correspondientes integrales coinciden. Igualmente, f es integrable en $\left]b - kT, a + T\right[$ si y sólo si, lo es en $\left]b, a + (k+1)T\right[$, de nuevo con iguales integrales. Usando ambas equivalencias, deducimos como se quería, que f es integrable en $]a, a + T[$ si, y sólo si, lo es en $\left]b, b + T\right[$ en cuyo caso:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^{b-kT} f(x)dx + \int_{b-kT}^{a+T} f(x)\,dx\\ &= \int_{a+(k+1)T}^{b+T} f(x)\,dx + \int_b^{a+(k+1)T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Otro sencillo cambio de variable se usa para probar ciertas propiedades de las funciones pares o impares. Recordemos que, dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ que sea simétrico con respecto al origen, es decir, tal que $-x \in A$ para todo $x \in A$, se dice que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función **par**, cuando $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$, mientras que f es **impar**, cuando verifica que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$. En ambos casos, dado un intervalo abierto $\left]\alpha, \beta\right[\subset A$, con $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, tomando $\varphi(t) = -t$ para todo $t \in \left]\alpha, \beta\right[$, el teorema de cambio de variable nos dice que f es integrable en $\left]-\beta, -\alpha\right[$ si, y sólo si, lo es en $\left]\alpha, \beta\right[$, en cuyo caso se tiene que

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(-x)\,dx = \sigma \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

donde $\sigma = 1$ cuando f es par, y $\sigma = -1$ cuando f es impar.

Para destacar la situación más frecuente, sea $A = \left]-\beta, \beta\right[$ con $0 < \beta \leqslant +\infty$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función par o impar, vemos que f es integrable en $\left]-\beta, 0\right[$ si, y sólo si, lo es en $\left]0, \beta\right[$, lo que por tanto equivale a que f sea integrable en A. En tal caso, cuando f es par, tenemos

$$\int_{-\beta}^0 f(x)\,dx = \int_0^\beta f(x)\,dx, \quad \text{luego} \quad \int_{-\beta}^\beta f(x)\,dx = 2\int_0^\beta f(x)\,dx$$

mientras que si f es impar, se tiene

$$\int_{-\beta}^0 f(x)\,dx = -\int_0^\beta f(x)\,dx, \quad \text{luego} \quad \int_{-\beta}^\beta f(x)\,dx = 0$$

Veamos finalmente algunos cambios de variable concretos, que se usan con frecuencia para calcular integrales de diferentes tipos.

El logaritmo tiene utilidad como función de cambio de variable, para calcular integrales de funciones del tipo $x \mapsto \mathcal{R}(e^x)$ donde $\mathcal{R}$ es una función racional. Como ejemplo, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que f es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}$, y nos proponemos calcular su integral indefinida con origen en 0. Para ello tomamos $\varphi(t) = \log t$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$ que es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^+$. Usando la versión elemental de la fórmula de cambio de variable, obtenemos que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\log a}^{\log b} \frac{dx}{e^x + 1} &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b \frac{dt}{t\,(t+1)} \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\log\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_a^b = \log\left(\frac{b\,(a+1)}{a\,(b+1)}\right)\end{aligned}$$

En particular, dado $x \in \mathbb{R}$, podemos tomar $a = 1$ y $b = e^x$ para obtener que

$$\int_0^x \frac{dt}{e^t + 1} = \log\left(\frac{2\,e^x}{e^x + 1}\right) = \log\left(\frac{2}{1 + e^{-x}}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tenemos así una primitiva de la función f que claramente verifica

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{2}{1 + e^{-x}}\right) = \log 2 \quad \text{pero} \quad \log\left(\frac{2}{1 + e^{-x}}\right) \to -\infty \;\; (x \to -\infty)$$

La versión general de la regla de Barrow nos dice que f no es integrable en ningún intervalo no minorado. En cambio, para $c \in \mathbb{R}$, como f no toma valores negativos, podemos usar el criterio de integrabilidad para obtener que f es integrable en $]c, +\infty[$ con

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \left[\log\left(\frac{2}{1 + e^{-x}}\right)\right]_c^{+\infty} = \log\big(1 + e^{-c}\big) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

El arco tangente, o más concretamente la función dada por $\varphi(t) = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, permite cambios de variable útiles para integrar funciones del tipo $x \mapsto \mathcal{R}(\cos x, \operatorname{sen} x)$, donde ahora $\mathcal{R}$ es una función racional de dos variables. Estas funciones son 2π-periódicas, por lo que basta considerar sus integrales en intervalos contenidos en $]-\pi, \pi[$, que es la imagen de la función φ. Para entender la utilidad del cambio de variable sugerido, dado $t \in \mathbb{R}$, abreviamos escribiendo $x = \varphi(t)$, con lo que $\operatorname{tg}(x/2) = t$ y obtenemos

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1}{1 + t^2}$$

de donde deducimos por una parte que

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(x/2) \cos(x/2) = 2 \operatorname{tg}(x/2) \cos^2(x/2) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

y por otra que

$$\cos x = 2 \cos^2(x/2) - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Como la derivada de φ también es una función racional, el cambio de variable $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$ transforma cada integral del tipo mencionado en la integral de una función racional.

Como ejemplo ilustrativo, consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos x} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

que es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}$. Siendo una función 2π-periódica y par, basta trabajar con ella en el intervalo $]0,\pi[$. Para calcular la integral de f en dicho intervalo, tomamos $\varphi(t) = 2\operatorname{arc\,tg} t$ para todo $t\in\mathbb{R}^+$, con lo que $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = \pi$. El teorema de cambio de variable nos dice que

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^{+\infty}\frac{2\,dt}{3+t^2} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Como último ejemplo consideremos la función dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x\in\,]-1,1[$$

Probaremos que f es integrable en el intervalo $J=\,]-1,1[$ y calcularemos su integral. Esta vez tomamos $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$ para todo $t\in I=\,]-\pi/2,\pi/2[$, una función de clase C^1 en I, que verifica $\varphi(I) = J$ y $\varphi'(t) = \cos t > 0$ para todo $t\in I$. El teorema de cambio de variable nos dice que f es integrable en J si, y sólo si, $\big(f\circ\varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en I, en cuyo caso, ambas integrales coinciden. Ahora bien, se tiene claramente que

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t = \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} \qquad \forall t\in I$$

luego $\big(f\circ\varphi\big)\,\varphi'$ es integrable en I, por ser continua y acotada. Deducimos que f es integrable en J y, para calcular su integral, tenemos $\lim_{t\to-\pi/2}\varphi(t) = -1$ y $\lim_{t\to\pi/2}\varphi(t) = 1$, luego

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$