# Ejercicios del Tema 3

1. (El toro de revolución). En el semiplano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0,\ x \geq 0\}$ tomamos una circunferencia $C$ de centro $(c, 0, 0)$ y radio $r > 0$ con $c > r > 0$. Se llama *toro de revolución* generado por $C$ a la superficie $T$ obtenida al rotar $C$ alrededor del eje $z$. Dibujar $T$ y describir la superficie como el conjunto de soluciones de una ecuación con 3 incógnitas. ¿Es dicha ecuación la de una cuádrica?

2. Sea $L$ una recta afín en $\mathbb{R}^n$ y $C$ una hipercuádrica. Demostrar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades: o bien $L \cap C = \emptyset$, o bien $L \cap C$ es un punto, o bien $L \cap C$ consta de dos puntos, o bien $L \subseteq C$.

3. (El hiperboloide de una hoja como unión de rectas). Consideremos el hiperboloide de una hoja $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Para cada punto $p \in C \cap \{z = 0\}$ tomamos la recta afín $L_p = p + L(J(p) + e_3)$, donde $J$ es el giro de 90º en el plano $z = 0$ centrado en el origen y $e_3 = (0, 0, 1)$. Demostrar que $C$ coincide con la unión de todas las rectas $L_p$.

4. Sea $H$ una hipercuádrica en $\mathbb{R}^n$ con matriz $\hat{C}$ en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$. Diremos que $H$ es *invariante por homotecias lineales* si para toda homotecia $h_{O,r}$ con centro el origen $O \in \mathbb{R}^n$ y razón $r \neq 0$,
$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C} \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda \hat{C}$$
para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dependiendo de $r$); en particular, $h_{O,r}(H) = H$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demostrar que $H$ cumple esta propiedad si y sólo si $\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, donde $C$ es simétrica y no nula. Mostrar algunos ejemplos de este tipo de cuádricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

5. Construir explícitamente un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(C) = C'$ en cada uno de los siguientes casos:

   *a*) $n = 2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 = 1\}$.
   *b*) $n = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.
   *c*) $n = 2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y = 0\}$, $C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - y^2 = 0\}$.
   *d*) $n = 3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ax^2 + by^2 = 1\}$, $C' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.

6. Clasificar las siguientes cónicas:

   *a*) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$.
   *b*) $2x^2 - y^2 + 2xy + 4x - 2y + 1 = 0$.
   *c*) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$.
   *d*) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.
   *e*) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$.
   *f*) $4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0$.

*g*) $-x^2 + xy - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$.

7. Para cada una de las siguientes cónicas:

$$\begin{aligned} x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 &= 0, \\ 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 52 &= 0, \end{aligned}$$

encontrar un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que nos lleve a su ecuación reducida.

8. ¿Existe alguna elipse en la familia de cónicas $x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + \alpha = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$?

9. Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica siguiente en función del parámetro real $\alpha$:

$$\alpha\, x^2 + y^2 + 4\alpha\, xy - 2x - 4y + \alpha = 0.$$

10. Clasifica afínmente la cónica $H$ del plano afín $\mathbb{R}^2$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0.$$

Encuentra un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ en el que $H$ adopte su forma canónica.

11. Demuestra los siguientes enunciados.

   *a*) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una *elipse*.
   *b*) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una *hipérbola*.
   *c*) El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una *parábola*.

12. Expresar en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ las ecuaciones de las siguientes cónicas:

   *a*) $E = \{p \in \mathbb{R}^2 \,/\, \mathrm{d}(p, F_1) + \mathrm{d}(p, F_2) = 4\}$, donde $F_1 = (0, 2), F_2 = (-2, 0)$.
   *b*) La parábola $P$ de foco $F = (2, 2)$ y directriz de ecuación $x + y = 0$.

13. En $\mathbb{R}^2$ consideramos las rectas afines de ecuaciones $x + y = 1$ y $x - y = 1$. ¿Es una cónica el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan de ambas rectas? En caso afirmativo, escribir su ecuación reducida y decir de qué tipo es.

14. Clasificar las siguientes cuádricas:

   *a*) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$.
   *b*) $xy - z = 0$.
   *c*) $2xy + 2xz + 2yz - 4 = 0$.

*d*) $2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0$.

*e*) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$.

*f*) $3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0$.

*g*) $x^2 + z^2 + 2xz - 4 = 0$.

*h*) $xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 13 = 0$.

15. Clasifica afínmente la cuádrica $H$ del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2 = 0.$$
Encuentra un sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$ en el que $H$ adopte su forma canónica.

16. Clasifica afínmente la cuádrica $H$ del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0.$$

17. Para la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por:
$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$$
determinar un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^3$ que nos lleve a su ecuación reducida.

18. Encontrar la ecuación reducida afín y decir de qué tipo es la cuádrica siguiente en función del parámetro real $\alpha$:
$$2x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 4x - 2y + \alpha = 0.$$

19. Sean $F_1$ y $F_2$ dos puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Consideramos el lugar geométrico definido por $E = \{p \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{d}(p, F_1) + \mathrm{d}(p, F_2) = 2a\}$, siendo $2a > \mathrm{d}(F_1, F_2)$. Estudiar si $E$ es o no una cuádrica en $\mathbb{R}^3$ y, en caso afirmativo, decidir de qué tipo es.

20. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el punto $F = (0, 0, 1)$ y el plano afín $S$ de ecuación $x - z = 0$. Definimos el conjunto:
$$C = \{p \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{d}(p, F) = \mathrm{d}(p, S)\}.$$
Demostrar que $C$ es una cuádrica y clasificarla.

21. Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en $\mathbb{R}^4$ de ecuación:
$$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$

22. Sea $S$ un subespacio afín de dimensión $k$ en $\mathbb{R}^n$ y $C$ una hipercuádrica. Demostrar que se da una de las siguientes posibilidades:

    *a*) $S \cap C = \emptyset$,

    *b*) $S \subseteq C$,

    *c*) $S \cap C$ es una hipercuádrica en $S$ (identificando $S$ con $\mathbb{R}^k$).

23. Clasificar las cónicas que se obtienen al cortar el cono $x^2 + y^2 = z^2$ con un plano afín.