Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 22/23)

Ejercicios 2, tema 2

1 Sea una ecuación del tipo

$$a_2 x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b_0,$$

donde $a_2 + a_1 + a_0 \neq 0$.

(a) Demostrar que existe una única solución constante, calcula dicha solución constante.

(b) Demostrar que si las raíces de la ecuación característica tienen modulo menor que uno entonces todas las soluciones tienden a la solución constante.

2 Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+2} - \beta x_{n+1} + \beta x_n = 1, \qquad \beta > 0\,.$$

(a) Determina la solución constante.

(b) Determina condiciones sobre β, para que las soluciones de la ecuación converjan a la solución de equilibrio.

3 Se consideran las funciones de oferta y demanda

$$O(p) = a + b\,p\,, \quad D(p) = c - d\,p\,.$$

Se modifica el modelo de la telaraña de acuerdo a la ley (Goodwin, 1941)

$$O(p_n^e) = D(p_n)\,,$$

donde p_n^e es el precio esperado para el año n:

$$p_n^e = p_{n-1} + \rho(p_{n-1} - p_{n-2})\,,$$

donde $\rho > 0$ es un parámetro (si $\rho = 0$ se vuelve al modelo de la telaraña).

(a) Demuestra que p_n cumple una ecuación del tipo

$$p_{n+2} + a_1 p_{n+1} + a_0 p_n = k$$

que tiene como solución constante al precio de equilibrio.

(b) Se supone $b = d = 1$. Calcula las soluciones y describe el comportamiento de los precios a largo plazo. ¿Son las predicciones idénticas a las que produciría el modelo simple de la telaraña?

4 Se considera el siguiente modelo de Samuelson modificado:

$$\begin{aligned} Y_n &= C_n + I_n \\ C_n &= b\,I_{n-1} \\ I_n &= C_n - k\,C_{n-1} + G, \end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual, respectivamente, G es el gasto público (que se supone constante) y $0 < b < 1$, $k > 0$. Escribe la ley de recurrencia que cumplen las inversiones anuales I_n. Haz un análisis del plano de parámetros k, b donde se reflejen la estabilidad y las oscilaciones de la renta en torno al equilibrio económico.

5 Se considera el siguiente modelo de Samuelson modificado:

$$\begin{aligned} Y_n &= \alpha C_n + \beta I_n \\ C_n &= Y_{n-1} \\ I_n &= k(C_n - C_{n-1}) + G, \end{aligned}$$

donde Y_n, C_n, I_n son la renta, consumo e inversión anual, respectivamente, G es el gasto público (que se supone constante) y $k > 0$. Los parámetros $0 < \alpha < 1$ y $0 < \beta < 1$ están ligados a impuestos al consumo y la inversión que se destinan a ayuda exterior (los números $1 - \alpha$ y $1 - \beta$ representan las partes proporcionales de consumo e inversión destinadas a dicha ayuda). Efectúa un analis similar al del ejercicio anterior para el caso en que $\alpha = \beta$.

6 Dadas las siguientes matrices

$$a) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determina, el radio espectral, la norma matricial subordinada a la norma de la suma $|\cdot|_1$, y la subordinada a la norma del máximo $|\cdot|_\infty$.

7 Sea A una matriz real tal que $det(A) > 1$, demostrar que

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n, \qquad (1)$$

no es convergente. Da un ejemplo de matriz A tal que el sistema (1) no sea convergente y $0 < det(A) < 1$.

8 Sea A una matriz cuadrada con radio espectral menor que 1, demostrar:

(a) la matriz $I - A$ es invertible.

(b) el sistema $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$ es compatible determinado para cualquier $\vec{b} \in \mathbb{R}^k$.

(c) dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^k$, la solución de

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + \vec{b},$$

tiene siempre límite para cualquier condición inicial.

9 Demuestra que la tres componentes de la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcrrl} a_{n+1} &=& 0.1a_n & +0.2b_n & +0.3c_n + 1 \\ b_{n+1} &=& 0.1a_n & +0.1b_n & -0.2c_n + 1 \\ c_{n+1} &=& -0.2a_n & -0.3b_n & +0.2c_n + 1 \end{array} \right.$$

con valor inicial $a_0 = 1.53$, $b_0 = 1.43$ y $c_0 = 2.2$, tienen límite.

10 Los siguientes modelos representan una población compuesta por dos especies en competición,

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n(1.7 - 0.02x_n - 0.08y_n), \\ y_{n+1} = y_n(1.5 - 0.03x_n - 0.04y_n), \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n(1.8 - 0.06x_n - 0.03y_n), \\ y_{n+1} = y_n(1.9 - 0.02x_n - 0.04y_n). \end{array} \right.$$

En cada caso, estudia la estabilidad de los puntos fijos.

11 Si en el modelo de crecimiento de una población estructurada por sexos no se asume una distribución equitativa entre hembras y machos, el modelo resultante es

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \alpha_x\, x_n\, y_n - \mu_x\, x_n, \\ y_{n+1} = y_n + \alpha_y\, x_n\, y_n - \mu_y\, y_n, \end{array}\right.$$

donde x_n el número de hembras e y_n en número de machos en el $n$ésimo año. Los parámetros α_x y α_y representan la tasa de natalidad por pareja de hembras y machos respectivamente y $0 < \mu_x < 1$ y $0 < \mu_y < 1$ son respectivamente las mortalidades. Dado $\alpha_x = 0.05$, $\alpha_y = 0.02$ y $\mu_x = \mu_y = 0.3$, estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio.

12 Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio en el siguiente modelo de presa depredador,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 2x_n - x_n y_n, \\ y_{n+1} & = & 1.5y_n - 2y_n^2 + x_n y_n. \end{array}\right.$$