Práctica 3. Imagen de una función de dos variables
Ejercicios resueltos

1. Calcular la imagen de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 \le 2y - y^2\} \quad \text{y} \quad f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4) \quad \forall \, (x, y) \in A$$

Solución

(a). Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente

$$x^2 \le 2y - y^2 \iff x^2 + y^2 - 2y \le 0 \iff x^2 + (y - 1)^2 \le 1$$

luego A es la bola cerrada de centro $(0, 1)$ y radio 1 para la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. En particular A es un conjunto cerrado y acotado, luego compacto, y es también un conjunto convexo, luego conexo. Como f es continua, por ser una función polinómica, deducimos que $f(A)$ es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo cerrado y acotado.

(b). Es obvio que f es parcialmente derivable en A°, de nuevo por ser una función polinómica. Veamos los puntos críticos de f. Para $(x, y) \in A^\circ$, se tiene $\nabla f(x, y) = 0$ si y sólo si,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\,x \qquad \text{y} \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4\,y^3 - 4$$

Vemos que $(0, 1)$ es el único punto crítico, con $f(0, 1) = -3$.

(c). Estudiemos ahora f en la frontera de A, que es la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, un arco paramétrico, pero no necesitaremos ninguna parametrización. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente

$$(x, y) \in \operatorname{Fr} A \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1 \iff y \in [0, 2]\,, \; x^2 = 2y - y^2$$

Por tanto, para $(x, y) \in \operatorname{Fr} A$ obtenemos

$$f(x, y) = x^2 + y(y^3 - 4) = 2y - y^2 + y^4 - 4y = y^4 - y^2 - 2y$$

de donde se deduce que el conjunto $f\big(\operatorname{Fr} A\big)$ coincide con la imagen de la función $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(y) = y^4 - y^2 - 2y \qquad \forall \, y \in [0, 2]$$

Esta función es derivable en $[0, 2]$ con

$$h'(y) = 4y^3 - 2y - 2 = 2(y - 1)(2y^2 + 2y + 1) \qquad \forall \, y \in [0, 2]$$

Como, para $y \in [0, 2]$ se tiene $2y^2 + 2y + 1 \ge 1 > 0$, vemos que $h'(y) = 0$ solamente para $y = 1$. Los posibles extremos absolutos de h son, por tanto, $0, 1$ y 2. Puesto que $h(0) = 0$, $h(1) = -2$ y $h(2) = 8$, la imagen de h es el intervalo $[-2, 8]$. Así pues, el máximo valor de f en $\operatorname{Fr} A$ es 8, que se alcanza en el punto $(0, 2)$. El mínimo valor es -2 que se alcanza en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.
Finalmente, puesto que $f(0, 1) = -3$, concluimos que $\max f(A) = \max\{-3, 8\} = 8$ y $\min f(A) = \min\{-3, -2\} = -3$ luego $f(A) = [-3, 8]$. ■

2. Se considera el conjunto $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0 \}$ y la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2$ para todo $(x,y) \in A$. Calcular la imagen de f.

Solución.

(a). Es claro que $A = B \cap H$ donde B es la bola cerrada de centro $(1,0)$ y radio 2, y $H = \{(x,y) \ : \ x \geq 0\}$ el semiplano de la derecha cerrado. Entonces A es cerrado por ser intersección de cerrados, y acotado, por estar contenido en una bola, luego A es compacto. Por otra parte, es claro que B y H son conjuntos convexos, luego A también es convexo y, en particular, A es conexo. Puesto que f es continua, por ser una función polinómica, deducimos que $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

(b) Tenemos claramente

$$A^\circ \ = \ B^\circ \cap H^\circ \ = \ \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 < 4\,,\ x > 0 \}$$

y f es diferenciable en A°, de nuevo por ser una función polinómica. Para $(x,y) \in A^\circ$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x-2) = 4y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (2,0)$$

Como $f(2,0) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in A$, está claro que $(2,0)$ es un mínimo absoluto de f, es decir, $\min f(A) = 0$. A partir de ahora sólo buscamos máximos absolutos de f.

(c). Tenemos claramente $\operatorname{Fr} \mathrm{A} \ = \ A \setminus A^\circ \ = \ C_1 \cup C_2$ donde

$$C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 4\,,\ x = 0 \} \ = \ \{(0,y) \ : \ y^2 \leq 3\} \qquad \text{y}$$
$$C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 = 4\,,\ x \geq 0 \}$$

Para $(0,y) \in C_1$ tenemos claramente $f(0,y) = 4 + 2y^2$ con $y^2 \leq 3$, luego

$$\max f(C_1) \ = \ 10 \ = \ f(0, \pm\sqrt{3})$$

Para $(x,y) \in C_2$ tenemos $y^2 = 4 - (x-1)^2$ luego

$$f(x,y) \ = \ (x-2)^2 + 2\big(4 - (x-1)^2\big) \ = \ 10 - x^2$$

y el máximo de f en C_2 se obtiene igualmente tomando $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{3}$:

$$\max f(C_2) \ = \ 10 \ = \ f(0, \pm\sqrt{3})$$

Concluimos que $\max f(A) \ = \ \max f(\operatorname{Fr} A) \ = \ 10$, luego $f(A) \ = \ [\,0, 10\,]$. ■