Ejercicio 31-05-23

Leandro Jorge Fernández Vega DGIIM

Problema Dada la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$, determina

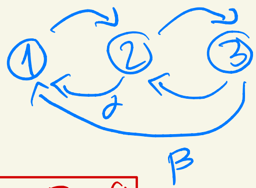
a) para qué valores α y β, M es ergódica.

b) para qué valores α y β, M es transitiva.

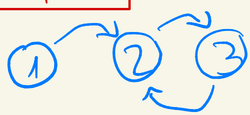
c) para qué valores α y β, M tiene valor propio dominante.

d) calcula R_0 en función de α y β.

Esquema:



- $\boxed{\alpha = \beta = 0}$



M ergódica $\Leftrightarrow$ es transitiva y mcd. del orden de los ciclos es 1.

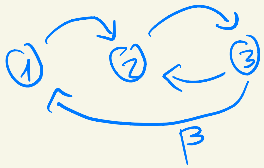
Como no todo elemento se puede conectar $\Rightarrow$ no es transitiva $\Rightarrow$ no es ergódica.

Valor propio dominante:

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -\lambda & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}9 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 0{,}72) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Como $\left|\frac{3\sqrt{2}}{5}\right| = \left|-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right| \Rightarrow \nexists\, \lambda \in \sigma(M) \,/\, |\lambda| > |\mu| \;\; \forall \mu \in \sigma(M) \Rightarrow$ No hay valor propio dominante.

- $\boxed{\alpha = 0,\ \beta > 0}$

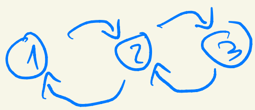


claramente M es transitiva.

- Vemos para ir de 1 a 1, $\exists$ ciclo de 3 pasos.
- Para ir de 2 a 2, $\exists$ ciclo de 2 pasos.
- Para ir de 3 a 3, $\exists$ ciclo de 3 pasos.

$mcd(2,3) = 1 \Longrightarrow M$ ergódica $\Rightarrow \exists\, \lambda \in \sigma(M)$ dominante

- $\boxed{\alpha > 0,\ \beta = 0}$



claramente M es transitiva.

Vemos que todos los ciclos son de orden $2k$, $k \in \mathbb{N} \Longrightarrow$
$mcd(2,4\ldots) = 2 \Rightarrow M$ no es ergódica

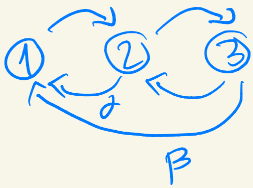
Valor propio dominante:

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ 0{,}8 & -\lambda & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}9 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda^3 + 0{,}72\lambda + 0{,}8\alpha\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{0{,}72 + 0{,}8\alpha} \end{cases} \Longrightarrow$$

$\nexists$ valor propio dominante (análogo a $\alpha = \beta = 0$).

- $\boxed{\alpha > 0 \ , \beta > 0}$



Claramente M transitiva.

Vemos que $\exists$ ciclos de orden 2 y 3 $\Rightarrow$ mcd$(2,3)=1$

$\Rightarrow$ M ergódica $\Rightarrow$ $\exists$ valor propio dominante.

Solución:

A) M ergódica $\iff \alpha \geq 0 , \beta > 0$

B) M transitiva $\iff \alpha > 0 \vee \beta > 0$

C) M tiene valor propio dominante $\iff \alpha \geq 0 , \beta > 0$

D) Calcular R_0 en función de α y β.

$$M = F + E = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + E \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = (0 \ \alpha \ \beta) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(0 \ \alpha \ \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 20/7 & 25/7 & 20/7 \\ 18/7 & 45/14 & 25/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{20}{7}\alpha + \frac{18}{7}\beta$$