Rafael López Camino

Parcial

1. Sea $(\mathbb{R}, \tau_{in})$ para $p = 0$, $(\mathbb{R}, \tau_{ex})$ para $q = 1$ y la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_{in}) \to (\mathbb{R}, \tau_{ex})$ dada por $f(x) = x^2$. Estudia si f es o no continua y prueba que f es continua en $x = 1$.

2. Construye de forma explícita un homeomorfismo entre los siguientes conjuntos:

$$X = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \qquad Y = \{(x, x^2) : -1 < x < 1\}$$

3. Sea el espacio topológico (X, τ) y $A = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$. Establece un homeomorfismo entre (X, τ) y $(A, (\tau \times \tau)|_A)$. Estudia cuándo A es abierto en $(X \times X, \tau \times \tau)$.

4. Sea $X = [-1, 2]$ y $A = [-1, 0] \cup [1, 2]$. En X se define la relación de equivalencia:

$$xRy \iff x = y \quad \text{ó} \quad x, y \in A$$

Prueba que X/R es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Rafael López Camino

Parcial

1. Sea X un conjunto y un subconjunto suyo $A \subset X$ fijado. Se define:

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\}$$

- Prueba que τ es una topología de X.
- Prueba que $\beta_x = \{B_x\}$ es base de entornos de $x \in X$, donde $B_x = \{x\} \cup A$.
- Si $C \subset X$, caracteriza el interior y la adherencia de C.

2. En $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, halla el interior y la adherencia de:

$$A = B((0,0),1) - \{(0,0)\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

3. En $\mathbb{R}^2$, consideramos la familia $\beta = \{(a,b) \times \{c\} : a < b \text{ y } a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

- Prueba que β es base de abiertos de una topología τ en $\mathbb{R}^2$.
- Compara τ con τ_u.
- Dado $C = \{0\} \times \mathbb{R}$, estudia cuál es la topología relativa $\tau|_C$ y si es conocida.

1. Estudia en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (\mathbb{R}, \tau_d)$ dada por:

$$f(x) = sen(x)$$

2. Prueba que la pareja de espacios de cada apartado son homeomorfos entre sí:

   - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \quad x \geq 0\}$ y $B = [0, 1]$.
   - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad y > 0\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   - $A =]0, 1[\cup [2, 3]$ y $B =]5, 7[\cup [10, 12]$.

3. Se considera $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología del punto incluido para $p = 1$.

   - Estudia la continuidad global de la aplicación $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x, y) = y - x$.
   - Halla el interior del conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ en $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau \times \tau)$.

4. En $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^2$ se define la relación:

$$(x, y)R(x', y') \iff \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ (0, 0)R(0, 1) \\ (1, 0)R(1, 1) \end{cases}$$

   Halla y prueba a qué subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo X/R.

1. Prueba quue cada pareja de conjuntos no son homeomorfos:
   - $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{RP}^2$.
   - $A = (\{0\}\times]-1,1]) \cup ([0,1]\times\{0\})$ y $B = (\{0\}\times]-1,1[) \cup ([0,1]\times\{0\})$.
   - $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = sen\left(\frac{1}{n}\right) \quad x > 0\right\}$ y $B = A \cup \{(0,0)\}$.
   - $\mathbb{RS}^1 \times [0,1]$ y $\mathbb{RS}^1 \times]0,1[$.
2. Calcula las componentes conexas de $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \{-1,1\}\}$.
3. Estudia la compacidad de $(\mathbb{R}, \tau_d)$. Caracteriza los subconjuntos compactos.
4. Sea $p \notin \mathbb{R}$. En $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ se considera la topología τ que tiene por base:

$$\beta = \beta_u \cup \{]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\cup\{p\} : a < b\}$$

   Estudia la conexión y compacidad de (X, τ).

1. Probar que
$$B = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cup \,]n, +\infty[\ / \, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
es base de una topología τ en $\mathbb{R}$.

2. Razonar si
$$B_1 = \{ \,]a, b[\, / \, a, b \in \mathbb{R} \}$$
o
$$B_2 = \{ \,]n, +\infty[\, / \, n \in \mathbb{N} \}$$
son bases de τ.

3. Calcular el interior y la adherencia de $\mathbb{N}$ y $]-\infty, 8]$ en $(\mathbb{R}, \tau)$.