Tema 7

Vector derivada

La noción de diferenciabilidad, que hemos estudiado en un contexto general o abstracto, para una función de un espacio normado en otro, se irá concretando en los casos particulares que más nos interesan. Consideramos en primer lugar el caso en que el espacio de partida es $\mathbb{R}$, es decir, tenemos una función de una sola variable real. Su diferencial en un punto se identifica entonces con un vector del espacio de llegada, que llamaremos *vector derivada*.

Nos interesa sobre todo el caso particular en que el espacio de llegada es $\mathbb{R}^M$ con $M > 1$. Sabemos que la diferenciabilidad de nuestra función equivale entonces a la de sus componentes, que son funciones reales de variable real. Interpretamos geométricamente el vector derivada como el vector de dirección de la *recta tangente* a una curva paramétrica, y físicamente, como el *vector velocidad* de un móvil.

7.1. Definición de vector derivada

Vamos a trabajar con funciones de una variable real y valores vectoriales, es decir, funciones definidas en un abierto de $\mathbb{R}$, que toman valores en un espacio normado Y. En realidad, no es necesario suponer que el conjunto de definición sea abierto, pero esto es poco relevante. Para describir la diferencial en un punto de una tal función, usamos una sencilla observación, que generaliza lo conocido para $Y = \mathbb{R}$.

- *Si Y es un espacio normado, la aplicación $\Phi : L(\mathbb{R},Y) \to Y$, definida por $\Phi(T) = T(1)$ para toda $T \in L(\mathbb{R},Y)$, es una biyección lineal que preserva la norma, luego permite identificar totalmente el espacio normado $L(\mathbb{R},Y)$ con el espacio normado Y.*

Es obvio que Φ es lineal y, para $T \in L(\mathbb{R},Y)$ se tiene que $T(t) = t\,T(1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego

$$\|T\| = \sup\left\{ |t|\,\|T(1)\| \,:\, t \in \mathbb{R},\ |t| = 1 \right\} = \|T(1)\|$$

En particular Φ es inyectiva, pero también es sobreyectiva, puesto que, dado un $y \in Y$, basta definir $T(t) = t\,y$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para obtener $T \in L(\mathbb{R},Y)$ tal que $\Phi(T) = T(1) = y$. ■

Sea ahora Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $f:\Omega\to Y$ una función diferenciable en un punto $a\in\Omega$. Su diferencial $Df(a)\in L(\mathbb{R},Y)$ se identifica con el vector $y=Df(a)(1)\in Y$, lo cual significa que $Df(a)(t)=t\,y$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Para calcular explícitamente el vector y, la definición de diferencial nos dice que

$$0=\lim_{t\to a}\frac{\|f(t)-f(a)-(t-a)\,y\|}{|t-a|}=\lim_{t\to a}\left\|\frac{f(t)-f(a)}{t-a}-y\right\| \tag{1}$$

lo cual es equivalente a

$$y=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \tag{2}$$

El límite que ha aparecido es exactamente el mismo que usamos para definir la derivada de una función real de variable real, sólo que ahora tenemos el límite de una función con valores en Y, que es un vector de Y. Esto motiva la definición que sigue.

Decimos que f es **derivable** en $a\in\Omega$, cuando la función $t\mapsto\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$, de $\Omega\setminus\{a\}$ en Y, tiene límite en el punto a. Dicho límite es entonces el **vector derivada** de f en a, que se denota por $f\,'(a)$, es decir, $f\,'(a)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\in Y$.

Decimos simplemente que f es **derivable**, cuando es derivable en todo punto de Ω, en cuyo caso podemos considerar la función $f\,':\Omega\to Y$ que a cada punto $x\in\Omega$ hace corresponder el vector derivada $f\,'(x)$, y decimos que $f\,'$ es la **función derivada** de f.

Hemos visto que, si f es diferenciable en $a\in\Omega$, entonces f es derivable en a y se verifica que $f'(a)=Df(a)(1)$. Pero recíprocamente, si f es derivable en a, basta tomar $y=f\,'(a)$ para tener (2), luego también (1), así que f es diferenciable en a con $Df(a)(t)=t\,f\,'(a)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. En resumen:

- *Sea Y un espacio normado y Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Una función $f:\Omega\to Y$ es diferenciable en un punto $a\in\Omega$ si, y sólo si, f es derivable en a, en cuyo caso, la diferencial y el vector derivada de f en a se determinan mutuamente por:*

  $$f\,'(a)=Df(a)(1)\qquad y\qquad Df(a)(t)=t\,f\,'(a)\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

  Por tanto f es diferenciable si, y sólo si, es derivable. Por último, $f\in C^1(\Omega,Y)$ si, y sólo si, f es derivable y su función derivada $f\,'$ es continua.

Sólo queda comprobar la última afirmación, que se deduce de la total identificación de $L(\mathbb{R},Y)$ con Y antes comprobada: para $x,a\in\Omega$ tenemos

$$\big\|Df(x)-Df(a)\big\|=\big\|f\,'(x)-f\,'(a)\big\|$$

luego Df es continua si, y sólo si, $f\,'$ es continua. ■

Tenemos pues la misma situación que en el caso $Y=\mathbb{R}$. Para funciones de una variable real con valores en un espacio normado arbitrario Y, la identificación de $L(\mathbb{R},Y)$ con Y hace que la distinción entre diferencial y derivada sea sólo cuestión de matiz.

Comprobamos ahora una propiedad del vector derivada que será útil para su interpretación geométrica y física.

- *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$, Y un espacio normado y $f : \Omega \to Y$ una función derivable en un punto $a \in \Omega$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ verificando:*

$$\left.\begin{array}{c} t_1, t_2 \in \Omega\,,\ \ t_1 \neq t_2 \\ a - \delta < t_1 \leqslant a \leqslant t_2 < a + \delta \end{array}\right\} \implies \left\| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - f\,'(a) \right\| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por definición del vector derivada, existe $\delta > 0$ tal que:

$$t \in \Omega\,,\ \ |t - a| < \delta \implies \|\,f(t) - f(a) - (t - a)\,f\,'(a)\,\| \leqslant \varepsilon\,|t - a|$$

Entonces, si $t_1, t_2 \in \Omega$ verifican que $a - \delta < t_1 \leqslant a \leqslant t_2 < a + \delta$, usamos la desigualdad anterior para $t = t_1$, y también para $t = t_2$, obteniendo:

$$\begin{aligned} &\|\,f(t_2) - f(t_1) - (t_2 - t_1)\,f\,'(a)\,\| \\ &\qquad \leqslant \|\,f(t_2) - f(a) - (t_2 - a)\,f\,'(a)\,\| + \|\,f(a) - f(t_1) - (a - t_1)\,f\,'(a)\,\| \\ &\qquad \leqslant \varepsilon\big(\,|t_2 - a| + |a - t_1|\,\big) = \varepsilon\,(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Cuando $t_1 \neq t_2$, basta dividir ambos miembros por $t_2 - t_1 > 0$ para tener (3). ■

Nótese que lo interesante de la observación anterior es la posibilidad de tomar $t_1 < a < t_2$, pues para $t_1 = a$ o $t_2 = a$ el resultado no es más que la definición del vector derivada.

Pensemos en el vector derivada en el caso $Y = \mathbb{R}^M$, con cualquier norma. Entonces cada función $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ tiene M componentes, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M)$, que son funciones reales de variable real. Sabemos que f es diferenciable en un punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, lo son todas sus componentes, en cuyo caso, para $j \in \Delta_M$ se tiene $Df_j(a) = \pi_j \circ Df(a)$ donde π_j es la j-ésima proyección coordenada en $\mathbb{R}^M$. Como consecuencia,

$$f_j\,'(a) = Df_j(a)(1) = \big(\pi_j \circ Df(a)\big)(1) = \pi_j\big(f\,'(a)\big)$$

Para cada $j \in \Delta_M$, vemos que $f_j\,'(a) \in \mathbb{R}$ es la j-ésima coordenada del vector derivada $f'(a)$ en la base usual de $\mathbb{R}^M$, que como siempre denotamos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_M\}$. Así pues, tenemos:

- *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $f = (f_1, f_2, \ldots, f_M) : \Omega \to \mathbb{R}^M$ una función. Entonces f es derivable en un punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, f_j es derivable en a para todo $j \in \Delta_M$, en cuyo caso se tiene $f\,'(a) = \big(f_1\,'(a), f_2\,'(a), \ldots, f_M'(a)\big)$ es decir:*

$$f_j\,'(a) = \pi_j\big(f\,'(a)\big) \quad \forall\, j \in \Delta_M \qquad \textit{o bien,} \qquad f\,'(a) = \sum_{j=1}^{M} f_j\,'(a)\,e_j \tag{4}$$

7.2. Recta tangente a una curva paramétrica

Para hacer una interpretación geométrica del vector derivada, fijamos un intervalo abierto no vacío $J \subset \mathbb{R}$ y una función $\gamma : J \to \mathbb{R}^M$, que suponemos continua. La imagen de γ, es decir, el conjunto $C = \gamma(J) = \{\gamma(t) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^M$, es lo que en Geometría se conoce como una curva definida en forma paramétrica, o más brevemente, una **curva paramétrica**, en $\mathbb{R}^M$.

Los casos más interesantes se presentan cuando $M = 2$ y tenemos una *curva plana*, o bien cuando $M = 3$ y tenemos una *curva alabeada*. Aunque sólo sea para tratar simultáneamente ambos casos, merece la pena trabajar en general con $M \in \mathbb{N}$, $M > 1$.

La denominación de curva paramétrica se refiere a que entendemos t como un *parámetro*, y a cada valor $t \in J$ de dicha variable, corresponde un único punto $\gamma(t) \in C$. Se dice que la función γ parametriza la curva C, o que γ es una **parametrización** de C. Esto es sólo una forma de hablar, cualquier función parametriza siempre a su imagen.

Conviene resaltar que γ puede no ser inyectiva, distintos valores del parámetro pueden dar lugar al mismo punto de la curva C. Por otra parte, es claro que la curva C no determina a la función γ, una misma curva tiene siempre parametrizaciones muy diversas.

Pues bien, si γ es derivable en un punto $a \in J$ con $\gamma\,'(a) \neq 0$, podemos considerar la recta

$$R = \{\, \gamma(a) + t\,\gamma\,'(a) \,:\, t \in \mathbb{R} \,\}$$

es decir, la única recta en $\mathbb{R}^M$ que pasa por el punto $\gamma(a)$ y tiene vector de dirección $\gamma\,'(a)$. Se dice que R es la **recta tangente** a la curva C en el punto $x = \gamma(a)$. Así pues, el vector derivada $\gamma\,'(a) \neq 0$ es *un vector de dirección de la recta tangente* a la curva $C = \gamma(J)$ en el punto $x = \gamma(a) \in C$.

Nótese que, para otro valor $b \in J$ del parámetro, podemos tener también $x = \gamma(b)$, pero γ podría no ser derivable en b, o ser derivable, pero con $\gamma\,'(b) \neq \gamma\,'(a)$, luego es ambiguo hablar de la recta tangente en un punto $x \in C$. Indicando que $x = \gamma(a)$ evitamos la ambigüedad, al precisar el valor del parámetro al que nos estamos refiriendo.

La denominación de la recta tangente tiene una clara explicación geométrica, como vamos a ver. Fijada cualquier norma en $\mathbb{R}^M$, y dado $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \|\,\gamma\,'(a)\,\|$, podemos conseguir $\delta > 0$ con $]\,a-\delta, a+\delta\,[\subset J$, de forma que, igual que en (3), se tenga:

$$a - \delta < t_1 \leqslant a \leqslant t_2 < a + \delta,\;\; t_1 \neq t_2 \implies \left\| \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} - \gamma\,'(a) \right\| \leqslant \varepsilon$$

Entonces $\dfrac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} \neq 0$ es un vector de dirección de la recta (secante a la curva C), que pasa por los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$, que pueden ser ambos distintos de $\gamma(a)$. Pues bien, dicho vector tiende a ser $\gamma\,'(a)$ cuando ambos valores t_1, t_2 del parámetro tienden a coincidir con a, siempre que se mantenga la condición $t_1 \leqslant a \leqslant t_2$. Esto concuerda con la visión geométrica de la recta tangente como "límite" de rectas secantes.

Resaltamos que, para todo lo dicho anteriormente, la hipótesis $\gamma\,'(a) \neq 0$ es esencial. Si γ es derivable en a con $\gamma\,'(a) \neq 0$ se dice que $x = \gamma(a)$ es un *punto regular* de la curva $C = \gamma(J)$ y, si esto ocurre para todo $a \in J$ decimos que C es una *curva regular*. Si, por el contrario, γ no es derivable en un punto $a \in J$, o bien es derivable en a pero $\gamma\,'(a) = 0$, entonces $x = \gamma(a)$ es un *punto singular* de la curva $C = \gamma(J)$. Debe quedar claro que estas nociones dependen de la parametrización γ que estamos usando para la curva C. Con otra parametrización distinta, los puntos regulares pueden dejar de serlo, y viceversa, por eso hablamos de la curva $C = \gamma(J)$, para resaltar la parametrización γ a la que nos referimos. Cuando $C = \gamma(J)$ es una curva regular, también podemos decir que γ es una *parametrización regular* de la curva C.

Pensemos finalmente en las componentes de γ. Para cada $j \in \Delta_M$, la función $\pi_j \circ \gamma : J \to \mathbb{R}$, suele denotarse por x_j, en vez de γ_j. Se dice entonces que las M igualdades

$$x_j = x_j(t) \quad (t \in J) \qquad \text{con } j \in \Delta_M \tag{5}$$

son las *ecuaciones paramétricas* de la curva C. Debemos saber entender bien esta notación, que es intuitiva y cómoda, aunque formalmente cuestionable. En el segundo miembro, $x_j = \pi_j \circ \gamma$ es la j-ésima componente de γ, una función real de variable real definida en el intervalo J, mientras que en el primer miembro usamos x_j como una variable, cuyos valores son los que toma dicha función. Obviamente las ecuaciones paramétricas dependen de la función γ que estamos usando para parametrizar la curva C.

Sabemos que γ es derivable en un punto $a \in J$ si, y sólo si, lo es x_j para todo $j \in \Delta_M$, en cuyo caso (4) nos dice que

$$x_j'(a) = \pi_j\big(\gamma'(a)\big) \quad \forall\, j \in \Delta_M\,, \qquad \text{o bien,} \qquad \gamma'(a) = \sum_{j=1}^{M} x_j'(a)\, e_j$$

Pues bien, cuando γ es derivable en el punto a con $\gamma'(a) \neq 0$, la recta tangente R, como curva paramétrica que también es, tiene sus ecuaciones paramétricas, dadas por:

$$x_j = x_j(a) + t\, x_j'(a) \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \text{con } j \in \Delta_M$$

7.3. Vector velocidad

Para hacer una interpretación física del vector derivada, podemos pensar que una función continua $\gamma : J \to \mathbb{R}^M$ describe un movimiento en el espacio M-dimensional, de forma que J es un intervalo de *tiempo* y, en cada instante $t \in J$, el móvil ocupa la posición $\gamma(t)$, por lo que se dice que $\gamma(t)$ es el *vector de posición* del móvil en el instante t. La curva paramétrica $C = \gamma(J)$ es la *trayectoria* del movimiento y sus ecuaciones paramétricas (5) son las *ecuaciones del movimiento*. La situación más intuitiva se presenta cuando $M = 2$ y tenemos un movimiento en el plano, o cuando $M = 3$ y se trata de un movimiento en el espacio tridimensional.

En este planteamiento físico, es natural suponer que γ es derivable en todo punto de J. Fijados $t_1, t, t_2 \in J$ con $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ y $t_1 \neq t_2$, el vector $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ indica el *desplazamiento* del móvil durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ luego el vector $\dfrac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1}$ nos da la *velocidad media* del móvil en dicho intervalo. La afirmación (3) nos dice que dicha velocidad media tiende a coincidir con $\gamma'(t)$ cuando $t_2 - t_1$ tiende a ser cero, luego $\gamma'(t)$ debe entenderse como una velocidad "instantánea". Por ello, para todo $t \in J$, se dice que $\gamma'(t)$ es el **vector velocidad** del móvil en el instante t. La norma euclídea $\|\gamma'(t)\|$ del vector velocidad se conoce como *celeridad* del móvil en el instante t y nos informa de la rapidez con la que el móvil se está desplazando, independientemente de la dirección en que se produzca dicho desplazamiento.

Nótese que no hay inconveniente en admitir que la celeridad instantánea pueda anularse, es decir, que $\gamma'(t) = 0$ para algún $t \in J$. Ahora bien, cuando $\gamma'(t) \neq 0$, el vector velocidad nos da la dirección de la recta tangente a la trayectoria en el instante t, luego nos informa sobre la dirección en la que se produce el movimiento, información que no tenemos cuando $\gamma'(t) = 0$.

7.4. Curvas planas

En el caso $M = 2$, una curva paramétrica en $\mathbb{R}^2$, o *curva plana*, es la imagen $C = \gamma(J)$ de una función continua $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ definida en un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$. Para denotar sus componentes, evitamos los subíndices, escribiendo $x = \pi_1 \circ \gamma$ e $y = \pi_2 \circ \gamma$, con lo que las ecuaciones paramétricas de $C = \gamma(J)$ son

$$x = x(t) \qquad \text{e} \qquad y = y(t) \qquad (t \in J)$$

Sabemos que γ es derivable en un punto $a \in J$ si, y sólo si, lo son las funciones x e y, en cuyo caso tenemos $\gamma'(a) = \big(x'(a), y'(a)\big)$. Cuando $\gamma'(a) \neq 0$, la recta tangente a la curva C en el punto $\gamma(a) = \big(x(a), y(a)\big)$ tiene ecuaciones paramétricas

$$x = x(a) + t\,x'(a) \qquad \text{e} \qquad y = y(a) + t\,y'(a) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Por ejemplo, la elipse C de centro $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ con semiejes $a, b \in \mathbb{R}^+$ puede describirse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \alpha + a\cos t \qquad \text{e} \qquad y = \beta + b\operatorname{sen} t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

que nos dan una parametrización regular de dicha elipse. Es fácil ver que la recta tangente a la elipse en un punto $(x_0, y_0) \in C$ tiene ecuaciones paramétricas

$$b\,x = b\,x_0 - t\,a\,(y_0 - \beta) \qquad \text{y} \qquad a\,y = a\,y_0 + t\,b\,(x_0 - \alpha) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Conviene ahora aclarar la relación con el tipo de curva que mejor conocemos: la gráfica de una función continua $\varphi : J \to \mathbb{R}$. Se dice que el conjunto

$$\operatorname{Gr}\varphi = \big\{ \big(x, \varphi(x)\big) \, : \, x \in J \big\} \subset \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

es una **curva explícita**, resaltando que la ordenada de cada punto de este tipo de curva se obtiene *explícitamente* como función de su abscisa. Concretamente, de $(x, y_1), (x, y_2) \in \operatorname{Gr}\varphi$ se deduce que $x \in J$ y $\varphi(x) = y_1 = y_2$, luego está claro que en la curva $\operatorname{Gr}\varphi$, la ordenada y es función de la abscisa x, por lo que se dice que la igualdad

$$y = \varphi(x) \qquad (x \in J) \tag{7}$$

es la *ecuación explícita* de la curva $\operatorname{Gr}\varphi$. Geométricamente, poco importa intercambiar los ejes de coordenadas, así que también se considera como curva explícita a todo conjunto que sea de la forma $\big\{ \big(\psi(y), y\big) \, : \, y \in J \big\} \subset \mathbb{R}^2$, donde $\psi : J \to \mathbb{R}$ es continua. Ahora la abscisa de cada punto de la curva es función de su ordenada, y la ecuación explícita de la curva es $x = \psi(y)$ con $y \in J$. En lo que sigue consideramos solamente curvas de la forma (6), pero cualquier afirmación que hagamos para ellas tiene su análoga para el otro tipo de curvas explícitas.

Está claro que *toda curva explícita es una curva paramétrica*. Concretamente $\operatorname{Gr}\varphi = \gamma(J)$ donde $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ es la función continua definida por $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$ para todo $t \in J$.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la curva explícita $\operatorname{Gr} \varphi$, pueden ser

$$x = t \qquad \text{e} \qquad y = \varphi(t) \qquad (t \in J)$$

Observamos ahora que γ es derivable en un punto $a \in J$ si, y sólo si, lo es φ, en cuyo caso tenemos $\gamma'(a) = \big(1, \varphi'(a)\big)$, y la condición $\gamma'(a) \neq 0$ para que exista la recta tangente, se cumple automáticamente. Dicha recta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = a + t \qquad \text{e} \qquad y = \varphi(a) + t\,\varphi'(a) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y nunca es una recta vertical, responde a la ecuación explícita

$$y - \varphi(a) = \varphi'(a)\,(x - a) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Recuperamos así la interpretación geométrica de la derivada $\varphi'(a)$ como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de φ en el punto $(a, \varphi(a))$. Queda claro que la parametrización usada para la curva explícita $\operatorname{Gr} \varphi$ es regular si, y sólo si, φ es derivable en J.

Veamos un ejemplo de curva explícita que sirve para ilustrar la noción de punto singular: la gráfica de la función valor absoluto, $C = \operatorname{Gr} \varphi$ donde $\varphi(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El origen es un punto singular, ya que φ no es derivable en 0. En lugar de la parametrización más obvia, dada por $\gamma(t) = \big(t, |t|\big)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, que tampoco es derivable en 0, podemos considerar la función $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\chi(t) = \big(t|t|, t^2\big)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, para la que también tenemos $C = \chi(\mathbb{R})$, es decir,

$$\big\{ \big(x, |x|\big) : x \in \mathbb{R} \big\} = \big\{ \big(t|t|, t^2\big) : t \in \mathbb{R} \big\}$$

Así pues, podemos ver C como la curva paramétrica de ecuaciones

$$x = t|t| \qquad \text{e} \qquad y = t^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

La ventaja es que χ es derivable en $\mathbb{R}$, con $\chi'(t) = \big(2|t|, 2t\big)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Físicamente, vemos que χ describe un movimiento cuya trayectoria es la gráfica de la función valor absoluto, y su velocidad está bien definida en todo instante. Sin embargo, como $\chi'(0) = 0$, el origen de coordenadas $(0,0) = \chi(0)$ sigue siendo un punto singular de la curva $\chi(\mathbb{R})$. Geométricamente está muy claro que la curva C no puede admitir una recta tangente en el origen, de ahí que, en cualquier parametrización que hagamos, el origen sea siempre un punto singular.

Por otra parte, es fácil dar un ejemplo de un punto de una curva, que pasa de ser regular a ser singular al cambiar la parametrización. Basta considerar una curva explícita $C = \operatorname{Gr} \psi$, para una función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea derivable. Obviamente C es una curva regular para su parametrización natural: $\gamma(x) = \big(x, \psi(x)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero también podemos considerar la parametrización $\chi(t) = \big(t^3, \psi(t^3)\big)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pues está bien claro que $C = \chi(\mathbb{R})$. Ahora $(0,0) = \chi(0)$ es un punto singular, ya que $\chi'(0) = 0$.

Los ejemplos anteriores dejan bien claro que toda curva explícita se puede ver como curva paramétrica, incluso usando parametrizaciones muy diversas. Resaltamos que el recíproco está muy lejos de ser cierto, la noción de curva paramétrica es mucho más general que la de curva explícita. Por ejemplo, es claro que la circunferencia $C = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \big\}$ no es una curva explícita, pues basta observar que $(0,1), (0,-1) \in C$, luego C no puede ser la gráfica de una función. Como $(1,0), (-1,0) \in C$, tampoco es una curva explícita del segundo tipo antes descrito: no existe una función $\psi : J \to \mathbb{R}$ con $J \subset \mathbb{R}$ tal que $\big\{ \big(\psi(y), y\big) : y \in J \big\} = C$. Sin embargo, C sí es una curva paramétrica, es una de las elipses antes consideradas.

7.5. Curvas alabeadas

Aunque resulte repetitivo, como repaso pueden venir bien algunos comentarios sobre curvas paramétricas en $\mathbb{R}^3$ o *curvas alabeadas*. Ahora tenemos $C = \gamma(J) \subset \mathbb{R}^3$ donde J es un intervalo abierto y $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ es continua. Sus componentes son $x = \pi_1 \circ \gamma$, $y = \pi_2 \circ \gamma$ y $z = \pi_3 \circ \gamma$, con lo que tenemos tres ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t) \quad \text{y} \quad z = z(t) \qquad (t \in J)$$

Como ejemplo, podemos considerar la hélice circular $H \subset \mathbb{R}^3$ de ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t\,, \quad y = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad z = t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Volviendo al caso general, sabemos que γ es derivable en un punto $a \in J$ si y sólo si, lo son las funciones x, y, z, en cuyo caso $\gamma\,'(a) = \big(x\,'(a)\,, y\,'(a)\,, z\,'(a)\big)$. Cuando $\gamma\,'(a) \neq 0$ tenemos la recta tangente a la curva C en el punto $\gamma(a)$ cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x(a) + t\,x\,'(a)\,, \quad y = y(a) + t\,y\,'(a) \quad \text{y} \quad z = z(a) + t\,z\,'(a) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Por ejemplo, la recta tangente a la hélice circular$H$, en cualquier punto $(x_0, y_0, z_0) \in H$, tiene la siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 - t\,y_0\,, \quad y = y_0 + t\,x_0 \quad \text{y} \quad z = z_0 + t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

7.6. Ejercicios

1. Sea Y un espacio pre-hilbertiano, Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $f, g : \Omega \to Y$ dos funciones diferenciables en un punto $a \in \Omega$. Probar que la función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \big(f(t)\,\big|\,g(t)\big) \qquad \forall t \in \Omega$$

es derivable en el punto a y calcular su derivada $\varphi'(a)$.

2. Sean Y, Z espacios normados y consideremos dos funciones $f : \Omega \to U$ y $g : U \to Z$, donde $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}$ y $U = U^\circ \subset Y$. Supongamos que f es derivable en un punto $a \in \Omega$ y que g es diferenciable en el punto $b = f(a)$. Calcular el vector derivada de $g \circ f$ en el punto a.

3. Sean X, Z espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$ y $U = U^\circ \subset \mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \to U$ una función diferenciable en un punto $a \in \Omega$ y $g : U \to Z$ una función derivable en el punto $b = f(a)$. Calcular la diferencial de $g \circ f$ en a.

4. Probar que, dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, la hipérbola $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\big\}$ no es una curva paramétrica, pero cada una de sus ramas es una curva explícita.

5. Describir geométricamente las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son:

   a) $x = e^{\,t}\,, \quad y = e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

   b) $x = \cosh t\,, \quad y = \operatorname{senh} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$