

Ejercicio 07-03-23

Leandro Jorge Fernández Vega DGIM

Problema 1 En el modelo de crecimiento de una población estructurada por sexos (visto en clase) el umbral de subsistencia es de 37.5 millones de individuos. Estima el valor de dicha población tras tres años, sabiendo que inicialmente solo hay 30 millones de individuos y tras un año la población disminuye en 1.8 millones de individuos. ¿Qué le va a pasar a la población tras mucho tiempo?

$$x_{n+1} = \nu x_n^2 + (1-\mu) x_n$$

$$0 < \mu < 1, \nu > 0$$

$$\mu^* = 37.5 = \frac{\mu}{\nu}$$

$$x_0 = 30$$

$$x_1 = 30 - 1.8 = 28.2 = \nu x_0^2 + (1-\mu) x_0 = 900\nu - 30\mu + 30$$

$$37.5 = \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \mu = 37.5 \nu$$

$$28.2 = 900\nu - 30\mu + 30 = 900\nu - 30 \cdot 37.5\nu + 30$$

$$\nu = \frac{1.8}{225} = 0.008$$

$$\mu = 0.3$$

$$x_{n+1} = 0.008 x_n^2 + 0.7 x_n$$

$$x_2 = 0.008 x_1^2 + 0.7 x_1 = 26.102 \text{ millones individuos}$$

$$x_3 = 23.771 \text{ millones individuos}$$

$0 < x_0 < \mu^* \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow \{x_n\} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{población tiende a la extinción}$

Problema 2 Estudia la estabilidad de los puntos fijos de

$$x_{n+1} = e^{-x_n}.$$

Sea $f(x) = e^{-x}$

Ptos. fijos: $f(x) = e^{-x} = x$

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) f no simétrica $\begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$

3) Ptos. corte $\begin{cases} \infty: e^{-x} = \frac{1}{e^x} \neq 0 \\ 0: f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow (0,1) \end{cases}$

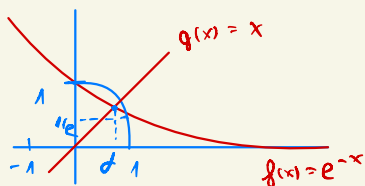
4) signo $\begin{cases} \text{Ceros: NO} \\ \text{Polos: NO} \end{cases}$ $\xrightarrow{\oplus}$ Positiva en \mathbb{R}

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

6) $f'(x) = -e^{-x} \neq 0$

$\xrightarrow{\ominus}$ Decreciente en \mathbb{R}

7) $f(1) = 1/e$, $f(-1) = e$



Vemos gráficamente $0 < \alpha < 1$
 $|f'(\alpha)| = |f(\alpha)| = \alpha < 1 \Rightarrow \alpha$ es
asintóticamente estable.

De otro modo:

$$f(x) = e^{-x} = x \Leftrightarrow x e^x = 1 \Leftrightarrow x = W(1) = 0.56714 < 1$$