CAPÍTULO 1

Espacios compactos

1. Definición y propiedades

Definición 1.1. Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto. Diremos que una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X es un *recubrimiento* de A si $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Si $A = X$, entonces $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Cuando (X, T) sea un espacio topológico, diremos que un recubrimiento es *abierto* si todos los conjuntos U_i son abiertos.

Definición 1.2. Si $A \subset X$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de A, un *subrecubrimiento* de $\{U_i\}_{i\in I}$ es una subfamilia $\{U_j\}_{j\in J}$, con $J \subset I$, tal que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Diremos que el subrecubrimento $\{U_j\}_{j\in J}$ es *finito* si J es finito.

Definición 1.3. Diremos que un espacio topológico (X, T) es *compacto* si de todo recubrimiento abierto de X puede extraerse un subrecubrimiento finito.

Ejemplo 1.4. (X, T_{CF}) es compacto. Para probarlo, tomamos un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X y tomamos $i(0) \in I$ tal que $U_{i(0)}$ es no vacío. Si $X = U_{i(0)}$ entonces $U_{i(0)}$ es un subrecubrimiento finito de X. Si $U_{i(0)} \neq X$ entonces $X \setminus U_{i(0)}$ es el conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Tomamos $U_{i(j)}$ tal que $x_j \in U_{i(j)}$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, de modo que $U_{i(0)}, U_{i(1)}, \ldots, U_{i(k)}$ es un subrecubrimiento finito de X.

Ejemplo 1.5. Si (X, T) es un espacio topológico y T tiene una cantidad finita de conjuntos, entonces (X, T) es compacto. En particular, (X, T) es compacto si X es finito.

Ejemplo 1.6. $(\mathbb{R}, T_u)$ no es un espacio compacto porque del recubrimiento abierto $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede extrarse ningún subrecubrimiento finito.

Ejemplo 1.7. Un espacio topológico discreto (X, T_D) es compacto si y sólo si X es finito. Sólo tenemos que probar que si (X, T_D) es compacto entonces X es finito. Para ello basta extraer un subrecubrimiento finito del recubrimiento abierto $\{\{x\}_{x\in X}\}$ de X.

Definición 1.8. Sea (X, T) un espacio topológico y $K \subset X$. Diremos que K es un *subconjunto compactor* de X si (K, T_K) es un espacio topológico compacto.

Proposición 1.9. Sea (X, T) un espacio topológico, $K \subset X$. Son equivalentes:

(1) K es un subconjunto compacto de (X, T).
(2) De todo recubrimiento de K por abiertos de X puede extraerse un subrecubrimiento finito.

Demostración. Supongamos que (K, T_K) es compacto. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de K por abiertos de (X, T). Entonces $\{U_i \cap K\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de (K, T_K). Por hipótesis, existe $J \subset I$ finito tal que

$$K = \bigcup_{j\in J} (U_j \cap K) \subset \bigcup_{j\in J} U_j,$$

y $\{U_j\}_{j\in J}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Supongamos ahora que de todo recubrimiento de K por abiertos de (X, T) puede extraerse un subrecubrimiento finito. Sea $\{U_i \cap K\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de (K, T_K), con $U_i \in T$.

Entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de K por abiertos de (X, T). Por hipótesis, existe $J \subset I$ finito tal que $K \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Entonces $K = \bigcup_{j\in J}(U_j \cap K)$. □

Teorema 1.10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces $[a, b]$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$.

Demostración. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $[a, b]$ por abiertos de $(\mathbb{R}, T_u)$. Definimos

$$\mathcal{C} = \big\{r \in [a, b] \,:\, [a, r] \text{ se puede recubrir por una cantidad finita de } U_i\big\}$$

y

$$s = \sup \mathcal{C}.$$

La demostración consta de tres partes:

- $s > a$.
- $s = b$.
- $b \in \mathcal{C}$.

Para ver ver que $s > a$ tomamos $i(a) \in I$ tal que $a \in U_{i(a)}$. Como $U_{i(a)}$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[a, a + \varepsilon] \subset U_{i(a)}$. Si $c \in [a, a + \varepsilon]$ entonces $[a, c] \subset [a, a + \varepsilon] \subset U_{i(a)}$, lo que implica que $[a, a + \varepsilon] \subset \mathcal{C}$ y $s \geqslant a + \varepsilon > a$.

Si $a < s < b$ tomamos $i(s) \in I$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U_{i(s)}$ y $s + \varepsilon < b$. Sea $c \in \mathcal{C} \cap (s - \varepsilon, s]$. Entonces $[a, c]$ se puede recubrir por una cantidad finita $U_{i(1)}, \dots , U_{i(k)}$ de abiertos del recubrimiento y, por tanto, $U_{i(1)}, \dots , U_{i(k)}, U_{i(s)}$ recubren $[a, s + \varepsilon/2]$. Esto implica que $s + \varepsilon/2 \in \mathcal{C}$ y contradice el que s sea el supremo de $\mathcal{C}$.

Por último veamos que $b \in \mathcal{C}$. El argumento es similar al anterior. Sea $U_{i(b)}$ un elemento del recubrimiento que contiene a b y sea $\varepsilon > 0$ tal que $(b - \varepsilon, b] \subset U_{i(b)}$ y $b - \varepsilon > a$. Existe entonces $c \in \mathcal{C} \cap (b - \varepsilon, b]$. El intervalo $[a, c]$ puede recubrirse por una cantidad finita $U_{i(1)}, \dots , U_{i(k)}$ de abiertos del recubrimiento y, por tanto, $U_{i(1)}, \dots , U_{i(k)}, U_{i(b)}$ recubren $[a, b]$. □

La condición de compacidad puede expresarse por medio de conjuntos cerrados en lugar de conjuntos abiertos.

Definición 1.11. Sea X un conjunto, y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene la *propiedad de la intersección finita* si

$$\bigcap_{j\in J} F_j \neq \varnothing$$

para todo $J \subset I$ finito.

Por ejemplo, una sucesión decreciente $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos no vacíos tiene la propiedad de la intersección finita.

El siguiente resultado proporciona una caracterización de la compacidad en términos de conjuntos cerrados. Su demostración consiste esencialmente en tomar complementarios.

Proposición 1.12. Sea (X, T) un espacio topológico. Son equivalentes:

(1) (X, T) es compacto.
(2) Toda familia de cerrados en (X, T) con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración. Supongamos que (X, T) es compacto y que $\{C_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Si $\bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$, tenemos que $\bigcup_{i\in I}(X \setminus C_i) = X$ y, por tanto, $\{X \setminus C_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de (X, T). Por la compacidad de (X, T), existe $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J}(X \setminus C_j)$. Tomando complementarios, $\varnothing = \bigcap_{j\in J} C_j$, lo que nos lleva a contradicción puesto que $\{C_i\}_{i\in I}$ no tendría la propiedad de la intersección finita.

Supongamos ahora que toda familia de cerrados en (X, T) tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de (X, T). Entonces

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \;\Rightarrow\; \varnothing = \bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i).$$

Si no existiera $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} U_j$ entonces, para todo $J \subset I$ finito se tendría que $\emptyset \neq \bigcap_{j\in J}(X \setminus U_j)$. Por tanto, la familia de cerrados $\{X \setminus U_i\}_{i\in I}$ tendría la propiedad de la intersección finita e intersección vacía, lo que es imposible. $\square$

Corolario 1.13. Si (X, T) es compacto y $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$.

Proposición 1.14. Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Si (X, T) es compacto entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de (Y, T').

En particular, si f es un homeomorfismo y (X, T) es compacto entonces (Y, T') es compacto.

Demostración. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ por abiertos de (Y, T'). Entonces $\{f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de (X, T). Podemos encontrar $J \subset I$ finito tal que $X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_i)$. Por tanto

$$f(X) \subset f\Big(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)\Big) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(V_j)) \subset \bigcup_{j\in J} V_j. \qquad \square$$

Proposición 1.15.

(1) Si (X, T) es compacto y K es un subconjunto cerrado de (X, T) entonces K es un subconjunto compacto de (X, T).
(2) Si (X, T) es Hausdorff y K es un subconjunto compacto de (X, T) entonces K es un subconjunto cerrado de (X, T).
(3) Si $f : (X, T) \to (Y, T')$ es continua, (X, T) es compacto e (Y, T') es Hausdorff, entonces f es cerrada.

Demostración. 1. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de K por abiertos de (X, T). Entonces $\{X \setminus K\} \cup \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de (X, T). Por la compacidad de (X, T) existe $J \subset I$ finito tal que

$$X \subset (X \setminus K)) \cup \Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big).$$

Por tanto:

$$K = K \cap X \subset (K \cap (X \setminus K) \cup \Big(\bigcup_{j\in J}(K \cap U_j)\Big) \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

2. Veamos que $X \setminus K$ es abierto. Sea $x \in X \setminus K$. Para cada $z \in K$ podemos tomar conjuntos abiertos U_z, V_z tales que $x \in U_z, z \in V_z$ y $U_z \cap V_z = \emptyset$. La familia $\{V_z\}_{z\in K}$ es un recubrimiento abierto de K. Podemos entonces encontrar un subconjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{z\in F} V_z$. Entonces $U = \bigcap_{z\in F} U_z$ es un abierto que contiene a x y verifica

$$U \cap K \subset U \cap \Big(\bigcup_{z\in F} V_z\Big) = \bigcup_{z\in F} U \cap V_z \subset \bigcup_{z\in F} U_z \cap V_z = \emptyset.$$

Por tanto $U \subset X \setminus K$ y x es punto interior de $X \setminus K$.

3. Es una consecuencia de 1 y 2. Si $C \subset X$ es cerrado en (X, T), es un subconjunto compacto. Como f es continua, $f(C)$ es compacto en (Y, T') y, como (Y, T') es Hausdorff, $f(C)$ es cerrado en (Y, T'). $\square$

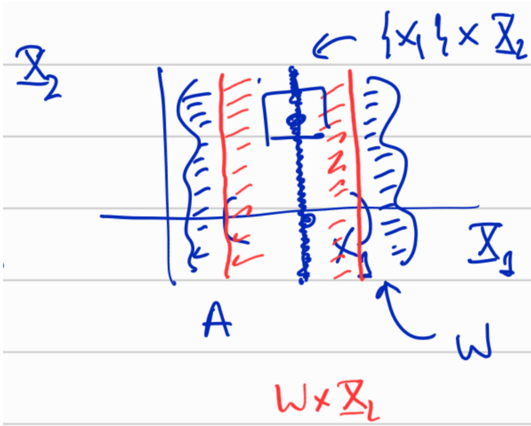
2. El Teorema de Tijonov

Probamos el teorema de Tijonov sobre compacidad de un producto de espacios topológicos. Únicamente demostraremos una versión sencilla para un producto *finito* de espacios topológicos.

Teorema 1.16 (Tijonov). Sean $(X_1, T_1), \ldots, (X_k, T_k)$ espacios topológicos. Entonces $X_1 \times \cdots \times X_k$ con la topología producto es compacto si y sólo si todos los espacios (X_i, T_i) son compactos.

En la demostración utilizaremos el siguiente resultado

Lema 1.17 (Lema del tubo). Sean $(X_1, T_1), (X_2, T_2)$ espacios topológicos, con (X_2, T_2) compacto. Sea $x_1 \in X_1$ y sea $A \in T_1 \times T_2$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset A$. Entonces existe $W \in T_1$ tal que $\{x_1\} \times X_2 \subset W \times X_2 \subset A$.



Demostración. Como A es abierto de $T_1 \times T_2$, para cada $z \in X_2$ tomamos $U_z \in T_1, V_z \in T_2$ tales que

$$(x_1, z) \in U_z \times V_z \subset A.$$

La familia $\{V_z\}_{z \in X_2}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto (X_2, T_2). Existe entonces un subconjunto finito $F \subset X_2$ tal que $\{V_z\}_{z \in F}$ es un subrecubrimiento de X_2. Si

$$W = \bigcap_{z \in F} U_z,$$

entonces

$$\{x_1\} \times X_2 \subset W \times \Big(\bigcup_{z \in F} U_z \Big) \subset \bigcup_{z \in F} U_z \times V_z \subset A. \qquad \square$$

Demostración del teorema de Tijonov. Si el producto $(X_1 \times \cdots \times X_k, T_1 \times \cdots \times T_k)$ es compacto, para cada $i = 1, \ldots, k$ el espacio (X_i, T_i) es compacto por ser la imagen de un espacio compacto por la proyección continua $\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_k \to X_i$.

Supongamos ahora que todos los espacios (X_i, T_i) son compactos. Probamos que el espacio producto es compacto por inducción sobre k. Al igual que en la demostración de que el producto de espacios conexos es conexo basta considerar el caso $k = 2$.

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $X_1 \times X_2$. Para cada $x \in X_1$, el subconjunto $\{x\} \times X_2$ es compacto, por lo que existe $J(x) \subset I$ finito tal que

$$\{x\} \times X_2 \subset \bigcup_{i \in J(x)} U_i.$$

Usando el lema del tubo, existe $W_x \in T_1$ tal que

$$\{x\} \times X_2 \subset W_x \times X_2 \subset \bigcup_{i \in J(x)} U_i.$$

La familia $\{W_x\}_{x \in X_1}$ es un recubrimiento abierto del espacio compacto X_1. Por tanto, existe $F \subset X_1$ finito tal que

$$X_1 \subset \bigcup_{x \in F} W_x.$$

Tenemos entonces que

$$X_1 \times X_2 \subset \bigcup_{x \in F} W_x \times X_2 \subset \bigcup_{x \in F} \Big(\bigcup_{i \in J(x)} U_i \Big),$$

que es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i \in I}$. $\square$

3. Espacios métricos compactos

Definición 1.18. Un espacio métrico es *acotado* si existen $x \in X$, $r > 0$ tales que $X = B(x, r)$.

La propiedad de ser acotado es equivalente a que el *diámetro* de X, $d(X)$, definido como el supremo

$$d(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$$

sea finito.

Proposición 1.19. Sea (X, d) un espacio métrico y K un subconjunto compacto de (X, T_d). Entonces K es cerrado y acotado.

Demostración. Ya sabemos que K es cerrado porque (X, T_d) es Hausdorff. Para ver que es acotado, fijamos $x \in X$ y consideramos el recubrimiento abierto $\{B(x, r)\}_{r>0}$ de (X, T_d). Por la compacidad de K podemos extraer un subrecubrimiento finito $B(x, r_1), \ldots, B(x, r_k)$. Tomando $r = \max\{r_1, \ldots, r_k\}$ se sigue que $K \subset B(x, r)$ y, por tanto, K es acotado. □

Una consecuencia inmediata del teorema de Tijonov y de la proposición anterior es

Teorema 1.20 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es compacto si y sólo si es cerrado y acotado (para la distancia euclídea).

Demostración. Supongamos que K es compacto. Entonces K es acotado para la distancia euclídea, que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$, y K es cerrado por ser $\mathbb{R}^n$ un espacio Hausdorff.

Supongamos ahora que K es cerrado y acotado para la distancia euclídea. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$K \subset \prod_{i=1}^{n} [-r, r].$$

Por el teorema de Tijonov, $\prod_{i=1}^{n} [-r, r]$ es compacto. Como K es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, es compacto. □

Proposición 1.21. Sea (X, T) un espacio topológico y $f : (X, T) \to (\mathbb{R}, T_u)$ una aplicación continua. Existen entonces $x_{\min}, x_{\max} \in X$ tales que

$$f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max})$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Sabemos que $f(X)$ es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, T_u)$. Por el resultado anterior, $f(X)$ es cerrado y acotado. Existen entonces el ínfimo $y_{\min}$ y el supremo $y_{\max}$ de $f(X)$, y pertenecen a $f(X)$. Existen entonces $x_{\min}, x_{\max} \in X$ tales que $f(x_{\min}) = y_{\min}$, $f(x_{\max}) = y_{\max}$. □

Definición 1.22. Un espacio topológico es *secuencialmente compacto* si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

Lema 1.23 (Número de recubrimiento de Lebesgue)**.** Sea (X, d) un espacio métrico secuencialmente compacto y $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X. Existe entonces $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $i(x) \in I$ con $B(x, r) \subset U_{i(x)}$.

Demostración. Supongamos que no existe $r > 0$ que verifica la propiedad del anunciado. Entonces, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X$ tal que $B(x_i, 1/i)$ no está contenida en ningún abierto del recubrimiento. Como (X, T_d) es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión $\{x_{\sigma(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $x \in X$, que pertenece a un cierto abierto U del recubrimiento. Esto nos lleva a contradicción: puesto que U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Como $x_{\sigma(i)}$ converge a x y $1/\sigma(i)$ converge a 0, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geqslant i_0$,

$$x_{\sigma(i)} \in B(x, \varepsilon/2), \qquad 1/\sigma(i) < \varepsilon/2.$$

Esto implica que

$$B(x_{\sigma(i)}, 1/\sigma(i)) \subset B(x, \varepsilon) \subset U \tag{3.1}$$

para todo $i \geqslant i_0$, lo que es imposible por la elección de la sucesión. Para probar (3.1) simplemente comprobamos que, si $d(z, x_{\sigma(i)}) < 1/\sigma(i)$, entonces:

$$d(z, x) \leqslant d(z, x_{\sigma(i)}) + d(x_{\sigma(i)}, z) < \frac{1}{\sigma(i)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorema 1.24. Sea (X, d) un espacio métrico. Son equivalentes:

(1) (X, T_d) es compacto.
(2) (X, T_d) es secuencialmente compacto.

Demostración. Supongamos en primer lugar que (X, T_d) es compacto. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Definimos

$$F_i = \overline{\{x_j : j > i\}}.$$

La familia $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Por la compacidad de (X, T_d), la intersección $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$. Si $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ entonces x es límite de una subsucesión de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Para probar esta propiedad, como $x \in F_1$, se tiene que $B(x, 1) \cap \{x_j : j > 1\} \neq \emptyset$, y tomamos

$$x_{\sigma(1)} \in B(x, 1), \text{ con } \sigma(1) > 1.$$

Como $x \in F_{\sigma(1)}$, tomamos

$$x_{\sigma(2)} \in B(x, \frac{1}{2}), \text{ con } \sigma(2) > \sigma(1).$$

Construimos inductivamente una subsucesión $\{x_{\sigma(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_{\sigma(i)} \in B(x, \frac{1}{i}), \text{ con } \sigma(i) > \sigma(i-1).$$

Por construcción, el límite de $\{x_{\sigma(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es x.

Supongamos que (X, T_d) es secuencialmente compacto, y que $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto del que no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito. Sea $r > 0$ un número de Lebesgue del recubrimiento $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Tomamos $x_1 \in X$ y un conjunto $U_{i(1)}$ tal que $B(x_1, r) \subset U_{i(1)}$. Como $U_{i(1)}$ no recubre a X, existe $x_2 \notin U_{i(1)}$, y tomamos un abierto del recubrimiento $U_{i(2)}$ tal que $B(x, r) \subset U_{i(2)}$. Por inducción, construimos $x_k \in X$ y $U_{i(k)}$ tales que:

$$x_k \notin U_{i(1)} \cup \ldots \cup U_{i(k-1)}, \qquad B(x_k, r) \subset U_{i(k)}.$$

Si $a < b$ son números enteros, entonces $x_b \notin U_{i(a)}$. Como $B(x_a, r) \subset U_{i(a)}$ se tiene que $d(x_a, x_b) \geqslant r > 0$ para todo $a < b$. La sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no admite entonces ninguna subsucesión convergente.

□