Topología I. Primera prueba de evaluación continua
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

7 de noviembre de 2022

1.– Sea X un conjunto y $A \subset X$ tal que $\#A \geqslant 2$ y $A \neq X$. Se define la familia S de subconjuntos de X como:

$$S = \{U \subset X \,:\, U \cap A \neq \varnothing\} \cup \{\varnothing\}.$$

1. ¿Es S una topología o base de una topología en X?
2. ¿Cuál es la menor topología $T(S)$ que contiene a S?
3. ¿Cuándo es $(X, T(S))$ separable?

La familia S no es una topología porque la intersección de dos subconjuntos de S no es, en general, un subconjunto de S. Por ejemplo, sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, y sea $x \notin A$. Entonces $U_1 = \{x, a_1\}$, $U_2 = \{x, a_2\}$ pertenecen a S puesto que $U_i \cap A = \{a_i\} \neq \varnothing$ para $i = 1, 2$. Pero $U_1 \cap U_2 = \{x\} \notin S$.

La familia S tampoco es base de una topología en X. Tomando los mismos conjuntos U_1, U_2, tenemos que no existe ningún elemento B de S tal que $x \in B \subset U_1 \cap U_2$.

Puesto que $X = \bigcup_{B \in S} B$ podemos calcular una base $\mathcal{B}(S)$ de la menor topología $T(S)$ que contiene a S como

$$\mathcal{B}(S) = \Big\{ \bigcup_{i \in I} S_i \,:\, S_i \in S, I \text{ finito} \Big\}$$

Si $x \notin A$ entonces, con la notación anterior, $\{x\} = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}(S)$. Si $a \in A$ entonces $\{a\} \in S \subset \mathcal{B}(S)$. Por tanto $T(S) = T_D$, la topología discreta en X.

Un espacio topológico es separable si contiene un subconjunto denso y numerable. Al ser $T(S) = T_D$, sabemos que $(X, T(S))$ es separable si y sólo si X es numerable.

Duración de la prueba: 45 minutos