Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2022/23)

Resultados de estabilidad

Nota 0.1 ***(Carácter local)*** *Si $f_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$ y $f_2 : \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ tienen una solución común $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y coinciden en $\mathcal{O}_\varepsilon$ para algun $\varepsilon > 0$, la estabilidad/estabilidad asintótica en ambos sistemas dinámicos es equivalente.*

1 Estabilidad mediante el estudio geométrico en torno a un punto fijo

Lema 1.1 *Sea $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ continua y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo para el que existe un entorno (bilateral) $\mathcal{U} = (\alpha - \varepsilon_0, \alpha + \varepsilon_0)$ tal que*

$$\begin{cases} \alpha < f(x) < x & si \quad x \in \mathcal{D} \cap (\alpha, \alpha + \varepsilon_0) \\ x < f(x) < \alpha & si \quad x \in \mathcal{D} \cap (\alpha - \varepsilon_0, \alpha) \end{cases} .$$

Entonces α es asintóticamente estable.

Lema 1.2 *Sea $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ continua y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo para el que existe un entorno a la derecha $\mathcal{U} = (\alpha, \alpha + \varepsilon_0)$ tal que $x < f(x)$ si $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Entonces α es inestable.*

Lema 1.3 *Sea $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ continua y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo para el que existe un entorno a la izquierda $\mathcal{U} = (\alpha - \varepsilon_0, \alpha)$ tal que $f(x) < x$ si $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Entonces α es inestable.*

2 Estabilidad de un punto fijo usando la derivada

Teorema 2.1 *Sean $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo interior. Supongamos que f es derivable en α. Se tiene:*

- *Si $|f'(\alpha)| < 1$, entonces α es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*
- *Si $|f'(\alpha)| > 1$, entonces α es un punto de equilibrio inestable.*

Teorema 2.2 *Sean $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ una función de clase 2 y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo interior a $\mathcal{D}$ tal que $f'(\alpha) = 1$.*

1. *Si $f''(\alpha) \neq 0$, entonces α es inestable.*
2. *Si $f''(\alpha) = 0$ y $f'''(\alpha) < 0$, entonces α es asintóticamente estable.*
3. *Si $f''(\alpha) = 0$ y $f'''(\alpha) > 0$, entonces α es inestable.*

(En clase hemos supuesto que f es de clase 3 para los dos últimos apartados, pero basta con que exista $f'''(\alpha)$)

Teorema 2.3 *Sean $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ una función de clase 3 y $\alpha \in \mathcal{D}$ un punto fijo interior a $\mathcal{D}$ tal que $f'(\alpha) = -1$.*

1. *Si $2f'''(\alpha) + 3f''(\alpha) < 0$, entonces α es inestable.*
2. *Si $2f'''(\alpha) + 3f''(\alpha) > 0$, entonces α es asintóticamente estable.*