

Problemas Tema 1. Topología I

Doble grado en ingeniería informática y matemáticas

Curso 2022–23

- 1.– Describir todas las topologías que existen en un conjunto de dos elementos.
- 2.– En los siguientes casos, estudiar si T es una topología en X .
- (a) $X \neq \emptyset$, $T = \{\emptyset, A_1, \dots, A_k, X\}$, donde $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k$ forman una familia creciente de subconjuntos de X .
 - (b) $X \neq \emptyset$ y $T = \mathcal{P}(A) \cup \{X\}$, donde $A \subset X$ y $\emptyset \neq A \neq X$ ($\mathcal{P}(A)$ es la familia de todos los subconjuntos de A).
 - (c) $X = \mathbb{N}$ y $T = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, donde $U_n = [n, +\infty) \cap \mathbb{N}$.
- 3.– Sea X un conjunto no vacío y $A, B \subset X$ con $\emptyset \neq A, B \neq X$. ¿Qué propiedades deben cumplir A y B para que la familia $T = \{\emptyset, A, B, X\}$ sea una topología en X ?
- 4.– Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el semiplano $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$.
- (a) Demostrar que la familia $T = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ es una topología en \mathbb{R}^2 .
 - (b) Estudiar si $T \subset T_u$ o $T_u \subset T$ (T_u es la topología usual de \mathbb{R}^2).
 - (c) Describir la familia de cerrados C_T .
- 5.– (Topología fuerte en un punto). Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Definimos:

$$\mathcal{C} = \{F \subset X : x_0 \in F\} \cup \{F \subset X : F \text{ es finito}\}.$$

Probar que existe una única topología T en X cuya familia de cerrados es \mathcal{C} . Describir los abiertos de T .

- 6.– (Topología inducida en un subconjunto). Sea (X, T) un espacio topológico, y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que la familia de subconjuntos de A definida por:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T\}$$

en una topología en A .

- 7.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset B$ dos subconjuntos no vacíos de X . Probar que $T_A = (T_B)_A$.

- 8.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si \mathcal{B} es una base de T , probar que:

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de T_A .

- 9.– Sea (X, T) un espacio topológico y sea \mathcal{B} una base de T . Probar que, para cada punto $x \in X$, la familia:

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$$

es una base de entornos abiertos del punto x .

10.- Sea (X, T) un espacio topológico, $A \subset X$, $x \in X$ y \mathcal{B}_x una base de entornos de x . Probar que son equivalentes:

- (a) $x \in \overline{A}$.
- (b) Para todo $B \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $B \cap A \neq \emptyset$.

11.- (Semiplano de Moore). En $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ se considera la familia:

$$\mathcal{B}_M = \{B((x, y), \varepsilon) : y > 0, \varepsilon \in (0, y)\} \cup \{B((x, y), y) \cup \{(x, 0)\} : y > 0\}.$$

Probar que existe una única topología T_M en \mathbb{R}^2 tal que \mathcal{B}_M es base para T_M .

12.- En \mathbb{R} se consideran las familias:

$$T_1 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}, \quad T_2 = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

- (a) Probar que T_1 es una topología en \mathbb{R} y que T_2 no lo es.
- (b) Demostrar que T_2 es base de una única topología T en \mathbb{R} .
- (c) Estudiar si $T_u \subset T_1$, $T_1 \subset T_u$, $T_u \subset T$ o $T \subset T_u$.
- (d) En (\mathbb{R}, T) , ¿es la intersección arbitraria de conjuntos abiertos un conjunto abierto?

13.- Sea (X, T) un espacio topológico, $x \in X$, \mathcal{B}_x una base de entornos de x . Probar que la familia:

$$\mathring{\mathcal{B}}_x = \{\mathring{B} : B \in \mathcal{B}_x\}$$

es una base de entornos abiertos de x .

14.- En \mathbb{R} se considera la familia de subconjuntos:

$$T = \{U \subset \mathbb{R} : 0 \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R} : (-1, 1) \subset U\}.$$

- (a) Probar que T es una topología en \mathbb{R} . Describir los cerrados de T .
- (b) Encontrar una base \mathcal{B} para T con la menor cantidad posible de abiertos.
- (c) Dado $x \in \mathbb{R}$, encontrar una base de entornos de x en (\mathbb{R}, T) .
- (d) Calcular la clausura, el interior y la frontera de $[0, 1]$ en (\mathbb{R}, T) .

15.- Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

- (a) $A = \text{int}(A)$ si y solo si A es abierto.
- (b) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.
- (c) Si $A \subset B$, entonces $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$.
- (d) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
- (e) $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

16.- Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar que:

- (a) $A = \overline{A}$ si y solo si A es cerrado.
- (b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- (c) Si $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

17.- Sea (X, T) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar

- (a) A es abierto si y solo si $A \cap \partial A = \emptyset$.
- (b) A es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$.
- (c) A es abierto y cerrado si y solo si $\partial A = \emptyset$.
- (d) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Probar con un ejemplo que no se da la igualdad en general.

18. Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$. Demostrar que $\partial \overset{\circ}{A} \subset \partial A$. Describir una situación en la que $\partial \overset{\circ}{A} = \partial A$ y otra en la que $\partial \overset{\circ}{A} \neq \partial A$.

19. Sea X un conjunto y $A \subset X$ con $\emptyset \neq A \neq X$. Probar que la familia:

$$\mathcal{B} = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$$

es base de una topología T en X . Calcular el interior y la clausura de A en (X, T) .

20. En (\mathbb{R}, T_{CF}) calcular la clausura, el interior y la frontera de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\{1, 2\}$.

21. Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Sea $a \in A$ y \mathcal{B}_a una base de entornos de a en (X, T) . Probar que la familia

$$(\mathcal{B}_a)_a = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_a\}$$

es una base de entornos de a en (A, T_A)

22. Calcular A' y $\text{ais}(A) = \{\text{puntos aislados de } A\}$ en los siguientes casos:

- (a) (X, T_t) y $A \subset X$ con $\#A \geq 2$,
- (b) (X, T_D) y $A \subset X$,
- (c) (X, T_{CF}) y $A \subset X$ finito,
- (d) (\mathbb{R}, T_S) y $A = (0, 1]$.

23. Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que $\overline{A} = A' \cup \text{ais}(A)$.

24. Se considera la recta de Sorgenfrey (\mathbb{R}, T_S) .

- (a) Calcular la clausura de los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\frac{-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
- (b) ¿Cuál es la frontera de los conjuntos $(a, b]$ y $[a, b)$?

25. (Recta diseminada). En \mathbb{R} se considera la familia de subconjuntos:

$$T = \{A \cup B : A \in T_u, B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

- (a) Demostrar que T es una topología en \mathbb{R} con $T_u \subset T$.
- (b) Probar que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d)$ con $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son cerrados en (\mathbb{R}, T) .
- (c) Calcular la clausura, el interior y la frontera en (\mathbb{R}, T) de $[0, 1]$ y $[0, \sqrt{2})$.
- (d) Calcular una base de entornos de $x \in \mathbb{R}$ en (\mathbb{R}, T) .
- (e) Obtener la clausura, el interior y la frontera de $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

26. Consideramos el subconjunto $A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\}$ de \mathbb{R} con la topología $(T_u)_A$ inducida en A por T_u .

- (a) Estudiar si los conjuntos $\{5\}$ y $(1, 3)$ son abiertos o cerrados en $(A, (T_u)_A)$.
- (b) Comprobar si $[0, 1/2]$ es entorno de 0 en $(A, (T_u)_A)$.
- (c) Calcular la clausura de $[0, 1)$ en $(A, (T_u)_A)$.

27.– Probar que en el semiplano de Moore (\mathbb{R}^2, T_M) , el eje de abscisas $y = 0$ es un subconjunto discreto.

28.– Sea T_1 y T_2 dos topologías sobre un conjunto X con $T_1 \subset T_2$. Dado $A \subset X$, ¿existe alguna relación entre la clausura y el interior de A en (X, T_1) y en (X, T_2) ?

29.– Probar que un espacio topológico (X, T) admite un subconjunto denso no trivial si y sólo si la topología T no es la topología discreta.

30.– Sea X un conjunto no vacío y $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición de X . Demostrar que existe una única topología T en X tal que $\{A_i\}_{i \in I}$ es base de T . Probar que los abiertos de T y los cerrados de T coinciden. ¿Es, en general, (X, T) un espacio de Hausdorff?

31.– Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subconjunto no vacío, se define la aplicación $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ por la igualdad:

$$d_A(a, b) = d(a, b), \quad \text{para todo par de puntos } a, b \in X.$$

- (a) Demostrar que (A, d_A) es un espacio métrico.
- (b) Demostrar que $(T_d)_A = T_{d_A}$ (las topologías inducidas en A por T_d y por d_A coinciden).

32.– Probar que un espacio topológico AN-II es AN-I.

33.– Probar que la recta de Sorgenfrey es AN-I pero no es AN-II.

34.– Sea (X, T_D) un espacio con la topología discreta. Probar

- (a) (X, T_D) es AN-I.
- (b) (X, T_D) es AN-II si y solo si X es numerable.

35.– En un espacio topológico (X, T) una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno $U \in \mathcal{N}_x$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in U$ para todo $i \geq i_0$. Si la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a x escribiremos $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ y diremos que x es límite de la sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) En un espacio (X, T_t) con la topología trivial cualquier sucesión en X converge a todos los puntos de X (los límites de sucesiones en espacios topológicos no son únicos).
- (b) En un espacio topológico Hausdorff, una sucesión convergente tiene un único límite.
- (c) Sea (X, T) un espacio topológico cualquiera, $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Supongamos que existe una sucesión $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que converge a un punto $x \in X$. Probar que $x \in \bar{A}$.
- (d) Sea (X, T) un espacio topológico AN-I, $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $x \in \bar{A}$. Probar que existe una sucesión de puntos de A que converge a x . Dar un contraejemplo cuando (X, T) no es AN-I (considerar los números irracionales \mathbb{I} en (\mathbb{R}, T_{CN}) y usar el ejercicio 40).

36.– Sea (X, T) un espacio topológico, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X , $x \in X$, y \mathcal{B}_x una base de entornos de x . Probar que son equivalentes:

- (a) $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$.
- (b) Para todo $B \in \mathcal{B}_x$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in B$ para todo $i \geq i_0$.

37.– Sea (X, d) un espacio métrico, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X , y $x \in X$. Probar que son equivalentes:

- (a) $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ en (X, T_d) .
- (b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_i) < \varepsilon$ para todo $i \geq i_0$.

38.– Sea (X, T_D) un espacio topológico con la topología discreta. Probar que una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en X converge a $x \in X$ si y solo si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x$ para todo $i \geq i_0$.

39.– Consideramos en \mathbb{R} la topología de los complementos numerables T_{CN} . Probar que una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R} converge a $x \in \mathbb{R}$ si y solo si existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = x$ para todo $i \geq i_0$.

40.– Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Probar que:

- (a) Si (X, T) es Hausdorff, entonces (A, T_A) es Hausdorff.
- (b) Si (X, T) es AN-I, entonces (A, T_A) es AN-I.
- (c) Si (X, T) es AN-II, entonces (A, T_A) es AN-II.
- (d) Si (X, T) es metrizable, entonces (A, T_A) es metrizable.

41.– Probar que un espacio topológico AN-II es separable.

42.– Probar que un espacio métrico es AN-II si y sólo si es separable.