Problemas Tema 2. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Curso 2022–23

1.– Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Probar que son equivalentes:

(1) f es continua.
(2) $f^{-1}(B') \in T$ para todo elemento B' de una base $\mathcal{B}'$ de T'.
(3) $f^{-1}(S') \in T$ para todo elemento S' de una subbase $\mathcal{S}'$ de T'.

2.– Sea $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación entre dos espacios topológicos. ¿Es equivalente la continuidad de f a alguna de las dos siguientes propiedades?

(1) $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(\overline{C})$ para todo $C \subset Y$.
(2) $f^{-1}(\operatorname{int}(C)) \subset \operatorname{int}(f^{-1}(C))$ para todo $C \subset Y$.

3.– Sean f, g dos aplicaciones continuas de un espacio topológico (X, T) en $(\mathbb{R}, T_u)$. Probar que las aplicaciones suma $f + g$ y producto $f \cdot g$ son aplicaciones continuas de (X, T) en $(\mathbb{R}, T_u)$.

4.– Se define la aplicación $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (\mathbb{R}, T_u)$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en todos sus puntos.

5.– Una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ entre espacios métricos es *lipschitziana* si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant K\, d(x, y), \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Probar que una aplicación lipschitziana es continua.

6.– Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. Probar que la aplicación $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ definida por $f(z) = d(z, x)$ para todo $z \in X$ es lipschitziana. (d_u es la distancia usual en $\mathbb{R}$).

7.– Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que la aplicación $\delta_A : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ definida por:

$$\delta_A(z) = \inf\{d(z, a) : a \in A\}$$

es lipschitziana y, por tanto, continua.

8.– Probar que las traslaciones son homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual.

9.– Probar que las bolas en $\mathbb{R}^n$ con las distancias asociadas a las normas

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

son homeomorfas.

10.– Probar que cualquier afinidad (aplicación afín y biyectiva) en $\mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

11.– Probar que el cilindro

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

es homeomorfo al hiperboloide de una hoja

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\right\}.$$

Ambos conjuntos tienen la topología inducida por la topología ususal de $\mathbb{R}^3$.

12.– Sean (X, T), (Y, T') espacios topológicos y $f : (X, T) \to (Y, T')$ una aplicación continua. Se define el grafo de f como el subconjunto $G(f)$ de $X \times Y$ definido por:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Probar que (X, T) es homeomorfo a $G(f)$ con la topología inducida en $G(f)$ por la topología producto $T \times T'$.

13.– Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Se define la relación de equivalencia en X:

$$(x, y)\, R\, (x', y') \Leftrightarrow y = y', |x - x'| = 0, 1.$$

Probar que X/R es homeomorfo al cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

14.– Sea (X, T) un espacio topológico. Probar que es Hausdorff si y sólo si el subconjunto $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ es cerrado en $(X \times X, T \times T)$.

15.– Sea $f, g : (X, T) \to (Y, T')$ dos aplicaciones continuas. Supongamos que (Y, T') es Hausdorff. Probar que:

(1) El conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
(2) El grafo de f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es cerrado en $X \times Y$.
(3) Si f y g coinciden en un conjunto denso de X, entonces $f = g$.