Tema 2 Aplicaciones entre espacios topológicos

Definición

Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es **continua** en $x_0\in X$ si:

$$\forall U'\in U_{f(x_0)}^{\tau'}\ \exists U\in U_{x_0}^{\tau}: f(U)\subset U'\Leftrightarrow U\subset f^{-1}(U')\Leftrightarrow f^{-1}(U')\in U_{x_0}$$

Se dice que f es **continua** en X si es continua para todo $x_0\in X$.

Consecuencia

Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es un aplicación y B'es una base de τ' entonces:

(a) f es continua en $x_0\in X\Leftrightarrow f^{-1}(O')\in U_{x_0}\ \ \forall O'\in B': f(x_0)\in O'$

(b) f es continua en $X\Leftrightarrow f^{-1}(O')\in\tau\ \ \forall O'\in B'\subset\tau'$

Teorema

Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es un aplicación entonces son equivalentes:

(i) f es continua en X

(ii) $f^{-1}(O')\in\tau\ \ \forall O'\in\tau'$

(iii) $f^{-1}(F')\in\mathcal{F}\ \ \forall F'\in\mathcal{F}'$

(iv) $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}\ \ \forall A\subset X$

Definición

Una aplicación $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es un **homeomorfismo** si es continua y tiene inversa f^{-1}continua.

Consecuencia

Si $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ es un aplicación biyectiva entonces son equivalentes:

(a) f es un homeomorfismo

(b) f y f^{-1} son abiertas (o cerradas)

(c) f es continua y abierta (o cerrada)

(d) $f(\bar{A})=\overline{f(A)}\ \ \forall A\subset X$

(e) $f(A^\circ)=f(A)^\circ\ \ \forall A\subset X$

Ejercicio -1-

Probar que $\boldsymbol{S^2 - \{N\} \cong \pi \equiv z = 0 \cong R^2}$

Solución

Ejercicio -2-

Probar que la esfera S^2 es homeomorfa a cualquier elipsoide de R^3.

Solución

Ejercicio -3-

Probar que el cono $\{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = z^2 \quad z > 0\}$ es homeomorfo al cilindro $S^1 x R$.

Solución

Ejercicio -4-

Probar que el toro $T = \left\{(x, y, z) \in R^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3\right)^2 + z^2 = 1\right\}$ **es homeomorfo a** $S^1 x S^1$ **de** R^4**.**

Solución

Ejercicio -5-

Probar que el paraboloide $P = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = z\}$ es homeomorfo al plano R^2.

Solución

Ejercicio -6-

Se considera N con la topología τ de los divisores, esto es, $\mathfrak{B} = \{U_n : n \in N\}$ es base de τ, con U_n el conjunto de los divisores de $n \in N$. Probar que una aplicación $f: N \to N$ es continua si y solo si f respeta la divisibilidad (esto, es si m divide a n entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

Solución

Ejercicio -7-

Encontrar una aplicación $g:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ y un denso $A\subset X_1$ tal que $g_{/A}$ es continua, aunque g no sea continua en ningún punto de A.

Solución

Ejercicio -8-

Probar que las aplicaciones continuas y sobreyectivas aplican conjuntos densos en conjuntos densos. Comprobar que la parte entera $E: (\boldsymbol{R}, \tau_u) \to (\boldsymbol{Z}, \tau_{uZ})$ conserva los conjuntos densos, aunque no es continua.

Solución

Caracterización de identificación

Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ equivalen:

(i) f es una identificación

(ii) f es continua, abierta y sobreyectiva

(iii) f es continua, cerrada y sobreyectiva

Resultado interesante para los ejercicios

Sean $X \subset R^n$ $Y \subset R^m$ dotados de la topología usual. Se tiene que X es cerrado y sea $f: X \to Y$ continua y sobreyectiva.

Si $f^{-1}(A) \subset X$ es acotado para cada $A \subset Y$ acotado, entonces f es una identificación. En particular, si X es también acotado, entonces f es una identificación.

Ejercicio -9-

Demostrar que la aplicación $f: \left(S^1, \tau_{u/S^1}\right) \longrightarrow \left(S^1, \tau_{u/S^1}\right)$ dada por:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

está bien definida y es una identificación. Deducir que $RP^1 \cong \left(S^1, \tau_{u/S^1}\right)$.

Solución

Ejercicio -10-

En R se considera la relación de equivalencia

$$tRs \Leftrightarrow s - t = 2\pi m \ \ para\ alg\text{ú}n\ m \in Z$$

Demostrar que el cociente $\left(\mathcal{R}/_{R}, {\tau_u}/_{R}\right) \cong \left(S^1, \tau_{u/S^1}\right)$

Solución

Ejercicio -11-

Probar que $f:(R^3,\tau_u)\longrightarrow\left(S^1,\tau_{u/S^1}\right)$ **dada por**

$$f(x,y,z)=\left(cos(2\pi z),sen(2\pi z)\right)$$

es una identificación. Deducir que

$$\left({R^3}/{R},{\tau_u}/{R}\right)\cong\left(S^1,\tau_{u/S^1}\right)$$

donde R **es la relación de equivalencia en** R^3 **dada por**

$$(x,y,z)R(x',y',z')\Leftrightarrow z-z'\in Z$$

Solución

Ejercicio -12-

Un conjunto no vacío $U \subseteq R$ es simétrico si para cada $x \in U$ se cumple $-x \in U$. Sea la topología:

$$\tau = \{U \subseteq R : U\ es\ simétrico\} \cup \{\emptyset\}$$

Demostrar que si $f: (R, \tau) \longrightarrow (R, \tau)$ es una función impar (es decir, $f(-x) = -f(x) \forall x \in R$) entonces es continua y abierta.

Solución

Ejercicio -13-

En $X = [-2, 2]$ con la topología usual inducida, $\tau = \tau_{u/X}$ se define la relación de equivalencia

$$\boldsymbol{xRy \Leftrightarrow x = y} \text{ ó } \boldsymbol{x, y \in [-2, -1] \cup [1, 2]}$$

Demostrar que el cociente $\left({}^{X}\!/_{\boldsymbol{R}}, {}^{\tau}\!/_{\boldsymbol{R}}\right) \cong \left(\boldsymbol{S^1}, \boldsymbol{\tau_{u/S^1}}\right)$

Solución

Ejercicio -14-

En $X = Rx\{-1,1\}$ **se define la relación de equivalencia**

$$(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \text{ ó } x_1, y_1 \leq -2 \text{ ó } x_1, y_1 \geq 2$$

(a) **Estudiar si la proyección** $p\colon (X, \tau_{u/X}) \to \left(X/_R, {\tau_{u/X}}/_R \right)$ **es abierta o cerrada.**

(b) **Probar que** $\left(X/_R, {\tau_{u/X}}/_R \right) \cong (S^1, \tau_{u/S^1})$.

Solución

Ejercicio -15-

Sea τ_0 la topología del punto incluido en R asociada a 0. Decidir razonadamente si $\tau_0 x \tau_0$ coincide con la topología del punto incluido $\tau_{(0,0)}$ en R^2 asociada al punto $(0,0)$.

Solución

Ejercicio -16-

Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f:(R,\tau_0) \to (R,\tau_u)$ $f(x) = x^2$, donde

τ_0 es la topología del punto incluido para $p = 0$.

Solución

Ejercicio -17-

Se considera en $\boldsymbol{R}$ la topología $\boldsymbol{\tau}$ que tiene como base $\boldsymbol{\beta} = \{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[: \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}) \to (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau})$ dada por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ si $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}$ si $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.

Solución

Ejercicio -18-

Estudiar la continuidad de la aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_S}) \rightarrow (\boldsymbol{R^2}, \boldsymbol{\tau_u x \tau_S})\ \boldsymbol{f(x) = (x, x+1)}$.

Solución

Ejercicio -19-

Sea$(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}_{inc})$ para $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$, $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}_{exc})$ para $\boldsymbol{q} = \mathbf{1}$ y la aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}_{inc}) \rightarrow (\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}_{exc})$, dada por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{2}$. Estudiar si $\boldsymbol{f}$ es o no continua y probar que $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$.

Solución

Ejercicio -20-

Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f:(R,\tau_u)\to(R,\tau_d)$, dada por $f(x)=senx$.

Solución

Ejercicio -21-

Probar que los espacios de cada pareja son homeomorfos entre sí:

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{1}\ \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}\ \boldsymbol{B} = [\mathbf{0},\mathbf{1}]$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{y} > \mathbf{0}\}\ \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 < \mathbf{1}\ \}$

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{A} =]\mathbf{0},\mathbf{1}[\ \cup [\mathbf{2},\mathbf{3}]\ \boldsymbol{B} =]\mathbf{5},\mathbf{7}[\ \cup [\mathbf{10},\mathbf{12}]$

Solución

Ejercicio -22-

Se considera el conjunto $X = [-2,0[\, \cup\, [1,9[$ y la circunferencia unidad

$$S^1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

(a) **Encontrar una aplicación biyectiva $f: X \to S^1$.**

(b) **Describir los entornos (básicos) de la topología τ tal que**

$$f: (X,\tau) \to \left(S^1, \tau_{u/S^1}\right)$$

es un homeomorfismo.

(c) **Estudiar si la aplicación identidad**

$$I: (X,\tau) \to \left(X, \tau_{u/X}\right)$$

es continua, abierta o cerrada.

Solución

Ejercicio -23-

Sea $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_S})$ **la recta de** $\boldsymbol{Sorgenfrey}$. **Definamos** $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{RxR}, \boldsymbol{\tau_S x \tau_S}) \longrightarrow (\boldsymbol{RxR}, \boldsymbol{\tau_S x \tau_S})$ **como** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}^3)$**. Analizar si** $\boldsymbol{f}$ **es continua, abierta o cerrada.**

Ejercicio -24-

Un aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau}) \longrightarrow (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau}')$ es propia si para cada $\boldsymbol{C}'$ compacto de $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau}')$ se verifica que $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{C}')$ es compacto en $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$. Probar que si $\boldsymbol{f}$ es propia, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ es de Hausdorff e $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau}')$ es compacto, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua.

Ejercicio -25-

Sea $\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\tau}) \to (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\tau}')$ una aplicación entre espacios topológicos continua y sobreyectiva. Supongamos que $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}'$ son relaciones de equivalencia en $\boldsymbol{X}$ y en $\boldsymbol{Y}$, respectivamente, tales que

$$\boldsymbol{xRy} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{R}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$$

Consideremos la aplicación: $\tilde{\boldsymbol{f}}:\left({}^{\boldsymbol{X}}\!/_{\boldsymbol{R}}, {}^{\boldsymbol{\tau}}\!/_{\boldsymbol{R}}\right) \to \left({}^{\boldsymbol{Y}}\!/_{\boldsymbol{R}'}, {}^{\boldsymbol{\tau}'}\!/_{\boldsymbol{R}'}\right)$ dada por $\tilde{\boldsymbol{f}}([\boldsymbol{x}]) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$

a.- Probad que $\tilde{\boldsymbol{f}}$ está bien definida, es continua y biyectiva.

b.- Demostrar que, si $\boldsymbol{f}$ es una identificación, entonces $\tilde{\boldsymbol{f}}$ es una identificación. En tal caso, ¿es $\tilde{\boldsymbol{f}}$ un homeomorfismo?

Ejercicio -26-

Sea $A = \{(x, y) \in R^2 : xy = 0\}$. **Entonces para cada aplicación continua y sobreyectiva** $f : (R, \tau_u) \to \left(A, \tau u_{/A}\right)$ **se verifica que** $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ **contiene al menos 3 puntos.**

Ejercicio -27-

Se considera $\boldsymbol{f}\colon\left([\mathbf{0},\mathbf{1}],\boldsymbol{\tau u}_{/[\mathbf{0},\mathbf{1}]}\right)\to(\{\mathbf{0},\mathbf{1}\},\boldsymbol{\tau})$ donde $\boldsymbol{\tau}=\{\emptyset,\{\mathbf{1}\},\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\}$ y se define como $\boldsymbol{f}=\mathbf{1}$ en $\left[\mathbf{0},{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\right[$ y $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ en $\left[{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}},\mathbf{1}\right]$. Probad que $\boldsymbol{f}$ es una identificación pero no es abierta ni cerrada.

Ejercicio -28-

Sea (R^2, τ) el espacio topológico producto de (R, τ_u) y (R, τ_{CF}).

a.- Estudiar si la aplicación $f: (R^2, \tau_u) \to (R^2, \tau)$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)\ \ \forall (x_1, x_2) \in R^2$ es continua, abierta o cerrada.

b.- Lo mismo para $p_1 \circ f$, con $p_1: (R^2, \tau) \to (R, \tau_u)$ proyección.

c.- Razonar si algún cociente de (R^2, τ) puede ser homeomorfo a (R, τ_{CF}).

Ejercicio -29-

Sea (R^2, τ) el espacio topológico producto de (R, τ_u) y (R, τ_{CF}).

a.- Estudiar si la aplicación $f: (R^2, \tau_u) \to (R^2, \tau)$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \ \ \forall (x_1, x_2) \in R^2$$ **es continua, abierta o cerrada.**

b.- Lo mismo para $p_1 \circ f$, con $p_1: (R^2, \tau) \to (R, \tau_u)$ proyección.

c.- Razonar si algún cociente de (R^2, τ) puede ser homeomorfo a (R, τ_{CF}).

Ejercicio -30-

Un conjunto no vacío $U \subseteq R$ es simétrico si para cada $x \in U$ se cumple $-x \in U$. Consideremos la topología:

$$\tau = \{U \subseteq R : U \text{ es simétrico}\} \cup \{\emptyset\}$$

Demostrar que si $f: (R, \tau) \rightarrow (R, \tau)$ es una función impar entonces es continua y abierta.

Ejercicio -31-

Sea τ_0 la topología del punto incluido en R asociada a 0. Decidir razonadamente si $\tau_0 x \tau_0$ coincide con la topología del punto incluido $\tau_{(0,0)}$ en R^2 asociada al punto $(0,0)$.

Ejercicio -32-

Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{A} =]\mathbf{0},\mathbf{1}[\cup [\mathbf{2},\mathbf{3}] \quad \boldsymbol{B} =]-\mathbf{1},\mathbf{0}[\cup [\mathbf{3},\mathbf{4}]$$

Ejercicio -33-

Sean en R las topologías τ_1 y τ_2 del punto excluido para $p = 1$ y $q = 2$, respectivamente. En $(R^2, \tau_1 x \tau_2)$, hallar el interior y la adherencia de la diagonal principal.

Ejercicio -34-

Se considera R la topología τ_S que tiene por base $\beta_S = \{[a, b[: a < b, a, b \in R\}$ y τ_d la de base $\beta_d = \{[a, +\infty[: a \in R\}$. En el producto $(RxR, \tau_S x\tau_d)$ probar que el conjunto $D = \{(x, x): x \in R\}$ es homeomorfo a (R, τ_S) y $A = \{(x, -x): x \in R\}$ tiene la topología discreta.

Ejercicio -35-

Construir explícitamente un homeomorfismo entre el conjunto $\boldsymbol{X = \{(0, y) : y \in R\}}$ y el dado por $\boldsymbol{Y = \{(x, x^2) : -1 < x < 1\}}$.

Ejercicio -36-

Sea un espacio topológico (X,τ) y $A=\{(x,x)\in XxX: x\in X\}$. Establecer un homeomorfismo entre (X,τ) y $\left(A,(\tau x\tau)_{/A}\right)$. Estudiar cuándo A es abierto en $(XxX,\tau x\tau)$.

Ejercicio -37-

Sea $X = [-1, 2]$ **y** $A = [-1, 0] \cup [1, 2]$**. En** X **se define la relación de equivalencia:**

$$\boldsymbol{xRy\ si} \begin{cases} \boldsymbol{x = y} \\ \text{ó} \\ \boldsymbol{x, y \in A} \end{cases}$$

Probar que ${}^{X}\!/_{R}$ **es homeomorfo a** S^1**.**

Ejercicio -38-

Se considera (R, τ) donde τ es la topología del punto incluido para $p = 1$. Estudiar la continuidad global de la aplicación $f: (RxR, \tau x\tau) \rightarrow (R, \tau)$, $f(x, y) = y - x$. Hallar el interior del conjunto $A = \{(x, y) \in R^2: y > x\}$ en $(RxR, \tau x\tau)$.

Ejercicio -39-

En $\boldsymbol{X = ([0,1]x\{0\}) \cup ([0,1]x\{1\}) \subset R^2}$ **se define la relación**

$$\boldsymbol{(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ (0,0)R(0,1) \\ (1,0)R(1,1) \end{cases}}$$

Hallar y probar a qué subconjunto de $\boldsymbol{R^2}$ **es homeomorfo** $\boldsymbol{{}^{X}/_{R}}$**.**

Ejercicio -40-

Se considera el conjunto $X = [-2,0[\cup [1,9]$ y la circunferencia unidad

$$S^1 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

a.- Encontrar una aplicación biyectiva $f: X \to S^1$.

b.- Describir los entornos (básicos) de la topología τ, tal que $f: (X,\tau) \to \left(S^1, \tau u_{/S^1}\right)$ es un homeomorfismo.

c.- Estudiar si la aplicación identidad: $I: f: (X,\tau) \to \left(X, \tau u_{/X}\right)$ es continua, abierta o cerrada.

Ejercicio -41-

Establecer explícitamente un homeomorfismo entre el cilindro $S^1 x R$ y el cono

$$X = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

Ejercicio -42-

En R^3 se considera el cilindro $X = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ y el hiperboloide reglado $Y = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Hallar explícitamente un homeomorfismo entre ambos conjuntos.

Ejercicio -43-

Se considera en N la topología $\tau = \{A_n : n \in N\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones $f : (N, \tau) \to (NxN, \tau x\tau)$, $g : (NxN, \tau x\tau) \to (N, \tau)$ dadas por

$$f(n) = (n^2, n+1) \quad g(n, m) = n + m$$

Ejercicio -44-

Se considera $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y se define la relación de equivalencia R que identifica todos los puntos de $S^1 = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Probar que

$$D/_R \cong S^2$$

Ejercicio -45-

Sea $m \in R$ un número fijo y la relación Rde R^2 dada por

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow y' - mx' = y - mx$$

Probar que ${R^2}/{R} \cong R$.

Ejercicio -46-

Sea (X,τ) un espacio topológico Haussdorf $f: X \to X$ un homeomorfismo tal que $f \circ f = 1_X$. Se define en X la relación xRx' si son iguales o $x' = f(x)$. Estudiar si $X/_R$ es Haussdorf.

Ejercicio -47-

Sea $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\tau}')$ una aplicación biyectiva. Probar que son equivalentes:

a.- $\boldsymbol{f}$ es continua y abierta.

b.- $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}\ \ \forall \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$.

Ejercicio -48-

Sea $\boldsymbol{R}$ con la topología $\boldsymbol{\tau_p = \{U \subset R : p \in U\} \cup \{\emptyset\}}$ para $\boldsymbol{p \in R}$.

a.- Caracterizar los entornos de $\boldsymbol{x \in R}$,

b.- Probar que $\boldsymbol{f : (R, \tau_p) \to (R, \tau_q)}$ es continua si y solo si $\boldsymbol{f}$ es constante o $\boldsymbol{f(p) = q \in R}$.

c.- Deducir que $\boldsymbol{(R, \tau_p), (R, \tau_q)}$ son homeomorfos.

Ejercicio -49-

Probad que $f: R^3 \rightarrow S^1$ **dada por** $f(x, y, x) = \big(cos(2\pi z), sen(2\pi z)\big)$ **es una identificación, Deducid que** $\left({R^3}/_{R}, {\tau_u}/_{R}\right) \cong S^1$ **donde** R **es la relación de equivalencia en** R^3 **dada por**

$$(x, y, x)R(x', y', x') \Leftrightarrow z - z' \in Z$$

Ejercicio -50-

Hallar un homeomorfismo entre $\boldsymbol{B_1(0,0) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}}$ y $\boldsymbol{R^2}$.

Ejercicio -51-

Se considera $(RxR, \tau_u x\tau_D)$, hallar la adherencia de $A = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < 1\}$. Probar que la diagonal, con la topología relativa, es homeomorfa a (R, τ_D).

Ejercicio -52-

En $X = [-1, 2]$ se define la relación de equivalencia

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ó} \\ x, y \in [-1, 0] \\ \text{ó} \\ x, y \in [1, 2] \end{cases}$$

Probar que $X/_R$ es homeomorfo a $[0, 1]$.

Ejercicio -53-

Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{R}, \tau_u) \rightarrow (\boldsymbol{R}, \tau_D)$, $\boldsymbol{f(x) = senx}$.

Ejercicio -54-

Se considera (R,τ) donde τ es la topología del punto incluido para $p=1$. Estudiar la continuidad global de la aplicación $f:(RxR,\tau x\tau)\to(R,\tau)$, $f(x,y)=y-x$. Hallar el interior del conjunto $A=\{(x,y)\in R^2: y>x\}$ en $(RxR,\tau x\tau)$.

Ejercicio -55-

En $X=([\mathbf{0},\mathbf{1}]x\{\mathbf{0}\})\cup([\mathbf{0},\mathbf{1}]x\{\mathbf{1}\})$ **se define la relación de equivalencia**

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\Leftrightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')\\ \text{ó}\\ (\mathbf{0},\mathbf{0})\boldsymbol{R}(\mathbf{0},\mathbf{1})\\ \text{ó}\\ (\mathbf{1},\mathbf{0})\boldsymbol{R}(\mathbf{1},\mathbf{1})\end{cases}$$

Hallar y probara qué subconjunto de $\boldsymbol{R}^2$ **es homeomorfo** $X/_{\boldsymbol{R}}$.