Tema 1 Espacios topológicos

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces $F \subseteq X$ se dice que es *cerrado* si $X - F \in \tau$.

Teorema

Sea X un conjunto y $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X verificando:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$

(ii) $F_i \in \mathcal{F} : \forall i \in I \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

(iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

Entonces existe una única topología τ sobre X donde $\mathcal{F}$ es la familia de cerrados de τ.

$$\tau = \{X - F : F \in \mathcal{F}\}$$

Ejercicio 1

Sea $\boldsymbol{R}[x_1, \dots, x_n]$ polinomios con coeficientes reales y variables $x_1, \dots, x_n$. Dado

$$\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{R}[x_1, \dots, x_n] \neq \emptyset$$

Se define

$$\boldsymbol{F_E} = \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{E}\}$$

Demostrar que la familia $C_\tau = \{F_E : E \subseteq \in\}$ es una familia de cerrados de una única topología τ en $\boldsymbol{R}^n$.

Solución

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces $\mathrm{B} \subseteq P(X)$ se dice que es *una base* si

$$\forall \theta \in \tau : \theta = \bigcup_{i \in I} B_i \quad B_i \in \mathrm{B} \ \ \forall i \in I$$

Teorema (muy importante)

Sea X un conjunto no vacío y $\mathrm{B} \subseteq P(X)$ tal que:

(i) $X = \bigcup_{i \in I} B_i \quad B_i \in \mathrm{B} \ \ \forall i \in I$

$(ii) \forall\, B_1, B_2 \in B \ y\ \forall x \in B_1 \cap B_2 \ existe\ B_3 \in B \ tal\ que\ \ x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Entonces existe una única topología $\tau(B)$ tal que B es su base.

Ejercicio 2

Sea U_n el conjunto de los divisores de $n \in N$. Probar que

$$B = \{U_n / n \in N\}$$

es base de una única topología en N.

Ejercicio 3

Probar que $\mathrm{B} = \left\{ \left]\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right[\cup \left]\boldsymbol{n}, +\infty\right[: \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N} \right\}$ **es base de una topología en** $\boldsymbol{R}$**. Calcular el interior y la adherencia de los conjuntos** $[\mathbf{2}, +\infty[$ **y** $]{-\infty}, \mathbf{2}]$**.**

Solución

Ejercicio 4

Sea X un conjunto y $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Probar que $\mathcal{B} = \{\{x\} \cup A : x \in X\}$ es base de una topología τ en X. Calcular $\dot{A}$ y $\overline{A}$ en (X, τ).

Solución

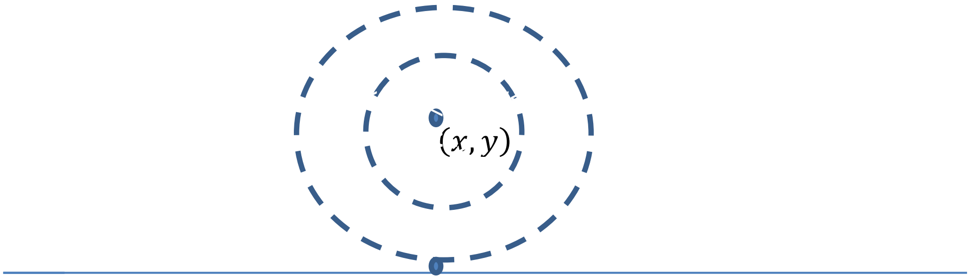
Ejercicio 5

Se considera $H_+ = \{(x,y) \in R^2 : y \geq 0\}$ y la familia

$$\mathcal{B} = \{B((x,y),r) \cup A_r : (x,y) \in H_+ \ 0 < r \leq y\}$$

Con $A_r = \emptyset$ salvo $A_y = \{(x,0)\}$. Probar que existe una única topología $\tau_M$en H_+ con base $\mathcal{B}$ *(topología de Moore*).

Solución



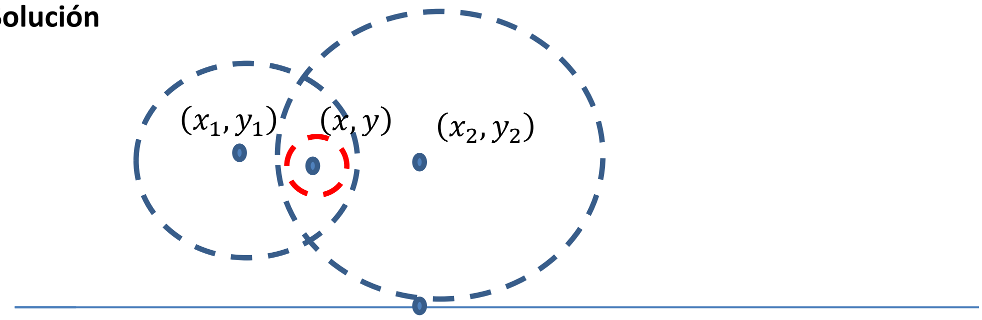
(i) $H_+ = \bigcup_{(x,y)\in H_+ 0<r\leq y}[B((x,y),r) \cup A_r]$

$(\boldsymbol{ii})\forall\, \boldsymbol{B_1, B_2} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}\,, \forall (\boldsymbol{x, y}) \in \boldsymbol{B_1} \cap \boldsymbol{B_2}$ ***existe*** $\boldsymbol{B_3} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ ***tal que*** $(\boldsymbol{x, y}) \in \boldsymbol{B_3} \subseteq \boldsymbol{B_1} \cap \boldsymbol{B_2}$

$$\boldsymbol{B_1 \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_1 = B\big((x_1, y_1), r\big) \cup A_r \qquad (x_1, y_1) \in H_+ \;\; 0 < r \leq y_1}$$

$$\boldsymbol{B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_2 = B\big((x_2, y_2), r'\big) \cup A_{r'} \qquad (x_2, y_2) \in H_+ \;\; 0 < r \leq y_2}$$

Solución



Ejercicio 6

Probar que $\mathcal{B} = \{[x, y[: y > x\}$ es base de una única topología τ_S en R (*topología de Sorgenfrey*). Calcular en (R, τ_S) la clausura de N, Q, $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ y $\left\{-\frac{1}{n} : n \in N\right\}$.

Solución

(i) $R = \bigcup_{x,y \in R \;\; y>x} [x, y[$

Sea $x, y \in R \;\; y > x$: $[x, y[\subset R \Longrightarrow \bigcup_{x,y \in R \;\; y>x} [x, y[\subset R$

Sea $x \in R \Longrightarrow x \in [x, x+1[\subset \bigcup_{x,y \in R \;\; y>x} [x, y[\Longrightarrow R \subset \bigcup_{x,y \in R \;\; y>x} [x, y[$

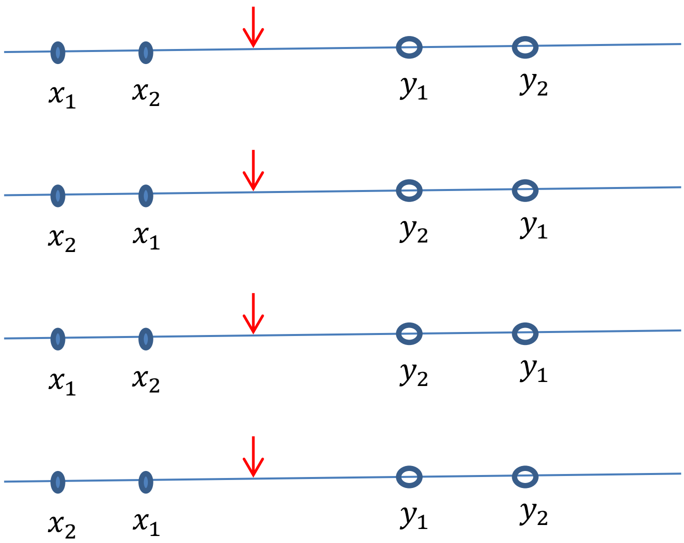
Por lo tanto, $R = \bigcup_{x,y \in R \;\; y>x} [x, y[$.

$(ii) \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}\, , \forall x \in B_1 \cap B_2 \; existe \; B_3 \in \mathcal{B} \; tal \; que \;\; x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$$B_1 \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_1 = [x_1, y_1[\quad y_1 > x_1 \;\; x_1, y_1 \in R$$

$$B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_2 = [x_2, y_2[\quad y_2 > x_2 \;\; x_2, y_2 \in R$$

Sea $x \in B_1 \cap B_2 \Longrightarrow x \in [x_1, y_1[\quad x_1 \leq x < y_1 \quad x \in [x_2, y_2[\quad x_2 \leq x < y_2$



Sea $x_0 = máx\{x_1, x_2\} \quad y_0 = min\{y_1, y_2\}$:

$$x \in \left[x_0, y_0\right[= B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

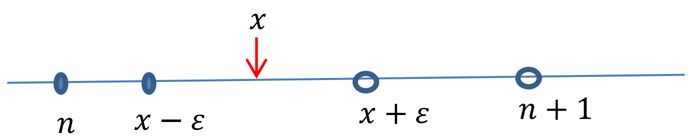
Por lo tanto, $\mathcal{B} = \{[x, y[: y > x\}$ es base de una única topología τ_S en R.

La clausura de $A = N$, $A \subseteq \bar{A}$.

Sea $x \in R - N$: Si $x < 1$: $[x, 1[\cap A = \emptyset$ no son adherentes.

Si $x \geq 1$: $\exists n \in N : n \leq x < n+1$ y sea $\varepsilon = min\left\{\frac{x-n}{2}, \frac{n+1-x}{2}\right\}$:

$$x \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon[\Longrightarrow [x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \emptyset$$



Por lo tanto, tampoco son adherentes. Es decir, $\bar{A} = N$.

La clausura de $A = Q$, $A \subseteq \bar{A}$.

Sea $z \in R - Q$: para cualquier abierto que contenga a z se verifica:

$$z \in [x, y[: y > x \Longrightarrow [x, y[\cap Q \neq \emptyset$$

$$porque\ entre\ dos\ números\ cualquiera\ siempre\ hay\ un\ racional$$

Es decir, $\bar{A} = R$, es un conjunto denso.

La clausura de $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, $A \subseteq \bar{A}$. Veamos 0 es punto adherente.

Sea un abierto cualquiera que contiene al cero.

$$0 \in [x, y[\quad y > x \ \Longrightarrow x \leq 0 < y$$

Como $\left\{\frac{1}{n}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in N : n \geq m \ \ \frac{1}{n} < \varepsilon$, si se toma $\varepsilon = y$:

$$\exists m \in N : n \geq m \ \ 0 < \frac{1}{n} < y$$

$$[x, y[\cap \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} \neq \emptyset$$

Por lo tanto, 0 es un punto adherente. $\bar{A} = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} \cup \{0\}$.

La clausura de $A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, $A \subseteq \bar{A}$. Veamos 0 es punto adherente.

Sea un abierto que contiene al cero.

$$0 \in [0,1[\in \tau_S \quad \Longrightarrow [0,1[\cap \left\{-\frac{1}{n} : n \in N\right\} = \emptyset$$

Por lo tanto, 0 no es un punto adherente. $\bar{A} = \left\{-\frac{1}{n} : n \in N\right\}$.

Ejercicio 7

En $\boldsymbol{R}$ sea $\boldsymbol{\tau = \{O \subseteq R : O = U - B \ \ con\, U \in \tau_u \ \ y \ \ B \subseteq \,]0,1]\}}$ demostrar que $\boldsymbol{\tau}$ es un topología en $\boldsymbol{R}$. Calcular en interior y la clausura de los conjuntos $\boldsymbol{]^1/_2\,, ^3/_4], [-1, ^1/_2[}$ y $\boldsymbol{]0,1]}$.

Solución

Ejercicio 8

Calcular en interior y la adherencia de los siguientes conjuntos:

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}\}$ **en** $\boldsymbol{R}^2$**.**

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}^2\}$ **en** $\boldsymbol{R}^2$**.**

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{A} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}\right\}$ **en** $\boldsymbol{R}$**.**

Solución

Ejercicio 9

Se considera en N la topología $\tau = \{\boldsymbol{O_n}: \boldsymbol{n} \in N\} \cup \{\emptyset, \boldsymbol{N}\}$ con $\boldsymbol{O_n} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, , \dots, \boldsymbol{n}\}$. Probar que $\boldsymbol{\beta_n} = \{\boldsymbol{O_n}\}$ es una base de entornos de $\boldsymbol{n}$. Si $A = \{2, 3, 4\}$, hallar el interior y adherencia del conjunto $\{2, 4\}$ en $(A, \tau_{\setminus A})$.

Solución

Ejercicio 10

Se considera la recta semienlazada $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\tau})$, esto es, $\boldsymbol{\tau}$ es la topología con bases de entornos

$$\boldsymbol{\beta_0} = \{]-\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}[\cup]\boldsymbol{n},+\infty[:\boldsymbol{r}>\boldsymbol{0}\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}\}$$

$$\boldsymbol{\beta_x} = \{]\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}[:\boldsymbol{r}>\boldsymbol{0}\}\ \forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}-\{\boldsymbol{0}\}$$

$(\boldsymbol{a})$ **Encontrar razonadamente dos bases distintas de $\boldsymbol{\tau}$.**

$(\boldsymbol{b})$ **Calcular la frontera de $]-\infty,\boldsymbol{3}[$ y $]\boldsymbol{3},+\infty[$ en $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{\tau})$.**

$(\boldsymbol{c})$ **Estudiar si $]-\infty,\boldsymbol{3}[$ y $]\boldsymbol{3},+\infty[$ son cerrados en $\left(\boldsymbol{R}-\{\boldsymbol{3}\},\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{R}-\{\boldsymbol{3}\}}\right)$.**

$(\boldsymbol{d})$ **Probar que si $[-\boldsymbol{3},+\infty[\subset\bigcup_{\alpha\in A}\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\alpha}}\ \ \boldsymbol{con}\ \boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\alpha}}\in\boldsymbol{\tau}\ \ \forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{A}$, entonces**

$$\exists\boldsymbol{\alpha}'\in\boldsymbol{A}:[-\boldsymbol{3},+\infty[-\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{\alpha}'}\subset[-\boldsymbol{3},+\boldsymbol{\varepsilon}[\ \ \boldsymbol{para\ alg}\acute{\mathrm{u}}\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{\varepsilon}>\boldsymbol{0}.$$

Solución

Ejercicio 11

Un conjunto no vacío $U \subseteq R$ es simétrico si para cada $x \in U$ se cumple que $-x \in U$. Consideremos la familia:

$$\tau = \{U \subseteq R: U \ es \ simétrico\} \cup \{\emptyset\}$$

1.- Probar que τ es una topología en R y que $C_\tau = \tau$.

2.- Analizar si (R, τ) es o no un espacio de Hausdorff.

3.- Para cada $x \in R$, encontrar una base de entornos de x en (R, τ) formada por un único entorno de x.

4.- En (R, τ) calcular la clausura, el interior y la frontera de $[-1, 0]$

Solución

Ejercicio 12

Se considera $A = [\mathbf{0}, \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}, \mathbf{3}[\cup \{\mathbf{5}\}$ con la topología inducia por la topología usual de $\boldsymbol{R}$.

1.- Razonar si los conjuntos $\{\mathbf{5}\}$ y $]\mathbf{1}, \mathbf{3}[$ son abiertos o cerrados en $(A, \tau_{u/A})$.

2.- Calcular la adherencia de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}[$.

3.- Comprobar si $\left[0, {}^{1}\!/_{2}\right]$ es entorno de $\mathbf{0}$.

Soluciones

Ejercicio 13

Consideramos la familia de subconjuntos de $\boldsymbol{R}$ dada por

$$\mathfrak{B} = \{]a, b[: a, b \in R \;\; a < b\} \cup \{\{q\}: q \in Q\}$$

Probar que:

(a) $\mathfrak{B}$ es base de una (única) topología τ en R.

(b) (R, τ) satisface el II Axioma de Numerabilidad.

(c) (R, τ) es T_2 (Hausdorff)

(d) $D \subseteq R$ es denso en $(R, \tau) \Leftrightarrow Q \subseteq D$

(e) Calcula el cierre y el interior de $\left]0, \sqrt{2}\right]$ en (R, τ).

Solución

Ejercicio 14

En $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_u})$ se considera el subconjunto

$$\boldsymbol{A = \{-1, 3\} \cup \left\{\frac{4n-1}{n} : n \in N\right\} \cup \left(]4, \sqrt{18}] - Q\right)}$$

$(\boldsymbol{a})$ **Hallar el interior y adherencia de $\boldsymbol{A}$ en $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_u})$.**

$(\boldsymbol{b})$ **Si $\boldsymbol{B} =]4, \sqrt{18}] - \boldsymbol{Q}$, determinar el interior y la adherencia de $\boldsymbol{B}$ en el espacio topológico $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\tau_{u/A}})$.**

Solución

Ejercicio 15

Sea $K \subset R$ el subconjunto : $K = \{{}^{1}/_{n} : n \in N\}$.

$$\mathfrak{B} = \{]a, b[: a, b \in R \ \ a < b\} \cup \{]a, b[\setminus K: a, b \in R \ \ a < b\}$$

(a)**¿Es $\mathfrak{B}$ base de una topología τ en R?**

(b) **Sea τ_K la topología generada por $\mathfrak{B}$. Probar que τ_K es estrictamente más fina que la topología usual, τ_u, de R. $(\tau_u \subset \tau_K \ \ \ \tau_u \neq \tau_K)$**

(c) **¿Es (R, τ_k) un espacio Hausdorff?**

(d) **Calcular la clausura de $]0, 1[$ en (R, τ_k).**

(e) **Dar un ejemplo de una sucesión convergente con la topología usual τ_u que no converge con la topología τ_K.**

Solución

Ejercicio 16

Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:

a.- ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto? ¿Y si el espacio es metrizable?

Ejercicio 17

Se considera el espacio topológico (X,τ) con $X=[1,2]\cup]3,4[$ y τ la topología con base de entornos:

$$\mathfrak{B}_1=\{[1,1+\varepsilon[\cup]3,3+\varepsilon[:0<\varepsilon<1\}\ \mathfrak{B}_2=\{]2-\varepsilon,2]\cup]4-\varepsilon,4[:0<\varepsilon<1\}$$

$$\mathfrak{B}_x=\{]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset X:0<\varepsilon\}\quad\forall x\in X-\{1,2\}$$

a.- Razonar si $\widetilde{\mathfrak{B}}=\{[1,1+\varepsilon[:0<\varepsilon<1\}$ es una base de entornos de 1 en (X,τ).

b.- Comparar τ con la topología usual inducida en X.

c.- Estudiar si $[1,2]$ es abierto o cerrado en (X,τ).

d.- Calcular la frontera de $]3,4[$ en (X,τ).

e.- Probar que si

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\qquad O_\lambda\in\tau\ \forall\lambda\in\Lambda$$

Entonces existen $\alpha,\beta\in\Lambda: \mathrm{X}-\left(O_\alpha\cup O_\beta\right)\subset[1+r,2-r]\cup[3+r,4-r]$, para algún $r>0$.

Ejercicio 18

Se considera el espacio topológico (X,τ) con $X=[1,2[\,\cup\,]3,4]$ y τ la topología con base de entornos:

$$\mathfrak{B}_1=\{[1,1+\varepsilon[\,\cup\,]3,3+\varepsilon[:0<\varepsilon<1\}\ \ \mathfrak{B}_4=\{]2-\varepsilon,2[\,\cup\,]4-\varepsilon,4]:0<\varepsilon<1\}$$

$$\mathfrak{B}_x=\{]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,\subset X:0<\varepsilon\}\quad \forall x\in X-\{1,4\}$$

a.- Razonar si $\widetilde{\mathfrak{B}}=\{]4-\varepsilon,4]:0<\varepsilon<1\}$ es una base de entornos de 4 en (X,τ).

b.- Comparar τ con la topología usual inducida en X.

c.- Estudiar si $[1,2[$ es abierto o cerrado en (X,τ).

d.- Calcular la frontera de $]3,4]$ en (X,τ).

e.- Probar que si

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\qquad O_\lambda\in\tau\ \ \forall\lambda\in\Lambda$$

Entonces existen $\alpha,\beta\in\Lambda: \mathrm{X}-\left(O_\alpha\cup O_\beta\right)\subset[1+r,2-r]\cup[3+r,4-r]$, para algún $r>0$.

Ejercicio 19

En N se considera $\tau = \{A_n : n\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y adherencia de $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

Ejercicio 20

En $\boldsymbol{R}$ se considera la topología $\boldsymbol{\tau}$ que tiene por base $\boldsymbol{\beta} = \{[\boldsymbol{a}, +\infty[: \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}\}$. Probar que para cada $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\beta_x} = \{[\boldsymbol{x}, +\infty[\}$ es una base de entornos de $\boldsymbol{x}$. Hallar la adherencia de $\{-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}\}$.

Ejercicio 21

En $\boldsymbol{R}$ se considera la topología $\boldsymbol{\tau}$ del punto incluido para $\boldsymbol{p = 0}$. Sean $\boldsymbol{A = [0,2]}$ y $\boldsymbol{B =]0,2[}$. Hallar $\boldsymbol{Fr(A)}$. Probar que $\boldsymbol{\tau_{/B}}$ es la topología discreta.

Ejercicio 22

1.- Sea $X = ([0,2], \tau)$ donde $\tau = \{O \subset X :]0,1[\subset O\} \cup \{\emptyset\}$. Hallar el interior y adherencia de $A = [0,1]$. Probar que A es compacto pero no $\overline{A}$.

Ejercicio 23

Sea X un conjunto $A \subset X$ un subconjunto fijo.

a.- Probar que $\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología en X.

b.- Para cada $x \in X$, probar que $\beta_x = \big\{\{x\} \cup A\big\}$ es una base de entornos de x en (X, τ).

c.- Dado $C \subset X$, caracterizar el interior y adherencia de C.

Ejercicio 24

En (R^2, τ_u) hallar el interior y la adherencia de

$$A = B_1\big((0,0)\big) - \{(0,0)\} \quad B = \{(x,y) \in R^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

Ejercicio 25

En R^2, consideramos la familia $\beta = \{]a, b[x\{c\}: a < b, a, b, c \in R\}$.

a.- Probar que β es base de abiertos de una topología τ en R^2.

b.- Comparar τ con τ_u.

c.- Dado $C = \{0\}xR$, estudiar cuál es la topología relativa $\tau_{/C}$ y si es conocida.

Ejercicio 26

Probar si en un espacio topológico todo punto tiene una base de entornos cerrados entonces es regular.

Ejercicio 27

En R^2 se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \{B_a : a \in R\}$ y

$$B_a = \{(x, y) \in R^2 : x \geq a\}$$

Estudiar si (R^2, τ) es normal.

Ejercicio 28

Estudiar los axiomas de numerabilidad en $\boldsymbol{R}$ con la topología

$$\boldsymbol{\tau} = \{\emptyset\} \cup \{\boldsymbol{O} \subset \boldsymbol{R}: \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{O}\}$$

Ejercicio 29

Estudiar la propiedad Hausdorff y regular en (X, τ), $X =]0, 1[$,

$$\tau = \left\{ \left] 0, 1 - \frac{1}{n} \right[: n \in N \right\} \cup \{\emptyset, X\}$$

Ejercicio 30

En R se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\tau = \{O \subseteq R: R - O \text{ es compacto en } (R, \tau_u)\} \cup \{\emptyset\}$$

a.- Demostrar que τ es una topología sobre R.

b.- Comparar τ con la topología usual τ_u.

c.- Calcular interior, adherencia y frontera de $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ y $B =]0, +\infty[$ en (R, τ).

Ejercicio 31

En $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_u})$ consideramos el subconjunto

$$\boldsymbol{A} =]-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}[\cup \left\{\frac{\boldsymbol{4n-1}}{\boldsymbol{n}} : \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}\right\} \cup \left(]\boldsymbol{4}, \sqrt{\boldsymbol{18}}] - \boldsymbol{Q}\right)$$

a.- Hallar $\boldsymbol{intA}$ y $\overline{\boldsymbol{A}}$ en $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_u})$.

b.- Si $\boldsymbol{B} =]\boldsymbol{4}, \sqrt{\boldsymbol{18}}] - \boldsymbol{Q}$, determinad el interior y la adherencia de $\boldsymbol{B}$ en el espacio topológico $\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\tau u}_{/\boldsymbol{A}}\right)$.

Ejercicio 32

Probar que $\boldsymbol{\beta} = \{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[: \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{Q}\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}\}$ es base de una topología en $\boldsymbol{R}$. Hallar el interior y la adherencia de $\boldsymbol{Q}$ y $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$.

Ejercicio 33

Hallar el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos:

a.- $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}\}$ **en** $\boldsymbol{R}^2$**.**

b.- $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}^2\}$ **en** $\boldsymbol{R}^2$**.**

c.- $\boldsymbol{C} = \left\{ \mathbf{1}/\boldsymbol{n} : \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N} \right\}$ **en** $\boldsymbol{R}$**.**

Ejercicio 34

Se considera en N la topología $\tau = \{O_n : n \in N\} \cup \{\emptyset, N\}$, con $O_n = \{1, \dots, n\}$. Probar que $\beta_n = \{O_n\}$ es una base de entornos de n. Si $A = \{2, 3, 4\}$, hallar el interior y adherencia del conjunto $\{2, 4\}$ en $(A, \tau_{/A})$.