GEOMETRÍA III

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

TEMA 1: Espacios afines

En Matemáticas, un espacio afín es una estructura geométrica que da sentido a los conceptos clásicos de la geometría euclidiana, como el paralelismo o la incidencia. Esta estructura se construye sobre un espacio vectorial, aunque en un espacio afín no hay elementos privilegiados (como sí ocurría con el vector cero en los espacios vectoriales). Usualmente a los elementos de un espacio afín se les llama puntos, y a los vectores del espacio vectorial asociado direcciones. La idea básica de la geometría afín es que cualquier vector se puede apoyar sobre un punto, que funciona como origen del mismo, determinando automáticamente un punto final o extremo, y simétricamente dos puntos ordenados definen un único vector de forma que algunas reglas básicas de aditividad se satisfacen. Esta asignatura Geometría III es una asignatura finalista, en el sentido de que supone la culminación del conocimiento científico en el ámbito de las geometrías lineal y afín, que alcanzan en la geometría proyectiva el cénit de su desarrollo.

1. INTRODUCCIÓN

Pensemos en un plano de naturaleza física tal y como lo entendían los antiguos griegos. Para poder modelarlo y hacer geometría sobre él, Euclides (ca. 325 a. C.-ca. 265 a. C.) en *Los Elementos* distinguía entre *Axiomas* (verdades absolutas universales) y *Postulados* (enunciados que, no necesitando demostración, se admitían como verdades para el desarrollo de una ciencia en particular).

Figura 1: Euclides

Los axiomas eran comunes a todas las ciencias, entre los mismos encontramos enunciados como *"Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí"*, *"Si se añaden* *iguales a iguales, los todos son iguales", "Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales", "Las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí", "El todo es mayor que la parte".*

Los postulados sin embargo variaban con cada ciencia. Los de la Geometría, la ciencia por excelencia en la cosmovisión helénica, eran los siguientes:

(I) *Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera.*

(II) *Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.*

(III) *Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia.*

(IV) *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

(V) **Postulado de las paralelas.** *Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*

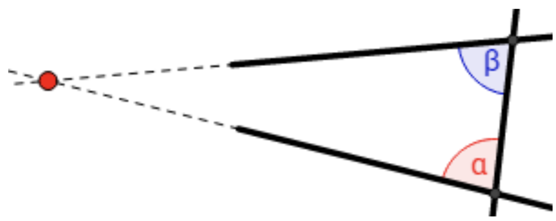


Figura 2: V Postulado: de las paralelas

Este postulado admite el siguiente enunciado equivalente:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

El (V) postulado resultó trascendental para la geometría euclidiana. Durante siglos se pensó que realmente era consecuencia lógica de los anteriores, aunque finalmente supimos que no era así gracias a los trabajos de Bolyai, Lobachevsky y Gauss (que dieron lugar a la aparición de las geometrías no-euclidianas).

Naturalmente, la correcta comprensión de los anteriores postulados requiere de un gran número de *definiciones* previas. A modo de curiosidad aquí presentamos un listado amplio de las que utilizaba Euclides para la Geometría:

- *Un punto es lo que no tiene partes.*
- *Una línea es una longitud sin anchura.*
- *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*
- *Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.*
- *Los extremos de una superficie son líneas.*
- *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*

- *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.*
- *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.*
- *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*
- *Ángulo obtuso es el mayor que un recto.*
- *Ángulo agudo es el menor que un recto.*
- *Un límite es aquello que es extremo de algo.*
- *Una figura es lo contenido por uno o varios límites.*
- *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí. El punto se llama el «centro» del círculo.*
- *Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitado en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.*
- *Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.*
- *Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por 3, cuadriláteras las comprendidas por 4, multiláteras las comprendidas por más de 4 rectas.*
- *Entre las figuras triláteras, el triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, triángulo isósceles la que tiene dos lados iguales, y el triángulo escaleno la que tiene los tres lados desiguales.*
- *Entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres ángulos agudos.*
- *De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y trapecios las demás figuras cuadriláteras.*
- *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongado indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.*

El desarrollo del conocimiento en la Grecia clásica era de *naturaleza sintética*, esto es, a partir de los axiomas, definiciones y postulados adoptados se demostraban proposiciones, lemas, teoremas, corolarios... utilizando la lógica aristotélica o lógica matemática como norma fundamental para el buen razonamiento. Los postulados eran útiles en la medida en que la ciencia que se desarrollaba a partir de ellos se ajustaba a la percepción de nuestro universo físico.

La geometría moderna sin embargo es de *naturaleza analítica* como consecuencia de los trabajos de Fermat y Descartes, y el manejo del lenguaje de las aplicaciones. Esencialmente, nosotros entendemos los puntos del plano como pares de números (sus coordenadas cartesianas en unos ejes) que son susceptibles de ser sometidos a operaciones, lo que permite sustituir todo el aparato lógico de Euclides por el análisis y el álgebra. Así, las rectas, planos, etc se identifican con el conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, mientras que por ejemplo las cónicas (y en general las hipercuádricas) se corresponden con los ceros de ecuaciones cuadráticas. De esta forma, cálculos aritméticos sencillos en los que aparecen involucradas ecuaciones de diversa naturaleza (lineal, cuadrática,...) sustituyen mágicamente a teoremas complejos de la geometría sintética clásica. Una de las claves para construir este aparato matemático será aprovechar el álgebra lineal, asignando a cada pareja de puntos p, q de nuestro plano euclidiano clásico $\mathcal{A}$ un vector $\overrightarrow{pq}$ con origen p y extremo q. Para que estos vectores no estén fijos o rígidamente anclados en su origen y extremo, se identifican aquellos vectores fijos $\overrightarrow{pq}$ y $\overrightarrow{p'q'}$ que, teniendo la misma longitud, estén contenidos en rectas paralelas y apunten en el mismo sentido sobre éstas (vectores equipolentes).

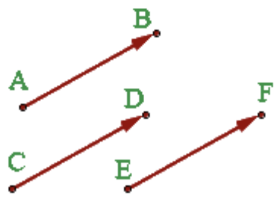


Figura 3: Vectores fijos equipolentes

Usando el lenguaje algebraico de las relaciones binarias (de equivalencia), si escribimos como $[\overrightarrow{pq}]$ el conjunto de todos los vectores fijos en $\mathcal{A}$ con el mismo *módulo, dirección y sentido* que $\overrightarrow{pq}$, el espacio cociente

$$V = \{[\overrightarrow{pq}] \colon p, q \in \mathcal{A}\}$$

tiene de forma natural estructura de espacio vectorial y es conocido como *espacio de los vectores libres del plano*. Observemos que de esta forma hemos definido una aplicación

$$\overrightarrow{\ } : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V, \quad (p, q) \mapsto [\overrightarrow{pq}]$$

satisfaciendo las siguientes dos propiedades elementales:

- $[\overrightarrow{pq}] + [\overrightarrow{qr}] = [\overrightarrow{pr}]$.
- $\forall\, p \in \mathcal{A}, \forall\, v \in V, \exists!\, q \in \mathcal{A} : [\overrightarrow{pq}] = v$.

Esta construcción por supuesto se puede generalizar a espacios euclídeos de dimensión arbitraria, y sirve de inspiración para la noción moderna de espacio afín que trataremos en la siguiente sección.

2. EL ESPACIO AFÍN

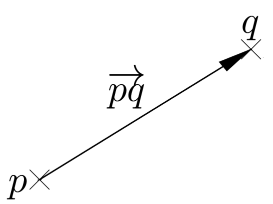
La definición formal es la siguiente

Definición 2.1 *Un espacio afín es una tripleta* $(\mathcal{A}, V, \overrightarrow{\ })$ *donde*

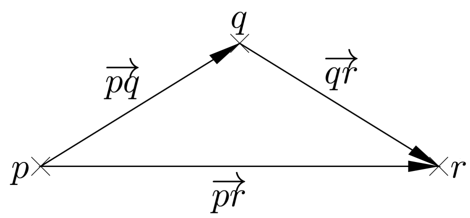
- $\mathcal{A}$ *es un conjunto no vacío (llamado conjunto de puntos).*
- $V \equiv (V, +, \cdot\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial real (aunque podría serlo sobre cualquier otro cuerpo, como* $\mathbb{C}$*).*
- $\overrightarrow{\ } : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, $(p,q) \mapsto \overrightarrow{pq}$, *es una aplicación satisfaciendo*

  A1 : $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ *(Igualdad Triangular o Regla de Chasles).*

  A2 : $\forall\, p \in \mathcal{A}$, $\forall\, v \in V$, $\exists!\, q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{pq} = v$.



(a) Vector $\overrightarrow{pq}$.



(b) Axioma 1.

Al espacio vectorial V se le llama *variedad de dirección* del espacio afín $\mathcal{A}$, y se suele denotar como $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Por definición, la dimensión de $\mathcal{A}$ es la de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$: $\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$. Al vector $\overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ se le llama vector determinado por los puntos p y q de $\mathcal{A}$, siendo p y q respectivamente un punto origen y un extremo (o punto final) de $\overrightarrow{pq}$.

Observación 2.2 *Como regla mnemotécnica, a veces es útil usar la notación*

$$\overrightarrow{pq} \equiv q - p \in \overrightarrow{\mathcal{A}},$$

siendo la expresión $q - p$ *meramente formal (no se apela a ninguna sustracción, que obviamente no tiene sentido en* $\mathcal{A}$ *a tenor de la axiomática). Esta notación tendría la ventaja de darle una apariencia de cancelación algebraica al axioma* A1*:*

$$(q - p) + (r - q) = r - p.$$

En lo que sigue $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \overrightarrow{\ })$ será un espacio afín.

Propiedades 2.3 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) *Si* $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr}$ *entonces* $q = r$, $\forall p, q, r \in \mathcal{A}$.

Trivial de A2.

(II) $\overrightarrow{pp} = \vec{0}$, $\forall p \in \mathcal{A}$.

En efecto, de A1 se tiene que $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp}$, de donde $\overrightarrow{pp} = \vec{0}$.

(III) *Si* $\overrightarrow{pq} = \vec{0}$ *entonces* $p = q$.

Trivial de (ii) y A2.

(IV) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$, $\forall p, q \in \mathcal{A}$.

En efecto, de A1 y (ii) se tiene que $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = \vec{0}$, de donde $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$.

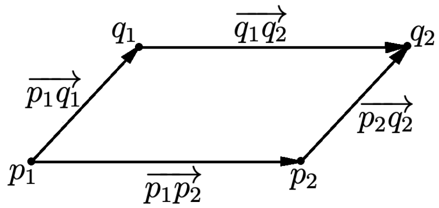


Figura 5: Regla del paralelogramo

(V) (Regla del paralelogramo) *Si* $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_2q_2}$ *entonces* $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{q_1q_2}$.

Se tiene de A1 que $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2q_2} = \overrightarrow{p_1q_2} = \overrightarrow{p_1q_1} + \overrightarrow{q_1q_2}$, de donde usando que $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_2q_2}$ y cancelando deducimos que $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{q_1q_2}$.

(VI) *Si* $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{A}$, $k \geq 2$, *entonces* $\sum_{j=1}^{k-1} \overrightarrow{p_jp_{j+1}} = \overrightarrow{p_1p_k}$.

El resultado es cierto para $k = 3$ por el axioma A1. Inductivamente, si $k > 3$ se tiene que $\sum_{j=1}^{k-1} \overrightarrow{p_jp_{j+1}} = \left(\sum_{j=1}^{k-2} \overrightarrow{p_jp_{j+1}} + \overrightarrow{p_{k-1}p_k}\right) = \overrightarrow{p_1p_{k-1}} + \overrightarrow{p_{k-1}p_k} = \overrightarrow{p_1p_k}$.

Definición 2.4 *Fijado* $p \in \mathcal{A}$, *denotaremos por* $F_p \colon \mathcal{A} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ *a la aplicación dada por*

$$F_p(q) = \overrightarrow{pq}.$$

Nótese que del axioma A2 *se deduce que* F_p *es una* biyección.

Es conveniente comparar la siguiente definición con la Observación 2.2.

Definición 2.5 (Suma de un punto y un vector) *Si* $p \in \mathcal{A}$ *y* $v \in \mathcal{A}$, *el único punto* $q \in \mathcal{A}$ *dado por el axioma* A2 *tal que* $\overrightarrow{pq} = v$ *será denotado como* $p + v$. *Como consecuencia las siguientes identidades son inmediatas:*

$$q = p + \overrightarrow{pq}, \quad \overrightarrow{p\,(p+v)} = v.$$

Si escribimos

$$G_p \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad G_p(v) = p + v,$$

es claro que $G_p = F_p^{-1}$ *(ver Definición 2.4), y por tanto* G_p *es biyectiva.*

Propiedades 2.6 *Como consecuencia de Definición 2.5, los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) $p + \vec{0} = p$, $\forall p \in \mathcal{A}$.

Trivial de Propiedades 2.3-(ii).

(II) $p + (u + v) = (p + u) + v$, $\forall p \in \mathcal{A}$, $\forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Por definición, el punto $q = p + (u + v)$ está determinado unívocamente por la identidad $\overrightarrow{pq} = u + v$. Por otra parte, un cálculo directo dice

$$\overrightarrow{p\,((p+u)+v)} = \overrightarrow{p\,(p+u)} + \overrightarrow{(p+u)\,(p+u)+v} = u + v = \overrightarrow{pq},$$

de donde $q = (p + u) + v$.

(III) *$\forall p \in \mathcal{A}$, $\forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, se tiene que $\overrightarrow{(p+u)\,(p+v)} = v - u$.*

Usando el axioma A1 y Propiedades 2.3-(iv)

$$\overrightarrow{(p+u)\,(p+v)} = \overrightarrow{(p+u)\,p} + \overrightarrow{p\,(p+v)} = -\overrightarrow{p\,(p+u)} + \overrightarrow{p\,(p+v)} = -u + v.$$

Para culminar esta sección presentaremos las traslaciones afines.

Definición 2.7 (Traslación de vector v) *Dado $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$, la traslación de vector v es la aplicación*

$$\tau_v \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \tau_v(p) = p + v.$$

Propiedades 2.8 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) $\tau_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

(II) $\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$, $\forall u, v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

(III) *τ_v es una biyección con inversa τ_{-v}, $\forall v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.*

(IV) *El conjunto de las traslaciones $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\tau_v \colon v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}\}$ es un grupo abeliano respecto a la composición de aplicaciones.*

Demostración: Como $\tau_{\vec{0}}(p) = p + \vec{0} = p$ para todo $p \in \mathcal{A}$, (i) se sigue trivialmente. Análogamente $(\tau_u \circ \tau_v)(p) = \tau_u(\tau_v(p)) = \tau_u(p+v) = (p+v)+u = p+(v+u) = \tau_{u+v}(p)$ para todo $p \in \mathcal{A}$, lo que prueba (ii). Los items (iii) y (iv) son una consecuencia trivial de (i) y (ii). ■

Por último, comentaremos la conexión natural entre la geometría afín y lineal. Observemos que en un espacio vectorial se puede introducir una estructura afín de forma natural o canónica.

Definición 2.9 (Estructura afín canónica sobre un espacio vectorial) *Dado un espacio vectorial V, la aplicación*

$$\vec{\ } \colon V \times V \to V, \quad \overrightarrow{uv} := v - u.$$

satisface trivialmente los axiomas A1 *y* A2 *y define una estructura de espacio afín $(V, V, \vec{\ })$, conocida como* la estructura afín canónica *en el espacio vectorial V. En este caso $\mathcal{A} = V$ como espacio de puntos y $\overrightarrow{\mathcal{A}} = V$ como espacio vectorial.*

Cuando $V = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \vec{\ })$ es el espacio afín usual n-dimensional. La estructura afín canónica o usual en $\mathbb{R}^n$ sigue la fórmula clásica

$$\overrightarrow{(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)} = (y_1,\ldots,y_n) - (x_1,\ldots,x_n) = (y_1 - x_1,\ldots,y_n - x_n).$$

2.1. Subespacios afines

Como en otras categorías, los espacios afines admiten sub-objetos naturales conocidos como subespacios afines. Presentemos la definición.

Definición 2.10 *Se dice que un subconjunto no vacío S de un espacio afín $\mathcal{A}$ es un subespacio afín si existen un punto $p \in \mathcal{A}$ y un subespacio vectorial $U \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ tales que*

$$S = p + U := \{p + u \colon u \in U\}.$$

En otras palabras, si $S = G_p(U)$ para algún punto $p \in \mathcal{A}$ y subespacio $U \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Nótese que si $S = p + U$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$, la identidad $p + \vec{0} = p$ garantiza que $p \in S$. Para comprender la naturaleza geométrica de los subespacios afines es conveniente enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2.11 *Si $S = p + U$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$, entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(I) $U = \{\overrightarrow{pq} \colon q \in S\}$.

(II) $U = \{\overrightarrow{qr} \colon q, r \in S\}$.

(III) $S = q + U$ *para todo* $q \in S$.

Demostración: Sabemos que $q \in S$ si y solo si $q = p + u$ para algún $u \in U$, esto es, si y solo si $u = \overrightarrow{pq} \in U$, lo que prueba (i). Para probar (ii), nótese que

$$\{\overrightarrow{qr} \colon q, r \in S\} = \{\overrightarrow{(p+u)\,(p+v)} \colon u, v \in U\} = \{v - u \colon u, v \in U\} = U.$$

Finalmente, si $q \in S$ se tiene que $q = p + v$ para algún $v \in U$, de donde

$$q + U = \{(p + v) + u \colon u \in U\} = \{p + (v + u) \colon u \in U\} = \{p + u \colon u \in U\} = S,$$

donde hemos usando que $\{v + u \colon u \in U\} = U$. ■

Es conveniente reflexionar sobre el contenido de la proposición. El item (iii) nos dice que el punto p por el que pasa S no es especial, puede usarse cualquiera otro punto de S para describirlo: $S = q + U$ para todo $q \in S$. Sin embargo, el item (ii) nos dice que el subespacio de direcciones U de S está unívocamente determinado por S. Como la aplicación restricción $\to\, \colon S \times S \to U$ es interna al par (S, U), la tripleta $(S, U, {}^{\to})$ es un espacio afín que tiene a U como variedad de dirección. De aquí que se suela escribir $\overrightarrow{S} = U$, y por tanto $S = p + \overrightarrow{S}$.

Definición 2.12 *Dado un subespacio afín $S = p + U$ de $\mathcal{A}$, diremos que $\vec{S} := U$ es la variedad de dirección de S y escribiremos* $\dim S = \dim \vec{S}$.

(I) *Si* $\dim S = 1$ *se dice que S es una recta afín.*

(II) *Si* $\dim S = 2$ *se dice que S es un plano afín.*

(III) *Si* $\dim S = \dim \mathcal{A} - 1$ *se dice que S es un hiperplano afín.*

Claramente $0 \leq \dim S \leq \dim \mathcal{A}$, $\dim S = 0$ si y solo si S es un punto de $\mathcal{A}$, y $\dim S = \dim \mathcal{A}$ si y solo si $S = \mathcal{A}$. Como consecuencia de Proposición 2.11-(ii), si $S \subseteq T$ son subespacios de $\mathcal{A}$ entonces $\vec{S} \subseteq \vec{T}$ y $\dim S \leq \dim T$.

Ejercicio 2.13 *Es fácil poner ejemplos de subespacios afines:*

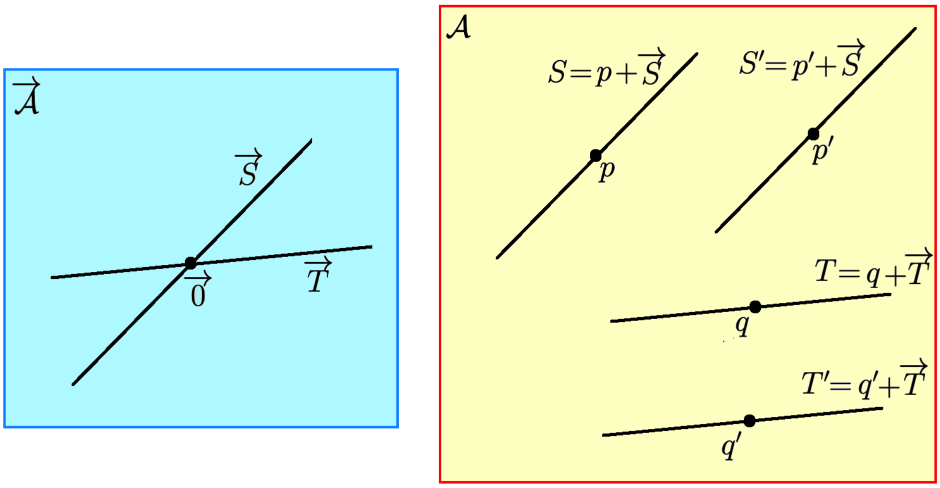


Figura 6: Subespacios afines

- *En el plano afín usual $\mathbb{R}^2$, el conjunto*

$$S = (0, -1) + L\big(\{(2, -3)\}\big) = \{(2\lambda, -1 - 3\lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es la recta afín que pasa por el punto $p = (0, -1)$ con dirección $\overrightarrow{S} = L\big(\{(2, -3)\}\big)$.

- *En el espacio afín asociado al espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas simétricas de orden 2, el cojunto*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

esto es

$$T = \left\{\begin{pmatrix} 1+\mu & -1+2\lambda \\ -1+2\lambda & -\lambda \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$

es el plano afín que pasa por

$$p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con dirección } \overrightarrow{T} = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right).$$

La siguiente proposición se corresponde con uno de los postulados clásicos de la geometría euclidiana.

Proposición 2.14 *Dados dos puntos distintos $p, q \in \mathcal{A}$, existe una única recta afín R que pasa por p y q (esto es, contiene a los puntos p y q).*

Demostración: Como $\overrightarrow{pq} \neq \vec{0}$ ya que $p \neq q$, el subespacio afín

$$R := p + L(\{\overrightarrow{pq}\}) = \{p + \lambda\overrightarrow{pq} \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es una recta afín que contiene a p y a $q = p + \overrightarrow{pq}$.

Para probar la unicidad, supongamos que S es otra recta afín que pasa por p y q. En ese caso necesariamente $\vec{0} \neq \overrightarrow{pq} \in \vec{S}$ y por tanto $\vec{S} = L(\{\overrightarrow{pq}\})$ al ser la variedad de dirección de S de dimensión 1. Como S pasa por p deducimos que $S = p + \vec{S} = p + L(\{\overrightarrow{pq}\}) = R$. ∎

2.1.1. Operaciones con subespacios afines

Como ocurría en Álgebra Lineal con los subespacios vectoriales, existen dos operaciones básicas con subespacios afines: *la intersección y la suma*. Vamos a describirlas con detalle a continuación.

De forma genérica, la intersección de subespacios afínes es un subespacio afín (salvo que sea vacía). Los detalles están contenidos en la siguiente proposición.

Proposición 2.15 *Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios afínes de un espacio afín $\mathcal{A}$. Entonces $S = \bigcap_{i\in I} S_i$ es o bien vacío o bien un subespacio afín con variedad de dirección $\overrightarrow{S} = \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S}_i$.*

Demostración: Supongamos que $S = \bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$ y tomemos $p \in S$. Como $p \in S_i$ para todo $i \in I$ podemos escribir $S_i = p + \overrightarrow{S}_i$, para todo $i \in I$. Por tanto

$$S = \bigcap_{i\in I} S_i = \bigcap_{i\in I} (p + \overrightarrow{S}_i) = p + \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S}_i,$$

de donde por definición S es un subespacio afín con variedad de dirección el subespacio vectorial $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{S}_i \subseteq \mathcal{A}$. ■

La noción de suma de subespacios afines es más elaborada.

Definición 2.16 *Si $\mathcal{S} = \{S_i \colon i \in I\}$ es una familia de subespacios afínes de un espacio afín $\mathcal{A}$ y llamamos*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \{T \subseteq \mathcal{A} \colon\ T \text{ subespacio afín con } \bigcup_{i\in I} S_i \subseteq T\},$$

se define la suma afín de los subespacios $\{S_i \colon i \in I\}$ como el subespacio afín

$$\bigvee_{i\in I} S_i := \bigcap_{T\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}} T.$$

Nótese que $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \neq \varnothing$ ya que $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, por lo que la suma $\bigvee_{i\in I} S_i$ está bien definida como consecuencia de la Proposición 2.15. Por definición $\bigvee_{i\in I} S_i$ es el más pequeño subespacio afín que contiene a $\bigcup_{i\in I} S_i$, esto es, si $T \subseteq \mathcal{A}$ es un subespacio afín conteniendo a $\bigcup_{i\in I} S_i$ entonces $\bigvee_{i\in I} S_i \subseteq T$.

Cuando se trata de una cantidad finita de subespacios $\{S_1, \ldots, S_k\}$, se suele escribir

$$\bigvee_{i=1}^{k} S_i \equiv S_1 \vee \cdots \vee S_k.$$

También se suele utilizar la notación

$$\langle \{q_0, \ldots, q_k\} \rangle = \bigvee_{i=0}^{k} \{q_i\}$$

para denotar al menor subespacio afín que contiene a los puntos $q_0, \ldots, q_k \in \mathcal{A}$.

La siguiente proposición proporciona un algoritmo de cálculo de la suma de subespacios.

Notación 2.17 *Recordemos que si V es un espacio vectorial y $X \subseteq V$ es un subcojunto arbitrario, $L(X)$ denota el menor subespacio vectorial de V que contiene a X. Los vectores de $L(X)$ son las combinaciones lineales (de longitud finita) de vectores en X, esto es,*

$$L(X) = \{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \colon\ x_1, \ldots, x_k \in X,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\{U_i\}_{i\in I}$ son subespacios vectoriales de V suele escribirse

$$\sum_{i\in I} U_i = L\big(\bigcup_{i\in I} U_i\big).$$

Proposición 2.18 *Sea $\{S_i \colon i \in I\}$ una familia de subespacios afines de un espacio afín $\mathcal{A}$, escribamos $S_i = p_i + \vec{S}_i$ para todo $i \in I$, y tomemos $p \in \bigvee_{i\in I} S_i$ un punto arbitrario (se suele elegir $p = p_i$ para algún $i \in I$). Entonces*

$$\bigvee_{i\in I} S_i = p + \big(L(\{\overrightarrow{p_i p_j} \colon i, j \in I\}) + \sum_{i\in I} \vec{S}_i\big)$$

En particular

$$\overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i} = L\big(\{\overrightarrow{p_i p_j} \colon i, j \in I\}\big) + \sum_{i\in I} \vec{S}_i.$$

Como consecuencia, cuando $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$ entonces $\bigvee_{i\in I} S_i = p + \big(\sum_{i\in I} \vec{S}_i\big)$ para todo $p \in \bigvee_{i\in I} S_i$ (se suele elegir $p = p_i$ para algún $i \in I$) y $\overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i} = \sum_{i\in I} \vec{S}_i$.

Demostración : Consideremos

$$\vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_i p_j} \colon i, j \in I\}) + \sum_{i\in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\mathcal{A}}$$

y démonos cuenta de que

$$p_j + \vec{T} = (p_i + \overrightarrow{p_i p_j}) + \vec{T} = p_i + \vec{T} \quad \text{para todo } i, j \in I.$$

Por tanto, podemos definir

$$T = p_i + \vec{T},$$

y la expresión no depende de p_i, $i \in I$.

Si comprobamos que

$$T = \bigvee_{i\in I} S_i$$

se seguiría que $\bigvee_{i\in I} S_i = p + \vec{T}$ para todo $p \in \bigvee_{i\in I} S_i$, y por tanto la tesis de la proposición. La prueba de que $T = \bigvee_{i\in I} S_i$ la haremos por doble inclusión.

Como $\vec{S}_i \subseteq \vec{T}$ para todo $i \in I$ tenemos que

$$S_i = p_i + \vec{S}_i \subseteq p_i + \vec{T} = T$$

para todo $i \in I$, esto es, $\bigcup_{i\in I} S_i \subseteq T$ de donde

$$\bigvee_{i\in I} S_i \subseteq T$$

por definición de $\bigvee_{i\in I} S_i$. Para la otra inclusión comprobemos primero que

$$\vec{T} \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}.$$

En efecto, como $S_i \subseteq \bigvee_{i\in I} S_i$ entonces $\vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}$ para todo $i \in I$, de donde

$$\sum_{i\in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}.$$

Como para cualesquiera $i_1, i_2 \in I$ se tiene que $p_{i_1}, p_{i_2} \in \bigcup_{i\in I} S_i \subseteq \bigvee_{i\in I} S_i$, y por tanto que $\overrightarrow{p_{i_1}p_{i_2}} \in \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}$, inferimos que

$$L(\{\overrightarrow{p_ip_j} \colon i, j \in I\}) \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}.$$

En conclusión $\vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_ip_j} \colon i, j \in I\}) + \sum_{i\in I} \vec{S}_i \subseteq \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i}$ como habíamos afirmado. Pero para todo $i \in I$ tenemos que $p_i \in T \cap S_i \subseteq T \cap \big(\bigvee_{i\in I} S_i\big)$, de donde

$$T = p_i + \vec{T} \subseteq p_i + \overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i} = \bigvee_{i\in I} S_i$$

concluyendo la demostración.

Para el comentario final del caso particular $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \varnothing$, elijamos un punto $q \in \bigcap_{i\in I} S_i$ y escribamos $S_i = q + \vec{S}_i$ ($p_i = q$) para todo $i \in I$. Lo ya demostrado nos diría que

$$\overrightarrow{\bigvee_{i\in I} S_i} = \vec{T} = L(\{\overrightarrow{p_ip_j} \colon i, j \in I\}) + \sum_{i\in I} \vec{S}_i = \sum_{i\in I} \vec{S}_i,$$

ya que $\overrightarrow{p_ip_j} = \overrightarrow{qq} = \vec{0}$ para todo $i, j \in I$. De aquí que $\bigvee_{i\in I} S_i = p + \big(\sum_{i\in I} \vec{S}_i\big)$ para todo $p \in \bigvee_{i\in I} S_i$, concluyendo la demostración. ■

Corolario 2.19 *Si $q_0, q_1, \ldots q_k \in \mathcal{A}$ entonces*

$$\langle\{q_0, q_1, \ldots q_k\}\rangle = q_0 + L(\{\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_k}\}).$$

La prueba es trivial teniendo en cuenta Proposición 2.18 y la identidad genérica $\overrightarrow{q_iq_j} = -\overrightarrow{q_0q_i} + \overrightarrow{q_0q_j}$; se dejan los detalles como ejercicio.

Corolario 2.20 *Si $S_1 = p_1 + \vec{S}_1$ y $S_2 = p_2 + \vec{S}_2 \subseteq \mathcal{A}$ son dos subespacios afines:*

(I) $S_1 \vee S_2 = p + \big(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2\big)$ *para todo $p \in S_1 \vee S_2$ (luego para todo $p \in S_1 \cup S_2$; se suele elegir $p = p_1$ o $p = p_2$). En particular*

$$\overrightarrow{S_1 \vee S_2} = L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

(II) *Es cierta la siguiente equivalencia*

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Longleftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \big(\Longleftrightarrow \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2\big),$$

y si se da cualquiera de esas condiciones equivalentes entonces

$$S_1 \vee S_2 = p + \big(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\big)$$

para todo $p \in S_1 \vee S_2$ (se suele elegir $p = p_1$ o $p = p_2$).

(iii) **Fórmulas de dimensiones:**

- *Si* $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ *entonces* $\dim(S_1 \vee S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$.
- *Si* $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ *entonces* $\dim(S_1 \vee S_2) + \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) = \dim S_1 + \dim S_2 + 1$.

Demostración: Item (i) se ha demostrado en la Proposición 2.18.

En relación al item (ii), la equivalencia $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \iff \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ es trivial del item (i). Bastará con comprobar que $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. En efecto, si $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ y tomamos $q \in S_1 \cap S_2$, se tiene que $\overrightarrow{qp_i} \in \vec{S}_i$, $i = 1, 2$, y por tanto $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q} + \overrightarrow{qp_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Recíprocamente, si $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ y escribimos $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1 - u_2$ con $u_i \in \vec{S}_i$, $i = 1, 2$, los puntos $q_1 = p_1 + u_1 \in S_1$ y $q_2 = p_2 + u_2 \in S_2$ satisfacen

$$\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{(p_1 + u_1)(p_2 + u_2)} = \overrightarrow{(p_1 + u_1)p_1} + \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2(p_2 + u_2)} = -u_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + u_2 = \vec{0},$$

lo que prueba que $q_1 = q_2 \in S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ y prueba (ii).

En relación con (iii), supongamos primero que $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. En este caso $\dim S_i = \dim \vec{S}_i$, $i = 1, 2$, $\dim(S_1 \vee S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$, y $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \cap S_2} = \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$, por lo que la fórmula en cuestión no es sino la clásica fórmula de dimensiones del álgebra lineal. Supongamos ahora que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, y como antes observemos que $\dim S_i = \dim \vec{S}_i$, $i = 1, 2$, y $\dim(S_1 \vee S_2) = \dim \overrightarrow{S_1 \vee S_2} = \dim(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) + \vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \dim(L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\})) + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = 1 + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$; aquí hemos usado que que $L(\{\overrightarrow{p_1p_2}\}) \cap (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \{\vec{0}\}$ como consecuencia de (ii). La fórmula clásica de dimensiones del álgebra lineal nos dice pués que

$$\dim(S_1 \vee S_2) = 1 + \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = 1 + \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$$

y por tanto

$$\dim(S_1 \vee S_2) = 1 + \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2).$$

Démonos cuenta que en este caso $S_1 \cap S_2$ no es un subespacio afín al ser vacío (carece de sentido hablar por tanto de su dimensión), por eso en su lugar aparece el número $\dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2)$. ■

Estamos en condiciones de formalizar el concepto de paralelismo, fundamental en la geometría afín.

Definición 2.21 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y sean $S, T \subseteq \mathcal{A}$ dos subespacios afines de $\mathcal{A}$.*

- *Se dice que S es paralelo a T si $\vec{S} \subseteq \vec{T}$.*
- *Se dice que S y T son paralelos, y se escribe $S \parallel T$, si $\vec{S} = \vec{T}$ (esto es, si S es paralelo a T y T es paralelo a S).*
- *Se dice que S y T son secantes si $S \cap T \neq \varnothing$.*
- *Se dice que S y T se cruzan si*

$$S \cap T = \varnothing \quad y \quad \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T + 1.$$

Equivalentemente, S y T se cruzan si S y T no son secantes y $\vec{S} + \vec{T} = \vec{S} \oplus \vec{T}$; ver Corolario 2.20.

Es claro que si dos subespacios $S, T \subseteq \mathcal{A}$ se cruzan entonces no son secantes y no hay ninguna relación de paralelismo entre ambos ($\vec{S} \nsubseteq \vec{T}$ y $\vec{T} \nsubseteq \vec{S}$).

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se tiene que:

- La recta $S = (1,1,1) + L(\{(1,0,0)\})$ es paralela al plano $T = (1,-1,1) + L(\{(1,1,0),(0,1,0)\})$.
- $S = (1,1,1) + L(\{(1,0,0),(0,0,1)\})$ y $T = (0,1,-2) + L(\{(1,0,0),(-1,0,1)\})$ son planos paralelos.
- $S = (1,1,1) + L(\{(1,0,0)\})$ y $T = (1,0,1) + L(\{(0,-1,0)\})$ son rectas secantes: $S \cap T = \{(1,1,1)\}$.
- Las rectas $S = (1,1,1) + L(\{(1,0,0)\})$ y $T = (1,0,0) + L(\{(0,1,0)\})$ se cruzan.

Proposición 2.22 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y sean S, T dos subespacios afines de $\mathcal{A}$.*

(i) *Si S es paralelo a T entonces $S \subseteq T$ o $S \cap T = \varnothing$.*

(ii) *Si $S \parallel T$ entonces $S = T$ o $S \cap T = \varnothing$.*

(iii) *Si $p \in \mathcal{A}$, existe un único subespacio afín S_p de $\mathcal{A}$ tal que $p \in S_p$ y $S \parallel S_p$.*

Demostración : Para probar (i) supongamos que S es paralelo a T y $S \cap T \neq \varnothing$. Basta Tomar $q \in S \cap T$ y observar que $S = q + \vec{S} \subseteq q + \vec{T} = T$. Item (ii) se sigue de (i). Para probar (iii) notemos que $S_p = p + \vec{S}$ satisface lo requerido. La unicidad se sigue de que un subespacio afín está determinado unívocamente por uno de sus puntos y su variedad de dirección. ■

2.2. Sistemas de referencia afines

En el álgebra lineal analitizábamos los vectores de un espacio vectorial asignándoles sus coordenadas en una base. De esta forma es posible reducir los problemas algebraicos o geométricos abstractos a cálculos analíticos (con números reales) y asignar ecuaciones analíticas a los objetos geométricos, simplificando considerablemente su tratamiento. Este es el espíritu de la geometría cartesiana que procedemos a desarrollar en el contexto de la geometría afín. Necesitaremos alguna terminología previa.

Definición 2.23 *Una colección de puntos $\{p_0, \ldots, p_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, en un espacio afín $\mathcal{A}$ se dice afínmente independiente si los vectores $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}\}$ son linealmente indepedientes, o equivalentemente (ver Corolario 2.19), si*

$$\dim\langle\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}\rangle = k.$$

En caso contrario se dice que los puntos son afínmente dependientes.

Dado $p_0 \in \mathcal{A}$, un sistema de vectores $\{u_1, \ldots, u_k\}$ en V es linealmente independiente (dependiente) si y sólo si $\{p_0, p_0 + u_1, \ldots, p_0 + u_k\}$ son afinmente independientes (dependientes) en $\mathcal{A}$.

La ordenación elegida para la presentación de los puntos (indicada por el subíndice) no altera el carácter de dependiencia o independencia afín del sistema, ya que éste está encerrado en el valor de la dimensión del subespacio $\langle\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}\rangle$, y ésta no depende de la ordenación de los puntos.

Definición 2.24 *Dado un espacio afín $\mathcal{A}$ con* $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$, *un* sistema de referencia *$\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ es un sistema ordenado $\{p_0, \ldots, p_n\}$ de $n+1$ puntos* afínmente independientes, *o equivalentemente satisfaciendo*

$$\langle \{p_0, p_1, \ldots, p_n\} \rangle = \mathcal{A}.$$

Al punto p_0 se le llama origen *del sistema, y a la base ordenada $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ se la llama* base asociada de las direcciones *de $\mathcal{R}$.*

Obsérvese que si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ y $p_0 \in \mathcal{A}$, el sistema ordenado de puntos

$$\mathcal{R} = \{p_0, p_0 + v_1, \ldots, p_0 + v_n\}$$

es un sistema de referencia de $\mathcal{A}$ con origen p_0 y base asociada de direcciones B. Por tanto, y de forma alternativa, podríamos definir un sistema de referencia como un par

$$\mathcal{R} = \{p_0, B\}$$

donde p_0 es un punto de $\mathcal{A}$ (orígen de $\mathcal{R}$) y B una base ordenada de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ (base de direcciones de $\mathcal{R}$).

Notación 2.25 *En lo que sigue, dada una base ordenada $B = \{v_1 \ldots, v_n\}$ de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, denotaremos por*

$$\Phi_B \colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}^n$$

al isomorfismo asignación de coordenadas *en la base B escrito con notación columna. En otras palabras,*

$$\Phi_B(v) = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \Longleftrightarrow v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = (v_1, \ldots, v_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}.$$

A veces también escribiremos $\Phi_b(v) = v_B$ de forma simplificada para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

Los sistemas de referencia se utilizan para asignar coordenadas a los puntos del espacio afín.

Definición 2.26 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín, y consideremos un sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\} \equiv \{p_0, B\}$, donde $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$. La aplicación* biyectiva *(ver Defินción 2.4)*

$$\Phi_{\mathcal{R}} \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi_{\mathcal{R}} = \Phi_B \circ F_{p_0}$$

es conocida como la aplicación asignación de coordenadas *(con notación columna) en el sistema de referencia $\mathcal{R}$. De forma simplificada escribiremos*

$$p_{\mathcal{R}} := \Phi_B(F_{p_0}(p)) \equiv (\overrightarrow{p_0p})_B \in \mathbb{R}^n,$$

y diremos que $p_{\mathcal{R}}$ son las coordenadas de $p \in \mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$.

De forma más explícita, si $p \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ es un sistema de referencia en $\mathcal{A}$,

$$p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{p_0p} = \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{p_0p_j} \quad \Longleftrightarrow \quad p = p_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{p_0p_j}.$$

Definición 2.27 *En el espacio afín euclidiano $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura afín canónica, el sistema de referencia*

$$\mathcal{R}_0 = \{(0, \ldots, 0), B_0\},$$

donde $B_0 = \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es conocido como el sistema de referencia canónico o natural de $\mathbb{R}^n$. Para todo punto $p = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}},$$

esto es, las coordenadas en $\mathcal{R}_0$ de un punto de $\mathbb{R}^n$ coinciden con las que definen al mismo punto.

Otros espacios afines clásicos como $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (polinomios con coeficientes reales en una variable de grado $\leq n$), $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (matrices reales de orden $n \times m$), $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (matrices simétricas reales de orden n),.... admiten también de forma natural sistemas de referencia canónicos.

Propiedades 2.28 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\} \equiv \{p_0, B\}$ un sistema de referencia afín, donde $B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$. Entonces*

(i) $(p + v)_{\mathcal{R}} = p_{\mathcal{R}} + v_B$.

(ii) $(\overrightarrow{pq})_B = q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}}$.

Demostración : Usando Definición 2.26 y que Φ_B es lineal, tenemos que

$$(p + v)_{\mathcal{R}} = \big(\overrightarrow{p_0(p + v)}\big)_B = (\overrightarrow{p_0p} + v)_B = (\overrightarrow{p_0p})_B + v_B = p_{\mathcal{R}} + v_B,$$

lo que prueba (i). Análogamente,

$$q_{\mathcal{R}} - p_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0q})_B - (\overrightarrow{p_0p})_B = (\overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p})_B = (\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0q})_B = (\overrightarrow{pq})_B,$$

lo que prueba (ii). ■

Es fácil comprobar que Propiedades 2.28-(ii) simplemente expresa la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{R}} \times \Phi_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "\to"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\to"] \\
\overrightarrow{\mathcal{A}} \arrow[r, "\Phi_B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

donde en $\mathbb{R}^n$ se considera la estructura afín usual. El significado de esta conmutatividad de diagramas es que la estructura de espacio afín abstracta $\to$ en $\mathcal{A}$ es equivalente a la canónica o usual $\to$ de $\mathbb{R}^n$, salvo las asignaciones naturales de coordenadas $\Phi_{\mathcal{R}} \times \Phi_{\mathcal{R}}$ y Φ_B inducidas por un sistema de referencia $\mathcal{R}$ y su base de direcciones B.

2.2.1. Cambio de sistema de referencia

Las coordenadas de un mismo punto en sistemas de referencia diferentes son en general distintas, y por tanto, es natural preguntarse cómo cambian al cambiar de sistema de referencia. Estas fórmulas son conocidas en la literatura como *fórmulas del cambio de sistema de referencia*. Expliquemos con detalle cómo son.

Recordemos que dado un espacio vectorial $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ con $\dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = n \in \mathbb{N}$ y dos bases B y B' en él, las ecuaciones del cambio de base de B a B' se escribían, en notación columna, de la siguiente forma

$$v_{B'} = M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big) \cdot v_B,$$

donde $M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big)$ es la matriz del cambio de base de B a B' (notación columna). A modo de recordatorio, en la columna j-ésima de $M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big)$ aparecían las coordenadas en B' del vector j-ésimo de B para todo $j = 1, \ldots, n$.

Consideremos a continuación un espacio afín $\mathcal{A}$ con $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$, y dentro de él dos sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ y $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$, donde como bien sabemos B y B' son bases de la variedad de dirección $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$.

Tomemos un punto $p \in \mathcal{A}$ genérico, e intentemos relacionar las coordenadas $p_{\mathcal{R}}$ y $p_{\mathcal{R}'}$ en los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ de forma similar a como se hacía con el cambio de base en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Teniendo en cuenta Definición 2.26 y Propiedades 2.28, es inmediato que

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0 + \overrightarrow{p_0p})_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + (\overrightarrow{p_0p})_{B'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big) \cdot (\overrightarrow{p_0p})_B,$$

y por tanto

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big) p_{\mathcal{R}}.$$

Definición 2.29 (Fórmula del cambio de sistema de referencia) *La fórmula*

$$p_{\mathcal{R}'} = (p_0)_{\mathcal{R}'} + M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big) p_{\mathcal{R}}$$

es conocida como la expresión matricial de las ecuaciones del cambio de sistema de referencia *de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ (en ese orden). Esta ecuación matricial puede escribirse de una forma más compacta con ayuda de la matriz cuadrada de orden $n+1$*

$$M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\big) := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline (p_0)_{\mathcal{R}'} & M\big(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B, B'\big) \end{array}\right),$$

conocida en la literatura como matriz del cambio de sistema de referencia *de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. En efecto, basta observar que la anterior ecuación matricial es equivalente a la expresión:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

La ecuación del cambio de sistema de referencia permite conocer las coordenadas en un sistema de referencia $\mathcal{R}'$ de un punto $p \in \mathcal{A}$ a partir de las coordenadas de p en otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ a partir de los datos:

- Coordenadas en $\mathcal{R}'$ del origen p_0 de $\mathcal{R}$.
- Matriz del cambio de base en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ de la base B de las direcciones de $\mathcal{R}$ a la base B' de las direcciones de $\mathcal{R}'$.

Definición 2.30 (Grupo afín) *El conjunto de matrices*

$$\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) : A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}),\, b \in \mathbb{R}^n \right\}$$

es conocido como el grupo afín *de orden n.*

Claramente $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ está contenido en el grupo lineal $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, ya que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) = \det A \neq 0,$$

y de hecho es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ respecto al producto de matrices.

El anterior cálculo nos dice que para cualesquiera sistemas de referencia $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ en $\mathcal{A}$ la matriz $M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\big)$ pertenece a $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$. Además, no es difícil ver que:

Observación 2.31 *Si* $\mathcal{R}$ *es un sistema de referencia en* $\mathcal{A}$ *y* $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ *entonces existe un único sistema de referencia* $\mathcal{R}'$ *en* $\mathcal{A}$ *tal que*

$$M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\big) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right).$$

La demostración se deja como ejercicio. Las siguientes propiedades son inmediatas:

Propiedades 2.32 *Dado un espacio afín* $\mathcal{A}$ *con* $\dim \mathcal{A} = n$ *y sistemas de referencia* $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$, $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ *y* $\mathcal{R}'' = \{p_0'', B''\}$ *en* $\mathcal{A}$ *, se tiene que:*

(i) $M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}\big) = \mathrm{I}_{n+1}$.

(ii) $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'') = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$.

(iii) $M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'\big) = M\big(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}\big)^{-1}$.

Demostración: El item (i) es consecuencia de que $M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B, B) = \mathrm{I}_n$ y $(p_0)_{\mathcal{R}} = 0$. Para ver (ii), notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

para todo $p \in \mathcal{A}$, de donde

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}''} \end{pmatrix} = \big(M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}')\big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$$

para todo $p \in \mathcal{A}$ y se tiene el resultado. El item (iii) es trivial de (i) y (ii). ■

Ejercicio 2.33 *Consideremos el espacio* $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ *de las matrices simétricas de orden dos con coeficientes reales, dotado de su estructura afín natural, y en él los siguientes sistemas de referencia:*

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ p_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Determina las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_0$ *a* $\mathcal{R}_1$.

Solución: Como $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia natural o canónico de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, lo más sencillo es calcular las ecuaciones del cambio de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_0$, esto es, la matriz $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)$. Comenzaremos por este cálculo.

El punto origen origen de $\mathcal{R}_1$ tiene coordenadas $(q_0)_{\mathcal{R}_0} = (1, 2, -1)^{\mathrm{t}}$ en $\mathcal{R}_0$. Análogamente, la matriz del cambio de base de B_1 a B_0 en el espacio vectorial $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ viene dada por

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, B_1, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_0$ queda:

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_0$ a $\mathcal{R}_1$ quedan:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde $p_{\mathcal{R}_1} = (x'.y', z')^{\mathrm{t}}$ y $p_{\mathcal{R}_0} = (x, y, z)^{\mathrm{t}}$ representan las coordenadas genéricas de un punto $p \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ en $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_0$, respectivamente.

■

2.2.2. Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios

Una de las ventajas de la asignación de coordenadas en sistemas de referencia es que se puede representar los subespacios afines mediante distintos tipos de ecuaciones analíticas. Expliquémoslo con detalle.

Consideremos un espacio afín $\mathcal{A}$ con $\dim \mathcal{A} = n \in \mathbb{N}$, y un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$. Como siempre p_0 es el origen de $\mathcal{R}$ y B la base de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ asociada a $\mathcal{R}$. Sea $S = q + \vec{S}$ un subespacio afín con $\dim S = k \leq n$, y escribamos

$$\vec{S} = L(\{u_1, \ldots, u_k\}),$$

donde $B' = \{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ordenada de $\vec{S}$. Tenemos que

$$p \in S \Longleftrightarrow p = q + u, \quad u \in \vec{S} \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \ p = q + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j.$$

Por tanto

$$p \in S \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \ p_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} + \big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j\big)_B = q_{\mathcal{R}} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (u_j)_B.$$

Si consideramos el monomorfismo inclusión $\mathrm{i}_{\vec{S}} \colon \vec{S} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$, recordemos que la matriz de $\mathrm{i}_{\vec{S}}$ en las bases B' y B, que escribiremos $M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B)$, tiene por columna j-ésima justo el vector $(u_j)_B$, $j = 1, \ldots, k$. Por tanto, la anterior expresión se puede reescribir de forma matricial así

$$p \in S \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \ p_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} + M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^{\mathrm{t}}.$$

Definición 2.34 *La expresión analítica*

$$(x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{t}} = q_{\mathcal{R}} + M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^{\mathrm{t}}.$$

es conocida como las ecuaciones paramétricas *de S en el sistema de referencia $\mathcal{R}$ (definidas por el punto $q \in S$ y la base ordenada B' de $\vec{S}$). Expresa que un punto p de $\mathcal{A}$ pertenece a S si y sólo si existen valores para los parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ haciendo válida la anterior expresión cuando $(x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{t}}$ son las coordenadas de p en $\mathcal{R}$.*

La interpretación geométrica de las ecuaciones paramétricas es sencilla: las variables $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son parámetros que, al variar libremente en $\mathbb{R}$, determinan las coordenadas en $\mathcal{R}$ de todos los puntos de S.

Ejercicio 2.35 *En el espacio afín natural asociado al espacio vectorial*

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

de los polinomios de grado ≤ 2, determina unas ecuaciones paramétricas del subespacio $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(1) = 1\}$ en el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0 = \{0, B_0 = \{1, x, x^2\}\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Solución: Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, la condición $p'(1) = 1$ se escribe $a_1 + 2a_2 = 1$. Inferimos de aquí que $q(x) = x \in S$ y $p(x) \in S$ si y sólo si $p(x) - q(x) \in \vec{S}$, donde

$$\vec{S} = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(1) = 0\} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon a_1 + 2a_2 = 0\}.$$

En otras palabras $S = q(x) + \vec{S}$ es el subespacio afín que pasa por $q(x) = x \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y tiene por variedad de dirección el subespacio vectorial $\vec{S} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$.

Una ecuación implícita de $\vec{S}$ en la base canónica $B_0 = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $a_1 + 2a_2 = 0$, que tiene por conjunto de soluciones en $\mathbb{R}^3$

$$\{(\lambda_1, -2\lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto $B' = \{q_1(x) = 1, q_2(x) = -2x + x^2\}$ es base de $\vec{S}$ y claramente

$$M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathrm{i}_{\vec{S}} \colon \vec{S} \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es la aplicación inclusión. Por otra parte, el punto $q(x) = x$ tiene por coordenadas en $\mathcal{R}_0$

$$q(x)_{\mathcal{R}_0} = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}.$$

Por tanto las ecuaciones paramétricas de S en la base B' de $\vec{S}$ y el sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ son

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}} + M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B_0) \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^{\mathrm{t}} = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^{\mathrm{t}},$$

donde $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$ representa las coordenadas genéricas $p(x)_{\mathcal{R}_0}$ en $\mathcal{R}_0$ de un punto $p(x)$ de S. ∎

Los parámetros en las anteriores ecuaciones paramétricas pueden ser cancelados por un proceso de eliminación estándar que explicaremos a continuación, y que nos llevará a la existencia de ecuaciones implícitas o cartesianas de S de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 2.36 *Un sistema de $n-k$ $(0 \leq k < n)$ ecuaciones lineales* linealmente independientes

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k\,1}x_1 & + & a_{n-k\,2}x_2 & + \cdots & a_{n-k\,n}x_n & = & b_{n-k} \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

se dice que representa unas ecuaciones implícitas o cartesianas para un subespacio afín S de $\mathcal{A}$ respecto de un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ si es cierto el siguiente enunciado:

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ es solución de (I)} \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} = p_{\mathcal{R}} \text{ para algún } p \in S.$$

Observa que, de existir, las ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{R}$ no son únicas: basta transformar el sistema de ecuaciones anterior en otros equivalentes.

Proposición 2.37 *Todo subespacio afín S de $\mathcal{A}$ con $1 \leq \dim S < n = dim\mathcal{A}$ admite unas ecuaciones implícitas respecto de cualquier sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Escribamos $\dim S = k$ y describamos S como al inicio de esta sección, aprovechando la notación anterior. De las ecuaciones paramétricas para S respecto de $\mathcal{R}$ definidas por un punto $q \in S$ y una base B' ordenada de $\vec{S}$ (ver Definición 2.34) se deduce que:

$$p \in S \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}: \; p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}} = M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B) \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^{\mathrm{t}},$$

esto es,

$$p \in S \Longleftrightarrow \operatorname{rang}\big(M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B) \mid p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}}\big) = \operatorname{rang}\big(M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B)\big) = \dim S = k.$$

Siguiendo el procedimiento estándar del álgebra lineal, tras elegir una submatriz M_0 de orden k de $M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B)$ con menor asociado (determinante) no nulo, todas las $n-k$ submatrices de $\big(M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B', B) \mid p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}} \big)$ de orden $k+1$ conteniendo a M_0 han de tener determinante nulo. Escribiendo $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ y $q_{\mathcal{R}} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{t}}$, esos $n-k$ menores nulos generan un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1-c_1) & + & a_{12}(x_2-c_2) & + \cdots & a_{1n}(x_n-c_n) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k\,1}(x_1-c_1) & + & a_{n-k\,2}(x_2-c_2) & + \cdots & a_{n-k\,n}(x_n-c_n) & = & 0 \end{array}\right\},$$

o si se prefiere tras operar convenientemente

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k\,1}x_1 & + & a_{n-k\,2}x_2 & + \cdots & a_{n-k\,n}x_n & = & b_{n-k} \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Solo nos resta garantizar que las ecuaciones en (I) son linealmente independientes. Notemos que la misma argumentación anterior (salvo hacer $q_{\mathcal{R}} \equiv 0$, o $c_j = 0$ para todo

$j = 1, \ldots, n$) nos dice que unas ecuaciones implícitas para $\vec{S}$ respecto de la base B de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ vienen dadas por el correspondiente sistema homogéneo asociado a (I), a saber,

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k\,1}x_1 & + & a_{n-k\,2}x_2 & + & \cdots & a_{n-k\,n}x_n & = & 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})_0$$

Por la teoría de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, esta apreciación nos garantiza que las $n-k$ ecuaciones de $(\mathrm{I})_0$ son linealmente independientes (ya que su conjunto de soluciones es de dimensión k al ser $\dim \overrightarrow{S} = k$), y por tanto lo mismo ocurre para las ecuaciones en (I) concluyendo la prueba. ■

Observación 2.38 *La Proposición 2.37 es formalmente válida para* $\dim S = 0$*. En efecto, los subespacios* $S = \{q\}$*,* $q \in \mathcal{A}$*, admiten como ecuaciones implícitas en* $\mathcal{R}$ *cualquier sistema de* n *ecuaciones con* n *incógnitas (*$n = \dim \mathcal{A}$*) con solución única* $q_{\mathcal{R}}$*.*

La anterior proposición y subsiguiente observación tienen un recíproco natural muy interesante que nos proporciona un mecanismo analítico sencillo para presentar todos subespacios afines de $\mathcal{A}$ (distintos del propio $\mathcal{A}$).

Proposición 2.39 *Sean* $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ *y* $C \in \mathcal{M}_{(n-k)\times n}(\mathbb{R})$ *(*$0 \leq k < n$*) con* $\mathrm{rang}(C) = n-k$ *tales que el sistema de ecuaciones lineales* $C \cdot x^{\mathrm{t}} = b$*, donde* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*, es compatible. Sean* $\mathcal{A}$ *un espacio afín* n *dimensional y* $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ *un sistema de referencia en* $\mathcal{A}$*, y definamos*

$$S := \{p \in \mathcal{A} \colon C \cdot p_{\mathcal{R}} = b\}.$$

Entonces S *es un subespacio afín de dimensión* k *en* $\mathcal{A}$ *y* $C \cdot x^{\mathrm{t}} = b$ *son unas ecuaciones implícitas de* S *en el sistema de referencia* $\mathcal{R}$*. Además,* $C \cdot x^{\mathrm{t}} = 0$ *son unas ecuaciones implícitas de* $\vec{S}$ *en la base* B *de* $\overrightarrow{\mathcal{A}}$*.*

Demostración: La estrategia básica consiste en probar que S es de la forma $q + U$ para algún $q \in \mathcal{A}$ y $U \leq \overrightarrow{\mathcal{A}}$ subespacio vectorial.

Definamos

$$U := \{v \in \overrightarrow{\mathcal{A}} \colon C \cdot v_B = 0\}.$$

Trivialmente U es un subespacio vectorial k-dimensional de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ (de hecho el definido con ecuaciones implícitas $C \cdot x^{\mathrm{t}} = 0$ respecto de la base B).

Por otra parte, como el sistema $C \cdot x^{\mathrm{t}} = b$ es compatible podemos elegir una solución $x_0 \in \mathbb{R}^n$ del mismo y definir $q = \Phi_{\mathcal{R}}^{-1}(x_0)$. Claramente el punto $q \in S \neq \emptyset$ por construcción.

Para concluir probaremos que S es el subespacio afín $q+U$. En efecto, como $C \cdot q_{\mathcal{R}} = b$ tenemos que

$$p \in S \iff C \cdot (p_{\mathcal{R}} - q_{\mathcal{R}}) = 0 \iff C \cdot (\overrightarrow{pq})_B = 0 \iff \overrightarrow{pq} \in U \iff p \in q + U.$$

De la definición de S y la Definición 2.36 se sigue que $C \cdot x^{\mathrm{t}} = b$ son unas ecuaciones implícitas de S respecto de $\mathcal{R}$. Por definición también $\vec{S} = U$, y por tanto $C \cdot x^{\mathrm{t}} = 0$ son unas ecuaciones implícitas de $\vec{S}$ en la base B de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Esto acaba la prueba. ■

Corolario 2.40 *Si* S *es un subespacio afín de* $\mathcal{A}$ *con* $0 \leq \dim S = k < n = dim \mathcal{A}$*, entonces todas las ecuaciones implícitas de* S *respecto de cualquier sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$ *consisten en* $n-k$ *ecuaciones lineales linealmente independientes.*

Ejercicio 2.41 *En el espacio afín natural asociado al espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado ≤ 2, determina unas ecuaciones implícitas del subespacio*

$$S = 1 - x + L(\{-1 + x^2, x + 2x^2\})$$

en el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0 = \{0, B_0 = \{1, x, x^2\}\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Solución: Es claro que $\vec{S} = L(\{-1 + x^2, x + 2x^2\})$, de donde $B = \{-1 + x^2, x + 2x^2\}$ es una base de $\vec{S}$. Como y $1 - x \in S$, unas ecuaciones paramétricas de S en B y $\mathcal{R}_0 = \{1, x, x^2\}$ son

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (1, -1, 0)^{\mathrm{t}} + M(\mathrm{i}_{\vec{S}}, B, B_0) \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^{\mathrm{t}} = (1, -1, , 0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^{\mathrm{t}}.$$

Por el algoritmo explicado, S tiene como ecuación implícita en $\mathcal{R}_0$

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & 0 \\ x_2 + 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 - x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

■

2.3. Rectas en espacios afines tridimensionales

En lo que sigue $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ })$ será un espacio afín con $\dim \mathcal{A} = 3$. El concepto de haz de planos simplifica mucho la resolución del problema de encontrar el plano de $\mathcal{A}$ conteniendo a una recta y un punto exterior a la misma.

Definición 2.42 *Dada una recta afín $R \subset \mathcal{A}$, el haz de planos con base la recta R, denotado $\mathcal{H}_R$, es el conjunto de todos los planos afines en $\mathcal{A}$ que contienen a R:*

$$\mathcal{H}_R = \{T \subset \mathcal{A} \text{ plano afín: } R \subset T\}.$$

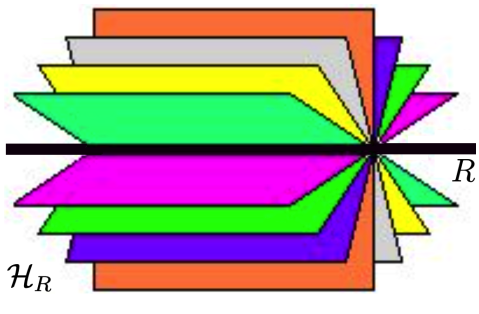


Figura 7: Haz de planos $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ determinado por la recta R.

La siguiente proposición nos proporciona un algoritmo sencillo para determinar $\mathcal{H}_R$.

Proposición 2.43 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín con $\dim \mathcal{A} = 3$, $\mathcal{R}$ un sistema de referencia en $\mathcal{A}$ y $R \subset \mathcal{A}$ una recta afín con ecuaciones implícitas*

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_0 = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_0 = 0.$$

Los siguientes enunciados son ciertos:

(I) *Un plano $S \in \mathcal{H}_R$ si y sólo si S tiene ecuación implícita en $\mathcal{R}$ de la forma*

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0$$

para alguna pareja $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(II) *Dado $q \in \mathcal{A} \setminus R$, $S_q = \{q\} \vee R$ es el único plano en $\mathcal{H}_R$ con $q \in S_q$.*

(III) *Si $q_{\mathcal{R}} = (x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{t}}$ y $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ satisface*

$$\lambda_0(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) + \mu_0(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0) = 0,$$

entonces S_q tiene por ecuaciones implícitas

$$\lambda_0(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu_0(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0.$$

Demostración: Para probar (i), observemos que si S es un plano que admite por ecuación implícita en $\mathcal{R}$

$$\lambda(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

entonces es claro que $R \subset S$, y por tanto que $S \in \mathcal{H}_R$ (los puntos que satisfacen las ecuaciones implícitas de R en el enunciado también satisfacen la de S).

Recíprocamente, sea $S \in \mathcal{H}_R$ y tomemos una ecuación implícita de S en $\mathcal{R}$

$$c_1x + c_2y + c_3z + c_0 = 0.$$

Por simplicidad introduzcamos la siguiente notación

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_0),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_0),\ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_0).$$

Al ser $S \in \mathcal{H}_R$ todo punto de R ha de pertenecer a S, esto es,

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0.$$

Por tanto el sistema de ecuaciones lineales

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = \vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0$$

es equivalente (tiene el mismo conjunto de soluciones) al sistema

$$\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0,$$

en el que sus dos ecuaciones son linealmente independientes. Del método de Gauss para la resolución de sistemas, deducimos que la ecuación $\vec{c} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0$ ha de ser combinación lineal de las ecuaciones $\vec{a} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0, \vec{b} \cdot (x, y, z, 1)^{\mathrm{t}} = 0$, de donde se sigue (i).

Item (ii) es consecuencia trivial de que $\dim S_q = 2$ (ver Corolario 2.20-(iii)).

Comprobemos (iii). Si $q_{\mathcal{R}} = (x_0, y_0, z_0)^{\mathrm{t}}$, la condición $q \notin R$ garantiza que alguno de los números reales $a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0, b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0$ ha de ser no nulo, y por tanto el sistema de ecuaciones lineales con incógnitas λ, μ

$$\lambda(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) + \mu(b_1x_0 + b_2y_0 + b_3z_0 + b_0) = 0$$

es compatible e indeterminado. Sus soluciones son un subespacio vectorial 1-dimensional $L\{(\lambda_0, \mu_0)\} \leq \mathbb{R}^2$, $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0)$, y por construcción el plano de ecuación implícita

$$\lambda_0(a_1x + a_2y + a_3z + a_0) + \mu_0(b_1x + b_2y + b_3z + b_0) = 0$$

coincide con S_q; ver (i) y (ii). ■

En un espacio afín $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ })$ tridimensional, dos rectas $R_1, R_2 \subset \mathcal{A}$ que no sean ni paralelas ni secantes se han de cruzar. Esto es consecuencia de que $\dim(\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2) = 0$ y por tanto

$$\dim(R_1 \vee R_2) = \dim R_1 + \dim R_2 - \dim(\vec{R}_1 \cap \vec{R}_2) + 1 = \dim R_1 + \dim R_2 + 1 = 3,$$

donde hemos usado la conocida fórmula de dimensiones.

Pretendemos resolver el problema geométrico de determinar la recta en $\mathcal{A}$ que se apoya en dos rectas dadas y que pasa por un punto exterior a las mismas. El manejo del haz de planos asociado a una recta será el ingrediente geométrico necesario para su resolución.

Definición 2.44 *Dadas dos rectas R_1, R_2 en un espacio afín $\mathcal{A}$ con $\dim \mathcal{A} = 3$ y un punto $p_0 \in \mathcal{A}$, se dice que una recta afín $R \subseteq \mathcal{A}$* pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2 *si satisface las condiciones*

$$p_0 \in R \quad y \quad R \cap R_j \neq \emptyset, \quad j = 1, 2.$$

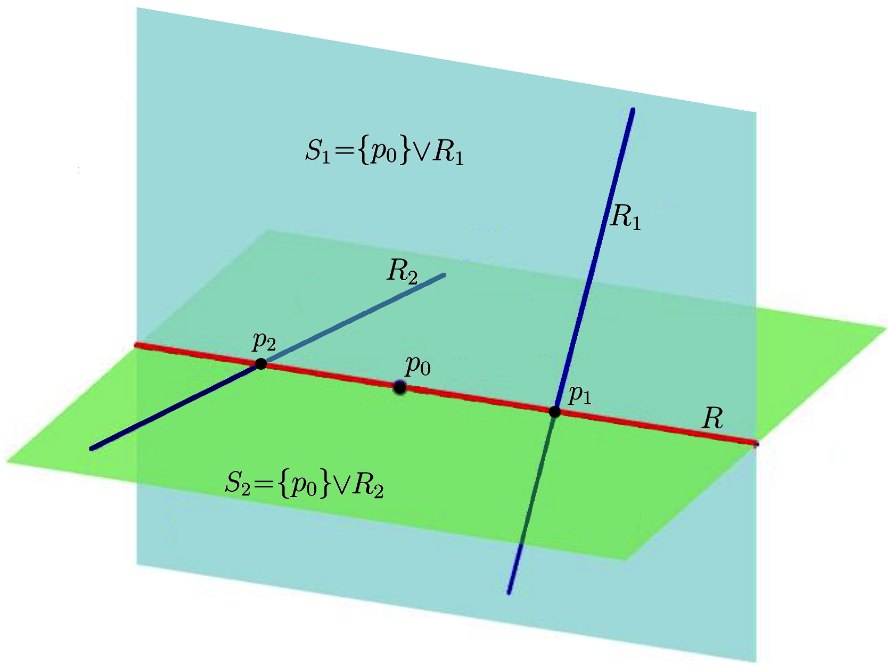


Figura 8: Recta R que pasa por p_0 y se apoya en R_1 y R_2.

Proposición 2.45 *Sean R_1, $R_2 \subset \mathcal{A}$ rectas que se cruzan y $p_0 \in \mathcal{A}$ punto tal que*

$$p_0 \notin R_1 \cup R_2 \quad y \quad R_i \text{ no es paralela al plano } S_j = \{p_0\} \vee R_j, \ \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Entonces $R = S_1 \cap S_2$ es la única recta afín en $\mathcal{A}$ que se apoya en R_1 y R_2.

Demostración : Para empezar observemos que las fórmulas de dimensiones en Corolario 2.20-(iii) garantizan que $\dim S_j = 2$, $j = 1, 2$. Comprobemos que $R = S_1 \cap S_2$ es una recta que se apoya en R_1 y R_2 (obviamente $p_0 \in R$). En efecto, como las rectas R_1, R_2 se cruzan (y por tanto no son coplanarias), las condiciones $R_j \subset S_j$, $j = 1, 2$, implican que $S_1 \neq S_2$. Además, como $p_0 \in S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, las fórmulas de dimensiones en Corolario

2.20-(iii) implican que $R = S_1 \cap S_2$ es una recta pasando por p_0. Las hipótesis de que R_i no es paralelo a $S_j = \{p_0\} \vee R_j$, $\{i,j\} = \{1,2\}$, y las fórmulas de dimensiones de nuevo garantizan que $S_j \cap R_i$ es un punto $\{p_j\}$, $j = 1,2$. Pero $S_j \cap R_i \subseteq S_1 \cap S_2 = R$, de donde $p_j \in R \cap R_i \subseteq S_j \cap R_i$ y por tanto $\{p_j\} = R \cap R_i = S_j \cap R_i$, $j = 1,2$. Ésto prueba que R se apoya en R_1 y R_2 como deseábamos.

Para la unicidad, observemos que si R' es otra recta apoyándose en R_1 y R_2 y conteniendo a p_0 entonces $R' \vee R_j$ es un plano por Corolario 2.20-(iii), y como $p_0 \in R' \vee R_j$ necesariamente $R' \vee R_j = \{p_0\} \vee R_j = S_j$, $j = 1,2$. De aquí que

$$R = S_1 \cap S_2 = (R' \vee R_1) \cap (R' \vee R_2) = R'.$$

■

2.4. Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 2.46 *Se consideran las rectas afines en* $\mathbb{R}^3$

$$R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z - 1 = x - y = 0\},$$

$$R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y + z - 1 = 2x - y - z - 3 = 0\}.$$

Encontrar la recta R *en* $\mathbb{R}^3$ *que se apoya en* R_1, R_2 *y pasa por* $p_0 = (0,0,-1)$.

Solución : Es fácil comprobar que p_0, R_1 y R_2 están en las condiciones de la Proposición 2.45, por lo que el ejercicio tiene sentido.

El plano S_1 del haz $\mathcal{H}_{R_1}$ que contiene a p_0 se calcula imponiendo que la ecuación

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - y) = 0$$

se satisfaga para $x = 0, y = 0, z = -1$. Tras un cálculo inmediato obtenemos $-2\lambda = 0$, esto es $\lambda = 0$ (μ puede tomar cualquier valor no nulo). Por tanto S_1 es el plano de ecuación implícita

$$x - y = 0.$$

Análogamente, el plano S_2 del haz $\mathcal{H}_{R_2}$ que contiene a p_0 se calcula imponiendo que la ecuación

$$\lambda(y + z - 1) + \mu(2x - y - z - 3) = 0$$

se satisfaga para $x = 0, y = 0, z = -1$. Tras un cálculo inmediato obtenemos $-2\lambda - 2\mu = 0$, esto es $\lambda = -\mu$ (μ puede tomar cualquier valor no nulo). Por tanto S_2 es el plano de ecuación implícita

$$\mu\big((y + z - 1) - (2x - y - z - 3)\big) = 0, \quad \text{esto es,} \quad -x + y + z + 1 = 0.$$

La recta R es la de ecuaciones implícitas en el sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ usual de $\mathbb{R}^3$

$$x - y = -x + y + z + 1 = 0.$$

■

Ejercicio 2.47 *Encontrar la recta del espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *que pasa por* $p_0 = (1,1,1)$ *y se apoya en las rectas* $R_1 = (0,0,1) + L\{(1,0,1)\}$ *y* $R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = z - y + 1 = 0\}$.

Solución: Unas ecuaciones paramétricas de R_1 en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0), B_0\}$ de $\mathbb{R}^3$ (B_0 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$) son

$$(x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,1)^{\mathrm{t}} + (1,0,1)^{\mathrm{t}}\lambda = (\lambda, 0, 1+\lambda)^{\mathrm{t}}.$$

Para encontrar unas ecuaciones paramétricas de R_2 en $\mathcal{R}_0$ resolvemos el sistema compatible e indeterminado

$$x + y = z - y + 1 = 0,$$

que nos lleva al conjunto de soluciones

$$(x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,-1)^{\mathrm{t}} + (-1,1,1)^{\mathrm{t}}\mu = (-\mu, \mu, -1+\mu)^{\mathrm{t}}.$$

Bastará con encontrar puntos en R_1 y R_2 alineados con $p_0 = (1,1,1)$, esto es, encontrar valores de λ y μ para los cuales los puntos

$$(\lambda, 0, 1+\lambda),\ (-\mu, \mu, -1+\mu),\ (1,1,1)$$

estén alineados (no sean afínmente independientes). La condición de alineación se expresa diciendo que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\mu-1 \\ -1 & \mu-1 \\ \lambda & \mu-2 \end{pmatrix} = 1,$$

lo que fuerza a que

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -\mu-1 \\ -1 & \mu-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & \mu-1 \\ \lambda & \mu-2 \end{pmatrix} = 0.$$

Este sistema de ecuaciones tiene como soluciones únicas $\lambda = -4, \mu = 2/3$, de donde la recta buscada es:

$$R = \langle\{(-4,0,-3), (-2/3, 2/3, -1/3), (1,1,1)\}\rangle = \langle\{(-4,0,-3),(1,1,1)\}\rangle,$$

esto es $R = (-4,0,-3) + L(\{(5,1,4)\})$. ■

Ejercicio 2.48 *Calcular un sistema de referencia afín, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de:*

(a) *El hiperplano afín S de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $p = (1,0,0,0)$, $q = (0,1,0,0)$, $r = (0,0,1,0)$ y $s = (0,0,0,1)$,*

(b) *Un plano afín de $\mathbb{R}^3$ que contenga a las rectas afines $S = (1,0,2) + L((1,-1,0))$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y-z = -1,\ y-z = 2\}$,*

(c) *El hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$ paralelo al de ecuación $x - y + z - t = 7$ y que pasa por el punto $p = (1,-2,3,-2)$.*

Solución: Resolvamos (a). Como $S = \langle\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\rangle$, y los puntos $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ son afínmente independientes,

$$\mathcal{R} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

es un sistema de referencia de S con origen $(1,0,0,0)$ y base de direcciones $B = \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

Si denotamos por $\mathcal{R}_0$ el sistema de referencia usual o canónico de $\mathbb{R}^4$, unas ecuaciones paramétricas de S en $\mathcal{R}_0$ vienen dadas por:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{t}} = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^{\mathrm{t}}.$$

Por último, una ecuación implícita para S en $\mathcal{R}_0$ surge de la condición

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

esto es,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & -1 & -1 & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0.$$

Para resolver (b) observemos que S y T son secantes. En efecto, los puntos de $(x, y, z) \in S$ se describen por las ecuaciones paramétricas

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, -\lambda, 2).$$

Sustituyendo x por $1 + \lambda$, y por $-\lambda$ y z por 2 en las ecuaciones implícitas que definen T queda

$$-1 = -1, \quad -2 - \lambda = 2 \Longleftrightarrow -4 - \lambda = 0,$$

que se resuelve para $\lambda = -4$. El punto obtenido en las ecuaciones paramétricas de S para $\lambda = -4$ es $q = (-3, 4, 2)$, de donde

$$S \cap T = \{(-3, 4, 2)\}$$

y las rectas son secantes. Por otra parte es inmediato comprobar que

$$\vec{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0,\ y - z = 0\} = L(\{(0, 1, 1)\}).$$

Como $\vec{S} = L(\{(1, -1, 0)\})$, es claro que el plano que contiene a S y T es el subespacio afín

$$S \vee T = (-3, 4, 2) + L(\{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}).$$

Como los vectores $\{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ son linealmente independientes,

$$\mathcal{R} = \{(-3, 4, 2), B = \{(0, 1, 1), (1, -1, 0)\}\}$$

es un sistema de referencia de $S \vee T$.

Unas ecuaciones paramétricas de $S \vee T$ en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$ son

$$(x, y, z)^{\mathrm{t}} = (-3, 4, 2)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1, \lambda_2)^{\mathrm{t}}.$$

De aquí que sus ecuaciones implícitas vengan dadas por la condición

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

esto es,

$$\det\begin{pmatrix} x+3 & 0 & 1 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x+y-z+1 = 0.$$

Por último resolvamos (c). Un hiperplano afín S de $\mathbb{R}^4$ paralelo al de ecuación $x-y+z-t=7$ ha de tener su misma variedad de dirección

$$\vec{S} = \vec{T} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x-y+z-t=0\},$$

y por tanto tiene por ecuación implícita $x-y+z-t=k$ para algún $k \in \mathbb{R}$. Como además pasa por el punto $p=(1,-2,3,-2)$, este punto ha de satisfacer la ecuación implícita anterior, esto es,

$$8 = 1+2+3+2 = k.$$

Por tanto el hiperplano buscado es el de ecuación implícita

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x-y+z-t=8\}.$$

Como $\vec{S} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x-y+z-t=0\} = L(\{(1,1,0,0)(0,0,1,1),(1,0,-1,0)\})$ y el punto $p_0=(8,0,0,0) \in S$, deducimos que

$$S = (8,0,0,0) + L(\{(1,1,0,0)(0,0,1,1),(1,0,-1,0)\})$$

y $\mathcal{R} = \{(8,0,0,0), B = L(\{(1,1,0,0)(0,0,1,1),(1,0,-1,0)\})\}$ es un sistema de referencia de S.

Las ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{t}} = (8,0,0,0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^{\mathrm{t}}.$$

■

Ejercicio 2.49 *Se consideran los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ dados por:*

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3+x_4=1,\ x_1-x_2=1\},$$
$$T = (1,0,1,0) + L(\{(1,1,-1,-1),(0,0,0,1)\}).$$

Obtener unas ecuaciones paramétricas e implícitas para $S\cap T$ y de $S \vee T$.

Solución: Para determinar las ecuaciones implícitas (en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^4$) de $S \cap T$ vamos a necesitar las ecuaciones implícitas de S y T. Las de S ya las conocemos, faltan sólo las de T. Procedemos como siempre, determinamos primero las ecuaciones paramétricas de T:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{t}} = (1,0,1,0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1,\lambda_2)^{\mathrm{t}}.$$

Unas ecuaciones implícitas para T en $\mathcal{R}_0$ surge de la condición

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1-1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3-1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

esto es,

$$\det\begin{pmatrix} x_2 & 1 & 0 \\ x_3-1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1-1 & 1 & 0 \\ x_3-1 & -1 & 0 \\ x_4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Queda por tanto

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_2+x_3-1 = x_1+x_3-2 = 0\}.$$

De aquí que

$$S\cap T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_2+x_3-1 = x_1+x_3-2 = x_1+x_2+x_3+x_4-1 = x_1-x_2-1 = 0\},$$

de donde eliminando la última ecuación para que el sistema sea de ecuaciones linealmente independientes queda equivalentemente

$$S\cap T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_2+x_3-1 = x_1+x_3-2 = x_1+x_2+x_3+x_4-1 = 0\},$$

siendo estas últimas tres ecuaciones las implícitas en $\mathcal{R}_0$ para $S\cap T$. Con estas ecuaciones se calculan fácilmente las ecuaciones paramétricas de $S\cap T$ sin más que resolver el sistema y expresar sus soluciones en función de parámetros:

$$S\cap T = \{(\lambda, \lambda-1, 2-\lambda, \lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} = (0,-1,2,0) + L(\{(1,1,-1,1)\}).$$

De aquí que

$$S\cap T = (0,-1,2,0) + L(\{(1,1,-1,1)\})$$

y sus ecuaciones paramétricas en forma matricial se escriban

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{t}} = (0,-1,2,0)^{\mathrm{t}} + (1,1,-1,1)^{\mathrm{t}} \cdot \lambda.$$

De forma dual, para determinar las ecuaciones paramétricas (en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^4$) de $S \vee T$ vamos a necesitar las ecuaciones paramétricas de S y T. Las de T esencialmente ya las conocemos de la expresión

$$T = (1,0,1,0) + L(\{(1,1,-1,-1),(0,0,0,1)\}),$$

faltan sólo las de S. Como

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3+x_4 = 1,\ x_1-x_2 = 1\},$$

como antes bastará con resolver el sistema y expresar sus soluciones en función de parámetros:

$$S = \{(\lambda, \lambda-1, \mu, 2-2\lambda-\mu) \colon \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = (0,-1,2,0) + L(\{(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}).$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $\overrightarrow{(1,0,1,0),(0,-1,2,0)} = (-1,-1,1,0)$ y

$$L\big(\{(1,1,-1,-1),(0,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}\big) = L\big(\{(0,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}\big),$$

el Corolario 2.20-(i) nos da

$$S \vee T = (1,0,1,0) + \big(L\big(\{(-1,-1,1,0)\}\big) + L\big(\{(0,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}\big)\big)\,,$$

esto es,

$$S \vee T = (1,0,1,0) + L\big(\{(0,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}\big)$$

con $\{(0,0,0,1),(1,1,0,-2),(0,0,1,-1)\}$ base de $\overrightarrow{S \vee T}$ al ser vectores linealmente independientes. Nótese que, como $S \cap T \neq \varnothing$, podríamos haber obtenido la última expresión de una forma más directa sin más que usar Corolario 2.20-(ii).

Unas ecuaciones paramétricas de $S \vee T$ en el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^4$ son

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{t}} = (1,0,1,0)^{\mathrm{t}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^{\mathrm{t}}.$$

Por tanto, una ecuación implícita para $S \vee T$ en $\mathcal{R}_0$ surge de la condición

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1-1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3-1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3,$$

esto es,

$$\det\begin{pmatrix} x_1-1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3-1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

Así $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 - 1 = 0\}$ es una ecuación implícita de $S \vee T$ en $\mathcal{R}_0$. ■

2.5. Aplicaciones afines

Al igual que en cualquier otra categoría de objetos, en la geometría afín es natural preguntarse por las transfomaciones naturales entre espacios afines.

Definición 2.50 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación entre espacios afines. Diremos que f es una* aplicación afín *si existe una aplicación lineal $\vec{f}\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ para la cual es cierta cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes*

(I) $\vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ *para todo* $p,q \in \mathcal{A}$.

(II) $f(q) = f(p) + \vec{f}(\overrightarrow{pq})$ *para todo* $p,q \in \mathcal{A}$.

(III) $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)}$ *para todo* $p \in \mathcal{A},\ v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

(IV) $f(p+v) = f(p) + \vec{f}(v)$ *para todo* $p \in \mathcal{A},\ v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.

En ese caso, diremos que $\vec{f}$ es la aplicación lineal asociada a f.

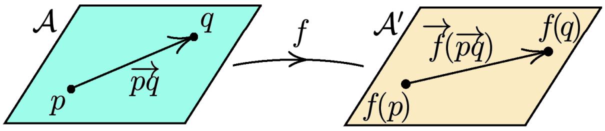


Figura 9: Aplicación afín $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

Usando un lenguaje más global, $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es afín con lineal asociada $\vec{f}\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ si y sólo si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \stackrel{f\times f}{\longrightarrow} & \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \\ {\scriptstyle \to}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \to} \\ \overrightarrow{\mathcal{A}} & \stackrel{\vec{f}}{\longrightarrow} & \overrightarrow{\mathcal{A}'} \end{array}$$

Esto es, $\to \circ\, (f \times f) = \vec{f} \circ \to \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$.

Ejemplos triviales de aplicaciones afines son:

- *La aplicación identidad:* $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, con $\overrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$. En efecto, basta con observar que
$$\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}(q) = q = p + \overrightarrow{pq} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}(p) + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}(\overrightarrow{pq}).$$

- *Las aplicaciones constantes:* $f_q\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $f_q(p) = q$ para todo $p \in \mathcal{A}$, con $\vec{f}_q = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ es la aplicación lineal nula. En efecto basta con observar que
$$f_c(q) = c = c + \vec{0} = f_c(p) + \mathbf{0}(\overrightarrow{pq}).$$

El siguiente enunciado expresa que toda aplicación afín está unívocamente determinada por la imagen de un punto y su aplicación lineal asociada.

Proposición 2.51 *Dados $p_0 \in \mathcal{A}$, $p_0' \in \mathcal{A}'$ y $h\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ lineal, la aplicación*
$$f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}', \quad f(p) = p_0' + h(\overrightarrow{p_0p})$$
es la única aplicación afín con $f(p_0) = p_0'$ y $\vec{f} = h$.

En particular, si $f, g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ son afines entonces
$$f = g \iff \vec{f} = \vec{g} \quad y \quad f(p_0) = g(p_0) \text{ para algún } p_0 \in \mathcal{A}.$$

Demostración: Para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ se tiene que
$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{(p_0' + h(\overrightarrow{p_0p}))(p_0' + h(\overrightarrow{p_0q}))} = h(\overrightarrow{p_0q}) - h(\overrightarrow{p_0p}) = h(\overrightarrow{p_0q} - \overrightarrow{p_0p}) = h(\overrightarrow{pq}),$$
y de aquí que f es afín con lineal asociada $\vec{f} = h$. Como $f(p_0) = p_0' + h(\overrightarrow{p_0p_0}) = p_0' + h(\vec{0}) = p_0'$, la aplicación f satisface lo requerido. La unicidad es trivial de Definición 2.50-(ii). ■

Corolario 2.52 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación entre espacios afines, y para cada $p \in \mathcal{A}$ definamos*
$$\vec{f}_p\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}', \quad \vec{f}_p(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)}.$$
Los siguientes enunciados son equivalentes:

(I) *f es afín.*

(II) *Para todo $p \in \mathcal{A}$ la aplicación $\vec{f_p}$ es lineal.*

(III) *Existe $q \in \mathcal{A}$ tal que $\vec{f_q}$ es lineal.*

Además, si f es afín entonces $\vec{f} = \vec{f_p}$ para todo $p \in \mathcal{A}$.

Demostración : Comencemos observando que si f es afín entonces

$$\vec{f_p}(v) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} = \vec{f}\big(\overrightarrow{p\,(p+v)}\big) = \vec{f}(v),$$

esto es, $\vec{f} = \vec{f_p}$ para todo $p \in \mathcal{A}$. Esto prueba que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Por último (iii) $\Longrightarrow$ (i) es consecuencia de la Proposición 2.51 para $p_0 = q$, $p_0' = f(q)$ y $h = \vec{f_q}$. ■

Corolario 2.53 *Sean V, V' espacios vectoriales dotados de estructura afín de la forma usual, y sea $f \colon V \to V'$ una aplicación. Entonces son equivalentes*

(I) *Existen $v_0' \in V'$ y $h \colon V \to V'$ lineal tales que $f(v) = v_0' + h(v) \quad \forall\, v \in V$.*

(II) *f es afín con $\vec{f} = h$ y $f(\vec{0}) = v_0'$.*

Además, en ese caso $\vec{f} = h$.

Demostración : La implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) es consecuencia trivial de la Proposición 2.51 aplicada a $p_0 = \vec{0} \in V$, $p_0' = v_0' \in V$ y aplicación lineal $h \colon V \to V'$.

La implicación (ii) $\Rightarrow$ (i) se sigue de la expresión

$$f(v) = f(\vec{0} + v) = f(\vec{0}) + \vec{f}(v) \quad \forall\, v \in V;$$

ver Definición 2.50-(iv).

■

Como consecuencia inmediata del Corolario 2.53 podemos caracterizar las aplicaciones afines entre los espacios afines clásicos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^k$. Recordemos que las aplicaciones lineales $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ son de la forma

$$h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad h(x) = A \cdot x, \quad \text{para alguna matriz} \quad A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R}).$$

Corolario 2.54 *Dados $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^k$, la aplicación*

$$f_{A,b} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad f_{A,b}(x) = A \cdot x + b$$

es la única aplicación afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$ con

$$f_{A,b}(0) = b \quad y \quad \overrightarrow{f_{A,b}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad \overrightarrow{f_{A,b}}(x) = A \cdot x.$$

(Estamos utilizando la notación columna $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ y $b = (b_1, \ldots, b_k)^{\mathrm{t}}$).

Este corolario nos proporciona no sólo ejemplos de aplicaciones afines entre los espacios afines canónicos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^k$, sino de hecho todas ellas. Observemos que en este contexto una aplicación afín no es sino una aplicación lineal seguida de una traslación. Se suele usar la siguiente notación más compacta para escribir la expresión analítica de $f_{A,b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f_{A,b}(x) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix},$$

donde $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{k+1,n+1}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2.55 *La aplicación* $f\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $f(p(x)) = (p(1)+2, p'(2)-1)$, *es afín con aplicación lineal asociada* $\vec{f}\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(p(x)) = (p(1), p'(2))$.

Solución: Si $p_0(x) = 0$ es polinomio nulo en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, la aplicación $\vec{f}_{p_0(x)}\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$\vec{f}_{p_0(x)}(p(x)) = \overrightarrow{f(p_0(x)), f(p_0(x)+p(x))} = \overrightarrow{(2,-1), (p(1)+2, p'(2)-1)} = (p(1), p'(2)).$$

Como $\vec{f}_{p_0(x)}$ es claramente lineal, la aplicación f es afín con lineal asociada $\vec{f} = \vec{f}_{p_0(x)}$. ■

El siguiente enunciado es un compendio de las propiedades generales más interesantes de las aplicaciones afines.

Propiedades 2.56 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

(i) *Si* V, V' *son espacios vectoriales y* $f\colon V \to V'$ *es una aplicación lineal, entonces* f *es afín (dotados* V, V' *de su estructura afín canónica) y* $\vec{f} = f$.

(ii) *Si* $\mathcal{A}$ *es un espacio afín y* $p \in \mathcal{A}$, *la aplicación* $F_p\colon \mathcal{A} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$, $F_p(q) = \overrightarrow{pq}$, *es afín con* $\overrightarrow{F_p} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ *(dotado* $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ *de su estructura afín canónica).*

(iii) *Si* $\mathcal{A}$ *es un espacio afín y* $p \in \mathcal{A}$, *la aplicación* $G_p = F_p^{-1}\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ *es afín con* $\overrightarrow{G_p} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ *(dotado* $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ *de su estructura afín canónica).*

(iv) *Si* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *es afín entonces* $f = G_{f(q)} \circ \vec{f} \circ F_q$ *para todo* $q \in \mathcal{A}$. *En particular,*

$$f \text{ es injectiva (sobreyectiva, biyectiva)} \iff \vec{f} \text{ es injectiva (sobreyectiva, biyectiva).}$$

(v) *Si* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, $g\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}''$ *son afines entonces* $g \circ f$ *es afín y* $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

(vi) $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *es afín biyectiva si y solo si* $f^{-1}\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ *es afín biyectiva, y en este caso* $\overrightarrow{(f^{-1})} = \big(\vec{f}\big)^{-1}$.

(vii) *Si* S *es un subespacio de* $\mathcal{A}$ *entonces la aplicación inclusión* $\mathrm{i}_S\colon S \to \mathcal{A}$ *es afín y* $\overrightarrow{\mathrm{i}_S} = \mathrm{i}_{\vec{S}}$, *donde* $\mathrm{i}_{\vec{S}}\colon \vec{S} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ *es el monomorfismo inclusión. Como consecuencia, si* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *es afín entonces la restricción* $f|_S\colon S \to \mathcal{A}'$ *es afín con* $\overrightarrow{f|_S} = \vec{f}|_{\vec{S}}$.

Demostración: Para demostrar (i) basta con comprobar que $\overrightarrow{f_{\vec{0}}}\colon V \to V'$ coincide con f. Esto implicaría que $\overrightarrow{f_{\vec{0}}}$ sería lineal, de donde usando Corolario 2.52, la aplicación f sería afín con $\vec{f} = \overrightarrow{f_{\vec{0}}} = f$, y concluiríamos la prueba. En efecto, para todo $v \in V$ tenemos que

$$\overrightarrow{f_{\vec{0}}}(v) = \overrightarrow{f(\vec{0})f(\vec{0}+v)} = \overrightarrow{f(\vec{0})f(v)} = \overrightarrow{\vec{0}'f(v)} = f(v) - \vec{0}' = f(v).$$

Nótese que la identidad $f(\vec{0}) = \vec{0}'$ se sigue de la linealidad de f.

Probemos (ii) demostrando que $(\vec{f_p})_p\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ es la aplicación identidad $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$ (luego lineal), y por tanto F_p es afín con $\overrightarrow{F_p} = (\overrightarrow{F_p})_p = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$; ver Corolario 2.52. En efecto, para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ se tiene que

$$(\vec{f_p})_p(v) = \overrightarrow{F_p(p)F_p(p+v)} = \overrightarrow{\vec{0}\,v} = v - \vec{0} = v.$$

Análogamente, para probar (iii) basta con demostrar que $(\overrightarrow{G_p})_{\vec{0}}\colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$ es la aplicación identidad $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$.Para todo $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ se tiene que

$$(\overrightarrow{G_p})_{\vec{0}}(v) = \overrightarrow{G_p(\vec{0})G_p(\vec{0}+v)} = \overrightarrow{G_p(\vec{0})G_p(v)} = \overrightarrow{(p+\vec{0})\,(p+v)} = \overrightarrow{p\,(p+v)} = v.$$

Item (iv) es consecuencia del siguiente cálculo elemental

$$(G_{f(q)} \circ \vec{f} \circ F_q)(p) = G_{f(q)}\big(\vec{f}(\overrightarrow{qp})\big) = G_{f(q)}(\overrightarrow{f(q)f(p)}) = f(q) + \overrightarrow{f(q)f(p)} = f(p)$$

para todo $p \in \mathcal{A}$. Como $G_{f(q)}$ y F_q son biyectivas, es claro que f es injectiva (sobreyectiva, biyectiva) si y solo si $\vec{f}$ es injectiva (sobreyectiva, biyectiva).

Para probar (v), tengamos en cuenta que g y f son afines y observemos que, para todo $p, q \in \mathcal{A}$,

$$\overrightarrow{(g\circ f)(p)(g\circ f)(q)} = \overrightarrow{g(f(p))g(f(q))} = \vec{g}(\overrightarrow{f(p)f(q)}) = \vec{g}\big(\vec{f}(\overrightarrow{pq})\big) = (\vec{g}\circ\vec{f})(\overrightarrow{pq}).$$

Como $\vec{g}\circ\vec{f}$ es lineal la aplicación $g\circ f$ es afín y $\overrightarrow{g\circ f} = \vec{g}\circ\vec{f}$.

Item (vi) se sigue trivialmente de la identidad $f^{-1} = G_q \circ \vec{f}^{-1} \circ F_{f(q)}$ y de los items (i), (ii), (iii), (iv) y (v).

Por último, la prueba de (vii) es trivial sin más que observar que

$$\mathrm{i}_{\vec{S}}(\overrightarrow{p_1p_2}) = \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{\mathrm{i}_S(p_1)\mathrm{i}_S(p_2)} \quad \forall\, p_1, p_2 \in \mathcal{S}.$$

La segunda parte relativa a la restricción $f|_S$ es trivial a partir de (v), toda vez que $f|_S = f \circ \mathrm{i}_S$ y por tanto $\overrightarrow{f|_S} = \vec{f} \circ \overrightarrow{\mathrm{i}_S} = \vec{f}|_{\vec{S}}$.

■

El concepto de isomorfismo es fundamental en cualquiera categoría matemática, ya que encierra la idea de igualdad o equivalencia necesaria para la clasificación de objetos. En el contexto de la geometría afín estas transformaciones se llaman afinidades, comentemos los detalles en la siguiente definición.

Definición 2.57 *Las aplicaciones afines biyectivas $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre espacios afines serán llamadas* afinidades. *Si denotamos*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) = \{f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}\colon f \text{ afinidad}\},$$

el conjunto $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ *es un grupo respecto de la composición de aplicaciones, conocido en la literatura como* grupo afín *sobre $\mathcal{A}$.*

Es obvio que dos espacios afínmente equivalentes (esto es, entre los que existe una afinidad) tienen necesariamente la misma dimensión. Veremos más adelante que el recíproco también es cierto.

Finalizaremos con la siguiente proposición, que explica el comportamiento de los subespacios afines respecto de la imagen directa e inversa por aplicaciones afínes. La prueba es rutinaria y se deja como ejercicio.

Proposición 2.58 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ una aplicación afín entre espacios afines, y sean $S = p + \vec{S} \subseteq \mathcal{A}$ y $S' = p' + \vec{S}' \subseteq \mathcal{A}'$ subespacios afines.*

(i) *$f(S)$ es el subespacio afín $f(p) + \vec{f}(\vec{S})$ de $\mathcal{A}'$ (en particular,* $\mathrm{Im}(f)$ *es el subespacio afín $f(p) + \mathrm{Im}(\vec{f})$ de $\mathcal{A}'$).*

(ii) *Si $p \in f^{-1}(p')$ entonces $f^{-1}(S')$ es el subespacio afín $p + (\vec{f})^{-1}(\vec{S}')$ de $\mathcal{A}$.*

2.5.1. Aplicaciones afines notables

En este apartado repasaremos las aplicaciones afines básicas en geometría, a saber, traslaciones, homotecias, proyecciones y simetrías.

Para la descripción geométrica de las mismas resulta especialmente útil manejar algunos conceptos y propiedades elementales, como los relativos al punto medio de un segmento y el conjunto de puntos fijos de una aplicación afín.

Definición 2.59 *Dados dos puntos p, q en un espacio afín $\mathcal{A}$, definimos el segmento que determinan como*

$$[p, q] = \{p + t\overrightarrow{pq} \colon t \in [0, 1]\} = \{q + t\overrightarrow{qp} \colon t \in [0, 1]\}.$$

Es fácil ver que $[p, q] = \{a + (t\overrightarrow{ap} + (1 - t)\overrightarrow{aq} \colon t \in [0, 1]\}$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

El punto medio del segmento $[p, q]$ viene dado por la expresión:

$$\mathrm{m}_{pq} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp},$$

o bien $\mathrm{m}_{pq} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{aq})$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

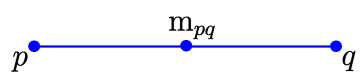


Figura 10: Punto medio del segmento $[p, q]$.

Definición 2.60 *Dada $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín en un espacio afín $\mathcal{A}$, denotaremos por*

$$\mathcal{P}_f = \{p \in \mathcal{A} \colon f(p) = p\} \subseteq \mathcal{A}$$

al conjunto de puntos fijos de f.

Proposición 2.61 *Sea $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín en un espacio afín $\mathcal{A}$.*

(I) *Si $\mathcal{P}_f \neq \varnothing$ entonces $\mathcal{P}_f$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ con variedad con dirección*

$$\overrightarrow{\mathcal{P}_f} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}).$$

(II) $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\} \Longleftrightarrow \mathcal{P}_f = \{q\}$, $q \in \mathcal{A}$ *(en particular $\mathcal{P}_f \neq \varnothing$).*

Demostración: Para demostrar (i) fijemos $q \in \mathcal{P}_f \neq \varnothing$. Tenemos que

$$p \in \mathcal{P}_f \Longleftrightarrow f(p) = p \Longleftrightarrow \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{qf(p)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{f(q)f(p)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{qp} = \vec{f}(\overrightarrow{qp}),$$

de donde

$$p \in \mathcal{P}_f \Longleftrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{qp}) - \overrightarrow{qp} = \vec{0} \Longleftrightarrow (\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})(\overrightarrow{qp}) = \vec{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{qp} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}).$$

Como $p = q + \overrightarrow{qp}$, deducimos que

$$p \in \mathcal{P}_f \Longleftrightarrow p \in q + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}).$$

Esto prueba que $\mathcal{P}_f = q+\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, y como $\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ es un subespacio vectorial de $\vec{\mathcal{A}}$, que $\mathcal{P}_f$ es un subespacio afín de $\mathcal{A}$ con variedad de dirección $\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Esto concluye la prueba de (i).

Para demostrar (ii), primero observemos que, de (i), si $\mathcal{P}_f$ consiste de un único punto entonces $\{\vec{0}\} = \vec{\mathcal{P}}_f = \mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Supongamos ahora que $\mathrm{Ker}(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$. Para acabar bastará con ver que que $\mathcal{P}_f \neq \varnothing$ y usar (i). Fijemos un punto arbitrario $p \in \mathcal{A}$. Si existiese un punto fijo q de f, tendríamos que:

$$f(q) = q \iff \overrightarrow{qf(q)} = \vec{0} \iff \overrightarrow{qp}+\overrightarrow{pf(p)}+\overrightarrow{f(p)f(q)} = \vec{0} \iff (\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)p} \iff$$

$$\iff \overrightarrow{pq} = (\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}) \iff q = p+\overrightarrow{pq} = p+(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}).$$

Este razonamiento heurístico nos demuestra que elegido $p \in \mathcal{A}$ arbitrario, el punto

$$q := p+(\vec{f}-\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})^{-1}(\overrightarrow{f(p)p}) \in \mathcal{P}_f,$$

probando que $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ y por tanto (ii). ■

Las traslaciones afines. Las traslaciones (ver Definición 2.7) están caracterizadas por ser las únicas aplicaciones afines con aplicación lineal asociada la identidad.

Proposición 2.62 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces*

$$f = \tau_v \in \mathcal{T}(\mathcal{A}),\ v \in \vec{A} \iff f \text{ es afín y } \vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}.$$

Además, en ese caso $v = \overrightarrow{qf(q)} \in \vec{\mathcal{A}}$ para todo $q \in \mathcal{A}$ (el vector v no depende de $q \in \mathcal{A}$).

Demostración: Consideremos $v \in \vec{\mathcal{A}}$ arbitrario y comprobemos que τ_v es afín con $\vec{\tau_v} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. Por la Corolario 2.52 bastará con tomar $q \in \mathcal{A}$ y probar que $\overrightarrow{(\tau_v)}_q$ es la aplicación lineal $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. En efecto, si $u \in \vec{\mathcal{A}}$ es un vector arbitrario se tiene que

$$\overrightarrow{(\tau_v)}_q(u) = \overrightarrow{(\tau_v)(q)(\tau_v)(q+u)} = \overrightarrow{(q+v)\big((q+u)+v}\big) = \overrightarrow{(q+v)\big((q+v)+u}\big) = u,$$

y de aquí lo buscado.

Para el recíproco, considemos $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afín con $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. Para cualesquiera $p, q \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$f(p) = q+\overrightarrow{qf(p)} = q+\big(\overrightarrow{qf(q)}+\overrightarrow{f(q)f(p)}\big) = q+\big(\overrightarrow{qf(q)}+\vec{f}(\overrightarrow{qp})\big).$$

Como $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ entonces $\vec{f}(\overrightarrow{qp}) = \overrightarrow{qp}$, y por tanto

$$f(p) = q+\big(\overrightarrow{qf(q)}+\overrightarrow{qp}\big) = (q+\overrightarrow{qp})+\overrightarrow{qf(q)} = p+\overrightarrow{qf(q)} = (\tau_v)(p)$$

para $v = \overrightarrow{qf(q)}$, como queríamos demostrar. ■

Es relevante reseñar que

$$\mathcal{P}_{\tau_v} \neq \varnothing \iff v = \vec{0}.$$

En otras palabras, la única traslación con algún punto fijo es $\tau_{\vec{0}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. La comprobación es rutinaria.

Las homotecias afines. Otras de las transformaciones afines clásicas son las homotecias, que materializan le idea básica de contracción-dilatación y permiten la conceptualización de la semejanza de figuras. Los dos elementos geométricos que determinan una homotecia son su centro o único punto fijo y su razón.

Definición 2.63 *Definimos la homotecia de centro $a \in \mathcal{A}$ y razón $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ como la aplicación*

$$h_{a,r} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad h_{a,r}(p) := a + r\overrightarrow{ap}.$$

Proposición 2.64 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces*

$$h \text{ es homotecia de razón } r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \iff h \text{ es afín y } \vec{h} = r \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}.$$

En este caso el único punto fijo de h es su centro $a \in \mathcal{A}$, que obedece a la fórmula

$$a = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}$$

para cualquier $q \in \mathcal{A}$ (en particular esa expresión no depende de $q \in \mathcal{A}$).

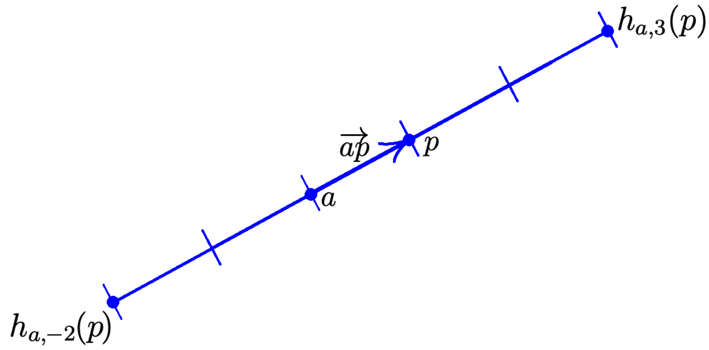


Figura 11: Acción de las homotecias de centro a y razones -2 y 3.

Demostración: Supongamos que $h = h_{a,r}$ para algunos $a \in \mathcal{A}$ y $r \in \mathbb{R}$. Es claro que $h_{a,r}(a) = a + r\overrightarrow{aa} = a + r\vec{0} = a$, esto es, a es un punto fijo de $h_{a,r}$. Comprobemos que $h_{a,r}$ es afín demostrando que $\overrightarrow{(h_{a,r})_a}$ es la aplicación lineal $r \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$. En efecto, para cualquier $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ se tiene que

$$\overrightarrow{(h_{a,r})_a}(v) = \overrightarrow{h_{a,r}(a)h_{a,r}(a+v)} = \overrightarrow{a\big(a + r \cdot \overrightarrow{a(a+v)}\big)} = \overrightarrow{a(a+rv)} = rv,$$

de donde se sigue que $\overrightarrow{(h_{a,r})_a} = r \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$. Para comprobar que $\mathcal{P}_{h_{a,r}} = \{a\}$, usemos Proposición 2.61 para inferir que $\mathcal{P}_{h_{a,r}}$ es un subespacio afin con

$$\overrightarrow{\mathcal{P}_{h_{a,r}}} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{h_{a,r}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \mathrm{Ker}\big((r-1) \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\big) = \{\vec{0}\}.$$

Por tanto $\dim \mathcal{P}_{h_{a,r}} = 0$ y consiste de un único punto, a saber $\mathcal{P}_{h_{a,r}} = \{a\}$.

Para el recíproco, supongamos que $h \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es afín con $\vec{h} = r \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Como $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{h - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}}) = \mathrm{Ker}\big((r-1) \cdot \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}\big) = \{\vec{0}\}$, de la Proposición 2.61 inferimos que $\mathcal{P}_h = \{a\}$, $a \in \mathcal{A}$. Por tanto

$$h(p) = h(a) + \vec{h}(\overrightarrow{ap}) = a + r\overrightarrow{ap} = h_{a,r}(p) \quad \forall\, p \in \mathcal{A},$$

y de aquí que $h = h_{a,r}$.

Para acabar comprobemos la fórmula de cálculo del centro dada en la proposición. En efecto, tomemos $q \in \mathcal{A}$ un punto cualquiera y veamos que $q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}$ es el centro a de h, esto es, que $q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)} \in \mathcal{P}_h$. En efecto,

$$h\big(q+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}\big) = h(q)+\vec{h}\big(\frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}\big) = h(q)+\frac{1}{1-r}\vec{h}(\overrightarrow{qh(q)}) = h(q)+\frac{r}{1-r}\cdot\overrightarrow{qh(q)},$$

donde hemos usado que $\vec{h} = r \cdot \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. Deducimos por tanto que

$$h\big(q+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}\big) = q + \big(\overrightarrow{qh(q)} + \frac{r}{1-r}\cdot\overrightarrow{qh(q)}\big) = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)} = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}$$

y $q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)} \in \mathcal{P}_h = \{a\}$ como queríamos demostrar. ■

Definición 2.65 *La afinidad $h_{a,-1}$ es conocida como la* simetría central *respecto de (o con centro) $a \in \mathcal{A}$.*

Por supuesto, de la Proposición 2.64 se sigue que una aplicación afín $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una simetría central si y sólo si $\vec{f} = -\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. También podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 2.66 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín y $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación. Entonces*

$$f \text{ es una simetría central} \iff \exists\, a \in \mathcal{A} : m_{pf(p)} = a \;\forall p \in \mathcal{A}.$$

Además, en ese caso el punto a es el centro de f.

Demostración: Recordemos que $m_{pf(p)} = a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{af(p)})$ para todo $p \in \mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}$. Por tanto,

$$\exists\, a \in \mathcal{A} : m_{pf(p)} = a \quad \forall p \in \mathcal{A} \iff \exists\, a \in \mathcal{A} : \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{af(p)} = \vec{0} \quad \forall p \in \mathcal{A} \iff$$

$$\iff \exists\, a \in \mathcal{A} : f(p) = a - \overrightarrow{ap} \quad \forall p \in \mathcal{A} \iff f = h_{a,-1},$$

y de aquí el corolario. ■

Proyecciones y simetrías afines. Antes de presentar las proyecciones y simetrías afines recordemos sus equivalentes vectoriales estudiados en el álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial, y sean $U, W \subseteq V$ subespacios vectoriales tales que

$$V = U \oplus W.$$

La proyección sobre U en la dirección del suplementario algebraico W es la aplicación lineal dada por

$$\vec{\pi}_{U,W} : V \to V : \vec{\pi}_{U,W}(v) = u,$$

donde $v = u + w$ es la descomposición única de v como suma de vectores $u \in U$ y $w \in W$ (aquí hemos usado que V es la suma directa de U y W).

Análogamente, la simetría respecto de U en la dirección de W es el isomorfismo lineal

$$\vec{\sigma}_{U,W} : V \to V, \quad \vec{\sigma}_{U,W}(v) = u - w,$$

donde $v = u + w$ es la descomposición única de v como suma de vectores $u \in U$ y $w \in W$. Es claro de las definiciones anteriores que:

- $\vec{\pi}_{U,W} \circ \vec{\pi}_{U,W} = \vec{\pi}_{U,W}$,
- $\vec{\sigma}_{U,W} \circ \vec{\sigma}_{U,W} = 2\vec{\pi}_{U,W} - \vec{\sigma}_{U,W} = \mathrm{Id}_V$,
- $\vec{\pi}_{U,W} + \vec{\pi}_{W,U} = \mathrm{Id}_V$.

Las proyecciones y simetrías lineales admiten la siguiente caracterización natural.

Proposición 2.67 *Si $h\colon V \to V$ es una aplicación lineal tal que $h \circ h = r \cdot h$, $r \neq 0$ entonces $V = U_r \oplus U_0$, donde*

$$U_r = \mathrm{Ker}(h - r \cdot \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h) \quad y \quad U_0 = \mathrm{Ker}(h).$$

Como consecuencia los siguientes enunciados son ciertos:

(I) *Si $h\colon V \to V$ es lineal y $h \circ h = h$ entonces $V = V_1 \oplus V_0$ y $h = \vec{\pi}_{V_1,V_0}$, donde $V_1 = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h)$ y $V_0 = \mathrm{Ker}(h)$.*

(II) *Si $f\colon V \to V$ es lineal y $f \circ f = \mathrm{Id}_V$ entonces $V = V_1 \oplus V_{-1}$ y $f = \vec{\sigma}_{V_1,V_{-1}}$, donde $V_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_V)$ y $V_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_V)$.*

Demostración: Supongamos que $h\colon V \to V$ es lineal y $h \circ h = r \cdot h$, $r \neq 0$. Notemos que la identidad

$$h\big(h(v)\big) - rh(v) = h\big(h(v) - rv\big) = \vec{0}$$

es cierta para todo $v \in V$, y por tanto

$$\mathrm{Im}(h) \ni h(v) \in U_r = \mathrm{Ker}(h - r\mathrm{Id}_V), \quad v - h\big(\frac{1}{r}v\big) \in U_0 = \mathrm{Ker}(h) \quad \forall\, v \in V.$$

De lo primero $\mathrm{Im}(h) \subseteq U_r$, y como la otra inclusión es trivialmente cierta ya que $v = h(\frac{1}{r}v) \in \mathrm{Im}(h)$ para todo $v \in U_r$, deducimos que $\mathrm{Im}(h) = U_r$. La identidad

$$v = h(\frac{1}{r}v) + \big(v - h(\frac{1}{r}v)\big) \tag{1}$$

prueba que $V = U_r + U_0$, y de hecho la suma es directa ya que $v \in U_0 \cap U_r$ si y sólo si $rv = h(v) = \vec{0}$. Esto demuestra lo deseado.

Item (i) es consecuencia de lo visto para $r = 1$; en este caso $U_1 = V_1$ y $U_0 = V_0$. Para la identidad $h = \vec{\pi}_{V_1,V_0}$ ver (1) para $r = 1$ y la definición de $\vec{\pi}_{V_1,V_0}$.

Para probar item (ii) observemos que la aplicación $h = f + \mathrm{Id}_V$ satisface $h \circ h = 2h$. Por la primera parte de la proposición,

$$V = U_2 \oplus U_0, \text{ donde } U_2 = \mathrm{Ker}(h - 2 \cdot \mathrm{Id}_V) = \mathrm{Im}(h) \text{ y } U_0 = \mathrm{Ker}(h),$$

donde ahora $U_2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_V) = V_1$ y $U_0 = \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_V) = V_{-1}$ como deseábamos. Le ecuación (1) se escribe para $r = 2$ y $h = f + \mathrm{Id}_V$ como

$$v = \frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big)$$

donde claramente $\frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) \in V_1$ y $\frac{1}{2}\big(v - f(v)\big) \in V_{-1}$. Usando que $f \circ f = \mathrm{Id}_V$ inferimos que

$$f(v) = f\left(\frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big)\right) = \frac{1}{2}\big(v + f(v)\big) - \frac{1}{2}\big(v - f(v)\big),$$

y por tanto que $f = \vec{\sigma}_{V_1,V_{-1}}$. ■

Tras este breve recordatorio de álgebra lineal, procedamos a presentar los correspondientes conceptos afines. Necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.68 *Dos subespacios afines S, T de un espacio afín $\mathcal{A}$ se dicen* suplementarios o complementarios *si satisfacen $S \vee T = \mathcal{A}$ y $S \cap T = \{q\}$, $q \in \mathcal{A}$.*

La complementariedad afín se puede presentar de otras formas equivalentes.

Proposición 2.69 *Sean S, T dos subespacios afines de un espacio afín $\mathcal{A}$. Los siguientes enunciados equivalentes:*

(i) *$S \vee T = \mathcal{A}$ y $S \cap T = \{q\}$, $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ (son complementarios).*

(ii) *$\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$ y $S \cap T = \{q\}$, $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$.*

(iii) *$\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{T}$.*

Demostración: Para comprobar que los enunciados (i) y (ii) son equivalentes, recordemos las formulas de dimensiones en Corolario 2.20. Como tanto en (i) como en (ii) se tiene que $S \cap T \neq \varnothing$ y $\dim(S \cap T) = 0$, la correspondiente formula de dimensiones nos da

$$\dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T.$$

Por tanto $\dim S + \dim T = \dim A$ si y solo si $\dim(S \vee T) = \dim \mathcal{A}$ (esto es, $S \vee T = \mathcal{A}$), y por tanto (i) $\iff$ (ii).

Probemos que (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Como $S \cap T = \{q\}$ para algún $q \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ deducimos que $\{\vec{0}\} = \overrightarrow{S \cap T} = \vec{S} \cap \vec{T}$. La condición $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$ es equivalente a $\dim \vec{S} + \dim \vec{T} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}$, y por tanto $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{T}$ ya que $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$.

Para demostrar que (iii) $\Longrightarrow$ (ii), observemos primero que $S \cap T \neq \varnothing$; de lo contrario la fórmula de dimensiones en Corolario 2.20 diría que

$$\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} \geq \dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 =$$

$$= \dim \vec{S} + \dim \vec{T} - \dim(\vec{S} \cap \vec{T}) + 1 = \dim \vec{S} + \dim \vec{T} + 1 = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} + 1,$$

lo que es absurdo. Por tanto $S \cap T \neq \varnothing$ es un subespacio afín con $\overrightarrow{S \cap T} = \vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$, de donde $\dim(S \cap T) = 0$ y $S \cap T$ es un punto. La correspondiente fórmula de dimensiones en Corolario 2.20 nos da ahora que

$$\dim(S \vee T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = \dim \vec{S} + \dim \vec{T} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = \dim \mathcal{A},$$

lo que prueba (ii). ∎

Corolario 2.70 *Si S, T son dos subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$ y $S' \parallel S$, $T' \parallel T$ entonces S', T' son también subespacios complementarios de $\mathcal{A}$.*

Estamos en condiciones de poder definir el concepto de proyección afín.

Definición 2.71 *Sean S, T dos subespacios afines complementarios de un espacio afín $\mathcal{A}$, y para cada $p \in \mathcal{A}$ denotemos por T_p al único subespacio afín de $\mathcal{A}$ con $p \in T_p$ y $T \parallel T_p$ (ver Proposición 2.22-*(iii)*).*

La proyección afín *sobre S en la dirección de T es la aplicación definida por*

$$\pi_{S,T} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \pi_{S,T}(p) := S \cap T_p.$$

Nótese que los subespacios afines S, T_p son complementarios, y por tanto $T_p \cap S$ es un punto de $\mathcal{A}$ unívocamente determinado; ver Corolario 2.70.

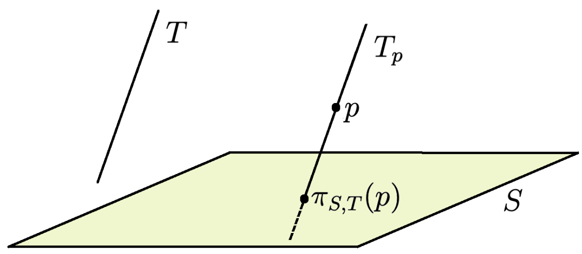


Figura 12: Proyección afín

Observación 2.72 *Hemos preferido introducir la nomenclatura* proyección sobre S en la dirección de T *por comodidad, aunque mas apropiado sería hablar de* proyección sobre S en la dirección $\vec{T}$. *Si se reflexiona con cuidado, lo único necesario del subespacio afín T en la anterior definición es su variedad de dirección $\vec{T}$ (que gobierna el paralelismo).*

La siguiente proposición aclara las propiedades geométricas de las proyecciones afines.

Proposición 2.73 *Si S, T son dos subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$, entonces:*

(I) $\pi_{S,T}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *es una aplicación afín y* $\overrightarrow{\pi_{S,T}} = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}$.

(II) $\mathcal{P}_{\pi_{S,T}} = \mathrm{Im}(\pi_{S,T}) = S$ *y* $\pi_{S,T} \circ \pi_{S,T} = \pi_{S,T}$.

(III) $\pi_{S,T}$ *es constante sobre cada subespacio* $T' \parallel T$.

Demostración: Para probar (i) será suficiente con ver que si $s \in S$ entonces

$$\pi_{S,T}(p) = s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \quad \forall p \in \mathcal{A}, \tag{2}$$

lo que en particular implicará también que

$$\pi_{S,T}(s) = s \quad \forall s \in S, \quad \text{esto es,} \quad S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

En efecto, como $\pi_{S,T}(p)$ es el único punto en $S \cap T_p$ solo hay que demostrar que

$$s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in S \cap T_p.$$

Para comprobarlo, primero observemos que

$$s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in T_p = p + \overrightarrow{T},$$

lo que es consecuencia de que

$$\overrightarrow{p\big(s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp})\big)} = \overrightarrow{ps} + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp} = -\vec{\pi}_{\vec{T},\vec{S}}(\overrightarrow{sp}) \in \vec{T} = \overrightarrow{T_p}.$$

Análogamente $s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in S$ ya que $S = s + \vec{S}$ y $\vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \in \vec{S}$, por lo que se tiene (2).

De la Proposición 2.51 inferimos que $\pi_{S,T}$ es la única aplicación afín con $\overrightarrow{\pi_{S,T}} = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}$ y $\pi_{S,T}(s) = s$ para todo $s \in S$, lo que prueba (i) y que $S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}$.

Item (ii) será consecuencia inmediata de las identidades

$$\mathrm{Im}(\pi_{S,T}) = S = \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

Para comprobarlas, nótese que de la definición de $\pi_{S,T}$ y lo ya demostrado se tiene la cadena de inclusiones

$$\operatorname{Im}(\pi_{S,T}) \subseteq S \subseteq \mathcal{P}_{\pi_{S,T}}.$$

La inclusión $\mathcal{P}_{\pi_{S,T}} \subseteq \operatorname{Im}(\pi_{S,T})$ que cierra el ciclo es trivial ya que por comprobación directa $\mathcal{P}_f \subseteq \operatorname{Im}(f)$ para cualquier aplicación afín $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Por último veamos (iii). Para comprobar que $\pi_{S,T}|_{T'}$ es constante sobre cada subespacio afín $T' \parallel T$, recordemos (ver Proposición 2.58) que $\pi_{S,T}(T') \subseteq \mathcal{A}$ es un subespacio afín con variedad de dirección

$$\overrightarrow{\pi_{S,T}(T')} = \overrightarrow{\pi_{S,T}}(\vec{T}') = \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\vec{T}) = \{\vec{0}\},$$

y por tanto es un punto. ■

La anterior proposición tiene un recíproco natural.

Proposición 2.74 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín en un espacio afín $\mathcal{A}$ satisfaciendo $f \circ f = f$. Entonces f es la proyección afín sobre $\operatorname{Im}(f)$ en la dirección $q+\operatorname{Ker}(\vec{f})$, donde $q \in \mathcal{A}$ es un punto arbitrario.*

Demostración: De la identidad $f \circ f = f$ inferimos que $\vec{f} \circ \vec{f} = \vec{f}$, de donde $\vec{f} = \vec{\pi}_{V_1,V_0}$ para $V_1 = \operatorname{Im}(\vec{f})$ y $V_0 = \operatorname{Kef}(\vec{f})$; ver Proposición 2.67. Llamemos $S = \operatorname{Im}(f)$ (obviamente subespacio afín de $\mathcal{A}$ con $\vec{S} = \operatorname{Im}(\vec{f}) = V_1$; ver Proposición 2.58) y $T = q + \operatorname{Ker}(\vec{f})$, donde $q \in \mathcal{A}$ es un punto arbitrario, y démonos cuenta de que S y T son subespacios afines complementarios ya que

$$\vec{\mathcal{A}} = V_1 \oplus V_0 = \vec{S} \oplus \vec{T}.$$

(ver Proposición 2.69). Por otra parte, como $f \circ f = f$ entonces $\operatorname{Im}(f) \subseteq \mathcal{P}_f$, y como la otra inclusión siempre es cierta deducimos que $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{P}_f$. Por tanto f y $\pi_{S,T}$ son dos aplicaciones afines con la misma aplicación lineal asociada, a saber $\vec{\pi}_{V_1,V_0}$, y que coinciden al menos en un punto (ambas fijan todos los puntos de $S = \operatorname{Im}(f)$). Por la Proposición 2.51 deducimos que $f = \pi_{S,T}$, lo concluye la prueba. ■

Ejercicio 2.75 *Consideremos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ dados por*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x - y + z = 2\}, \quad T = (0,-1,0) + L(\{(1,1,1)\}).$$

Comprueba que S y T son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la proyección afín $\pi_{S,T}$ sobre S en la dirección de T, dando sus ecuaciones analíticas respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0), B_0\}$ (B_0 base canónica de $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Es claro que $\vec{T} = L(\{(1,1,1)\})$, y análogamente

$$\vec{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x - y + z = 0\} = L(\{(1,1,0),(1,0,-1)\}).$$

Como los vectores $B = \{(1,1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ deducimos que $\vec{S}$ y $\vec{T}$ están en suma directa y $\mathbb{R}^3 = \vec{S} \oplus \vec{T}$. De aquí que S y T sean subespacios afines suplementarios de $\mathbb{R}^3$.

Necesitaremos las ecuaciones implícitas de S y de T en la referencia canónica $\mathcal{R}_0$. Como conocemos las de S, calculamos las de T por el procedimiento estándar

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & 1 \\ y+1 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix} = 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x - y - 1 = x - z = 0\}.$$

y por tanto

$$\vec{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = x - z = 0\}.$$

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, recordemos que el punto proyección $\pi_{S,T}((x, y, z))$ está caracterizado por estas propiedades:

- $\pi_{S,T}((x, y, z)) \in S$.
- $\overrightarrow{(x, y, z)\pi_{S,T}((x, y, z))} \in \vec{T}$.

Por tanto, si denotamos por $(a, b, c) = \pi_{S,T}((x, y, z))$, tenemos que

- $(a, b, c) \in S$, esto es, $a - b + c = 2$.
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \vec{T}$, esto es, $a - x - b + y = a - x - c + z = 0$.

Resolviendo el sistema con incógnitas a, b, c obtenemos

$$a = 2 + y - z, \quad b = 2 - x + 2y - z, \quad c = 2 - x + y,$$

de donde la proyección buscada queda:

$$\pi_{S,T} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \pi_{S,T}\big((x, y, z)\big) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y).$$

■

El concepto de simetría afín está íntimamente ligado con el de proyección que acabamos de estudiar.

Definición 2.76 *Sean S, T dos subespacios afines complementarios de un espacio afín $\mathcal{A}$, y denotemos por T_p al único subespacio afín de $\mathcal{A}$ con $p \in T_p$ y $T \parallel T_p$, $p \in \mathcal{A}$.*

La simetría afín *sobre S en la dirección de T es la aplicación $\sigma_{S,T} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida, punto a punto, por la identidad geométrica*

$$\mathrm{m}_{p\,\sigma_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

De forma más explícita,

$$\sigma_{S,T} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \sigma_{S,T}(p) := p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}.$$

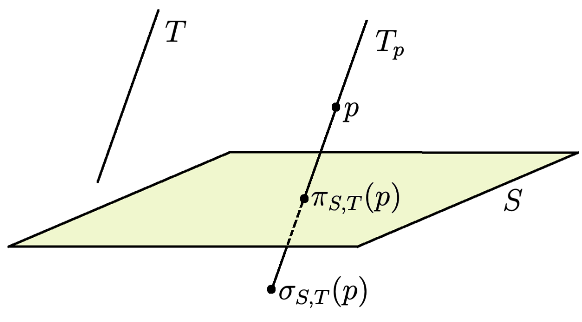


Figura 13: Simetría afín

La definición de $\sigma_{S,T}$ expresa que $\sigma_{S,T}(p)$ es el único punto del espacio afín $\mathcal{A}$ tal que $\pi_{S,T}(p)$ es el punto medio del segmento $[p, \sigma_{S,T}(p)]$. La lógica heurística que hay debajo de ese enunciado es la siguiente: un punto $q \in \mathcal{A}$ para el que $\mathrm{m}_{pq} = \pi_{S,T}(p)$ ha de satisfacer

$$p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = \pi_{S,T}(p) \Longleftrightarrow \overrightarrow{pq} = 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} \Longleftrightarrow q = p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)},$$

y de ahí la definición de $\sigma_{S,T}(p)$.

Por otra parte, la identidad $p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}$ es trivial como consecuencia del cálculo:

$$p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = (p + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \pi_{S,T}(p) + \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)}.$$

Proposición 2.77 *Si S, T son dos subespacios afines complementarios de $\mathcal{A}$, entonces:*

(I) $\sigma_{S,T} \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *es una aplicación afín y* $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}$.

(II) $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

(III) $\mathcal{P}_{\sigma_{S,T}} = S$ *y* $\sigma_{S,T}(T') = T'$ *para todo subespacio* $T' \parallel T$, *siendo* $\sigma_{S,T}|_{T'} \colon T' \to T'$ *la simetría central en* T' *con centro el punto* $S \cap T'$.

Demostración: De la Proposición 2.73 tenemos $\pi_{S,T}(p) = s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp})$ para todo $s \in S$, $p \in \mathcal{A}$. De aquí que

$$\sigma_{S,T}(p) = p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = (s + \overrightarrow{sp}) + 2\,\overrightarrow{p\big(s + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp})\big)} = (s + \overrightarrow{sp}) + 2\big(\overrightarrow{ps} + \vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp})\big) =$$

$$= (s + \overrightarrow{sp}) + 2\big(\vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp}\big) = s + \big(2\vec{\pi}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) - \overrightarrow{sp}\big) = s + \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}).$$

Por tanto

$$\sigma_{S,T}(p) = s + \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}(\overrightarrow{sp}) \quad \forall s \in S,\ p \in \mathcal{A},$$

y además en particular también

$$\sigma_{S,T}(s) = s \quad \forall s \in S.$$

De la Proposición 2.51 inferimos que $\sigma_{S,T}$ es la única aplicación afín con $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}$ y $\sigma_{S,T}(s) = s$ para todo $s \in S$, lo que prueba (i) (y que $S \subseteq \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}}$).

Para probar (ii), observemos que $\overrightarrow{\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}} \circ \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ y que $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T}$ tiene puntos fijos (todos los de S). De Proposición 2.51 concluimos que $\sigma_{S,T} \circ \sigma_{S,T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.

En relación a (iii), tengamos en cuenta que

$$p \in \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}} \Longleftrightarrow \sigma_{S,T}(p) = p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = p \Longleftrightarrow \overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} = \vec{0} \Longleftrightarrow p \in \mathcal{P}_{\pi_{S,T}} = S,$$

donde hemos usado Proposición 2.73-(ii).

Por último, como $\overrightarrow{\sigma_{S,T}} = \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}$ entonces $\overrightarrow{\sigma_{S,T}}|_{\vec{T}} \colon \vec{T} \to \vec{T}$ coincide con $-\mathrm{Id}_{\vec{T}}$. Además, si T' es un subespacio afín con $\vec{T'} = \vec{T}$ y $s' = S \cap T' \in \mathcal{P}_{\sigma_{S,T}}$, de la Proposición 2.58 inferimos que

$$\sigma_{S,T}(T') = \sigma_{S,T}(s' + \vec{T}) = \sigma_{S,T}(s') + \overrightarrow{\sigma_{S,T}}(\vec{T}) = s' + \vec{\sigma}_{\vec{S},\vec{T}}(\vec{T}) = s' + \vec{T} = T'.$$

Esto implica que $\sigma_{S,T}|_{T'} \colon T' \to T'$ es una simetría central (ver Definición 2.65) con centro el punto s', lo que concluye la prueba. ■

La anterior proposición tiene un recíproco natural.

Proposición 2.78 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una aplicación afín en un espacio afín $\mathcal{A}$ satisfaciendo $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. Entonces $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ y f es la simetría afín sobre $\mathcal{P}_f$ en la dirección del subespacio afín $q + \mathrm{Kef}(\vec{f} + \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, donde $q \in \mathcal{A}$ es un punto arbitrario.*

Demostración: Veamos que $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ comprobando que

$$\mathcal{P}_f = \{\mathrm{m}_{pf(p)}\colon p \in \mathcal{A}\}.$$

Si $p \in \mathcal{P}_f$ es obvio que $p = \mathrm{m}_{pf(p)}$, por lo que bastará con garantizar que $\mathrm{m}_{pf(p)} \in \mathcal{P}_f$ para todo $p \in \mathcal{A}$. En efecto, usando que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ tenemos:

$$f\big(\mathrm{m}_{pf(p)}\big) = f\big(p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}\big) = f(p) + \vec{f}\big(\frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)}\big) = f(p) + \frac{1}{2}\vec{f}\big(\overrightarrow{pf(p)}\big) =$$

$$= f(p) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)f(f(p))} = f(p) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)p} = p + \big(\overrightarrow{pf(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(p)p}\big) = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = \mathrm{m}_{pf(p)}.$$

De la identidad $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ inferimos que $\vec{f} \circ \vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$, por lo que $\vec{f} = \vec{\sigma}_{V_1, V_{-1}}$ para $V_1 = \mathrm{Kef}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ y $V_{-1} = \mathrm{Kef}(\vec{f} + \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$; ver Proposición 2.67. Por otra parte, la Proposición 2.61 nos dice que $\overrightarrow{\mathcal{P}_f} = V_1 = \mathrm{Kef}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, de donde al ser $\vec{\mathcal{A}} = V_1 \oplus V_{-1}$ deducimos que los subespacios afines $S := \mathcal{P}_f$ y $T := q + \mathrm{Kef}(\vec{f} + \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ ($q \in \mathcal{A}$ arbitrario) son complementarios (ver Proposición 2.69). Como conclusión f y $\sigma_{S,T}$ son dos aplicaciones afines con la misma aplicación lineal asociada, a saber $\vec{\sigma}_{V_1, V_{-1}}$, y que coinciden en al menos un punto (ambas fijan de hecho todos los puntos de S). La Proposición 2.51 garantiza que $f = \sigma_{S,T}$, lo que concluye la prueba. ■

Ejercicio 2.79 *Consideremos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ dados por*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x - y + z = 2\}, \quad T = (0,-1,0) + L(\{(1,1,1)\}).$$

Comprueba que S y T son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la simetría afín $\sigma_{S,T}$ sobre S en la dirección de T, dando sus ecuaciones analíticas respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0 = \{(0,0,0), B_0\}$ (B_0 base canónica de $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Recordemos que si $\pi_{S,T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la proyección sobre S en la dirección de T, entonces la simegtría $\sigma_{S,T}$ viene dada por la expresión

$$\sigma_{S,T}(p) := p + 2\,\overrightarrow{p\pi_{S,T}(p)} \quad \text{para todo } p \in \mathbb{R}^3.$$

Escribiendo como es habitual $p = (x,y,z)$ ya que estamos trabajando en coordenadas en $\mathcal{R}_0$, quedaría

$$\sigma_{S,T}((x,y,z)) = 2\pi_{S,T}((x,y,z)) - (x,y,z) \quad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Como ya calculamos $\pi_{S,T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en el Ejercico 2.75, y obtuvimos la expresión

$$\pi_{S,T}\big((x,y,z)\big) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y),$$

un cálculo directo nos dice que la simetría $\sigma_{S,T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\sigma_{S,T}\big((x,y,z)\big) = (4 + 2y - 2z - x, 4 - 2x + 3y - 2z, 4 - 2x + 2y - z).$$

■

2.6. El Teorema Fundamental de la Geometría Afín

El siguiente resultado es clave para la comprensión de la naturaleza de las aplicaciones afines y la herramienta básica para la construcción de las mismas.

Teorema 2.80 (Fundamental de la Geometría Afín) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos espacios afines, y escribamos* $\dim \mathcal{A} = n$. *Consideremos un sistema de referencia* $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ *de $\mathcal{A}$ y un conjunto de $n+1$ puntos $\{q_0, \ldots, q_n\}$ (no necesariamente distintos, se permiten repeticiones) de $\mathcal{A}'$. Entonces existe una única aplicación afín $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tal que $f(p_j) = q_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. Además*

(I) *Si $\{q_0, \ldots, q_n\}$ son afínmente independientes entonces f es injectiva.*

(II) *Si $\langle \{q_0, \ldots, q_n\} \rangle = \mathcal{A}'$ entonces f es sobreyectiva.*

(III) *Si $\{q_0, \ldots, q_n\}$ es un sistema de referencia de $\mathcal{A}'$ (y en particular* $\dim \mathcal{A}' = n$*) entonces f es una afinidad.*

Demostración : Llamemos $B = \{v_1 \ldots, v_n\}$ a la base de las direcciones de $\mathcal{R}$; recordemos que $v_j = \overrightarrow{p_0 p_j} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Análogamente llamemos $u_j = \overrightarrow{q_0 q_j} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal existe una única aplicación lineal

$$h \colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}', \quad h(v_j) = u_j \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Siguiendo la Proposición 2.51, afirmamos que la única aplicación afín (con $\vec{f} = h$ y $f(p_0) = q_0$) definida por

$$f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}', \quad f(p) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0 p})$$

realiza $f(p_j) = q_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. En efecto, la identidad $f(p_0) = q_0$ es trivial toda vez que $h(\vec{0}) = \vec{0}'$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$f(p_j) = q_0 + h(\overrightarrow{p_0 p_j}) = q_0 + h(v_j) = q_0 + u_j = q_0 + \overrightarrow{q_0 q_j} = q_j,$$

y por tanto f satisface lo requerido. Para comprobar la unicidad, tomemos $g \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afín satisfaciendo $g(p_j) = q_j$ para todo $j = 0, \ldots, n$, y observemos que

$$\vec{g}(v_j) = \vec{g}(\overrightarrow{p_0 p_j}) = \overrightarrow{g(p_0) g(p_j)} = \overrightarrow{q_0 q_j} = u_j = \vec{f}(v_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como las aplicaciones lineales $\vec{g}$ y $\vec{f}$ coinciden sobre los vectores de la base B deducimos que $\vec{g} = \vec{f}$, y como además $g(p_0) = f(p_0) = q_0$ que $f = g$. Esto concluye la primera parte de existencia y unicidad del teorema.

Proposición 2.56-(iv) nos dice que f es injectiva si y solo si $\vec{f} = h$ es inyectiva, lo que sabemos es equivalente a que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sean linealmente independientes, esto es, a que $\{q_0, \ldots, q_n\}$ sean afínmente independientes. Esto prueba (i). Por un razonamiento análogo f es sobreyectiva si y solo si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema de generadores de $\overrightarrow{\mathcal{A}}'$, o equivalentemente $\langle \{q_0, \ldots, q_n\} \rangle = \mathcal{A}'$ (ver Corolario 2.19), lo que prueba (ii). Item (iii) es consecuencia de (i) y (ii). ■

Corolario 2.81 *Dos espacios afines son afínmente equivalentes (esto es, existe una afinidad de uno en el otro) si y solo si tienen la misma dimensión.*

Demostración : Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son espacios con $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}'$, basta con tomar sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}' = \{q_0, \ldots, q_n\}$ de $\mathcal{A}'$, y considerar la única aplicación afín $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ con $f(p_j) = q_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Esta aplicación es una afinidad por el Teorema 2.80-(iii). Recíprocamente, si $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es una afinidad entonces $\vec{f} \colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ es un isomorfismo y por tanto $\dim \mathcal{A} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}} = \dim \overrightarrow{\mathcal{A}}' = \dim \mathcal{A}'$.

■

2.7. Ecuaciones analíticas de las aplicaciones afines

Dada una aplicación lineal $h\colon V \to V'$ entre espacios vectoriales con dimensiones $\dim V = n$, $\dim V' = k$, y elegidas bases ordenadas $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y $B' = \{u_1, \ldots, u_k\}$ de V', escribiremos por $M(h, B, B')$ la matriz de h en las bases B y B' (en notación columna). Recordemos que $M(h, B, B')$ es la matriz de orden $k \times n$ cuya j-ésima columna es el vector columna $\Phi_{B'}\big(h(v_j)\big) \equiv h(v_j)_{B'} \in \mathbb{R}^k$ de las coordenadas de $h(v_j)$ en la base B', lo que matricialmente se puede escribir:

$$h(v_j) = (u_1, \ldots, u_k) \cdot \big(h(v_j)_{B'}\big)^{\mathrm{t}}.$$

Esta matriz era el ingrediente fundamental de las ecuaciones analíticas de h en las bases B y B', que adoptaban la la forma matricial

$$h(v)_{B'} = M(h, B, B') \cdot v_B \quad \forall v \in V.$$

La interpretación de la fórmula es sencilla, conocidas las coordenadas v_B de un vector $v \in V$ en la base B de V, nos proporciona salvo multiplicar por $M(h, B, B')$ las coordenadas $h(v)_{B'}$ de su imagen $h(v) \in V'$ en la base B' de V'.

Para hacer lo equivalente con aplicaciones afines $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre espacios afines y fijemos sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ de $\mathcal{A}'$. El cálculo que permite relacionar las coordenadas $p_{\mathcal{R}}$ de un punto $p \in \mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ con las coordenadas $f(p)_{\mathcal{R}'}$ de su imagen $f(p) \in \mathcal{A}'$ en $\mathcal{R}'$ es el siguiente.

Como $f(p) = f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0p})$, tomando coordenadas en $\mathcal{R}'$ tenemos

$$f(p)_{\mathcal{R}'} = \big(f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0p})\big)_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + \big(\vec{f}(\overrightarrow{p_0p})\big)_{B'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\vec{f}, B, B') \cdot (\overrightarrow{p_0p})_B,$$

donde hemos usado las ecuaciones analíticas de $\vec{f}$ en las bases B y B'. Como $p_{\mathcal{R}} = (\overrightarrow{p_0p})_B$, obtenemos finalmente que

$$f(p)_{\mathcal{R}'} = f(p_0)_{\mathcal{R}'} + M(\vec{f}, B, B') \cdot p_{\mathcal{R}},$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\vec{f}, B, B') \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}.$$

Definición 2.82 *Dada $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afín y sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ de $\mathcal{A}'$, la matriz*

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(p_0)_{\mathcal{R}'} & M(\vec{f}, B, B') \end{array}\right)$$

es conocida como la matriz de f en los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ de $\mathcal{A}'$. Asimismo, la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}.$$

es conocida como las ecuaciones analíticas de f en los sistemas de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ de $\mathcal{A}'$.

Nótese que si $\dim \mathcal{A} = n$ y $\dim \mathcal{A}' = k$ entonces $M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$ es de orden $(k+1) \times (n+1)$.

Se deja como ejercicio la comprobación de las siguientes propiedades.

Propiedades 2.83 *Dadas aplicaciones afines* $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A}' \xrightarrow{g} \mathcal{A}''$ *entre espacios afines y sistemas de referencia* $\mathcal{R}$ *en* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{R}'$ *en* $\mathcal{A}'$ *y* $\mathcal{R}''$ *en* $\mathcal{A}''$*, los siguientes enunciados son ciertos:*

(I) $M(g \circ f, \mathcal{R}, \mathcal{R}'') = M(g, \mathcal{R}', \mathcal{R}'') \circ M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')$.

(II) $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \mathrm{I}_{n+1}$*, donde* $n = \dim \mathcal{A}$.

(III) *Si* f *es una afinidad entonces* $M(f^{-1}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}')^{-1}$.

(IV) *Si* R_1 *y* R_1' *son otros sistemas de referencia en* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{A}'$*, respectivamente, entonces*

$$M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1') = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}, \mathcal{R}', \mathcal{R}_1') \cdot M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}).$$

Notación 2.84 *Dado un espacio afín* $\mathcal{A}$*, un sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$ *y una aplicación afín* $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$*, se suele escribir*

$$M(f, \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}).$$

2.8. Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 2.85 *Dados los subespacios afines suplementarios de* $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}),$$

determina la expresión matricial de la proyección afín $\pi_{S,T}$ *sobre* S *en la dirección de* T *en el sistema de referencia* $\mathcal{R} = \{(-1, 1, -1), B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}\}$.

Solución: Recordemos que en el Ejercicio 2.75 probamos que la expresión analítica de $\pi_{S,T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en el sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\pi_{S,T}\big((x, y, z)\big) = (2 + y - z, 2 - x + 2y - z, 2 - x + y),$$

y por tanto

$$\overrightarrow{\pi_{S,T}}\big((x, y, z)\big) = (y - z, -x + 2y - z, -x + y).$$

En consecuencia,

$$M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}_0) \equiv M(\pi_{S,T}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Por otra parte, sabemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Como $M(\pi_{S,T},\mathcal{R}) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_0,\mathcal{R})\cdot M(\pi_{S,T},\mathcal{R}_0)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R},\mathcal{R}_0)$, inferimos que

$$M(\pi_{S,T},\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

esto es,

$$M(\pi_{S,T},\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La interpretación de este cálculo es que si $p\in\mathbb{R}^3$ es un punto con $p_{\mathcal{R}} = (x',y',z')$, entonces $\pi_{S,T}(p)\in\mathbb{R}^3$ es el punto con

$$\pi_{S,T}(p)_{\mathcal{R}} = (5-z',y',z').$$

■

Ejercicio 2.86 *Determinar la expresión matricial en el sistema de referencia usual de la aplicación afín $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos a los del plano afín $x+y-z=-2$, y tal que $f(0,0,0)=(1,2,-1)$. ¿Es f un isomorfismo afín?*

Solución: Llamemos $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x+y-z=-2\}$. Resolviendo la ecuación $x+y-z=-2$, podemos describir paramétricamente S como sigue

$$S=\{(\lambda+\mu,-\mu,\lambda+2)\colon \lambda,\mu\in\mathbb{R}\},$$

y por tanto

$$S=(0,0,2)+L\big(\{(1,0,1),(1,-1,0)\}\big).$$

Un sistema de referencia en S viene dado por los puntos

$$\{p_1=(0,0,2),p_2=(0,0,2)-(1,0,1)=(-1,0,1),p_3=(0,0,2)+(1,-1,0)=(1,-1,2)\}.$$

Si llamamos $p_0=(0,0,0)$, es claro que $\mathcal{R}=\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$ son afínmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y por tanto

$$\mathcal{R}\equiv\{p_0,B=\{\overrightarrow{p_0p_1},\overrightarrow{p_0p_2},\overrightarrow{p_0p_3}\}\}=\{(0,0,0),B=\{(0,0,2),(-1,0,1),(1,-1,2)\}\}$$

es un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$.

Por el Teorema 2.80, la aplicación afín $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que resuelve el ejercicio está determinada por las condiciones siguientes

$$f(p_0)=(1,2,-1),\quad f(p_j)=p_j,\quad j=1,2,3.$$

Por tanto, si llamamos

$$v_1=\overrightarrow{p_0p_1}=(0,0,2),v_2=\overrightarrow{p_0p_2}=(-1,0,1),v_3=\overrightarrow{p_0p_3}=(1,-1,2),$$

deducimos que

$$\vec{f}(v_1)=\overrightarrow{f(p_0)f(p_1)}=(0,0,2)-(1,2,-1)=(-1,-2,3)$$

$$\vec{f}(v_2) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_2)} = (-1,0,1) - (1,2,-1) = (-2,-2,2)$$
$$\vec{f}(v_3) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_3)} = (1,-1,2) - (1,2,-1) = (0,-3,3).$$

De aquí que

$$M(\vec{f}, B, B_0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde B_0 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Recordemos que $\mathcal{R}_0 = \{p_0, B_0\}$ es el sistema de referencia usual o canónico de $\mathbb{R}^3$. Al ser $f(p_0)_{\mathcal{R}_0} = (1,2,-1)$, tenemos que

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

deducimos que

$$M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

La expresión matricial de $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $\mathcal{R}_0$ queda

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \\ z \end{array}\right).$$

Por último, obsérvese que

$$\det\left(M(\vec{f}, B, B_0)\right) = 6 \neq 0,$$

de donde $\vec{f}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y, por tanto, f es una afinidad o isomorfismo afín. ■

Ejercicio 2.87 *Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los planos*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ -x-y+z=1\}, \quad S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x+y+z=-1\}$$

y las rectas

$$T = (0,0,1) + L(\{(1,1,0)\}), \quad T' = (0,0,-1) + L(\{(1,1,0)\}).$$

Justifica que existe una afinidad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(S) = S'$ y $f(T) = T'$. Determina la expresión matricial de f en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN: Para responder correctamente a la pregunta, es importante conocer la posición relativa de S y T, y compararla con la de S' y T'.

Estudiemos si S y T son secantes. Los puntos de T se parametrizan

$$T = \{(\lambda, \lambda, 1) \colon \lambda \in \mathbb{R}\},$$

de donde teniendo en cuenta que la ecuación implícita $-x - y + z = 1$ caracteriza las coordenadas en $\mathcal{R}_0$ de los puntos de S,

$$S \cap T = \{(\lambda, \lambda, 1) \colon -\lambda - \lambda + 1 = 1\} = \{(0, 0, 1)\}.$$

Esto prueba que S y T se cortan en el punto $p_0 = (0, 0, 1)$, de donde por la fórmula de dimensiones $\dim S \vee T = \dim S + \dim T = 3$, esto es, $S \vee T = \mathbb{R}^3$.

Un cálculo análogo dice que

$$T' = \{(\lambda, \lambda, -1) \colon \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad S' \cap T' = \{(\lambda, \lambda, -1) \colon \lambda + \lambda - 1 = -1\} = \{(0, 0, -1)\},$$

por lo que S' y T' se cortan en el punto $q_0 = (0, 0, -1)$ y $S' \vee T' = \mathbb{R}^3$.

Dada una aplicación afín $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, es claro que f será una afinidad satisfaciendo $f(T) = T', f(S) = S'$ si y sólo si se cumplen los siguientes requerimientos:

(a) $f(S \cap T) = S' \cap T'$, esto es, $f(p_0) = q_0$.

(b) f aplica un sistema de referencia de T en otro de T'. Por ejemplo, el sistema de referencia $\{p_0, p_1 = (1, 1, 1)\}$ de T en un sistema de referencia $\{q_0 = f(p_0), q_1 = f(p_1)\}$ de T' (esto es, $f(p_1)$ ha de ser un punto de T' distinto de q_0).

(c) f aplica un sistema de referencia de S en otro de S'. Por ejemplo, el sistema de referencia $\{p_0, p_2 = (1, -1, 1), p_3 = (-1, 0, 0)\}$ de S en un sistema de referencia $\{q_0 = f(p_0), q_2 = f(p_2), q_3 = f(p_3)\}$ de S' (esto es, $f(p_2), f(p_3)$ han de ser puntos de S' que, junto con q_0, formen un sistema afínmente independiente).

Lo que vamos a hacer para resolver el ejercicio es elegir puntos $q_1 \in T'$, $q_2, q_3 \in S'$ tales que $\{q_0, q_1\}$ sea un sistema de referencia de T' y $\{q_0, q_2, q_3\}$ sea un sistema de referencia de S' , y construir por el Teorema Fundamental de la Geometría afín la única aplicación afín

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad f(p_j) = q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Nótese que en este contexto $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ y $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ son sistemas de referencia de $\mathbb{R}^3$. Hay muchas elecciones posibles de los puntos q_1, q_2, q_3, y por tanto, muchas afinidades resolviendo el ejercicio. Nosotros vamos a elegir:

$$q_1 = (1, 1, -1) \in T', \;\; q_2 = (1, -1, -1), \;\; q_3 = (-1, 0, 0) \in S'.$$

La comprobación de que $\{q_0, q_1\}$ y $\{q_0, q_2, q_3\}$ son afínmente independientes (y por tanto sistemas de referencia de T' y S' respectivamente) es rutinaria.

Resumiendo, sólo nos resta construir la única afinidad $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que lleva el sistema de referencia

$$\mathcal{R} = \{p_0 = (0, 0, 1), p_1 = (1, 1, 1), p_2 = (1, -1, 1), p_3 = (-1, 0, 0)\} \equiv$$

$$\equiv \{p_0 = (0, 0, 1), B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-1, 0, -1)\}\}$$

en el sistema de puntos (también sistema de referencia en este caso)

$$\{q_0 = (0, 0, -1), q_1 = (1, 1, -1), q_2 = (1, -1, -1), q_3 = (-1, 0, 0)\}$$

Si llamamos

$$u_1 = \overrightarrow{q_0q_1} = (1,1,0), \quad u_2 = \overrightarrow{q_0q_2} = (1,-1,0), \quad u_3 = \overrightarrow{q_0q_3} = (-1,0,1),$$

una tal f tiene como aplicación lineal asociada $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ al único isomorfismo en $\mathbb{R}^3$ que aplica $\vec{f}(v_j) = u_j$, $j = 1,2,3$, esto es, satisfaciendo

$$M(\vec{f}, B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B_0 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, la afinidad f viene representada en los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_0$ (sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$) por la matriz

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Como $M(f, \mathcal{R}_0) \equiv M(f, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R})$ y

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

queda

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 2.88 *Se considera la aplicación*

$$f\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad f(p(x)) = (p(0)+1, p(1), p'(1)-1).$$

(a) *Demuestra que f es afín y encuentra la matriz que la representa en los sistemas de referencia canónicos $\mathcal{R}'_0 = \{0, \{1, x, x^2\}\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.*

(b) *Comprueba que $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))\colon p(0) + p(1) = 2\}$ es un subespacio afín de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y determina sus ecuaciones implícitas en $\mathcal{R}'_0$.*

(c) *Considera el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{(1,0,1), B = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (1,1,0)\}\}$ de $\mathbb{R}^3$ y calcula las ecuaciones implícitas de $f(S)$ en $\mathcal{R}$.*

Solución: Es claro que $f(p(x)) = (1,0,-1) + h(p(x))$, donde h es la aplicación lineal

$$h\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad h(p(x)) = (p(0), p(1), p'(1)).$$

De la Proposición 2.51 deducimos que f es afín con $\vec{f} = h$ y $f(0) = (1,0,-1)$. Por otra parte, es claro que

$$\vec{f}(1) = (1,1,0), \quad \vec{f}(x) = (0,1,1), \quad \vec{f}(x^2) = (0,1,2),$$

lo que unido a que $f(0) = (1, 0, -1)$ nos dice que

$$M(f, \mathcal{R}_0', \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

concluyendo (a).

Para probar (b), basta con observar que $1 \in S$ y $S = 1 + U$, donde U es el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$U = \{p(x) \colon p(0) + p(1) = 0\}.$$

Por tanto

$$\vec{S} = U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon 2a_0 + a_1 + a_2 = 0\},$$

y

$$S = U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \colon 2a_0 + a_1 + a_2 = 2\}.$$

siendo la segunda expresión las ecuaciones implícitas de S en $\mathcal{R}_0'$. Esto resuelve (b).

Finalmente, para probar (c) recordemos que

$$f(S) = f(1 + \vec{S}) = f(1) + \vec{f}(\vec{S}) = (2, 1, -1) + \vec{f}(\vec{S}).$$

Por otra parte, resolviendo el sistema $2a_0 + a_1 + a_2 = 0$ que se corresponde con las ecuaciones implícitas en $\mathcal{R}_0'$ de $\vec{S}$, deducimos que

$$\vec{S} = L\big(\{x - x^2, 1 - 2x\}\big).$$

Por tanto

$$\vec{f}(\vec{S}) = \vec{f}\big(L(\{x - x^2, 1 - 2x\})\big) = L\big(\{\vec{f}(x - x^2), \vec{f}(1 - 2x)\}\big) = L(\{(0, 0, -1), (1, -1, -2)\}).$$

Las ecuaciones implícitas de $f(S)$ en $\mathcal{R}_0$ se deducen, por el procedimiento estándar, imponiendo

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z+1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 1 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z+1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -x - y + 3 = 0.$$

Para calcular las correspondientes ecuaciones implícitas de $f(S)$ en $\mathcal{R}$ hemos de realizar el conveniente cambio de sistema de referencia, en concreto nos interesa el cambio de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}_0$ gobernado por la matriz

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si $p \in \mathbb{R}^3$ y escribimos $p_{\mathcal{R}} = (x', y', z')$ y $p_{\mathcal{R}_0} = (x, y, z)$, inferimos que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

esto es,
$$x = 1 + x' + y' + z', \quad y = x' - y' + z', \quad z = 1 - x'.$$
Como $-x - y + 3 = 0$ es la ecuación implícita de $f(S)$ en $\mathcal{R}_0$, sustituyendo
$$-(1 + x' + y' + z') - (x' - y' + z') + 3 = 2x' - 2z' + 2 = 0$$
es la ecuación implícita de $f(S)$ en $\mathcal{R}$. ■

Ejercicio 2.89 *Probar que la aplicación afín $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.*

Solución: Es claro que $f(x, y) = (1, 3) + f_0(x, y)$, donde f_0 es la aplicación lineal
$$f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_0(x, y) = -2(x, y).$$
De la Proposición 2.51 deducimos que f es afín con $\vec{f} = f_0$ y $f(0, 0) = (1, 3)$. Como $\vec{f} = -2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, f es una homotecia de razón -2. Su único punto fijo o centro (a, b) satisface
$$f(a, b) = (a, b) \Longleftrightarrow (1 - 2a, 3 - 2b) = (a, b) \Longleftrightarrow (a, b) = (1/3, 1).$$
Po tanto f es la homotecia $h_{(1/3,1),-2}$. ■

Ejercicio 2.90 *Calcular explícitamente una homotecia en $\mathbb{R}^3$ de centro (a, b, c) y razón $r \neq 0, 1$.*

Solución: La homotecia buscada $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisface $\vec{h} = r\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Si escribimos $h(0, 0, 0) = (a', b', c')$, la Proposición 2.51 nos dice entonces que
$$h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (a', b', c') + r(x, y, z).$$
Como $h(a, b, c) = (a, b, c)$ inferimos que
$$(a', b', c') + r(a, b, c) = (a, b, c) \Longleftrightarrow (a', b', c') = (1 - r)(a, b, c).$$
Finalmente queda
$$h \equiv h_{(a,b,c),r}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h_{(a,b,c),r}(x, y, z) = (1 - r)(a, b, c) + r(x, y, z).$$
■

Ejercicio 2.91 *Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un endomorfismo afín de un plano afín. Supongamos que existen tres rectas afines S_1, S_2 y S_3 en $\mathcal{A}$ de las que no hay dos paralelas, y tales que $f(S_i) = S_i$ para cada $i = 1, 2, 3$. Demostrar que f es la identidad o una homotecia de razón $r \neq 1$.*

Solución: Escribamos $S_j = p_j + L(\{v_j\})$, $j = 1, 2, 3$. Como $f(S_j) = f(p_j) + L(\{\vec{f}(v_j)\}) = p_j + L(\{v_j\}) = S_j$, deducimos que $\vec{f}(v_j) = r_j v_j$, $r_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$. Como las rectas no son paralelas dos a dos, deducimos que:

- $\{v_1, v_2\}$ son linealmente independientes y por tanto una base de $\vec{\mathcal{A}}$.
- $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Por tanto

$$r_3(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) = r_3 v_3 = \vec{f}(v_3) = \vec{f}(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2) = \lambda_1 \vec{f}(v_1)+\lambda_2 \vec{f}(v_2) = \lambda_1 r_1 v_1+\lambda_2 r_2 v_2,$$

de donde $r_3\lambda_1 = r_1\lambda_1, r_3\lambda_2 = r_2\lambda_2$, esto es $r := r_3 = r_2 = r_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Si $r \neq 1$ deducimos que $\vec{f} = r\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$, y por tanto f es una homotecia de razón r (y centro $a \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$).

Si $r = 1$ entonces f es una traslación τ_v, $v \in \vec{\mathcal{A}}$. Al ser $\tau_v(S_j) = S_j = p_j + L(\{v_j\})$ inferimos que $p_j + v \in S_j$, o equivalentemente $v = \mu_j v_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$. Como cada pareja de vectores $\{v_i, v_j\}$ son linealmente independientes necesariamente $\mu_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, y $v = \vec{0}$. Esto prueba que $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$. ■

Ejercicio 2.92 *Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín. Demuestra los siguientes enunciados.*

(a) *La composición de una traslación y de una homotecia es una homotecia. Calcula el centro y la razón de esta homotecia resultante.*

(b) *La composición de dos homotecias es una homotecia o una traslación. De ser una homotecia calcula su razón y centro, y de ser una traslación el vector de traslación.*

Como consecuencia, el conjunto unión de todas las homotecias y traslaciones es un grupo con operación la composición de aplicaciones.

Solución : Para resolver (a), tomemos una traslación τ y una homotecia h en $\mathcal{A}$. Recordemos que $\vec{h} = r\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ $(r \neq 0, 1)$ y $\vec{\tau} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$, y por tanto $\overrightarrow{h\circ\tau} = r\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$. Por la Proposición 2.64, esto prueba que $f := h\circ\tau$ es una homotecia de razón r. Recordemos que el centro c de f se calcula por la fórmula

$$c = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qf(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Si escribimos $h = h_{a,r}$ (a es el centro de h) y $\tau = \tau_v$ (v es el vector de traslación de τ), y elegimos $q = a + (-v)$, la fórmula anterior nos dice que

$$c = (a+(-v))+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))f(a+(-v))} = \big(a+(-v)\big)+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))h\big(\tau(a+(-v))\big)} =$$

$$= \big(a+(-v)\big)+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))h(a)} = \big(a+(-v)\big)+\frac{1}{1-r}\overrightarrow{(a+(-v))a} = \big(a+(-v)\big)+\frac{1}{1-r}v,$$

y por tanto

$$c = a + \frac{r}{1-r}v.$$

Una discusión similar se puede llevar a cabo para la homotecia $\tau\circ h$.

Para resolver (b), tomemos dos homotecias $h_1 = h_{a_1,r_1}$ y $h_2 = h_{a_2,r_2}$ en $\mathcal{A}$. Discutiremos dos casos, $r := r_1 r_2 \neq 1$ y $r := r_1 r_2 = 1$.

Si $r \neq 1$ entonces $\overrightarrow{h_2\circ h_1} = \vec{h_2}\circ\vec{h_1} = \big(r_2\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}\big)\circ\big(r_1\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}\big) = r\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$, y por tanto la Proposición 2.64 nos garantiza que $h := h_2\circ h_1$ es una homotecia de razón r. Para calcular el centro c de h usamos la fórmula

$$c = q + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{qh(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Eligiendo $q = a_1$ nos quedará

$$c = a_1 + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{a_1 h(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{a_1 h_2(a_1)} = a_1 + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{a_1\big(a_2 + r_2\overrightarrow{a_2 a_1}\big)} =$$

$$= a_1 + \frac{1}{1-r}(\overrightarrow{a_1a_2} + r_2\overrightarrow{a_2a_1}) = a_1 + \frac{1-r_2}{1-r_1r_2}\overrightarrow{a_1a_2}.$$

Supongamos ahora que $r = 1$. En este caso razonando como antes $\tau := h_2 \circ h_1$ satisface $\vec{\tau} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$, y por tanto la Proposición 2.62 nos dice que τ es una traslación en $\mathcal{A}$. El vector de traslación v de τ se calcula de la fórmula

$$v = \overrightarrow{q\tau(q)}, \quad q \in \mathcal{A} \text{ punto arbitrario.}$$

Eligiendo $q = a_1$ y razonando como arriba queda

$$v = \overrightarrow{a_1\tau(a_1)} = \overrightarrow{a_1h_2(a_1)} = \overrightarrow{a_1\big(a_2 + r_2\overrightarrow{a_2a_1}\big)} = (1-r_2)\overrightarrow{a_1a_2}.$$

■

Ejercicio 2.93 *En un espacio afín $\mathcal{A}$ se consideran $(n+1)$-puntos $\{p_0, \ldots, p_n\} \subseteq \mathcal{A}$ y fijemos $O \in \mathcal{A}$. Se define el baricentro de estos puntos como*

$$b = O + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}.$$

Probar que b no depende del punto O fijado. Probar además que si $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es afín entonces $f(b)$ es el baricentro de $\{f(p_0), \ldots, f(p_n)\}$.

Solución: Para probar que b no depende del punto O observemos que

$$O' + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{O'p_j} = (O + \overrightarrow{OO'}) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{Op_j}) = O + \big(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'O} + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}\big),$$

de donde

$$O' + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{O'p_j} = O + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}$$

como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del ejercicio, obsérvese que por ser f afín

$$f\big(O + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}\big) = f(O) + \vec{f}\big(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}\big) = f(O) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\vec{f}(\overrightarrow{Op_j}),$$

esto es

$$f\big(O + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{Op_j}\big) = f(O) + \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\overrightarrow{f(O)f(p_j)}),$$

y por tanto f lleva el baricentro de $\{p_0, \ldots, p_n\}$ en el baricentro de $\{f(p_0), \ldots, f(p_n)\}$.

■

Ejercicio 2.94 *Un triángulo en un espacio afín $\mathcal{A}$ con $\dim \mathcal{A} \geq 2$ son tres puntos afínmente independientes, llamados vértices, y sus lados se definen como los segmentos que determinan las parejas de vértices. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo $\{a, b, c\}$ en $\mathcal{A}$ forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de $\{a, b, c\}$ y cuyo baricentro es el mismo que el de $\{a, b, c\}$.*

Solución: Los lados de $\{a,b,c\}$ son por definición las rectas

$$\langle\{a,b\}\rangle,\ \ \langle\{a,c\}\rangle,\ \ \langle\{b,c\}\rangle.$$

Por definición, los puntos medios de los lados de $\{a,b,c\}$ son los de los segmentos $[a,b]$, $[a,c]$ y $[b,c]$, a saber

$$\mathrm{m}_{ab} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}),\ \ \mathrm{m}_{ac} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Oc}),\ \ \mathrm{m}_{bc} = O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc}), \qquad (3)$$

donde $O \in \mathcal{A}$ cualquier punto auxiliar. Por tanto

$$\overrightarrow{\mathrm{m}_{ab}\mathrm{m}_{ac}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Oc}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oc}-\overrightarrow{Ob}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{bc} \quad \text{y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{m}_{ab}\mathrm{m}_{bc}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oc}-\overrightarrow{Oa}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{ac}.$$

Como $\{a,b,c\}$ son afínmente independientes los vectores $\{\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ac}\}$ son linealmente independientes, de donde $\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{ac},\mathrm{m}_{bc}\}$ son afínmente independientes y determinan un triángulo. Sus lados son las rectas,

$$\langle\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{ac}\}\rangle,\ \ \langle\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{bc}\}\rangle,\ \ \langle\{\mathrm{m}_{ac},\mathrm{m}_{bc}\}\rangle,$$

cuyos vectores de directores son respectivamente

$$\overrightarrow{\mathrm{m}_{ab}\mathrm{m}_{ac}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{bc},\ \ \overrightarrow{\mathrm{m}_{ab}\mathrm{m}_{bc}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ac},\ \ \overrightarrow{\mathrm{m}_{ac}\mathrm{m}_{bc}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab},$$

que efectivamente coinciden respectivamente con los de los lados

$$\langle\{b,c\}\rangle,\ \ \langle\{a,c\}\rangle,\ \ \langle\{a,b\}\rangle,$$

por lo que se dan las relaciones de paralelismo

$$\langle\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{ac}\}\rangle \parallel \langle\{b,c\}\rangle,\ \ \langle\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a,c\}\rangle,\ \ \langle\{\mathrm{m}_{ac},\mathrm{m}_{bc}\}\rangle \parallel \langle\{a,b\}\rangle.$$

Por último, teniendo en cuenta (3), el baricentro de $\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{ac},\mathrm{m}_{bc}\}$ obedece a la fórmula

$$O + \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{O\mathrm{m}_{ab}}+\overrightarrow{O\mathrm{m}_{ac}}+\overrightarrow{O\mathrm{m}_{bc}}\big) = O + \frac{1}{3}\big(\frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Oc}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})\big) =$$

de donde

$$O + \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{O\mathrm{m}_{ab}}+\overrightarrow{O\mathrm{m}_{ac}}+\overrightarrow{O\mathrm{m}_{bc}}\big) = O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc})$$

por lo que los baricentros de $\{\mathrm{m}_{ab},\mathrm{m}_{ac},\mathrm{m}_{bc}\}$ y $\{a,b,c\}$ coinciden. ■

Ejercicio 2.95 *Sea $\{a,b,c\}$ un triángulo en un espacio afín $\mathcal{A}$ con baricentro o. Demostrar que la homotecia $h = h_{o,-1/2}$ lleva cada vértice de $\{a,b,c\}$ en el punto medio de su lado opuesto.*

Solución: Veamos que $h(c) = \mathrm{m}_{ab}$ (análogamente se comprobaría que $h(b) = \mathrm{m}_{ac}$ y $h(a) = \mathrm{m}_{bc}$). Fijemos un punto $O \in \mathcal{A}$ y recordemos que

$$o = O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}+\overrightarrow{Oc}).$$

Por tanto

$$h(c) = o - \frac{1}{2}\overrightarrow{oc} = \big(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\big) - \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}))\, c}\big) =$$

$$= \big(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\big) + \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{c\,(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}))}\big) =$$

$$= \big(O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\big) + \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{cO} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc})\big) =$$

$$= \big(O + \frac{1}{3}\big(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} + \overrightarrow{Oc}\big)\big) + \frac{1}{6}\big(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob} - 2\overrightarrow{Oc}\big) =$$

$$= O + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{Ob}) = \mathrm{m}_{ab}$$

como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 2.96 *Dado un espacio afín $\mathcal{A}$, demostrar las siguientes afirmaciones:*

(a) *Una homotecia $h \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ queda determinada por la imagen de dos puntos.*

(b) *Las constantes, las traslaciones y las homotecias son las únicas aplicaciones afines $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tales que $f(S)$ es paralelo a S, para todo subespacio afín S de $\mathcal{A}$.*

Solución: Sea $h = h_{a,r}$ la homotecia de centro $a \in \mathcal{A}$ y razón $r \neq 0, 1$. Consideremos dos puntos distintos $p_0, q_0 \in \mathcal{A}$, y supongamos que conocemos los puntos $p_1 := h(p_0)$ y $q_1 := h(q_0)$. Veamos que podemos deducir quienes son $a \in \mathcal{A}$ y $r \in \mathbb{R}$ a partir de p_0, p_1, q_0, q_1. En efecto, sabemos que $p_1 = a + r\overrightarrow{ap_0}$, y $q_1 = a + r\overrightarrow{aq_0}$, por lo que

$$\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{(a + r\overrightarrow{ap_0})(a + r\overrightarrow{aq_0})} = r(\overrightarrow{aq_0} - \overrightarrow{ap_0}) = r\overrightarrow{p_0q_0}$$

y los vectores $\overrightarrow{p_1q_1}$ y $\overrightarrow{p_0q_0}$ son linealmente dependientes siendo la razón r el factor de proporcionalidad

$$r = \frac{\overrightarrow{p_1q_1}}{\overrightarrow{p_0q_0}}.$$

Para determinar el centro a de h observemos que

$$p_1 = a + r\overrightarrow{ap_0} = (p_0 + \overrightarrow{p_0a}) + r\overrightarrow{ap_0} = p_0 + (1 - r)\overrightarrow{p_0a},$$

de donde

$$\overrightarrow{p_0p_1} = \overrightarrow{p_0(p_0 + (1 - r)\overrightarrow{p_0a})} = (1 - r)\overrightarrow{p_0a}.$$

De aquí que el centro a de h venga determinado por la expresión formal

$$a = p_0 + \overrightarrow{p_0a} = p_0 + \frac{1}{1 - r}\overrightarrow{p_0p_1} = p_0 + \frac{\overrightarrow{p_0q_0}}{\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1}}\overrightarrow{p_0p_1},$$

donde $\overrightarrow{p_0q_0}/(\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1})$ expresa el factor de proporcionalidad entre los vectores linealmente dependientes $\overrightarrow{p_0q_0} - \overrightarrow{p_1q_1}$ y $\overrightarrow{p_0q_0}$. ■

Ejercicio 2.97 *Una cuaterna de puntos $\{a, b, c, d\}$ se dice un cuadrilátero si no contiene tres puntos alineados; si además sus lados opuestos $\langle\{a, b\}\rangle, \langle\{d, c\}\rangle$ y $\langle\{a, d\}\rangle, \langle\{b, c\}\rangle$ son paralelos entonces la cuaterna se dice ser un paralelogramo. Probar que si $\{a, b, c, d\}$ es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ y $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$.*

Solución : Si $\{a, b, c, d\}$ es un paralelogramo entonces

$$\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{dc}, \quad \overrightarrow{bc} = \mu \overrightarrow{ad},$$

donde $\lambda, \mu \neq 0$ ya que los puntos son distintos dos a dos. Tenemos que

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \lambda \overrightarrow{dc} + \mu \overrightarrow{ad}.$$

Como también $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}$, deducimos que

$$\lambda \overrightarrow{dc} + \mu \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ad} + \overrightarrow{dc}.$$

Al ser los vectores $\{\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{dc}\}$ son linealmente independientes, ya que $\{a, b, c, d\}$ es un cuadrilátero (los puntos $\{a, d, c\}$ no están alineados), concluimos que $\lambda = \mu = 1$ y de aquí se sigue el ejercicio. ∎