Ejercicios del Tema 2

1. Sea A un espacio afín euclídeo y $p, q \in A$. Recordemos que el *punto medio* entre p y q se definía como $\mathrm{m}_{pq} = p + (1/2)\,\overrightarrow{pq}$. Demostrar que $\mathrm{d}(p, \mathrm{m}_{pq}) = \mathrm{d}(q, \mathrm{m}_{pq})$.

2. (Hiperplano afín de puntos equidistantes). Dados tres puntos $p, q, r \in \mathbb{R}^n$, demostrar que se cumple la igualdad
$$\mathrm{d}(p,r)^2 - \mathrm{d}(q,r)^2 = 2 < \overrightarrow{r\mathrm{m}_{pq}}, \overrightarrow{qp} >,$$
donde m_{pq} es el punto medio entre p y q. Utilizar esta igualdad para probar lo siguiente: si $p \neq q$, entonces el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^n$ que se encuentran a la misma distancia de p y de q coincide con el hiperplano afín $\mathrm{m}_{pq} + L(\overrightarrow{pq})^{\perp}$.

3. Calcular las proyecciones y las simetrías ortogonales de $\mathbb{R}^2$ con respecto de los ejes coordenados.

4. Calcular, según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia del punto $p = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ a la recta afín S de ecuaciones $x - y - z = 0$ y $x - y + z = a$.

5. En $\mathbb{R}^3$, calcular, según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, la distancia entre la recta afín S de ecuaciones $x + y = 0$ y $x - y + z = 1$, y la recta afín S' de ecuaciones $x + y = a$ y $x - y + bz = 1$.

6. Dados los siguientes pares de rectas estudia su posición relativa. Si se cortan determina el ángulo que forma, y en caso contrario calcula la distancia entre ellas.

   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}, \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x = y\}$.

   b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y + 1\}, \quad S = \{(2\lambda, 1 + 2\lambda) \in \lambda \in \mathbb{R}\}$.

7. Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales, dotado de su estructura afín canónica. Introduzcamos en el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la métrica euclidiana
$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$
y convirtamos al espacio afín $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en euclídeo. Comprueba que las rectas
$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p(0) = 5, p''(8) = 4\},\ T = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \colon p'(0) = 0, p'(1) = 4\}$$
se cortan en un punto y calcula el ángulo que forman.

8. Una aplicación afín $f \colon (\mathcal{A}, \langle\ ,\ \rangle) \to (\mathcal{A}', \langle\ ,\ \rangle')$ entre espacios afines euclidianos se dice que preserva la ortogonalidad si para cualesquiera rectas secantes R, S en $(\mathcal{A}, \langle\ ,\ \rangle)$,
$$R \perp S \Longrightarrow f(R) \perp f(S).$$
Probar que si $f \colon (\mathcal{A}, \langle\ ,\ \rangle) \to (\mathcal{A}', \langle\ ,\ \rangle')$ es una aplicación afín biyectiva, entonces f es una semejanza si y sólo si f preserva la ortogonalidad.

9. Encuentra si existe un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que lleve la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x=0\}$ en la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y=1\}$ y la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y=0\}$ en la recta $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x=1\}$.

10. Sean f_1, f_2 las simetrías ortogonales en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ respecto de las rectas $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x-y=2\}$ y $R_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x-2y=1\}$, repectivamente. Calcula $f_1\circ f_2$ y descríbela.

11. En $\mathbb{R}^4$ calcular, según los valores de $a\in\mathbb{R}$, la distancia entre $S=(0,1,1,0)+L((a,0,1,1))$ y el plano afín de ecuaciones $x+y+z+t=1$ y $x-y=0$.

12. Demostrar que si A es un espacio afín euclídeo de dimensión n, entonces existe un movimiento rígido $f: A\to\mathbb{R}^n$.

13. Demostrar que todo movimiento rígido de una recta afín en sí misma es una traslación o una simetría central.

14. Sea $f: A\to A$ un movimiento rígido. Dadas dos rectas afines S y S' en A, demostrar que $f(S)$ y $f(S')$ son dos rectas afines en A que determinan el mismo ángulo que S y S'.

15. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación afín tal que:

$$f(-1,-1)=(0,0),\quad f(-1,-2)=(1,0),\quad f(0,-1)=(0,1).$$

Demostrar que f es un movimiento rígido y clasificarlo.

16. Demostrar que si p y q son dos puntos de un espacio afín euclídeo A, entonces siempre existe un movimiento rígido $f: A\to A$ tal que $f(p)=q$. De forma más general, probar que si A tiene dimensión finita y S, S' son dos subespacios afines de A con dimensión m, entonces existe un movimiento rígido $f: A\to A$ tal que $f(S)=S'$.

17. Construir un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que transforme la recta afín S de ecuación $x+y=2$ en la recta afín $S'=(1,-1)+L((1,1))$. Clasificar el movimiento obtenido.

18. Sean σ_1 y σ_2 las simetrías en $\mathbb{R}^2$ respecto de las rectas afines $x+y=0$ y $x+2y=2$, respectivamente. Calcular de forma explícita el movimiento rígido $f=\sigma_1\circ\sigma_2$ en coordenadas usuales. Clasificarlo.

19. ¿Son movimientos rígidos las aplicaciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y)=(y-2,x+1)\ \text{ y }\ g(x,y)=(2y-1,-2x+3)?$$

Si alguna de ellas lo es, clasificarlo.

20. Calcular en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ los siguientes movimientos:

    a) El giro de centro el punto $o=(1,2)$ y ángulo orientado $\theta=2\pi/3$ respecto de la orientación usual.

b) La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín $x-y=1$ con vector de deslizamiento $u=(1,1)$.

21. Se considera la aplicación afín $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya expresión matricial con respecto a R_0 es:
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

    a) Demostrar que f es una simetría deslizante.

    b) Calcular la recta afín de simetría y el vector de traslación.

22. Demostrar que la composición de dos simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^2$ es un giro, una traslación o la identidad. ¿De qué depende que se obtenga un giro, una traslación o la identidad?

23. Calcular las proyecciones y las simetrías de $\mathbb{R}^3$ con respecto a los ejes coordenados y a los planos coordenados.

24. Sean σ_1 y σ_2 las simetrías en $\mathbb{R}^3$ respecto de los planos afines $x+y=1$ y $x-z=2$, respectivamente. Calcula de forma explícita el movimiento rígido $f=\sigma_1\circ\sigma_2$ en coordenadas usuales. Clasifícalo.

25. Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ y clasifícalas:

    a) $f(x,y) = (3-3x/5+4y/5, 1-4x/5-3y/5)$.

    b) $f(x,y) = (x/2-\sqrt{3}y/2+1, \sqrt{3}x/2+y/2+2)$.

    c) $f(x,y) = (-x/2+\sqrt{3}y/2+1, \sqrt{3}x/2+y/2-1)$.

    d) $f(x,y) = (3x/5+4y/5+2, 4x/5-3y/5+5)$.

26. Calcular en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^3$ los siguientes movimientos:

    a) el movimiento helicoidal de eje $S=(1,2,1)+L((1,0,-1))$ y ángulo $\pi/2$ con vector de traslación $v=(-3,0,3)$.

    b) la simetría deslizante respecto del plano afín $x+y+z=1$ con vector de traslación $v=(1,-1,0)$.

    c) la composición de la rotación de eje $S=(1,2,0)+L((0,1,0))$ y ángulo $\pi/2$ con la simetría respecto del plano afín $y=-1$.

27. Se consideran las aplicaciones afines $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dadas por:
$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x+2y+z+2, x-2y+2z-2, 2x-y-2z-4),$$
$$g(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x+2y+z+3, -2x+y+2z, -x+2y-2z-3).$$

    Demostrar que son movimientos rígidos de $\mathbb{R}^3$ y clasificarlos.

28. Demuestra que las siguientes aplicaciones afines son movimientos rígidos del espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ y clasifícalas:

   a) $f(x,y,z) = (2+y, x, 1+z)$.
   b) $f(x,y,z) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z+1\right)$.
   c) $f(x,y,z) = (x/2 + \sqrt{3}z/2 + 1, y, -\sqrt{3}x/2 + z/2 - 1)$.
   d) $f(x,y,z) = (x/2 - \sqrt{3}z/2 + 2, y+2, -\sqrt{3}x/2 - z/2 + 2)$.
   e) $f(x,y,z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.
   f) $f(x,y,z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y+4, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.
   g) $f(x,y,z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3)$.
   h) $f(x,y,z) = (\sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, -2x/3 - y/3 + 2z/3)$.
   i) $f(x,yz) = (1 + 2x/3 - 2y/3 + z/3, x/3 + 2y/3 + 2z/3, 1 + 2x/3 + y/3 - 2z/3)$.

29. Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricial con respecto a R_u es:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Demostrar que f es una simetría ortogonal deslizante.
   b) Calcular el plano afín de simetría y el vector de traslación.

30. Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión matricialcon respecto a R_u es:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\sqrt{3})/2 \\ -(1+\sqrt{3})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Demostrar que f es un movimiento helicoidal.
   b) Calcular el eje, el ángulo y el vector de traslación.

31. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera el movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$f_\alpha(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2, 2x + 2y - z - 1, 2x - y + 2z - \alpha).$$

   Clasificar, según los valores de α, qué tipo de movimiento es f_α, calculando en cada caso el conjunto de puntos fijos.

32. Discutir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^3$ con $p \neq q$, existe un único plano afín S tal que $\sigma_S(p) = q$.
   b) En $\mathbb{R}^3$, la composición de una simetría ortogonal y una traslación siempre es una simetría ortogonal o una simetría ortogonal deslizante.

c) La composición de dos rotaciones en $\mathbb{R}^3$ nunca puede tener un único punto fijo.

33. Decide de forma razonada qué tipo de movimiento rígido es:

    a) La composición de dos simetrías ortogonales en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

    b) La composición de dos simetrías ortogonales con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

    c) La composición de un giro y una simetría en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

    d) La composición de un giro y una simetría con deslizamiento en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$.

    e) La composición de dos simetrías ortogonales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

    f) La composición de un giro y una simetría en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

    g) La composición de un giro y una traslación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

    h) La composición de dos simetrías centrales en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

34. Sea $f\colon (\mathcal{A}, \langle\, , \rangle) \to (\mathcal{A}', \langle\, , \rangle)$ una aplicación afín entre espacios afines euclídeos, y sea $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ un sistema de referencia rectangular en $(\mathcal{A}, \langle\, , \rangle)$. Demostrar que f es una isometría si y sólo si $f(\mathcal{R}) = \{f(p_0), f(p_1), \ldots, f(p_n)\}$ es un sistema de referencia rectangular en $(\mathcal{A}', \langle\, , \rangle)$.

35. Consideremos un triángulo $\{a, b, c\}$ en un plano afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle\, , \rangle)$. Definimos el ángulo exterior en el vértice a como el suplementario del interior en a

$$\measuredangle_e(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = \pi - \widehat{A} = \pi - \measuredangle_o(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}),$$

    y análogamente para los otros dos vértices. Prueba que cada ángulo exterior es estrictamente mayor que los dos ángulos internos no adyacentes.

36. Prueba que en un triángulo isósceles (esto es, con dos lados de igual longitud) en un plano afín euclídeo la recta de Euler contiene al incentro.

37. Encuentra un triángulo en el plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ en el que la recta de Euler no contenga al incentro.