Ejercicios del Tema 1

1. Sea V un espacio vectorial real. Se considera la aplicación

$$\vec{\ } : V \times V \to V, \quad \overrightarrow{uv} := 2u - v.$$

Estudiar si Φ induce o no una estructura de espacio afín en V.

2. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Definimos los siguientes conjuntos:

$$V = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \,/\, f'(x) + a(x)\, f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$A = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \,/\, f'(x) + a(x)\, f(x) = b(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\},$$

donde $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial real de las funciones de clase C^1 sobre los reales. Se pide lo siguiente:

   a) Demostrar que V es un espacio vectorial real.

   b) Supongamos sabido que $A \neq \emptyset$. Probar que A es un espacio afín sobre V cuando, para cada par de funciones $g, g \in A$, definimos $\overrightarrow{fg} = g(x) - f(x)$.

3. (Producto de espacios afines). Sean A_1 y A_2 dos espacios afines sobre espacios vectoriales reales V_1 y V_2. Se pide lo siguiente:

   a) Demostrar que el producto cartesiano $A_1 \times A_2$ es un espacio afín sobre $V_1 \times V_2$ cuando definimos:

$$\overrightarrow{(p_1, p_2)\,(q_1, q_2)} = (\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_2q_2}).$$

   b) Supongamos que $\dim A_1 = m$ y $\dim A_2 = n$. Sea $R_i = \{o_i; B_i\}$ un sistema de referencia cartesiano en A_i para cada $i = 1, 2$. Pongamos $B_1 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Demostrar que el par $R_1 \times R_2 = \{(o_1, o_2); B_1 \times B_2\}$, donde:

$$B_1 \times B_2 = \{(u_1, 0), \ldots, (u_m, 0), (0, v_1), \ldots, (0, v_n)\}$$

   es un sistema de referencia cartesiano en $A_1 \times A_2$. A partir de aquí concluir que $\dim(A_1 \times A_2) = m + n$.

   c) Sea $(p_1, p_2) \in A_1 \times A_2$. Cómo se relacionan las coordenadas de (p_1, p_2) en $R_1 \times R_2$ con las coordenadas de p_1 en R_1 y de p_2 en R_2?

4. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el conjunto $R = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ formado por los puntos:

$$p_0 = (1, 2, 1),\ p_1 = (2, 1, 0),\ p_2 = (0, 1, 0),\ p_3 = (1, -1, 2).$$

Demostrar que R es un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas afines del punto $p = (0, 0, 0)$ con respecto a R.

5. Consideremos el punto $p = (1, -7, 4)$ de $\mathbb{R}^3$. Encontrar un sistema de referencia cartesiano R de $\mathbb{R}^3$ de forma que $p_R = (-1, -2, 2)^t$. ¿Cuántos sistemas de referencia cartesianos en estas condiciones existen?

6. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de referencia cartesianos dados por $R = \{o; B = \{v_1, v_2\}\}$ y $R' = \{o'; B' = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}\}$. Supongamos que $\overrightarrow{o'o} = v_1 + v_2$.

a) Escribir la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia de R a R'.

b) Calcular las coordenadas en R' del punto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p_R = (1,1)^{\mathrm{t}}$.

7. – En un plano afín $\mathcal{A}$ se considera el sistema de referencia afín $\mathcal{R} = \{a, b, c\}$ y los puntos
$$a' = a + 2\overrightarrow{ab}, \quad b' = a + \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ac}, \quad c' = a - \overrightarrow{ab} - \overrightarrow{ac}.$$
Probar que $\mathcal{R}' = \{a', b', c'\}$ es un sistema de referencia afín en $\mathcal{A}$. Calcular las coordenadas de un punto en $\mathcal{R}'$ en función de las coordenadas en $\mathcal{R}$.

8. Sea A un espacio afín y $S \subseteq A$ un subespacio afín. Dado un punto $p \in A$, demostrar que $S = p + \overrightarrow{S}$ si y sólo si $p \in S$. Además, si $p \notin S$, probar que $S \cap T = \emptyset$, donde $T = p + \overrightarrow{S}$.

9. Demostrar que toda recta afín de $\mathbb{R}^3$ es la intersección de dos planos afines. ¿Es cierta esta afirmación en $\mathbb{R}^n$?

10. Sean L una recta afín y S un hiperplano afín de un espacio afín $\mathcal{A}$. Supongamos que $\overrightarrow{L} + \vec{S} = \mathcal{A}$. Probar que $L \cap S$ es un único punto.

11. En cada uno de estos casos decidir razonadamente si S es o no un subespacio afín de A:

    a) $A = \mathbb{R}^5, \quad S = \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \,/\, -y = 2x + z + 1\}$.

    b) $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

    c) $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 = y^2\}$.

    d) $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

    e) $A = \mathbb{R}^2, \quad S = \langle\{(0, 1), (1, 0)\}\rangle$.

    f) $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 \geq 0\}$.

    g) $A = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = z\}$.

    h) $A = \mathbb{R}^n, \quad S = \mathbb{Q}^n$.

    i) $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} a-2 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R} \right\}$.

    j) $V = \mathbb{R}[x], \quad S = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, \text{grado}(p(x)) = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$.

    Aclaración: en el apartado *i)* representamos por $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ al espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales. En el apartado *j)* usamos $\mathbb{R}[x]$ para denotar al espacio vectorial real de los polinomios en x con coeficientes reales.

12. Es siempre la unión de dos subespacios afines un subespacio afín? Si la respuesta es afirmativa, probarlo. Si es negativa, mostrar un contraejemplo.

13. Encontrar la recta del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 = (1, 1, 1)$ y se apoya en las rectas $R_1 = (0, 0, 1) + L\{(1, 0, 1)\}$ y $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = z - y + 1 = 0\}$.

14. Demostrar que todo subespacio afín S de $\mathbb{R}^n$ es cerrado para la topología usual. Demostrar ttambién que si $S \neq \mathbb{R}^n$, entonces S tiene interior vacío.

15. ¿Para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ los puntos $p = (1, 0, -1)$, $q = (-2, 0, 2)$ y $r = (t, 0, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ están alineados? Para dichos valores, calcular una recta afín que los contenga. Es la recta única? Pertenece el punto $s = (-2, 2, 0)$ a dicha recta?

16. Calcular un sistema de referencia afín, unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de:

    a) La recta afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $p = (1, -1, 1, 2)$ y $q = (0, 1, 0, -1)$,
    b) El hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos $p = (1, 0, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0, 0)$, $r = (0, 0, 1, 0)$ y $s = (0, 0, 0, 1)$,
    c) Un plano afín de $\mathbb{R}^3$ que contenga a las rectas afines $S = (1, 0, 2) + L((1, -1, 0))$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = -1,\ y - z = 2\}$,
    d) El hiperplano afín de $\mathbb{R}^4$ paralelo al de ecuación $x - y + z - t = 7$ y que pasa por el punto $p = (1, -2, 3, -2)$.

17. Calcular ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ generados por los puntos:

    a) $p_0 = (1, 1, 0, 1)$, $p_1 = (1, -1, 1, 0)$.
    b) $p_0 = (1, 1, 0, 1)$, $p_1 = (1, 0, 1, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0, 1)$.

18. En cada uno de los siguientes casos calcula la intersección $S \cap T$ y la suma $S \vee T$ de los subespacios afines S, T de $\mathbb{R}^3$:

    a) $S = (1, 2, -1) + L(\{(1, 0, -2\})$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + z - 1 = 4x + y + 2z - 4 = 0\}$.
    b) $S = (-1, 0, 1) + L(\{(1, 1, 1\})$, $T = (1, 1, 1) + L(\{(-1, -1, -1\})$.
    c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 1\}$, $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z - 2 = y - z - 1 = 0\}$.

19. Probar que si S es una recta afín en un espacio afín A y $p \notin S$, entonces existe un único plano afín T que pasa por p y contiene a S. Calcular unas ecuaciones paramétricas y una ecuación implícita del plano afín en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $p = (1, -2, 1)$ y contiene a la recta afín $S = (1, 1, 1) + L((0, 1, 1))$.

20. Se consideran los subespacios afines de $\mathbb{R}^4$ dados por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 1,\ x - y = 1\},$$
$$T = (1, 0, 1, 0) + L(\{(1, 1, -1, -1), (0, 0, 0, 1)\}).$$

    Obtener un sistema de referencia cartesiano de $S \cap T$ y de $S \vee T$. Calcular también unas ecuaciones implícitas de $S \vee T$ si es posible.

21. Se consideran los subespacios afines S_1, S_2 de $\mathbb{R}^4$ dados por

$$S_1 = \{(x_2, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0\}$$

$$S_2 = (1, 0, \lambda, 0) + L(\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, -1, 1)\}).$$

    Calcular $S_1 \cap S_2$ y $S_1 \vee S_2$ en función del parámetro λ.

22. Sea S el plano afín de $\mathbb{R}^3$ con ecuación implícita $x + y + z = 2$. ¿Qué ecuación implícita satisfacen las coordenadas de los puntos de S con respecto al sistema de referencia afín $R = \{(-1, 1, 2), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$?

23. Estudiar la intersección y la suma de dos rectas afines en un espacio afín.

24. Probar que en un plano afín dos rectas son, o bien iguales, o paralelas y distintas, o se cortan en un único punto.

25. Se consideran las rectas S_a y T_b de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$\begin{aligned} S_a &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 2z = a,\ y + z = 3\}, \\ T_b &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + z = 1,\ y - 2z = b\}, \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros reales. Qué condiciones deben de cumplir a y b para que S_a y T_b estén dentro de un mismo plano afín, es decir, sean coplanarias? Calcular los valores de a y b para que el plano que contiene a S_a y T_b pase por $p = (1, 1, 1)$.

26. Sea S una recta afín y T un subespacio afín con dim $T \geq 2$ en un espacio afín A. Probar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:

    a) $S \cap T = \emptyset$,

    b) $S \cap T$ es un único punto,

    c) $S \subseteq T$.

    En particular, deducir que si T es un hiperplano afín, entonces *a)* implica que S es paralela a T. Además, si dim$A = 3$ entonces S es paralela a T o $S \cap T$ es un único punto.

27. Sean S y T dos hiperplanos afines en un espacio afín A de dimensión $n \geq 2$. Probar que se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:

    a) $S \cap T = \emptyset$ y los hiperplanos afines son paralelos,

    b) $\dim (S \cap T) = n - 2$,

    c) $S = T$.

28. Sea A un espacio afín con dim $A \geq 3$. Decidir de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Tres planos afines distintos no se cortan, o bien su intersección es un punto o una recta afín.

    b) Dos planos afines distintos son paralelos o su intersección contiene al menos una recta afín.

    c) Dos rectas afines $S = p + L(u)$ y $T = q + L(v)$ en A se cruzan si y sólo si los vectores $\{u, v, \overrightarrow{pq}\}$ son linealmente independientes.

29. En cada uno de estos casos decidir de forma razonada si f es o no una aplicación afín

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x, y^3, x + y)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, x - z + 1)$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y, z^5 - 1)$.

d) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(A) = \mathrm{traza}(A) + 1$.

e) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad f(p(x)) = \mathrm{grado}(p(x))$.

30. (Producto de aplicaciones afines). Sean A_1, A_2, A'_1 y A'_2 espacios afines y $f_i : A_i \to A'_i$ una aplicación afín para cada $i = 1, 2$. Demostrar que la aplicación $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \to A'_1 \times A'_2$ dada por $(f_1 \times f_2)(p_1, p_2) = (f_1(p_1), f_2(p_2))$ es una aplicación afín y $\overrightarrow{f_1 \times f_2} = \vec{f_1} \times \vec{f_2}$.

31. Dadas $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ aplicación afín, $q \in \mathcal{A}$ y $h \colon \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ aplicación lineal, probar que la aplicación
$$g \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}', \quad g(p) = f(p) + h(\overrightarrow{qp})$$
es la única aplicación afín con $g(q) = f(q)$ y $\vec{g} = h + \vec{f}$.

32. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:
$$f(x, y, z) = (2x - y + 3z - 1, -x - y + z + 1).$$
a) Demostrar que f es una aplicación afín y calcular $\vec{f}$.

b) Estudiar si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

c) Dadas las rectas afines $S = (1, 1, 2) + L((2, 0, 1))$ y $T = (0, 1, 1) + L((1, 0, -1))$, calcular $f(S) \cap f(T)$.

d) Calcular $f^{-1}(\{(1, 1)\})$.

33. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los planos
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon -x - y + z = 1\}, \quad S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = -1\}$$
y las rectas
$$T = (0, 0, 1) + L(\{(1, 1, 0)\}), \quad T' = (0, 0, -1) + L(\{(1, 1, 0)\}).$$
Justifica que existe una afinidad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(S) = S'$ y $f(T) = T'$. Determina la expresión matricial de f en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$.

34. Determinar la expresión matricial en el sistema de referencia usual de la aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene como puntos fijos a los del plano afín $x + y - z = -2$, y tal que $f(0, 0, 0) = (1, 2, -1)$. ¿Es f un isomorfismo afín?

35. Consideremos el sistema de referencia afín en $\mathbb{R}^2$ dado por $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la única aplicación afín tal que:
$$f(1, 1) = (-1, 3), \quad f(2, 1) = (-1, 4), \quad f(2, 2) = (-3, 7).$$
a) Obtener la expresión matricial de f con respecto a R. Calcular $f(4, 4)$.

b) Obtener la expresión matricial de f y $f \circ f$ con respecto a R_u.

c) Determinar el conjunto de puntos fijos de f.

36. Sea $f : A \to A$ un endomorfismo afín y $S = p_0 + \overrightarrow{S}$ un subespacio afín. Se dice que S es *invariante por* f si $f(S) \subseteq S$. Demostrar que S es invariante por f si y solo si $\vec{f}(\overrightarrow{S}) \subseteq \overrightarrow{S}$ y $\overrightarrow{p_0\, f(p_0)} \in \overrightarrow{S}$.

37. Determinar el conjunto de puntos fijos de la aplicación afín $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x, y, z) = (x + 3y + 3/2, -2y - 3/2, -4x - 4y - z - 2).$$

38. Consideremos los subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ dados por
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y + z = 2\}, \quad T = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}).$$
Comprueba que S y T son suplementarios (o complementarios) afines. Calcula la proyección y simetría afines $\pi_{S,T}, \sigma_{S,T}$ sobre S en la dirección de T, dando sus ecuaciones matriciales respecto del sistema de referencia canónico $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$ (B_0 base canónica de $\mathbb{R}^3$) de $\mathbb{R}^3$. Haz lo mismo para $\pi_{T,S}, \sigma_{T,S}$.

39. Probar que la aplicación afín $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (1 - 2x, 3 - 2y)$ es una homotecia. Calcular su centro y su razón.

40. Calcular explícitamente una homotecia en $\mathbb{R}^3$ de centro (a, b, c) y razón $r \neq 0, 1$.

41. Sea $f : A \to A$ un endomorfismo afín de un plano afín. Supongamos que existen tres rectas afines S_1, S_2 y S_3 en A de las que no hay dos paralelas, y tales que $f(S_i) = S_i$ para cada $i = 1, 2, 3$. Demostrar que f es la identidad o una homotecia de razón $\lambda \neq 1$.

42. Demostrar las siguientes afirmaciones:

    a) Una homotecia $h \neq I_A$ queda determinada por la imagen de dos puntos.

    b) Si A es una recta afín y $f : A \to A$ es una aplicación afín entonces, o bien f es constante, o es una traslación, o es una homotecia.

    c) Las constantes, las traslaciones y las homotecias son los únicos endomorfismos afines $f : A \to A$ tales que $f(S)$ es paralelo a S, para todo subespacio afín S de A.

43. Decidir de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) La composición de una traslación t y de una homotecia $h \neq I_A$ es una homotecia. En caso afirmativo, calcular el centro y la razón de la homotecia resultante.

    b) La composición de dos homotecias es una homotecia. De ser así, calcular la razón de la homotecia resultante. Cuando ésta sea distinta de 1, calcular también su centro.

    c) Si $f : A \to A'$ es una aplicación afín y $p, q, r \in A$ son tres puntos alineados (esto es, contenidos en una línea recta), entonces $f(p), f(q), f(r)$ son tres puntos alineados de A'.

d) Si A es un espacio afín y $dim(A) = n$, entonces existe un isomorfismo afín $f : A \to \mathbb{R}^n$.

e) Toda aplicación afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n'}$ es diferenciable. Además, todo isomorfismo afín de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

f) Si una aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene al menos 4 puntos fijos afínmente independientes, entonces es la identidad.

44. En un espacio afín $\mathcal{A}$ se consideran $(n+1)$-puntos $\{p_0, \ldots, p_n\} \subseteq \mathcal{A}$ y fijemos $O \in \mathcal{A}$. Se define el baricentro de estos puntos como

$$b = O + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \overrightarrow{Op_j}.$$

Probar que b no depende del punto O fijado. Probar además que si $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es afín entonces $f(b)$ es el baricentro de $\{f(p_0), \ldots, f(p_n)\}$.

45. Probar que los puntos medios de los lados de un triángulo $\{a, b, c\}$ (tres puntos afínmente independientes) en un espacio afín $\mathcal{A}$ forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los de $\{a, b, c\}$ y cuyo baricentro es el mismo que el de $\{a, b, c\}$.

46. Sea $\{a, b, c\}$ un triángulo. Probar que las paralelas a dos de los lados que pasan por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos de la misma longitud (Si tres puntos p, q, r están alineados, diremos que los segmentos $[p, q], [q, r]$ tienen la misma longitud si $\overrightarrow{pq} = \pm\overrightarrow{qr}$).

47. Sea $\{a, b, c\}$ un triángulo en un espacio afín $\mathcal{A}$ con baricentro o. Demostrar que la homotecia $h = h_{o,-1/2}$ lleva cada vértice de $\{a, b, c\}$ en el punto medio de su lado opuesto.

48. Dado un triángulo $\{a, b, c\}$ y $\{a', b', c'\} = \{\mathrm{m}_{ab}, \mathrm{m}_{ac}, \mathrm{m}_{bc}\}$ el triángulo formado por los puntos medios de sus lados, describir las siguientes aplicaciones afines:

   a) $h_{b',2} \circ h_{a,3/4} \circ h_{c,2/3}$.

   b) $h_{a',-1} \circ h_{b',-1} \circ h_{c',-1}$.

   c) $h_{a',-1} \circ h_{b',-1}$.

   Como siempre $h_{a,r}$ denota la homotecia de centro a y razón r.

49. Una cuaterna de puntos $\{a, b, c, d\}$ se dice un cuadrilátero si no contiene tres puntos alineados; si además sus lados opuestos $\langle\{a, b\}\rangle, \langle\{d, c\}\rangle$ y $\langle\{a, d\}\rangle, \langle\{b, c\}\rangle$ son paralelos entonces la cuaterna se dice ser un paralelogramo. Probar que si $\{a, b, c, d\}$ es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$ y $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$.