Análisis Matemático I

Tema final: Diferenciales sucesivas

Motivación

¿Cómo definimos la diferencial segunda y las siguientes?

X, Y espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $f \in D(\Omega, Y)$

Si $Df : \Omega \to L(X,Y)$ es diferenciable en $a \in \Omega$, tenemos:

$$D(Df)(a) \in L\big(X, L(X,Y)\big) \quad !!!$$

$$T \in L(X, L(X,Y)),\ x_1, x_2 \in X \ \Rightarrow\ T(x_1) \in L(X,Y) \ \Rightarrow\ \big(T(x_1)\big)(x_2) \in Y$$

Definiendo $\widetilde{T}(x_1, x_2) = \big(T(x_1)\big)(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$

obtenemos una aplicación $\widetilde{T} : X^2 \to Y$ que es bilineal

La diferencial segunda de $f : \Omega \to Y$ en un punto $a \in \Omega$

debe definirse como una aplicación bilineal y continua de X^2 en Y

Para $n \in \mathbb{N}$, la diferencial n-ésima de f en a,

será una aplicación n-lineal y continua de X^n en Y

Aplicaciones multilineales

Definición

$n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n, Y$ espacios vectoriales, $T : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$

T es n-lineal cuando

T es lineal en cada variable, es decir:

Para cada $k \in \Delta_n$ y cualesquiera $x_j \in X_j \ \ \forall j \in \Delta_n \setminus \{k\}$,

la aplicación $x \mapsto T(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, de X_k en Y, es lineal

Caracterización de la continuidad

$n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n, Y$ normados, $Z = \prod_{k=1}^{n} X_k$ espacio normado producto

Para una aplicación n-lineal $T : Z \to Y$, son equivalentes:

- T es continua
- $\exists M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(z)\| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} \|z(k)\| \quad \forall z \in Z$

Espacios de aplicaciones multilineales

Norma de aplicaciones multilineales

En lo que sigue, fijamos $n \in \mathbb{N}$ y dos espacios normados $, X$ e Y

Denotamos por $L^n(X,Y)$ al espacio vectorial formado por todas las aplicaciones n-lineales y continuas de X^n en Y

Se considera siempre como espacio normado con la norma definida, para cada $T \in L^n(X,Y)$ por:

$$\|T\| = \sup\left\{ \|T(z)\| \ : \ z \in X^n, \ \ \|z(k)\| = 1 \ \ \forall k \in \Delta_n \right\}$$

$$= \min\left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ \|T(z)\| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} \|z(k)\| \ \ \forall z \in X^n \right\}$$

Dos observaciones relevantes

Una identificación canónica

Fijados $p, q \in \mathbb{N}$, para cada aplicación $T \in L^p\big(X\,,\,L^q(X,Y)\big)$ definimos

$$\widetilde{T}(u,v) = \big(T(u)\big)(v) \quad \forall\,(u,v) \in X^{\,p} \times X^{\,q} = X^{\,p+q}$$

Entonces $\widetilde{T} \in L^{p+q}(X,Y)$

y la aplicación $T \mapsto \widetilde{T}$ de $L^p\big(X\,,\,L^q(X,Y)\big)$ en $L^{p+q}(X,Y)$

es una biyección lineal que preserva la norma

luego identifica canónicamente esos dos espacios normados

Caso de dimensión finita

Si X tiene dimensión finita,

toda aplicación n-lineal de $X^{\,n}$ en Y es continua

La diferencial segunda de una función

Definición de la diferencial segunda

En lo que sigue: $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,, \quad f : \Omega \to Y\,, \quad a \in \Omega$

Decimos que f es dos veces diferenciable en el punto a cuando:

f es diferenciable en un abierto U, con $a \in U \subset \Omega$

y la función $Df : U \to L(X,Y)$ es diferenciable en el punto a

Entonces, la aplicación lineal $D(Df)(a) \in L\big(X, L(X,Y)\big)$

se identifica canónicamente

con una aplicación bilineal y continua de X^2 en Y

a la que llamamos diferencial segunda de f en a

y se denota por $D^2 f(a)$

Se tiene por tanto: $D^2 f(a) \in L^2(X,Y)$

Las diferenciales sucesivas

Definición de la diferencial n-ésima por inducción sobre n

Fijado $n \in \mathbb{N}$ suponemos definida la diferencial n-ésima de una función

Decimos que f es $n+1$ veces diferenciable en el punto a cuando:

f es n veces diferenciable en un abierto U, con $a \in U \subset \Omega$

y la función $D^n f : U \to L^n(X,Y)$ es diferenciable en el punto a

Entonces la aplicación lineal $D(D^n f)(a) \in L\big(X\,,\,L^n(X,Y)\big)$

se identifica canónicamente

con una aplicación $(n+1)$-lineal y continua de X^{n+1} en Y

a la que llamamos diferencial $(n+1)$-ésima de f en a

y se denota por $D^{n+1} f(a)$

Se tiene por tanto: $D^{n+1} f(a) \in L^{n+1}(X,Y)$

Grados de regularidad de una función

Espacios de funciones diferenciables

Denotamos por $D^n(\Omega, Y)$ al conjunto de todas las funciones de Ω en Y que son n veces diferenciables en todo punto $x \in \Omega$

Si $f \in D^n(\Omega, Y)$ y la función $D^n f : \Omega \to L^n(X, Y)$ es continua decimos que f es una función de clase C^n en Ω y denotamos por $C^n(\Omega, Y)$ al conjunto de tales funciones

Finalmente, f es de clase C^∞ en Ω cuando es de clase C^n para todo $n \in \mathbb{N}$ y denotamos por $C^\infty(\Omega, Y)$ al conjunto de tales funciones

Por tanto: $C^\infty(\Omega, Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(\Omega, Y)$

Para $n \geqslant 2$ se tiene: $C^\infty(\Omega, Y) \subset \ldots \subset C^{n+1}(\Omega, Y) \subset D^{n+1}(\Omega, Y) \subset$
$\subset C^n(\Omega, Y) \subset D^n(\Omega, Y) \subset \ldots \subset C^1(\Omega, Y) \subset D^1(\Omega, Y)$

Linealidad

Suma y producto por escalares

$$f, g : \Omega \to Y\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad a \in \Omega$$

Si f y g son n veces diferenciables en el punto a, entonces

$\alpha f + g$ es n veces diferenciable en a, con

$$D^n(\alpha f + g)(a) = \alpha D^n f(a) + D^n(g)(a)$$

Por tanto, $D^n(\Omega, Y)$ es un subespacio vectorial de $D^1(\Omega, Y)$

$C^n(\Omega, Y)$ es subespacio vectorial de $D^n(\Omega, Y)$

y $C^\infty(\Omega, Y)$ es subespacio vectorial de $C^n(\Omega, Y)$

Funciones con valores en un producto

Funciones con valores en un producto

Supongamos que $Y = \prod_{j=1}^{M} Y_j$ es un producto de espacios normados

Entonces $f = (f_1, \ldots, f_M) : \Omega \to Y$ es n veces diferenciable en $a \in \Omega$

si, y sólo si, f_j es n veces diferenciable en a para todo $j \in \Delta_M$

en cuyo caso se tiene: $D^n f(a) = \big(D^n f_1(a), D^n f_2(a), \ldots, D^n f_M(a) \big)$

$$f \in D^n(\Omega, Y) \iff f_j \in D^n(\Omega, Y_j) \ \ \forall j \in \Delta_M$$

$$f \in C^n(\Omega, Y) \iff f_j \in C^n(\Omega, Y_j) \ \ \forall j \in \Delta_M$$

$$f \in C^\infty(\Omega, Y) \iff f_j \in C^\infty(\Omega, Y_j) \ \ \forall j \in \Delta_M$$

Regla de la cadena para las diferenciales sucesivas

Un ejemplo que luego generalizaremos

Si X_1, X_2 son espacios normados y $T : X_1 \times X_2 \to Y$ es bilineal y continua,

entonces T es una función de clase C^∞ en $X_1 \times X_2$

Regla de la cadena

X, Y, Z espacios normados, $\Omega = \Omega^\circ \subset X$, $U = U^\circ \subset Y$

$f : \Omega \to U$, $g : U \to Z$, $a \in \Omega$, $b = f(a) \in U$

Si f es n veces diferenciable en a

y g es n veces diferenciable en b,

entonces $g \circ f$ es n veces diferenciable en a

$$f \in D^n(\Omega, Y), \quad g \in D^n(U, Z) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \in D^n(\Omega, Z)$$

$$f \in C^n(\Omega, Y), \quad g \in C^n(U, Z) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \in C^n(\Omega, Z)$$

$$f \in C^\infty(\Omega, Y), \quad g \in C^\infty(U, Z) \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \in C^\infty(\Omega, Z)$$

Diferenciación de la función inversa

Regla de diferenciación de la función inversa

$f \in D(\Omega, Y)$ inyectiva, $U = f(\Omega)$ abierto, y $f^{-1} \in D(U, X)$. Entonces:

$$f \in D^n(\Omega, Y) \iff f^{-1} \in D^n(U, X)$$

$$f \in C^n(\Omega, Y) \iff f^{-1} \in C^n(U, X)$$

$$f \in C^\infty(\Omega, Y) \iff f^{-1} \in C^\infty(U, X)$$

Producto de funciones con valores reales

Notación para funciones con valores reales

$$D^n(\Omega) = D^n(\Omega,\mathbb{R}), \quad C^n(\Omega) = C^n(\Omega,\mathbb{R}), \quad C^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$$

Producto

Si $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ son n veces diferenciables en $a \in \Omega$,

entonces el producto $f\,g$ es n veces diferenciable en a

Por tanto, $D^n(\Omega)$ es un subanillo de $D^1(\Omega)$

$C^n(\Omega)$ es subanillo de $D^n(\Omega)$

y $C^\infty(\Omega)$ es un subanillo de $C^n(\Omega)$

Cociente de funciones con valores reales

Cociente

$$f, g : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \Omega$$

Si f y g son n veces diferenciables en $a \in \Omega$,

entonces la función cociente f/g es n veces diferenciable en a

$$f, g \in D^n(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f/g \in D^n(\Omega)$$

$$f, g \in C^n(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f/g \in C^n(\Omega)$$

$$f, g \in C^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f/g \in C^\infty(\Omega)$$

Si $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$, toda función racional en Ω es de clase C^∞:

$$\mathcal{R}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$$

La propiedad más importante de las diferenciales sucesivas

Teorema de Schwartz (abstracto)

Sean X e Y espacios normados, Ω un abierto de X

y $f : \Omega \to Y$ una función n veces diferenciable en un punto $a \in \Omega$.

Entonces, la aplicación n-lineal $D^n f(a)$ es simétrica, es decir:

$$D^n f(a)\big(x_1, x_2, , \ldots, x_n\big) = D^n f(a)\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big)$$

para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ y cualquier biyección $\sigma : \Delta_n \to \Delta_n$

Funciones de una variable real (I)

Sucesivos vectores derivada

Fijados el espacio normado Y, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}$, suponemos definido el n-ésimo vector derivada $f^{(n)}(a)$, para una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que sea n veces derivable en el punto a.

Se dice que $f : \Omega \to Y$ es $(n+1)$ veces derivable en el punto a cuando f es n veces derivable en un abierto U con $a \in U \subset \Omega$ y la función $f^{(n)} : U \to Y$ es derivable en el punto a

Entonces, al vector derivada de $f^{(n)}$ en el punto a se le denota por $f^{(n+1)}(a)$ y se le llama $(n+1)$-ésimo vector derivada de f en a

Funciones de una variable real (II)

Relación entre diferencial y vector derivada

Para $a \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}$, $f : \Omega \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

(1) f es n veces diferenciable en a

(2) f es n veces derivable en a

En caso de que se cumplan (1) y (2) se tiene:

$$D^n f(a)(h) = \left(\prod_{k=1}^{n} h(k) \right) f^{(n)}(a) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

o lo que es lo mismo: $f^{(n)}(a) = D^n f(a)(1, 1, \ldots, 1)$

Campos escalares (I)

Derivadas parciales de segundo orden

En lo que sigue fijamos $a \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^N$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Suponiendo que f es parcialmente derivable en Ω,

llamamos derivadas parciales de segundo orden de f en a

a las derivadas parciales en el punto a, supuesto que existan,

de las funciones $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ con $k \in \Delta_N$.

Cuando existen, vienen dadas, para $k, j \in \Delta_N$ por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$$

Cuando $j = k$, en vez de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_k}(a)$ escribimos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a)$

Campos escalares (II)

Relación entre diferencial segunda y derivadas parciales de segundo orden

Si f es dos veces diferenciable en a,

existen todas las derivadas parciales de segundo orden de f en a y se tiene:

$$D^2 f(a)(e_j, e_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}(a) \quad \forall j,k \in \Delta_N$$

donde $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^N$. Equivalentemente:

$$D^2 f(a)(u,v) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}(a)\, u(j)\, v(k) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^N$$

Por tanto, el teorema de Schwartz afirma en este caso que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j}(a) \quad \forall j,k \in \Delta_N$$

Campos escalares (III)

Derivadas parciales de orden superior (por inducción)

Las N^n derivadas parciales de orden n de f en a

cuando existen, son las derivadas parciales en el punto a

de las N^{n-1} funciones derivadas parciales de orden $n-1$ de f

Para manejarlas, conviene suponer que f es n veces diferenciable en a,

con lo que existen todas las derivadas parciales de orden n de f en a,

y no importa el orden en que se deriva con respecto a las distintas variables,

gracias al teorema de Schwartz

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ con $\alpha_1 + \ldots + \alpha_N = n$

se denota por $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^\alpha}(a) = \dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}(a)$

a la derivada parcial que se obtiene cuando, para cada $j \in \Delta_N$

derivamos α_j veces con respecto a la variable x_j

Campos escalares (IV)

Caracterización de los campos escalares de clase C^n

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $f \in C^n(\Omega)$
- Existen todas las derivadas parciales de orden n de f en todo punto de Ω y definen funciones continuas en Ω

Polinomios

Polinomios entre espacios normados

Volvemos a trabajar con dos espacios normados, X e Y

Una función $H : X \to Y$ es un polinomio homogéneo de orden $n \in \mathbb{N}$ cuando

existe $T \in L^n(X,Y)$ simétrica, tal que $H(x) = T\big(x^n\big) \ \ \forall x \in X$

donde hemos abreviado escribiendo $x^n = \big(x, x, \overset{(n)}{\ldots}, x\big)$

- Polinomio homogéneo de orden 0 $=$ función constante
- Polinomio homogéneo de orden 1 $=$ aplicación lineal continua
- Si $Y = \mathbb{R}$: Polinomio homogéneo de orden 2 $=$ forma cuadrática

Una función $P : X \to Y$ es un polinomio de orden $n \in \mathbb{N}$ cuando

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} H_k(x) \ \ \forall x \in X \text{, donde, para cada } k \in \{0\} \cup \Delta_n$$

$H_k : X \to Y$ es un polinomio homogéneo de orden k

Fórmula infinitesimal del resto

Polinomio de Taylor de una función

En lo que sigue: $\Omega = \Omega^\circ \subset X\,,\quad f : \Omega \to Y\,,\quad a \in \Omega\,,\quad n \in \mathbb{N}$

Si f es n veces diferenciable en a,

El polinomio de Taylor de orden n de f en a viene dado por:

$$T_n(f,a;x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, D^k f(a)\big((x-a)^k\big) \quad \forall x \in X$$

donde de nuevo hemos escrito $(x-a)^k = \big(x-a, x-a, \overset{(k)}{\ldots}, x-a\big)$

Fórmula infinitesimal del resto

Si f es n veces diferenciable en a, se tiene:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(f,a;x)}{\|x-a\|^n} = 0$$

Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor con resto de Lagrange

Supongamos que f es $n+1$ veces diferenciable en Ω,

que $[a,x] \subset \Omega$ y que existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$\|D^{n+1} f(u)\| \leqslant M \quad \forall u \in [a,x]$$

Se tiene entonces: $\quad \|f(x) - T_n(f,a;x)\| \leqslant \dfrac{M\,\|x-a\|^{n+1}}{(n+1)!}$