# Ejercicios del Tema 4

1. Sea $A$ un espacio afín. Denotemos por $\mathfrak{R}$ al conjunto formado por las rectas afines de $A$. Dadas dos rectas $L_1$ y $L_2$ en $\mathfrak{R}$, decimos que $L_1 \sim L_2$ si $L_1$ es paralela a $L_2$. Demostrar que:

   (i) La relación $\sim$ es de equivalencia en $\mathfrak{R}$.

   (ii) Existe una biyección $f : \mathfrak{R}/\sim \to P(\overrightarrow{A})$.

2. Mostrar un espacio proyectivo en el que existan dos rectas proyectivas que no se corten.

3. Demostrar que en un espacio proyectivo tridimensional dos planos proyectivos distintos se cortan en una recta proyectiva.

4. Sean $\{p_1, \ldots, p_m\}$ puntos proyectivos en $P(V)$, donde $p_i = [v_i]$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Recordemos que los puntos son *proyectivamente independientes* si los vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son linealmente independientes en $V$.

   (i) Demostrar que esta definición no depende de representantes.

   (ii) Justificar que si $\{p_1, \ldots, p_m\}$ son proyectivamente independientes, entonces existe un único subespacio proyectivo $E$ con $\dim E = m - 1$ y tal que $\{p_1, \ldots, p_m\} \subseteq E$.

5. Sea $(\mathcal{A}_0, \overrightarrow{\mathcal{A}}_0, \to)$ un espacio afín $n$-dimensional y sea $E = \mathbb{R} \times \overrightarrow{\mathcal{A}}_0$ espacio vectorial producto. Fijemos $p_0 \in \mathcal{A}_0$ y consideremos la inyección natural

$$\mathrm{i} \colon \mathcal{A}_0 \to E, \quad \mathrm{i}(p) = (1, \overrightarrow{p_0 p}).$$

   Llamemos $\mathcal{A}$ al hiperplano $\mathrm{i}(\mathcal{A}_0)$ de $E$ como espacio afín, obviamente contenido en $E^*$, y consideremos el embebimiento canónico

$$\mathfrak{e} \colon \mathcal{A} \to P(E), \quad \mathfrak{e} = \pi|_{\mathcal{A}}$$

   donde $\pi \colon E^* \to P(E)$ es la proyección natural. Demostrar que:

   - $\mathcal{A}_\infty = \pi(\{0\} \times \overrightarrow{\mathcal{A}}_0^*)$.
   - Para todo $S = q + \vec{S} \subseteq \mathcal{A}_0$ subespacio afín:

$$X_S := X_{\mathrm{i}(S)} = \pi\big((1, \overrightarrow{p_0 q})\big) \vee \pi(\{0\} \times \vec{S}^*) = \pi\left(\big(L(\{(1, \overrightarrow{p_0 q})\}) + \{0\} \times \vec{S}\big)^*\right)$$

$$S_\infty := \mathrm{i}(S)_\infty = \pi(\{0\} \times \vec{S}^*).$$

6. En un espacio proyectivo se consideran una recta proyectiva $L$ y un hiperplano proyectivo $H$. Demostrar que, o bien $L \subseteq H$, o bien $L \cap H$ es un único punto.

7. Calcular unas ecuaciones implícitas para la recta proyectiva en $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos $p = [0, 1, 0, 1]$ y $q = [1, 1, 1, 0]$.

8. Si $\mathcal{M}_2(R)$ denota al espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden 2, calcula las ecuaciones implícitas en $P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ del plano proyectivo $p \vee R$, donde $p = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \in P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ y $R$ es la recta proyectiva en $P(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ con ecuaciones implícitas $\{x_1 - x_2 = x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ en la base canónica

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

9. Sea $S$ el subespacio proyectivo de $\mathbb{P}^3$ con ecuaciones implícitas:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sea $R_a$ la recta proyectiva en $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos $p = (1 : -1 : 1 : -1)$ y $q = (0 : 0 : a : 1)$, donde $a \in \mathbb{R}$. Calcular $S \cap R_a$ y $S \vee R_a$.

10. Considera el plano afín $T$ de $\mathbb{R}^3$ determinado por los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$x_1 - 2x_2 - 1 = x_2 - 2x_3 + 3 = 0.$$

Determina las ecuaciones implícitas en coordenadas homogéneas canónicas de la proyectivización canónica $X_T$ de $T$ en $\mathbb{P}^3$. Calcula también las ecuaciones de su variedad del infinito canónica $T_\infty$.

11. Determinar las ecuaciones implícitas en la base canónica $B_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ de la recta proyectiva $R$ del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ que pasa por los puntos $p = (1 : 0 : -1),\ q = (0 : 1 : 1) \in \mathbb{P}^2$.

12. Dada la proyectividad $f \colon P\big(\mathrm{S}_2(\mathbb{R})\big) \to \mathbb{P}^2$ inducida por el isomorfismo lineal

$$\widehat{f} \colon S_2(R) \to \mathbb{R}^3, \quad \widehat{f}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix},$$

determina las ecuaciones matriciales de $f$ en las bases canónicas $B_0$ y $B_0'$ de $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente dadas por

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_0' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Calcula también la matriz $M(f, B, B')$ para las bases $B$ y $B'$ de $\mathrm{S}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente dadas por

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

13. Describir todas las proyectividades $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tales que:

$$f\big((1:1:0)\big) = (0:1:1), \quad f\big((0:1:1)\big) = (1:0:1), \quad f\big((1:0:1)\big) = (1:1:0).$$

14. Sean $E_1$ y $E_2$ dos subespacios proyectivos de $P(V)$. Demostrar que existe una homografía $f : P(V) \to P(V)$ tal que $f(E_1) = E_2$ si y sólo si $\dim E_1 = \dim E_2$.

15. Demostrar que toda homografía $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tiene al menos un punto fijo.

16. Si $R, S, R', S'$ son rectas en un plano proyectivo $P(E)$ con $R \neq S$ y $R' \neq S'$, prueba que existe una homografía $f\colon P(E) \to P(E)$ tal que
$$f(R) = R' \quad \text{y} \quad f(S) = S'.$$

17. Considera un triángulo $(A, B, C)$ es un espacio afín $\mathcal{A}$, que está visto como hiperplano de un espacio vectorial $E$ (entendido como espacio afín) con $\vec{0} \notin \mathcal{A}$. Considera una traslación $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y llama $A' = \tau(A)$, $B' = \tau(B)$ y $C' = \tau(C)$.

    Prueba que los triángulos $(A, B, C)$ y $(A', B', C')$ son perspectivamente equivalentes en el sentido de que los triángulos proyectivos
$$(\mathfrak{e}(A), \mathfrak{e}(B), \mathfrak{e}(C)) \quad \text{y} \quad (\mathfrak{e}(A'), \mathfrak{e}(B'), \mathfrak{e}(C'))$$
    son perspectivamente equivalentes en $P(E)$, donde $\mathfrak{e}\colon \mathcal{A} \to P(E)$ es el embebimiento canónico.

    **Pista:** Busca un punto $O$ del hiperplano del infinito $\mathcal{A}_\infty \subsetneq P(E)$ relativo a $\mathcal{A}$ desde el que sean perspectivos. Concuerda con la intuición de que rectas paralelas se cortan en el mismo punto del infinito.

18. Sean $f\colon P(E) \to P(E)$ una homografía sin puntos fijos, $(A, B, C)$ un triángulo y $O \in P(E) \setminus \{A, B, C\}$ un punto tales que
$$f(O \vee A) = O \vee A,\ f(O \vee B) = O \vee B,\ f(O \vee C) = O \vee C.$$
    Pueba que los triángulos $(A, B, C)$ y $\big(f(A), f(B), f(C)\big)$ son perspectivamente equivalentes desde $O$.