Práctica 4. Funciones implícitas

Ejercicios propuestos

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
z\,x^3 + w^2 y^3 &= 1 \\
2\,z\,w^3 + x\,y^2 &= 0
\end{aligned}
$$

define dos funciones implícitas $z = z(x, y)$ y $w = w(x, y)$, diferenciables en un entorno de $(0, 1)$, verificando que $z(0, 1) = 0$ y $w(0, 1) = 1$. Probar también que la función $(x, y) \mapsto \big(z(x, y)\,,\, w(x, y) \big)$ es inyectiva en un entorno de $(0, 1)$.

2. Probar que el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
t \cos x + x \cos y + y \cos t &= \pi \\
t^2 + x^2 + y^2 - t\,x &= \pi^2
\end{aligned}
$$

define funciones implícitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, derivables en un entorno del origen, con $x(0) = 0$ e $y(0) = \pi$. Calcular $x'(0)$ e $y'(0)$.

3. Probar que el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x^3 u - y\,u^3 + x\,v^3 - y^3 v &= 0 \\
\big(x^2 + y^2\big)\big(u^4 + v^4\big) + 2\,u\,v &= 0
\end{aligned}
$$

define funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1, 0)$, con $u(1, 0) = 1$ y $v(1, 0) = -1$. Calcular las derivadas parciales de u y v en el punto $(1, 0)$.