

GEOMETRÍA III

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

TEMA 2: Espacios afines euclídeos

El impulso civilizador que supuso el helenismo, periodo iniciado por Alejandro Magno en el siglo IV AC, tuvo entre otras muchas consecuencias la creación de importantes centros de conocimiento en el área mediterránea, el más conocido de ellos la ciudad de Alejandría en el norte de Egipto. En este contexto histórico se inscriben *Los Elementos*, uno de los escritos más influyentes de la Historia Occidental atribuido a Euclides de Alejandría alrededor del año 300 A.C. La obra consiste de 13 tomos en los que se describe de forma razonablemente rigurosa la geometría de su época. Euclides compiló con bastante acierto conceptos, definiciones, postulados, teoremas y corolarios acerca de rectas, ángulos, triángulos, circunferencias y otras figuras planas y del espacio. Durante muchos siglos se creyó que la Geometría Euclídea era la única posible, fracasándose en múltiples ocasiones en el intento de demostrar el V Postulado de Euclides (por un punto exterior a una recta pasa una única paralela) a partir de los otros cuatro postulados previos sobre los que se cimentaban los pilares lógicos de *Los Elementos*. De hecho, la Geometría Euclídea llegó a influir en los tratados de grandes pensadores como Descartes o Kant. Finalmente, a principios del s. XIX y de forma independiente, Karl Gauss, Nicolai Lobachevsky y Janos Bolyai crearon las Geometrías Elíptica e Hiperbólica, en las que el V Postulado de Euclides no se sostiene (aunque sí el resto de la arquitectura lógica de la geometría). Éste fue el nacimiento de las geometrías no euclidianas, y en definitiva, el origen de la geometría moderna. En este Tema 2 del curso nos vamos a dedicar a estudiar la Geometría Euclídea desde un punto de vista actual, más cartesiano, revisando algunas de las aportaciones más importantes a lo largo de estos 23 siglos con un lenguaje mucho más estructurado desde la modernidad matemática. Por ejemplo, Euclides desconocía el concepto de aplicación, y por tanto le era imposible interpretar la primitiva idea de «igualdad de figuras» a través del concepto de movimiento rígido.

3. EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

En esta sección presentaremos la formulación moderna del concepto de espacio afín euclídeo o espacio afín dotado de una métrica euclidiana en su variedad de dirección.

3.1. Repaso de espacios vectoriales métricos euclidianos

Para un correcto tratamiento de lo que sigue, necesitamos recordar algunas notaciones y conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales euclídeos estudiadas en cursos anteriores.

En lo que sigue V será un espacio vectorial real de $\dim V = n$.

Si \mathcal{B} denota la familia de todas las bases ordenadas de V , dos bases $B, B' \in \mathcal{B}$ se dirá que tienen el mismo carácter de orientabilidad, y escribiremos $B \sim B'$, si

$$\det M(\text{Id}_V, B, B') > 0.$$

La relación \sim es de equivalencia en \mathcal{B} y el cociente \mathcal{B}/\sim tiene exactamente dos clases de equivalencia. En efecto, si $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{B}$ y $B' = \{-v_1, v_2, \dots, v_n\}$, es fácil ver que $B \not\sim B'$ y $(\mathcal{B}/\sim) = \{[B], [B']\}$.

Definición 3.1 Una orientación en V es una clase de equivalencia $\mathcal{O} \in \mathcal{B}/\sim$. Un par (V, \mathcal{O}) , donde \mathcal{O} es una orientación en V , es un espacio vectorial orientado.

Una base ordenada B de V se dice positiva en un espacio vectorial orientado (V, \mathcal{O}) si $[B] = \mathcal{O}$, y negativa si $[B] \neq \mathcal{O}$.

Recordemos que un espacio vectorial euclídeo es un par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde V es un espacio vectorial real y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica euclidiana en V , esto es. una aplicación bilineal y simétrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo

$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{y} \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}.$$

Denotaremos por

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

su norma asociada a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Propiedades 3.2 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- (a) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$, y la igualdad se da si y solo si $v = \vec{0}$.
- (b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.
- (c) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$, y la igualdad se da si y solo si $\{u, v\}$ son linealmente dependientes.
- (d) **Desigualdad triangular:** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$.

La ortogonalidad de vectores u, v en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se define

$$v \perp u \iff \langle v, u \rangle = 0.$$

Si $U \subseteq V$ es un subespacio vectorial, su complemento ortogonal U^\perp de U en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ viene dado por

$$U^\perp = \{v \in V: v \perp u \quad \forall u \in U\}.$$

De forma análoga, la ortogonalidad de subespacios vectoriales $U, W \subseteq V$ se define

$$U \perp W \iff u \perp w \quad \forall u \in U, \forall w \in W \iff U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp.$$

Propiedades 3.3 Dado $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, son ciertas las satisfacen propiedades:

- (a) Si $X \subseteq V$ es un subconjunto arbitrario entonces $X^\perp = \{v \in V: v \perp x \quad \forall x \in X\}$ es un subespacio vectorial de V . Además $L(X)^\perp = X^\perp$, donde como siempre $L(X)$ representa la intersección de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a X (menor subespacio vectorial de V conteniendo a X).
- (b) $U \subseteq W \iff W^\perp \subseteq U^\perp$ para cualesquiera subespacios $U, W \subseteq V$.
- (c) $V = U \oplus U^\perp$ para todo subespacio $U \subseteq V$.
- (d) $(U^\perp)^\perp = U$ para todo subespacio $U \subseteq V$.
- (e) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ y $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ para cualesquiera subespacios $U, W \subseteq V$.

El hecho de que U y U^\perp sean subespacios vectoriales suplementarios en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ da sentido a la siguiente definición.

Notación 3.4 La proyección $\vec{\pi}_{U, U^\perp}$ y la simetría $\vec{\sigma}_{U, U^\perp}$ sobre U en la dirección de U^\perp en un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denotan

$$\vec{\pi}_U^\perp \equiv \vec{\pi}_{U, U^\perp}, \quad \vec{\sigma}_U^\perp \equiv \vec{\sigma}_{U, U^\perp},$$

y se denominan proyección y simetría ortogonales sobre U en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, respectivamente.

Las bases naturales para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son las ortonormales, esto es, las bases $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ para las que la matriz de la métrica

$$M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} = I_n.$$

El grupo de matrices ortogonales de orden n

$$O(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A \cdot A^t = I_n\}$$

gobierna la geometría de los espacios vectoriales euclidianos n -dimensionales. De hecho, si B es una base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y B' es una base de V se tiene que

$$B' \text{ es ortonormal en } (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \iff M(I_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

Definición 3.5 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ un plano euclídeo orientado ($\dim V = 2$), sea $\{u_1, u_2\}$ una dupla ordenada de vectores de $V \setminus \{\vec{0}\}$, y sea $B = \{w_1, w_2\}$ la única base ortonormal positiva en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ con $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$. El ángulo orientado que forman u_1 y u_2 en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ es el único elemento α del grupo aditivo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ tal que

$$u_2 = \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2).$$

Usualmente se considera $\alpha \in \mathbb{R}$, entendiendo que como número real está determinado salvo la suma de un múltiplo entero de 2π . También usaremos la notación

$$\angle_o(u_1, u_2) := \alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

Recordemos que $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ como grupo aditivo es el cociente del grupo $(\mathbb{R}, +)$ por el subgrupo $2\pi\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$. La existencia y unicidad del ángulo orientado está garantizada por el hecho de que $\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = xw_1 + yw_2$ con $x^2 + y^2 = 1$, y por tanto del análisis existe de un único $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ con $\cos(\alpha) = x, \sin(\alpha) = y$.

Es inmediato que

$$u_1 \perp u_2 \iff \cos(\angle_o(u_1, u_2)) = 0 \iff \angle_o(u_1, u_2) = \pm\pi/2 \pmod{2\pi}.$$

Propiedades 3.6 Los siguientes enunciados son ciertos:

- (I) Si $u_1, u_2, u_3 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ entonces $\angle_o(u_1, u_2) + \angle_o(u_2, u_3) = \angle_o(u_1, u_3)$. En particular, $\angle_o(u_1, u_2) = -\angle_o(u_2, u_1)$ para todo $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$.
- (II) Si B es una base ortonormal positiva de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ y $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$, entonces

$$\det_B(u_1, u_2) := \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \|u_1\| \|u_2\| \sin(\angle_o(u_1, u_2)),$$

donde \det_B es el tensor alternado $\varphi_1 \wedge \varphi_2 := \varphi_1 \otimes \varphi_2 - \varphi_2 \otimes \varphi_1 \in \Lambda_2(V)$ generado a partir de la base $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ dual de B en el espacio dual V^* de V .

DEMOSTRACIÓN: Escribamos $\alpha = \angle_o(u_1, u_2)$ y $\beta = \angle_o(u_2, u_3)$

Si $B = \{w_1, w_2\}$ es la única base ortonormal positiva en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathcal{O})$ con $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$, sabemos que

$$\frac{1}{\|u_2\|}u_2 = (\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2).$$

Observemos que la base

$$B' = \{w'_1 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2, w'_2 = -\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2\}$$

satisface $\det M(\text{Id}_V, B, B') = \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1 > 0$, y por tanto es también ortonormal y positiva. Por tanto, por definición,

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\beta)w'_1 + \sin(\beta)w'_2),$$

esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u_3\|}u_3 &= (\cos(\beta)(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) + \sin(\beta)(-\sin(\alpha)w_1 + \cos(\alpha)w_2)) = \\ &= ((\cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha))w_1 + (\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cos(\alpha))w_2), \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\|u_3\|}u_3 = (\cos(\alpha + \beta)w_1 + \sin(\alpha + \beta)w_2)$$

y $\angle_o(u_1, u_3) = \alpha + \beta$, lo que prueba (i).

Para demostrar (ii), observemos que

$$\begin{aligned} \det_B(u_1, u_2) &:= \det((u_1)_B, (u_2)_B) = \det_B(\|u_1\|w_1, \|u_2\|(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2)) = \\ &= \|u_1\|\|u_2\|\det_B(w_1, \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)\det_B(w_1, w_2), \end{aligned}$$

y como $\det_B(w_1, w_2) = \det(M(\text{Id}_V, B', B)) = 1$ para $B' = \{w_1, w_2\}$ (usar que $M(\text{Id}_V, B', B) \in \text{O}_2(\mathbb{R})$ y ambas bases son positivas), finalmente queda $\det_B(u_1, u_2) = \|u_1\|\|u_2\|\sin(\alpha)$.

■

La desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle u_1, u_2 \rangle| \leq \|u_1\|\|u_2\|$ y el análisis real garantizan la existencia de un único número real $\beta \in [0, \pi]$ tal que $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\beta)$ para cualesquiera $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$.

Definición 3.7 *Dados dos vectores $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$ en un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, el ángulo no orientado que forman es el único número real $\angle(u_1, u_2) \in [0, \pi]$ tal que $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\angle(u_1, u_2))$.*

Dados $u_1, u_2 \in V \setminus \{\vec{0}\}$, es trivial comprobar que:

- $\angle(u_1, u_2) = \angle(u_2, u_1)$ y $\angle(u_1, -u_2) = \pi - \angle(u_1, u_2)$.
- $u_1 \perp u_2 \iff \angle(u_1, u_2) = \frac{\pi}{2}$.
- Si \mathcal{O} es una orientación en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $\angle_o(u_1, u_2)$ es la determinación en $[0, 2\pi[$ del ángulo orientado que forman u_1 y u_2 , entonces

$$\angle(u_1, u_2) = \min\{\angle_o(u_1, u_2), 2\pi - \angle_o(u_1, u_2)\}.$$

En efecto, como $u_2 = \|u_2\|(\cos(\angle_o(u_1, u_2))w_1 + \sin(\angle_o(u_1, u_2))w_2)$ para $\{w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, w_2\}$ base ortonormal positiva de $(V, \mathcal{O}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, es inmediato que $\langle u_1, u_2 \rangle = \|u_1\|\|u_2\|\cos(\angle_o(u_1, u_2))$, de donde $\cos(\angle_o(u_1, u_2)) = \cos(\angle(u_1, u_2))$. Como $\angle(u_1, u_2) \in [0, \pi]$, de aquí el resultado.

3.2. Espacios afines euclídeos: distancia, ángulo y perpendicularidad

Comencemos con la definición fundamental de este tema.

Definición 3.8 *Un espacio afín euclídeo es una cuaterna $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle, \rangle)$ donde $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow)$ es un espacio afín y $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ es un espacio vectorial euclídeo. Si no hay lugar para la ambigüedad, es común relajar la notación y escribir $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ en vez de $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow, \langle, \rangle)$.*

Por ejemplo, si (V, \langle, \rangle) es un espacio vectorial euclídeo, la cuaterna $(V, V, \rightarrow, \langle, \rangle)$ es un espacio afín euclidiano, donde como siempre (V, V, \rightarrow) es el espacio afín natural asociado al espacio vectorial V . Se dirá que $(V, V, \rightarrow, \langle, \rangle)$ es el espacio afín euclídeo natural o canónico asociado al espacio vectorial euclidiano (V, \langle, \rangle) . El ejemplo más sencillo es el espacio afín euclídeo usual $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \rightarrow, \langle, \rangle)$, donde \langle, \rangle el producto escalar clásico:

$$\langle x, y \rangle = x^t \cdot y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ (vectores columna).}$$

Definición 3.9 *La función distancia en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ se define:*

$$d: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(p, q) = \|\vec{pq}\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma en $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$.

Como consecuencia de la axiomática de espacio afín y de las propiedades de la norma $\|\cdot\|$, es inmediato comprobar que (\mathcal{A}, d) es un espacio métrico, esto es:

- (I) $d(p, q) \geq 0$ para todo $p, q \in \mathcal{A}$, y se da la igualdad si y solo si $p = q$.
- (II) $d(p, q) = d(q, p)$ para todo $p, q \in \mathcal{A}$.
- (III) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ para todo $p, q, r \in \mathcal{A}$.

Definición 3.10 *Dos subespacios afines S, T en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ se dicen perpendiculares (u ortogonales) si $\vec{S} \perp \vec{T}$ en $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$. En ese caso se escribiremos $S \perp T$.*

Presentamos a continuación los sistemas de referencia naturales en los espacios afines euclídeos, llamados rectangulares. Precisemos la definición.

Definición 3.11 *Un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ se dice rectangular u ortonormal si la base de sus direcciones B es una base ortonormal de $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$.*

Como consecuencia de la definición, si $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ son sistemas de referencia en \mathcal{A} y \mathcal{R} es rectangular, entonces

$$\mathcal{R}' \text{ es rectangular} \iff M(\text{Id}_V, B, B') \in O(n, \mathbb{R}) \quad (n = \dim \mathcal{A}).$$

Por tanto, si $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ son sistemas de referencia rectangulares,

$$M(\text{Id}_A, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

Definición 3.12 Si S, T son rectas secantes en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ y $\vec{S} = L(\{u\})$, $\vec{T} = L(\{v\})$, el ángulo que forman S y T en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ es el número

$$\angle(S, T) := \min\{\angle(u, v), \angle(u, -v)\} = \min\{\angle(u, v), \pi - \angle(u, v)\} \in [0, \pi/2],$$

donde los ángulos no orientados $\angle(u, v), \angle(u, -v) \in [0, \pi]$ se calculan en $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$.

A tenor de la anterior definición, es evidente que

Proposición 3.13 Si S, R son dos rectas paralelas en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ y T es secante a ambas entonces $\angle(S, T) = \angle(R, T)$.

Proposición 3.14 (Complemento ortogonal) Si S es un subespacio afín en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ y $p \in \mathcal{A}$, entonces existe un único subespacio afín T que contiene a p , es suplemento de S y es perpendicular a S :

$$p \in T, \quad \dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}, \quad T \perp S.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $T = p + \vec{S}^\perp$ resuelve la proposición. En efecto, claramente $p \in T$, $S \perp T$, y $\dim S + \dim T = \dim \mathcal{A}$ toda vez que $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$. Solo resta comprobar la unicidad. Supongamos que T' satisface también la tesis de la proposición. La condición $T' \perp S$ implica $\vec{T}' \subseteq \vec{S}^\perp$, mientras que la identidad $\dim S + \dim T' = \dim \mathcal{A}$ garantiza que $\vec{T}' = \vec{S}^\perp$ toda vez que $\dim \vec{T}' = \dim T' = \dim \mathcal{A} - \dim S = \dim \vec{\mathcal{A}} - \dim \vec{S} = \dim \vec{S}^\perp$. Como $p \in T'$ concluimos que $T' = p + \vec{S}^\perp = T$. ■

Como hemos visto en su demostración, el subespacio T en la tesis de la proposición anterior está caracterizado por las condiciones

$$p \in T, \quad \vec{T} = \vec{S}^\perp.$$

Se le suele denominar el complemento (o suplemento) ortogonal a S que pasa por p .

Definición 3.15 Sea S es un subespacio afín en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ y T es un complemento ortogonal de S . La proyección afín

$$\pi_S^\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \pi_S^\perp := \pi_{S, T},$$

(que no depende de complemento ortogonal T utilizado) es conocida como la proyección ortogonal sobre S en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$. Análogamente, la simetría afín

$$\sigma_S^\perp: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad \sigma_S^\perp := \sigma_{S, T},$$

no depende de complemento ortogonal T utilizado, y es conocida como la simetría ortogonal sobre S en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$.

Tiene sentido hablar de distancia entre subespacios afines S, T en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ de acuerdo con la siguiente definición

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q) : p \in S, q \in T\}.$$

La siguiente proposición nos proporciona una interpretación geométrica de este concepto, además de un mecanismo de cálculo directo. Entre otras cosas nos dirá que $d(S, T)$ es de hecho un mínimo, y que éste se alcanza justo en puntos formando vectores ortogonales a ambos subespacios.

Proposición 3.16 Sean S, T subespacios afines de un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Entonces

(I) Existen puntos $p_0 \in S, q_0 \in T$ tales que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$.

(II) Si $p_0 \in S, q_0 \in T$ son tales que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ entonces $d(S, T) = d(p_0, q_0)$.

Además, los puntos $p_0 \in S$ y $q_0 \in T$ en las anteriores condiciones son únicos si y sólo si $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$.

DEMOSTRACIÓN: Escribiendo $S = p + \vec{S}, T = q + \vec{T}$ y usando que $\overrightarrow{pq} \in \vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus (\vec{S} + \vec{T})^\perp$, podemos encontrar $u \in \vec{S}, w \in \vec{T}$ y $v \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ tales que

$$\overrightarrow{pq} = u + w + v.$$

Si elegimos $p_0 = p + u \in S$ y $q_0 = q - w \in T$, un cálculo directo da

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = \overrightarrow{(p+u)(q-w)} = \overrightarrow{pq} - w - u = \lambda v \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp,$$

probando (i).

Para probar (ii), supongamos que $p_0 \in S, q_0 \in T$ son tales que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$. Si tomamos $p \in S$ y $q \in T$ arbitrarios,

$$\begin{aligned} d(p, q)^2 &= \|\overrightarrow{pq}\|^2 = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 = \langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q}, \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q_0} + \overrightarrow{q_0 q} \rangle = \\ &= \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}, \overrightarrow{p_0 q_0} \rangle = \|\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 \geq \|\overrightarrow{p_0 q_0}\|^2 = d(p_0, q_0)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\overrightarrow{p_0 q_0} \perp (\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q})$ ya que $\overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{q_0 q} \in \vec{S} + \vec{T}$. Esto prueba que $d(p, q) \geq d(p_0, q_0)$ para todo $p \in S, q \in T$, y por tanto

$$d(S, T) := \inf\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = \min\{d(p, q) : p \in S, q \in T\} = d(p_0, q_0).$$

En cuanto al apéndice sobre la unicidad de los puntos $p_0 \in S, q_0 \in T$ que realizan la distancia, supongamos que $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$. En estas condiciones

$$\vec{\mathcal{A}} = (\vec{S} \oplus \vec{T}) \oplus (\vec{S} \oplus \vec{T})^\perp,$$

y por tanto, si como arriba ponemos $S = p + \vec{S}, T = q + \vec{T}$, los vectores $u \in \vec{S}, w \in \vec{T}$ y $v \in (\vec{S} \oplus \vec{T})^\perp$ tales que

$$\overrightarrow{pq} = u + w + v$$

son únicos. En consecuencia las expresiones $p_0 = p + u \in S, q_0 = q - w \in T$ determinan los únicos puntos $p_0 \in S$ y $q_0 \in T$ para los que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$, resolviendo el problema. ■

Corolario 3.17 Si S, T son subespacios afines de $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,

$$d(S, T) = 0 \iff S \cap T \neq \emptyset.$$

Corolario 3.18 Si S es un subespacio afín de $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $p \in \mathcal{A}$, entonces

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

En particular, si S es un hiperplano afín, $\mathcal{R} = \{p_0, B = \{e_1, \dots, e_n\}\}$ es un sistema de referencia rectangular de \mathcal{A} , $p_{\mathcal{R}} = (y_1, \dots, y_n)^t$ son las coordenadas de un punto $p \in \mathcal{A}$ en \mathcal{R} , y

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j + a_0 = 0$$

es la una ecuación implícita de S en \mathcal{R} , entonces

$$d(p, S) = \frac{|\sum_{j=1}^n a_j y_j + a_0|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea T_p el único subespacio afín de \mathcal{A} con $p \in T_p$ y $\vec{T}_p = \vec{S}^\perp$, esto es, $T_p = p + \vec{S}^\perp$ (el suplemento ortogonal de S pasando por p). Recordemos que por definición

$$\pi_S^\perp(p) = T_p \cap S.$$

Como $\pi_S^\perp(p) \in S$ y $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp \cap \overrightarrow{\{p\}}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \{\vec{0}\}^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{\mathcal{A}} = \vec{S}^\perp$, de la Proposición 3.16 aplicada a los subespacios afines S y $\{p\}$ deducimos que

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)).$$

Para probar la segunda parte del corolario notemos que, dados \mathcal{R} sistema de referencia ortogonal y S hiperplano en las condiciones del enunciado,

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = \langle \sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = 0$$

es una ecuación implícita de \vec{S} en la base ortonormal $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de las direcciones de \mathcal{R} , de donde

$$\vec{S}^\perp = L(\{\sum_{j=1}^n a_j e_j\}).$$

Fijemos $q \in S$ un punto arbitrario. La expresión $\overrightarrow{qp} = \overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}$, donde

$$\overrightarrow{q\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp,$$

describe la descomposición del vector \overrightarrow{qp} de acuerdo a la suma directa $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$. Llamando

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \sum_{j=1}^n a_j e_j$$

y teniendo en cuenta que $\overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p} \in \vec{S}^\perp = L(\{\nu\})$ y $\|\nu\| = 1$, inferimos que

$$\|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)p}, \nu \rangle| = |\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle|.$$

Escribiendo $q_{\mathcal{R}} = (z_1, \dots, z_n)^t$ las coordenadas de q en \mathcal{R} , deducimos que

$$\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle = \langle \overrightarrow{qp_0} + \overrightarrow{p_0p}, \nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \langle \sum_{j=1}^n y_j e_j - \sum_{j=1}^n z_j e_j, \sum_{j=1}^n a_j e_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left(\sum_{j=1}^n y_j a_j - \sum_{j=1}^n z_j a_j \right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left(\sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right),$$

donde hemos usado que B es una base ortonormal de $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y que $a_0 = -\sum_{j=1}^n z_j a_j$ al ser $q \in S$. Por tanto,

$$d(p, S) = d(p, \pi_S^\perp(p)) = \|\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}\| = |\langle \overrightarrow{qp}, \nu \rangle| = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \left| \sum_{j=1}^n y_j a_j + a_0 \right|$$

como queríamos demostrar. ■

Corolario 3.19 (Perpendicular común a dos rectas) *Si S, T son rectas afines distintas en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces existe una recta R en \mathcal{A} secante y perpendicular a S y a T .*

Además R es única si se da cualquiera de estas condiciones:

- (a) S, T se cruzan.
- (b) $\dim \mathcal{A} = 3$ y S, T son secantes.
- (c) $\dim \mathcal{A} = 2$, S, T son paralelas y R contiene a un punto $p \in \mathcal{A}$ prefijado.

DEMOSTRACIÓN: Sean $p_0 \in S$ y $q_0 \in T$ tales que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ (y por tanto $d(S, T) = d(p_0, q_0)$); ver Proposición 3.16. Si $p_0 \neq q_0$ (S, T no secantes) entonces $R = p_0 + L\{\overrightarrow{p_0 q_0}\}$ resuelve el problema. Si $p_0 = q_0$ (S, T secantes) entonces elegimos $R = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$.

Para la unicidad, supongamos primero que S, T se cruzan, y por tanto $\dim(\vec{S} + \vec{T}) = 2$. En este caso basta con observar que, por la Proposición 3.16 (démonos cuenta de que $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$), los puntos $p_0 \in S$ y $q_0 \in T$ tales que $\overrightarrow{p_0 q_0} \in (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ son distintos y únicos, y por tanto han de estar en cualquier recta que se apoye en S, T y sea perpendicular a ambas. Esto implica que $p_0, q_0 \in R$, quedando la recta unívocamente determinada. Esto prueba (a).

Para demostrar (b), obsérvenos que $\dim(\vec{S} + \vec{T}) = 2$ y $\dim(\vec{S} + \vec{T})^\perp = 1$. Si $p_0 = S \cap T$, como necesariamente $p_0 \in R$ y $\vec{R} = (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ deducimos que $R = p_0 + (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ está unívocamente determinada.

Razonamientos similares prueba que $R = p + \vec{S} = p + \vec{T}$ es la solución única en (c). ■

Ejercicio 3.20 *En el espacio afín euclídeo clásico $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ calcula $d(S, T)$, donde S, T son los subespacios afines*

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}), \quad T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 1\}.$$

SOLUCIÓN: Resolviendo el sistema que nos proporcionan las ecuaciones implícitas de T tenemos que

$$T = (0, 1, 0, 0) + L(\{(-1, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}) = \{(-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$S = (1, 0, 0, 0) + L(\{(0, 0, 1, -1)\}) = \{(1, 0, \delta, -\delta) : \delta \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos

$$p_0 = (1, 0, \delta, -\delta) \in S, \quad q_0 = (-\lambda + \mu, 1 + \lambda, -\mu, \lambda) \in T$$

genéricos e impongamos

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \overrightarrow{T}^\perp.$$

Es claro que $\vec{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y - t = 0\}$, esto es

$$\vec{T} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (1, 1, 1, 0) \rangle = \langle (x, y, z, t), (0, 1, 0, -1) \rangle = 0\}.$$

Por tanto $\vec{T} = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp$, de donde

$$\vec{T}^\perp = (L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})^\perp)^\perp = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})$$

y podemos escribir

$$\vec{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Análogamente

$$\vec{S}^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x, y, z, t), (0, 0, 1, -1) \rangle = 0\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z - t = 0\}.$$

De aquí que

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp = \{(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, -\lambda_2) \in \mathbb{R}^4 : \lambda_1 + \lambda_2 = 0\} = \{(\lambda_1, 0, \lambda_1, \lambda_1) : \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$

o en otras palabras

$$\overrightarrow{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp = L(\{(1, 0, 1, 1)\}) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = z - x = t - x = 0\}.$$

Finalmente la condición

$$\overrightarrow{p_0 q_0} = (-\lambda + \mu - 1, 1 + \lambda, -\mu - \delta, \lambda + \delta) \in \overrightarrow{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$$

equivale a que

$$1 + \lambda = -2\mu - \delta + \lambda + 1 = 2\lambda + \delta - \mu + 1 = 0,$$

esto es $\lambda = -1, \mu = -1/3, \delta = 2/3$.

Esto lleva a

$$p_0 = (1, 0, 2/3, -2/3), \quad q_0 = (2/3, 0, 1/3, -1), \quad \overrightarrow{p_0 q_0} = (-1/3, 0, -1/3, -1/3).$$

y $\text{dist}(S, T) = \|\overrightarrow{p_0 q_0}\| = \sqrt{(-1/3)^2 + 0^2 + (-1/3)^2 + (-1/3)^2} = \sqrt{3}/3.$ ■

3.3. Repaso de isometrías lineales en espacios vectoriales euclidianos

Recordemos algunos resultados básicos sobre espacios vectoriales euclídeos estudiados en cursos anteriores. Como siempre trabajaremos con espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Sean (V, \langle, \rangle) , (V', \langle, \rangle') espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación

$$h: (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle')$$

es una *isometría lineal o vectorial* si es un isomorfismo lineal y satisface

$$\langle h(v), h(u) \rangle' = \langle v, u \rangle \quad \forall v, u \in V.$$

Si $\dim V = \dim V' = n$, el grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$ gobierna de nuevo este tipo de transformaciones, en el sentido de que si B, B' son bases ortonormales de (V, \langle, \rangle) , (V', \langle, \rangle') entonces:

$$h: (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle') \text{ es isometría vectorial} \iff M(h, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

Las isometrías dejan invariante la norma de vectores, esto es,

$$\|h(v)\|' = \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Como consecuencia, también preservan ángulos no orientados

$$\angle'(h(v), h(u)) = \arccos \left(\frac{\langle h(u), h(v) \rangle'}{\|h(u)\|' \|h(v)\|'} \right) = \arccos \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right) = \angle(v, u).$$

Igual ocurre con los orientados si h preserva las orientaciones fijadas \mathcal{O} en V y \mathcal{O}' en V' . En particular, respetan la ortogonalidad

$$u \perp v \iff h(u) \perp h(v) \quad \forall u, v \in V.$$

Por tanto $h(U^\perp) = h(U)^\perp$ para todo subespacio $U \subseteq V$.

Centremos nuestro interés en los endomorfismos isométricos $h: (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V, \langle, \rangle)$. La siguiente proposición no da información sobre la estructura básica de estas isometrías.

Proposición 3.21 *Sea $h: V \rightarrow V$ una isometría vectorial en un espacio vectorial euclídeo (V, \langle, \rangle) de $\dim V = n$. Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (I) $\det(h) = \pm 1$.
- (II) *Los únicos posibles valores propios de h son 1 y -1 .*
- (III) *Si $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$ y $V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$ entonces $V_1 \perp V_{-1}$, y por tanto*

$$V_1 + V_{-1} = V_1 \oplus V_{-1}.$$

- (IV) *Escribiendo $V = (V_1 \oplus V_{-1}) \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$, se tiene que*

$$h(V_1 \oplus V_{-1}) = V_1 \oplus V_{-1}, \quad h((V_1 \oplus V_{-1})^\perp) = (V_1 \oplus V_{-1})^\perp.$$

- (V) $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$ es par y $\det(h) = (-1)^{\dim V_{-1}}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $A \in O(n, \mathbb{R})$ es una matriz ortogonal entonces $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^t) = \det(A)^2$, y por tanto $\det(A) = \pm 1$. Como $M(h, B) \equiv M(h, B, B) \in O(n, \mathbb{R})$ para cualquier base B ortonormal de (V, \langle, \rangle) , se sigue que $\det(h) = \det(M(h, B)) = \pm 1$ probando (i).

Si λ es un valor propio de h y $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ un vector propio asociado, esto es, tal que $h(v) = \lambda v$, entonces $\lambda^2 \|v\|^2 = \|h(v)\|^2 = \|v\|^2$. Como $\|v\|^2 \neq 0$ deducimos que $\lambda^2 = 1$, probando (ii).

Si $v \in V_1$ y $u \in V_{-1}$ entonces

$$\langle v, u \rangle = \langle h(v), h(u) \rangle = \langle v, -u \rangle = -\langle v, u \rangle,$$

esto es $\langle v, u \rangle = 0$ y $v \perp u$, lo que prueba (iii).

Es claro que $h(V_1 + V_{-1}) = h(V_1) + h(V_{-1}) = V_1 + V_{-1}$, y por tanto

$$h((V_1 + V_{-1})^\perp) = (h(V_1 + V_{-1}))^\perp = (V_1 + V_{-1})^\perp,$$

de donde se sigue (iv).

Finalmente, como $V = (V_1 \oplus V_{-1}) \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ y h deja invariantes los tres sumandos de esa suma directa, es claro que

$$\det(h) = \det(h|_{V_1}) \det(h|_{V_{-1}}) \det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}) = (-1)^{\dim V_{-1}} \det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}),$$

donde entendemos $h|_{V_{\pm 1}}: V_{\pm 1} \rightarrow V_{\pm 1}$ y $h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}: (V_1 + V_{-1})^\perp \rightarrow (V_1 + V_{-1})^\perp$. Para acabar basta con ver que $\dim(V_1 + V_{-1})^\perp$ es par y $\det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}) = 1$. La isometría lineal $h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}$ no tiene valores propios (los únicos valores propios posibles de h son 1 y -1 y $(V_1 + V_{-1})^\perp \cap V_{\pm 1} = \emptyset$), y por tanto su polinomio característico

$$p(t) = \det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp} - t\text{Id}_{(V_1+V_{-1})^\perp})$$

no tiene raíces reales. El Teorema de Bolzano fuerza a que $p(t)$ sea un polinomio de grado $k = \dim(V_1 + V_{-1})^\perp$ par, y como su término líder es t^k , a que su término independiente $\det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp})$ sea positivo. Por (i), al ser $h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}$ una isometría $\det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}) = \pm 1$, de donde $\det(h|_{(V_1+V_{-1})^\perp}) = 1$ probando (v). ■

Definición 3.22 Sea $h: V \rightarrow V$ una isometría lineal en un espacio vectorial euclidiano (V, \langle, \rangle) .

- h se dirá directa o positiva si $\det(h) = 1$.
- h se dirá inversa o negativa si $\det(h) = -1$.

Cerraremos este repaso de las propiedades básicas de las isometrías lineales con la siguiente proposición.

Proposición 3.23 Si $h: (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V, \langle, \rangle)$ es una isometría lineal entonces

$$\text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $v \in \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$ y $u \in \text{Im}(h - \text{Id}_V)$ entonces

$$h(v) = v \quad \text{y} \quad u = h(w) - w \quad \text{para algún } w \in V.$$

Por tanto, usando que h es una isometría vectorial,

$$\langle v, u \rangle = \langle v, h(w) - w \rangle = \langle v, h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = \langle h(v), h(w) \rangle - \langle v, w \rangle = 0,$$

lo que demuestra que $\text{Ker}(h - \text{Id}_V) \subseteq \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$. Si probamos que $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ serían iguales y acabaríamos la proposición.

En efecto, como $h - \text{Id}_V$ es un endomorfismo del primer teorema de isomorfía en el álgebra lineal deducimos que

$$\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) = \dim V,$$

y como $V = \text{Im}(h - \text{Id}_V) \oplus \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$ también

$$\dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) + \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp = \dim V.$$

Por tanto $\dim \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = \dim V - \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V) = \dim \text{Im}(h - \text{Id}_V)^\perp$, lo que concluye la prueba. ■

Una parte relevante de la teoría de isometrías vectoriales en un espacio vectorial euclídeo es su clasificación. Repasemos brevemente la misma en los casos de dimensiones 2 y 3.

3.3.1. Isometrías lineales en un plano vectorial euclídeo

En lo que sigue (V, \langle, \rangle) será un espacio vectorial euclidiano de dimensión 2.

Proposición 3.24 *Si $h: V \rightarrow V$ es una isometría lineal positiva y $B = \{v_1, v_2\}$ una base ortonormal en el plano (V, \langle, \rangle) , entonces existe un único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que*

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En este caso diremos que h es el giro vectorial de ángulo orientado $\theta \in [0, 2\pi[$ respecto de la orientación \mathcal{O} inducida por B en V , y se escribe $h = G_\theta$.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si escribimos

$$h(v_j) = \sum_{i=1}^2 a_{ij} v_i, \quad j = 1, 2,$$

al ser

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2, \mathbb{R})$$

deducimos que

$$\|(a_{11}, a_{21})\| = \|(a_{12}, a_{22})\| = 1, \quad \langle (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) \rangle = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1,$$

donde $\|\cdot\|$ y \langle, \rangle son la norma y producto escalar clásicos en \mathbb{R}^2 .

Como $\|(a_{11}, a_{21})\| = 1$, por las propiedades de las funciones trigonométricas existe un único $\theta \in]0, 2\pi[$ tal que $a_{11} = \cos \theta$, $a_{21} = \operatorname{sen} \theta$. Despejando arriba deducimos que $a_{12} = -\operatorname{sen} \theta$, $a_{22} = \cos \theta$ como habíamos afirmado. ■

Observemos que la aplicación identidad Id_V es el giro de ángulo 0 (respecto de cualquier orientación fijada en V). Con el lenguaje de la anterior proposición:

- $\angle_o(v, G_\theta(v)) = \theta$ respecto de \mathcal{O} para todo vector $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$.
- $\operatorname{Ker}(h - \operatorname{Id}_V) = \{\vec{0}\}$ para todo giro vectorial (isometría positiva) $h \neq \operatorname{Id}_V$ en (V, \langle, \rangle) .
- El ángulo orientado θ de un giro vectorial h respecto a una orientación en V cambia a su conjugado $2\pi - \theta$ si se revierte la misma.
- Como ángulos conjugados tienen el mismo coseno, tiene sentido definir el *ángulo no orientado* de un giro vectorial h (isometría positiva) en (V, \langle, \rangle) como el único $\alpha \in]0, \pi]$ tal que

$$\operatorname{Traza}(h) = 2 \cos(\alpha).$$

Es claro que $\alpha = \min\{\theta, 2\pi - \theta\}$, donde θ es el ángulo orientado del giro h respecto de cualquiera orientación \mathcal{O} en V , y por tanto α está bien definido al margen del concepto de orientación en V .

El elemento geométrico que determina un giro vectorial es su ángulo en cualquiera de sus acepciones.

Proposición 3.25 Si $h: V \rightarrow V$ es una isometría lineal negativa en el plano (V, \langle, \rangle) entonces existe una base ortonormal B de (V, \langle, \rangle) en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto $h = \vec{\sigma}_U^\perp$ para $U = V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$.

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que el polinomio característico de h es de la forma

$$p_h(t) := \det(M(h, B) - tI_2) = t^2 - \text{Traza}(h)t + \det(h)$$

para cualquier base B de V , donde

$$\text{Traza}(h) = \text{Traza}(M(h, B)) \quad \text{y} \quad \det(h) = \det(M(h, B))$$

no dependen de la base B . Al ser el término independiente del polinomio $p_h(t)$ igual a $\det(h) = -1 < 0$, inferimos que $p_h(t)$ ha de descomponer en los reales. Como además $\det(h)$ es el producto de las raíces de $p_h(t)$ (valores propios de h) y h es una isometría, esas raíces han de ser justamente 1 y -1 . Por tanto h diagonaliza con valores propios 1 y -1 , ambos de multiplicidad 1. Elegidos vectores propios *unitarios* (de norma 1) v_1 y v_2 para los valores propios 1 y -1 , respectivamente, y formando la base ortonormal $B = \{v_1, v_2\}$, se tiene que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y h es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_U^\perp$ respecto de la recta vectorial $U := V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$ (ver Notación 3.4). Esto concluye la prueba. ■

El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal es la recta vectorial respecto de la cual se simetriza.

3.3.2. Estructura general de las isometrías lineales

Vamos a estudiar la estructura básica de las isometrías en un espacio vectorial métrico euclídeo de dimensión arbitraria. Para ello será fundamental la Proposición 3.21 y el siguiente lema.

Lema 3.26 Sean (V, \langle, \rangle) ($\dim V \geq 2$) un espacio vectorial métrico euclídeo y sea $f: V \rightarrow V$ una isometría sin valores propios reales. Entonces existe $U \leq V$ plano vectorial tal que $f(U) = U$. En particular, $f|_U: U \rightarrow U$ es una isometría positiva (giro vectorial) de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ en $(U, \langle, \rangle|_{U \times U})$.

DEMOSTRACIÓN: Como los únicos valores propios de una isometría son 1, -1 , nuestra hipótesis es equivalente a que

$$V_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_V) = \{\vec{0}\}, \quad V_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id}_V) = \{\vec{0}\}.$$

Fijemos B base ortonormal en (V, \langle, \rangle) y llamemos $A = M(f, B) \in O(n)$, donde $n = \dim V$. Llamemos $p(t) = \det(f - t\text{Id}_V)$ al polinomio característico de f , del que por nuestras hipótesis sabemos que no tiene raíces reales. Por el Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que existe $a \in \mathbb{C}$ raíz compleja de $p(t)$, $a \neq \bar{a}$, y como $p(t)$ tiene coeficientes reales $\bar{a} \in \mathbb{C}$ es también raíz compleja de $p(t)$. Por tanto existe $z \in \mathbb{C}^n$

tal que $A \cdot z = a \cdot z$ (notación columna), y también $A \cdot \bar{z} = \bar{a} \cdot \bar{z}$. Llamemos $u_0 = 2\Re(z)$, $v_0 = 2\Im(z) \in \mathbb{R}^n$, y observemos que como $a \neq \bar{a}$ entonces $\{u_0, v_0\}$ son linealmente independientes y $U_0 = L(\{u_0, v_0\})$ es un plano vectorial; en efecto, en otro caso $z = \lambda r$ para ciertos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $r \in \mathbb{R}^2$, y por tanto $A \cdot r = a \cdot r$, esto es, $a \in \mathbb{R}$, lo que es absurdo. Tenemos pues que

$$\begin{aligned} A \cdot u_0 &= A \cdot (z + \bar{z}) = A \cdot z + A \cdot \bar{z} = a \cdot z + \bar{a} \cdot \bar{z} = \\ &= 2(\Re(a) \cdot \Re(z) - \Im(a)\Im(z)) = \Re(a) \cdot u_0 - \Im(a) \cdot v_0 \in U_0, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} A \cdot v_0 &= A \cdot \imath(\bar{z} - z) = \imath(A \cdot \bar{z} - A \cdot z) = \imath(\bar{a} \cdot \bar{z} - a \cdot z) = \\ &= 2(\Re(a) \cdot \Im(z) + \Im(a)\Re(z)) = \Re(a) \cdot v_0 + \Im(a) \cdot u_0 \in U_0. \end{aligned}$$

Si llamamos $u, v \in V$ a los únicos vectores tales que $u_B = u_0, v_B = v_0$, y $U = L(\{u, v\})$ al plano que generan, entonces

$$w \in U \iff w_B \in U_0.$$

De aquí se sigue que si $w = \lambda u + \mu v \in U$ entonces

$$\begin{aligned} f(w)_B &= f(\lambda u + \mu v)_B = \lambda f(u)_B + \mu f(v)_B = \lambda(A \cdot u_B) + \mu(A \cdot v_B) = \\ &= \lambda(A \cdot u_0) + \mu(A \cdot v_0) \in U_0, \end{aligned}$$

y por tanto $f(w) \in U$. Esto prueba que $f(U) \subseteq U$, y como $\dim f(U) = \dim U = 2$, que $f(U) = U$.

Finalmente, observemos que $f|_U: U \rightarrow U$ es una isometría sin valores propios en el plano vectorial euclídeo $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{U \times U})$, y por tanto ha de ser un giro de ángulo $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, (los casos $\theta = 0, \pi$ se excluyen por no ser ± 1 valores propios de f). Esto concluye el resultado. ■

Teorema 3.27 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial métrico euclídeo con $\dim V = n \geq 1$ y sea $h: V \rightarrow V$ una isometría en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Entonces existe una base ortonormal B de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en la que:*

$$M(h, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} R_{\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & R_{\theta_m} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_k \end{array} \right),$$

donde $s, k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son enteros tales que $s + k + 2m = n$ y

$$R_{\theta_j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}, \quad \theta_j \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V), \quad s = \dim V_1, \quad V_{-1} = \text{Ker}(h + \text{Id}_V), \quad k = \dim V_{-1}.$$

Denotemos por

$$W_1 = (V_1 + V_{-1})^\perp.$$

De la Proposición 3.21 tenemos que $h(W_1) = W_1$, $\dim W_1 = 2m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; llamemos

$$h_1: W_1 \rightarrow W_1, \quad h_1 := h|_{W_1}.$$

Si $m \geq 1$ el Lema 3.26 puede aplicarse a h_1 y existe $U_1 \leq W_1$ plano vectorial tal que

- $h_1(U_1) = h(U_1) = U_1$ y
- $h_1|_{U_1} \equiv h|_{U_1}$ es un giro de ángulo orientado $\theta_1 \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ en $(U_1, \langle, \rangle|_{U_1 \times U_1})$ respecto a una orientación en U_1 .

Si ocurriese que $m - 1 \geq 1$ escribimos $W_1 = U_1 \oplus W_2$ para W_2 el complemento ortogonal de U_1 relativo a $(W_1, \langle, \rangle|_{W_1 \times W_1})$. Como la isometría $h_1: W_1 \rightarrow W_1$ preserva ortogonalidad en $(W_1, \langle, \rangle|_{W_1 \times W_1})$, deducimos que $h_1(W_2) = W_2$ y por tanto

$$h_2: W_2 \rightarrow W_2, \quad h_2 := h_1|_{W_2} = h|_{W_2},$$

es una isometría en $(W_2, \langle, \rangle|_{W_2 \times W_2})$ que, por nuestras hipótesis, no tiene valores propios. Si $m - 1 \geq 2$, por el Lema 3.26 de nuevo existe $U_2 \leq W_2$ plano vectorial tal que

- $h_2(U_2) = h(U_2) = U_2$ y
- $h_2|_{U_2} \equiv h|_{U_2}$ es un giro de ángulo orientado $\theta_2 \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ en $(U_2, \langle, \rangle|_{U_2 \times U_2})$ respecto a una orientación en U_2 .

Al igual que antes $W_2 = U_2 \oplus W_3$, donde W_3 es el complemento ortogonal de U_2 relativo a $(W_2, \langle, \rangle|_{W_2 \times W_2})$, y por tanto $W_1 = U_1 \oplus U_2 \oplus W_3$ siendo las sumas directas ortogonales dos a dos.

Como la isometría $h_2: W_2 \rightarrow W_2$ preserva ortogonalidad en $(W_2, \langle, \rangle|_{W_2 \times W_2})$, deducimos que $h_2(W_3) = W_3$ y por tanto

$$h_3: W_3 \rightarrow W_3, \quad h_3 = h_2|_{W_3} = h|_{W_3},$$

es una isometría en $(W_3, \langle, \rangle|_{W_3 \times W_3})$ sin valores propios.

Si $m - 1 \geq 3$ podemos reiterar el procedimiento anterior con W_3 y así sucesivamente. Tras un procedimiento inductivo finito, finalmente descomponemos W_1 en suma directa por subespacios ortogonales dos a dos

$$W_1 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

de forma que

- $h(U_j) = U_j$ y
- $h|_{U_j}$ es un giro de ángulo orientado $\theta_j \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ en $(U_j, \langle, \rangle|_{U_j \times U_j})$ respecto a una orientación en U_j

para todo $j = 1, \dots, m$. En consecuencia,

$$V = W_1 \oplus V_1 \oplus V_{-1} = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m \oplus V_1 \oplus V_{-1},$$

siendo todos los subespacios ortogonales ortogonales dos a dos. Para acabar, basta elegir bases ortonormales

$$B'_j \text{ de } (U_j, \langle, \rangle|_{U_j \times U_j}), j = 1, \dots, m, B_1 \text{ de } (V_1, \langle, \rangle|_{V_1 \times V_1}), B_{-1} \text{ de } (V_{-1}, \langle, \rangle|_{V_{-1} \times V_{-1}}),$$

definir la base ortonormal $B = B'_1 \cup \cdots \cup B'_m \cup B_1 \cup B_{-1}$ de (V, \langle, \rangle) , y observar que por construcción $M(h, B)$ es la matriz por cajas del enunciado. ■

3.3.3. Isometrías lineales en espacios tridimensionales

Sea $h: V \rightarrow V$ una isometría vectorial en un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimensión 3. Si $h \neq \text{Id}_V$, caben tres posibilidades:

- (I) $\det(h) = 1$. Del Teorema 3.27 es inmediato que existe una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en la que

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V) = L(\{v_3\})$, $W_1 = L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_3\})^\perp$, y $h|_{W_1}: W_1 \rightarrow W_1$ es un giro de ángulo orientado θ en $(W_1, \langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_1 \times W_1})$ respecto de la orientación que induce la base $\{v_1, v_2\}$.

Se dice que h es un giro con eje la recta vectorial V_3 y de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de la orientación \mathcal{O} inducida por $\{v_1, v_2\}$ en V_3^\perp . Si no se desea enfatizar orientación, el correspondiente ángulo no orientado $\theta \in]0, \pi]$ del giro h se determina por la ecuación

$$\text{Traza}(h) = 1 + 2 \cos(\theta).$$

Los elementos geométricos que determinan un giro son su eje y su ángulo.

- (II) $\det(h) = -1$. En este caso el Teorema 3.27 nos da dos posibilidades:

- (II)₁ h es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$ respecto del plano vectorial $V_1 = \text{Ker}(h - \text{Id}_V)$ (ver Notación 3.4). Elegida una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ de V_1 y $v_3 \in V_1^\perp$ unitario, la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es ortonormal en $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este caso h diagonaliza con valores propios -1 y 1 de multiplicidades 2 y 1, respectivamente. El elemento geométrico que determina una simetría ortogonal respecto de un plano es el plano vectorial respecto del cual se simetriza.

- (II)₂ h tiene la expresión matricial

$$M(h, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

En este caso h es la composición del giro de eje $U = L\{v_3\} \subseteq V_{-1} := \text{Ker}(h + \text{Id}_V)$ y ángulo orientado θ respecto a la orientación \mathcal{O} inducida por $\{v_1, v_2\}$ en $L\{v_3\}^\perp = L(\{v_1, v_2\})$, y la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{L\{v_3\}^\perp}^\perp$ respecto del plano $L\{v_3\}^\perp$. Nótese que $L\{v_3\} = V_{-1}$ si y solo si $\theta \neq \pi$, y si $\theta = \pi$ entonces $h = -\text{Id}_V = V_{-1}$. Los elementos geométricos de h son los mismos que los del giro involucrado.

3.4. Isometrías afines

El concepto de isometría afín es una traslación natural del de isometría vectorial a espacios afines euclídeos.

Definición 3.28 Una isometría afín entre espacios afines euclidianos $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ es una afinidad $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ cuya aplicación lineal asociada $\vec{f}: \vec{\mathcal{A}} \rightarrow \vec{\mathcal{A}}'$ es una isometría vectorial entre los espacios vectoriales euclidianos $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\vec{\mathcal{A}}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$.

La siguiente proposición recoge las propiedades fundamentales de las isometrías afines.

Proposición 3.29 Si $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ es una isometría afín entonces:

- (I) $d'(f(p), f(q)) = d(p, q)$ para todo $p, q \in \mathcal{A}$, donde d, d' son las distancias en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$.
- (II) $\angle'(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$ para cualesquiera rectas secantes S, T en \mathcal{A} , donde \angle, \angle' representan los ángulos en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$.
- (III) Dos subespacios S, T son ortogonales en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si y solo si sus imágenes $f(S)$ y $f(T)$ son ortogonales en $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$.

DEMOSTRACIÓN: Item (i) es consecuencia del siguiente cálculo

$$d'(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\|' = \|\vec{f}(\overrightarrow{pq})\|' = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q),$$

donde $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son las normas en $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\vec{\mathcal{A}}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$.

Como la isometría vectorial $\vec{f}: (\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\vec{\mathcal{A}}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ preserva ángulos, es inmediato deducir que $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ preserva ángulos entre rectas secantes, de donde se sigue (ii). Por análogo razonamiento $f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ preserva la ortogonalidad de subespacios afines, probando (iii). ■

Enunciaremos la siguiente caracterización analítica de las isometrías afines.

Proposición 3.30 Si $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle), (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ son espacios afines euclidianos n -dimensionales, $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ y $\mathcal{R}' = \{p'_0, B'\}$ son sistemas de referencia rectangulares en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ respectivamente, y $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ es afín, entonces

$$f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ es una isometría afín} \iff A := M(\vec{f}, B, B') \in O(n, \mathbb{R}).$$

En otras palabras, si \mathcal{R} y \mathcal{R}' son referencias rectangulares en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle')$,

$$f: (\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle \cdot, \cdot \rangle') \text{ isometría afín} \iff M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & A \end{array} \right), \quad A \in O(n, \mathbb{R}).$$

Como consecuencia, las traslaciones $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son isometrías afines; basta observar que $M(\tau, \mathcal{R}) \equiv M(\tau, \mathcal{R}, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & I_n \end{array} \right)$ para todo sistema de referencia rectangular \mathcal{R} en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3.5. Semejanzas

Las aplicaciones afines que preservan ángulos se llaman semejanzas. Hagamos una pequeña introducción a este tipo de transformaciones.

Proposición 3.31 *Una homotecia $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de razón $r \neq 0, 1$ en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ satisface:*

- (I) $d(h(p), h(q)) = |r|d(p, q)$ para todos $p, q \in \mathcal{A}$.
- (II) $\angle(h(S), h(T)) = \angle(S, T)$ para cualesquiera rectas secantes S, T en \mathcal{A} .
- (III) Si S, T son subespacios de \mathcal{A} , $h(S) \perp h(T) \iff S \perp T$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que

$$d(h(p), h(q)) = \|\overrightarrow{h(p)h(q)}\| = \|\vec{h}(\overrightarrow{pq})\| = \|r\overrightarrow{pq}\| = |r|\|\overrightarrow{pq}\| = |r|d(p, q),$$

lo que demuestra (i). Para probar (ii), tomemos rectas afines S, T , tomemos $u \in \vec{S}, v \in \vec{T}$ no nulos tales que $\angle(S, T) = \angle(u, v) \in [0, \pi/2]$. Como $\vec{h} = r\text{Id}_V$, se tiene que para los vectores $u \in \overrightarrow{h(S)}, v \in \overrightarrow{h(T)}$ también

$$\angle(h(S), h(T)) = \angle(u, v) \in [0, \pi/2]$$

lo que prueba (ii). Item (iii) es trivial o consecuencia de (ii) ya que $S \perp T$ si y solo si $\angle(S, T) = \pi/2$. ■

La generalización natural de homotecia es el concepto de semejanza.

Definición 3.32 *Una aplicación afín biyectiva $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ entre espacios afines euclidianos se dice que es una semejanza de razón $r \neq 0, 1$, $r > 0$, si y sólo si*

$$d'(f(p), f(q)) = rd(p, q) \quad \forall p, q \in \mathcal{A},$$

o equivalentemente

$$\langle \vec{f}(u), \vec{f}(v) \rangle' = r^2 \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \vec{\mathcal{A}}.$$

Es inmediato comprobar que:

- Las homotecias en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ son semejanzas.
- Una aplicación afín $(\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ es una semejanza si y sólo si es la composición de una isometría $(\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ y una homotecia (en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ o en $(\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ dependiendo del orden de composición).
- La composición de semejanzas entre espacios afines euclidianos es una semejanza o una isometría.

Por tanto, el conjunto formado por la unión de las semejanzas y las isometrías en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ es un grupo con la composición. Estos comentarios y la Proposición 3.31 nos dan el siguiente:

Corolario 3.33 *Si $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ es una semejanza de razón $r > 0$ entonces*

- (I) $\angle(f(S), f(T)) = \angle(S, T)$ para cualesquiera rectas secantes S, T en \mathcal{A} .
- (II) Si S, T son subespacios de \mathcal{A} , $f(S) \perp f(T) \iff S \perp T$.

Se puede probar como ejercicio que una aplicación afín biyectiva $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}', \langle, \rangle')$ es una semejanza si y sólo si preserva la ortogonalidad de rectas secantes (o equivalentemente, preserva el ángulo de rectas secantes).

3.6. Movimientos rígidos

El concepto de movimiento rígido es fundamental en la geometría euclidiana ya que permite expresar con rigor la idea clásica de igualdad de figuras: dos figuras en un espacio afín euclídeo son equivalentes o iguales si existe un movimiento rígido que lleva una en la otra.

Definición 3.34 *Un movimiento rígido en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ es una isometría afín $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$. Un movimiento rígido se dice directo o positivo si $\det(\vec{f}) = 1 > 0$, e inverso o negativo si $\det(\vec{f}) = -1 < 0$.*

Para la comprensión de la naturaleza geométrica de un movimiento rígido es fundamental conocer su conjunto de puntos fijos. El siguiente lema, cuya demostración es muy ilustrativa, resultará de gran ayuda para la clasificación de movimientos rígidos que veremos con posterioridad. Expresa que todo isometría $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se descompone de forma única como la composición de un movimiento rígido con puntos fijos y una traslación con dirección en $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$.

Lema 3.35 *Dado un movimiento rígido $f: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, existe un único vector $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ y un único movimiento rígido $g: (\mathcal{A}, \langle, \rangle) \rightarrow (\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ con $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ tales que*

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde τ_u es la traslación de vector u . Además:

- $u = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) \cap \overrightarrow{\{qf(q): q \in \mathcal{A}\}}$, y es conocido como el vector de deslizamiento asociado a la isometría f .
- $\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{qf(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})\}$, y es conocido como el subespacio afín invariante por la isometría f .

Obsérvese que, por la unicidad en Lema 3.35, $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ si y solo si $u = \vec{0}$ y $g = f$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$S = \overrightarrow{\{qf(q): q \in \mathcal{A}\}} \subseteq \vec{\mathcal{A}},$$

y veamos que S es un subespacio afín de $\vec{\mathcal{A}}$ (dotado de su estructura afín canónica como espacio vectorial) con $\vec{S} = \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Para ello bastará con demostrar que, fijado $p \in \mathcal{A}$ arbitrario,

$$S = \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}).$$

En efecto, para todo $q \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p\vec{q})} - \overrightarrow{p\vec{q}} = \overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})(\overrightarrow{p\vec{q}}),$$

de donde $S \subseteq \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. La otra inclusión se sigue del cálculo inverso, ya que si tomamos $\overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})(u) \in \overrightarrow{pf(p)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ arbitrario entonces

$$\overrightarrow{pf(p)} + (\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})(u) = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(u)} - u = \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(p+u)} - \overrightarrow{p(p+u)} = \overrightarrow{(p+u)f(p+u)}$$

pertenece a S .

Como $\vec{\mathcal{A}} = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$, los subespacios afines S y \vec{S}^\perp de $\vec{\mathcal{A}}$ son complementarios y por tanto $S \cap \vec{S}^\perp$ contiene un único punto (o vector) u (ver Proposición 2.69):

$$S \cap \vec{S}^\perp = \{u\}.$$

Por definición:

- Viendo u como punto del espacio afín $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, éste ha de coincidir con la *proyección ortogonal afín* $\pi_{\vec{S}^\perp}^\perp(\overrightarrow{pf(p)})$ para todo $\overrightarrow{pf(p)} \in S$ (o $p \in \mathcal{A}$).
- Viendo u como vector de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, éste coincide con la proyección ortogonal lineal $\pi_{\vec{S}^\perp}^\perp(\overrightarrow{pf(p)})$ para todo $p \in \mathcal{A}$ (usar que \vec{S}^\perp es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$).

La ventaja de esta reflexión es que podemos utilizar cualquiera de las proyecciones ortogonales (afín o vectorial) sobre \vec{S}^\perp para presentar u porque el resultado es el mismo.

Por otra parte la Proposición 3.23 nos dice además que

$$\vec{S}^\perp = \text{Im}(\vec{f} - \text{Id})^\perp = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}),$$

por lo que finalmente

$$u = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}) \cap S = \pi_{\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})}^\perp(\overrightarrow{pf(p)}) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

Ahora podemos concluir la prueba:

- Existencia de $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ y g isometría con $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ tal que $f = \tau_u \circ g$.

Tomemos $u := \pi_{\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})}^\perp(\overrightarrow{pf(p)}) \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$, $p \in \mathcal{A}$ arbitrario, y definamos

$$g = \tau_{-u} \circ f.$$

Como también $u \in S$ ha de existir $p_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\overrightarrow{p_0 f(p_0)} = u$, y el siguiente cálculo muestra que $p_0 \in \mathcal{P}_g$:

$$g(p_0) = p_0 + \overrightarrow{p_0 g(p_0)} = p_0 + \overrightarrow{p_0 \tau_{-u}(f(p_0))} = p_0 + \overrightarrow{p_0 (f(p_0) + (-u))} = p_0 + \overrightarrow{p_0 f(p_0)} - u = p_0.$$

- Unicidad de $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})$ y g isometría con $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ tal que $f = \tau_u \circ g$:

Supongamos que $f = \tau_{u'} \circ g'$ con $u' \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \vec{S}^\perp$ y $\mathcal{P}_{g'} \neq \emptyset$. Como existe $q \in \mathcal{A}$ tal que $g'(q) = q$ deducimos que $u' = \overrightarrow{q \tau_{u'}(q)} = \overrightarrow{q f(q)} \in S$, y de aquí que $u' \in S \cap \vec{S}^\perp = \{u\}$. Por tanto $u = u'$ y $g' = \tau_{-u'} \circ f = \tau_{-u} \circ f = g$.

Para acabar nos resta observar que

$$\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})\}.$$

La identidad $\mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} = u\}$ es trivial de la definición de g , y la identidad $\{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} = u\} = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id})\}$ se sigue inmediatamente de que $S \cap \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \{u\}$. ■

Observación 3.36 Con la notación del Lema 3.35, el vector de deslizamiento u de f se calcula como $\overrightarrow{p_0 f(p_0)}$ para cualquier $p_0 \in \mathcal{P}_g = \{q \in \mathcal{A}: \overrightarrow{q f(q)} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}})\}$.

Además $f(\mathcal{P}_g) = \tau_u(\mathcal{P}_g) = \mathcal{P}_g$, ya que $u \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}) = \overrightarrow{\mathcal{P}_g}$. Por esta razón se refiere a \mathcal{P}_g como el subespacio afín invariante por f .

3.6.1. Movimientos rígidos en un plano afín euclidiano

Sea $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un movimiento rígido en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ ($\dim \mathcal{A} = 2$). Se pueden dar los siguientes casos:

- (a) f es directo y $\mathcal{P}_f = \emptyset$. Como $\det(\vec{f}) = 1$, de la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial deducimos que o bien $\vec{f} = \text{Id}_V$ ó \vec{f} es un giro de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de una orientación fijada en $\vec{\mathcal{A}}$. Si se diese el segundo caso tendríamos $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$, y por tanto de la Proposición 2.61 $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ consistiría de un punto, absurdo. Por tanto $\vec{f} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ y f es una **traslación** τ_u , $u \in \vec{\mathcal{A}}$.

En cualquier sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de \mathcal{A} (B base de las direcciones de \mathcal{R}), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde (b_1, b_2) son las coordenadas u_B de u en la base B de $\vec{\mathcal{A}}$.

- (b) f es directo y $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$. Razonando como antes deducimos que \vec{f} es un giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi[$.

Como $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$, si $\vec{f} = \text{Id}_V$ entonces $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ (giro de ángulo 0 con centro cualquier punto). Si \vec{f} es un giro de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de una orientación fijada en $\vec{\mathcal{A}}$ entonces $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$ y $\mathcal{P}_f = \{q\}$ es un punto por la Proposición 2.61; en este caso decimos que f es un **giro de centro** $q \in \mathcal{A}$ y **ángulo orientado** $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de la orientación fijada en $\vec{\mathcal{A}}$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en el único punto fijo q (B representa la base ortonormal en $\vec{\mathcal{A}}$ de las direcciones de \mathcal{R} , que supondremos positiva respecto de la orientación en $\vec{\mathcal{A}}$), se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{array} \right).$$

- (c) f es inverso y $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$. Por la clasificación de isometrías lineales de un plano vectorial, como $\det(\vec{f}) = -1$ deducimos que \vec{f} es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$ respecto de la recta vectorial $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Como $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$, tomado $q \in \mathcal{P}_f$ tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

y por tanto por definición f es la **simetría respecto de la recta afín** $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$ en la **dirección de** $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, o simplemente f es la **simetría ortogonal respecto de la recta afín** $S = \mathcal{P}_f$, y es denotada como σ_S^\perp . En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S = \mathcal{P}_f$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_{-1}\}$ con $v_1 \in \vec{S} = V_1$ y $v_{-1} \in \vec{S}^\perp = V_{-1}$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

- (d) f es inverso y $\mathcal{P}_f = \emptyset$. Como antes \vec{f} es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$ respecto de la recta vectorial $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Usemos el Lema 3.35 y pongamos

$$f = \tau_u \circ g$$

donde $u \in V_1 \setminus \{0\}$, $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$ y $\vec{f} = \vec{g}$. Por el caso anterior g es la simetría ortogonal respecto de la recta afín $S = \mathcal{P}_g$, y por tanto f es la composición de la simetría ortogonal afín σ_S^\perp respecto de la recta $S = \mathcal{P}_g$ y la translación de vector $u \in V_1 = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \vec{S}$ no nulo. Este movimiento rígido se llama **simetría deslizante respecto de la recta afín S con vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$** . En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S = \mathcal{P}_g$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 \in \vec{S} = V_1$ y $v_2 \in \vec{S}^\perp = V_{-1}$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde $(b_1, 0) \neq (0, 0)$ son las coordenadas u_B de u en B .

Observación 3.37 Si $f = \tau_u \circ g$ es una simetría deslizante con $g = \sigma_S^\perp$ y $u \in \vec{S}$, hemos probado que (ver el Lema 3.35):

- La recta de simetría S de f coincide con \mathcal{P}_g .
- El vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in S$.

A efectos de cálculo, $S = \{p \in \mathcal{A} : \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)\}$.

También puede ser descrita también como el lugar geométrico

$$S = \{m_{pf(p)} : p \in \mathcal{A}\}.$$

En efecto, para todo $p \in \mathcal{A}$

$$m_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2}u = m_{p,g(p)} + \frac{1}{2}u,$$

de donde usando que $S = \mathcal{P}_g = \{m_{p,g(p)} : p \in \mathcal{A}\}$ y $u \in \vec{S}$ se sigue lo enunciado.

MOVIMIENTOS DEL PLANO	Directo	Inverso
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Punto)	Giro ángulo $\theta \neq 0$	
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Recta)		Simetría ortogonal
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Total)	$\text{Id}_{\mathcal{A}}$	
$\mathcal{P}_f = \emptyset$	Traslación	Simetría deslizante

Ejercicio 3.38 Se considera la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya expresión matricial con respecto a R_0 es:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que es un movimiento rígido, clasifícalo y describe sus elementos geométricos.

SOLUCIÓN: Observemos que

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y claramente $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_2$, esto es, $M(\vec{f}, B_0) \in O(2, \mathbb{R})$ (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0), B_0\}$ en \mathbb{R}^2 es rectangular respecto del producto escalar clásico \langle, \rangle , y por tanto la base usual B_0 es una base ortonormal en $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$, inferimos que efectivamente f es un movimiento rígido.

Escrito con nuestra notación habitual f está determinado por la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & -3/5 & -4/5 \\ 1 & -4/5 & 3/5 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$ se trata de un movimiento inverso.

Además la ecuación $f(x, y) = (x, y)$, que se escribe

$$\left(-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1\right) = (x, y),$$

no tiene ninguna solución por lo que $\mathcal{P}_f = \emptyset$.

Mirando la clasificación de movimientos rígidos en el plano f ha de ser una *simetría deslizante*. Describamos a continuación sus elementos geométricos. Para ello hemos de encontrar la recta S respecto a la que simetrizamos y el vector $u \in \vec{S}$ con el que trasladamos, de forma que $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$. De la Observación 3.37, la recta de simetría descrita en forma paramétrica se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S = \{m_{(a,b)f(a,b)} : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} &= \left\{ \frac{1}{2}(a, b) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b + 3, -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b + 1\right) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{10}(2a - 4b + 15, -4a + 8b + 5) : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Llamando $\lambda = 2a - 4b$ para eliminar la redundancia de parámetros queda

$$S = \left\{ \frac{1}{10}(\lambda + 15, -2\lambda + 5) : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\}).$$

Otra forma alternativa de calcular S es coger un punto de \mathbb{R}^2 arbitrario, por ejemplo el $(0, 0)$ por simplicidad de cálculo, determinar su imagen $f(0, 0) = (3, 1)$, y tener en cuenta que el punto medio

$$m_{(0,0)f(0,0)} = (3/2, 1/2) \in S.$$

Como de la Observación 3.37 la variedad de dirección de S viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}) &= \{(x, y) : (M(\vec{f}, B_0) - I_2)(x, y)^t = (0, 0)^t\} = \\ &= \left\{ (x, y) : \begin{pmatrix} -8/5 & -4/5 \\ -4/5 & -2/5 \end{pmatrix} (x, y)^t = (0, 0)^t \right\} = \{(x, y) : y = -2x\} = L(\{(1, -2)\}), \end{aligned}$$

se sigue también que $S = (3/2, 1/2) + L(\{(1, -2)\})$.

Para calcular el vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$ de f , basta con elegir cualquier punto de S , por sencillez de cálculo elegiremos el $(3/2, 1/2)$, calcular su imagen $f(3/2, 1/2) = (17/10, 1/10)$ por f , y usar la fórmula (ver Observación 3.37)

$$u = \overrightarrow{(3/2, 1/2), f(3/2, 1/2)} = \overrightarrow{(3/2, 1/2), (17/10, 1/10)} = (1/5, -2/5).$$

■

Ejercicio 3.39 Calcular en coordenadas usuales de \mathbb{R}^2 los siguientes movimientos:

- (a) El giro de centro el punto $O = (1, 2)$ y ángulo orientado $\theta = 2\pi/3$ respecto de la orientación usual.
- (b) La simetría ortogonal deslizante respecto de la recta afín $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$ con vector de deslizamiento $u = (1, 1)$.

SOLUCIÓN: Resolvamos (a). Recordemos que la orientación usual en \mathbb{R}^2 es la que tiene por base positiva a la base usual B_0 . Por tanto, si fijamos el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{(1, 2), B_0\}$, la matriz que representa al giro $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en el plano euclidiano usual $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ viene dada por

$$M(G, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Si \mathcal{R}_0 es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

de donde

$$M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Resolvamos ahora (b) con un razonamiento similar. En este caso hemos de encontrar la expresión analítica del movimiento $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$.

Primero observemos que

$$S = (1, 0) + L(\{(1, 1)\}) \quad \text{y} \quad \vec{S} = L(\{(1, 1)\}),$$

por lo que la condición natural $u = (1, 1) \in \vec{S}$ para el vector de deslizamiento se satisface. Es claro que $\vec{S}^\perp = L(\{(1, 1)\})^\perp = L\{(1, -1)\}$, de donde

$$B = \{v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), v_{-1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con $v_1 \in \vec{S}, v_{-1} \in \vec{S}^\perp$.

Teniendo en cuenta que $q = (1, 0) \in S$, en el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{q, B\}$ la simetría ortogonal σ_S^\perp respecto de la recta S viene representada por la matriz

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Razonando como antes, si \mathcal{R}_0 es el sistema de referencia usual entonces

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right),$$

de donde

$$M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como la traslación τ_u satisface

$$M(\tau_u, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

la simetría deslizante $f = \tau_u \circ \sigma_S^\perp: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que resuelve el ejercicio viene determinada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\tau_u, \mathcal{R}_0) \cdot M(\sigma_S^\perp, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

■

Ejercicio 3.40 Construir un movimiento rígido de $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$ que transforme la recta afín S de ecuación $x + y = 2$ en la recta afín $R = (1, -1) + L((1, 1))$. Clasificar el movimiento obtenido.

SOLUCIÓN: Estudiemos la posición relativa de S y R . Para ello observemos que

$$S = \{(x, y): x + y = 2\} = (1, 1) + L(\{(1, -1)\}), \quad R = (1, -1) + L(\{(1, 1)\}) = \{(x, y): x - y = 2\},$$

de donde $S \cap R = \{(x, y): x + y = x - y = 2\} = \{(2, 0)\}$. Se trata pues de dos rectas secantes en el punto $p_0 = (2, 0)$. Los vectores $u = (1, -1)$ y $v = (1, 1)$ directores de S y R , respectivamente, satisfacen $\langle u, v \rangle = 0$, esto es, $u \perp v$ y $L(\{u\})^\perp = L(\{v\})$, por lo que las rectas son ortogonales. Resumiendo

$$S \cap R = \{p_0\} \quad \text{y} \quad S \perp T.$$

Cualquier giro G con centro p_0 y ángulo orientado $\pm\pi/2$ respecto de la orientación usual en \mathbb{R}^2 llevará S en R ya que

$$G(S) = G(p_0) + \vec{g}(\vec{S}) = G(p_0) + \vec{g}(L(\{u\})) = p_0 + L(\{\vec{g}(u)\}) = p_0 + L(\{v\}) = R,$$

y análogamente $G(R) = S$. Aquí hemos tenido en cuenta que $\angle(u, \vec{g}(u)) = \pi/2$, esto es $u \perp \vec{g}(u)$, y por tanto $\vec{g}(u) \in \vec{R} = L(\{v\})$.

Por lo demás, para determinar un tal giro G se sigue el procedimiento habitual. Consideramos cualquier sistema de referencia rectangular con origen p_0 , por ejemplo $\mathcal{R} = \{p_0, B_0\}$, y escribimos

$$M(G, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ 0 & \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$, quedará

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

La solución proporcionada no es única, por ejemplo al principio podíamos haber elegido G con

$$M(G, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ 0 & \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

y proceder de forma similar.

Otra posibilidad para resolver el ejercicio es encontrar una simetría ortogonal σ_T^\perp en \mathbb{R}^2 que lleve S en R . La idea es considerar una recta T que contenga a p_0 y satisfaga $\vec{\sigma}_T^\perp(\vec{S}) = \vec{R}$. En efecto, en ese caso se tendría

$$\sigma_T^\perp(S) = \sigma_T^\perp(p_0 + \vec{S}) = \sigma_T^\perp(p_0) + \vec{\sigma}_T^\perp(\vec{S}) = p_0 + \vec{R} = R.$$

Encontrar esa recta en este caso es fácil, bastará encontrar un subespacio vectorial $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\vec{\sigma}_U^\perp(1, -1) = (1, 1),$$

por ejemplo $U = L\{(0, 1)\}$ (también valdría $U = L\{(1, 0)\}$), y simplemente tomar $T = p_0 + U = (2, 0) + L\{(0, 1)\}$. Como hemos explicado antes la simetría σ_T^\perp resolvería el ejercicio. Por otra parte, es inmediato demostrar que

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

3.6.2. Movimientos rígidos en un espacio afín euclidiano tridimensional

Sea $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ un movimiento rígido en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle)$ de $\dim \mathcal{A} = 3$. Se pueden dar los siguientes casos:

- (A) f es directo y $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$. De la clasificación de isometrías lineales de espacios vectoriales euclidianos tridimensionales con $\det(\vec{f}) = 1$ deducimos que $\vec{f} = \text{Id}_V$ ó \vec{f} es un giro con eje la recta vectorial $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de una orientación \mathcal{O} en el plano vectorial V_1^\perp . En el primer caso claramente $f = \text{Id}_{\mathcal{A}}$ (giro de ángulo 0 con eje cualquier recta). En el segundo caso, fijado $q \in \mathcal{P}_f$, tenemos que

$$\mathcal{P}_f = q + V_1 \text{ y } f(p) = q + \vec{f}(\vec{qp}) \text{ para todo } p \in \mathcal{A}.$$

Por definición se dice que f es un giro con eje la recta afín $S = \mathcal{P}_f$ de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto de la orientación \mathcal{O} adoptada en \vec{S}^\perp . En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S$ y base

ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $v_3 \in \vec{S} = V_1$ y $\{v_1, v_2\}$ es base positiva en $(\vec{S}^\perp = V_1^\perp, \mathcal{O})$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Si no enfatizamos orientación, el ángulo $\alpha \in]0, \pi]$ no orientado asociado al giro f obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

- (B) f es directo y $\mathcal{P}_f = \emptyset$. Aquí tenemos en cuenta Lema 3.35 y descomponemos $f = \tau_u \circ g$, donde $u \in V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, $u \neq \vec{0}$, y $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$. Del caso anterior $\vec{g} = \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ ó \vec{g} es un giro con eje la recta vectorial $\operatorname{Ker}(\vec{g} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = V_1$ de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto a una orientación dada en V_1^\perp (recordar que $\vec{f} = \vec{g}$).

Al ser $\mathcal{P}_f = \emptyset$, en el primer caso $\vec{g} = \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$ se tiene que f **es una traslación** τ_u , $u \in \vec{\mathcal{A}}$ (se puede hablar de movimiento helicoidal con eje cualquier recta paralela a u y ángulo 0). En cualquier sistema de referencia $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} obtenemos

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde (b_1, b_2, b_3) son las coordenadas u_B de u en la base B .

En el caso de que \vec{g} sea un giro, por lo visto en (A) inferimos que g es un giro con eje la recta afín $S = \mathcal{P}_g$ de ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto a una orientación prefijada en $V_1^\perp = \vec{S}^\perp$, y por tanto f es la composición de ese giro con una traslación de vector $u \in \vec{S} = V_1$, $u \neq \vec{0}$. Se dice que f **es un movimiento helicoidal de eje la recta afín S** , ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ (respecto de la orientación fijada en V_1^\perp) y **vector de deslizamiento** $u \in \vec{S}$. En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $v_3 \in \vec{S} = V_1$ y $\{v_2, v_3\}$ es positiva en V_1^\perp , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

donde $(0, 0, b_3)$ son las coordenadas u_B de u en la base B .

Si no enfatizamos orientación, el ángulo $\alpha \in]0, \pi]$ no orientado asociado al movimiento helicoidal f obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha + 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

Observación 3.41 *Los puntos p del eje S del movimiento helicoidal $f = \tau_u \circ g$ son los puntos fijos del giro g , y se caracterizan del Lema 3.35 por la propiedad $\overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V)$, siendo el vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in S$.*

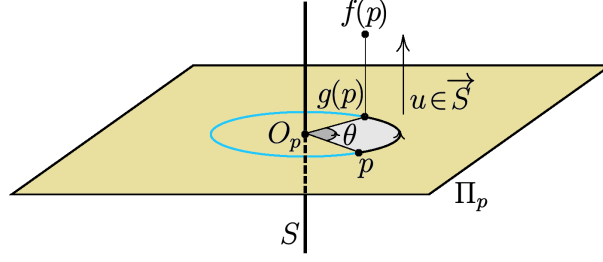


Figura 14: Movimiento Helicoidal

Se puede visualizar un movimiento helicoidal f con eje S , ángulo θ y vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$ de la siguiente manera. Dibuja el eje S y coge un punto p cualquiera del espacio. Toma el plano Π_p perpendicular a S que contiene a p y llama O_p al punto de corte $S \cap \Pi_p$. Luego, dentro del plano Π_p , con un compás pinchas en O_p y abres el compás hasta alcanzar en el extremo a p , realizando a continuación el giro en Π_p del punto p con centro O_p y ángulo θ de la forma tradicional. Te saldrá un nuevo punto $g(p) \in \Pi_p$, justo la imagen de p por el giro g con eje S y ángulo θ , al que luego solo tienes que sumar el vector de deslizamiento u (ortogonal a Π_p y en la dirección de \vec{S}): el punto $f(p)$ es el $g(p) + u$.

(C) f es inverso y $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$. Por la clasificación de isometrías lineales de un espacio vectorial euclídeo tridimensional, como $\det(\vec{f}) = -1$ surgen dos posibilidades para \vec{f} :

- \vec{f} es la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$ respecto de un plano vectorial $V_1 = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. En este caso, como $\mathcal{P}_f \neq \emptyset$, tomado $q \in \mathcal{P}_f$ tenemos que

$$f(p) = f(q) + \vec{f}(\vec{pq}) = q + \vec{\sigma}_{V_1}^\perp(\vec{pq}) \quad \forall p \in \mathcal{A}.$$

y por tanto por definición f es la **simetría respecto del plano afín $S = q + V_1 = \mathcal{P}_f$ en la dirección de $V_1^\perp = V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$** , o simplemente f es la **simetría ortogonal respecto del plano afín $S = \mathcal{P}_f$** , que será denotada como σ_S^\perp . En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1$ y $v_3 \in V_{-1} = V_1^\perp$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

- \vec{f} es un giro con eje una recta vectorial $U \subseteq V_{-1} = \text{Ker}(\vec{f} + \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ y ángulo orientado $\theta \in]0, 2\pi[$ respecto a una orientación en U^\perp , seguido de la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{U^\perp}^\perp$ respecto del plano vectorial U^\perp . En este caso $\text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$, por lo que la Proposición 2.61 garantiza que f tiene un único punto fijo que llamaremos p_0 . Resulta por tanto que f es la **composición del giro de eje $S = p_0 + U$ y ángulo orientado θ respecto de una orientación en U^\perp , y la simetría ortogonal σ_T^\perp respecto a $T = p_0 + U^\perp$** . En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$ de \mathcal{A} con origen en el único punto fijo

p_0 de f y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_3 \in \vec{S} = U$ y $\{v_2, v_3\}$ base positiva de U^\perp , se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Nótese que $U = L\{v_3\} = V_{-1} = \operatorname{Ker}(\vec{f} + \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ si y solo si $\theta \neq \pi$, y si $\theta = \pi$ entonces $\vec{f} = -\operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}} = V_{-1}$. Cuando $\theta = \pi$ el movimiento f se denomina también *simetría central* respecto al punto p_0 , y se corresponde con la homotecia $h_{p_0, -1}$.

Si no enfatizamos orientación, el ángulo $\alpha \in]0, \pi]$ no orientado asociado a f obedece a la fórmula

$$2 \cos \alpha - 1 = \operatorname{Traza}(M(\vec{f}, B)).$$

- (D) f es inverso y $\mathcal{P}_f = \emptyset$. Razonamos como en el caso anterior, solo que como $\mathcal{P}_f = \emptyset$ la Proposición 2.61 nos dice que el caso $\operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}) = \{\vec{0}\}$ no se puede darse, y \vec{f} ha de ser necesariamente la simetría ortogonal $\vec{\sigma}_{V_1}^\perp$ respecto del plano vectorial $V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$. Por el Lema 3.35

$$f = \tau_u \circ g,$$

donde $u \in V_1 \setminus \{0\}$ y $\mathcal{P}_g \neq \emptyset$. Siguiendo lo visto en (C), g ha de ser la simetría ortogonal σ_S^\perp respecto del plano afín $S = \mathcal{P}_g$, y por tanto f es la composición de σ_S^\perp y la translación de vector $u \in V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{g} - \operatorname{Id}_V) = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V) = \vec{S}$. Este movimiento rígido se llama **simetría ortogonal deslizante respecto del plano afín S con vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$** .

En cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B\}$ de \mathcal{A} con origen en $q \in S$ y base ortonormal de direcciones $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1, v_2 \in \vec{S} = V_1 = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$ y $v_3 \in V_{-1} = \operatorname{Ker}(\vec{f} + \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{A}}})$, se tiene que

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

donde $(b_1, b_2, 0)$ son las coordenadas u_B de u en B .

Observación 3.42 Si $f = \tau_u \circ g$ es una simetría deslizante con $g = \sigma_S^\perp$ y $u \in \vec{S}$, hemos probado que (ver el Lema 3.35):

- El plano de simetría S de f coincide con \mathcal{P}_g .
- El vector de deslizamiento $u = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in S$.

A efectos de cálculo, $S = \{p \in \mathcal{A}: \overrightarrow{pf(p)} \in \vec{S} = \operatorname{Ker}(\vec{f} - \operatorname{Id}_V)\}$.

El plano S puede ser descrito también como el lugar geométrico

$$S = \{m_{pf(p)}: p \in \mathcal{A}\}.$$

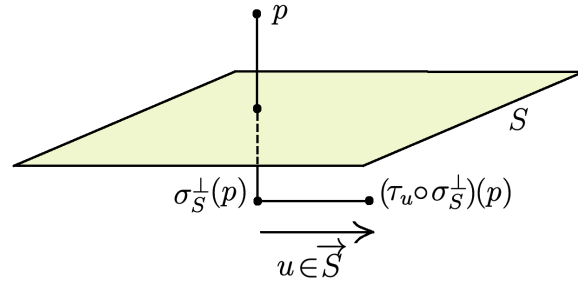


Figura 15: Simetría ortogonal con deslizamiento

En efecto, para todo $p \in \mathcal{A}$

$$m_{p,f(p)} = p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pf(p)} = (p + \frac{1}{2} \overrightarrow{pg(p)}) + \frac{1}{2} u = m_{p,g(p)} + \frac{1}{2} u,$$

de donde usando que $S = \mathcal{P}_g = \{m_{p,g(p)} : p \in \mathcal{A}\}$ y $u \in \vec{S}$ se sigue lo enunciado.

MOVIMIENTOS DEL ESPACIO	Directo	Inverso
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Punto)		Giro+Simetría
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Recta)	Giro ángulo $\theta \neq 0$	
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Plano)		Simetría ortogonal
$\mathcal{P}_f \neq \emptyset$ (Total)	$\text{Id}_{\mathcal{A}}$	
$\mathcal{P}_f = \emptyset$ ($\vec{f} \neq \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$)	Movimiento helicoidal	Simetría deslizante
$\mathcal{P}_f = \emptyset$ ($\vec{f} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}$)	Traslación	

Es conveniente dibujar los elementos geométricos de los movimientos estudiados en cada caso (rectas o planos de simetría, ángulos de giro y vectores de deslizamiento) en una cuartilla de papel. Intenta visualizar cómo actúa cada uno de ellos, entendiendo la posición relativa de un punto genérico y su imagen. Este ejercicio geométrico sencillo es importante, te ayudará a comprender mejor la naturaleza de todos estos movimientos.

Ejercicio 3.43 Demuestra que la siguiente aplicación afín $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{x - \sqrt{3}y}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x + y}{2}, z + 1 \right).$$

es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo \mathbb{R}^3 y clasifícalo determinando sus elementos geométricos.

SOLUCIÓN: La aplicación lineal asociada \vec{f} satisface

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$, esto es, $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$ (es una matriz ortogonal). Como el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0 = \{(0, 0, 0), B_0\}$ en \mathbb{R}^3 es rectangular

respecto del producto escalar clásico \langle, \rangle , y por tanto la base usual B_0 es una base ortonormal en $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, inferimos que efectivamente f es un movimiento rígido.

Además $\det M(\vec{f}, B_0) = 1$, por lo que es un movimiento directo. Su conjunto de puntos fijos viene dado por $\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (x, y, z)\}$, esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x+y}{2}, z+1) = (x, y, z)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2}, 1) = (0, 0, 0)\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Como $\vec{f} \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$, la clasificación de los movimientos rígidos en espacios euclidianos tridimensionales nos dice que f es un movimiento helicoidal. Determinemos sus elementos geométricos, esto es, eje S , ángulo de giro θ y vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$.

Recordemos que $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_V)$, esto es,

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = L(\{(0, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

De la Observación 3.41, los puntos (x, y, z) del eje S de f se caracterizan por la propiedad $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} \in \vec{S}$, esto es,

$$\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)} = (\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2}, 1) \in \vec{S}.$$

Como $x = y = 0$ son las ecuaciones implícitas de \vec{S} en B_0 , Imponiendo que las dos primeras coordenadas de $\overrightarrow{(x, y, z)f(x, y, z)}$ se anulen nos queda

$$(x, y, z) \in S \iff \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-x-\sqrt{3}y}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}x-y}{2} = 0,$$

esto es,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 1\} = (1, 1, 0) + L(\{(0, 0, 1)\}).$$

El ángulo no orientado $\alpha \in]0, \pi]$ del movimiento helicoidal se calcula de la fórmula

$$\text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = 2 \cos \alpha + 1 \iff 2 = 2 \cos \alpha + 1 \iff \cos \alpha = 1/2 \iff \alpha = \pi/3.$$

Para calcular el ángulo orientado θ respecto de una orientación elegida en \vec{S}^\perp procedemos así. En \vec{S}^\perp , elegimos una base ortonormal B que determine la orientación positiva \mathcal{O} en \vec{S}^\perp que vamos a fijar. Como $\vec{S}^\perp = L(\{(0, 0, 1)\})^\perp = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$ en este caso tomaremos

$$B = \{v_1, v_2\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Luego calculamos la matriz $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$, que queda

$$M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por definición, el ángulo orientado de f respecto de la orientación \mathcal{O} fijada en \vec{S}^\perp es el único real $\theta \in]0, 2\pi[$ tal que $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, esto es $\theta = \pi/3$.

Por último, el vector de deslizamiento u de f se calcula de la expresión $u = \overrightarrow{pf(p)}$ para cualquier $p \in S$. Elegimos por sencillez $p = (1, 1, 0)$, calculamos $f(1, 1, 0) = (1, 1, 1)$, y deducimos que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 0)f(1, 1, 0)} = \overrightarrow{(1, 1, 0)(1, 1, 1)} = (0, 0, 1).$$

■

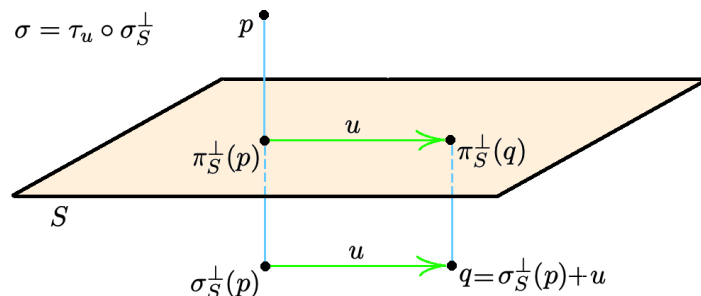
Ejercicio 3.44 Sean S plano y p, q puntos en \mathbb{R}^3 . Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

1. Existe $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ simetría ortogonal deslizante respecto del plano S tal que $\sigma(p) = q$.
2. $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$ y $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}$, donde $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa a la proyección ortogonal sobre S .

Prueba que existe una simetría deslizante $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$ cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Determinala dando su matriz en la referencia usual de \mathbb{R}^3 .



SOLUCIÓN: a) \Rightarrow b) Sea $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ simetría ortogonal deslizante respecto de S tal que $\sigma(p) = q$. En principio sabemos que existe un vector $u \in \vec{S} \setminus \{\vec{0}\}$ tal que σ es la composición de la simetría ortogonal respecto del plano S seguida de la traslación de vector u :

$$\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp.$$

Veamos que \overrightarrow{pq} no pertenece a \vec{S}^\perp . En efecto, la identidad

$$q = \sigma(p) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(p) = \sigma_S^\perp(p) + u = p + (\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u)$$

implica que $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} + u$, y la definición de simetría ortogonal implica que $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$. Como la descomposición $\mathbb{R}^3 = \vec{S} \oplus \vec{S}^\perp$ es en suma directa, deducimos de lo anterior que $\overrightarrow{pq} \in \vec{S}^\perp$ si y sólo si el vector $u \in \vec{S}$ es el vector nulo $\vec{0}$, lo que contradice que σ es deslizante.

Por tanto \overrightarrow{pq} no pertenece a \vec{S}^\perp .

Veamos ahora que $\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$. Para ello, observemos que de la definición de simetría ortogonal $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = \overrightarrow{2p\pi_S^\perp(p)}$, de donde volviendo a la ecuación de arriba

$$\begin{aligned} q &= p + \overrightarrow{(p\sigma_S^\perp(p))} + u = p + \overrightarrow{(2p\pi_S^\perp(p))} + u = \\ &= (p + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}) + \overrightarrow{(p\pi_S^\perp(p))} + u = \pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{(p\pi_S^\perp(p))} + u = (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}. \end{aligned}$$

Ahora podemos demostrar que el punto $z := \pi_S^\perp(p) + u$ coincide con la proyección $\pi_S^\perp(q)$, ya que satisface:

- $z \in S$: usar que $\pi_S^\perp(p) \in S$ y $u \in \vec{S}$.
- $\overrightarrow{zq} \in \vec{S}^\perp$: usar que de la expresión $q = z + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)}$ probada anteriormente $\overrightarrow{zq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} \in \vec{S}^\perp$.

En conclusión

$$\overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \overrightarrow{(\pi_S^\perp(p) + u)q} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)},$$

lo que concluye la prueba.

b) \Rightarrow a)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ plano y $p, q \in \mathbb{R}^3$ puntos tales que $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$ y $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)}$. Consideremos los puntos $\pi_S^\perp(p), \pi_S^\perp(q) \in S$ y llamemos

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} \in \vec{S}.$$

Veamos que $u \neq \vec{0}$. Para ello basta con observar que

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = \overrightarrow{(p\pi_S^\perp(p) + \pi_S^\perp(q)q)} + u,$$

y tener en cuenta que $\overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} \in \vec{S}^\perp$ y $\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp$.

Comprobemos finalmente que la simetría deslizante $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$ resuelve el ejercicio; para ello bastará con demostrar que $\sigma(p) = q$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= \sigma_S^\perp(p) + u = p + \overrightarrow{(p\sigma_S^\perp(p))} + u = p + \overrightarrow{(2p\pi_S^\perp(p))} + u = \pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{(p\pi_S^\perp(p))} + u = \\ &= (\pi_S^\perp(p) + u) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = (\pi_S^\perp(p) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)}) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \\ &= \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{(-q\pi_S^\perp(q))} = \pi_S^\perp(q) + \overrightarrow{\pi_S^\perp(q)q} = q. \end{aligned}$$

En cuanto a la parte práctica, vamos a justificar que existe una simetría deslizante $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$ cuando

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 - x_2 = 1\}, \quad p = (2, -1, 0), \quad q = (-1, 0, 0).$$

Para una respuesta afirmativa, y usando lo demostrado, será suficiente con ver que

$$\overrightarrow{pq} \notin \vec{S}^\perp \quad \text{y} \quad \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} = \overrightarrow{-q\pi_S^\perp(q)},$$

donde $\pi_S^\perp: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa a la proyección ortogonal sobre S . Determinemos por tanto la expresión analítica de π_S^\perp . Tomemos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ genérico y escribamos $\pi_S^\perp(x, y, z) = (a, b, c)$. Sabemos que

- $(a, b, c) \in S$, esto es, $a - b = 1$.
- $\overrightarrow{(x, y, z)(a, b, c)} = (a - x, b - y, c - z) \in \vec{S}^\perp$; como $\vec{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ entonces $\vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$, y por tanto $c - z = a - x + b - y = 0$.

Resolviendo $a = \frac{1}{2}(x + y + 1), b = \frac{1}{2}(x + y - 1), c = z$, y por tanto

$$\pi_S^\perp : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \pi_S^\perp(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x + y + 1), \frac{1}{2}(x + y - 1), z\right).$$

Ahora queda claro que

$$\overrightarrow{p\vec{q}} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(-1, 0, 0)} = (-3, 1, 0) \notin \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0)\}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 + x_2 = 0\}$$

y

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p\pi_S^\perp(p)} &= \overrightarrow{(2, -1, 0)\pi_S^\perp(2, -1, 0)} = \overrightarrow{(2, -1, 0)(1, 0, 0)} = (-1, 1, 0) = \\ &= -\overrightarrow{(-1, 0, 0)(0, -1, 0)} = -\overrightarrow{(-1, 0, 0)\pi_S^\perp(-1, 0, 0)} = -\overrightarrow{q\pi_S^\perp(q)}. \end{aligned}$$

De lo demostrado en la parte teórica del ejercicio deducimos que existe una simetría deslizante $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\sigma(S) = S$ y $\sigma(p) = q$. Para determinar la expresión matricial de σ en \mathcal{R}_0 , recordemos que $\sigma = \tau_u \circ \sigma_S^\perp$ para cierto vector $u \in \vec{S}$. Como probamos en el anterior razonamiento, el vector u puede calcularse mediante la expresión

$$u = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(\sigma(p))} = \overrightarrow{\pi_S^\perp(p)\pi_S^\perp(q)} = \overrightarrow{(1, 0, 0)(0, -1, 0)} = (-1, -1, 0).$$

La expresión analítica de σ_S^\perp se puede determinar usando la fórmula $\overrightarrow{p\sigma_S^\perp(p)} = \overrightarrow{2p\pi_S^\perp(p)}$, esto es, $\sigma_S^\perp(p) = 2\pi_S^\perp(p) - p$, que nos da

$$\sigma_S^\perp(x, y, z) = 2\pi_S^\perp(x, y, z) - (x, y, z) = 2\left(\frac{1}{2}(x + y + 1), \frac{1}{2}(x + y - 1), z\right) - (x, y, z) = (y + 1, x - 1, z).$$

De aquí que

$$\sigma(x, y, z) = (\tau_u \circ \sigma_S^\perp)(x, y, z) = (y + 1, x - 1, z) + (-1, -1, 0) = (y, x - 2, z),$$

esto es,

$$M(\sigma, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

■

Ejercicio 3.45 Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 del movimiento helicoidal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con los siguientes elementos geométricos:

- Eje $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 1 = y - z + 1 = 0\}$.
- Ángulo orientado $\theta = \pi/4$ respecto a la orientación \mathcal{O} inducida por la base ordenada $B' = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ de \vec{S}^\perp .
- Vector de deslizamiento $u = (-1, -1, -1) \in \vec{S}$.

SOLUCIÓN: Observemos que

$$S = (0, -1, 0) + L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S} = L(\{(1, 1, 1)\}), \quad \vec{S}^\perp = L(\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}).$$

El ejercicio está bien planteado ya que B' es una base ordenada de S^\perp , determinando por tanto una orientación en ese plano vectorial, y el vector de deslizamiento u pertenece a \vec{S} . Necesitaremos un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$ adaptado al movimiento helicoidal, esto es, tal que $q \in S$, $\{v_1, v_2\}$ sea base ortonormal positiva de $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$, y $v_3 \in \vec{S}$ sea unitario.

Elegimos

$$q = (0, -1, 0), \quad \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}, \quad v_3 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1).$$

Notemos que, si llamamos $B'' = \{v_1, v_2\}$, la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

tiene determinante > 0 , y por tanto B'' es una base ortonormal positiva en $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$.

Como $u = -\sqrt{3}v_3$, y por tanto $u_B = (0, 0, -1)^t$, la matriz del movimiento helicoidal f en la referencia \mathcal{R} adaptada ha de ser:

$$M(f, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & -1/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right),$$

la identidad $M(f, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(f, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$ nos da finalmente

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{-\sqrt{\sqrt{3}+2}-2}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-5}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-4}{6} & \frac{1-\sqrt{\sqrt{3}+2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} \end{array} \right).$$

■

Ejercicio 3.46 Determinar la expresión analítica en el sistema de referencia usual del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 del movimiento rígido definido por la composición $\sigma_T^\perp \circ G$, donde:

- G es el giro con eje $S = (0, 0, 1) + L(\{(1, -1, 0)\})$ de ángulo orientado $\pi/3$ respecto de la orientación en \vec{S}^\perp inducida por $B' = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 1 = 0\}$.

Clasifica el movimiento resultante.

SOLUCIÓN: Determinemos la expresión analítica de G en \mathcal{R}_0 . Para ello, determinemos primero un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R} = \{q, B = \{v_1, v_2, v_3\}\}$ adaptado a G . Esto significa que $q \in S$, $\{v_1, v_2\}$ es base ortonormal positiva de $(\vec{S}^\perp, \mathcal{O})$, y $v_3 \in \vec{S}$ es unitario. En este caso tomaremos

$$q = (0, 0, 1), \quad B'' = \{v_1, v_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1) \right\}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

La comprobación de que B'' es positiva en (\vec{S}, \mathcal{O}) es trivial toda vez que la matriz

$$M(\text{Id}_{\vec{S}^\perp}, B'', B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante > 0 .

La matriz del giro G en la referencia \mathcal{R} adaptada ha de ser:

$$M(G, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como

$$M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

la identidad $M(G, \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{-1}$ nos da finalmente

$$M(G, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Por otra parte, un cálculo elemental nos dice que la matriz que representa a σ_T^\perp en \mathcal{R}_0 es

$$M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

de donde si llamamos $f = \sigma_T^\perp \circ G$ se deduce que la expresión analítica de f en \mathcal{R}_0 está determinada por la matriz

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\sigma_T^\perp, \mathcal{R}_0) \cdot M(G, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Esto acaba la primera parte del ejercicio.

Consideremos ahora el movimiento rígido $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{3}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Para clasificarlo observemos que f es inverso al ser composición de un giro (directo) y una isometría (inverso). El conjunto \mathcal{P}_f de puntos fijos de f surge de resolver la ecuación $f(x, y, z) = (x, y, z)$, y da por soluciones el plano afín

$$\mathcal{P}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}.$$

Por la clasificación de los movimientos rígidos f es la simetría ortogonal σ_{Π}^{\perp} respecto del plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \sqrt{6}z + x + y = \sqrt{6}\}$. ■

Ejercicio 3.47 Demuestra que la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3).$$

SOLUCIÓN: De la definición de f se deduce que

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

Al ser f es lineal tenemos que $\vec{f} = f$. Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right),$$

B_0 es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ y $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$ deducimos que $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$ y f es un movimiento rígido. Además como $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$ se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos \mathcal{P}_f surge de resolver la ecuación $f(x, y, z) = (x, y, z)$, y como $\det (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \neq 0$ en este caso resulta

$$\mathcal{P}_f = \{(0, 0, 0)\}.$$

De la clasificación de los movimientos rígidos, f ha de ser de la forma

$$f = \sigma_T^{\perp} \circ G,$$

donde G es un giro respecto de una recta S y σ_T^{\perp} la simetría ortogonal respecto del plano T ortogonal a S con $S \cap T = \{p_0\}$. Determinemos los elementos geométricos de f .

Recordemos que

$$\vec{S} = \text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (M(\vec{f}, B_0) + I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 - \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Resolviendo el sistema

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + \frac{1}{11}(2 + 5\sqrt{5})x = z + \frac{1}{11}(-4 + \sqrt{5})x = 0\},$$

esto es $\vec{S} = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\})$. Por tanto

$$S = p_0 + \vec{S} = (0, 0, 0) + L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}) = L(\{(11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5})\}),$$

El ángulo $\alpha \in]0, \pi]$ no orientado del giro G se deduce de la expresión

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{Traza}(M(\vec{f}, B_0)) = -\frac{2}{3\sqrt{5}} + 2/3 \iff \alpha = \arccos(-\frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{5}{6}) \in]0, \pi[.$$

El plano T ortogonal a S pasando por p_0 viene dado por la expresión

$$T = p_0 + \vec{S}^\perp = (0, 0, 0) + \vec{S}^\perp.$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{S}^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (11, -2 - 5\sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}) \rangle = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 11x - (2 + 5\sqrt{5})y + (4 - \sqrt{5})z = 0\} = \\ &= \{(\lambda, \mu, -(4 + \sqrt{5})\lambda + (3 + 2\sqrt{5})\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

se tiene que

$$T = L(\{(-1, 0, 4 + \sqrt{5}), (0, 1, 3 + 2\sqrt{5})\}).$$

Si queremos el ángulo orientado $\theta \in [0, 2\pi[$ de G respecto de una orientación \mathcal{O} en \vec{S}^\perp , tomaremos primero una base ortonormal ordenada B de \vec{S}^\perp que fije \mathcal{O} y calcularemos la matriz $M(\vec{f}|_{\vec{S}^\perp}, B)$, que será la típica matriz $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ determinando unívocamente θ . Los cálculos son muy penosos y los omitiremos. ■

Ejercicio 3.48 Demuestra que la siguiente aplicación $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido del espacio afín euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ y clasifícalo:

$$f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}z/2 + 2, y + 2, -\sqrt{3}x/2 - z/2 + 2).$$

SOLUCIÓN: La matriz de f en el sistema de referencia \mathcal{R}_0 viene dada por la expresión

$$M(f, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Como

$$M(\vec{f}, B_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

B_0 es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$ y $M(\vec{f}, B_0) \cdot M(\vec{f}, B_0)^t = I_3$ deducimos que $M(\vec{f}, B_0) \in O(3, \mathbb{R})$ y f es un movimiento rígido. Además como $\det M(\vec{f}, B_0) = -1$

se trata de un movimiento inverso. El conjunto de puntos fijos \mathcal{P}_f surge de resolver la ecuación $f(x, y, z) - (x, y, z) = (0, 0, 0)$, que en este caso resulta el sistema

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (2 - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z, 2, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}z) = (0, 0, 0)\} = \emptyset.$$

Por la clasificación de movimientos rígidos f es una simetría deslizante de la forma $\tau_u \circ \sigma_S^\perp$, donde S es un plano afín y $u \in \vec{S}$. Determinemos sus elementos geométricos.

Sabemos que $\vec{S} = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$, esto es,

$$\vec{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (M(\vec{f}, B_0) - I_3) \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = -\sqrt{3}z\},$$

esto es,

$$\vec{S} = L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}).$$

Sabemos que $m_{p, f(p)} \in S$ para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Eligiendo $p = (0, 0, 0)$, como $f(0, 0, 0) = (2, 2, 2)$ ese cálculo nos dice que

$$m_{(0,0,0), f(0,0,0)} = m_{(0,0,0), (2,2,2)} = (1, 1, 1) \in S.$$

Como $S = (1, 1, 1) + \vec{S}$, de aquí que

$$S = (1, 1, 1) + L(\{(0, 1, 0), (-\sqrt{3}, 0, 1)\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + \sqrt{3}z - 1 - \sqrt{3} = 0\}.$$

El vector de deslizamiento $u \in \vec{S}$ se calcula de la forma $u = \overrightarrow{pf(p)}$, $p \in S$. Tomando $p = (1, 1, 1) \in S$ y calculando $f(1, 1, 1) = (\frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}), 3, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}))$ se tiene que

$$u = \overrightarrow{(1, 1, 1), f(1, 1, 1)} = (\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}), 2, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})).$$

■

3.7. Triángulos en el plano afín euclidiano

Vamos a recordar algunos de los resultados clásicos acerca de triángulos en el plano euclidiano.

Definición 3.49 *Un triángulo en un espacio afín \mathcal{A} son tres puntos $\{a, b, c\}$ afínmente independientes, que se suelen llamar vértices.*

Normalmente, se suele hablar de triángulos $\{a, b, c\}$ en planos afines, ya que sus propiedades se pueden circunscribir al plano $\Pi = \langle \{a, b, c\} \rangle \subseteq \mathcal{A}$ que lo contiene. Comencemos con algunas definiciones básicas.

Definición 3.50 *Si $T = \{a, b, c\}$ es un triángulo en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, se definen los ángulos interiores \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} de T en los vértices a , b y c respectivamente como los ángulos orientados*

$$\hat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) \quad y \quad \hat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb})$$

respecto de la orientación \mathcal{O} del plano $\vec{\mathcal{A}}$ inducida por la ordenación cíclica (a, b, c) de los vértices de T , esto es, por cualquiera de las bases ordenadas $B_1 = \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$, $B_2 = \{\vec{bc}, \vec{ba}\}$ y $B_3 = \{\vec{ca}, \vec{cb}\}$.

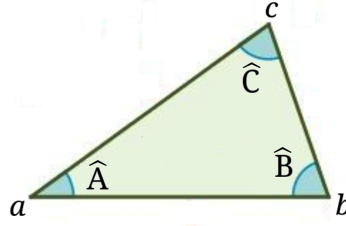


Figura 16: Triángulo

La anterior definición es consistente en el sentido de que las bases ordenadas B_1, B_2, B_3 efectivamente inducen la misma orientación \mathcal{O} en $\vec{\mathcal{A}}$; en efecto, como $\vec{bc} = \vec{ba} + \vec{ac} = -\vec{ab} + \vec{ac}$ y $\vec{ba} = -\vec{ab}$, se tiene que

$$M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_2, B_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto $\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_2, B_1)) = 1 > 0$; de forma análoga se comprueba que $\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B_3, B_1)) = 1 > 0$.

Es importante también observar que la ordenación cíclica de los vértices (a, b, c) fijada, que lógicamente determina la orientación \mathcal{O} , no influye en el valor de \hat{A}, \hat{B} y \hat{C} ; si eligiesemos la ordenación cíclica (a, c, b) contraria entonces la orientación cambiaría a la opuesta, pero no los ángulos orientados definidos de acuerdo con el criterio especificado en la definición.

Observación 3.51 *Es conveniente recordar que, por definición, el ángulo orientado está bien definido salvo múltiplos enteros de 2π , y por tanto siempre podemos tomar una determinación del mismo que pertenezca al intervalo $[0, 2\pi[$. Por este motivo, y en lo sucesivo, dado un triángulo $\{a, b, c\}$ siempre supondremos*

$$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in]0, 2\pi[.$$

El siguiente resultado recoge las propiedades básicas de los ángulos de un triángulo (Euclides siglo III A.C.).

Teorema 3.52 *Sea $\{a, b, c\}$ un triángulo en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Son ciertos los siguientes enunciados:*

(I) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in]0, \pi[.$

(II) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$

DEMOSTRACIÓN: Demostremos (i). Calculemos \hat{A} (análogamente se razonaría con \hat{B} y \hat{C}), para lo cual llamemos $B = \{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ y escribamos

$$w_1 = \frac{1}{\|\vec{ab}\|} \vec{ab}, \text{ y } w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \text{ donde } u_2 = \vec{ac} - \langle w_1, \vec{ac} \rangle w_1.$$

Un cálculo sencillo nos dice que $B_0 = \{w_1, w_2\}$ es una base ortonormal de $(\vec{\mathcal{A}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y

$$\det(M(\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B, B_0)) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{ab}\|} & \langle w_1, \vec{ac} \rangle \\ 0 & \|u_2\| \end{pmatrix} > 0,$$

esto es, B_0 induce la misma orientación que B en $\vec{\mathcal{A}}$. Por definición, \hat{A} es el único real en $]0, 2\pi[$ satisfaciendo

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|} \vec{ac} = \cos(\hat{A})w_1 + \sin(\hat{A})w_2,$$

de donde como $\vec{ac} = \langle w_1, \vec{ac} \rangle w_1 + \|w_2\| w_2$ inferimos que $\sin \hat{A} = \frac{\|w_2\|}{\|\vec{ac}\|} > 0$, esto es, $\hat{A} \in]0, \pi[$. Esto prueba (i).

Para probar (ii), recordemos que $\angle_o(u, v) = \angle_o(-u, -v)$, y que salvo sumar un múltiplo de 2π la regla de aditividad $\angle_o(u, v) + \angle_o(v, w) = \angle_o(u, w)$ es válida.

Usando estas fórmulas, y respecto de la orientación \mathcal{O} en $\vec{\mathcal{A}}$ inducida por $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle_o(-\vec{ca}, -\vec{cb}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \\ &= \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}) + \angle(\vec{ac}, \vec{bc}) + \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) + 2k\pi = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En la última identidad hemos usado que $\angle_o(\vec{ab}, \vec{ba}) = \pi$. Como por (i) sabemos que $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in]0, \pi[$, necesariamente $\pi + 2k\pi = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$, por lo que $k = 0$ y se tiene lo deseado. ■

Teorema 3.53 (Teorema de Pitágoras) *Dado un triángulo $\{a, b, c\}$ con ángulo $\hat{A} = \pi/2$,*

$$d(a, b)^2 + d(a, c)^2 = d(b, c)^2.$$

Este tipo de triángulos se llaman *rectángulos* con ángulo recto en el vértice a . Los segmentos $[a, b]$ y $[a, c]$ se denominan *catetos* de $\{a, b, c\}$, y el segmento $[b, c]$ *hipotenusa* de $\{a, b, c\}$.

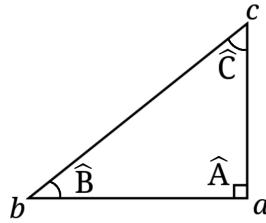


Figura 17: Triángulo rectángulo

DEMOSTRACIÓN: La prueba del teorema de Pitágoras es muy simple para nosotros:

$$d(b, c)^2 = \|\vec{bc}\|^2 = \langle \vec{ba} + \vec{ac}, \vec{ba} + \vec{ac} \rangle = \|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = d(a, b)^2 + d(a, c)^2,$$

donde simplemente hemos tenido en cuenta que $\hat{A} = \pi/2$ si y solo si $\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = 0$ (esto es, $\vec{ab} \perp \vec{ac}$). ■

Proposición 3.54 *Dados dos triángulos $\{a, b, c\}$ y $\{a', b', c'\}$ en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, si $d(a, b) = d(a', b')$, $d(a, c) = d(a', c')$, y $d(b, c) = d(b', c')$, entonces*

$$\hat{A} = \hat{A}', \quad \hat{B} = \hat{B}', \quad \hat{C} = \hat{C}'.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $\{\vec{ab}, \vec{ac}, \vec{bc}\}$ y $\{\vec{a'b'}, \vec{a'c'}, \vec{b'c'}\}$ son bases de $\vec{\mathcal{A}}$, la única aplicación afín $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'$$

es una afinidad. Además, \vec{f} satisface

$$\|\vec{f}(\vec{ab})\| = \|\vec{a'b'}\| = \|\vec{ab}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{ac})\| = \|\vec{a'c'}\| = \|\vec{ac}\|, \quad \|\vec{f}(\vec{bc})\| = \|\vec{b'c'}\| = \|\vec{bc}\|,$$

por lo que es una isometría lineal. De aquí que f sea un movimiento rígido, y por tanto preserva ángulos. El resultado se sigue trivialmente. ■

3.7.1. Puntos notables de un triángulo

Los tres puntos notables de un triángulo que trataremos en esta sección son el *baricentro*, el *circuncentro* y el *ortocentro* (dejaremos el *incentro* para un tratamiento posterior más específico). Explicamos a continuación cómo se generan y sus propiedades básicas.

Definición 3.55 Dado un triángulo $\{a, b, c\}$, la mediana asociada al vértice a es la recta $M_a = \langle \{a, m_{bc}\} \rangle$ que une a y el punto medio m_{bc} o centro de masas del lado opuesto $[b, c]$. Análogamente se define las medianas M_b y M_c asociadas a b y c .

El punto

$$B = q + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc})$$

no depende de $q \in \mathcal{A}$, y es fácil comprobar que está contenido en las tres medianas del triángulo $\{a, b, c\}$:

$$\{B\} = M_a \cap M_b \cap M_c.$$

En efecto, bastará con ver que $B \in M_a = a + L(\{\vec{am_{bc}}\})$ (análogamente se razonaría para comprobar que $B \in M_b$ y $B \in M_c$). Como $m_{bc} = q + (\frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc})$ se tiene que

$$\vec{am_{bc}} = \overrightarrow{a(q + (\frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc}))} = -\vec{qa} + \frac{1}{2}\vec{qb} + \frac{1}{2}\vec{qc},$$

de donde $\vec{aB} = \vec{aq} + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc}) = -\frac{2}{3}\vec{qa} + \frac{1}{3}(\vec{qb} + \vec{qc}) = \frac{2}{3}\vec{am_{bc}} \in \vec{M_a}$ y $B \in M_a$ como queríamos demostrar.

Definición 3.56 (Baricentro) El punto $B = q + \frac{1}{3}(\vec{qa} + \vec{qb} + \vec{qc})$ es conocido como el centro de masas o baricentro del triángulo $\{a, b, c\}$.

El concepto de baricentro es puramente afín, se puede definir sin apelar a ninguna métrica euclídea en $\vec{\mathcal{A}}$.

Definición 3.57 Dados dos puntos p, q en un plano afín euclidiano euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, la mediatriz del segmento $[p, q]$ es la recta R que pasa por m_{pq} y es ortogonal a la recta $\langle \{p, q\} \rangle$ que generan p y q . Explícitamente,

$$R = m_{pq} + L\{\vec{pq}\}^\perp.$$

Proposición 3.58 Si p, q son puntos de un plano euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, la mediatriz R del segmento $[p, q]$ es el lugar de puntos

$$R = \{r \in \mathcal{A}: d(p, r) = d(q, r)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si r es un punto de la mediatriz R de $[p, q]$, los triángulos $\{p, m_{pq}, r\}$ y $\{q, m_{pq}, r\}$ son rectángulos con ángulo recto en el vértice m_{pq} . Por tanto, usando el Teorema de Pitágoras,

$$d(p, r)^2 = d(p, m_{pq})^2 + d(m_{pq}, r)^2 = d(q, m_{pq})^2 + d(m_{pq}, r)^2 = d(q, r)^2.$$

Recíprocamente, dado un punto $r \in \mathcal{A}$ equidistante de p y q , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{rm_{pq}}, \overrightarrow{qp} \rangle &= \overrightarrow{r(r + \frac{1}{2}\overrightarrow{rp} + \frac{1}{2}\overrightarrow{rq})}, \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rp} \rangle = \frac{1}{2} \langle \overrightarrow{rp} + \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rp} \rangle = \\ &= \|\overrightarrow{rp}\|^2 - \|\overrightarrow{rq}\|^2 = d(p, r)^2 - d(q, r)^2 = 0, \end{aligned}$$

de donde r pertenece a la mediatriz R de $[p, q]$. ■

Proposición 3.59 Sea $\{a, b, c\}$ un triángulo, y llamemos R_a a la mediatriz del lado $[b, c]$, R_b a la mediatriz del lado $[a, c]$ y R_c a la mediatriz del lado $[a, b]$. Entonces existe un único punto $C \in \mathcal{A}$ tal que

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Si R_a y R_b fuesen paralelas tendríamos que las rectas vectoriales $L\{\overrightarrow{bc}\}^\perp$ y $L\{\overrightarrow{ac}\}^\perp$ en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ serían iguales, y por tanto $\{\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ac}\}$ serían linealmente dependientes, lo que es absurdo ya que $\{a, b, c\}$ es un triángulo. Por tanto R_a y R_b no son paralelas, y de igual forma ocurre con las parejas de rectas R_a, R_c y R_b, R_c . Esto garantiza que $C := R_a \cap R_b$ es un único punto caracterizado por la propiedad de equidistar de a, b y c , de donde necesariamente

$$C = R_a \cap R_b \cap R_c. \quad \text{■}$$

Definición 3.60 (Circuncentro) Con la notación de la Proposición 3.59, al punto C se le llama circuncentro del triángulo $\{a, b, c\}$.

Su nombre deriva de la propiedad geométrica que lo caracteriza: es el centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices del triángulo $\{a, b, c\}$.

Definición 3.61 Dado un triángulo $\{a, b, c\}$ en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, la altura H_a del vértice a es la recta que pasa por a y es ortogonal al lado opuesto $[b, c]$:

$$H_a = a + L\{\overrightarrow{bc}\}^\perp.$$

Análogamente se definen las alturas asociadas a los vértices b y c :

$$H_b = b + L\{\overrightarrow{ac}\}^\perp \quad \text{y} \quad H_c = c + L\{\overrightarrow{ab}\}^\perp.$$

Proposición 3.62 Si $\{a, b, c\}$ es un triángulo en un plano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, entonces existe un único punto O tal que

$$O = H_a \cap H_b \cap H_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Como los vectores \vec{ac} y \vec{bc} son linealmente independientes ($\{a, b, c\}$ es un triángulo), las rectas H_a y H_b no son paralelas y se cortan en un único punto O . Comprobemos que $O \in H_c$, o equivalentemente, que $\vec{Oc} \perp \vec{ab}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \vec{Oc}, \vec{ab} \rangle &= \langle \vec{Oa} + \vec{ac}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{aO} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle - \langle \vec{Oa}, \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{aO} + \vec{Ob} - \vec{ac} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \\ &= \langle \vec{Oa}, \vec{ca} + \vec{aO} + \vec{Ob} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{Oa}, \vec{cb} \rangle + \langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\langle \vec{ac}, \vec{Ob} \rangle = \langle \vec{cb}, \vec{Oa} \rangle = 0$ al ser $O \in H_b \cap H_a$. ■

Definición 3.63 (Ortocentro) Al punto $O \in \mathcal{A}$ intersección de las tres alturas de un triángulo $\{a, b, c\}$ en un plano afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ se le llama *ortocentro* de $\{a, b, c\}$.

Estamos en condiciones de enunciar y probar el *Teorema clásico de Euler*, que da información sobre la posición relativa de los tres puntos notables de un triángulo.

Teorema 3.64 (Euler) Dado un triángulo $\{a, b, c\}$ en un plano afín euclídiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, el baricentro B , circuncentro C y ortocentro O de $\{a, b, c\}$ están alineados.

Si $\{B, C, O\}$ contiene al menos dos puntos distintos, la recta pasando por B , C y O se denomina *recta de Euler* de $\{a, b, c\}$.

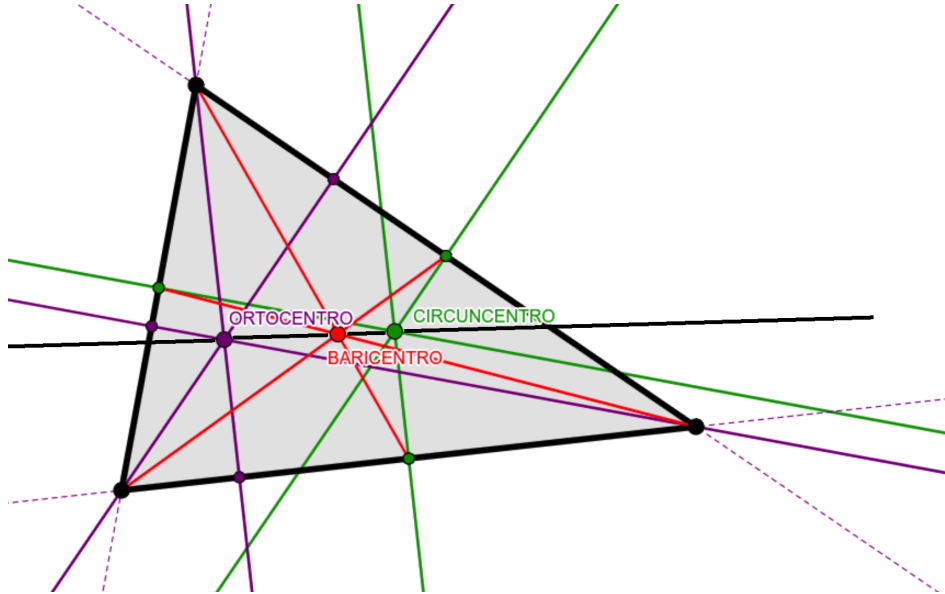


Figura 18: Recta de Euler

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ a la homotecia con centro B y razón $-1/2$. La clave es observar que h lleva cada vértice de $\{a, b, c\}$ en el punto medio de su lado opuesto. En efecto, como $B = a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})$, es claro que

$$\begin{aligned} h(a) &= B + (-\frac{1}{2})\vec{Ba} = B + \frac{1}{2}\vec{aB} = (a + \frac{1}{3}(\vec{ab} + \vec{ac})) + \frac{1}{6}(\vec{ab} + \vec{ac}) = \\ &= a + \frac{1}{2}(\vec{ab} + \vec{ac}) = m_{bc}, \end{aligned}$$

o en otras palabras, h lleva el vértice a en el punto medio de $[b, c]$, y el mismo razonamiento se aplica a los otros dos vértices.

Veamos que h lleva las alturas de $\{a, b, c\}$ en las mediatrices de $\{a, b, c\}$. En efecto

$$h(H_a) = h(a + \vec{h}_a) = h(a) + \vec{h}(\vec{h}_a) = h(a) + \left(-\frac{1}{2}\text{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}\right)(\vec{h}_a) = m_{bc} + \vec{h}_a = m_{bc} + \vec{R}_a = R_a,$$

donde hemos usado que $\vec{h}_a = \vec{R}_a = L(\{\vec{bc}\})^\perp$. Análogamente se prueba que $h(H_b) = R_b$ y $h(H_c) = R_c$.

Finalmente, como el ortocentro de $\{a, b, c\}$ es el cruce de las tres alturas $O = H_a \cap H_b \cap H_c$, deducimos que $h(O) = h(H_a) \cap h(H_b) \cap h(H_c) = R_a \cap R_b \cap R_c = C$. Pero un punto y su imagen por una homotecia están siempre alineados con el centro de la misma, por lo que O y $C = h(O)$ están alineados con B como queríamos demostrar. ■

3.7.2. Bisectrices e incentro de un triángulo

Para introducir el concepto de bisectriz asociada a cada vértice de un triángulo en un plano afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, y posteriormente definir el incentro del mismo como el punto de corte de sus tres bisectrices, necesitamos alguna notación previa.

Definición 3.65 *Un espacio afín orientado es un espacio afín $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \rightarrow)$ en el que se ha fijado una orientación \mathcal{O} en $\vec{\mathcal{A}}$. Se suele representar $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O}, \rightarrow)$, o simplemente $(\mathcal{A}, \mathcal{O})$. Análogamente se define el concepto de espacio afín euclidiano orientado $(\mathcal{A}, (\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle), \mathcal{O}, \rightarrow)$, que de forma simplificada se suele escribir $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$.*

Dados $p \in \mathcal{A}$ y $v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ unitario ($\|v\| = 1$), el conjunto

$$L_p(v) := \{p + \lambda v : \lambda \geq 0\} \subseteq p + L(\{v\})$$

es la *semirrecta con origen p en la dirección de v* . Fijada una orientación \mathcal{O} en $\vec{\mathcal{A}}$ y tomados $p \in \mathcal{A}$ y $u, v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ unitarios, el ángulo orientado que forman las semirrectas $L_p(u), L_p(v)$ (en ese orden) se define como

$$\angle_o(L_p(u), L_p(v)) := \angle_o(u, v).$$

Proposición 3.66 *Fijada una orientación \mathcal{O} en $\vec{\mathcal{A}}$ y dados vectores $u, v \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ unitarios, existe un único vector unitario $w \in \vec{\mathcal{A}} \setminus \{0\}$ tal que*

$$\angle_o(u, w) = \angle_o(w, v) = \frac{1}{2}\angle_o(u, v).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $\{w_1 = u, w_2\}$ base ortonormal positiva en $(\vec{\mathcal{A}}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$. Recordemos que si $\angle_o(u, v) = \alpha$, el número α es el único real en $[0, 2\pi[$ tal que

$$v = \cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2.$$

Si definimos

$$w = \cos(\alpha/2)w_1 + \sin(\alpha/2)w_2,$$

claramente $\angle_o(u, w) = \alpha/2$. La proposición se sigue de la identidad

$$\angle_o(u, w) + \angle_o(w, v) = \angle_o(u, v) = \alpha;$$

ver Propiedades 3.6. ■

Definición 3.67 Sean $L_p(u_1)$ y $L_p(u_2)$ dos semirrectas en el plano afín euclidiano orientado $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ tales $\angle_o(L_1, L_2) \in]0, \pi[$. Por definición, la bisectriz que forman $L_p(u_1)$ y $L_p(u_1)$ (en ese orden) es la semirrecta

$$\mathfrak{b}_{p, u_1, u_2} := L_p(w),$$

donde $w \in \vec{\mathcal{A}}$ es el único vector unitario con $\angle_o(u_1, w) = \angle_o(w, u_2) = \frac{1}{2}\angle_o(u_1, u_2)$ en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$.

Observación 3.68 Es importante reparar en que el concepto de bisectriz sólo se ha definido para semirrectas $L_p(u_1), L_p(u_2)$ formando un ángulo orientado menor que un llano (esto es, en $]0, \pi[$) en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$, o equivalentemente, cuando la base ordenada $\{u_1, u_2\}$ es positiva en $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$.

La siguiente proposición identifica la bisectriz con el lugar de puntos equidistantes a las semirrectas.

Proposición 3.69 Sean $L_p(u_1)$ y $L_p(u_2)$ dos semirrectas en el plano afín euclidiano orientado $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ tales que $\angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) \in]0, \pi[$. Un punto $q \in \mathcal{A}$, $q \neq p$, pertenece a la bisectriz $\mathfrak{b}_{p, u_1, u_2}$ si y sólo si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

- (I) $\{u_1, \vec{pq}\}, \{\vec{pq}, u_2\}$ son bases positivas en $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$.
- (II) $d(q, p + L(\{u_1\})) = d(q, p + L(\{u_2\})) > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $\{w_1 = u_1, w_2\}$ base ortonormal positiva en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$. Si llamamos $\angle_o(u_1, u_2) = \alpha \in]0, \pi[$, sabemos que

$$u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)w_2 \quad (\sin(\alpha) > 0) \quad \text{y}$$

$$\mathfrak{b}_{p, u_1, u_2} = \{p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2) : \mu \geq 0\}.$$

Tomemos un punto $q \in \mathfrak{b}_{p, u_1, u_2}$, esto es, de la forma

$$q = p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2), \quad \mu > 0.$$

Como las bases

$$\{u_1, \vec{pq}\} = \{u_1, \cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2\} \quad \text{y}$$

$$\{\vec{pq}, u_2\} = \{\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2, u_2 = \cos(\alpha)u_1 + \sin(\alpha)w_2\}$$

son positivas (inducen la misma orientación que $\{u_1, w_2\}$), se sigue (i).

De otro lado, si llamamos $L_1 = p + L(\{u_1\})$ es fácil ver que la proyección ortogonal $\pi_{L_1}^\perp(q)$ coincide con el punto

$$q_1 := p + \mu \cos(\alpha/2)u_1 \in L_p(u_1) \subset L_1.$$

En efecto, simplemente obsérvese que

$$\overrightarrow{q_1 q} = \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_1)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2))} = \mu \sin(\alpha/2)w_2 \in L(\{u_1\})^\perp.$$

Por tanto, de la Proposición 3.16

$$d(q, L_1) = \|\overrightarrow{q_1 q}\| = \|\mu \sin(\alpha/2)w_2\| = \mu \sin(\alpha/2) > 0.$$

De forma similar, si llamamos $L_2 = p + L(\{u_2\})$ el punto

$$q_2 = p + \mu \cos(\alpha/2)u_2 \in L_p(u_2) \subset L_2$$

coincide con $\pi_{L_2}^\perp(q)$, toda vez que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q_2q} &= \overrightarrow{(p + \mu \cos(\alpha/2)u_2)(p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2))} = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2 - \cos(\alpha/2)u_2) = \\ &= \mu(\cos(\alpha/2)(1 - \cos(\alpha))u_1 + (\sin(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)\sin(\alpha))w_2) = \\ &= \mu \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2) \in L(\{u_2\})^\perp. \end{aligned}$$

Por tanto

$$d(q, L_2) = \|\overrightarrow{q_2q}\| = \|\mu \sin(\alpha/2)(\sin(\alpha)u_1 - \cos(\alpha)w_2)\| = \mu \sin(\alpha/2).$$

Esto demuestra que $d(q, L_1) = d(q, L_2) = \mu \sin(\alpha/2) > 0$, y por tanto (ii).

Observación 3.70 *Repárese en que para todo punto $q = p + \mu(\cos(\alpha/2)u_1 + \sin(\alpha/2)w_2) \in \mathfrak{b}_{p,u_1,u_2}$ ($\mu > 0$) hemos probado que*

$$\pi_{L_j}^\perp(q) = p + \mu \cos(\alpha/2)u_1 \in L_p(u_j),$$

donde como antes $L_j = p + L(\{u_j\})$, $j = 1, 2$.

Para el recíproco, supongamos ahora que $q \in \mathcal{A}$, $q \neq p$, satisface (i) y (ii). Si escribimos

$$q = p + \mu(\sin(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2),$$

donde $\mu = d(p, q)$ y $\beta \in [0, 2\pi[$, es fácil ver que la condición (i) equivale a que $\beta \in]0, \alpha[$, donde como antes $\alpha = \angle_o(u_1, u_2)$.

Observemos que como $d(q, L_1) = d(q, L_2) > 0$ entonces $q \notin L_1 \cup L_2$. Como por definición las rectas $q + L(\{u_j\})^\perp$ y L_j se cortan la proyección ortogonal $q_j := \pi_{L_j}^\perp(q)$, $j = 1, 2$, siendo además

$$d(q, q_1) = d(q, L_1) = d(q, L_2) = d(q, q_2) > 0,$$

los conjuntos $T_j = \{p, q, q_j\}$, $j = 1, 2$, definen sendos triángulos rectángulos. Al tener T_1 y T_2 uno de sus catetos de igual longitud (a saber, el $[q, q_1]$ de T_1 y el $[q, q_2]$ de T_2) y compartir la misma hipotenusa $[p, q]$, el Teorema de Pitágoras implica que los catetos $[p, q_1] \subseteq L_p(u_1)$ de T_1 y $[p, q_2] \subseteq L_p(u_2)$ de T_2 tienen también igual longitud. De aquí que la afinidad en $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que lleva

$$p \mapsto p, \quad q \mapsto q, \quad q_1 \mapsto q_2$$

es una isometría en $(\mathcal{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ satisfaciendo $h(T_1) = T_2$. Esto garantiza que T_1 y T_2 tengan los mismos ángulos en vértices correspondientes por h , y en particular, que tengan el mismo ángulo en \overrightarrow{p} (que claramente coincide con β). Nótese que por (i) las orientaciones naturales de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ utilizadas para calcular el ángulo β en el vértice p en T_1 y T_2 coinciden con la orientación \mathcal{O} fijada en $\overrightarrow{\mathcal{A}}$. Como consecuencia, la semirrecta $L_0 = L_p(\frac{1}{pq}\overrightarrow{pq})$ satisface $\angle_o(L_p(u_1), L_0) = \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = \beta$. Usando Propiedades 3.6 finalmente obtenemos que

$$\angle_o(L_p(u_1), L_0) + \angle_o(L_0, L_p(u_2)) = 2\beta = \angle_o(L_p(u_1), L_p(u_2)) = \alpha \in]0, \pi[.$$

Esto implica $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ y $q = p + \mu(\sin(\beta)u_1 + \cos(\beta)w_2) \in \mathfrak{b}_{p,u_1,u_2}$, concluyendo la prueba. ■

Definición 3.71 Sea $\{a, b, c\}$ es un triángulo en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, y fijemos en $\vec{\mathcal{A}}$ la orientación \mathcal{O} inducida por $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ (equivalente a $\{\vec{bc}, \vec{ba}\}$ y $\{\vec{ca}, \vec{cb}\}$). Las bisectrices en los vértices a, b y c se definen como

$$\mathbf{b}_a := \mathbf{b}_{a, \frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|}, \frac{\vec{ac}}{\|\vec{ac}\|}}, \quad \mathbf{b}_b := \mathbf{b}_{b, \frac{\vec{bc}}{\|\vec{bc}\|}, \frac{\vec{ba}}{\|\vec{ba}\|}}, \quad \mathbf{b}_c := \mathbf{b}_{c, \frac{\vec{ca}}{\|\vec{ca}\|}, \frac{\vec{cb}}{\|\vec{cb}\|}}.$$

Proposición 3.72 Si $\{a, b, c\}$ es un triángulo en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$, entonces entonces existe un único punto $I \in \mathcal{A}$ tal que

$$I = \mathbf{b}_a \cap \mathbf{b}_b \cap \mathbf{b}_c.$$

DEMOSTRACIÓN: Como siempre denotemos por

$$\hat{A} = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac}), \quad \hat{B} = \angle_o(\vec{bc}, \vec{ba}), \quad \hat{C} = \angle_o(\vec{ca}, \vec{cb}) \in]0, \pi[,$$

y llamemos \mathcal{O} a la orientación en \mathcal{A} inducida por cualquiera de las bases ordenadas $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}, \{\vec{bc}, \vec{ba}\}, \{\vec{ca}, \vec{cb}\}$ (es la misma).

Si consideramos $\{\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab}, w_2\}$ base ordenada ortogonal y positiva en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle, \mathcal{O})$ y escribimos

$$\frac{1}{\|\vec{ac}\|}\vec{ac} = \cos(\hat{A})\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab} + \sin(\hat{A})w_2,$$

tenemos que

$$\mathbf{b}_a := \mathbf{b}_{L_a(\vec{ab}), L_a(\vec{ac})} = \{a + \mu(\cos(\hat{A}/2)\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab} + \sin(\hat{A}/2)w_2) : \mu \geq 0\}.$$

Como

$$\cos(\hat{A}/2)\frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab} + \sin(\hat{A}/2)w_2 = \frac{\sin(\hat{A}/2)}{\sin(\hat{A})} \left(\frac{\vec{ab}}{\|\vec{ab}\|} + \frac{\vec{ac}}{\|\vec{ab}\|} \right)$$

y $\frac{\sin(\hat{A}/2)}{\sin(\hat{A})} > 0$, deducimos que

$$\mathbf{b}_a = \{a + \mu(\frac{1}{\|\vec{ac}\|}\vec{ac} + \frac{1}{\|\vec{ab}\|}\vec{ab}) : \mu \geq 0\}.$$

Análogamente $\mathbf{b}_c = \{c + \mu(\frac{1}{\|\vec{ca}\|}\vec{ca} + \frac{1}{\|\vec{cb}\|}\vec{cb}) : \mu \geq 0\}$.

No es difícil ver que las semirrectas \mathbf{b}_a y \mathbf{b}_c se cortan en un único punto, esto es, el punto de corte de las rectas que contienen a \mathbf{b}_a y \mathbf{b}_c está en $\mathbf{b}_a \cap \mathbf{b}_c$. Una forma sencilla de comprobarlo es considerar la única afinidad $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ determinada por

$$F(a) = (-1, 0), \quad F(c) = (1, 0), \quad F(b) = (-1, 2)$$

y darse cuenta de que las semirrectas $F(\mathbf{b}_a)$ y $F(\mathbf{b}_c)$ de \mathbb{R}^2 son secantes dentro del semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$; de ahí lo deseado. Por el mismo razonamiento $\mathbf{b}_a \cap \mathbf{b}_b, \mathbf{b}_b \cap \mathbf{b}_c \neq \emptyset$.

Llamemos I al punto de corte $\mathbf{b}_a \cap \mathbf{b}_c$.

Como $I \in \mathbf{b}_a$, de la Proposición 3.69

- $\{\vec{ab}, \vec{aI}\}, \{\vec{aI}, \vec{ac}\}$ son bases positivas en $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ y
- $d(I, a + L(\{\vec{ab}\})) = d(I, a + L(\{\vec{ac}\}))$.

Análogamente, como $I \in \mathfrak{b}_c$ entonces

- $\{\vec{ca}, \vec{cI}\}, \{\vec{cI}, \vec{cb}\}$ son bases positivas en $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$ y
- $d(I, c + L(\{\vec{ca}\})) = d(I, c + L(\{\vec{cb}\}))$.

Usando que $c + L(\{\vec{ca}\}) = a + L(\{\vec{ac}\})$, $a + L(\{\vec{ab}\}) = b + L(\{\vec{ba}\})$ y $c + L(\{\vec{cb}\}) = b + L(\{\vec{bc}\})$, deducimos de lo anterior que

$$d(I, b + L(\{\vec{ba}\})) = d(I, b + L(\{\vec{bc}\})).$$

Además, la base

$$\{\vec{bc}, \vec{bI}\} = \{-\vec{cb}, -\vec{cb} + \vec{cI}\}$$

induce la misma orientación que $\{\vec{cI}, \vec{cb}\}$, luego es positiva en $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{O})$, y lo mismo ocurre con $\{\vec{bI}, \vec{ba}\}$. Por la Proposición 3.69 concluimos que $I \in \mathfrak{b}_b$, esto es, $I \in \mathfrak{b}_a \cap \mathfrak{b}_b \cap \mathfrak{b}_c$. Esto concluye la demostración. ■

Definición 3.73 (Incentro) *Al punto $I \in \mathcal{A}$ intersección de las tres bisectrices de un triángulo $\{a, b, c\}$ en un plano afín euclídeo $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ se le llama incentro de $\{a, b, c\}$.*

Démonos cuenta de que la distancia desde el incentro a los tres lados de un triángulo $\{a, b, c\}$ es constante, y esta constante define el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo (con centro el incentro). Para ello téngase e cuenta que, por la Observación 3.70, la proyección ortogonal del incentro sobre la recta $a + L(\{\vec{ab}\})$ está contenida en $[a, b]$, e igual con los otros lados. Compárese esta propiedad geométrica con la que define al circuncentro.

3.7.3. El Teorema de Tales

Concluiremos el tema de espacios afines euclidianos demostrando el *Teorema de Tales* (siglo VII A.C.). Nuestro enunciado será con un lenguaje más moderno.

Teorema de Tales: *Sea $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ un espacio afín euclidiano de dimensión ≥ 2 . Sean Π_1, Π_2 y Π_3 tres hiperplanos en \mathcal{A} paralelos y distintos dos a dos. Sean R y S dos rectas distintas en \mathcal{A} no paralelas a los hiperplanos, y llamemos $r_i = \Pi_i \cap R$, $s_i = \Pi_i \cap S$, $i = 1, 2, 3$, a los correspondientes puntos de corte. Entonces*

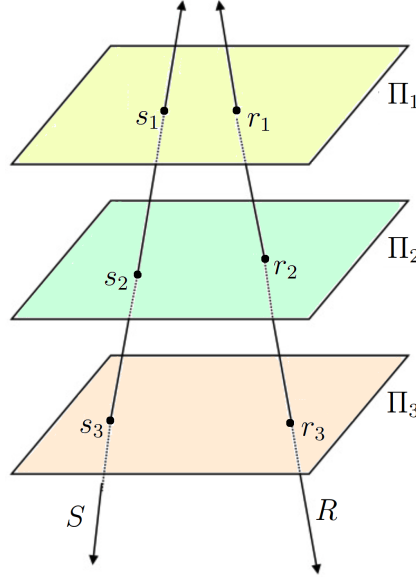
$$\frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\pi: \mathcal{A} \rightarrow S \subseteq \mathcal{A}$ a la proyección afín sobre S en la dirección $\vec{\Pi} := \vec{\Pi}_i$, $i = 1, 2, 3$ (no depende de i porque son paralelos). Por la definición de esta proyección afín,

$$\pi(r_i) = S \cap (r_i + \vec{\Pi}) = S \cap \Pi_i = s_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como r_1, r_2 y r_3 están alineados, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ único y no nulo tal que $\overrightarrow{r_1 r_3} = \lambda \overrightarrow{r_1 r_2}$, y por tanto

$$d(r_1, r_3) = \|\overrightarrow{r_1 r_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{r_1 r_2}\| = |\lambda| d(r_1, r_2).$$



Como π es afín

$$\vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_3)} = \overrightarrow{s_1 s_3} \quad \text{y} \quad \vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_2}) = \overrightarrow{\pi(r_1) \pi(r_2)} = \overrightarrow{s_1 s_2},$$

de donde al ser $\vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_3}) = \lambda \vec{\pi}(\overrightarrow{r_1 r_2})$ inferimos que $\overrightarrow{s_1 s_3} = \lambda \overrightarrow{s_1 s_2}$.

Así

$$d(s_1, s_3) = \|\overrightarrow{s_1 s_3}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{s_1 s_2}\| = |\lambda| d(s_1, s_2),$$

por lo que

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{d(s_1, s_2)}{d(s_1, s_3)} = \frac{d(r_1, r_2)}{d(r_1, r_3)}.$$

Esto concluye el teorema. ■

Ejercicio 3.74 Si abc y $a'b'c'$ son triángulos en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 , la condición necesaria y suficiente para que exista una semejanza $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaciendo $h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c'$ es que

$$\frac{d(a, b)}{d(a', b')} = \frac{d(a, c)}{d(a', c')} = \frac{d(b, c)}{d(b', c')}.$$

SOLUCIÓN: Si existiese una semejanza $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ de razón $r > 0$ tal que $h(a) = a', h(b) = b', h(c) = c'$, entonces $d(a', b') = d(h(a), h(b)) = rd(a, b)$, y análogamente $d(a', c') = rd(a, c)$, $d(b', c') = rd(b, c)$. Por tanto las identidades

$$\frac{d(a, b)}{d(a', b')} = \frac{d(a, c)}{d(a', c')} = \frac{d(b, c)}{d(b', c')}$$

son triviales.

Para el recíproco consideremos triángulos abc y $a'b'c'$ tales que

$$\frac{d(a, b)}{d(a', b')} = \frac{d(a, c)}{d(a', c')} = \frac{d(b, c)}{d(b', c')}.$$

Tras con un conveniente movimiento rígido podemos suponer que:

(I) $a = a'$ y $\overrightarrow{ab'} = r\overrightarrow{ab}$ para algún $r > 0$, y

(II) $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ y $\{\vec{ab}, \vec{ac'}\}$ (ó $\{\vec{ab}, \vec{ac}\}$ y $\{\vec{ab'}, \vec{ac'}\}$) son bases positivas de \mathbb{R}^2 .

Llamemos $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ a la homotecia de centro a y razón r . Como las semejanzas son el resultado de componer movimientos rígidos y homotecias (da igual el orden) y de (i) las identidades $h(a) = a'$, $h(b) = b'$ son triviales, bastará con probar que $h(c) = c'$.

Observemos que de nuestras hipótesis

$$\frac{1}{r} = \frac{\|\vec{ac}\|}{\|\vec{ac'}\|} = \frac{\|\vec{bc}\|}{\|\vec{b'c'}\|}.$$

Un cálculo directo nos da que

$$\|\vec{b'c'}\|^2 = \|\vec{b'a} + \vec{ac'}\|^2 = \|\vec{b'a}\|^2 + \|\vec{ac'}\|^2 + 2\langle \vec{b'a}, \vec{ac'} \rangle = r^2\|\vec{ba}\|^2 + r^2\|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{b'a}, \vec{ac'} \rangle.$$

Como también

$$\|\vec{b'c'}\|^2 = r^2\|\vec{bc}\|^2 = r^2\|\vec{ba} + \vec{ac}\|^2 = r^2(\|\vec{ba}\|^2 + \|\vec{ac}\|^2 + 2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle),$$

deducimos que $r^2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = \langle \vec{b'a}, \vec{ac'} \rangle$, de donde teniendo en cuenta que $\vec{ab'} = r\vec{ab}$ nos queda $r^2\langle \vec{ba}, \vec{ac} \rangle = r\langle \vec{ba}, \vec{ac'} \rangle$, esto es,

$$\langle \vec{ba}, \vec{ac'} \rangle = \langle \vec{ba}, r\vec{ac} \rangle.$$

Concluimos en resumen que:

- $r\vec{ac}, \vec{ac'}$ son dos vectores del mismo módulo; usar que $\|\vec{ac'}\| = r\|\vec{ac}\|$.
- $\langle \vec{ab}, \vec{ac'} \rangle = \langle \vec{ab}, r\vec{ac} \rangle$.
- $\{\vec{ab}, r\vec{ac}\}$ y $\{\vec{ab}, \vec{ac'}\}$ son bases positivas de \mathbb{R}^2 .

Por tanto los ángulos orientados

$$\angle_o(\vec{ab}, r\vec{ac}) = \angle_o(\vec{ab}, \vec{ac'})$$

y $\vec{ac'} = r\vec{ac}$, esto es, $h(c) = c'$ como queríamos demostrar. ■