Análisis Matemático II

Tema 13: Ejercicios propuestos

1. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq \text{mín}\{ e^y , 1 , e^{1-y} \} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible y calcular su área.

2. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en Ω y calcular su integral.

   a) $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2 , \quad y^2 \leq 2x \right\}$,
   $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \forall\, (x,y) \in \Omega$

   b) $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 , \quad x^2 + y^2 \leq 2\,x \right\}$,
   $f(x,y) = x \quad \forall\, (x,y) \in \Omega$

   c) $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x < y < z \right\}$,
   $f(x,y) = e^{-(x+y+z)} \quad \forall\, (x,y,z) \in \Omega$

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto Ω.

   a) $\Omega =]\, 0 \,,\, \pi/2 \,[\times \mathbb{R}^+$, $f(x,y) = \dfrac{\cos(x\,y)}{\left(1 + y^2\right)\sqrt{\text{sen}\ x}} \quad \forall\, (x,y) \in \Omega$

   b) $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $f(x,y) = \left(x - y \right) e^{-(x-y)^2} \quad \forall\, (x,y) \in \Omega$

   c) $\Omega = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \dfrac{\cos x + \cos y + \cos z}{\left(1 + x^2 + y^2 + z^2 \right)^3} \quad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

4. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_0^+ \right)^3 \ : \ x + y + z \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

es medible y calcular su volumen.