Relación de problemas 2:
Espacio Afín Euclídeo.

1. Sean $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo y $\mathcal{S}$ un subespacio afín suyo. Dado un punto $p \in \mathcal{A}$ demuestra que existe $q_0 \in \mathcal{S}$ tal que
$$d(p, q_0) = d(p, \mathcal{S}) := \text{ínf}\{d(p, q) : \ q \in \mathcal{S}\}.$$

2. Dados los siguientes pares de rectas de $\mathbb{R}^2$, estudia su posición relativa. Si se cortan, determina el ángulo que forman; en otro caso, calcula la distancia entre ellas.
   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$.
   b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\}$, $S = \{(2\lambda, 1 + 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, consideramos el producto escalar definido como $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$. Dotamos $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de la estructura afín canónica (que lo convierte en un espacio afín euclídeo) y consideramos las siguientes rectas afines:
$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 5, \ p''(8) = 4\} \quad \text{y} \quad T = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(0) = 0, \ p'(1) = 4\}.$$
   Comprueba que S y T se cortan en un punto, y calcula el ángulo que forman.

4. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, consideramos el producto escalar definido como $\langle M, N\rangle = \text{traza}(M^t N)$. Dotamos $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ de la estructura afín canónica (que lo convierte en un espacio afín euclídeo). Calcula el ángulo que forman los siguientes hiperplanos afines:
$$S = \{M \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(M) = 2\} \qquad \text{y} \qquad T\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid a = 1\right\}.$$

5. En $\mathbb{R}^2$ consideramos dos triángulos $T_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $T_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$. Demuestra que:

   a) Existen seis aplicaciones afines de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que llevan T_1 en T_2.

   b) Una de las aplicaciones afines anteriores $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es isometría si y sólo si
$$d(a_i, a_j) = d(f(a_i), f(a_j)), \qquad \text{para cualesquiera } i, j \in \{1, 2, 3\},$$
   donde $d(\cdot, \cdot)$ es la función distancia de $\mathbb{R}^2$.

6. En $\mathbb{R}^3$, considera el plano afín $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = -1\}$. Sea $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría respecto de Π. Calcula la imagen mediante s de la recta dada por las ecuaciones $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = z - 1$.

7. Encuentra, si existe, un movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ que lleve la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ en la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, y la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ en a recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.

8. Sean f_1, f_2 las simetrías de $\mathbb{R}^2$ respecto de las rectas $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 2\}$ y $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 1\}$, respectivamente. Calcula $f_1 \circ f_2$ y descríbela geométricamente.

9. Considera un espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ de dimensión 3, y sea f un movimiento rígido de $\mathcal{A}$ tal que $f(1, 0, 1) = (2, -3, 1)$ en coordenadas de un sistema de referencia euclídeo fijo. Si sabemos que f es la simetría respecto de un plano, calcula dicho plano.

10. Sea $\mathcal{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión 2, y sean R_1 y R_2 dos rectas de $\mathcal{A}$. Prueba que siempre es posible encontrar un movimiento rígido $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que lleve R_1 en R_2. Estudia de qué tipo es f, según la posición relativa de R_1 y R_2.

11. Sean p y q dos puntos distintos en un espacio afín euclídeo. Demuestra que existe una única simetría respecto de un hiperplano que lleva p en q.

12. Sean $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ dos rectas que se cruzan en un espacio afín euclídeo tridimensional $\mathcal{A}$. Demuestra que existe una única recta afín $\mathcal{R}$ que interseca de manera ortogonal a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Prueba además que la distancia de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ es exactamente la distancia entre los puntos dados por $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}$.

13. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (y - 2, x + 1)$. ¿Es f una isometría? En tal caso, clasifícala.

14. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2y - 1, -2x + 3)$. ¿Es f una isometría? En tal caso, clasifícala.

15. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las isometrías dadas, respectivamente, por las simetrías respecto de las rectas de ecuación $x + y = 0$ y $x + 2y = 2$.

    a) Calcula explícitamente f_1 y f_2 en coordenadas usuales.

    b) Clasifica la isometría $g = f_1 \circ f_2$.

16. Demuestra que las siguientes aplicaciones son movimientos rígidos del plano y clasifícalos.

    a) $f(x, y) = (3 - 3x/5 + 4y/5, 1 - 4x/5 - 3y/5)$.

    b) $f(x, y) = (x/2 - \sqrt{3}\,y/2 + 1, \sqrt{3}\,x/2 + y/2 + 2)$.

    c) $f(x, y) = (-x/2 + \sqrt{3}\,y/2 + 1, \sqrt{3}\,x/2 + y/2 - 1)$.

    d) $f(x, y) = (3x/5 + 4y/5 + 2, 4x/5 - 3y/5 + 5)$.

17. Demuestra que las siguientes aplicaciones son movimientos rígidos del espacio y clasifícalos.

    a) $f(x, y, z) = (2 + y, x, 1 + z)$.

    b) $f(x, y, z) = (x/2 - \sqrt{3}\,z/2 + 2, y + 2, \sqrt{3}\,x/2 + z/2 + 2)$.

    c) $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.

    d) $f(x, y, z) = (-4x/5 + 3z/5 + 3, y + 4, 3x/5 + 4z/5 - 1)$.

    e) $f(x, y, z) = (2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, \sqrt{5}\,x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), -2x/3 - y/3 + 2z/3)$.

    f) $f(x, y, z) = (\sqrt{5}\,x/3 - 2y/(3\sqrt{5}) + 4z/(3\sqrt{5}), 2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}, -2x/3 - y/3 + 2z/3)$

18. Calcula en coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$ el giro centrado en $c = (1, 2)$ y de ángulo $2\pi/3$.

19. Calcula la simetría con deslizamiento respecto de la recta $x - y = 1$ de $\mathbb{R}^2$ y vector de desplazamiento $v = (-2, -2)$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación afín dada por

$$f(-1, -1) = (0, 0), \quad f(-1, -2) = (1, 0), \quad f(0, -1) = (0, 1).$$

    Demuestra que f es una isometría y clasifícala.

21. Sea $\mathcal{R}$ el sistema de referencia de $\mathbb{R}^2$ con origen en el punto $(1, 1)$ y base asociada $\{(1, 1), (-1, 1)\}$. Consideremos la aplicación afín f tal que, si (x, y) son las coordenadas de un punto genérico p en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, entonces las coordenadas de $f(p)$ en el sistema de referencia usual vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

    ¿Es f una isometría? En caso afirmativo, clasifícala.

22. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las isometrías dadas respectivamente por las simetrías respecto de los planos de ecuaciones $x + y = 1$ y $x - z = 2$.

    a) Calcula explícitamente f_1 y f_2 en coordenadas usuales.

    b) Clasifica la isometría $g = f_1 \circ f_2$.

23. Calcula en coordenadas usuales la isometría de $\mathbb{R}^3$ dada por el movimiento helicoidal alrededor de la recta $\mathcal{R} \equiv (1, 2, 1) + L(1, 0, -1)$ con giro de ángulo $\pi/2$ y vector de traslación $v = (-2, 0, 2)$.

24. Clasifica la siguiente isometría de $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 2, x - 2y + 2z - 2, 2x - y - 2z - 4).$$

25. Calcula la simetría con deslizamiento respecto del plano de ecuación $x + y + z = 1$ de $\mathbb{R}^3$ y con vector de traslación $v = (2, -1, -1)$.

26. Clasifica la isometría de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x+2y+z+3, -2x+y+2z, -x+2y-2z-3).$$

27. Calcula la isometría de $\mathbb{R}^3$ dada por la composición de un giro de ángulo $\pi/2$ respecto del eje $\mathcal{R} \equiv (1,2,0)+L(0,1,0)$ y la simetría respecto del plano $y=-1$.

28. Sea $\mathcal{R}$ es el sistema de referencia con origen en el punto $(1,0,1)$ y base asociada $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Determina si la siguiente aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, que en coordenadas respecto del sistema de referencia afín $\mathcal{R}$ está dada por

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} -9 \\ 16 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

es una isometría y, en caso afirmativo, clasifícala.

29. Demuestra que la composición de dos simetrías respecto de dos puntos distintos es una traslación.

30. Sea T un triángulo en un espacio afín euclídeo $\mathcal{A}$ con vértices $a,b,c \in \mathcal{A}$. La recta que pasa por el vértice a y con vector director

$$v_a = \frac{1}{\|\overrightarrow{ab}\|}\overrightarrow{ab} + \frac{1}{\|\overrightarrow{ac}\|}\overrightarrow{ac}$$

la llamamos bisectriz que pasa por a. Si se definen de manera análoga las bisectrices que pasan por los vértices b y c, prueba que las tres rectas se cortan en un mismo punto, que llamaremos incentro del triángulo.

31. Calcula el baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro del triángulo de $\mathbb{R}^2$ que tiene por vértices a los puntos $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$.

32. ¿Está el incentro de cualquier triángulo alineado con el baricentro, ortocentro y circuncentro?