# Práctica 2. Diferenciabilidad

## Ejercicios resueltos

**1.** Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, de los campos escalares $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos de la siguiente forma, donde $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\textbf{(a)} \qquad f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^2 + y^4} \quad \forall\,(x,y) \in U\,, \qquad f(0,0) = 0$$

$$\textbf{(b)} \qquad g(x,y) = \frac{x^2\,y^2}{x^2 + y^4} \quad \forall\,(x,y) \in U\,, \qquad g(0,0) = 0$$

$$\textbf{(c)} \qquad h(x,y) = \frac{x^2\,y^2}{x^2 + y^2} \quad \forall\,(x,y) \in U\,, \qquad h(0,0) = 0$$

**Solución**

**(a.1).** Tenemos claramente que $f\big|_U \in C^1(U)$, por tratarse de una función racional. El conjunto $\{(0,0)\}$, con un solo punto, es cerrado, así que $U$ es abierto. Por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, vemos que $f$ es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de $U$. De hecho,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x\,y\,(x^2 + y^4) - 2\,x^3\,y}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2\,x\,y^5}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall\,(x,y) \in U \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\,(x^2 + y^4) - 4\,x^2\,y^4}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{x^4 - 3\,x^2\,y^4}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall\,(x,y) \in U$$

**(a.2).** Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ es claro que $f(x,0) = f(0,y) = 0$, luego $f$ es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad \text{es decir,} \quad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

**(a.3).** Con el fin de estudiar la diferenciabilidad de $f$ en el origen, consideramos la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2\,y}{(x^2 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall\,(x,y) \in U$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$\varphi(x,x) = \frac{x^3}{\left(x^2 + x^4\right)\sqrt{2\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(1 + x^2\right)}$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x,x) = 1/\sqrt{2} \neq 0$. Como uno de los límites radiales de $\varphi$ en el origen no es $0$, no se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = 0$, luego $f$ no es diferenciable en el origen.

Puesto que $f$ es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, si una de sus derivadas parciales fuese continua en el origen, entonces $f$ sería diferenciable en el origen. Por tanto, ninguna de las dos derivadas parciales de $f$ es continua en el origen.

**(a.4).** Observamos finalmente que $f$ es continua en el origen, como vimos ya en la práctica 1. De hecho, para $(x,y) \in U$, es obvio que $x^2 \leq x^2 + y^4$, luego

$$\left| f(x,y) \right| = |y| \, \frac{x^2}{x^2 + y^4} \leq |y| \qquad \forall \, (x,y) \in U$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

En resumen, $f$ es continua y parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en $U$ pero no en el origen. Ambas derivadas parciales de $f$ son continuas en $U$, pero ninguna de ellas es continua en el origen. ■

**(b.1).** El mismo razonamiento usado para $f$ prueba que $g$ es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de $U$. Esta vez,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2\,x\,y^2\,(x^2 + y^4) - 2\,x^3\,y^2}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2\,x\,y^6}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall \, (x,y) \in U \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2\,x^2\,y\,(x^2 + y^4) - 4\,x^2\,y^5}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{2\,x^2\,y\,(x^2 - y^4)}{(x^2 + y^4)^2} \quad \forall \, (x,y) \in U$$

**(b.2).** Puesto que $g(x,0) = g(0,y) = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, vemos también que $g$ es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

**(b.3).** Para $(x,y) \in U$, usando que $x^2 \leq x^2 + y^4$, y también $|x^2 - y^4| \leq x^2 + y^4$, obtenemos que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| \leq 2\,|y| \, \frac{x^2\,|x^2 - y^4|}{(x^2 + y^4)^2} \leq 2\,|y|$$

Deducimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, luego $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ es continua en el origen.

Como $g$ es parcialmente derivable en $\mathbb{R}^2$, y su segunda derivada parcial es continua en el origen, deducimos que $f$ es diferenciable, luego continua, en el origen.

**(b.4).** Estudiemos la continuidad en el origen de la primera derivada parcial de $g$. Para ello usamos el cambio de variable $(x, y) = (t^2, t) \in \mathbb{R}^2$ con $t \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que $(t^2, t) \neq (0, 0)$ para $t \neq 0$, y que $(t^2, t) \to (0, 0)$ cuando $t \to 0$. Vemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t^2, t) = \frac{2\, t^2\, t^6}{(2\, t^4)^2} = \frac{1}{2} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^*$$

Por otra parte, es claro que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) = 0$, así que la función $\partial g / \partial x$ no tiene límite, luego no es continua, en el origen.

En resumen $g$ es diferenciable, luego también continua, en todo el plano. Su segunda derivada parcial es continua en $\mathbb{R}^2$, mientras que la primera es continua en $U$, pero no en el origen. ■

**(c.1).** El mismo razonamiento usado para $f$ y $g$ prueba que $h$ es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de $U$. Ahora tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{2\, x\, y^2 (x^2 + y^2) - 2\, x^3\, y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2\, x\, y^4}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall\, (x, y) \in U$$

y, por simetría,

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{2\, x^4\, y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \forall\, (x, y) \in U$$

**(c.2)** Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de nuevo tenemos $h(x, 0) = h(0, y) = 0$, luego $h$ es parcialmente derivable en el origen, con

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$$

**(c.2).** Veremos que las derivadas parciales de $h$ son continuas en el origen. Basta trabajar con una de ellas, puesto que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y, x) \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Para todo $(x, y) \in U$, se tiene $y^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ luego

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right| = 2\, |\, x\, |\, \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2\, |\, x\, | \qquad \forall\, (x, y) \in U$$

de donde claramente deducimos que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial h}{\partial x}(0, 0)$$

es decir, $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ es continua en el origen y, como ya se ha dicho, igual le ocurre a $\dfrac{\partial h}{\partial y}$. La condición suficiente para la diferenciabilidad nos dice que $h$ es diferenciable en el origen.

En resumen, tenemos $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

**2.** Estudiar la continuidad, la diferenciabilidad y la continuidad de las derivadas parciales, del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^3 (y-1)^2}{x^2 + |y-1|} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}, \qquad f(0,1) = 0$$

**Solución**

**(a).** Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$, que es un conjunto cerrado, por ser la imagen inversa de $\{1\}$ por la función continua $(x,y) \mapsto y$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, con lo que el conjunto $U = \mathbb{R}^2 \setminus A$ es abierto. Vemos que $f\big|_U \in C^1(U)$, por ser el cociente de dos funciones de clase $C^1$ en $U$. Concretamente, el numerador es una función polinómica y el denominador es la suma de otra función polinómica con la función $(x,y) \mapsto |y-1|$, de $U$ en $\mathbb{R}$, que es composición de otra función polinómica, que toma valores en $\mathbb{R}^*$, con el valor absoluto, una función de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^*$. Como $U$ es abierto, por el carácter local de la diferenciabilidad y de la continuidad, deducimos que $f$ es diferenciable, luego continua, y sus derivadas parciales son continuas, en todo punto de $U$. Concretamente, para todo $(x,y) \in U$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2(y-1)^2\big(x^2 + |y-1|\big) - 2x^4(y-1)^2}{\big(x^2+|y-1|\big)^2} \\
&= \frac{x^2(y-1)^2\big(x^2 + 3|y-1|\big)}{\big(x^2+|y-1|\big)^2} \qquad \text{y} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2x^3(y-1)\big(x^2 + |y-1|\big) - x^3(y-1)^2\big(|y-1|/(y-1)\big)}{\big(x^2+|y-1|\big)^2} \\
&= \frac{x^3(y-1)\big(2x^2 + |y-1|\big)}{\big(x^2+|y-1|\big)^2}
\end{aligned}$$

**(b).** Fijemos ahora un punto del conjunto $A$, que será de la forma $(a,1)$ con $a \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos $f(x,1) = f(a,1) = 0$ de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,1) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,1) - f(a,1)}{x-a} = 0$$

Por otra parte, para $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se tiene $f(a,y) = \dfrac{a^3(y-1)^2}{a^2 + |y-1|}$ de donde, si $a \neq 0$, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,1) = \lim_{y \to 1} \frac{f(a,y) - f(a,1)}{y-1} = \lim_{y \to 1} \frac{a^3(y-1)}{a^2 + |y-1|} = 0$$

igualdad también válida para $a = 0$, ya que $f(0,y) = f(0,1) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, $f$ es parcialmente derivable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y en los puntos de $A$ se tiene $\nabla f(a,1) = (0,0)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

**(c).** Veamos que las derivadas parciales de $f$ son continuas en todo punto $(a,1) \in A$ con $a \in \mathbb{R}$. Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, para la primera derivada parcial podemos usar, por ejemplo, las desigualdades $x^2 \leq x^2 + |y-1|$ y $x^2 + 3|y-1| \leq 3\big(x^2 + |y-1|\big)$. Suponiendo $y \neq 1$, tenemos:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = \frac{x^2 (y-1)^2 \big( x^2 + 3|y-1| \big)}{\big( x^2 + |y-1| \big)^2} \leq 3(y-1)^2$$

desigualdad que es evidente cuando $y = 1$, luego es válida para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De ella se deduce claramente que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,1)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,1)$, luego $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en el punto $(a,1)$.

Para la otra derivada parcial, usamos que $2x^2 + |y-1| \leq 2\big(x^2 + |y-1|\big)$ y, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \frac{x^3 (y-1) \big( 2x^2 + |y-1| \big)}{\big( x^2 + |y-1| \big)^2} \leq 2|x|\,|y-1|$$

de donde $\lim\limits_{(x,y)\to(a,1)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,1)$, así que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(a,1)$.

En resumen, hemos probado que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. ■

**3.** Probar que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \frac{x^6 \big( x^2 + y^2 \big)}{\big( y - x^2 \big)^2 + x^6} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

**Solución.**

**(a).** Considerando el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es obvio que $f\big|_U \in C^1(U)$, pues se trata de una función racional. El carácter local de la diferenciabilidad nos dice que $f$ es diferenciable en todo punto de $U$.

**(b).** Observamos que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $f(x,0) = f(0,y) = 0$, luego $f$ es parcialmente derivable en el origen con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

A poco que se piense, el cálculo de las derivadas parciales de $f$ en puntos de $U$ es laborioso, luego el estudio de su continuidad en el origen no parece fácil. Aprovechando que sólo interesa la diferenciabilidad de $f$ en el origen, la abordamos directamente.

Consideramos entonces la función $\varphi : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) \;&=\; \frac{f(x,y) \,-\, f(0,0) \,-\, \big(\nabla f(0,0) \,\big|\, (x,y)\big)}{\|\,(x,y)\,\|} \\
&=\; \frac{x^{6}\,(x^{2} \,+\, y^{2})}{\big((y - x^{2})^{2} \,+\, x^{6}\big)\,\sqrt{x^{2} \,+\, y^{2}}} \;=\; \frac{x^{6}\,\sqrt{x^{2} \,+\, y^{2}}}{(y - x^{2})^{2} \,+\, x^{6}} \qquad \forall\, x \in U
\end{aligned}$$

Usando que $x^{6} \,\leq\, (y - x^{2})^{2} \,+\, x^{6}$ obtenemos que

$$0 \,\leq\, \varphi(x,y) \,\leq\, \sqrt{x^{2} \,+\, y^{2}} \qquad \forall\,(x,y) \in U$$

de donde se deduce evidentemente que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) \,=\, 0$, luego $f$ es diferenciable en el origen y, en resumen, es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, como se quería. ■