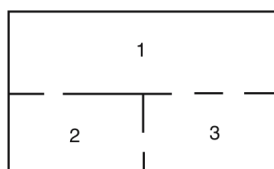


Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 22/23)

Relación de ejercicios 1, Matrices de estados y cadenas de Markov.

1. Un psicólogo lleva a cabo un experimento en el que 88 ratas se colocan de forma aleatoria en los compartimentos numerados 1, 2 y 3, en que ha sido dividida una caja tal y como se muestra en la siguiente figura



- Observe que hay cuatro puertas en esta configuración. Cada rata puede estar en tres estados posibles: se encuentra en el compartimento 1, 2 o 3. Supongamos que las ratas se pueden mover de un compartimento a otro o quedarse en el mismo compartimento y que la probabilidad de trasladarse de un compartimento a otro depende de la distribución de puertas que los conectan. Así una rata en el compartimento 1 tiene las probabilidades $P_{11} = 1/4$ de quedarse en el compartimento 1 o $P_{21} = 1/4$, y $P_{31} = 2/4$ de trasladarse, respectivamente, a los compartimentos 2 y 3. Determine la distribución a largo plazo de las ratas.
2. Una determinada planta puede presentar flores de uno de estos tres colores: azul (AA), verde (Aa) y amarillo (aa). Se considera el siguiente programa de polinización:
- (a) Las plantas de flores azules (AA) se fecundan con polen de flores amarillas (aa).
 - (b) Las plantas de flores verdes (Aa) se fecundan con polen de flores verdes (Aa).
 - (c) Las plantas de flores amarillas (aa) se fecundan con polen de flores azules (AA).
- ¿Cómo evoluciona a largo plazo la distribución de colores en las plantas?
3. En una universidad elitista del pasado se impartían estudios de Medicina, Farmacia y Derecho, y sólo había estudiantes varones (afortunadamente las cosas han cambiado). Durante generaciones los padres enviaban a su hijo primogénito a la misma universidad en que ellos estudiaron. Se ha estudiado la elección de carrera a lo largo del tiempo y se ha comprobado que: el 80% de los hijos de médicos estudiaron Medicina y el resto estudió Farmacia, el 40% de los hijos de farmacéuticos estudió Farmacia y el resto se decidió a partes iguales por Medicina o Derecho; y finalmente, los hijos de los abogados eligieron Derecho en un 70% Medicina en un 20% y Farmacia en un 10%. Estudia a largo plazo cuál será la distribución de estudiantes en estas tres carreras.
4. El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:
- (a) Calcule la matriz de de transición que determina la probabilidad de que el ascensor esté en un piso determinado.
 - (b) Determine la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos.
5. Los 20 niños y niñas de la clase de primero de infantil (3 años) tienen dos toboganes en su aula, que les gustan mucho, uno rojo y otro amarillo. Cada día se montan una sólo vez uno de los toboganes y van cambiando de uno a otro según la siguiente pauta: de los que un día utilizaron el rojo, un tercio pasa al amarillo, y de los que usaron el amarillo, un cuarto cambia al rojo, mientras que los restantes usan de nuevo el mismo tobogán. Describa la evolución de la distribución de los niños en los dos toboganes, y proporcione la distribución asintótica. ¿Qué tobogán les gusta más?

6. Supongamos que en el ejercicio 1, las ratas siempre se mueven de un compartimento a otro, por supuesto la probabilidad de trasladarse de un compartimento a otro depende de la distribución de puertas que los conectan. Así una rata en el compartimento 1 tiene las probabilidades $P_{11} = 0$, $P_{21} = 1/3$, y $P_{31} = 2/3$ de trasladarse, respectivamente, a los compartimentos 1,2 y 3. Determine la distribución a largo plazo de las ratas.
7. Una compañía divide a sus empleados en tres departamentos: Producción, Marketing y Ventas. Anualmente, se produce una reorganización en la distribución de empleados por departamentos, de forma que la mitad de los trabajadores permanecen en el departamento en el que están, mientras que el resto cambia de departamento siguiendo las siguientes directrices: los que dejan el departamento de Producción se distribuyen a partes iguales entre los dos departamentos restantes, los que dejan Marketing van a Ventas y los que dejan Ventas van a Producción.
- (a) Describa el modelo matemático.
 - (b) Calcule la distribución a largo plazo de los empleados por departamento.
8. Para beber agua un animal puede ir a un lago, a un río o a una alberca. Se sabe que si toma agua en el río al día siguiente no vuelve al río, y la probabilidad de que beba agua en el lago o en la alberca es la misma. Si bebe agua en el lago, al día siguiente siempre va al río, y si bebe en la alberca, al día siguiente repite en la alberca o bebe en el lago con igual probabilidad.
- (a) Describa con un grafo el problema anterior.
 - (b) Estudie la distribución asintótica de la probabilidad de que el animal beba agua en cada uno de los tres sitios.