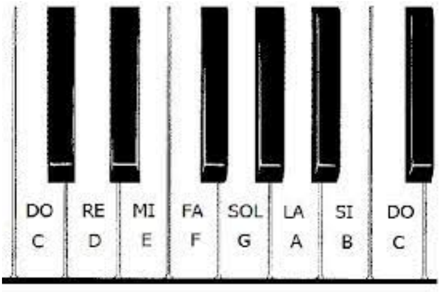
Matemáticas en la formación de escalas musicales.

Estructura de la escala músical

Do	1	Re	1	Mi	$\frac{1}{2}$	Fa	1	Sol	1	La	1	Si	$\frac{1}{2}$	Do
C		D		E		F		G		A		B		C

- Guido D'Arezzo, 991?- 1033?), Ut-Re-Mi-Fa-Sol-La-Sa-Ut sobre un himno a San Juan Bautista llamado "Ut queant laxis" (Pablo el Diácono)
- Anselmo de Flandes, Sa$\rightarrow$ Si.
- Giovanni Battista Doni, Ut$\rightarrow$ Do,



Aspectos físicos de la música.

La ecuación de ondas en una recta.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Donde x es posición, t tiempo, c velocidad de propagación (Hz).

Sonidos puros

$$u(x,t) = A \operatorname{sen}(2\pi\omega t) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\ell} x).$$

- A es la intensidad máxima.
- ω es la frecuencia.
- ℓ es la longitud entre dos nodos consecutivos.

$$\omega = \frac{c}{2\ell}.$$

Mayor frecuencia, menor longitud.

Acoplamiento de nodos

- Dado una "cuerda" $c > 0$ y una longitud L es posible generar sonidos puros de frecuencias

$$\omega^n = n\frac{c}{2L}$$

- Dos números positivos ω^1, ω^2 se dicen conmensurables si el cociente es racional. Es decir

linealmente independientes en $\mathbb{R}^k$

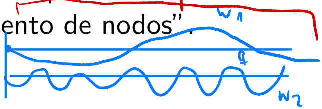
$$\frac{\omega^1}{p} = \frac{\omega^2}{q}$$

  para p, q naturales positivos primos entre sí. Se dice que las frecuencias estan en la proporción $p : q$.

- Si llamo $\tilde{\omega} = \frac{\omega^1}{p} = \frac{\omega^2}{q}$ Ambas frecuencias pueden obtenerse en una cuerda longitud $L = \frac{c}{\tilde{\omega}}$ "Acoplamiento de nodos".

$\tilde{w}$

Acoplamiento



- Gradus Suavitatis (Grado de simpatía) Tentamen novæ theoriæ musicæ, Euler 1739.
- Si α_1 α_2, ..., α_k es la descomposición en primos de *pq*, el gradus Suavitatis se obtiene

1:1 1
1:2 2=2-1+1
1:4 3=2+2-2+1

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k - k + 1$$

grado simpatía

45 = 3·3·5
3+3+5 − 3+1 = 9

Gr. II.	2:5.	Gr. IIX.	3:7.	3:64.	1:160.
1:2.	1:18.	1:14.	1:25.	1:256.	5:32.
Gr. III.	2:9.	2:7.	1:28.	Gr. X.	1:162.
1:3.	1:24.	1:30.	4:7.	1:42.	2:81.
1:4.	3:8.	2:15.	1:45.	3:14.	1:216.
Gr. IV.	1:32.	3:10.	5:9.	6:7.	8:27.
1:6.	Gr. VII.	5:6.	1:60.	1:50.	1:288.
2:3.	1:7.	1:40.	3:20.	2:25.	9:32.
1:8.	1:15.	5:8.	4:15.	1:56.	1:384.
Gr. V.	3:5.	1:54.	5:12.	7:8.	3:128.
1:5.	1:20.	2:27.	1:80.	1:90.	1:512.
1:9.	4:5.	1:72.	5:16.	2:45.	
1:12.	1:27.	8:9	1:81.	5:18.	
3:4.	1:36.	1:96.	1:108.	9:10.	
1:16.	4:9.	3:32.	4:27.	1:120.	
Gr. VI.	1:48.	1:128.	1:144.	3:40.	
1:10.	3:16.	Gr. IX.	9:16.	5:24.	
	1:64.	1:21.	1:192.	8:15.	

W   3W/2   2W   3W   4W
Do   Sol   Do   Sol   Do

1/2 → Bajar un escalón
Proporción: 2:3, 3:2

En esta tabla falta el Gradus 1 que corresponde al "unisono" 1 : 1.

Sonidos que suenan bien juntos.

Pitagoras (569 a.C.-475 a.C.)

Gradus (1:2)

Al dividir la longitud por 2 la frecuencia se multiplica por 2 y obtiene la misma nota tras una escala.

Gradus (1:4)

Dividir por 4 la longitud es dividir dos veces dos veces por 2. La resultante es la misma nota tras 2 escalas.

Gradus (2:3)

Al multiplicar por $\frac{3}{2}$ obtenemos la llamada quinta justa.

El intervalo de quinta justa

Se obtiene tras multiplicar por $\frac{3}{2}$,

Escala

1. $\mathrm{Do}^{x} \to \mathrm{Sol}^{x}$,
2. $\mathrm{Re}^{x} \to \mathrm{La}^{x}$,
3. $\mathrm{Mi}^{x} \to \mathrm{Si}^{x}$, → Misma escala
4. $\mathrm{Fa}^{x} \to \mathrm{Do}^{x+1}$,
5. $\mathrm{Sol}^{x} \to \mathrm{Re}^{x+1}$,
6. $\mathrm{La}^{x} \to \mathrm{Mi}^{x+1}$,
   - La quinta $\mathrm{Si}^{x} \to \mathrm{Fa}^{x+1}$, no es una quinta justa. "Quinta diablo".
7. $\mathrm{Si}^{x} \to \mathrm{Fa}\sharp^{x+1}$.

El intervalo de quinta justa descendente

Tras multiplicar por $\frac{2}{3}$ se obtiene una quinta justa descendente,

1. $\text{Do}^x \to \text{Fa}^{x-1}$,
2. $\text{Re}^x \to \text{Sol}^{x-1}$,
3. $\text{Mi}^x \to \text{La}^{x-1}$,
    - La quinta $\text{Fa}^x \to \text{Si}^{x-1}$, no es una quinta justa.
4. $\text{Fa}^x \to \text{Si}\flat^{x-1}$,
5. $\text{Sol}^x \to \text{Do}^x$,
6. $\text{La}^x \to \text{Re}^x$,
7. $\text{Si}^x \to \text{Mi}^x$.

Re^3 tiene afinación $\omega \sim 293.665$ ciclos/segundo.

Do^3		Re^3		Mi^3	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	Do^4
		ω										
							$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$			
$\frac{8}{9}\omega$				$\frac{9}{8}\omega$								$\frac{16}{9}\omega$
					$\frac{32}{27}\omega$						$\frac{27}{16}\omega$	

Problema.

Escala pentatónica (música oriental)

Do^3		Re^3		Mi^3	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	Do^4
$\frac{8}{9}\omega$		ω		$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{32}{27}\omega$		$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$		$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{16}{9}\omega$

- Un tono se obtiene al multiplicar por $\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3} = 1.125$, es decir $3^2 : 2^3$, que pertenece al grupo 8.
- Un semitono se obtiene al multiplicar por

$$\frac{\frac{32}{27}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{2^5}{3^3}}{\frac{3^2}{2^3}} = \frac{2^8}{3^5} = 1.053497942.$$

- 2 Semitonos no se corresponden con un tono $\frac{2^{16}}{3^{10}} = 1.1099.$

La escala pentatónica

Partiendo de Re^3 de frecuencia $\omega \sim 293.665$ ciclos/segundo:

Do^3		Re^3		Mi^3	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	Do^4
$\frac{8}{9}\omega$		ω		$\frac{9}{8}\omega$			$\frac{4}{3}\omega$		$\frac{3}{2}\omega$			$\frac{16}{9}\omega$

- Tono=Multiplicar por $\frac{9}{8}$, $= 1{,}125$
- Tono+Semitono=Multiplicar por $\frac{32}{27}$.

- 3 tonos $= \left(\frac{9}{8}\right)^3$
- 2 tono + semitono $= \left(\frac{32}{27}\right)^2$

La escala cromática

La ley de quintas se puede continuar. Teniendo en cuenta, para el caso ascendente:

- Si^x $\to$ Fa$\sharp$ $^{x+1}$,
- Do$\sharp^x$ $\to$ Sol$\sharp^x$,
- Re$\sharp^x$ $\to$ La$\sharp^x$,
- ... Si b^x $\longrightarrow$ Fa^{x+1}

y en el descendente:

- Fa^x $\to$ Si$\flat^{x-1}$,
- Do$\flat^x$ $\to$ Fa$\flat^x$,
- Re$\flat^x$ $\to$ La$\flat^x$,
- ...

y se llega a una escala de 17 notas:

Do Re$\flat$-Do$\sharp$ Re Mi$\flat$-Re$\sharp$ Mi Fa Sol$\flat$-Fa$\sharp$
Sol La$\flat$-Sol$\sharp$ La Si$\flat$-La$\sharp$ Si Do

$$\text{Do} \quad \text{Re}\flat\text{-Do}\sharp \quad \text{Re} \quad \text{Mi}\flat\text{-Re}\sharp \quad \text{Mi} \quad \text{Fa} \quad \text{Sol}\flat\text{-Fa}\sharp$$
$$\text{Sol} \quad \text{La}\flat\text{-Sol}\sharp \quad \text{La Si}\flat\text{-La}\sharp \quad \text{Si Do}$$

Las notas Re$\flat$-Do$\sharp$, Mi$\flat$-Re$\sharp$ etc... difieren muy poco.

- Semitono diatónico. Notas de diferente nombre. Ej Mi $\to$ Fa, Do $\to$ Re$\flat$, Do$\sharp$ $\to$ Re. Tiene el valor $\frac{2^8}{3^5}$.
- Semitono cromático. Notas del mismo nombre.
  Ej Do $\to$ Do$\sharp$, Re$\flat$ $\to$ Re.
- El semitono cromático es algo mayor que el diatónico.

$$\frac{\text{Tono} = \frac{3^2}{2^3}}{\text{Semitono diatónico} = \frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^7}{2^{11}} = \text{Semitono cromático},$$

$$\frac{2^8}{3^5} \sim 1.0535 < \frac{3^7}{2^{11}} \sim 1.0679$$

Coma Pitagórica.

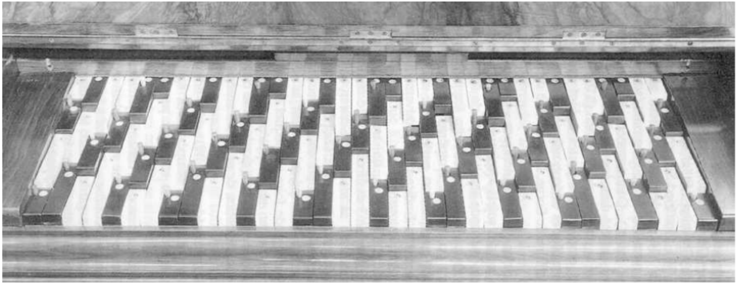
- Una coma pitagórica es la diferencia entre un semitono cromático y uno diatónico.

$$\frac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

- Aproximadamente 9 comas es un tono.

$$8 \text{ Comas} = 1.1145 < \text{Un Tono} = 1.125 < 9 \text{ Comas} = 1.1297$$

Se puede continuar y hacer una escala de 52 notas.



- Armonio de voz de Colin Brown (1875).

Escala pitagórica referida a Do

- $\omega \sim 261.626$ ciclos/segundo, afinación de Do^3.

Do^3	Re^3	Mi^3	Fa^3	Sol^3	La^3	Si^3	Do^4
ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{81}{64}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{243}{128}\omega$	2ω

Escala temperada. (Johann Sebastian Bach 1685-1750)

Consiste en dividir la octava en doce intervalos equidistantes.
Sea α la distancia de un semitono: (tomo ω la afinación de Do^3)

Do^3		Re^3		Mi^3	Fa^3		Sol^3		La^3		Si^3	Do^4
ω		$\alpha^2\omega$		$\alpha^4\omega$	$\alpha^5\omega$		$\alpha^7\omega$		$\alpha^9\omega$		$\alpha^{11}\omega$	$\alpha^{12}\omega$

- La ecuación $\alpha^{12} = 2$, se resolvió con la ayuda de los logarítmos que fueron estudiados por: John Napier de Merchiston, 1550-1617.
- El cociente entre dos frecuencias siempre es irracional.
- Leonhard Euler 1707-1783, estaba familiarizado con el concepto de la escala bien temperada, en la que las proporciones entre notas son números irracionales. Sin embargo, argumentó que al oído humano no le molestan estas proporciones irracionales, ya que los números irracionales pueden aproximarse mediante proporciones de números enteros.

Modificación de la escala pitagórica.

$\omega \sim 261{,}626$ ciclos/s afinación de Do^3

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{81}{64}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{27}{16}\omega$	$\frac{243}{128}\omega$
ω	$\frac{9}{8}\omega$	$\frac{5}{4}\omega$	$\frac{4}{3}\omega$	$\frac{3}{2}\omega$	$\frac{5}{3}\omega$	$\frac{15}{8}\omega$

- La segunda escala es una modificación bastante extendida de la escala Pitagórica llamada Justa Entonación. Tiene una afinación mejor referida a la tónica Do.
- Observar 4:5, tiene menos Gradus Suavitatis que 64:81, también 8:15 es mucho mejor que 128:243 y 3:5 es mejor que 16:27. Ahora, los tonos no son iguales.
- La construcción pitagórica está basada en los primos 2 y 3. Otras elecciones dan lugar a escalas musicales diferentes.

Ejercicios

440 La^3

220 La^2 1 tono 9/8

$\frac{8}{9}$ 220 Sol^2

440 La^3

220 La^2 1tono

$\frac{220}{2^{1/6}}$ $\sqrt{2}$ semitono

$2^{1/6}$ tono

- Está fijado por convicción en música. El valor del La^3 es 440 ciclos por segundo, calcula la frecuencia de afinación según la escala pitagórica y la escala temperada del Sol^2.
- Calcula el gradus Suavitatis entre las notas Fa y Si de la quinta Diablo de la escala pitagórica.
- ¿Cuantas comas pitagóricas tiene la octava?

- Calcula el gradus Suavitatis entre las notas Fa y Si de la quinta Diablo de la escala pitagórica.

Fa $\to$ Sol $\to$ La $\to$ Si

3 tonos $\to$ Diferencia

$$\left[\frac{9}{8}\right]^3 = \left[\frac{3^2}{2^3}\right]^3 = \frac{3^6}{2^9}$$

$2^9 : 3^6 \mid 2^9 : 3^6$

$2 \cdot 9 + 3 \cdot 6 - 15 + 1 = 22 \to$ grado savitatis

Do $\to$ Sol

$2:3$, $2+3-2+1=4$

- ¿Cuantas comas pitagóricas tiene la octava?

9 por tono 6 tonos $= 54$

$$\text{Coma} = \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^n . \quad \exists n \mid n < 2 \text{ y } n' \mid \quad 2 < \left(\frac{3^{12}}{2^9}\right)^{n+1}$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{3^{12}}{2^9}\right)} \approx 51{,}6$$

1 tono $< n <$ 2 tonos