GEOMETRÍA III

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

TEMA 3: Hipercuádricas Afines

La geometría griega se fundamentó en el uso de la regla y el compás, esto es, se centró esencialmente en aquellas construcciones basadas en la recta y el círculo. Las cónicas son objetos naturales desde este punto de vista, ya que se generan cortando el cono (superficie de revolución basada en la recta y la circunferencia) con planos. El trasfondo analítico en este contexto son las ecuaciones lineales y cuadráticas. Con esto queremos decir que los griegos resolvieron mediante la geometría axiomática o sintética euclidiana problemas que, con una formulación moderna o cartesiana, son modelados a través de las ecuaciones de segundo grado. Apolonio de Perga (Perga, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.), geómetra y astrónomo griego, recopiló en su obra *Sobre las secciones cónicas* todo el conocimiento clásico sobre este tipo de objetos, ofreciendo una descripción geométrica tan precisa de los mismos que ha llegado a ser considerado un precursor de la geometría cartesiana. A él debemos la solución completa de la ecuación general de segundo grado por medio de la geometría, y la introducción de la nomenclatura clásica de elipse, parábola e hipérbola para las distintas cónicas.

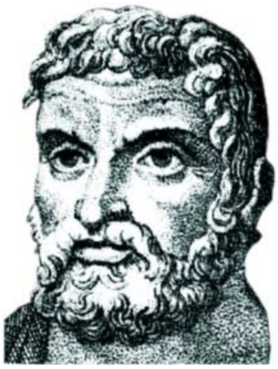


Figura 19: Apolonio de Perga

En esta sección vamos a presentar el tratamiento moderno de las hipercuádricas en espacios afines. Formalmente, las hipercuádricas se asociarán con los ceros de los polinomios de grado dos en varias variables, y nuestro objetivo fundamental en su estudio será su clasificación. Para ello tendremos que profundizar en aquellas herramientas del álgebra lineal relacionadas con procesos de diagonalización de matrices. Fundamentalmente, probaremos que toda matríz simétrica puede ser diagonalizada por congruencia a través de matrices del grupo afín.

4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Comenzaremos repasando la teoría clásica de diagonalización matrices y fijaremos alguna notación.

En lo que sigue denotaremos por $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ al espacio de las matrices cuadradas reales de orden n.

Definición 4.1 *Una matriz $D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (espacio de las matrices cuadradas de orden n) se dice* diagonal *si $d_{i,j} = 0$, $i \neq j$. Si $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ($k \leq n$) son números reales distintos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,* *denotaremos por* $D\big(a_1^{(n_1)},\dots,a_k^{(n_k)}\big)$ *a la matriz diagonal* $(d_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ *con entradas ordenadas en la diagonal*

$$(d_{1,1},\dots,d_{n,n}) = \big((a_1,\overset{n_1}{\dots},a_1),\dots,(a_i,\overset{n_i}{\dots},a_i),\dots,(a_k,\overset{n_k}{\dots},a_k)\big),$$

esto es,

$$D\big(a_1^{(n_1)},\dots,a_k^{(n_k)}\big) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1\mathrm{I}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & a_k\mathrm{I}_{n_k} \end{array}\right)$$

Definición 4.2 *Dada una matriz* $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *cuadrada de orden* n*, un número* $a \in \mathbb{R}$ *se dice un valor propio de* C *si existe* $y = (y_1,\dots,y_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tal que* $C \cdot y = ay$*. A tal vector* $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *se le denominará vector propio del valor propio* a*. Si* a *es un valor propio de* C*, al subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$

$$V_a = \{y \in \mathbb{R}^n : C \cdot y = a \cdot y\}$$

se le llamará subespacio propio de a*.*

Los valores propios de C coinciden son las raíces reales del polinomio característico

$$p_C(x) = \det\big(C - x \cdot \mathrm{I}_n\big)$$

de C. La *multiplicidad algebraica* de un valor propio a de C es, por definición, la multiplicidad $m_a \geq 1$ de a como raiz de $p_C(x)$. Asimismo, el entero $\dim V_a \geq 1$ es conocido como la *multiplicidad geométrica* de a. No es difícil ver que $\dim V_a \leq m_a$ para todo valor propio a de C.

Definición 4.3 (Semejanza de matrices) *Dos matrices* C_1 *y* C_2 *se dicen* semejantes *si existe* $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *tal que* $Q^{-1}C_1Q = C_2$*. La relación binaria de semejanza en* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *es de equivalencia. Una matriz* $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *se dice* diagonalizable por semejanza *si existe* $Q \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ *tal que* $Q^{-1}CQ$ *es diagonal.*

No es difícil probar que:

Teorema 4.4 *Una matriz* $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *es diagonalizable por semejanza si y solo si*

$$\sum_{i=1}^{k} \dim V_{a_i} = n,$$

donde $a_1,\dots,a_k$ *son sus valores propios. De forma equivalente,* $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *es diagonalizable por semejanza si y solo si si* $p_C(x)$ *descompone en* $\mathbb{R}$ *y* $m_a = \dim V_a$ *para todo valor propio* a *de* C*.*

Como consecuencia del Teorema 4.4, dos matrices C_1 y C_2 diagonalizables son semejantes si y solo si tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento estándar para la diagonalización por semejanza de una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es el siguiente. Resolviendo la ecuación $p_C(x) = 0$ se calculan los distintos valores propios $a_1,\dots,a_k$ de C, y para cada a_i se determina una base $B_i = \{u_1^i,\dots,u_{n_i}^i\}$ del subespacio propio V_{a_i}, donde hemos escrito $n_i = \dim V_{a_i}$. Finalmente se forma la matriz $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ que distribuye por columnas los vectores de la base ordenada

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_k = \{u_1^1 \dots, u_{n_1}^1, \dots, u_1^k, \dots, u_{n_i}^k\}$$

de $\mathbb{R}^n$, en la que claramente $Q^{-1}CQ = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big)$.

En lo que sigue denotemos por

$$\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) = \{C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\colon C = C^{\mathrm{t}}\}$$

al espacio de las matrices simétricas. El siguiente teorema recuerda que toda matriz simétrica es diagonalizable por semejanza, siendo sus subespacios propios mutuamente ortogonales en el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$, donde $\langle\, , \rangle$ es el producto escalar clásico

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y^{\mathrm{t}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 4.5 *Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica real de orden n, los siguientes enunciados son ciertos:*

- *C tiene al menos un valor propio real.*
- *Si $a \in \mathbb{R}$ es valor propio de C y $V_a^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subespacio ortogonal a V_a en $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ entonces $C \cdot v \in V_a^{\perp}$ para todo $v \in V_a^{\perp}$.*
- *Si $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ son valores propios de C distintos entonces $V_{a_1} \perp V_{a_2}$ en $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$.*
- *C es diagonalizable por semejanza.*

Dos matrices simétricas $C_1, C_2 \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ se dicen *ortogonalmente equivalentes* si existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que $C_2 = P^t \cdot C_1 \cdot P$. Como consecuencia de lo anterior es posible la diagonalización ortogonal de cualquier matriz simétrica en los términos que recoge el siguiente teorema.

Teorema 4.6 (Diagonalización ortogonal) *Toda matriz $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal, esto es, existe una matriz $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que*

$$P^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot P = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son los valores propios de C y $n_1, \ldots, n_k$ sus correspondientes multiplicidades (geométricas o algebraicas, coinciden).

Del Teorema 4.6 se concluye que dos matrices simétricas son ortogonalmente equivalentes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico, o equivalentemente, tienen los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

El procedimiento para realizar la diagonalización ortogonal $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ es el siguiente. Por el Teorema 4.5 la matriz C es diagonalizable por semejanza. Por el Teorema 4.4, el polinomio $p_C(x)$ descompone sobre $\mathbb{R}$ y podemos calcular sus distintas raíces $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ (valores propios de C). Para cada a_i buscamos una base $B_{a_i} = \{u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i\}$ de V_{a_i} (escribimos $n_i = \dim V_{a_i}$), a la que sometemos al procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt para el producto escalar $\langle\, , \rangle$ de $\mathbb{R}^n$, hasta generar una base ortonormal

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$$

de $(V_{a_i}, \langle\, , \rangle)$. Como

$$B' = B'_{a_1} \cup \ldots \cup B'_{a_k}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$, entonces la matriz ortogonal $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ que distribuye ordenadamente por columnas los vectores de B' satisface

$$P^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot P = D\big(a_1^{(n_1)}, \ldots, a_k^{(n_k)}\big).$$

Para acabar este repaso de conceptos recordaremos la diagonalización por congruencia, la más natural para el espacio de las matrices simétricas.

Definición 4.7 (Congruencia de matrices) *Dos matrices C_1 y C_2 se dicen* congruentes *si existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}}C_1Q = C_2$. La relación binaria de congruencia en $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ es de equivalencia. Una matriz $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ se dice* diagonalizable por congruencia *si existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}}CQ$ es diagonal.*

Teorema 4.8 (Sylvester) *Para toda $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ existe $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tal que*

$$Q^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

donde $c, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c+s+t = n$ (si alguno de esos enteros es nulo su vapor propio asociado no interviene en la matriz diagonal). Además:

- *Si $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ y $D\big(1^{(t')}, (-1)^{(s')}, 0^{(c')}\big)$ son congruentes entonces $c = c', s = s', t = t'$. Por tanto, los números c, s, t de arriba son únicos y C es congruente a una única matriz diagonal con entradas 1, -1 y 0 ordenadas en la diagonal.*

  En particular $\mathrm{rang}(C) = s + t$.

- *Los números t y s de la forma de Sylvester de una matriz simétrica C coinciden con el número de raíces $+$ y $-$ de su polinomio característico $p_C(x)$, respectivamente, y el número c con la multiplicidad de 0 como raíz de $p_C(x)$.*

Definición 4.9 *Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, la única matriz de la forma $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ congruente con C se la llama* matriz o forma de Sylvester *de C.*

Como consecuencia del Teorema 4.8, dos matrices C_1 y C_2 son congruentes si y solo si tienen la misma forma de Sylvester.

Si $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, un procedimiento para realizar la diagonalización por congruencia que nos lleve a su forma de Sylvester es el siguiente. Como explicábamos arriba en el proceso de diagonalización ortogonal de C, primero generamos bases ortonormales

$$B'_{a_i} = \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$$

de $(V_{a_i}, \langle\, , \rangle)$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Si $a_i \neq 0$, *normalizamos* cada v_j^i de B'_{a_i} multiplicando por el número real $\frac{1}{\sqrt{|a_i|}}$, formando la nueva base

$$B''_{a_i} = \{\frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_1^i, \ldots \frac{1}{\sqrt{|a_i|}} v_{n_i}^i\}$$

de V_{a_i}. Si 0 es uno de los valores propios de C el último paso para pasar de la base B'_0 a la base B''_0 en V_0 carece de sentido, y escribimos $B''_0 = B'_0$.

Finalmente se construye la matriz Q que distribuye por columnas de forma ordenada los vectores de la base ordenada

$$B'' = B''_{a_1} \cup \ldots \cup B''_{a_k}$$

de $\mathbb{R}^n$. Por construcción B'' es una base *ortogonal* de $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ (ya que $B' = B'_{a_1} \cup \ldots \cup B'_{a_k}$ es ortonormal) y

$$Q^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot Q = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

si previamente hemos tenido la precaución de ordenar la lista de autovalores $a_1, \ldots, a_k$ de forma que aparezcan primero los positivos, después los negativos, y por último el 0.

4.1. Hipercuádricas afines

En lo que sigue $(\mathcal{A}, \overrightarrow{\mathcal{A}}, \vec{\ })$ será un espacio afín con $\dim \mathcal{A} = n$.

Definición 4.10 *Una hipercuádrica H en el espacio afín $\mathcal{A}$ es una ecuación de la forma*

$$\left(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}\right) \cdot \widehat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

en la que:

- $p_{\mathcal{R}}$ *indica coordenadas de puntos $p \in \mathcal{A}$ en una referencia $\mathcal{R}$* (notación columna).
- $\widehat{C} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right)$ *es una matriz de* $\mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ *donde $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^n$, y $C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$.*

Si no hay ambigüedad se suele identificar la hipercuádrica H con el conjunto de soluciones de la ecuación que la define (o lugar de puntos asociado):

$$\{p \in \mathcal{A} \colon \left(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}\right) \cdot \widehat{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0.$$

Con el lenguaje de la Definición 4.10, se dice que H está asociada a la matriz $\widehat{C}$ en $\mathcal{R}$, que $\hat{C}$ define a la hipercuádrica H en $\mathcal{R}$, o simplemente que $\hat{C}$ es la matriz de H en $\mathcal{R}$. También diremos que C es la *matriz del núcleo cuadrático* asociado a $\hat{C}$.

Como no hay alteración del lugar de puntos asociado (ver (4)), vamos a convenir que H también está definida en coordenadas en $\mathcal{R}$ por las matrices $\lambda\hat{C}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Desarrollando (4), un cálculo elemental nos dice H se corresponde con la *ecuación cuadrática*

$$p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot p_{\mathcal{R}} + 2\langle z, p_{\mathcal{R}}\rangle + a = 0,$$

que escribiendo $p_{\mathcal{R}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$, $z = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{t}}$ y $C = (c_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$, queda

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a = 0. \tag{5}$$

Por tanto H equivale, en coordenadas $p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}} = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, con la ecuación de los ceros del polinomio cuadrático

$$P_{\hat{C}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a \tag{6}$$

naturalmente definido por la matriz simétrica $\hat{C}$. Obsérvese que P_C como polinomio en las n variables $x_1, \ldots, x_n$ es de grado dos ya que $C \neq 0$ (por este motivo hemos llamado a C núcleo cuadrático de $\hat{C}$).

La nemotécnia

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{i,j} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} z_i x_i + a \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right).$$

justifica que todo polinomio cuadrático $P(x_1, \ldots, x_n)$ está asociado a una única matriz simétrica $\hat{C} \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R})$, y nos permite intercambiar los lenguajes polinomial y matricial a conveniencia en la presentación analítica de la ecuación que define una hipercuádrica en un sistema de referencia de $\mathcal{A}$. Naturalmente, al igual que ocurría con las matrices, convendremos que polinomios proporcionales definen en coordenadas en un sistema de referencia la misma hipercuádrica.

Notación 4.11 *En lo que sigue escribiremos $M_{\mathcal{R}}(H)$ para referir a la matriz de H en $\mathcal{R}$, que se entenderá unívocamente determinada salvo multiplicación por escalares $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Análogamente denotaremos por $N_{\mathcal{R}}(H)$ el núcleo cuadrático de $M_{\mathcal{R}}(H)$, que también estará determinado salvo el mismo factor de proporcionalidad de $M_{\mathcal{R}}(H)$. Con esta nomenclatura*

$$M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & N_{\mathcal{R}}(H) \end{array}\right).$$

4.1.1. Cambio de sistema de referencia e hipercuádricas

Es natural preguntarse la influencia de los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en la definición de las hipercuádricas. Comprobemos que una hipercuádrica H en cualquier otro sistema de referencia $\mathcal{R}'$ se expresa a partir de una ecuación matricial como la de (4), o equivalentemente, se corresponde con la ecuación que define el conjunto de ceros de otro polinomio cuadrático como el de (5).

Consideremos sistemas de referencia $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ en $\mathcal{A}$, y escribamos el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}.$$

Si H es una hipercuádrica en $\mathcal{A}$, en la referencia $\mathcal{R}$ se escribe

$$(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}) \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0,$$

y sustituyendo $\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ por la expresión $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix}$ queda

$$\big(1, p_{\mathcal{R}'}^{\mathrm{t}}\big) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}'} \end{pmatrix} = 0.$$

Por tanto hemos de convenir que H es también la hipercuádrica en $\mathcal{A}$ con

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}). \tag{7}$$

De forma más explícita, si

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right) \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{R}}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right)$$

entonces de la ecuación (7)

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a' & (z')^{\mathrm{t}} \\ \hline z' & C' \end{array}\right) \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R}), \qquad \left\{ \begin{array}{rl} a' = & a + b^{\mathrm{t}} \cdot z + z^{\mathrm{t}} \cdot b + b^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b \in \mathbb{R} \\ z' = & A^{\mathrm{t}} \cdot z + A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b \in \mathbb{R}^n \\ C' = & A^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \end{array} \right. \tag{8}$$

Como $A = M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B)$ y $C = N_{\mathcal{R}}(H)$, la ecuación (8) nos da en particular que

$$N_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B)^{\mathrm{t}} \cdot N_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{A}}}, B', B).$$

A modo de resumen hemos probado que:

Proposición 4.12 *Si H es una hipercuádrica en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R} = \{p_0, B\}$, $\mathcal{R}' = \{p_0', B'\}$ son sistemas de referencia en $\mathcal{A}$ entonces*

$$M_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R}) \ \ y$$

$$N_{\mathcal{R}'}(H) = M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B)^{\mathrm{t}} \cdot N_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{A}}}, B', B).$$

Como consecuencia de la Proposición 4.12 podemos reformular el concepto de hipercuádrica de una forma más global.

Definición 4.13 *Una hipercuádrica H en $\mathcal{A}$ es una familia de ecuaciones*

$$\Big\{ \big(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}\big) \cdot \hat{C}_{\mathcal{R}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0, \ \ \mathcal{R} \text{ referencia en } \mathcal{A} \Big\}$$

tales que

- $\hat{C}_{\mathcal{R}} = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C_{\mathcal{R}} \end{array}\right) \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ *con* $C_{\mathcal{R}} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ *para toda referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$.*
- $\hat{C}_{\mathcal{R}'} = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_{\mathcal{R}} \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$ *para todas referencias $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{A}$.*

Además, el lugar de puntos asociado a H

$$\{p \in \mathcal{A} \colon \big(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}\big) \cdot \widehat{C}_{\mathcal{R}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0\}$$

está bien definido globalmente (no depende de $\mathcal{R}$). Como antes escribiremos

$$M_{\mathcal{R}}(H) := \hat{C}_{\mathcal{R}}, \ N_{\mathcal{R}}(H) := C_{\mathcal{R}} \quad \text{para toda referencia } \mathcal{R} \text{ de } \mathcal{A}.$$

4.1.2. Invariantes de una hipercuádrica. Equivalencia afín

Dado un espacio afín $\mathcal{A}$, recordemos que las matrices $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}', \mathcal{R})$ de cambio entre sistemas de referencia $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}$ pertenecen al grupo afín $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$.

Definición 4.14 *Dos matrices $\hat{C}_1, \hat{C}_2 \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ se dicen* afínmente congruentes *si existe una matriz $Q \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ tal que*

$$\hat{C}_2 = Q^{\mathrm{t}} \cdot \hat{C}_1 \cdot Q.$$

La Proposición 4.12 expresa que las matrices que definen a una hipercuádrica cambian *por congruencia en el grupo afín*, al cambiar de sistema de referencia. Como estas matrices está bien definidas *salvo factores de proporcionalidad*, esto implica que sus rangos y formas de Sylvester, salvo revertir las cantidades de 1 y -1 en la diagonal, son universales (ver Teorema 4.8). Como consecuencia tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.15 *Si H es una hipercuádrica en $\mathcal{A}$, se tiene que:*

(I) *El rango R_H de $\mathrm{rang}\big(M_{\mathcal{R}}(H)\big)$ no depende del sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$.*

(II) *El rango r_H de $\mathrm{rang}\big(N_{\mathcal{R}}(H)\big)$ no depende del sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$.*

(III) *El valor absoluto $S_H = |\hat{t} - \hat{s}|$ de la diferencia entre la cantidad de $+1$ y -1 en la forma de Sylvester $D\big(1^{(\hat{t})}, (-1)^{(\hat{s})}, 0^{(\hat{c})}\big)$ de $M_{\mathcal{R}}(H)$ no depende del sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$.*

(IV) *El valor absoluto* $s_H = |t-s|$ *de la diferencia entre la cantidad de* $+1$ *y* -1 *en la forma de Sylvester* $D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big)$ *de* $N_{\mathcal{R}}(H)$ *no depende del sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$.

Es importante reparar en que la diferencia entre el número de 1 y el de -1 en la forma de Sylvester de una matriz simétrica A cambia de signo cuando se calculan para la matriz λA con $\lambda < 0$. Como la matriz de una hipercuádrica está definida salvo factores de proporcionalidad, por este motivo hemos definido en la anterior proposición S_H y s_H en valor absoluto.

Definición 4.16 *Por definición, los* invariantes *de una hipercuádrica* H *en* $\mathcal{A}$ *son los números enteros*

$$(R_H, r_H, S_H, s_H)$$

introducidos en la Proposición 4.15.

Ahora estamos en condiciones de definir el concepto de equivalencia afín de hipercuádricas, que ha de interpretarse como la identificación natural entre estos objetos.

Definición 4.17 *Dos hipercuádricas* H_1*,* H_2 *en* $\mathcal{A}$ *se dicen* afínmente equivalentes *si* $M_{\mathcal{R}}(H_1)$ *y* $M_{\mathcal{R}}(H_2)$ *son afínmente congruentes (salvo un factor de proporcionalidad) en algún sistema de referencia* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{A}$ *(luego en todos); ver Definición 4.14.*

Equivalentemente, H_1*,* H_2 *son afínmente equivalentes si* $M_{\mathcal{R}_1}(H_1) = M_{\mathcal{R}_2}(H_2)$ *(salvo un factor de proporcionalidad) para algunas referencias* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ *en* $\mathcal{A}$.

La *equivalencia afín* es una relación binaria de equivalencia en la familia de las hipercuádricas en $\mathcal{A}$. Clasificar las hipercuádricas en $\mathcal{A}$ es en definitiva estudiar la naturaleza del correspondiente conjunto cociente.

Las Proposiciones 4.12 y 4.15 nos dan el siguiente corolario:

Corolario 4.18 *Si* H_1, H_2 *son hipercuádricas afínmente equivalentes en* $\mathcal{A}$ *entonces*

$$(R_{H_1}, r_{H_1}, S_{H_1}, s_{H_1}) = (R_{H_2}, r_{H_2}, S_{H_2}, s_{H_2}).$$

Más adelante (ver Corolario 4.23) comprobaremos que la condición necesaria es también cierta, y por tanto dos hipercuádricas son afínmente equivalentes si y sólo si tienen los mismos invariantes.

Es importante observar que toda afinidad $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ lleva hipercuádricas en hipercuádricas. En efecto, recordemos que dada una referencia $\mathcal{R}$ arbitraria en $\mathcal{A}$, la afinidad se escribe analíticamente

$$\begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(f, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} \quad \forall p \in \mathcal{A},$$

donde $M(f, \mathcal{R}) \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$. Por tanto si H es la hipercuádrica en $\mathcal{A}$, la ecuación

$$(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}) \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0,$$

se transforma sustituyendo $\begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ por $M(f, \mathcal{R})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = M(f^{-1}, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix}$ en la expresión

$$(1, f(p)_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f(p)_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0.$$

En particular, si p está en el lugar de puntos de h entonces $f(p)$ está en el lugar de puntos de la hipercuádrica en $\mathcal{A}$ de ecuación

$$(1, p_{\mathcal{R}}^{\mathrm{t}}) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} = 0$$

en coordenadas en $\mathcal{R}$. En consecuencia es natural hacer la siguiente definición.

Definición 4.19 *Si H una hipercuádrica en $\mathcal{A}$ y $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una afinidad, llamaremos $f(H)$ a la hipercuádrica con matriz*

$$M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R})$$

en cualquier sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$.

El lugar de puntos de $f(H)$ es la imagen directa por f del lugar de puntos de H.

Nótese que de la Definición 4.19

$$M_{\mathcal{R}}(H) = M(f, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}\big(f(H)\big) \cdot M(f, \mathcal{R}). \tag{9}$$

para todo sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$.

El concepto de equivalencia afín de hipercuádricas puede ser reformulado en términos de afinidades. Ese es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 4.20 *Dos hipercuádricas H_1, H_2 en $\mathcal{A}$ son afínmente equivalentes si y sólo si existe una afinidad $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $f(H_1) = H_2$.*

Demostración: Si $\mathcal{R}$ es un sistema de referencia en $\mathcal{A}$ arbitrario, la equivalencia entre las hipercuádricas H_1 y H_2 se traduce en que existe $Q \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ tal que $M_{\mathcal{R}}(H_1) = \lambda(Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_2) \cdot Q)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, lo que por la fórmula (9) equivale a que $f(H_1) = H_2$ para la única afinidad $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ con $M(f, \mathcal{R}) = Q$. ■

Un ejemplo curioso es el que nos ofrecen las hipercuádricas H_1, H_2 en $\mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por los polinomios $P_1(x, y) = x^2 + 1$ y $P_2(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ en la referencia usual $\mathcal{R}_0$. Tienen el mismo lugar de puntos asociado, a saber el conjunto vacío:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 1 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \varnothing.$$

Pero H_1 y H_2 no son afínmente equivalentes pues sus matrices asociadas

$$M_{\mathcal{R}_0}(H_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad M_{\mathcal{R}_0}(H_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

no son congruentes salvo proporcionalidad; tienen distintos rangos y por tanto distintos invariantes (ver Corolario 4.18).

4.2. Clasificación afín de las hipercuádricas

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación de hipercuádricas. La idea básica será probar que toda hipercuádrica H viene representada en un sistema de referencia adecuado por una matriz canónica simplificada. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ ($\dim \mathcal{A} = n$).

Definición 4.21 *Las hipercuádricas H de $\mathcal{A}$ con matrices respecto de $\mathcal{R}_0$ descritas en la siguiente lista se llamarán* hipercuádricas canónicas *en $\mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{R}_0$:*

(I) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \{ \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$ y $t - s \geq 0$.

En este caso $(R_H, r_H, S_H, s_H) = (t + s, t + s, t - s, t - s)$.

(II) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \big\{1 + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$.

En este caso $(R_H, r_H, S_H, s_H) = (t + s + 1, t + s, |t - s + 1|, |t - s|)$

(III) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \big\{2x_n + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \big\},$$

donde $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ es el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$, $c > 0$ y $t - s \geq 0$.

En este caso $(R_H, r_H, S_H, s_H) = (t + s + 2, t + s, t - s, t - s)$.

Las cuádruplas (R_H, r_H, S_H, s_H) discriminan las distintas hipercuádricas listadas en la Definición 4.21, por lo que dos a dos no son afínmente equivalentes de acuerdo con el Corolario 4.18.

El siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden $n + 1$ con núcleo no trivial (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia de $\mathcal{A}$), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$ en una de las matrices canónicas del listado anterior.

Teorema 4.22 *Toda hipercuádrica H de $\mathcal{A}$ es afínmente equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas en la Definición 4.21.*

Demostración: De la Definción 4.17, lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.21- (I)-(II)-(III).

Escribamos

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right).$$

Recordemos que dado un sistema de referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$M_{\mathcal{R}}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0).$$

Consideremos un sistema de referencia $\mathcal{R}_1$ con el mismo origen que $\mathcal{R}_0$, esto es, de forma que $M(\mathrm{Id}_\mathcal{A}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$. De la fórmula anterior

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_1^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & C \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \cdot A_1 \\ \hline A_1^{\mathrm{t}} \cdot z & A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A_1 \end{array}\right).$$

Por el Teorema 4.8, podemos elegir $A_1 \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot A_1 = D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}, 0^{(c)}\big),$$

donde , $t + s > 0$ ya que H es una hipercuádrica. Si ponemos

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z = \left(\begin{array}{c} v \\ \hline w \end{array}\right), \quad v \in \mathbb{R}^{t+s}, w \in \mathbb{R}^c,$$

lo anterior nos queda

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a & v^{\mathrm{t}} & w^{\mathrm{t}} \\ \hline v & D\big(1^{(t)}, (-1)^{(s)}\big) & 0 \\ \hline w & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Escribamos $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$, $p \in \mathcal{A}$, y observemos que la hipercuádrica H se materializa en coordenadas en $\mathcal{R}_1$ como

$$\sum_{i=1}^{t} x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} x_{t+j}^2 + 2\langle v^{\mathrm{t}}, (x_1, \ldots, x_{t+s})\rangle + 2\langle w^{\mathrm{t}}, (x_{s+t+1}, \ldots, x_n)\rangle + a = 0.$$

Si $v = (v_1, \ldots, v_{t+s})^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{t+s}$, las expresiones

$$\left\{\begin{array}{lll} y_i = x_i + v_i & \text{si} & i = 1, \ldots, t \\ y_i = x_i - v_i & \text{si} & i = t+1, \ldots, t+s \\ y_i = x_i & \text{si} & i = t+s+1, \ldots, n \end{array}\right. ,$$

representan las ecuaciones analíticas del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ a otro sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que $p_{\mathcal{R}_2} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}}$, $p \in \mathcal{A}$. Completando cuadrados H se escribe en $\mathcal{R}_2$ como

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sum_{j=1}^{s} y_{t+j}^2 + 2\langle w^{\mathrm{t}}, (y_{s+t+1}, \ldots, y_n)\rangle + a_2 = 0 \tag{10}$$

para $a_2 = a - \sum_{i=1}^{t} v_i^2 + \sum_{j=1}^{t+s} v_{t+j}^2$. Surgen aquí tres casos excluyentes:

Caso (i)*: $a_2 = 0 \in \mathbb{R}$ y $w = 0 \in \mathbb{R}^c$ (posiblemente $c = 0$).*

De (10), la hipercuádrica H queda en coordenadas en $\mathcal{R}_2$

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sum_{j=1}^{s} y_{t+j}^2 = 0.$$

Salvo cambiar de inicio $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta para que $t \geq s$, obtenemos la forma canónica descrita en (I).

Caso (ii)*: $a_2 \neq 0$ y $w = 0 \in \mathbb{R}^c$ (posiblemente $c = 0$).*

De (10), la hipercuádrica H queda en coordenadas en $\mathcal{R}_2$

$$\sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sum_{j=1}^{s} y_{t+j}^2 + a_2 = 0.$$

Salvo cambiar de inicio $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta, podemos suponer que $a_2 > 0$. Definiendo

$$z_i = \sqrt{a_2} y_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

estas expresiones son las ecuaciones analíticas del cambio del sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ a otro sistema de referencia $\mathcal{R}_3$ en el que $p_{\mathcal{R}_3} = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{t}}$. En la referencia $\mathcal{R}_3$ la hipercuádrica H se escribe como

$$\sum_{i=1}^{t} z_i^2 - \sum_{j=1}^{s} z_{t+j}^2 + 1 = 0,$$

lo que nos lleva a (II).

Caso (iii)*: $c > 0$ y $w \neq 0$.*

En este caso, razonando como antes, las expresiones

$$z_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad z_n = \langle w, (y_{s+t+1}, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}} \rangle + \frac{1}{2} a_2,$$

representan las ecuaciones analíticas del cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_2$ a otro sistema de referencia $\mathcal{R}_3$ en el que $p_{\mathcal{R}_3} = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{t}}$. De (10), la hipercuádrica H se escribe en $\mathcal{R}_3$ como

$$\sum_{i=1}^{t} z_i^2 - \sum_{j=1}^{s} z_{t+j}^2 + 2z_n = 0.$$

Salvo cambiar de inicio $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta para que $t \geq s$, esto nos lleva a (III). ■

Corolario 4.23 *Dos hipercuádricas H_1, H_2 son afínmente equivalentes en $\mathcal{A}$ si y sólo si $(R_{H_1}, r_{H_1}, S_{H_1}, s_{H_1}) = (R_{H_2}, r_{H_2}, S_{H_2}, s_{H_2})$.*

Demostración: Ténganse en cuenta el Corolario 4.18 y el Teorema 4.22, y obsérvese que las cuádruplas de números enteros (R_H, r_H, S_H, s_H) discriminan a las hipercuádricas canónicas H presentadas en la Definición 4.21. ■

4.2.1. Cónicas en un plano afín

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ })$ es un plano afín: $\dim \mathcal{A} = 2$. Recordemos que en un plano afín las hipercuádricas reciben el nombre de *cónicas*. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cónicas de $\mathcal{A}$. No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.22 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ y consideremos las cónicas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.21. A la luz del Teorema 4.22, toda cónica $H \subseteq \mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

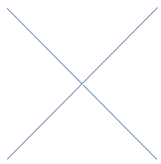
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(recta doble).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(par de rectas secantes).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 0$, $s = -1$):

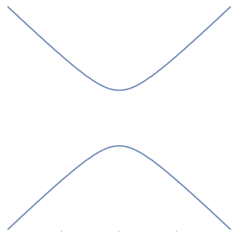
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 = 0 \quad \text{(par de rectas paralelas).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

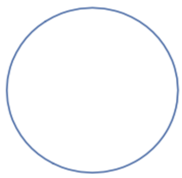
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_h + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(hipérbola).}$$



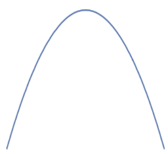
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(elipse).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2y = 0 \quad \text{(parábola).}$$



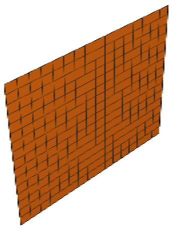
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	**Tipo (I)** $R_H = r_H = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 2$	**Tipo (II)** $R_H = r_H + 1 = 3$	**Tipo (III)** $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$		Rectas secantes			
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H + 1 = 3$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

4.2.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ })$ tiene $\dim \mathcal{A} = 3$. En este caso, las hipercuádricas de $\mathcal{A}$ reciben el nombre de *cuádricas*. Al igual que en al caso de las cónicas, vamos a describir la tabla de la clasificación afín, salvo equivalencias, de las cuádricas de $\mathcal{A}$. Para ello fijaremos una referencia $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$ y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.21. A la luz del Teorema 4.22, toda cuádrica H en $\mathcal{A}$ es equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(plano doble).}$$

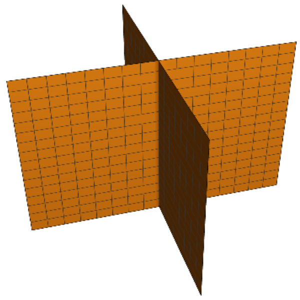


- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(recta).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(par de planos secantes).}$$

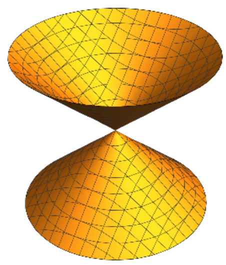


- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 3$ ($t = 3$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 2$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{(cono).}$$



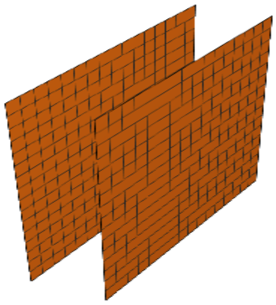
Tipo (I)	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 0$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 = 0 \quad \text{(par de planos paralelos).}$$

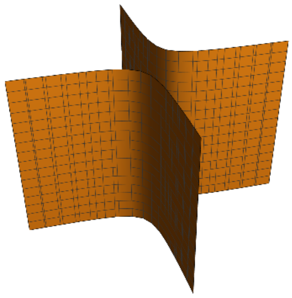


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

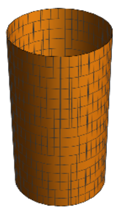
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(cilindro hiperbólico).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{(cilindro elíptico).}$$

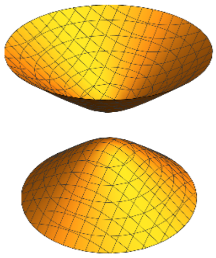


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 4$ ($t = 3$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

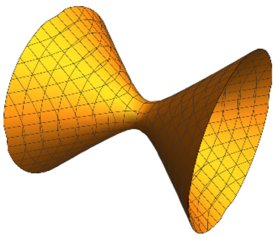
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 2$ $(t = 2,\ s = 1)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{(hiperboloide de dos hojas).}$$



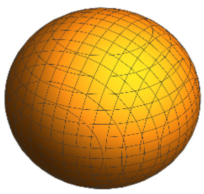
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 0$ $(t = 1,\ s = 2)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{(hiperboloide de una hoja).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 2$ $(t = 0,\ s = 3)$:

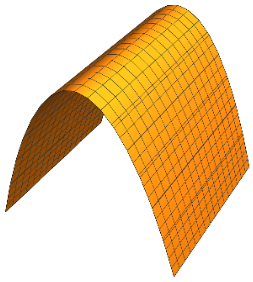
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \qquad \text{(elipsoide).}$$



Tipo (II)	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperboloide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperboloide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

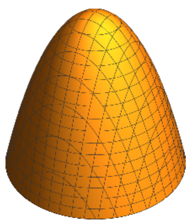
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + 2z = 0 \quad \text{(cilindro parabólico).}$$



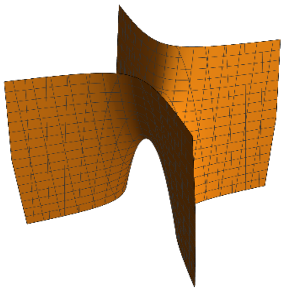
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 1$, $s = 0$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode elíptico).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$):

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode hiperbólico).}$$



Tipo (III)	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboliode hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboliode elíptico

4.2.3. Algoritmo para la clasificación afín de hipercuádricas

Expliquemos el procedimiento práctico general para la clasificación afín de una hipercuádrica de forma sencilla. Entenderemos por clasificar afínmente una hipercuádrica H en $\mathcal{A}$ el encontrar la hipercuádrica canónica respecto de un sistema de referencia fijado $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{A}$, tabuladas en Definicion 4.21, a la que H es afínmente equivalente.

La herramienta más útil para este cálculo es la Regla de Descartes sobre el número de raíces positivas de un polinomio. Recordemos su enunciado:

Teorema 4.24 (Regla de Descartes) *El número de raíces positivas contadas con multiplicidad de un polinomio con coeficientes reales es, como máximo, el número de cambios de signo de la secuencia ordenada (de mayor a menor exponente) de sus coeficientes no nulos. Además, ambos enteros tienen la misma paridad.*

El criterio de Descartes *no garantiza* la existencia de raíces positivas de un polinomio $p(x)$ (ni negativas si se aplica para $p(-x)$), sólo estima el número máximo de las mismas. Por ejemplo, $p(x) = 3x^5 - x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ tiene por coeficientes no nulos ordenados de mayor a menor exponente a $3, -1, -2, 4, -6$. En esa secuencia se observan tres cambios de signo (de 3 a -1, de -2 a 4 y de 4 a -6), por lo que a lo más puede tener tres raíces positivas. La misma regla para $p(-x) = 3x^5 + x^3 - 2x^2 - 4x - 6$ nos dice que $p(-x)$ tiene a lo más una raíz positiva, esto es, $p(x)$ tiene a lo más una raíz negativa. Por tanto $p(x)$ tiene a lo más cuatro raíces en total, en particular no descompone sobre $\mathbb{R}$, y por tanto tiene a lo más tres raíces reales. Otro ejemplo en esta línea nos lo da el polinomio $p(x) = x^2 - x + 1$, sus coeficientes no nulos ordenados de mayor a menor exponente son $1, -1, 1$, y razonando como antes a lo más tiene dos raíces positivas. Análogamente $p(-x) = x^2 + x + 1$ no tiene ninguna raíz positiva, esto es, $p(x)$ carece de raíces negativas; en este caso $p(x)$ no tiene raíces reales por comprobación directa.

El siguiente corolario, aplicable a polinomios característicos de matrices simétricas, nos será de gran utilidad.

Corolario 4.25 *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales de grado $n \geq 1$ satisfaciendo:*

- *$p(x)$ descompone en el cuerpo de los números reales (por ejemplo, si $p(x)$ es el polinomio característico de una matriz simétrica real).*

- *$p(x)$ tiene a lo más $t \geq 0$ raíces positivas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a $p(x)$).*
- *$p(x)$ tiene a lo más $s \geq 0$ raíces negativas contadas con multiplicidad (por ejemplo, detectadas por aplicación de la Regla de Descartes a $p(-x)$).*
- *$x = 0$ es raíz de $p(x)$ con multiplicidad $c \geq 0$.*
- *$t + s + c = n$.*

Entonces $p(x)$ tiene exactamente t raíces positivas y s raíces negativas contadas con multiplicidad.

El algoritmo general para clasificar una hipercuádrica $H \subseteq \mathcal{A}$ es el siguiente. Primero consideramos la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y su correspondiente núcleo cuadrático $N_{\mathcal{R}_0}(H)$:

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^{\mathrm{t}} \\ \hline z & N_{\mathcal{R}_0}(H) \end{array}\right).$$

A continuación calculamos los rangos R_H de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y r_H de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$. Si $R_H = r_H$ estamos en el caso (I), si $R_H = r_H + 1$ en el caso (II), y si $R_H = r_H + 2$ en el caso (III). Teniendo en cuenta el Teorema 4.8 podemos proceder así:

- *Caso* (I) *($R_H = r_H$):* Calculamos el polinomio característico $p(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Realmente sólo nos interesa conocer los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$; para ello nos ayudamos de la Regla de Descartes. Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, en cualquier caso $S_H = s_H = |t - s|$ determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.
- *Caso* (II) *($R_H = r_H + 1$):* Calculamos los polinomios característicos $p(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $\widehat{p}(x)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$, y determinamos la distribución de signos de sus raíces. Sólo nos interesan los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$, y los números $\widehat{t}$ de raíces positivas y $\widehat{s}$ de raíces negativas de $\widehat{p}(x)$ (en ambos casos nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta siempre podemos conseguir que $\widehat{t} = t + 1$ y $\widehat{s} = s$, en cualquier caso los números $S_H = |\hat{t} - \hat{s}|$ y $s_H = |t - s|$ determinan unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.
- *Caso* (III) *($R_H = r_H + 2$):* Calculamos el polinomio característico $p(x)$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ y sus raíces. Sólo necesitamos los números t de raíces positivas y s de raíces negativas de $p(x)$ (nos ayudamos de la Regla de Descartes). Salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta siempre podemos conseguir que $s_H = t - s \geq 0$, en cualquier caso $S_H = s_H = |t - s|$ determina unívocamente a que hipercuádrica canónica es H equivalente.

Otra cuestión más elaborada es encontrar un sistema de referencia $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que $M_{\mathcal{R}}(H)$ coincida con su equivalente canónica en $\mathcal{R}_0$. Para ello hay reproducir la argumentación de la prueba del Teorema 4.22.

4.3. Clasificación euclidiana de las hipercuádricas

Podemos ahora abordar la clasificación afín euclidiana de las hipercuádricas en un espacio afín euclídeo $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, ,\, \rangle)$. La idea básica será probar que toda hipercuádrica H viene representada en un sistema de referencia rectangular adecuado por una matriz canónica simplificada.

Llamaremos

$$\mathrm{E}(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle) = \{f\colon (\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, ,\, \rangle) \to (\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, ,\, \rangle)\colon f \text{ movimiento rígido}\},$$

o simplemente $\mathrm{E}(\mathcal{A})$ por simplicidad, al grupo de los movimientos rígidos en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, ,\, \rangle)$, y escribiremos como

$$\mathrm{E}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right) : A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \right\}$$

el grupo euclídeo, esto es, el de las matrices que representan a los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$ en el sistema de referencia usual. Es claro que si $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una afinidad y $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son sistemas de referencia rectangulares en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$,

$$f \in \mathrm{E}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R}).$$

Definición 4.26 *Dos hipercuádricas H_1, H_2 en un espacio afín euclidiano $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ se dicen* euclídeamente equivalentes *si satisfacen cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

- *Hay referencias rectangulares $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ tales que $M_{\mathcal{R}_1}(H_1) = M_{\mathcal{R}_2}(H_2)$ (salvo factor de proporcionalidad).*
- *Existen una referencia rectangular $\mathcal{R}$ de $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ y una matriz $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ tales que $Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$ (salvo factor de proporcionalidad).*
- *Para toda referencia rectangular $\mathcal{R}$ en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ existe una matriz $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot Q = M_{\mathcal{R}}(H_2)$ (salvo factor de proporcionalidad).*

Aunque es algo rutinario, es importante comprobar que las condiciones anteriores son equivalentes entre sí.

Como en el caso afín, el concepto de equivalencia euclidiana de hipercuádricas también se puede reformular en términos de movimientos rígidos. En este caso, es fácil ver que dos hipercuádricas H_1, H_2 en $\mathcal{A}$ son euclideamente equivalentes si y sólo si existe un movimiento rígido $f\colon (\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle) \to (\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que $f(H_1) = H_2$. Por tanto

$$M_{\mathcal{R}}(H_2) = M(f^{-1}, \mathcal{R})^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}}(H_1) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}).$$

para cualquier sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ en $(\mathcal{A}, \langle\, ,\, \rangle)$.

Las hipercuádricas en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ definidas por los polinomios

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 0\}, \quad H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 0\}$$

tienen por lugar de puntos asociados el punto $\{(0, 0)\}$, pero no son euclídeamente equivalentes pues sus matrices asociadas

$$M_{\mathcal{R}_0}(H_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad M_{\mathcal{R}_0}(H_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

en la referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ no son congruentes en el grupo $\mathrm{E}_2(\mathbb{R})$. Sin embargo existe $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ movimiento rígido tal que $f(0,0,0) = (0,0,0)$. Esta aparente paradoja se explica porque el concepto de equivalencia euclídea está vinculado con la ecuación de las hipercuádricas o con sus matrices en sistemas de referencia rectangulares, no con los lugares de puntos asociados a las mismas.

Ya estamos en condiciones de abordar el teorema fundamental de clasificación euclídea de hipercuádricas. Necesitaremos para ello alguna notación.

En lo que sigue supondremos fijado un sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ rectangular en $(\mathcal{A}, \langle\ ,\ \rangle)$ $(\dim \mathcal{A} = n)$.

Definición 4.27 *Las hipercuádricas H de $\mathcal{A}$ con matrices descritas en la siguiente lista se llamarán* hipercuádricas canónicas *en $(\mathcal{A}, \langle, \rangle)$ con respecto al sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_0$:*

(I) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \Big\{ \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \Big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$, $t - s \geq 0$, $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j, $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$.

En este caso $R_H = r_H = t + s$ y $S_H = s_H = t - s \geq 0$.

(II) $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \Big\{ 1 + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \Big\},$$

donde $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$, y $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j.

En este caso $R_H = r_H + 1 = t + s + 1$ y $S_H = |t - s + 1|$, $s_H = |t - s|$.

(III) $M_{\mathcal{R}0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right)$, *y por tanto*

$$H = \Big\{ 2x_n + \sum_{i=1}^{\mathrm{t}} \epsilon_i x_i^2 - \sum_{j=1}^{s} \delta_j x_{t+j}^2 = 0,\ p_{\mathcal{R}_0} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \Big\},$$

donde $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^n$ es el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $t, s, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t + s > 0$, $t + s + c = n$, $c > 0, t - s \geq 0$, y $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j.

En este caso $R_H = r_H + 2 = t + s + 2$ y $S_H = s_H = t - s \geq 0$.

Observación 4.28 *Las cuádruplas de enteros (R_H, r_H, S_H, s_H) y los* conjuntos

$$\{\epsilon_i \colon i = 1 \ldots, t\}, \quad \{\delta_j \colon j = 1 \ldots, s\}$$

discriminan salvo equivalencia euclídea las hipercuádricas en la Definición 4.27.

DEMOSTRACIÓN : Si dos cuádricas H_1, H_2 representadas por matrices de las listadas en la Definición 4.27 son euclideamente equivalentes, lo son también afínmente y por tanto ambas pertenecen al mismo tipo (I), (II) ó (III). Además, las matrices $M_{\mathcal{R}_0}(H_1)$ y $M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$ de arriba han de satisfacer que $M_{\mathcal{R}_0}(H_2) = \mu(Q^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H_1) \cdot Q)$ para alguna matriz $Q \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ y $\mu \neq 0$. De (8) es fácil concluir que $\mu = 1$, y de aquí que los respectivos núcleos cuadráticos $N_{\mathcal{R}_0}(H_1)$ $M_{\mathcal{R}_0}(H_2)$ sean ortogonalmente equivalentes, y por tanto con los mismos valores propios y las mismas multiplicidades. ■

El siguiente teorema expresa que dada una matriz simétrica de orden $n+1$ con núcleo no trivial (típicamente la de una hipercuádrica en un sistema de referencia rectangular de $\mathcal{A}$), ella o su opuesta pueden ser transformadas por congruencia en $\mathrm{E}_n(\mathbb{R})$ en una de las matrices canónicas del listado anterior.

Teorema 4.29 *Toda hipercuádrica H de $(\mathcal{A}, \langle\,,\,\rangle)$ es euclídeamente equivalente a una y sólo una de las hipercuádricas canónicas descritas matricialmente en Definición 4.27.*

DEMOSTRACIÓN : Lo que hemos de probar es que existe un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ en el que H puede ser representada por alguna de las matrices canónicas descritas en Definición 4.27- (I)-(II)-(III).

Consideremos la matriz que representa a H en $\mathcal{R}_0$:

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right).$$

Recordemos que, dado un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1$ con $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right) \in \mathrm{E}_n(\mathbb{R})$, se tiene que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & A_1^{\mathrm{t}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array}\right),$$

esto es,

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & z_0^{\mathrm{t}} \cdot A_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \\ \hline A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1 & A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 \end{array}\right).$$

Por el Teorema 4.6, podemos elegir $A_1 \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot A_1 = D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big)$$

donde $|t| + |s| > 0$ (H es una hipercuádrica) y los reales $\epsilon_i, \delta_j > 0$ para todo i, j. Fijada esta A_1, un cálculo directo nos dice que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \cdot (A_1^{-1} \cdot b_1).$$

Escribamos

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array}\right), \quad z' \in \mathbb{R}^{t+s}, z_1 \in \mathbb{R}^c,$$

llamemos $x' \in \mathbb{R}^{t+s}$ al único vector tal que

$$z' + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) \cdot x' = 0 \in \mathbb{R}^{t+s},$$

y usando la regularidad de A_1 elijamos $b_1 \in \mathbb{R}^n$ el único vector tal que

$$A_1^{-1} \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Para esta elección de b_1 se tiene que

$$A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C \cdot b_1 = \left(\begin{array}{c} z' \\ \hline z_1 \end{array} \right) + D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \cdot \left(\begin{array}{c} x' \\ \hline 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right).$$

En el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1$ determinado por la condición $M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & A_1 \end{array} \right)$ queda

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde

$$a_1 = a_0 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + z_0^{\mathrm{t}} \cdot b_1 + b_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1, \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline z_1 \end{array} \right) = A_1^{\mathrm{t}} \cdot z_0 + A_1^{\mathrm{t}} \cdot C_0 \cdot b_1.$$

Si $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ ó $c = 0$, se sigue el caso (I). Obsérvese que podemos garantizar que $s_H = t - s \geq 0$ sin más que cambiar de inicio $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta. También se puede suponer que $\epsilon_1 = 1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$ sin mas que reordenar coordenadas para que $\epsilon_1 \geq \epsilon_j$, $j = 2, \ldots, t$, y afectar por el factor $\lambda = 1/\epsilon_1$ la matriz original.

Si $a_1 \neq 0$ y $z_1 = 0 \in \mathbb{R}^c$ ó $c = 0$ se sigue el caso (II). En efecto, al igual que antes salvo cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array} \right)$ por su matriz opuesta y afectarla matriz por el factor $1/a_1$ podemos suponer $a_1 = 1$ (obsérvese que en este caso no podemos garantizar que $t - s \geq 0$ por la rigidez que impone la condición $a_1 = 1 > 0$ anterior).

Finalmente supongamos que $c > 0$ y $z_1 \neq 0$, y observemos que salvo cambiar al principio $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su matriz opuesta podemos suponer que $s_H = t - s \geq 0$. Consideremos ahora un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_2$ para el que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right),$$

donde $b_2 \in \mathbb{R}^c$ y $A_2 \in \mathrm{O}(c, \mathbb{R})$ se determinarán más adelante. Un cálculo directo siguiendo la fórmula

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_1}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$$

nos da que

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right)^{\mathrm{t}} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} a_1 & 0 & z_1^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{t+s} & 0 \\ \hline b_2 & 0 & A_2 \end{array} \right),$$

esto es,

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_2 & 0 & z_2^{\mathrm{t}} \\ \hline 0 & D\big(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s\big) & 0 \\ \hline z_2 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde $a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2$ y $z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1$.

Como $z_1 \neq 0$, salvo multiplicar la matriz original $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & z_0^{\mathrm{t}} \\ \hline z_0 & C_0 \end{array}\right)$ por el factor $\lambda = 1/\|z_1\|$ podemos suponer que $\|z_1\| = 1$, y por tanto, encontrar una matriz $A_2 \in \mathrm{O}(c, \mathbb{R})$ tal que

$$z_2 = A_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 = e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

sea el último vector de la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Una vez fijada esta matriz A_2, elegimos cualquier $b_2 \in \mathbb{R}^c$ para que

$$a_2 = a_1 + b_2^{\mathrm{t}} \cdot z_1 + z_1^{\mathrm{t}} \cdot b_2 = 0.$$

Con estas elecciones nos quedaría finalmente que

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e_n^{\mathrm{t}} \\ \hline e_n & D\big((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t, -\delta_1, \ldots, -\delta_s, 0^{(c)}\big) \end{array}\right),$$

lo que nos lleva al caso (III) y concluye la prueba. ■

4.3.1. Cónicas en un plano afín euclidiano

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ es un plano afín euclídeo. Nuestra intención es describir la tabla de la clasificación afín euclídea, salvo equivalencias, de las cónicas en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$. No vamos a hacer nada nuevo, solo particularizar la información que nos da el teorema de clasificación general Teorema 4.29 y recordar alguna notación clásica.

Para ello fijemos una referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\,\rangle)$ y consideremos las cónicas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.27. A la luz del Teorema 4.29, toda cónica H en $\mathcal{A}$ es euclideamente equivalente a una única de las cónicas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ ($t = 1$, $s = 0$):

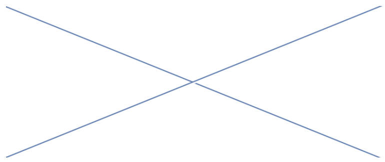
$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(recta doble).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ ($t = 2$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ ($t = 1$, $s = 1$), $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad x^2 - \delta y^2 = 0 \qquad \text{(par de rectas secantes).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad \epsilon x^2 + 1 = 0 \qquad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 0$, $s = -1$), $\delta > 0$:

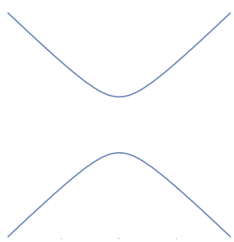
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 - \delta x^2 = 0 \qquad \text{(par de rectas paralelas).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \qquad \text{(vacío).}$$

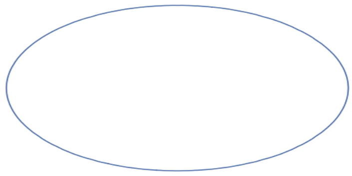
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_h + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$), $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \qquad \text{(hipérbola).}$$



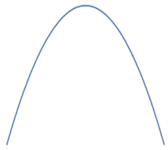
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$), $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 \end{array}\right) \qquad \text{ecuación} \qquad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \qquad \text{(elipse).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2y = 0 \quad \text{(parábola).}$$



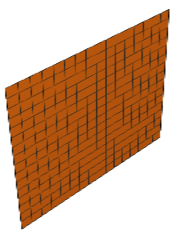
	Tipo (I) $R_H = r_H = 1$	Tipo (I) $R_H = r_H = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 2$	Tipo (II) $R_H = r_H + 1 = 3$	Tipo (III) $R_H = r_H + 2 = 3$
$S_H = s_H = 0$		Rectas secantes			
$S_H = s_H = 1$	Recta doble				
$S_H = s_H = 2$		Punto			
$S_H = s_H - 1 = 0$			Rectas paralelas		
$S_H = s_H - 1 = 1$				Elipse	
$S_H = s_H - 1 = 2$				Vacío	
$S_H = s_H + 1 = 1$				Hipérbola	
$S_H = s_H + 1 = 2$			Vacío		
$S_H = s_H = 1$					Parábola

4.3.2. Cuádricas en un espacio afín tridimensional

En este apartado supondremos que $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, \rangle)$ tiene $\dim \mathcal{A} = 3$. Al igual que en al caso de las cónicas euclidianas, vamos a describir la tabla de la clasificación, salvo equivalencias euclídea, de las cuádricas de $\mathcal{A}$. Para ello fijaremos una referencia rectangular $\mathcal{R}_0$ en $(\mathcal{A}, \vec{\ }, \langle\, \rangle)$ y consideraremos las cuádricas canónicas relativas a $\mathcal{R}_0$ descritas en Definicion 4.27. A la luz del Teorema 4.29, toda cuádrica H en $\mathcal{A}$ es euclideamente equivalente a una única de las cuádricas canónicas que se listan a continuación, representada cada una de ellas por su matríz y ecuación analítica (polinomio cuadrático) en coordenadas (x, y, z) respecto de $\mathcal{R}_0$:

- Caso (I), $R_H = r_H = 1$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 = 0 \quad \text{(plano doble).}$$

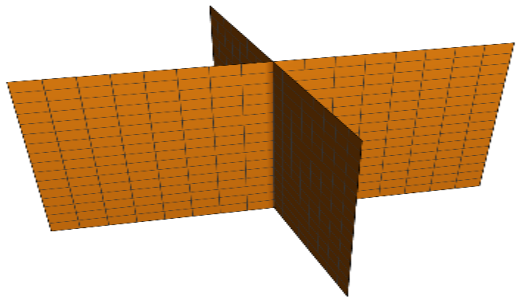


- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 2$ $(t = 2,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 = 0 \quad \text{(recta).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 2$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$, $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 - \delta y^2 = 0 \quad \text{(par de planos secantes).}$$

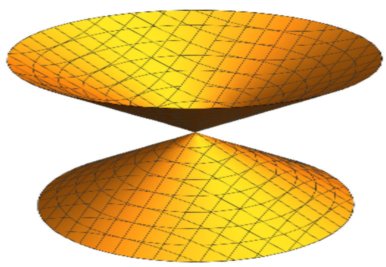


- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 3$ $(t = 3,\ s = 0)$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 z^2 = 0 \quad \text{(punto).}$$

- Caso (I), $R_H = r_H = 3$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 2,\ s = 1)$, $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad x^2 + \epsilon y^2 - \delta z^2 = 0 \quad \text{(cono).}$$



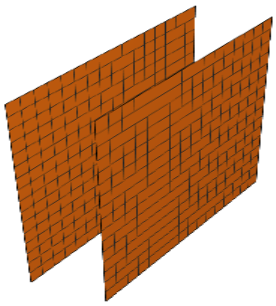
Tipo (I)	$R_H = r_H = 1$	$R_H = r_H = 2$	$R_H = r_H = 3$
$S_H = s_H = 0$		Planos secantes	
$S_H = s_H = 1$	Plano doble		Cono
$S_H = s_H = 2$		Recta	
$S_H = s_H = 3$			Punto

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 1$, $s = 0$), $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 2$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 0$, $s = 1$), $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta x^2 = 0 \quad \text{(par de planos paralelos).}$$

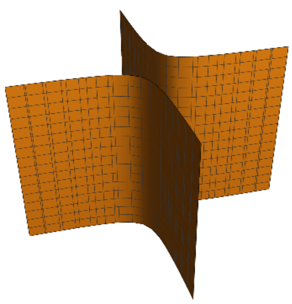


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 3$ ($t = 2$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

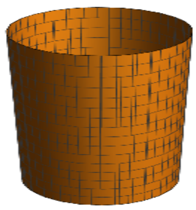
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H + 1 = 1$ ($t = 1$, $s = 1$), $\epsilon > 0, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta y^2 = 0 \quad \text{(cilindro hiperbólico).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 3$, $S_H = s_H - 1 = 1$ ($t = 0$, $s = 2$), $\delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 = 0 \quad \text{(cilindro elíptico).}$$

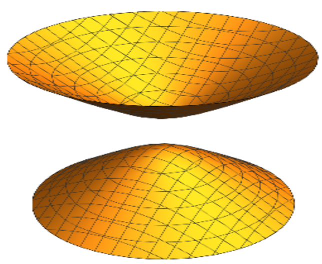


- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 4$ ($t = 3$, $s = 0$), $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_3 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + \epsilon_3 z^2 = 0 \quad \text{(vacío).}$$

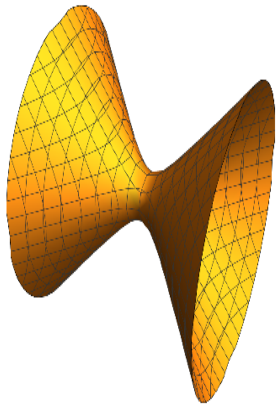
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H + 1 = 2$ ($t = 2$, $s = 1$), $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, $\delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 - \delta z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de dos hojas).}$$



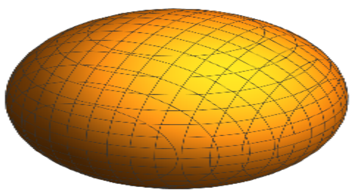
- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 0$ ($t = 1$, $s = 2$), $\epsilon > 0, \delta_1, \delta_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_2 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 + \epsilon x^2 - \delta_1 y^2 - \delta_2 z^2 = 0 \quad \text{(hiperboloide de una hoja).}$$



- Caso (II), $R_H = r_H + 1 = 4$, $S_H = s_H - 1 = 2$ $(t = 0,\ s = 3)$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$:

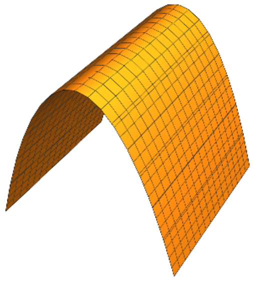
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_3 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad 1 - \delta_1 x^2 - \delta_2 y^2 - \delta_3 z^2 = 0 \quad \text{(elipsoide).}$$



Tipo (II)	$R_H = r_H + 1 = 2$	$R_H = r_H + 1 = 3$	$R_H = r_H + 1 = 4$
$S_H = s_H + 1 = 1$		Cilindro hiperbólico	
$S_H = s_H + 1 = 2$	vacío		Hiperboloide de dos hojas
$S_H = s_H + 1 = 3$		vacío	
$S_H = s_H + 1 = 4$			vacío
$S_H = s_H - 1 = 0$	Planos paralelos		Hiperboloide de una hoja
$S_H = s_H - 1 = 1$		Cilindro elíptico	
$S_H = s_H - 1 = 2$			Elipsoide

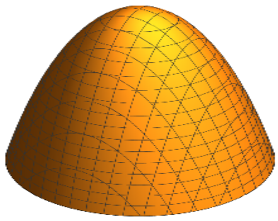
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 3$, $S_H = s_H = 1$ $(t = 1,\ s = 0)$, $\epsilon > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 + 2z = 0 \quad \text{(cilindro parabólico).}$$



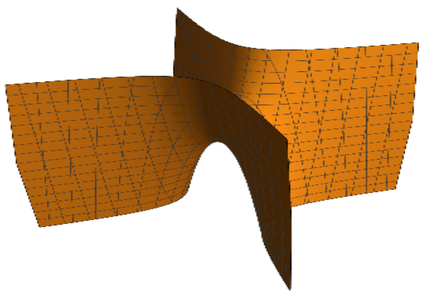
- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 2$ $(t = 1,\ s = 0)$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon_1 x^2 + \epsilon_2 y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode elíptico).}$$



- Caso (III), $R_H = r_H + 2 = 4$, $S_H = s_H = 0$ $(t = 1,\ s = 1)$, $\epsilon, \delta > 0$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{ecuación} \quad \epsilon x^2 - \delta y^2 + 2z = 0 \quad \text{(paraboliode hiperbólico).}$$



Tipo (III)	$R_H = r_H + 2 = 3$	$R_H = r_H + 2 = 4$
$S_H = s_H = 0$		Paraboliode hiperbólico
$S_H = s_H = 1$	Cilindro parabólico	
$S_H = s_H = 2$		Paraboliode elíptico

4.4. Algunos ejercicios resueltos

Ejercicio 4.30 *Clasifica la cónica*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 7y^2 - 6xy + 10x + 2y + 9 = 0\}$$

y encuentra:

- *Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.*
- *Un isomorfismo afín de $\mathbb{R}^2$ que las lleve a su ecuación reducida.*

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$. De aquí que $R_H = r_H = 2$ y estamos en el caso (I). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -3 \\ -3 & -7-t \end{pmatrix} = -16 + 6t + t^2 = (t+8)(t-2),$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $-8, 2$ y $s_H = S_H = 0$. Por tanto la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H consiste de dos rectas secantes.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, lo primero que haremos es encontrar una base B_1 de $\mathbb{R}^2$ en la que $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ adopte su forma de Sylvester. Observemos que los subespacios propios de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ para los valores propios $2, -8$ son:

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^{\mathrm{t}} = (0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(3, -1)\})$$

y

$$V_{-8} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y)^{\mathrm{t}} = (0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, 3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)\}$ es base ortonormal de V_2.
- $\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)\}$ es base ortonormal de V_{-8}.

Por tanto,

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{10}}(3,-1), \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{10}}(1,3)\} = \{\frac{1}{2\sqrt{5}}(3,-1), \frac{1}{4\sqrt{5}}(1,3)\}.$$

A continuación elegimos un sistema de referencia en $\mathbb{R}^2$ con B_1 como base de direcciones, por simplicidad tomaremos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$, y calcularemos la matriz $M_{\mathcal{R}_1}(H)$. Evidentemente el núcleo cuadrático $N_{\mathcal{R}_1}(H)$ de $M_{\mathcal{R}_1}(H)$ será la anterior forma de Sylvester de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$. En efecto, sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 9 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 9 & \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \hline \frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - y_1^2 + 14/\sqrt{5}x_1 + 4/\sqrt{5}y_1 + 9 = 0,$$

que tras completar cuadrados queda

$$(x_1 + 7/\sqrt{5})^2 - (y_1 - 2/\sqrt{5})^2 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5}, \quad y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 - y_2^2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 + 7/\sqrt{5}$, $y_2 = y_1 - 2/\sqrt{5}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 7/\sqrt{5} & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{7}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde calculando

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por otra parte, para toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

esto es,

$$M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) \in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Si elegimos la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

o calculando

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{4\sqrt{5}} \\ 1 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{4\sqrt{5}} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{7}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

se tiene que

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H)) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) =$$

$$= M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

lo que acaba el ejercicio. ∎

Ejercicio 4.31 *Clasifica la cónica*

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -39 - 18x + 9x^2 + 12xy + 8y + 4y^2 = 0\}$$

y encuentra:

- *Un sistema de referencia en el que adopten su ecuación reducida.*
- *Un isomorfismo afín de* $\mathbb{R}^2$ *que las lleve a su ecuación reducida.*

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ \hline -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array}\right), \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^2$. De aquí que $R_H = r_H + 2 = 3$ y estamos en el caso (III) (el valor de s_H y S_H en este caso es irrelevante para la discusión porque en la tabla de las cónicas reducidas sólo hay una con $R_H = r_H + 2 = 3$, ese fenómeno no ocurrirá e dimensiones superiores). Por tanto la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y H es una parábola.

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 9-t & 6 \\ 6 & 4-t \end{pmatrix} = -13t + t^2 = t(t-13),$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $0, 13$ con subespacios propios asociados

$$V_{13} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(3,2)\})$$

y

$$V_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot (x,y)^{\mathrm{t}} = (0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(2,-3)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)\}$ es base ortonormal de V_{13}.
- $\{\frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)\}$ es base ortonormal de V_0.

Por tanto,

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de C_0 se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2), (2,-3)\} = \{\frac{1}{13}(3,2), (2,-3)\};$$

Nótese la irrelevancia del factor de proporcionalidad en el vector de la base de V_0, por eso lo hemos elegido con la expresión más simple.

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -9 & 4 \\ \hline -9 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -39 & -\frac{19}{13} & -30 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 - \frac{38}{13}x_1 - 60y_1 - 39 = 0,$$

esto es

$$(x_1 - \frac{19}{13})^2 - 60y_1 - \frac{6952}{169} = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - \frac{19}{13}, \quad y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + 2y_2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 - \frac{19}{13}$, $y_2 = -30y_1 - \frac{3476}{169}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{3476}{169} & 0 & -30 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) =$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3}{13} & 2 \\ 0 & \frac{2}{13} & -3 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{19}{13} & 1 & 0 \\ -\frac{1738}{2535} & 0 & -\frac{1}{30} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right),$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0).$$

Bastará con elegir la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2621}{2535} & \frac{3}{13} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1928}{845} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{19}{13} & 3 & 2 \\ -\frac{3476}{169} & -\frac{60}{13} & \frac{90}{13} \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.32 *Clasificar las siguientes cónicas:*

(a) $2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0$.

(c) $4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0$.

(d) $-x^2 + xy - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$.

Solución : Comencemos con la cónica H en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

con núcleo simétrico asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $3 > 0, -2 < 0$, $s = t = 1$ y $s_H = 0$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$ y la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una hipérbola afín.

Estudiemos la cónica H en (b) definida por

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

con núcleo simétrico asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 2$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = -2t + t^2 = t(t-2),$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $0, 2 > 0$ y $s_H = 1$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = 2t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene una raíz positiva y una negativa. Por tanto $S_H = s_H - 1 = 0$. Por tanto la forma reducida canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es un par de rectas paralelas.

Estudiemos la cónica H en (c) definida por

$$4x^2 + 2y^2 - 2xy + x - 3y - 3 = 0.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} -3 & 1/2 & -3/2 \\ \hline 1/2 & 4 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{cc} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det \left(\begin{array}{cc} 4-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{array} \right) = 7 - 6t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene dos raíces positivas y $s_H = 2$.

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \left(\begin{array}{ccc} -3-t & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 4-t & -1 \\ -3/2 & -1 & 2-t \end{array} \right) = -29 + \frac{27}{2}t + 3t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa y por tanto $S_H = s_H - 1 = 1$. La forma reducida de H es por tanto

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una elipse afín.

Estudiemos la cónica H en (d) definida por

$$-x^2 + xy - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,y.$$

En el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ tenemos

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \hline -\sqrt{3}/2 & -1 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

co núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{array} \right).$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(x) = \det \left(\begin{array}{cc} -1-t & -1/2 \\ -1/2 & -t \end{array} \right) = -\frac{1}{4} + t + t^2,$$

de donde por la regla de Descartes $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene una raíz positiva, otra negativa y $s_H = 0$.

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1-t & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -t \end{pmatrix} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}t - t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces negativas y una positiva y por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$. La forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

esto es, H es una hipérbola afín.

■

Ejercicio 4.33 *Clasifica afínmente la cuádrica*

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_3 + 1 = 0\},$$

encontrando un sistema de referencia afín en el que venga representada por su matriz canónica.

Solución: En la referencia usual $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo elemental del rango de ambas matrices nos dice que

$$R_H = \mathrm{rang}(M_{\mathcal{R}_0}(H)) = 3, \quad r_H = \mathrm{rang}(N_{\mathcal{R}_0}(H)) = 3.$$

Por otra parte, los polinomios característicos de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ y $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ son respectivamente

$$\hat{p}(t) = 6t + t^2 - 4t^3 + t^4 = (-3+t)(-2+t)t(1+t), \quad p(t) = -4 + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)^2(1+t).$$

Por tanto la regla de Descartes (o una observación directa) nos dice que

$$S_H = s_h = 1.$$

De la tabla de clasificación de las cuádricas concluimos que H tiene por matriz canónica

$$\hat{C}_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

se trata de un cono.

Para encontrar la referencia en la que adopta su matriz canónica procedemos como sigue. Primero calculamos los subespacios propios asociados a los valores propios $-1, 2$ del núcleo cuadrático $N_{\mathcal{R}_0}(H)$.

Para el valor propio 1 queda

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (N_{\mathcal{R}_0}(H) + \mathrm{I}_3).(x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, 1, 1)\},$$

que admite a $\{\frac{1}{3}(1, 1, 1)\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|-1|} = 1$ (quedará invariante), generando la base de V_{-1}:

$$B_{-1} = \{\frac{1}{3}(1, 1, 1)\}$$

Para el valor propio 2 hacemos un cálculo similar.

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (N_{\mathcal{R}_0}(H) - 2\mathrm{I}_3).(x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\},$$

que tiene a $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})\}$ como base ortonormal. A esta base la multiplicamos por $1/\sqrt{|2|} = 1/\sqrt{2}$ generando la base de V_2:

$$B_2 = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}.$$

En el sistema de referencia centrado en el origen con direcciones $B_{-1} \cup B_2$, a saber,

$$\mathcal{R}_1 = \{(0, 0, 0), \{\frac{1}{3}(1, 1, 1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})\}\},$$

la matriz que representa a H es la siguiente

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot \hat{C} \cdot M(\mathrm{Id}_3, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right),$$

esto es,

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si llamamos $p_{\mathcal{R}_1} = (y_1, y_2, y_3)$ a las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, la hipercuádrica se corresponde con los ceros del polinomio

$$1 - y_1^2 - y_2 + y_2^2 - \sqrt{3}y_3 + y_3^2 = 0,$$

o equivalentemente completando cuadrados

$$-y_1^2 + (y_2 - \frac{1}{2})^2 + (y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0.$$

Consideremos el único sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en $\mathbb{R}^3$ en el que las coordenadas $p_{\mathcal{R}_2} = (z_1, z_2, z_3)$ de los puntos de $p \in \mathbb{R}^3$ vengan determinadas por las ecuaciones analíticas

$$z_1 = y_2 - \frac{1}{2}, \quad z_2 = y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = y_1,$$

esto es, el que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La cuádrica H se corresponde ahora con los puntos de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en $\mathcal{R}_2$ son ceros del polinomio

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0,$$

y por tanto H viene representada en $\mathcal{R}_2$ por la matriz canónica $\hat{C}_0$. Esto concluye el ejercicio.

Si se desea expresar $\mathcal{R}_2$ respecto a la referencia $\mathcal{R}_0$ basta con usar la fórmula

$$M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{R^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.34 *Para la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0,$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^3$ que la lleve a su ecuación reducida.

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 9 & -3 & -3 & -2 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_3\big) = 2 + 3t - t^3 = -(-2+t)(1+t)^2$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $-1, -1 < 0, 2 > 0$ y $s_H = 1$. Análogamente el polinomio característico de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ queda

$$\hat{p}(t) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_4\big) = -2 - 17t - 25t^2 - 9t^3 + t^4,$$

de donde por la regla de Descartes $\hat{p}(t)$ tiene una raíz > 0 y tres raíces < 0, y de aquí que $S_H = 2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H es un hiperboloide de dos hojas.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, primero lo que hacemos es cambiar $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta, e igualmente con $N_{\mathcal{R}_0}(H)$, para así lograr que las formas de Sylvester de éstas matrices se correspondan con las asociadas a la forma canónica indicada. Renombraremos a las opuestas con la misma notación:

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios $1 > 0$ doble y $-2 < 0$ simple, y el polinomio característico de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene una raíz < 0 y tres raíces > 0.

Observemos que los subespacios propios de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ para los valores propios $1, -2$ son:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, -1, 0), (, 1, -1, 0)\})$$

y

$$V_{-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x, y, z)^{\mathrm{t}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1, 1, 1)\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\}$ es base ortonormal de V_1.
- $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$ es base ortonormal de V_{-2}.

Por tanto,

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1)\}.$$

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0,0), B_1\}$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} -9 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 4\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}y_1 + 8\sqrt{\frac{2}{3}}z_1 - 9 = 0,$$

esto es

$$x_1^2 + \big(y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\big)^2 - \big(z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}\big)^2 + 1 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad z_2 = z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 + 1 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_2 = z_1 - 4\sqrt{\frac{2}{3}}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 1 & 0 \\ -4\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)^{-1}=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}&0&1&0\\ 4\sqrt{\frac{2}{3}}&0&0&1\end{array}\right)$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\ -\sqrt{\frac{2}{3}}&0&1&0\\ 4\sqrt{\frac{2}{3}}&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 1&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 2&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M_{\mathcal{R}_2}(H)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\end{array}\right).$$

Por otra parte, para toda afinidad $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ sabemos que

$$M(f^{-1},\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}_0)\in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big).$$

Si elegimos la única f tal que

$$M(f,\mathcal{R}_0)^{-1}=M(f^{-1},\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 1&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 2&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

esto es

$$M(f,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\ \sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\sqrt{\frac{2}{3}}\\ -4\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix},$$

tendremos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H))=M(f^{-1},\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}_0)=$$

$$=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M_{\mathcal{R}_2}(H)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\end{array}\right),$$

lo que acaba el ejercicio. ∎

Ejercicio 4.35 *Clasifica afínmente la cuádrica en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2yz + 2z + 2 = 0.$$

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(x)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_3\big) = -2 - 4t + 5t^2 - t^3$$

de donde por la regla de Descartes $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene dos valores propios > 0 y uno < 0, por lo que $s_H = 1$. Análogamente el polinomio característico de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ queda

$$\hat{p}(t) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_4\big) = -9 - t + 13t^2 - 7t^3 + t^4,$$

de donde por la regla de Descartes $\hat{p}(t)$ tiene tres raíces > 0 y una < 0, y de aquí que $S_H = 2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

y H es un hiperboloide de dos hojas. ■

Ejercicio 4.36 *Para la cuádrica en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$$

determinar una sistema de referencia y un isomorfimo afín de $\mathbb{R}^3$ *que la lleve a su ecuación reducida.*

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 2 = 4$ y estamos en el caso (III). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det\left(N_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_3\right) = -2t + 3t^2 - t^3 = -(-2+t)(-1+t)t$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $0, 1, 2 > 0$ y $S_H = s_H = 2$. Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y H es un paraboloide elíptico.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta su forma canónica, observemos que los subespacios propios de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ para los valores propios $0, 1, 2$ son:

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(0,0,1))\}),$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,1,0)\}),$$

y

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x,y,z)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,-1,,0))\}).$$

Bases ortonormales de los subespacios propios se generan trivialmente:

- $\{(0,0,1)\}$ es base ortonormal de V_1.
- $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\}$ es base ortonormal de V_2.
- $V_0 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$.

Por tanto,

$$\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\}$$

es base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle)$, y la forma de Sylvester $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ se alcanza en la base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle)$

$$B_1 = \{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)), (1,-1,0)\} = \{(0,0,1), \frac{1}{2}(1,1,0)), (1,-1,0)\}).$$

Nótese que el vector en B_1 proveniente de una base de V_0 es irrelevante, por eso hemos elegido el más simple para el cálculo.

Si denotamos $\mathcal{R}_1 = \{(0,0,0), B_1\}$ sabemos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0),$$

y como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

un cálculo inmediato nos da que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1, z_1)$ representan las coordenadas en $\mathcal{R}_1$ de los puntos de los puntos $p \in \mathbb{R}^3$, lo anterior significa que H viene representada en $\mathcal{R}_1$ por los ceros del polinomio

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - y_1 - 2z_1 + 1 = 0,$$

esto es,

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2 - 2(z_1 + \frac{1}{8}) = 0$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 - 1, \quad y_2 = y_1 - \frac{1}{2}, \quad z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$$

definen un cambio de $\mathcal{R}_1$ a un nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ con $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2, z_2)$ representando las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_2$. Claramente

$$x_2^2 + y_2^2 - 2z_2 = 0$$

es la ecuación analítica de H en $\mathcal{R}_2$, y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si se quiere una determinación más explícita de $\mathcal{R}_2$, obsérvese que por definición (de las ecuaciones $x_2 = x_1 - 1$, $y_2 = y_1 - \frac{1}{2}$, $z_2 = -z_1 - \frac{1}{8}$) se deduce que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

de donde

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por tanto

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_0)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_1)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 0&0&\frac{1}{2}&1\\ 0&0&\frac{1}{2}&-1\\ 0&1&0&0\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline 1&1&0&0\\ \frac{1}{2}&0&1&0\\ -\frac{1}{8}&0&0&-1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline -\frac{3}{8}&0&\frac{1}{2}&-1\\ -\frac{1}{8}&0&\frac{1}{2}&1\\ -1&1&0&0\end{array}\right)$$

y esto determina el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ que resuelve el ejercicio.

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M_{\mathcal{R}_2}(H)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}0&0&0&1\\ \hline 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\end{array}\right).$$

Como para toda afinidad $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ sabemos que

$$M(f^{-1},\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}_0)\in M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big),$$

si elegimos la única f tal que

$$M(f,\mathcal{R}_0)^{-1}=M(f^{-1},\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\ \hline -\frac{3}{8}&0&\frac{1}{2}&-1\\ -\frac{1}{8}&0&\frac{1}{2}&1\\ -1&1&0&0\end{array}\right),$$

esto es

$$M(f,\mathcal{R}_0)=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&0&0&1\\ \frac{1}{2}&1&1&0\\ -\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

tendremos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(f(H))=M(f^{-1},\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(f^{-1},\mathcal{R}_0)=$$

$$=M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}}\cdot M_{\mathcal{R}_0}(H)\cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{R}_2,\mathcal{R}_0)=M_{\mathcal{R}_2}(H)=\left(\begin{array}{c|ccc}0&0&0&1\\ \hline 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\end{array}\right),$$

lo que acaba el ejercicio. ■

Ejercicio 4.37 *Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación*

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+x+y+z+1=0.$$

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H)=\left(\begin{array}{c|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \hline \frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 4$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det\big(C_0 - t\mathrm{I}_3\big) = 1/2 - (9t)/4 + 3t^2 - t^3 = -\frac{1}{4}(-2+t)(-1+2t)^2$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios $2 > 0$, $1/2$ doble y $s_H = 3$. Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_4\big) = \frac{5}{16} - 2t + \frac{9}{2}t^2 - 4t^3 + t^4,$$

y la regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene cuatro raíces positivas y $S_H = 4$.

Por tanto la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y H es vacía. ■

Ejercicio 4.38 *Encontrar la ecuación reducida de la hipercuádrica en $\mathbb{R}^4$ de ecuación:*

$$2x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2xz - 2yz + 2yw + 2x - 2y + 2w + 1 = 0.$$

Solución: Es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

con núcleo cuadrático asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{R}_0$ es el sistema de referencia usual de $\mathbb{R}^3$. De aquí que $R_H = r_H + 1 = 5$ y estamos en el caso (II). El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det\big(N_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_3\big) = 2 + 3t - 6t^2 - t^3 + t^4$$

de donde por la regla de Descartes $p(t)$ tiene tiene dos raíces positivas y dos negativas, y por tanto $s_H = 0$. Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det\big(M_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_4\big) = 3 + t - 14t^2 + 8t^3 + 2t^4 - t^5,$$

y la regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y tres negativas, y cambiando $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ por su opuesta, tres positivas y dos negativas. En cualquier caso $S_H = 1$ y la forma reducida o canónica de H es

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.39 *Demuestra los siguientes enunciados.*

(a) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una* elipse euclidiana.

(b) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante, es una* hipérbola euclidiana*.*

(c) *El lugar geométrico de los puntos del plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ que equidistan de una recta (llamada directriz) y de un punto exterior a la misma (llamado foco), es una* parábola euclidiana*.*

Solución: Discutamos (a). Tomemos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera (podría ser $F_1 = F_2$), consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}(p, F_1) + \mathrm{d}(p, F_2) = 2b\}.$$

Como $\mathrm{d}(F_1, F_2) \leq \mathrm{d}(p, F_1) + \mathrm{d}(p, F_2)$, la condición $2b < \mathrm{d}(F_1, F_2)$ implicaría que $H = \varnothing$. Para evitar este caso degenerado supondremos $2b \geq \mathrm{d}(F_1, F_2)$, lo que como veremos más adelante implicará que $H \neq \varnothing$.

Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F_1) = (-a, 0) \in \mathbb{R}^2, \quad f(F_2) = (a, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $2a = \mathrm{d}(F_1, F_2) \leq 2b$, esto es, $a \leq b$. Excluiremos el caso $a = b$ por ser degenerado y supondremos $a < b$. Bastará con comprobar que $f(H)$ es una elipse euclídea. En efecto, la ecuación

$$\mathrm{d}((x, y), (-a, 0)) + \mathrm{d}((x, y), (a, 0)) = 2b \Longleftrightarrow \sqrt{(x + a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 2b.$$

Operando

$$(x + a)^2 + y^2 = \left(\sqrt{(x - a)^2 + y^2} - 2b\right)^2,$$

y desarrollando y usando la ecuación original

$$b^2 - ax + b\sqrt{(a + x)^2 + y^2} = 0.$$

De aquí que $b^2\big((a + x)^2 + y^2\big) = \big(b^2 - ax\big)^2$, esto es,

$$1 - \frac{1}{b^2}x^2 - \frac{1}{b^2 - a^2}y^2 = 0,$$

lo que corresponde con una elipse euclidiana toda vez que $-\frac{1}{b^2-a^2} > 0, -\frac{1}{b^2} < 0$.

Discutamos (b). Tomemos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos cualesquiera con $F_1 \neq F_2$ (de otra forma el problema degenera). Consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon \big|\mathrm{d}(p, F_2) - \mathrm{d}(p, F_1)\big| = 2b\}.$$

El caso $b = 0$ se corresponde con que H sea la mediatriz del segmento $[F_1, F_2]$, caso que excluimos. Como $\mathrm{d}(F_1, p) \leq \mathrm{d}(F_1, F_2) + \mathrm{d}(F_2, p)$ y $\mathrm{d}(F_2, p) \leq \mathrm{d}(F_2, F_1) + \mathrm{d}(F_1, p)$, deducimos que

$$2b = \big|\mathrm{d}(p, F_2) - \mathrm{d}(p, F_1)\big| \leq \mathrm{d}(F_2, F_1)$$

Sea $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F_1) = (0, -a) \in \mathbb{R}^2, \quad f(F_2) = (0, a) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $2a = \mathrm{d}(F_1, F_2)$. La anterior desigualdad nos da que

$$2b = \big|\mathrm{d}(p, F_2) - \mathrm{d}(p, F_1)\big| \leq 2a, \quad \text{esto es,} \quad b \leq a.$$

Excluiremos el caso $a = b$ por ser degenerado (generaría una recta doble), por lo que supondremos $a < b$. Bastará con comprobar que $f(H)$ es una hipérbola euclídea. En efecto, la ecuación

$$\big|\mathrm{d}((x, y), (0, a)) - \mathrm{d}((x, y), (0, -a))\big| = 2b \Longleftrightarrow \big|\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \sqrt{x^2 + (y+a)^2}\big| = 2b.$$

Suponiendo que

$$\mathrm{d}((x, y), (0, a)) - \mathrm{d}((x, y), (0, -a)) = 2b > 0$$

(a la misma ecuación se llegaría si $\mathrm{d}((x, y), (0, a)) - \mathrm{d}((x, y), (0, -a)) = -2b < 0$) y operando

$$(y - a)^2 + x^2 = \big(\sqrt{(y + a)^2 + x^2} + 2b\big)^2,$$

y desarrollando y usando la ecuación original

$$-4b\sqrt{(a + y)^2 + x^2} - 4ay - 4b^2 = 0.$$

De aquí que $b^2\big((a + y)^2 + x^2\big) = \big(b^2 + ay\big)^2$, esto es,

$$1 + \frac{1}{a^2 - b^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 = 0,$$

lo que corresponde con una hipérbola euclidiana toda vez que $\frac{1}{a^2-b^2} > 0, -\frac{1}{b^2} < 0$. La dicotomía

$$\mathrm{d}((x, y), (0, a)) - \mathrm{d}((x, y), (0, -a)) = 2b > 0, \quad \mathrm{d}((x, y), (0, a)) - \mathrm{d}((x, y), (0, -a)) = -2b < 0$$

refleja analíticamente cada una de las dos ramas de la hipérbola. ■

Discutamos (c). Tomemos un punto $F \in \mathbb{R}^2$ y una recta $R \subset \mathbb{R}^2$, y consideremos

$$H = \{p \in \mathbb{R}^2 \colon \mathrm{d}(p, F) = \mathrm{d}(p, R)\}.$$

Si $p \in R$ es fácil ver que H es la recta ortogonal a R que pasa por p, caso degenerado. Supondremos pues que $p \notin R$.

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cualquier movimiento rígido tal que

$$f(F) = (0, -a) \in \mathbb{R}^2, \quad f(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = a\}, \quad a > 0.$$

Tras esta isometría euclidiana H se convierte en

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{(a+y)^2 + x^2} = |y - a|\}.$$

Calculando, $(x, y) \in H$ si y sólo si

$$(a+y)^2 + x^2 - (y-a)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2y + \frac{1}{2a}x^2 = 0,$$

lo que corresponde con una parábola euclidiana.

Ejercicio 4.40 *Un hipercuádrica H en $\mathbb{R}^n$ se dice* invariante por homotecias lineales *si para toda homotecia $h_{O,r}$ con centro el origen $O \in \mathbb{R}^n$ y razón $r \neq 0$,*

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda M_{\mathcal{R}_0}(H)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dependiendo de r); en particular, $h_{O,r}(H) = H$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostrar que H cumple esta propiedad si y sólo si $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$, donde C es simétrica y no nula. Mostrar ejemplos de este tipo de cuádricas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Solución: Escribamos $M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right)$, y por tanto

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x^t \cdot C \cdot x + 2\langle z, x\rangle + a = 0\}.$$

Supongamos que $h_{0,r}(H) = H$ para todo $r \neq 0$. La condición

$$M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(h_{O,r}^{-1}, \mathcal{R}_0) = \lambda\, M_{\mathcal{R}_0}(H) \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

en nuestras hipótesis equivale a que

$$\left(\begin{array}{c|c} a & rz^t \\ \hline rz & r^2C \end{array}\right) = \lambda\, M_{\mathcal{R}_0}(H) \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

esto es,

$$\left(\begin{array}{c|c} a & rz^t \\ \hline rz & r^2C \end{array}\right) \in \left\{\lambda \left(\begin{array}{c|c} a & z^t \\ \hline z & C \end{array}\right) \colon \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \quad \forall r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por tanto necesariamente $a = 0$ y $z = 0$, y de aquí se sigue lo buscado.

Ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son todos los del tipo (I). ■

Ejercicio 4.41 *Hacer la clasificación euclidiana de la cónica en el plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ dada por*

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

Dar un sistema de referencia rectangular de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ en el que adopte su forma reducida, y un movimiento rígido que la lleva a su forma reducida en el sistema de referencia rectangulat usual $\mathcal{R}_0$ de $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$.

Solución : Comencemos con la cónica H en (a) definida por

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 6x - 2y + 1 = 0.$$

En el sistema de referencia rectangular usual $\mathcal{R}_0$ en el plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$, tenemos que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

con núcleo simétrico asociado

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí que $R_H = r_H + 1 = 3$ y estamos en el caso (II).

El polinomio característico $p(t)$ de la matriz $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} = -6 - t + t^2 = (-3+t)(2+t),$$

de donde $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ tiene por valores propios a $3 > 0, -2 < 0$ y $s_H = 0$ (esa información también se deduce de la regla de Descartes).

Análogamente el polinomio característico $\hat{p}(t)$ de la matriz $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$\hat{p}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 & -1 \\ 3 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & -1-t \end{pmatrix} = -11 + 15t + 2t^2 - t^3.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(t)$ tiene dos raíces positivas y una negativa. Por tanto $S_H = s_H + 1 = 1$ y la forma reducida de H es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \end{array}\right),$$

para ciertos $\epsilon, \delta > 0$ por determinar, esto es, H es una hipérbola euclídea.

Para la clasificación euclidiana necesitamos encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la que diagonalice C (diagonalización ortogonal). Para ello determinamos los subespacios propios de C asociados a sus valores propios.

$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} (x,y)^t = (0,0)^t\} = L(\{(2,1)\}).$$

$$V_{-2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (x,y)^t = (0,0)^t\} = L(\{(-1,2)\}).$$

Determinamos bases ortonormales $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)\}$ de V_3 y $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\}$ de V_{-2} y formamos la base ortonormal de $\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$

$$B_1 = \{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)\}.$$

Consideremos el sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}_1 = \{(0,0), B_1\}$ y observemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right)$$

Como $M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^t \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)$, deducimos que

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \hline \sqrt{5} & 3 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Si escribimos $p_{\mathcal{R}_1} = (x_1, y_1)$ para las coordenadas de los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ en $\mathcal{R}_1$, tenemos que H se corresponde con los puntos cuyas coordenadas en $\mathcal{R}_1$ satisfacen el polinomio

$$3x_1^2 - 2y_1^2 + 2\sqrt{5}x_1 - 2\sqrt{5}y_1 + 1 = 0.$$

Un cálculo elemental nos permite reescribir la ecuación como

$$3\big(x_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}x_1\big) - 2\big(y_1^2 + \frac{2\sqrt{5}}{2}y_1\big) + 1 = 0,$$

y completando cuadrados

$$3\big(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\big)^2 - 2\big(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\big)^2 + \frac{11}{6} = 0,$$

y dividiendo por $11/6$

$$\frac{18}{11}\big(x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}\big)^2 - \frac{12}{11}\big(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\big)^2 + 1 = 0.$$

Las ecuaciones analíticas

$$x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad y_2 = y_1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

modelan el cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}_1$ al nuevo sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ de coordenadas (x_2, y_2). Obsérvese que $\mathcal{R}_2$ es también un sistema de referencia rectangular ya que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$\mathcal{R}_1$ es rectangular y $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, B_1, B_2) = \mathrm{I}_2 \in \mathrm{O}(2, \mathbb{R})$, donde B_2 es la base de direcciones de $\mathcal{R}_2$. Como los puntos $p \in H$ en coordenadas $p_{\mathcal{R}_2} = (x_2, y_2)$ se caracterizan por satisfacer

$$\frac{18}{11}x_2^2 - \frac{12}{11}y_2^2 + 1 = 0,$$

tenemos que

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array}\right)$$

y en $\mathcal{R}_2$ la cónica adopta su forma reducida euclidiana con $\epsilon = \frac{18}{11}, \delta = \frac{12}{11}$.

Si se quiera explicitar $\mathcal{R}_2$ en coordenadas usuales, observemos que

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y como $M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1)$, entonces

$$M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{5}}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right).$$

Para la segunda parte del ejercicio, observemos que de lo anterior se sigue

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \frac{11}{6}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{18}{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} \end{array}\right).$$

Como en el ejercicio anterior, toda afinidad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisface

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0),$$

o equivalentemente

$$M_{\mathcal{R}_0}\big(f(H)\big) = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(f^{-1}, \mathcal{R}_0).$$

Bastará con elegir la única f tal que

$$M(f, \mathcal{R}_0)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right),$$

esto es

$$M(f, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right).$$

■

Ejercicio 4.42 *Encontrar la ecuación reducida y decir de qué tipo es la cónica H siguiente en función del parámetro real a:*

$$a\,x^2 + y^2 + 4a\,xy - 2x - 4y + a = 0.$$

Solución: La matriz que representa a H en el sistema de referencia usual es

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|cc} a & -1 & -2 \\ \hline -1 & a & 2a \\ -2 & 2a & 1 \end{array}\right),$$

con núcleo cuadrático

$$N_{\mathcal{R}_0}(H) = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & 1 \end{pmatrix},$$

Por tanto el polinomio característico de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$ queda,

$$\hat{p}(t) = \det(M_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_3) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

donde

$$c_0 = (1-a)(1+a)(-1+4a), \quad c_1 = 5 - 2a + 3a^2, \quad c_2 = 1 + 2a, \quad c_3 = -1$$

Análogamente el polinomio característico de $N_{\mathcal{R}_0}(H)$ viene dado por

$$p(t) = \det(N_{\mathcal{R}_0}(H) - t\mathrm{I}_2) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2,$$

donde

$$d_0 = a(1-4a), \quad d_1 = -1-a, \quad d_2 = 1.$$

■

Los valores críticos del parámetro, donde se anula alguno de los coeficientes, son pues $a = -1, -1/2, 0, 1/4, 1$. La distribución de signos de esos coeficientes queda:

	d_0	d_1	d_2	c_0	c_1	c_2	c_3
$a \in]-\infty, -1[$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$a = -1$	$-$	0	$+$	0	$+$	$-$	$-$
$a \in]-1, -1/2[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$a = -1/2$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	0	$-$
$a \in]-1/2, 0[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a = 0$	0	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a \in]0, 1/4[$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$a = 1/4$	0	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$-$
$a \in]1/4, 1[$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$a = 1$	$-$	$-$	$+$	0	$+$	$+$	$-$
$a \in]1, +\infty[$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

Un cálculo sencillo y la regla de Descartes nos da la siguiente tabla para los valores de R_H, r_H, S_H, s_H según los valores de a, y por tanto la clasificación final:

	R_H	r_H	S_H	s_H	
$a \in]-\infty, -1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in]-1, -1/2[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = -1/2$	3	2	1	0	hipérbola
$a \in]-1/2, 0[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 0$	3	1	1	1	parábola
$a \in]0, 1/4[$	3	2	1	2	elipse
$a = 1/4$	2	1	0	1	dos rectas paralelas
$a \in]1/4, 1[$	3	2	1	0	hipérbola
$a = 1$	2	2	0	0	dos rectas secantes
$a \in]1, +\infty[$	3	2	1	0	hipérbola

Ejercicio 4.43 *Clasifica afínmente la cuádrica H del espacio afín $\mathbb{R}^3$ que en en el sistema de referencia usual $\mathcal{R}_0$ viene definida por la ecuación*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 2 = 0.$$

Solución : En el sistema de referencia $\mathcal{R}_0$ de $\mathbb{R}^3$ es claro que

$$M_{\mathcal{R}_0}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $R_H = 3 = r_H + 2$, por lo que estamos con una cuádrica de tipo (III).

Ls correspondientes polinomios característicos quedan

$$\hat{p}(x) = \det\left(M_{\mathcal{R}_0}(H) - x\mathrm{I}_4\right) = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8),$$

$$p(x) = \det\left(N_{\mathcal{R}_0}(H) - x\mathrm{I}_4\right) = -(x-3)x^2.$$

La regla de Descartes nos dice que $\hat{p}(x)$ tiene 2 raíces positivas y 1 negativa, además de $x = 0$, y análogamente $p(x)$ tiene 1 raíz positiva, además de $x = 0$ doble. Por tanto $S_H = s_H = 1$, y la matriz canónica de H queda

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De aquí que H sea un cilindro parabólico.

Para encontrar el sistema de referencia en el que H adopta esa forma canónica procedemos como siempre, determinando los subespacios propios de $M_{\mathcal{R}_0}(H)$.

$$V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ (N_{\mathcal{R}_0}(H) - 3\mathrm{I}_3) \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,1,1)\})$$

$$V_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon N_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (0,0,0)^{\mathrm{t}}\} = L(\{(1,-1,0), (1,0,-1)\}).$$

Al vector $(1,1,1)$ lo normalizamos $1/\sqrt{3}(1,1,1)$, y luego dividimos éste último vector por la raíz cuadrada del valor propio 3 asociado, quedando $1/3(1,1,1)$. Los vectores de V_0 no necesitan ser modificados (como siempre ocurre para el valor propio 0), y formamos la referencia

$$\mathcal{R}_1 = \big\{(0,0,0), B_1 = \{1/3(1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1)\}\big\}.$$

Como

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{array}\right),$$

queda

$$M_{\mathcal{R}_1}(H) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0)^{\mathrm{t}} \cdot M_{\mathcal{R}_0}(H) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & -\frac{2}{3} & -2 & -2 \\ \hline -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, si para cada punto $p \in \mathbb{R}^3$ escribimos $p_{\mathcal{R}_1} = (y_1, y_2, y_3)$, la hipercuádrica H se escribe en coordenadas respecto de $\mathcal{R}_1$ como

$$y_1^2 - 4/3y_1 - 4y_2 - 4y_3 + 2 = 0,$$

esto es, completando cuadrados,

$$(y_1 - 2/3)^2 + (14/9 - 4y_2 - 4y_3) = 0.$$

Llamemos

$$z_1 = y_1 - 2/3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = 7/9 - 2y_2 - 2y_3,$$

y consideremos en $\mathbb{R}^3$ el sistema de referencia $\mathcal{R}_2$ en el que para todo punto $p \in \mathbb{R}^3$ tenemos $p_{\mathcal{R}_2} = (z_1, z_2, z_3)^{\mathrm{t}}$, esto es, el que satisface

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7/9 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Claramente la cuádrica H se escribe en coordenadas respecto a $\mathbb{R}^3$ como $z_1^2 + 2z3 = 0$, y por tanto

$$M_{\mathcal{R}_2}(H) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si se quiere determinar $\mathcal{R}_2$ respecto a las coordenadas usuales basta con calcular

$$M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1) \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)^{-1} \cdot M(\mathrm{Id}_{\mathcal{R}^3}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7/9 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{7}{18} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

■