

### RECALCIÓN TEMA 3

1. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto sin puntos aislados.

a) Dados  $U \subset X$  abierto y  $x \in X$ , probar que  $\exists V$  abierto tal que  $V \subset U$  y  $x \notin \bar{V}$ .

$\Rightarrow$  En primer lugar supongamos que  $U \neq \emptyset$ .

$\Rightarrow X$  es de Hausdorff  $\Rightarrow$  Definición: teniendo un abierto  $U$  y  $x \in X$ , existen dos subconjuntos abiertos  $W, Y$  tal que  $U \subset W$ ,  $x \in Y$  y  $W \cap Y = \emptyset$

$\Rightarrow$  Tomemos ahora  $z \in U$ , con  $z \neq x$ . Como hemos supuesto por hipótesis que el subconjunto  $U$  no es vacío ( $U \neq \emptyset$ ) y que en el espacio métrico definido no existen puntos aislados, la existencia de dicho  $z$  es garantizada.

Ahora, como  $W \cap Y = \emptyset$ ,  $\exists r, s > 0 : B(x, r) \cap B(y, s) = \emptyset$ . Y no se puede dar que  $x$  pertenezca a  $\bar{B}(y, s)$ , ya que existe un entorno del punto  $x$ , es decir, un  $V_x \in \mathcal{N}_x$  tal que  $B(y, s) \cap V_x = \emptyset$ . Por tanto tenemos que  $x \notin \bar{B}(y, s)$ .

$\Rightarrow$  Finalmente, tenemos que  $B(y, s)$  es el  $V$  que estábamos buscando a.

b) Si  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $X$  probar que existe una sucesión de conjuntos abiertos  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $V_{i+1} \subset V_i$  y  $x_i \notin \bar{V}_i$ . Concluir que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{V}_i \neq \emptyset$ .

$\Rightarrow$  Sabemos que  $\exists V \subset X$  abierto de tal manera que  $x \notin \bar{V}$ . (Ap a)

$\Rightarrow$  Consideremos que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe un abierto  $V_i$  tal que  $x_i \notin \bar{V}_i$ .

Construyamos una sucesión  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de modo que si tenemos  $V_{i-1}$ , de forma  $V_i \subset V_{i-1}$ , sabiendo que  $x_{i-1} \notin \bar{V}_i$ .

$\Rightarrow$  Recordemos que  $X$  es compacto. Esto nos lleva a que la sucesión de cerrados  $\{\bar{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tiene intersección no vacía, puesto que  $\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots$ . Así por la propiedad de la intersección finita,  $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bar{V}_i$ , con  $x_i \notin \bar{V}_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

c) Deducir que  $\mathbb{R}$  no es numerable.

⇒ Supongamos  $\mathbb{R}$  numerable  $\Rightarrow$  Existe una biyección de los naturales en el conjunto  $\mathbb{R}$  definida por una función  $f$ . Esto es:  $f$  biyectiva ~~de~~ definida como  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

⇒ Concretamos la definición de  $f$ :

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

⇒ Esta función no es sobyectiva, ya que  $\exists x \in \mathbb{R}$  con  $x \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Esto demuestra que  $f$  no es biyectiva y  $\mathbb{R}$  no es numerable.

---

[2.] Sea  $I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . E define  $I_n$  inductivamente por la igualdad:

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left[ \frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right]$$

Proban que la intersección  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n$  es no vacía. Al conjunto  $C$  se le denomina conjunto de Cantor.

⇒  $0, 1 \in C$ , por tanto la intersección no es vacía.

[2.2.] Proban que cada conjunto  $I_n$  es unión finita de intervalos cerrados de longitud  $\frac{1}{3^n}$  y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a  $C$ .

⇒ Cada  $I_n$  es de la siguiente manera:

⇒ Del intervalo  $[0, 1]$  quitamos el intervalo  $J_1 = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ .

$$I_1 = [0, 1] \setminus J_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

⇒ A cada intervalo le quitamos  $J_2^0$  y  $J_2^1$ : ( $J_2^0 = ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ ;  $J_2^1 = ]\frac{2}{9}, \frac{1}{3}[$ ).

$$\text{de donde tenemos: } I_2 = ([0, \frac{1}{3}] \setminus J_2^0) \cup ([\frac{2}{3}, 1] \setminus J_2^1)$$

$$= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{1}{9}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

⇒ Por inducción, definiremos  $J_n^b = \left[ \frac{3^b j - 2}{3^n}, \frac{3^b j - 1}{3^n} \right]$  para  $b_j \in \{1, \dots, 3^{i-1}\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, 2^{N-2}\}$   
 $n \in \mathbb{N}$ , de donde obtenemos que

$$J = \bigcup_{j=0}^{2^{N-1}} J_n^j \quad \text{y} \quad I_N = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^{2^{N-1}-1} J_k$$

2.2 Probar que  $C$  es compacto

⇒ Como  $C$  es unión finita de cerrados, se tiene que  $C$  es cerrado. Además  $C$  está acotado por  $C \subset [0, 1]$ .  $C$  es compacto por el T<sup>2</sup> de Heine-Borel.

2.3 Probar que  $C$  es totalmente desconexo.

⇒ 1<sup>o</sup>:  $C$  no contiene intervalos.

⇒ Supongamos que  $[x, y] \subset C$ . Tomamos  $q \in ]x, y[$  y sea un  $\varepsilon > 0$  tal que  $]q - \varepsilon, q + \varepsilon[ \subset ]x, y[$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < \varepsilon$ . Como  $q \in C$ .

Tenemos que  $]q - \varepsilon, q + \varepsilon[ \cap (\mathbb{R} \setminus C_n) \neq \emptyset$ , siendo  $C_n = [0, 1] \setminus J_n$ , definido en apartado 2.1

⇒ Con esto, existe un  $a \in ]q - \varepsilon, q + \varepsilon[ \cap (\mathbb{R} \setminus C_n)$ , por lo que ~~( $a \in C$ )~~

~~( $a \in ]q - \varepsilon, q + \varepsilon[ \subset C \subset C_n$ )~~ y  $a \in \mathbb{R} \setminus C_n$ . Imposible!!

⇒ Se concluye que  $[x, y] \not\subset C$ .

⇒ 2<sup>o</sup>  $C$  totalmente desconexo:

⇒ Supongamos que existe una componente conexa  $\Delta$  con más de un punto.

Entonces  $\Delta \subset \mathbb{R}$ . Tomamos  $x, y \in \Delta$ ,  $x < y$ . Como  $C$  no tiene intervalos,

$\exists t \in \mathbb{R} \setminus C$  tal que  $x \leq t < y \Rightarrow \Delta = ([x, t[ \cap \Delta) \cup (\Delta \cap ]t, y])$ .

con  $x \in ]-\infty, t[ \cap \Delta$ ,  $y \in \Delta \cap ]t, +\infty[$

⇒  $\Delta$  no es conexo ya haber obtenido unión de abiertos con intersección vacía.



2.4 Probar que  $C$  no tiene puntos aislados.

a)  $\forall x \in C, \exists y \in C$ , con  $y \neq x$  tal que  $|x-y| \leq \frac{1}{3^n}$

Como  $x \in C$ , pertenece a alguno de los  $2^{n-1}$  segmentos de longitud  $\frac{1}{3^n}$  que constituyen  $C$ . Denotemos a  $y$  y  $b_n$  a los extremos de un intervalo.

$\Rightarrow x \in [a_n, b_n] \subset C$ ,  $a_n \leq x \leq b_n$

$\Rightarrow$  Elegimos  $y = \begin{cases} a_n & \text{si } |x-a_n| \geq |x-b_n| \\ b_n & \text{si sucede otro caso} \end{cases}$

b) Como  $y$  es extremo de  $C$ ,  $y \in C$  y la longitud del segmento es

$\frac{1}{3^n}$ ,  $\Rightarrow |x-y| \leq \frac{1}{3^n}$ ,  $x \neq y$  y  $y \in C$ .

2.5 Alendo el problema anterior, probar que  $C$  no es numerable.

$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Como la propiedad de Hausdorff es hereditaria, } C \text{ tamb la cumple.} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow C \text{ compacto y sin puntos aislados.} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Por el ejercicio 1, } C \text{ no es numerable.} \end{array} \right.$