Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2022/23)

Relación de ejercicios 1

$\boxed{1}$ **Depósito de capital.** Un banco ofrece un interés del 7% anual para depósitos de capital a medio plazo.

(a) Si disponemos de un capital inicial de 10000 euros, ¿de qué capital dispondremos al cabo de 4 años?

(b) Si se pretende disponer de 25000 euros dentro de 4 años, ¿cuál debe ser el capital inicial?

(c) Supongamos ahora que no conocemos el interés que proporciona el banco. Si inicialmente disponemos de 10000 euros y pasados 5 años tenemos 12000, ¿cuál es el interés anual aplicado?

$\boxed{2}$ **Explosión demográfica.** Una población sigue un modelo de crecimiento malthusiano con tasa de crecimiento neta $\alpha = 0.16$, es decir: si x_n es el número de individuos en el periodo n, entonces

$$x_{n+1} = 1.16\, x_n.$$

(a) Calcula el número de periodos necesarios para que la población se duplique y cuadruplique.

(b) Calcula el tiempo promedio de duplicación.

(c) Calcula el tiempo promedio de quintuplicación.

$\boxed{3}$ Un fármaco tiene una vida media de 2 semanas. Calcula la concentración inicial de fármaco si a los 5 días encontramos una concentración en sangre de $3\, mg/cm^3$.

(a) ¿Cada cuánto tiempo se diezma en promedio la concentración de fármaco?

(b) Calcula el tiempo necesario para que la concentración de fármaco sea menor que $0.1\, mg/cm^3$.

$\boxed{4}$ La variación de masa de un material radiactivo se modela mediante la ley

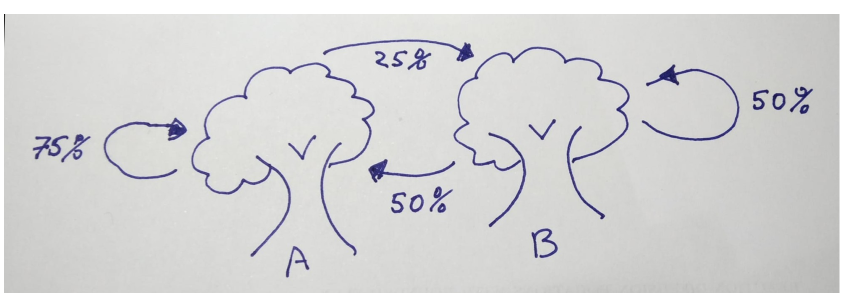
$$x_{n+1} = r\, x_n, \qquad 0 < r < 1, \tag{1}$$

donde cada periodo representa un milenio y r es la probabilidad de que un átomo sobreviva un periodo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 se estima en 5730 años, ¿cuál es la probabilidad de que un átomo se desintegre en los 1000 primeros años?

$\boxed{5}$ En un hospital fueron puestos en observación 20 pacientes con motivo de una enfermedad rara. Tras 7 días la mitad de los pacientes fueron dados de alta. Calcula el tiempo promedio de recuperación.

$\boxed{6}$ Una población de gusanos de seda se distribuye entre dos árboles de morera A y B. Empíricamente se ha observado que cada día estos cambian de árbol de la siguiente forma:

- El 75% de los gusanos que están en el árbol A en un determinado día permanecen en él al día siguiente, mientras que el resto cambia al árbol B.
- El 50% de los gusanos que están en el árbol B en un determinado día permanecen en él al día siguiente, mientras que el resto cambia al árbol A.



Se pretende estudiar cómo evoluciona la población de gusanos. Supongamos que al comienzo del estudio había 3400 gusanos en el árbol A y 2600 en el árbol B. Sean x_n el número de gusanos que hay en el árbol A en el n-ésimo día e y_n el número de gusanos que hay en B.

(a) Escribe las leyes de recurrencia que modelan la cantidad de gusanos en cada árbol.

(b) Demuestra que $x_n + y_n = 6000$.

(c) Escribe una ecuación en diferencias para x_n y resuélvela.

(d) Determina el comportamiento asintótico de la población de gusanos en ambos árboles.

7 Dos países compiten por el abastecimiento de crudo mundial. Se sabe que el país A cuida más a sus clientes y, por tanto, el 90% de los que un año contratan el abastecimiento con este vuelven a hacerlo el siguiente año. Sin embargo, solo el 70% de los clientes de B vuelven a concertar de nuevo su abastecimiento con este país. Se supone que todos los países tienen que contratar su abastecimiento con A o con B. Este año la situación política del país A impide que pueda abastecer a ningún país. ¿Cómo evolucionarán a patir de ahí las cuotas de mercado, es decir: el número de países que contratan el abastecimiento con A y con B medido en tanto por uno?

8 Las compañías Paga+ y Paga- se han repartido el mercado de la telefonía. A pesar de la agresiva campaña desarrollada por Paga+, Paga- viene consiguiendo una mayor fidelización. Se ha observado que cada año el 25% de los clientes de Paga- se pasan a Paga+, mientras que el 50% de los de Paga+ cambian a Paga-. ¿Qué se puede decir sobre el mercado de la telefonía a largo plazo?

9 Un jugador de ajedrez es contratado por la compañía *Galactic Chess*. Su trabajo consiste en jugar 40 partidas simultáneas cada semana. El jugador dispone de dos estrategias, A y B. Gana en el 80% de los casos con la estrategia A y en el 60% de los casos con la B. Para diversificar su juego decide que cada semana empleará la estrategia B tantas veces como derrotas o tablas haya cosechado la semana anterior. Después de algunas semanas de practicar este sistema observa que siempre acaba jugando el mismo número de partidas con la estrategia B. ¿Cómo se explica este hecho?

10 Una compañía maderera tala el 10% de un bosque anualmente. Para compensar el perjuicio causado, cada año se planta un número fijo de árboles K. Si no se tienen en cuenta otros condicionantes:

(a) Escribe la ley de recurrencia que modela el tamaño del bosque.

(b) Si el tamaño inicial del bosque es de 10000 árboles, calcula la solución.

(c) Si plantar un árbol tiene un coste de 1 euro, calcula el precio mínimo al que deben venderse los árboles talados para que la explotación sea rentable a largo plazo.

11 Los precios de cierto producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña con funciones de oferta y demanda dadas por

$$O(p) = 1 + p, \quad D(p) = 2 - 2p.$$

Suponemos que el equilibrio de mercado se alcanza cuando la oferta iguala a la demanda y que la oferta en el periodo $(n+1)$-ésimo depende del precio de equilibrio n-ésimo.

(a) Deduce la ecuación en diferencias que describe la dinámica planteada y calcula el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

(b) ¿Cuál es la tendencia a largo plazo?

(c) Analiza gráficamente la evolución de los precios.

$\boxed{\textbf{12}}$ Resuelve el Ejercicio 11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p, \quad D(p) = 2 - 0.5\,p.$$

$\boxed{\textbf{13}}$ Resuelve el Ejercicio 11 para el caso en que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p, \quad D(p) = 2 - p.$$

$\boxed{\textbf{14}}$ **Modelo de Bertalanffy.** Considérese un individuo con volumen V. La variación de volumen ΔV es la diferencia entre el volumen que se crea (CV) y el que se degrada (DV), es decir: $\Delta V = CV - DV$. Por un lado, la creación de volumen es proporcional al área de absorción A (por ejemplo, la superficie de las hojas o las raíces en el caso en que el individuo en cuestión perteneciese al reino vegetal): $CV = \beta A$, donde $\beta > 0$ es una constante relativa a la capacidad de absorción de nutrientes por parte del individuo. Por otro lado, la degradación se produce por muerte celular y viene dada por $DV = rV$, donde $0 < r < 1$ es la probabilidad que una célula tiene de morir. Se obtiene entonces

$$\Delta V = \beta A - rV\,.$$

Se supone que el individuo objeto de estudio mantiene la forma. Si llamamos L a la longitud o altura de referencia (por ejemplo, la altura de la planta o la longitud de sus hojas si nos ceñimos al reino vegetal), entonces $A = \alpha_a L^2$ y $V = \alpha_v L^3$, donde $\alpha_a > 0$ y $\alpha_v > 0$ son constantes que dependen de la forma del individuo. Con todo esto tenemos

$$\alpha_v L_{n+1}^3 - \alpha_v L_n^3 = \beta \alpha_a L_n^2 - r \alpha_v L_n^3\,,$$

de donde se deduce que

$$L_{n+1}^3 - L_n^3 = \frac{\beta \alpha_a}{\alpha_v} L_n^2 - r L_n^3\,.$$

No es fácil dar una expresión explícita de las soluciones de esta ecuación. Sin embargo, si tenemos en cuenta la siguiente aproximación de Taylor de primer orden de la función $f(x) = x^3$:

$$x^3 - x_0^3 \sim 3x_0^2(x - x_0)\,,$$

podemos obtener una aproximación válida para pequeñas variaciones de L:

$$L_{n+1} - L_n = \frac{\beta \alpha_a}{3\alpha_v} - \frac{r}{3} L_n\,.$$

Resumiendo: el modelo de Bertalanffy es una ecuación en diferencias lineal de la forma

$$L_{n+1} = a + bL_n\,,$$

donde $a > 0$ es una constante relativa a la capacidad de absorción del individuo y $0 < b < 1$ es una constante relacionada con la degradación celular (obsérvese que realmente $\frac{2}{3} < b < 1$).

(a) Supongamos que la altura en metros de un árbol se ajusta a la expresión $L_n = 3.8(1 - (0.9)^n)$ y n es el número de años. Haz una tabla con las alturas del árbol en los 5 primeros años. Calcula $\lim_{n\to\infty} L_n$ e interpreta el resultado. Estima la vida media de las células de dicho árbol.

(b) La longitud en centímetros de las hojas de los árboles de una determinada especie se aproxima por el modelo $L_{n+1} = 3.9 + 0.7L_n$. Una hoja que tiene una longitud de 3 cm., ¿llegará a medir 10 cm.? ¿Y 15 cm.? Determina la longitud que se estima que pueden llegar a alcanzar las hojas de cualquier árbol de dicha especie.