Tema 3 Conexión y compacidad

Definición

Un espacio topológico (X, τ) es conexo si para todo A, B abiertos y $A \cap B = \emptyset$ con $A \cup B = X$, entonces $A, B \subset \{\emptyset, X\}$

Propiedad

Son equivalentes:

Si $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es un aplicación y B'es una base de τ' entonces:

(a) (X, τ) es conexo

(b) El único $A \subset X$ que son abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X

(c) Si $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es continua entonces es constante.

Teorema

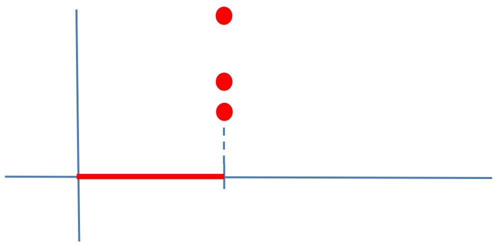
Si (X, τ) es conexo y $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ es continua entonces $f(X)$ es conexo en Y.

Ejercicio 1

Estudiar conexión, componentes conexas y conexión total del conjunto de R^2:

$$\boldsymbol{X = ([0,1]x\{0\}) \cup \bigcup_{n\in N} \left\{\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}}$$

Solución



Ejercicio 2

Sea (N, τ) $\quad \boldsymbol{\tau = \{A_n : n \in N\} \cup \{\emptyset, N\}}$, con $\boldsymbol{A_n = \{1, 2, \dots, n\}}$. Estudiar qué subconjuntos son conexos y cuáles son compactos.

Solución

Ejercicio 3

En la recta de Sorgenfrey (R, τ_S), estudiar si $[0, 1]$ es conexo y si es compacto.

Solución

Ejercicio 4

Sea $\boldsymbol{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \boldsymbol{p_n} = \left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right) \quad \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$ **y** $\boldsymbol{X} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{0})\} \cup_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} [\boldsymbol{O}, \boldsymbol{p_n}]$**. Estudiar si es conexo y si es compacto.**

Solución

Ejercicio 5

Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

$(\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{Rx}\{\mathbf{0}\}) \cup (\{\mathbf{0}\}\boldsymbol{xR})$ **es homeomorfo a** $\boldsymbol{R}^{2}$.

$(\boldsymbol{b})$ **En un espacio** $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$**, si** $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{X}$ **es conexo, también lo es** $\boldsymbol{A}^{\circ}$ **.**

Solución

Ejercicio 6

Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):

$(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{Q}$**.**

$(\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{A} = \,]\boldsymbol{-1},\boldsymbol{0}[\, \cup \,]\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}[$ **y** $\boldsymbol{B} = \,]\boldsymbol{-1},\boldsymbol{0}[\, \cup \,]\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}]$

$(\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{A} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^{2}\colon \boldsymbol{x}^{2} + \boldsymbol{y}^{2} \leq \boldsymbol{1}\right\}$ **y** $\boldsymbol{B} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}^{2}\colon \boldsymbol{x}^{2} + \boldsymbol{y}^{2} \geq \boldsymbol{1}\right\}$

Solución

Ejercicio 7

Probar que cada par de espacios de conjuntos no son homeomorfos (topología usual):

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{R^2}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{RP^2}.$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{A} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R^2} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\right), \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\right\}$ **y** $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cup \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\}$

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{A} = (\{\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}]) \cup ([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]\boldsymbol{x}\{\boldsymbol{0}\})$ **y** $\boldsymbol{B} = (\{\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}[) \cup ([\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]\boldsymbol{x}\{\boldsymbol{0}\})$

$(\boldsymbol{d})\ \boldsymbol{S^1}\boldsymbol{x}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ **y** $\boldsymbol{S^1}\boldsymbol{x}]\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}[.$

Solución

Ejercicio 8

En $Rx\{1,9\}$ se considera la familia de conjuntos

$$\mathcal{B} = \{]a, b[x\{1,9\}: a < b \in R\}$$

a.- Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de una topología τ sobre $Rx\{1,9\}$.

b.- Estudiar si los conjuntos

$$A = [3,5]x\{1\} \cup]3,5[x\{9\} \quad B =]3,5[x\{1\} \cup [3,5]x\{9\}$$

Y $A \cap B =]3,5[x\{1,9\}$ son compactos en $(Rx\{1,9\}, \tau)$.

c.- Calcular las componentes conexas de $(Rx\{1,9\}, \tau)$.

Solución

Ejercicio 9

En $X = Rx\{2,0,1,9\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \;\; o \; x,x' \leq -1 \; o \; x,x' \geq 1$$

a.- Estudiar si la proyección $p: (X, \tau_{uX}) \to \left({}^{X}/_{R}, {}^{\tau_{uX}}/_{R} \right)$ es abierta o cerrada.

b.- Razonar si $\left({}^{X}/_{R}, {}^{\tau_{uX}}/_{R} \right)$ es homeomorfo a alguno de los siguientes subespacios de (R^3, τ_u) :

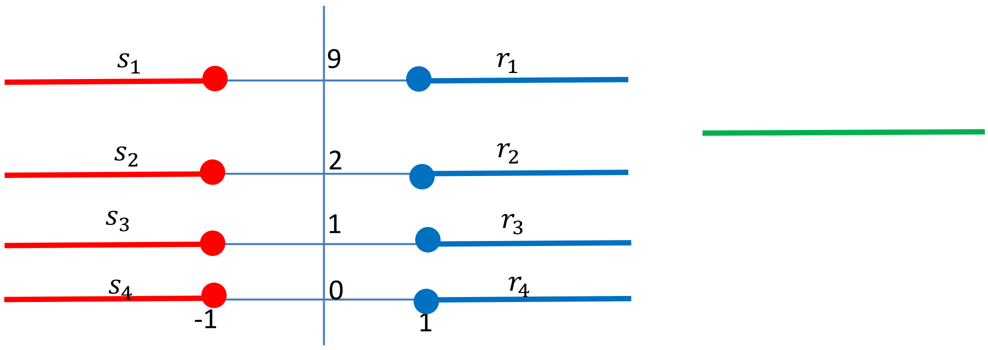
i) $S^1x\{2,0,1,9\}$

ii) $(S^1x\{0\}) \cup (\{0\}xS^1)$

iii) RxS^1

Solución

a.-



Ejercicio 10

Se considera la recta de Sorgenfrey (R, τ_s) y la recta usual (R, τ_u):

a.- Estudiar si la aplicación identidad, $\tau_u: (R, \tau_s) \to (R, \tau_u)$ es continua, abierta o cerrada.

b.- Razonar si $[0, 2[$ es un subespacio conexo o compacto de (R, τ_s).

c.- Razonar si $[0, 2]$ es un subespacio conexo o compacto de (R, τ_s).

Solución

Ejercicio 11

En $\boldsymbol{Rx\{1,9\}}$ se considera la familia de conjuntos

$$\boldsymbol{\mathcal{B} = \{]a,b[x\{1,9\}: a < b \in R\}}$$

a.- Demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ es una base de una topología $\boldsymbol{\tau}$ sobre $\boldsymbol{Rx\{1,9\}}$.

b.- Estudiar si la topología $\boldsymbol{\tau}$ es metrizable, es decir, si proviene de una distancia.

c.- ¿Es $\boldsymbol{(Rx\{1,9\},\tau)}$ homeomorfo a $\boldsymbol{\left(Rx\{1,9\},(\tau_u)_{Rx\{1,9\}}\right)}$? ¿Por qué?

Solución

Ejercicio 12

En $X = Rx\{2,0,1,9\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \;\; o\ |x|,|x'| \geq 1$$

a.- Estudiar si la proyección $p: (X,\tau_{uX}) \rightarrow \left({}^{X}/_{R}, {}^{\tau_{uX}}/_{R}\right)$ es abierta o cerrada.

b.- Razonar si $\left({}^{X}/_{R}, {}^{\tau_{uX}}/_{R}\right)$ es homeomorfo a alguno de los siguientes subespacios de (R^3,τ_u) :

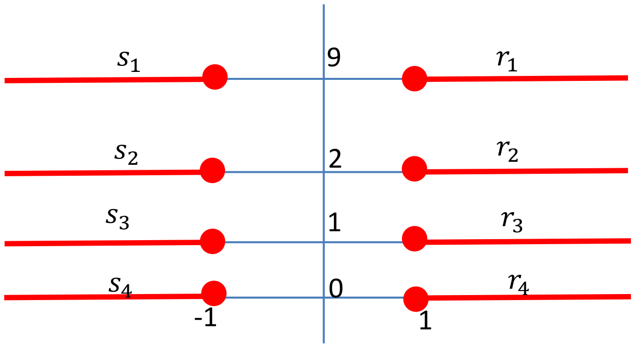
i) $S^1x\{2,0,1,9\}$

ii) $(S^1x\{0\}) \cup (\{0\}xS^1)$

iii) RxS^1

Solución

a.-



Ejercicio 13

Se considera la recta de Sorgenfrey $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_s})$.

a.- Calcular las componentes conexas de $\boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}\}$.

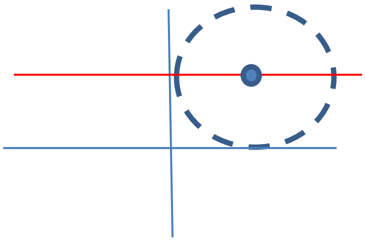
b.- Razonar si $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2}\}$ es un subespacio conexo o compacto de $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau_s})$.

c.- Razonar si existen subconjuntos compactos infinitos en este espacio.

Solución

Ejercicio 14

Para cada $\alpha \in R$ se denota $R_\alpha = \{(x,y) \in R^2 : y = \alpha\}$. Se considera la topología τ en R^2 con base $\mathcal{B} = \{R_\alpha : \alpha \in R\}$.



a.- Estudiar si $\tau \leq \tau_u$ y si $\tau_u \leq \tau$, donde τ_u es la topología usual en R^2.

b.- ¿Es (R^2, τ) un espacio de Hausdorff?

c.- Calcular el cierre, el interior y la frontera de los ejes coordenados.

d.- ¿Es cierto que todo conjunto acotado en R^2 tiene interior vacío?

e.- Identificar la topología inducida por τ sobre cada R_α y sobre $L = \{0\}xR$.

f.- Construir explícitamente un homeomorfismo $f: (R^2, \tau) \to (R^2, \tau')$ donde τ' es la topología en R^2 con base $\mathcal{B}' = \{R_\alpha' : \alpha \in R\}$ con $R_\alpha' = \{(x,y) \in R^2 : x = \alpha\}$.

g.- Probar que $A \subseteq R^2$ es conexo en (R^2, τ) si y solo sí, existe $\alpha \in R$ tal que $A \subseteq R_\alpha$. Determinar las componentes conexas de (R^2, τ).

h.- Probar que $A \subseteq R^2$ es compacto en (R^2, τ) si y solo sí, existe $J \subseteq R$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} R_\alpha$.

Ejercicio 15

Estudia de forma razonada las siguientes cuestiones:

a.- ¿Es cierto que todo subconjunto finito no vacío de un espacio topológico es discreto?

¿Y si el espacio es metrizable?

b.- Sea (R, τ_S) la recta de $Sorgenfrey$. Definamos $f: (RxR, \tau_S x \tau_S) \longrightarrow (RxR, \tau_S x \tau_S)$ como $f(x, y) = (x, -y^3)$. Analizar si f es continua, abierta o cerrada.

c.- Un aplicación $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ es propia si para cada C' compacto de (Y, τ') se verifica que $f^{-1}(C')$ es compacto en (X, τ). Probar que si f es propia, (X, τ) es de Hausdorff e (Y, τ') es compacto, entonces f es continua.

Ejercicio 16

En R se considera la topología dada por

$$\tau = \{A \cup B : A \in \tau_u, B \subseteq Q\}$$

a.- Para cada $x \in R$ obtener una base de entornos de x en (R, τ).

b.- Calcular la clausura y el interior de $[a, b[$ en (R, τ). ¿Es R/Q denso en (R, τ)?

c.- Probad que si $C \subseteq R$ es compacto en (R, τ) entonces C es compacto en (R, τ_u). ¿Es cierto el enunciado recíproco?

d.- Probad que si $C \subseteq R$ es conexo en (R, τ) entonces $C = \{x\}$ con $x \in R$.

Ejercicio 17

Si $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ una aplicación continua, donde (X, τ) es compacto e (Y, τ') es de Hausdorff, entonces $f^{-1}(C')$ es compacto en (X, τ) para cada C' compacto en (Y, τ').

Ejercicio 18

Sea $X = R \cup \{\alpha\}$ donde $\alpha \notin R$. En X se considera la topología τ de la que conocemos una base $\mathfrak{B}$ dada por:

$$\mathfrak{B} = \{(a,b): a,b \in R, a < b\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{\alpha\} \cup (0,\varepsilon): \varepsilon > 0\}$$

a.- Decidir si (X,τ) es un espacio de Hausdorff.

b.- Probar que $\tau_{X-\{\alpha\}} = \tau_u$ y que $\left(X - \{0\}, \tau_{X-\{0\}}\right)$ es homeomorfo a (R, τ_u).

c.- Estudiar la conexión en (X,τ) del conjunto $A = (a,b) \cup \{\alpha\}$.

d.- ¿Es el conjunto $C = [-1,1]$ cerrado en (X,τ)? ¿Es compacto en (X,τ)?

Ejercicio 19

Sea (X, τ) un espacio compacto y $A \subseteq X$ infinito. Demostrar que $A' \neq \emptyset$, donde A' es el conjunto de puntos de acumulación de A en (X, τ).

Ejercicio 20

Sea (R, τ_S)**, estudiar la continuidad de** $f: (R, \tau_S) \to (R, \tau_S)$**,** $f(x) = sen x$**. Estudiar cuando un subconjunto** A **de** (R, τ_S) **es conexo.**

Ejercicio 21

Componentes conexas de $\left\{{}^{1}\!/_{n} : n \in N\right\}$ **y** $R^2 - \left\{(x, y) \in R^2 : y \in \{-1, 1\}\right\}$**.**

Ejercicio 22

Estudiad la compacidad de (R, τ_d). Caracterizar los subconjuntos compactos.

Ejercicio 23

Sea $\boldsymbol{p} \notin \boldsymbol{R}$. En $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} \cup \{\boldsymbol{p}\}$ se considera la topología $\boldsymbol{\tau}$ que tiene por base

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{u}} \cup \{]-\infty, \boldsymbol{a}[\ \cup\ ]\boldsymbol{b}, +\infty[\ \cup \{\boldsymbol{p}\}: \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}\}$$

Estudiar la conexión y compacidad de $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$.

Ejercicio 24

Consideramos el espacio (X, τ) con $X =]0,1[$ y $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{]0, a[: a < 1\}$. Caracterizar los conjuntos compactos y estudiar si es localmente compacto.

Ejercicio 25

a.- Poner un ejemplo de un espacio topológico y dos subconjuntos suyos compactos cuya intersección no es compacta.

b.- En R con la topología del punto incluido para $p = 0$, hallar un subconjunto A que sea compacto, pero $\overline{A}$ no lo sea.

Ejercicio 26

Se considera el espacio topológico $X = R \cup \{p, q\}$ donde $p, q \notin R$ cuya base es

$$\beta = \{]a, b[: a, b \in R, a < b\} \cup \{]-\infty, a[\cup \{p\} : a \in R\} \cup \{]a, +\infty[\cup \{q\} : a \in R\}$$

Probar que (X, τ) es compacto y que $(X, i: R \to X)$ es una compactificación de (R, τ_u).

Ejercicio 27

a.- Razonar si puede existir una biyección abierta del plano (R^2, τ_u) en la esfera $\left(S^2, \tau u_{/S^2}\right)$.

b.- Probar que si β es base de (R^2, τ_u), entonces las componentes conexas de los elementos de β forman otra base de (R^2, τ_u).

Ejercicio 28

Razonar si los siguientes subespacios de (R^3, τ_u) son homeomorfos:

a.- $(\boldsymbol{S^1 x\{0\}}) \cup (\{\boldsymbol{0}\}\boldsymbol{xS^1})$ **b.-** $\boldsymbol{S^2}$ **c.-** $\boldsymbol{S^2} - \{\boldsymbol{N}, \boldsymbol{S}\}$ **d.-** $\boldsymbol{S^1 xR}$ **e.-** $(\boldsymbol{Rx}\{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})\}) \cup \boldsymbol{S^2}$

Ejercicio 29

En $Rx\{0,1\}$ se consideran la familia de subconjuntos

$$\beta = \{]a,b[x\{0,1\}: a,b \in R, a < b\}$$

a.- Demostrar que β es base de una topología τ sobre $Rx\{0,1\}$.

b.- Estudiar si los conjuntos

$$A = [2,3]x\{0\} \cup]2,3[x\{1\} \quad B =]2,3[x\{0\} \cup [2,3]x\{1\}$$

Y $A \cap B =]2,3[x\{0,1\}$ son compactos en $(Rx\{0,1\},\tau)$.

c.- Calcular las componentes conexas de $(Rx\{0,1\},\tau)$.

Ejercicio 30

Razonar si los siguientes subespacios de $\left(R^3, \tau_u\right)$ son homeomorfos:

a.- $\boldsymbol{X = [-1, 1]x\{-1, 1\} \cup \{-1, 1\}x[-1, 1]}$ **b.-** $\boldsymbol{S^1}$ **c.-** $\boldsymbol{S^1 \cup Rx\{1\}}$ **d.-** $\boldsymbol{X \cup Rx\{1\}}$ **e.-** $\boldsymbol{S^1 \cup Rx\{0\}}$

Ejercicio 31

Estudiad en cada uno de los siguientes casos si son homeomorfos:

a.- $X = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ **e** $Y = R^2$**.**

b.- $X = S^1 x R$ **e** $Y = S^2$**.**

c.- $X = [0, 1]$ **e** $Y = S^1 x[0, 1]$ **.**

Ejercicio 32

Probar que los espacios de cada pareja son homeomorfos entre sí:

a.- $\boldsymbol{A = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}, B = [0,1].}$

b.- $\boldsymbol{A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0, y > 0\}, B = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}.}$

c.- $\boldsymbol{A =]0,1[\cup [2,3], B =]5,7[\cup [10,12].}$

Ejercicio 33

Se considera el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topología:

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

a.- Hallar las componentes conexas de (X, τ),

b.- Probar que toda biyección abierta $f: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 34

Estudiar la compacidad del espacio $([-\mathbf{1},\mathbf{1},\boldsymbol{\tau}])$**, donde**

$$\boldsymbol{\tau} = \{\boldsymbol{O} \subset [-\mathbf{1},\mathbf{1}]: \mathbf{0} \notin \boldsymbol{O}\} \cup \{\boldsymbol{O} \subset [-\mathbf{1},\mathbf{1}]:]-\mathbf{1},\mathbf{1}[\subset \boldsymbol{O}\}$$

Estudiar qué subconjuntos son compactos.

Ejercicio 35

a.- Probar que $B = (Rx\{0\})x(\{0\}xR) - \{(0,0)\}$ **tiene exactamente cuatro componentes conexas.**

b.- En un espacio (X,τ)**, sea** $\{x_n \to x\}$. **Probar que** $A = \{x_n : n \in N\} \cup \{x\}$ **es compacto.**