Nombre y apellidos:

Topología I. Segunda prueba de evaluación continua
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
16 de diciembre de 2022
Duración de la prueba: 45 minutos

1.– Sean

$$X = \big(\mathbb{R}\times\{-1\}\big)\cup\big(\mathbb{R}\times\{+1\}\big)\subset\mathbb{R}^2$$

con la topología T inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$, e

$$Y = \big(\mathbb{R}\times\{0\}\big)\cup\big(\{0\}\times\mathbb{R}\big)\subset\mathbb{R}^2$$

con la topología T' inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Se define la aplicación $f : (X,T)\to (Y,T')$ por:

$$\begin{aligned} f((x,-1)) &= (x,0), \qquad & x\in\mathbb{R},\\ f((x,+1)) &= (0,x), \qquad & x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

1. Describir la relación de equivalencia R_f.
2. Probar que f no es abierta.
3. Probar que f es sobreyectiva y continua.
4. ¿Es f casi abierta?

1. Dos puntos $(x,y),(x',y')$ están relacionados por R_f si y sólo si $f((x,y)) = f((x',y'))$. Si $y=y'$ entonces $x=x'$ y ambos puntos deben ser iguales. Si $y\neq y'$ podemos suponer que $y=-1$, $y'=+1$. Entonces $(x,0)=(0,x)$, lo que implica que $x=0$. El razonamiento cuando $y=+1$, $y'=-1$ es similar. Por tanto, los puntos $(0,-1)$ y $(0,+1)$ están relacionados. Es decir

$$(x,y)\,R_f\,(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases}(x,y)=(x',y'), & \text{o}\\ x=x'=0. \end{cases}$$

2. El conjunto $(-1,1)\times\{-1\}$ es abierto en X. Su imagen por f es el conjunto $(-1,1)\times\{0\}$, que no es abierto en Y porque $(0,0)$ no es punto interior (cualquier entorno de $(0,0)$ contiene puntos del eje vertical).

3. f es claramente sobreyectiva. Para ver que f es continua, observamos que X es unión de dos conjuntos abiertos $X_1=\mathbb{R}\times\{1\}$, $X_{-1}=\mathbb{R}\times\{-1\}$. La aplicación f es continua si y sólo si lo es al restringirla a cada uno de dichos conjuntos. Sean $f_1 = f|_{X_1}$, $f_{-1}=f|_{X_{-1}}$. La aplicación f_1 es continua si y sólo si $i_Y\circ f_1 : X\to\mathbb{R}^2$ es continua, donde i_Y es la inclusión de Y en $\mathbb{R}^2$. Si π_1,π_2 son las proyecciones en $\mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_1\circ(i_Y\circ f_1) &= 0 \text{ (la aplicación constante 0)},\\ \pi_2\circ(i_Y\circ f_1) &= \pi_1|_{X_1}.\end{aligned}$$

Como ambas aplicaciones son continuas, se sigue que f_1 es continua. Para ver que f_{-1} es continua razonamos de forma similar teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\pi_1\circ(i_Y\circ f_{-1}) &= \pi_1|_{X_{-1}},\\ \pi_2\circ(i_Y\circ f_{-1}) &= 0 \text{ (la aplicación constante 0)}.\end{aligned}$$

4. La aplicación f es casi abierta. Sea U un abierto f-saturado de X. Cualquier abierto U de X es de la forma $\big(U_1 \times \{1\}\big) \cup \big(U_{-1} \times \{-1\}\big)$, donde U_1, U_{-1} son abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}$. La condición de que U sea f-saturado implica que ninguno de los conjuntos U_1, U_{-1} contiene a 0 o que ambos lo contienen. Entonces

$$f(U) = \big(U_{-1} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times U_1\big)$$

es abierto en Y porque los puntos de $f(U)$ distintos de $(0,0)$ son interiores, y $(0,0)$ también lo sería: como $0 \in U_{-1} \cap U_1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{-1} \cap U_1$. Entonces

$$\big((-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big) \cap Y = \big((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times (-\varepsilon,\varepsilon)\big) \subset \big(U_{-1} \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times U_1\big) = f(U).$$