**Soluciones a los ejercicios del examen del 6 de junio**

**1.** Estudiar la integrabilidad en el intervalo $J = ]\,0, \pi/2\,[$ de la función $f : J \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\big(\pi - 2\,x\big)\,\log x}{\cos x\,\sqrt{\operatorname{sen} x}} \qquad \forall\, x \in J$$

**Solución**

Por definición de derivada se tiene que

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{(\pi - 2\,x)}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{(-2)\big(x - (\pi/2)\big)}{\cos x - \cos(\pi/2)} = \frac{-2}{-\operatorname{sen}(\pi/2)} = 2$$

de donde deducimos que $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = 2\,\log(\pi/2)$, lo que permite extender $f$ para obtener una función continua, y por tanto localmente integrable, en $]\,0\,,\,\pi/2\,]$.

Usaremos el criterio de comparación, con la función potencia de exponente $-3/4$, que es integrable en $]\,0\,,\,\pi/2\,]$. Es sabido que $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/4}|\,\log x\,| = 0$, de donde

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g(x)\,|} = \lim_{x\to 0} \frac{(\pi - 2\,x)}{\cos x} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/2} x^{1/4}\,|\,\log x\,| = 0$$

y el criterio de comparación nos dice que $f$ también es integrable en $]\,0\,,\,\pi/2\,]$, o lo que es lo mismo, en $J$.

**2.** Probar que la función $f$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x\,y\,\log\big(1 + x^2 + y^2\big)}{\big(x^2 + y^2\big)^{5/2}} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$$

es integrable en el primer cuadrante y calcular su integral.

**Solución**

Denotando por $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ al primer cuadrante, usamos el cambio de variable a coordenadas polares, teniendo en cuenta que el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de $A$ viene dado por $E = \mathbb{R}^+ \times ]\,0\,,\,\pi/2\,[$. El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el de Tonelli, nos dicen que

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_E \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ \log\big(1 + \rho^2\big)}{\rho^2}\,d(\rho,\theta)\\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ \log\big(1 + \rho^2\big)}{\rho^2}\,d\rho\right) d\theta\\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta\right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{\log\big(1 + \rho^2\big)}{\rho^2}\,d\rho\right)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \ \operatorname{sen}\theta \, d\theta \ = \ \left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \ = \ \frac{1}{2}$$

obtenemos que

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) \ = \ \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1 \ + \ \rho^2\right)}{\rho^2}\, d\rho$$

Por tanto, debemos probar que la función $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$h(\rho) \ = \ \frac{\log\left(1 \ + \ \rho^2\right)}{\rho^2} \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{R}^+$$

es integrable en $\mathbb{R}^+$. Como $\lim\limits_{\rho\to 0} h(\rho) \ = \ 1$ podemos extender $h$ para que sea continua, y por tanto localmente integrable, en $\mathbb{R}_0^+$. En particular será integrable en $[\,0\,,\,1\,]$, luego bastará probar que es integrable en $[\,1\,,\,+\infty\,[$.

Usamos el criterio de comparación con la función potencia de exponente $-3/2$, que es integrable en $[\,1\,,\,+\infty\,[$. Puesto que

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{|\,h(\rho)\,|}{\rho^{-3/2}} \ = \ \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\log\,\left(1 \ + \ \rho^2\right)}{\rho^{1/2}} \ = \ 0$$

el criterio de comparación nos dice que $h$ es integrable en $[\,1\,,\,+\infty\,[$, luego en $\mathbb{R}^+$, así que $f$ es integrable en el primer cuadrante, como queríamos probar.

Para calcular su integral, usaremos la fórmula de integración por partes, tomando

$$F(\rho) \ = \ \log\,\left(1 \ + \ \rho^2\right), \quad G(\rho) \ = \ -1/\rho \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{R}^+$$

que son funciones derivables en $\mathbb{R}^+$, tales que

$$F(\rho)\, G'(\rho) \ = \ h(\rho)\,, \quad F'(\rho)\, G(\rho) \ = \ -\,\frac{2}{1 \ + \ \rho^2} \qquad \forall\, \rho \in \mathbb{R}^+$$

Hemos probado ya que $h$ es integrable en $\mathbb{R}^+$, y es evidente que $F'\,G$ también lo es, luego podemos usar la fórmula de integración por partes para obtener que

$$\int_0^{\infty} h(\rho)\, d\rho \ = \ \left[-\frac{1}{\rho}\,\log\,\left(1 \ + \ \rho^2\right)\right]_0^{+\infty} \ + \ 2\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{1 \ + \ \rho^2} \ = \ \pi$$

Concluimos finalmente que la integral de $f$ en el primer cuadrante es $\pi/2$.