Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del tema 13

1. Probar que el conjunto

$$E = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq \text{mín}\{ e^y , 1 , e^{1-y} \} \big\} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible y calcular su área.

Solución

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(y) = \text{mín}\{ e^y , 1 , e^{1-y}\}$ para todo $y \in \mathbb{R}$, es continua, luego la función $(x,y) \to f(y) - x$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, también lo es. Deducimos que el conjunto

$$E = \big(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \big) \cap \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(y) - x \geq 0 \big\}$$

es cerrado, por ser intersección de dos cerrados, luego es medible. Para calcular el área de E integraremos la longitud de sus secciones horizontales.

Para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene claramente $E^y = \big[0 , f(y) \big]$, luego $\lambda_1\big(E^y \big) = f(y)$. Por tanto, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1\big(E^y \big)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy$$

Para calcular esta integral observamos que

$$\begin{aligned} y \in \,]-\infty , 0\,[\quad &\Longrightarrow \quad e^y \leq 1 \leq e^{1-y} \quad \Longrightarrow \quad f(y) = e^y \\ y \in [\,0 , 1\,] \quad &\Longrightarrow \quad 1 \leq e^y , \ \ 1 \leq e^{1-y} \quad \Longrightarrow \quad f(y) = 1 \\ y \in \,]\,1 , +\infty\,[\quad &\Longrightarrow \quad e^{1-y} \leq 1 \leq e^y \quad \Longrightarrow \quad f(y) = e^{1-y} \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \lambda_2(E) &= \int_{-\infty}^{0} e^y\, dy + \int_0^1 1\, dy + \int_1^{+\infty} e^{1-y}\, dy \\ &= \Big[e^y \Big]_{-\infty}^{0} + 1 + \Big[-\, e^{1-y} \Big]_1^{+\infty} = 3 \end{aligned}$$

■

2. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en Ω y calcular su integral.

a) $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2 \, , \ \ y^2 \leq 2x \} \, ,$
$f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \qquad \forall \, (x,y) \in \Omega$

b) $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1 \, , \ \ x^2 + y^2 \leq 2\,x \} \, ,$
$f(x,y) = x \qquad \forall \, (x,y) \in \Omega$

c) $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x < y < z \} \, ,$
$f(x,y) = e^{-(x+y+z)} \qquad \forall \, (x,y,z) \in \Omega$

Solución

a) Evidentemente, el conjunto Ω es cerrado y acotado, luego compacto. Como f es continua, está acotada en Ω, luego $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$.

Calculamos ahora las secciones horizontales del conjunto Ω. Para $(x,y) \in \Omega$ vemos que $y^2 \leq 2\,x \leq 4$ luego $|\,y\,| \leq 2$. Por tanto, dado $y \in \mathbb{R}$, tenemos $\Omega^y = \emptyset$ salvo que se tenga $|\,y\,| \leq 2$, en cuyo caso $\Omega^y = \big[\, y^2/2 \, , \, 2 \,\big]$ Por tanto, usando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{x \, d(x,y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{y^2/2}^{2} \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right) dy \\
&= \int_{-2}^{2} \left[\sqrt{1 + x^2 + y^2} \right]_{x=y^2/2}^{x=2} dy \; = \\
&= \int_{-2}^{2} \sqrt{5 + y^2} \; dy \; - \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (y^4/4) + y^2} \; dy
\end{aligned} \tag{1}$$

y se trata ahora de calcular las dos integrales simples que acaban de aparecer.

Por una parte tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (y^4/4) + y^2} \, dy &= \int_{-2}^{2} \sqrt{\big(1 + (y^2/2) \big)^2} \, dy = \int_{-2}^{2} \big(1 + y^2/2 \big) \, dy \\
&= \left[y + \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^{2} = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Para la otra integral, puesto que la función $y \mapsto \sqrt{5 + y^2}$ es continua en $\mathbb{R}$, podemos usar la versión elemental del teorema de cambio de variable, con la función

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \qquad \varphi(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \big(e^{\,t} - e^{-t} \big) \quad \forall \, t \in \mathbb{R}$$

que es de clase C^1.

Para $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\varphi(t) = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{5}\left(e^{t} - e^{-t}\right) = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{5}\, e^{2t} - 4\, e^{t} - \sqrt{5} = 0$$

La última igualdad se cumple cuando $e^{t} = \sqrt{5}$, es decir, $t = (1/2) \log 5$. Escribiendo para abreviar $r = (1/2) \log 5$, hemos visto que $\varphi(r) = 2$ y, puesto que φ es una función impar, tenemos también $\varphi(-r) = -2$.

Por otra parte, siempre para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{5 + \varphi(t)^2} &= \sqrt{5}\,\sqrt{1 + (1/4)\big(e^{2t} + e^{-2t} - 2\big)} \\ &= \sqrt{5}\,\sqrt{(1/4)\big(e^{2t} + e^{-2t} + 2\big)} = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)\end{aligned}$$

mientras que $\varphi'(t) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$. En resumen, mediante el cambio de variable indicado, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \sqrt{5 + y^2}\, dy &= \frac{5}{4}\int_{-r}^{r} \left(e^{t} + e^{-t}\right)^2 dt \\ &= \frac{5}{4}\int_{-r}^{r} \left(e^{2t} + e^{-2t} + 2\right) dy = \left[\frac{5}{8}e^{2t} - \frac{5}{8}e^{-2t} + \frac{5}{2}t\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{5}{4}e^{2r} - \frac{5}{4}e^{-2r} + 5r = 6 + \frac{5}{2}\log 5\end{aligned}$$

donde hemos usado que $e^{2r} = 5$ y $e^{-2r} = 1/5$. Una vez calculadas las integrales simples que aparecen en (1), podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \frac{x\, d(x,y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \frac{5}{2}\log 5 - \frac{2}{3} \qquad \blacksquare$$

b) La condición $x^2 + y^2 \leq 2x$ equivale a $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, luego Ω se obtiene como intersección de dos círculos de radio 1, uno centrado en el origen y el otro en el punto $(1,0)$. Esto permite entender gráficamente el razonamiento que después haremos. De momento, Ω es cerrado y acotado, luego es compacto. Como f es continua, está acotada en Ω, y por tanto $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Para calcular su integral usaremos el teorema de Fubini, empezando por estudiar las secciones horizontales de Ω.

Para $(x,y) \in \Omega$ se tiene que $2x \geq x^2 + y^2 \geq 0$, luego $x \geq 0$, y por otra parte, de $x^2 + y^2 \leq 1$ se deduce que $y^2 \leq 1$ y $x \leq 1$. Teniendo en cuenta todo lo anterior, de la condición $(x-1)^2 \leq 1 - y^2$ deducimos que $1 - x \leq \sqrt{1-y^2}$, o lo que es lo mismo, $1 - \sqrt{1-y^2} \leq x$. Por otra parte, de la condición $x^2 \leq 1 - y^2$ obtenemos que $x \leq \sqrt{1-y^2}$. Por tanto, para $(x,y) \in \Omega$ se tiene

$$y^2 \leq 1 \qquad \text{y} \qquad 1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \tag{2}$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verifica (2), tenemos claramente $0 \leq x \leq 1$, con lo que deducimos por una parte que $x^2 \leq 1-y^2$, y por otra que $0 \leq 1-x \leq \sqrt{1-y^2}$, de donde $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, así que $(x, y) \in \Omega$. Observemos finalmente que de la condición (2) se deduce que $1 \leq 2\sqrt{1-y^2}$, de donde obtenemos que $1 \leq 4(1-y^2)$, es decir, $y^2 \leq 3/4$, o lo que es lo mismo, $|y| \leq \sqrt{3}/2$.

Así pues, para $y \in \mathbb{R}$ con $|y| > \sqrt{3}/2$ la condición (2) no puede verificarse para ningún $x \in \mathbb{R}$, con lo que $\Omega^y = \emptyset$. Por el contrario, cuando $|y| \leq \sqrt{3}/2$, de (2) deducimos que

$$\Omega^y = \big[\alpha(y)\,,\,\beta(y)\big] \quad \text{con} \quad \alpha(y) = 1-\sqrt{1-y^2} \quad \text{y} \quad \beta(y) = \sqrt{1-y^2}$$

Podemos ya usar el teorema de Fubini para obtener que

$$\begin{aligned} \int_\Omega x\,d(x,y) &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} x\,dx\right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dy = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\big(\beta(y)^2-\alpha(y)^2\big)\,dy \end{aligned}$$

Observamos ahora en primer lugar que

$$\beta(y)^2-\alpha(y)^2 = \big(1-y^2\big) - \Big(1+(1-y^2)-2\sqrt{1-y^2}\Big) = 2\sqrt{1-y^2}-1$$

Por otra parte, mediante el cambio de variable $y = \operatorname{sen} t$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-y^2}\,dy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}\right) dt \\ &= \left[\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\operatorname{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ y $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, así como que, para todo $t \in [-\pi/3\,,\,\pi/3]$ se tiene $\cos t > 0$.

Usando las tres igualdades anteriores concluimos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega x\,d(x,y) &= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\Big(\sqrt{1-y^2}-1\Big)\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\sqrt{1-y^2}\,dy-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

■

c) Es claro que f es una función continua, luego medible, que sólo toma valores positivos, así que podemos usar el teorema de Tonelli, para calcular la integral de f sobre Ω. Entonces f será integrable en Ω si, y sólo si, dicha integral es finita.

Empezamos calculando las secciones verticales del conjunto Ω, que es medible, por ser abierto en $\mathbb{R}^3$. Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente que $\Omega_{(x,y)} = \emptyset$, salvo que se tenga $0 < x < y$, en cuyo caso vemos que $\Omega_{(x,y)} =]\, y\,, +\infty\,[$. Por tanto, considerando el conjunto $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < y \,\}$, que a su vez es un abierto de $\mathbb{R}^2$, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{-(x+y+z)}\, d(x, y, z) &= \int_A \left(\int_y^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\, dz \right) d(x, y) \\ &= \int_A \Big[-e^{-(x+y+z)} \Big]_{z=y}^{+\infty} d(x, y) = \int_A e^{-(x+2\,y)}\, d(x, y)\end{aligned}$$

Para calcular la integral doble que nos ha aparecido, usamos ahora las secciones verticales del conjunto A. Para $x \in \mathbb{R}_0^-$ tenemos $A_x = \emptyset$ mientras que, para $x \in \mathbb{R}^+$ vemos que $A_x =]\, x\,, +\infty\,[$. Por tanto, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\begin{aligned}\int_A e^{-(x+2\,y)}\, d(x, y) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-(x+2y)}\, dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-(x+2\,y)}}{2} \right]_{y=x}^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3\,x}}{2}\, dx \\ &= \left[-\frac{e^{-3\,x}}{6} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{6} < \infty\end{aligned}$$

Esto prueba que f es integrable sobre Ω con integral $1/6$. ■

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto Ω.

$$a)\quad \Omega =]\,0\,,\,\pi/2\,[\times\mathbb{R}^+,\quad f(x,y) = \frac{\cos(x\,y)}{\big(1 + y^2\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}} \qquad \forall\,(x,y)\in\Omega$$

$$b)\quad \Omega = \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\qquad f(x,y) = \big(x - y\big)\,e^{-(x-y)^2} \qquad \forall\,(x,y)\in\Omega$$

$$c)\quad \Omega = \mathbb{R}^3,\qquad f(x,y,z) = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\big(1 + x^2 + y^2 + z^2\big)^3} \qquad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Solución

a) Observamos que Ω es abierto, luego medible, y que f es continua, luego también es medible. Para todo $(x,y)\in\Omega$ se tiene

$$|\,f(x,y)\,| = \frac{|\cos(x\,y)\,|}{\big(1 + y^2\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}} \le \frac{1}{\big(1 + y^2\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

y usando el teorema de Tonelli deducimos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\,f(x,y)\,|\,d(x,y) &\le \int_\Omega \frac{d(x,y)}{\big(1 + y^2\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}}\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\big(1 + y^2\big)\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)dx\\ &= \left(\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1 + y^2}\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)\end{aligned}$$

Por una parte, el criterio de integrabilidad nos dice que

$$\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1 + y^2} = \Big[\operatorname{arc\,tg}\, y\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Por otra, tomando $J =]\,0\,,\,\pi/2\,]$, vamos a ver que la función $h : J\to\mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1/\sqrt{\operatorname{sen} x}$ para todo $x\in J$, es integrable en J. De entrada h es continua, luego localmente integrable, en J. Usamos el criterio de comparación con la función potencia de exponente $-1/2$, que es integrable en J. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\,h(x)\,|}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1$$

y el criterio de comparación nos dice que h es integrable en J.

Usando lo anterior concluimos que

$$\int_\Omega |\,f(x,y)\,|\,d(x,y) \le \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} < \infty$$

de modo que $f\in\mathcal{L}_1(\Omega)$. ■

b) De nuevo, el conjunto Ω es medible, por ser abierto, y la función f es continua, por ser medible. Vamos a calcular las integrales iteradas de f.

Dado $y \in \mathbb{R}^+$, la sección horizontal de f en y, dada por $f^y(x) = (x-y)e^{-(x-y)^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, sólo toma valores negativos en el intervalo $]\,0\,,\,y\,[$, y sólo positivos en la semirrecta $]\,y\,,\,+\infty\,[$ lo que nos permite aplicarle el criterio de integrabilidad. Obtenemos que f^y es integrable en $\mathbb{R}^+$ con

$$\int_0^{+\infty} (x-y)\,e^{-(x-y)^2}\,dx \;=\; \left[-\,\frac{e^{-(x-y)^2}}{2}\right]_{x=0}^{+\infty} \;=\; \frac{1}{2}\,e^{-y^2}$$

y esto es válido para todo $y \in \mathbb{R}^+$. Como la función $y \mapsto e^{-y^2}$ es integrable en $\mathbb{R}$, y por tanto en $\mathbb{R}^+$, obtenemos la existencia de una integral iterada de f, dada por

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (x-y)\,e^{-(x-y)^2}\,dx \right) dy \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \;=\; \alpha \in \mathbb{R}^+$$

De hecho sabemos que $\alpha = \sqrt{\pi}/4$, pero sólo usaremos que $\alpha \neq 0$.

Puesto que $f(y,x) = -\,f(x,y)$ para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}^+$, si ahora repetimos el razonamiento anterior, intercambiando los papeles de las variables x e y, obtenemos que también existe la otra integral iterada de f, que vendrá dada por

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (x-y)\,e^{-(x-y)^2}\,dy \right) dx \;=\; -\,\alpha$$

Puesto que $\alpha \neq 0$, hemos visto que las dos integrales iteradas de f existen pero no coinciden. El teorema de Fubini nos permite concluir que f no es integrable en Ω. ■

c) La función f es medible, por ser continua. Además, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene claramente que

$$|\,f(x,y)\,| \;\leq\; \frac{3}{\big(1+x^2+y^2+z^2\big)^3} \;\leq\; \frac{3}{\big(1+x^2\big)\big(1+y^2\big)\big(1+z^2\big)}$$

de donde, usando el teorema de Tonelli, deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\,f(x,y)\,|\,d(x,y) \;&\leq\; \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3\,d(x,y,z)}{\big(1+x^2\big)\big(1+y^2\big)\big(1+z^2\big)} \\
&= 3\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\big(1+x^2\big)\big(1+y^2\big)\big(1+z^2\big)}\right)dy\right)dx \\
&= 3\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}\right) \;=\; 3\,\pi^3 \;<\; \infty
\end{aligned}$$

y esto prueba que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$. ■

4. Probar que el conjunto

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3 \ : \ x + y + z \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

es medible y calcular su volumen.

Solución

El conjunto E es cerrado, por ser la intersección de cuatro semi-espacios cerrados, luego es medible. Para calcular su volumen empezamos observando la longitud de sus secciones verticales.

Consideremos el conjunto $A = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 \ : \ x + y \le 1 \right\}$ que también es cerrado, pero en $\mathbb{R}^2$. Se tiene evidentemente que $E_{(x,y)} = \emptyset$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, mientras que

$$E_{(x,y)} = \left[0 \, , \, 1 - x - y \right] \qquad \forall\, (x,y) \in A$$

El teorema de Tonelli, en el caso de la función caracteristica de E nos dice que

$$\lambda_3(E) = \int_A \lambda_1\left(E_{(x,y)} \right) d(x,y) = \int_A (1 - x - y)\, d(x,y)$$

La integral doble anterior se calcula usando de nuevo el teorema de Tonelli, mediante las secciones verticales del conjunto A. Es claro que $E_x = \emptyset$ salvo que $x \in [0\,,\,1]$, en cuyo caso $E_x = [0\,,\,1-x]$. Por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
\int_A (1 - x - y)\, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[y - x\,y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left((1-x) - x\,(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Concluimos de esta forma que el volumen de E es $1/6$. ∎