

# Ejercicio 21-02-23

Leandro Jorge Fernández Vega DGIM

**Problema 1** En un modelo de desintegración la semivida de un compuesto es de 30 días. Dame el modelo y la vida media puesta en clase.

**Problema 2** Sea la ley recurrente

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n^2},$$

definida obviamente en  $\mathcal{D} = [-1, 1]$ , muestra que es un sistema dinámico y calcula la solución que verifica  $x_0 = -1$ .

①

$$\text{Semivida} = \frac{-\ln(q)}{\ln(v)} = \frac{-\ln(2)}{\ln(v)} = 30 \Rightarrow v = e^{\frac{-\ln(2)}{30}} = 0.97716$$

$$\text{Vida media} = \frac{1}{1-v} = 43.78 \text{ días}$$

$$\text{Modelo desintegración: } x_{n+1} = v x_n = 0.97716 x_n$$

2

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n^2}$$

$$\text{Sea } g: D = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$g \text{ ley recurrente} \Leftrightarrow g(D) \subseteq D$$

Calculamos  $\text{Im}(g)$ :

$$g'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g(-1) = g(1) = 0 \quad g(0) = 1$$

$$\text{Im}(g) = [0, 1] \subseteq D \Rightarrow g \text{ es ley recurrente}$$

Solución:

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = \sqrt{1 - (-1)^2} = 0 \quad x_2 = \sqrt{1 - 0^2} = 1 \quad x_3 = \sqrt{1 - 1^2} = 0$$

$$x_4 = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

- Si  $n$  par  $\Rightarrow n+1$  impar  $\Rightarrow x_{n+1} = 0$
  - Si  $n$  impar  $\Rightarrow n+1$  par  $\Rightarrow x_{n+1} = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$  } Hipótesis inducción

Veamos por inducción:

$$1) n=1 \Rightarrow x_2 = 1 \quad n=2 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$2) \text{ para } n+1 \Rightarrow \begin{cases} n+1 \text{ par} \Rightarrow n+2 \text{ impar} \Rightarrow x_{n+2} = \sqrt{1-1} = 0 \\ n+1 \text{ impar} \Rightarrow n+2 \text{ par} \Rightarrow x_{n+2} = \sqrt{1-0} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, concluimos  $x_{n+1} = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 1 & n \text{ impar} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

o bien  $x_n = \begin{cases} -1 & n=0 \\ 0 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$