1 Modelo Leontief, desarrollo del modelo.

En este apartado vamos a ver una aplicación a la Economía de los sistemas de ecuaciones lineales: los llamados *modelos de Leontief* o *método de insumo-producción*. Este método fue desarrollado por Wassily W. Leontief por el que recibió en 1973 el Premio Nobel de Economía.

Los modelos de Leontief analizan las interrelaciones de oferta y demanda que existen entre diversos sectores de una economía durante un cierto tiempo. Se utiliza el nombre de insumo–producción porque las matrices muestran los valores de la producción de cada industria que se vende como insumo a cada una de las industrias de la economía y para uso final de los consumidores.

Podemos considerar que los sectores *industriales* son: manufacturas, siderurgia (acero), agricultura, minería, ... El sector de *otros factores de producción* está formado por los costos que tiene cada industria como: mano de obra, utilidades, ... El sector *demanda final* puede ser el consumo en los hogares, en el gobierno, ... A los distintos sectores los llamaremos industrias, para abreviar.

Mostraremos este método con el siguiente ejemplo en el que se considera una economía en la que sólo intervienen dos industrias. En la siguiente tabla aparecen los datos de la producción de dos industrias (Industria A e Industria B), junto con otros factores de producción así como la demanda final para cada una de estas industrias:

Consumidores (insumos)

		Industria A	Industria B	Demanda final	Totales
Producción	Industria A	240	500	460	1200
	Industria B	360	200	940	1500
	Otros	600	800	-	
	Totales	1200	1500		

Los datos de la tabla están expresados en unidades monetarias (u.m.). Cada industria aparece en una fila y en una columna.

Las filas representan las compras que cada sector industrial hace de la producción de cada industria y las compras que hacen los consumidores para uso final (demanda final). Por ejemplo, de la producción total de la Industria A, 240 u.m. se usaron para consumo (insumo) de la propia Industria A, 500 u.m. se usaron para insumo de la Industria B, y 460 u.m. para la demanda final. La producción total de la Industria A es la suma de la demanda industrial y la demanda final: $240 + 500 + 460 = 1200$ u.m.

Cada columna de industria da el valor de lo que esa industria adquirió para insumo (consumo) de cada una de las otras y lo que invirtió en otros costos. Por ejemplo, con el objeto de fabricar 1200 u.m., la Industria A adquirió 240 u.m. de la producción de ella misma, 360 u.m. de producción de la Industria B, y tuvo 600 u.m. de gastos (costos). El consumo total de la Industria A es la suma del consumo industrial y el consumo que tiene con otros gastos, es decir, $240 + 360 + 600 = 1200$ u.m.

Obsérvese que la producción total de la Industria A coincide con el consumo total de esta misma Industria A.

Análogamente, la fila segunda y la columna segunda representan, respectivamente, la producción y el consumo total de la Industria B.

El análisis de insumo–producción permite estimar la producción total de cada sector industrial si existe un cambio en la demanda final, siempre y cuando **la estructura básica de la economía permanezca igual**. Es decir, la Industria A, por ejemplo, para fabricar productos por valor de 1200 u.m. adquiere 240 u.m. de su propia producción, 360 u.m. de la producción de la Industria B, e invierte 600 u.m. en otros costos. Por lo tanto, para producir por valor de una unidad monetaria (1 u.m.), la Industria A necesita gastar: $\dfrac{240}{1200} = \dfrac{1}{5}$ u.m. en sí misma, $\dfrac{360}{1200} = \dfrac{3}{10}$ u.m. en la Industria B y $\dfrac{600}{1200} = \dfrac{1}{2}$ u.m. en otros costos. Análogamente, se hace para la Industria B, con lo que obtenemos la siguiente tabla expresada en 1 u.m.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & IndustriaA & IndustriaB & & IndustriaA & IndustriaB \\
IndustriaA & \dfrac{240}{1200} & \dfrac{500}{1500} & & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{3} \\
IndustriaB & \dfrac{360}{1200} & \dfrac{200}{1500} & = & \dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{15} \\
Otros & \dfrac{600}{1200} & \dfrac{800}{1500} & & \dfrac{1}{2} & \dfrac{8}{15}
\end{array}
$$

Los elementos de la matriz se llaman *coeficientes de insumo–producción*. La suma de cada columna es 1.

Supongamos que hay un cambio en la demanda final. En la Industria A la demanda final cambia de 460 u.m. a 500 u.m., y en la Industria B cambia de 940 u.m. a 1200 u.m. Queremos saber la cantidad de u.m. que tienen que producir la Industria A y la Industria B para satisfacer las necesidades de las propias industrias y de la demanda final.

Para ello, llamamos x_A y x_B a los nuevos valores de la producción total de la Industria A y de la Industria B, respectivamente. Sabemos que la producción total de la Industria A (x_A) es la parte de esa producción consumida por la Industria A más la parte consumida por la Industria B más la parte destinada a la demanda final, esto es:

$$x_A = \frac{1}{5}x_A + \frac{1}{3}x_B + 500.$$

De manera similar,

$$x_B = \frac{3}{10}x_A + \frac{2}{15}x_B + 1200,$$

con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
x_A & = & \frac{1}{5}x_A & + & \frac{1}{3}x_B & + & 500 \\
x_B & = & \frac{3}{10}x_A & + & \frac{2}{15}x_B & + & 1200
\end{array}\right\} (*)$$

Escribiendo en forma matricial el sistema (*), tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

Les ponemos nombre a estas matrices:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{2}{15} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}$$

Resulta así:

$$\vec{x} = T\vec{x} + \vec{d}, \quad (1),$$

donde a $\vec{x}$ se le denomina *vector de producción*, a T *matriz de tecnología* y a $\vec{d}$ *vector de demanda final*. Despejando $\vec{x}$ de la ecuación (1), deducimos: $\vec{x} - T\vec{x} = \vec{d} \Longrightarrow (I - T)\vec{x} = \vec{d}$, con I la matriz identidad de orden 2. En el caso en que la matriz $I - T$ sea regular, obtenemos que

$$\vec{x} = (I - T)^{-1}\vec{d}$$

A la matriz $(I - T)$ se le llama *matriz de Leontief* y $(I - T)^{-1}$ *matriz de multiplicadores*.

A continuación, vamos a calcular el valor de $\vec{x}$ para nuestro ejemplo.

$$I - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}$$

Como $det(I - T) = \frac{89}{150} \neq 0$, entonces existe $(I - T)^{-1}$ que será:

$$(I - T)^{-1} = \frac{150}{89}(Adj(I - T))^t = \frac{150}{89} \begin{pmatrix} \frac{13}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el nuevo vector de producción es

$$\vec{x} = (I - T)^{-1}\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1404.49 \\ 1870.79 \end{pmatrix}$$

Luego, la Industria A debe producir 1404.49 u.m. y la Industria B debe fabricar 1870.79 u.m.
La tras el reajuste de producciones tenemos:

Consumidores (insumos)

		Industria A	Industria B	Demanda final	Totales
Producción	Industria A	$\frac{1}{5}1404.49$	$\frac{1}{3}1870.79$	500	1404.49
	Industria B	$\frac{3}{10}1404.49$	$\frac{2}{15}1870.79$	1200	1870.79

Y completando:

Consumidores (insumos)

		Industria A	Industria B	Demanda final	Totales
Producción	Industria A	280.90	623.60	500	1404.49
	Industria B	421.35	249.44	1200	1870.79
	Otros	702.24	997.75	-	
	Totales	1404.49	1870.79		

Nota 1.1. *La matriz tecnológica es siempre una submatriz de la matriz de coeficientes de insumo–producción luego la suma por columnas es siempre menor o igual que uno, y es uno si el sector no consume producctos de fuera. Luego* $||T||_1 \leq 1$. *Si además todos los sectores consumen recursos externos,* $||T||_1 < 1$ *por tanto*

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + T^4 + ...,$$

en particular $(I - T)^{-1} \geq 0_{k \times k}$ *con lo cual bajo la hipótesis de consumo de recursos externos en todos los sectores, la solución obtenida tiene significado económico.*

Ejercicios .

1. Los servicios de estadística de un país han estimado la matriz tecnológica de los tres sectores productivos estudiados, representada en la siguiente tabla:

	Sector 1	Sector 2	Sector 3
Sector 1	0.3	0.2	0.2
Sector 2	0.1	0.4	0.4
Sector 3	0	0	0.1

   A partir del conocimiento de dicha matriz, se desea determinar la producción necesaria de cada sector para satisfacer una demanda final de 10, 12 y 8 millones de unidades de cada bien producido por cada sector. Si la demanda final cambiara a 20, 30 y 40 millones respectivamente, ¿cuál sería la producción necesaria?

2. Supongamos un modelo de insumo-producción para un sistema económico formado por sólo dos industrias: una minera y una eléctrica. La industria eléctrica gasta 500 u.m. de su producción en gastos propios, le vende a la minera 350 u.m. y destina a demanda final 150 u.m. de su producción. La industria minera vende carbón a la eléctrica por valor de 320 u.m., invierte en consumo propio 120 y destina a demanda final 120. ¿Cómo debe variar la producción de ambas industrias para satisfacer una demanda final de 250 u.m. de electricidad y 200 u.m. de carbón?