Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Modelos matemáticos I (curso 2022/23)

Relación de ejercicios 2

1 Estudia el comportamiento local en torno a los puntos fijos de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 4x_n^2 - x_n^3}{5}.$$

2 La *ecuación logística de Pielou* es una ecuación en diferencias no lineal de la forma

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}, \qquad \text{con } \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1}$$

Su uso es frecuente en dinámica de poblaciones. Dado que no tiene sentido hablar de poblaciones negativas, la ecuación se plantea en $[0,\infty)$.

(a) Calcula los puntos de equilibrio de (1) y demuestra que, para las elecciones $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, el punto de equilibrio positivo es asintóticamente estable.

(b) Efectúa en (1) el cambio de variables $x_n = \frac{1}{z_n}$ y calcula la expresión de todas las soluciones.

(c) Determina el comportamiento asintótico de las soluciones de (1).

3 Una población se rige por el modelo discreto $p_{n+1} = 10p_n e^{-p_n}$, $n \geq 0$. Calcula sus puntos de equilibrio y comprueba que son todos inestables.

4 En relación con el modelo del ejercicio anterior, se propone vender una fracción α $(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo, lo que da lugar al siguiente otro modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha)p_n e^{-(1-\alpha)p_n}.$$

(a) Encuentra el intervalo abierto (de amplitud máxima) al que debe pertenecer α para que esté asegurada la estabilidad asintótica del punto de equilibrio positivo.

(b) Calcula el valor de α para el que la población (no nula) en equilibrio alcanza su valor máximo.

5 Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$ una función que satisface $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El método de Newton para resolver la ecuación $g(x) = 0$ se describe como

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Si α es una raíz de $g(x) = 0$, demuestra que el método es convergente para cualquier dato inicial suficientemente próximo a la raíz.

6 Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, donde

(i) $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - x^3$.

(ii) $f(x) = x^2 - x$.

(iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ x^2 & \text{si } x \in [1,\infty) \end{cases}.$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0.25x + 1.5 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}.$

(v) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

$\boxed{7}$ Demuestra que $\left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$ es un 3-ciclo inestable para la función "tienda" (*tent map*) T definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}.$$

$\boxed{8}$ Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y (s_0, s_1) un 2-ciclo de $x_{n+1} = f(x_n)$. Demuestra que entre s_0 y s_1 hay un punto de equilibrio.

$\boxed{9}$ Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x) = \frac{1}{2}x(1-3x^2)$. Estudia la estabilidad del ciclo $\{-1, 1\}$. Estudia también la estabilidad del punto de equilibrio deducido en el ejercicio anterior.

$\boxed{10}$ Se considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n\, e^{r(1-x_n)}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

que describe la evolución de una población que se comporta como una exponencial cuando el tamaño de la población es bajo y tiene tendencia a disminuir cuando el tamaño es elevado. Podemos considerar que la cantidad

$$\lambda = e^{r(1-x_n)}$$

es la tasa reproductiva de la población.

(a) Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación (2).
(b) Determina las condiciones bajo las que dichos puntos de equilibrio son asintóticamente estables para $r \neq 0, 2$.
(c) Estudia el caso $r = 2$.
(d) Estudia el caso $r = 0$.

$\boxed{11}$ Se considera la ecuación en diferencias $x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$, donde $f \in C^2(\mathbb{R})$ es una función que verifica las siguientes propiedades:

- $f(x)$ se anula solo en $x = -1$.
- $f'(x)$ es estrictamente decreciente con $f'(-1) = 0$.

Demuestra que $x^* = -1$ es un punto de equilibrio inestable siempre que $\alpha \neq 0$.

$\boxed{12}$ En cierto mercado las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$O(p) = 1 + p^2, \quad D(p) = c - dp,$$

donde $c > 1$ y $d > 0$.

(a) Calcula el punto de equilibrio económicamente factible.
(b) Deduce las condiciones sobre c y d que aseguran la estabilidad asintótica de p^*. ¿Qué ocurre si $d = 2$ y $c = 4$?
(c) Para $c = 3$ y $d = 2$, usa un diagrama de Cobweb para trazar los valores de p_1 y p_2 a partir de $p_0 = 1$. ¿Cómo se comportarán los precios a largo plazo en este caso?

$\boxed{13}$ Determina los 2-ciclos de los siguientes sistema dinámicos y estudia su estabilidad:

(a) $x_{n+1} = 1 - x_n^2$.
(b) $x_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{x_n}$.

$\boxed{14}$ Se considera la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} ax & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } 0 \leq x \end{array} \right.,$$

donde a y b son dos parámetros reales. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $\alpha = 0$ es un punto fijo de f para cualesquiera a y b.

(b) Si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

(c) Si $0 < a < 1$ y $b > 1$ entonces $\alpha = 0$ es inestable.

(d) Si $a < 0$ y $b < 0$ y $ab < 1$ entonces $\alpha = 0$ es asintóticamente estable.

(e) ¿Qué puede decirse sobre la estabilidad de los puntos fijos cuando $b = 1$ y $a > 1$?

15 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2}\, x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} .$$

Estudia la estabilidad de los puntos fijos de $x_{n+1} = f(x_n)$. ¿Es f contractiva?

16 La evolución de una determinada población viene descrita por la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = x_n\, e^{a - x_n} ,$$

donde $a > 0$ es un parámetro.

(a) Determina los puntos de equilibrio y estudia su estabilidad en función del valor de a.

(b) Para el caso $a = 3$, comprueba que $\{0.424321, 5.57568\}$ es un 2-ciclo (aproximado). ¿Es asintóticamente estable?

17 En cierto mercado los precios de un determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña, donde las funciones de oferta y demanda vienen dadas por

$$D(p) = 5 - p , \qquad O(p) = 2 + \frac{(p-2)^3}{3} .$$

Con el fin de estudiar la evolución de los precios se pide lo siguiente:

(a) Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y decreciente, entonces $x_{n+1} = f(x_n)$ tiene un único punto de equilibrio.

(b) Construye una ecuación en diferencias para el precio y localiza un intervalo entre dos enteros consecutivos que contenga al precio de equilibrio.

(c) Calcula la derivada de f en el entorno anterior. Comprueba que el punto de equilibrio obtenido es asintóticamente estable.

(d) Sea $g(x) = f(f(x))$, donde f es la función del apartado anterior. Prueba que se verifica

$$g(3) < 3 < 4 < g(4) ,$$

y deduce como consecuencia de ello que la ecuación en diferencias admite un 2-ciclo.

(e) ¿Es el precio de equilibrio un atractor global?

(f) Estudia el comportamiento de los precios del modelo teniendo en cuenta la información obtenida en los apartados anteriores.