TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Para cada $x \in X$, definimos $B_x = A \cup \{x\}$. Probad que $\beta = \{B_x; x \in X\}$ es una base de topología de X. Hallad la adherencia de A.
2. Con la topología usual de $\mathbb{R}$, sea $\{x_n\}_n \to x$. Hallad el interior y la adherencia de $\{x_n\}_n \cup \{x\}$.
3. Con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, se considera $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Describid la topología inducida en A.
4. Se considera un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in X$, se define
$$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$
Probad que $x \in \overline{A}$ sii $d(x, A) = 0$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2007/08
Profesor: Rafael López Camino

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Para cada $x \in X$, definimos $B_x = A \cup \{x\}$. Probad que $\beta = \{B_x; x \in X\}$ es una base de topología de X. Hallad la adherencia de A.

   Solución: Probamos las dos propiedades para β.

   (a)
   $$\bigcup_{x\in X} B_x = A \bigcup \left(\bigcup_{x\in X} \{x\} \right) = X.$$

   (b) Se tiene (si $x \neq y$)
   $$B_x \cap B_y = (A \cup \{x\}) \cap (A \cup \{y\}) = A$$
   y $A \in \beta$ porque $A = B_a$ para cualquier $a \in A$. Por tanto, si $z \in B_x \cap B_y = A$, tomamos B_a y es evidente que $z \in B_a = B_x \cap B_y$.

   Como cualquier elemento de la base β interseca a A, por la caracterización de punto adherente mediante bases de abiertos, se tiene entonces que $\overline{A} = X$.

2. Con la topología usual de $\mathbb{R}$, sea $\{x_n\}_n \to x$. Hallad el interior y la adherencia de $\{x_n\}_n \cup \{x\}$.

   Solución: Llamemos $A = \{x_n\}_n \cup \{x\}$.

   (a) Si $a \in A$ es un punto interior, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$: contradicción, pues A es numerable y cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ no lo es. Por tanto, $int(A) = \emptyset$.

   (b) Sea $y \in \overline{A}$. Entonces existe $\{a_n\} \subset A$ convergente a y. En particular, $\{a_n\}$ es una subsucesión de A. Las únicas que son convergentes son las que son constantes a partir de un cierto luegar –y en tal caso, $y \in A$–, o es una parcial de $\{x_n\}$ y por tanto, su límite es x. En particular, $y = x \in A$. Por tanto, hemos probado que $\overline{A} = A$.

3. Con la topología usual de $\mathbb{R}^2$, se considera $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Describid la topología inducida en A.

   Solución: Sea $p = (n, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se sabe que la familia de discos $\{B_r(p); 0 < r < 1\}$ es una base de entornos p en la topología de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, $\{B_r(p) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}); 0 < r < 1\}$ es una base de entornos de p en la topología inducida de A. Pero es evidente que $B_r(p) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \{p\}$. En clase se había probado que la topología que tiene como base de entornos de cualquier punto el propio punto, es la topología discreta.

4. Se considera un espacio métrico (X, d) y $A \subset X$. Si $x \in X$, se define
   $$d(x, A) = \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$
   Probad que $x \in \overline{A}$ sii $d(x, A) = 0$.

   Solución:

(a) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces existe $\{a_n\} \subset A$ tal que $\{a_n\} \to x$. En particular $\{d(x, a_n)\} \to 0$. Por tanto, en el conjunto $\{d(x, a); a \in A\}$ –que está acotado inferiormente por 0–, existe un subconjunto, a saber, $\{d(x, a_n)\}$, cuyo ínfimo es 0. Concluímos entonces que el ínfimo del primer conjunto también es 0.

(b) Supongamos que $d(x, A) = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $0 = d(x, A) < 1/n$. Por la definición de ínfimo, existe $a_n \in A$ tal que $0 \leq d(x, a_n) < 1/n$. Tomando límites cuando $n \to \infty$, se tiene que $\{d(x, a_n)\} \to 0$. Esto quiere decir que hemos encontrado una sucesión en A, a saber, $\{a_n\}$, que converge a x. En particular, $x \in \overline{A}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1,1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1,1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0,1]$.
2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.
3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 B -
Curso 2008/09
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

1. Sea $X = [-1, 1]$ y se define $\beta = \{\{x\}; x \neq 0\} \cup \{(-1, 1)\}$. Probad que β es base de una topología en X. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

   Solución: Es evidente que la unión de todos los elementos de β es $[-1, 1]$. Incluso menos, pues $[-1, 1] = \{-1\} \cup \{1\} \cup (-1, 1)$. . Por otro lado, si $B_1, B_2 \in \beta$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, es porque uno es $B_1 = \{x\}$, $x \neq 0$ y el otro es $B_2 = (-1, 1)$. Ya que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces $B_1 \cap B_2 = B_1$, luego la segunda propiedad de bases es evidente.

   Para calcular el interior de A estudiamos el mayor abierto dentro de A. Es evidente que $\cup_{x\in(0,1]}\{x\} = (0, 1]$ es un abierto incluido en A. Veamos que $0 \notin int(A)$. En tal caso, existiría $B \in \beta$ tal que $0 \in B \subset A$. Como $0 \in B$, entonces $B = (-1, 1)$ pero $(-1, 1) \not\subset [0, 1]$. Esto quiere decir que 0 no es interior. Como consecuencia $int(A) = (0, 1]$.

   Por otro lado, $[-1, 1] - A = [-1, 0) = \cup_{x\in[-1,0)}\{x\}$, entonces $[-1, 1] - A$ es abierto, es decir, A es cerrado. Por tanto $\overline{A} = A$.

2. Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual τ. Probad $\tau_{|\mathbb{Z}}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$. Si $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probad $\tau_{|A}$ no es la topología discreta en A.

   Solución: Una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es $\beta_x = \{(x - r, x + r); 0 < r < 1\}$. Por tanto, una base de entornos de $n \in \mathbb{Z}$ es

   $$\beta_n^{\mathbb{Z}} = \{(n - r, n + r) \cap \mathbb{Z}; 0 < r < 1\} = \{\{n\}\}.$$

   Se sabe entonces que la topología es la discreta.

   En el conjunto A, un base de entornos de 0 es

   $$\beta_0^A = \{(-r, r) \cap A; r > 0\}.$$

   Si la topología fuera la discreta, el conjunto $\{0\}$ sería abierto en A, y por tanto, 0 sería interior en $\{0\}$. En tal caso, existiría $r > 0$ tal que

   $$(-r, r) \cap A \subset \{0\}.$$

   Pero el conjunto de la izquiera tiene más de un punto, puesto que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$.

3. Sea X un conjunto y $A, B \subset X$ dos subconjuntos no triviales. Se define $\tau = \{\emptyset, X, A, B\}$. ¿Qué propiedades deben satisfacer A y B para que τ sea una topología en X? Sea $p \in X$. Hallad el interior, adherencia, frontera y exterior de $C = \{p\}$.

Solución: Se tiene que $A \cup B \in \tau$ y que $A \cap B \in \tau$, es decir,

$$A \cup B \in \{\emptyset, X, A, B\}, \qquad A \cap B \in \{\emptyset, X, A, B\}.$$

Las posibilidades son entonces:

(a) $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, es decir, A y B son complementarios uno del otro.

(b) $A \cup B = A$, es decir, $B \subset A$, entonces $A \cap B = B \in \tau$.

(c) $A \cup B = B$, es decir, $A \subset B$, entonces $A \cap B = A \in \tau$.

Para hallar el interior y la adherencia de C usamos las caracterizaciones que nos dicen que el interior es el mayor conjunto abierto en C y la adherencia es el menor cerrado que contiene a C. Para cada una de las anteriores topologías, tenemos

(a) En este caso, $\mathcal{F} = \tau$. Supongamos que $p \in A$. Entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq A$ o $int(C) = \{p\}$ si $A = \{p\}$. En cualquiera de los dos casos, $\overline{C} = A$. Si $p \in B$, el razonamiento es análogo, cambiando A por B.

(b) Supongamos que $B \subset A$.

   i. Si $p \in B$, entonces $int(C) = \emptyset$ si $\{p\} \neq B$ o $int(C) = \{p\}$ si $B = \{p\}$. En cualquier caso, $ext(C) = \emptyset$.

   ii. Si $p \in A - B$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = B$.

   iii. Si $p \in X - A$, entonces $int(C) = \emptyset$ y $ext(C) = A$.

(c) Este caso es análogo al anterior, cambiando A por B.

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 1
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^0 A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. En $\mathbb{N}$ se considera $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y adherencia de $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

2. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\beta_x = \{[x, \infty)\}$ es una base de entornos de x. Hallar la adherencia de $(0, 1)$.

3. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ del punto incluido para $p = 0$. Sean $A = [0, 2]$ y $B = (1, 2)$. Hallar $Fr(A)$. Probar que $\tau_{|B}$ es la topología discreta en B.

1. En $\mathbb{N}$ se considera $\tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, con $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que es una topología. Hallar el interior y adherencia de $A = \{\text{números pares}\}$ y $B = \{4, 6\}$.

   Solución:

   (a) $\mathbb{N} = A_1$. Por otro lado, $A_n \cap A_m = A_{\max\{n,m\}}$ y
   $$\cup_{i \in I} A_{n_i} = A_{\min\{n_i; i \in I\}}.$$
   Como consecuencia, la familia de cerrados es
   $$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{1, \ldots, n\}; n \in \mathbb{N}\}.$$

   (b) Ningún conjunto A_n está incluido en A, luego su interior es vacío. El único cerrado que contiene a A es $\mathbb{N}$, luego su adherencia es $\mathbb{N}$.

   (c) Ningún conjunto A_n está incluido en B, luego su interior es el vacío. El cerrado más pequeño que lo contiene es $\{1, \ldots, 6\}$.

2. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, \infty); a \in \mathbb{R}\}$. Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\beta_x = \{[x, \infty)\}$ es una base de entornos de x. Hallar la adherencia de $\{-1, 1\}$.

   Solución: Como el conjunto $[x, \infty)$ es un abierto que contiene a x, es un entorno suyo. Por otro lado, sea U un entorno de x. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a, \infty) \subset U$. En particular, $a \leq x$ y por tanto, $[x, \infty) \subset [a, \infty)$.

   Los conjuntos cerrados son, aparte de los triviales, los de la forma $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$. Por tanto la adherencia es $(-\infty, 1]$.

3. En $\mathbb{R}$ se considera la topología τ del punto incluido para $p = 0$. Se considera $A = [0, 2]$ y $B = (1, 2)$. Hallar $Fr(A)$. Probar que $\tau_{|B}$ es la topología discreta en B.

   Solución:

   Como A contiene al 0, es abierto. Como $ext(A) = int(\mathbb{R} - A)$, entonces es vacío. Por tanto, la frontera es $\mathbb{R} - A$.

   Dado $b \in B$, $\{b\} = B \cap \{0, b\}$. Por tanto, $\{b\} \tau_{|B}$. Como todo punto es abierto, la topología correspondiente es la discreta.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>**Nombre**</u>**:**

Razonar todas las respuestas

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.
   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.
   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?

2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.
   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.
   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.
   (c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x = 5$ en A.

Soluciones

1. Sea X un conjunto y $A \subset X$. Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) Probar que $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$ es una base de τ.

   Los conjuntos son abiertos ya que contienen a O. Por otro lado, si $O \in \tau$ y $x \in O$, entonces $\{x\} \cup A \subset O$ ya que $A \subset O$. Por tanto, $x \in \{x\} \cup A \subset O$.

   (b) Si $B \subset X$, hallar el interior y la adherencia de B.

   El interior de B es el mayor conjunto abierto dentro de B. En particular, $int(B) \subset A$. Si $B \supset A$, entonces B es abierto y coincide con su interior. En caso contrario, $int(B) = \emptyset$ ya que si no, $A \subset int(B) \subset B$, lo cual no es posible.

   Los conjuntos cerrados F son aquéllos tales que $A \subset X - F$ o $F = X$, es decir, $F \subset X - A$ o $F = X$. Ya que $\overline{B}$ es el menor cerrado que contiene a B, si $B \subset X - A$, entonces $\overline{B} = B$. En caso contrario, es decir, si $B \not\subset X - A$, entonces $\overline{B} = X$.

   (c) ¿Qué topología conocida es $\tau_{|A}$?

$$\tau_{|A} = \{O \cap A; O \in \tau\} \cup \{\emptyset\} = \{A\} \cup \{\emptyset\}.$$

   Por tanto, $\tau_{|A}$ es la topología trivial de A.

2. Para $X = [-1, 1]$, probar que $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$ es una topología en X. Hallar una base de entornos para $x \in X$ con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto $A = [0, 1]$.

   A los abiertos de la primera familia los llamaremos del primer tipo y los de la segunda, del segundo tipo. El conjunto vacío está en τ por definición y por otro lado, X pertenece al del segundo tipo.

   Sea $\{O_i\}_{i \in I} \subset \tau$. Si alguno de los abiertos, llamado O_{i_0}, es del segundo tipo, entonces

$$(-1, 1) \subset O_{i_0} \subset \cup_{i \in I} O_i,$$

luego la unión es del segundo tipo. En caso contrario, es decir, si todos son del primer tipo, entonces ningún abierto contiene a $x = 0$ y menos aún, la unión de todos.

Sea $O_1, O_2 \in \tau$. Es evidente que si los dos son del primer tipo, la intersección no contiene a $x = 0$; que si los dos son del segundo tipo, ambos contienen a $(-1, 1)$, y por tanto, también la intersección. Finalmente, si O_1 es del primer tipo y O_2 del segundo, entonces $0 \notin O_1$ y por tanto, $0 \notin O_1 \cap O_2$.

Una base de entornos de x es:

$$\beta_x = \begin{cases} \{(-1, 1)\} & \text{si } x = 0 \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es evidente que en ambos casos, los conjuntos son abiertos, luego entornos de todos sus puntos. Por otro lado, si U es un entorno de 0, existe $O \in \tau$ tal que $0 \in O \subset U$. Entonces O contiene al 0, luego tiene que ser del segundo tipo, en particular, $(-1, 1) \subset O$, probando que $0 \in (-1, 1) \subset U$. Si $x \neq 0$ y U es un entorno suyo, entonces $x \in \{x\} \subset U$.

El conjunto $(0, 1]$ es abierto porque no tiene a $x = 0$. Veamos si 0 es interior a A. En tal caso, $(-1, 1) \subset A$, ya que $(-1, 1)$ es el elemento de la base de entornos de $x = 0$. Como esto no es posible, $int(A) = (0, 1]$. Para la adherencia, si $x \notin A$, entonces $x \neq 0$, luego $\{x\} \cap A = \emptyset$ y así no es adherente. Esto dice que $\overline{A} = A$ (también A es cerrado ya que su complementario, que es $[-1, 0)$, es abierto (del primer tipo)).

3. Sea $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$ con la topología usual.

   (a) Estudiar si $\{5\}$ y $(2, 3)$ son abiertos o cerrados en A.

   El conjunto $\{5\}$ es abierto y cerrado en A ya que $\{5\} = (4, 6) \cap A = [4, 6] \cap A$ y $(4, 6)$ y $[4, 6]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.

   El conjunto $(2, 3)$ es abierto y cerrado en A ya que $(2, 3) = (2, 3) \cap A = [2, 3] \cap A$ y $(2, 3)$ y $[2, 3]$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$, respectivamente.

   (b) Hallar el interior y la adherencia en A de $(0, 1)$.

   El conjunto $(0, 1)$ es abierto en A: $(0, 1) = (0, 1) \cap A$, luego coincide con su interior. Por otro lado, $[0, 1)$ es cerrado en A ya que $[0, 1) = [0, 1] \cap A$ y $[0, 1]$ es cerrado de $\mathbb{R}$. En particular, la adherencia de $(0, 1)$ en A está contenida en $[0,1)$. Finalmente, $x=0$ es adherente a A ya que una base de entornos de 0 en A es $\{[0,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ pues $[0,\epsilon)=(-\epsilon,\epsilon)\cap A$ y $\{(-\epsilon,\epsilon); 0<\epsilon<1\}$ es una base de entornos de $x=0$ en $\mathbb{R}$. Por tanto la adherencia del conjunto es $[0,1)$.

(c) Probar que $\{\{5\}\}$ es una base de entornos de $x=5$ en A.

Ya se ha visto que $\{5\}$ es un abierto en A, luego un entorno de $x=5$ en A. Como todo entorno de 5 en A debe contener a $x=5$, en particular, $\{5\}$ está contenido en dicho entorno. Otra forma es: una base de entornos de $x=5$ en la topología usual de $\mathbb{R}$ es $\{(5-\epsilon,5+\epsilon); 0<\epsilon<1\}$. Por tanto, una base de entornos de 5 en A es

$$\{(5-\epsilon,5+\epsilon)\cap A; 0<\epsilon<1\}=\{\{5\}\}.$$

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1
– Grado en Matemáticas –
Curso 2012/13

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Probar que $\beta = \{[a,b); a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, a < b\}$ es base de una topología en $\mathbb{R}$. Hallar el interior y la adherencia de $\mathbb{Q}$ y $[0,1]$.

2. Hallar el interior y la adherencia de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{(x,y); -1 \leq x \leq 1\}$ en $\mathbb{R}^2$.

   (b) $B = \{(x,y); y < x^2\}$ en $\mathbb{R}^2$.

   (c) $C = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$.

3. Se considera en $\mathbb{N}$ la topología $\tau = \{O_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, con $O_n = \{1, \ldots, n\}$. Probar que $\beta_n = \{O_n\}$ es una base de entornos de n. Si $A = \{2,3,4\}$, hallar el interior y adherencia del conjunto $\{2,4\}$ en $(A, \tau_{|A})$.

1. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, dado $x \in \mathbb{R}$, existen $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ con $a < x < b$. Esto prueba que $x \in [a,b) \in \beta$, es decir, $\mathbb{R} = \cup_{B\in\beta} B$. Por otro lado, la intersección de dos elementos de β es otro elemento de β, pues $[a,b) \cap [c,d) = [\max\{a,c\}, \min\{b,d\})$ y de nuevo $\max\{a,c\} \in \mathbb{Q}$ y $\min\{b,d\} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

   Como no hay ningún elemento de la base incluido en $\mathbb{Q}$, $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Por la densidad de los racionales, todo intervalo de la forma $[a,b) \in \beta$ interseca a $\mathbb{Q}$, luego $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

   El conjunto $[0,1)$ es abierto pues si $x_n \to 1$, $x_n < 1$ y $x_n \notin \mathbb{Q}$, entonces $[0,x_n) \subset [0,1)$. Por tanto, $int([0,1]) \supset [0,1)$. Sólo queda probar si $x=1$ es o no interior. No lo es, pues dado cualquier $[a,b) \in \beta$ con $1 \in [a,b)$, el conjunto $[1,b)$ no está incluido en $[0,1]$. Esto prueba que $int([0,1] = [0,1)$.

   Sea $x < 0$. Tomamos $r \notin \mathbb{Q}$ tal que $x < r < 0$ y $q \in \mathbb{Q}$ con $q < x$. Entonces $[q,r) \cap [0,1] = \emptyset$. De la misma forma, si $x > 0$, sea $r \notin \mathbb{Q}$ tal que $x < r$ y sea $q \in \mathbb{Q}$ con $1 < q < x$. Entonces $[q,r) \cap [0,1]$. Esto prueba que $\overline{[0,1]} = [0,1]$.

2. (a) Usamos como base de la topología usual $\{(a,b)\times(c,d); a<b, c<d\}$.

      Sea $0 < x < 1$. Entonces $(0,1)\times(y-1,y+1) \subset A$. Esto prueba que $int(A) \supset (0,1)\times\mathbb{R}$. Si $x = 0$, ningún elemento de la forma $(-r,r)\times(y-s,y+s)$ está en A (p.ej. $(-r/2,y)$). Esto prueba que $(0,y)$ no es interior y de la misma forma, tampoco lo es $(1,y)$. Como conclusión $int(A) = (0,1)\times\mathbb{R}$.

      Sea $x < 0$. entonces $((x-1,0)\times(y-1,y+1)) \cap A = \emptyset$. Esto prueba que (x,y) no es adherente y de la misma forma, tampoco lo es un punto (x,y) con $x > 1$. Esto prueba que $\overline{A} = A$.

   (b) El interior de B es B: sea $(x,y) \in B$, con $y < x^2$ y sea $\{(x_n,y_n)\} \to (x,y)$. Entonces $x_n^2 - y_n \to x^2 - y$. Pero como $x^2 - y > 0$, a partir de un cierto lugar de la sucesión $x_n^2 - y_n > 0$, probando que $(x_n,y_n) \in B$.

      Sea $(x,y) \in \overline{B}$. Entonces existe $\{(x_n,y_n)\} \subset B$ convergiendo a (x,y). En particular, $x_n^2 - y_n \to x^2 - y$. Como $x_n^2 - y_n > 0$, tomando límites, $x^2 - y \geq 0$. Por tanto, $\overline{B} \subset \{(x,y) : y \leq x^2\}$. Si (x,y) satisface $y = x^2$, entonces es adherente, pues la sucesión de B dada por $(x, y-1/n)$ converge a (x,y).

(c) No hay ningún intervalo abierto dentro de C, luego $int(C) = \emptyset$.

Los puntos adherentes son los límites de las sucesiones convergentes del conjunto. Aparte de los propios elementos del conjunto (usando aplicaciones constantes), está 0. Esto prueba que $\overline{C} = C \cup \{0\}$.

3. Como O_n es abierto y contiene a n, es un entorno suyo. Sea ahora $U \in \mathcal{U}_n$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \in O_m \subset U$. De $n \in O_m$, se tiene $n \leq m$, y por tanto, $O_n \subset O_m$. Esto prueba que $O_n \subset U$.

   Por la definición de topología relativa, se tiene:

$$\tau_{|A} = \{\emptyset, A, A \cap O_1, A \cap O_2, A \cap O_3\} = \{\emptyset, A, \{2\}, \{2, 3\}\}.$$

   Y de aquí,

$$\mathcal{F}_{|A} = \{\emptyset, A, \{3, 4\}, \{4\}\}.$$

   El interior es el abierto más grande dentro de $\{2, 4\}$, que es $\{2\}$. La adherencia el es cerrado más pequeño que contiene a $\{2, 4\}$, que es A.

TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1
– Grado en Matemáticas. Curso 2013/14 –

Nombre:

1. Sea X un conjunto y un subconjunto suyo $A \subset X$, que lo fijamos. Definimos
$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$
   (a) Probar que τ es una topología en X.
   (b) Probar que $\beta_x = \{B_x\}$ es base de entornos de $x \in X$, donde $B_x = \{x\} \cup A$.
   (c) Si $C \subset X$, caracterizar el interior y la adherencia de C.

2. En $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, hallar el interior y la adherencia de
$$A = B_1((0,0)) - \{(0,0)\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

3. En $\mathbb{R}^2$, consideramos la familia $\beta = \{(a,b) \times \{c\} : a < b, a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Probar que β es base de abiertos de una topología τ en $\mathbb{R}^2$.
   (b) Comparar τ con τ_u.
   (c) Dado $C = \{0\} \times \mathbb{R}$, estudiar cuál es la topología relativa $\tau_{|C}$ y si es conocida.

Razonar todas las respuestas

Soluciones

1. *Sea X un conjunto y un subconjunto suyo $A \subset X$, que lo fijamos. Definimos*

$$\tau = \{O \subset X : A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

   (a) *Probar que τ es una topología en X.*

      i. $\emptyset \in \tau$ por definición y $A \subset X$, luego $X \in \tau$.

      ii. Si $O_1, O_2 \in \tau$, entonces $O_i \supset A$, luego al intersecar ambas inclusiones, $O_1 \cap O_2 \supset A \cap A = A$, luego $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

      iii. Si $\{O_i : i \in \tau\}$, entonces $A \subset O_i, \forall i \in I$. Al hacer uniones en $i \in I$, $A \subset \cup_{i \in I} O_i$.

   (b) *Probar que $\beta_x = \{B_x\}$ es base de entornos de $x \in X$, donde $B_x = \{x\} \cup A$.*

   En primer lugar, $B_x \supset A$, luego B_x es un abierto, y como $x \in B_x$, es un entorno suyo. Por otro lado, sea U un entorno de x. Entonces existe $O \in \tau$ tal que $x \in O \subset U$. En particular, $A \subset O$. Esto prueba que $B_x = \{x\} \cup A \subset \{x\} \cup O = O \subset U$.

   (c) *Si $C \subset X$, caracterizar el interior y la adherencia de C.*

   Los conjuntos cerrados son $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \subset X - A\} \cup \{X\}$. Distinguimos casos:

      i. Si $A \subset C$, entonces C es un abierto, luego $int(C) = C$. Por otro lado, si F es un cerrado no trivial que contiene a C, entonces $X - A \supset F \supset C \supset A$. Esta contradicción, prueba que C es trivial, es decir, $F = X$ y así $\overline{C} = X$.

      ii. Si $A \not\subset C$, y $O \in \tau$ no trivial tal que $O \subset C$, entonces $C \supset O \supset A$: contradicción. Por tanto, el único abierto incluido en C es el trivial, es decir, $O = \emptyset$, probando que $int(C) = \emptyset$. Si F es un cerrado no trivial conteniendo a C, entonces $X - A \supset F \supset C$, es decir, $C \subset X - A$, probando que C es cerrado y $\overline{C} = C$. En otro caso, es decir, si $C \not\subset X - A$, el único cerrado es que contiene a C es el trivial, es decir, X, probando ahora $\overline{C} = X$.

2. *En $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$, hallar el interior y la adherencia de*

$$A = B_1((0,0)) - \{(0,0)\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

   (a) Sabemos que un punto en un espacio métrico (en este caso, $\mathbb{R}^2$) es un cerrado, luego

$$A = B_1((0,0)) \cap (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

es decir, intersección de dos abiertos, luego $int(A) = A$.
Otra manera es darse cuenta que $A = \cup_{(x,y)\in\mathbb{S}^1_{1/2}} B_{1/2}(x,y)$, luego es abierto por ser unión de conjuntos abiertos.
Otra manera es que dado $(x,y) \in A$, y tomando $r = \min\{\sqrt{x^2+y^2}, 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ entonces r es positivo (ya que $x^2+y^2 \notin \{0,1\}$) y que $B_r((x,y)) \subset A$.
Si $(x,y) \in \overline{A}$, entonces existe $\{(x_n,y_n)\} \subset A \to (x,y)$. En particular, $0 < x_n^2 + y_n^2 < 1$. Ya que $x_n \to x$ e $y_n \to y$, tomando límites obtenemos $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$. Por tanto, $\overline{A} \subset \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$. Para probar la igualdad, observemos que si $\lambda_n \to 1$ con $0 < \lambda_n < 1$ (por ejemplo, $\lambda_n = 1 - 1/n$), entonces si (x,y) satisface $x^2+y^2 = 1$, tenemos $\lambda_n(x,y) \in A$, pues $|\lambda_n||(x,y)| = \lambda_n \in (0,1)$ y

$$\lim \lambda_n(x,y) = (x,y) \Rightarrow (x,y) \in \overline{A}.$$

Para el punto $(0,0)$ basta darse cuenta que

$$B_r(0,0) \cap A = B_{\min\{1,r\}}(0,0) - \{(0,0)\},$$

que no es vacío, al ser una bola de $\mathbb{R}^2$ (que es un conjunto infinito) menos un punto.

(b) El conjunto $\mathbb{R} \times (-1,1)$ es abierto pues

$$\mathbb{R} \times (-1,1) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(-n,n) \times (-1,1) \in \tau_u.$$

Por tanto, $int(B) \supset \mathbb{R} \times (-1,1)$. Veamos que es una igualdad. Para $(x,1) \in B$, dado $B_r(x,1)$, entonces esta bola no está contenida en B ya que $(x, 1+r/2) \in B_r(x,1)$ pero $(x,1+r/2) \notin B$. Esto prueba que $(x,1)$ no es interior. Del mismo modo se hace para los punto $(x,-1)$.
Para la adherencia, y haciendo un razonamiento como en el caso A (seguimos la misma notación), se tendría $-1 \leq y_n \leq 1$. Tomando límites, $-1 \leq y \leq 1$, es decir, $\overline{B} \subset B$, obteniendo pues, la igualdad.

3. *En $\mathbb{R}^2$, consideramos la familia $\beta = \{(a,b) \times \{c\} : a < b, a,b,c \in \mathbb{R}\}$.*

(a) *Probar que β es base de abiertos de una topología τ en $\mathbb{R}^2$.*
Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $(x,y) \in (x-1, x+1) \times \{y\} \in \beta$, probando que $\mathbb{R}^2 = \cup_{B\in\beta} B$.
Por otro lado, sean $B_1 = (a,b) \times \{c\}$, $B_2 = (a',b') \times \{c'\}$ y $(x,y) \in B_1 \cap B_2$. En particular, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Esto prueba que $c = c'$. Entonces tomamos

$$B_3 = B_1 \cap B_2 = (\max\{a,a'\}, \min\{b,b'\}) \times \{c\}.$$

(b) *Comparar* τ *con* τ_u.

Tomamos como base de τ_u el producto de intervalos abiertos. Entonces dado $B \in \beta_u$ y $(x, y) \in B$, con $B = (a, b) \times (c, d)$, tomamos $B' = (a, b) \times \{y\}$, teniendo $(x, y) \in B' \subset B$. Esto prueba que $\tau_u \subset \tau$.

La otra inclusión no es cierta, pues dado $B' = (0, 2) \times \{0\}$ y $(1, 0) \in B'$, si $\tau \subset \tau_u$ existiría $(a, b) \times (c, d) \in \beta_u$ tal que

$$(1, 0) \subset (a, b) \times (c, d) \subset B' = (0, 2) \times \{0\}.$$

En particular, $(c, d) \subset \{1\}$, una contradicción ya que el intervalo (c, d) tiene infinitos puntos.

(c) *Dado* $C = \{0\} \times \mathbb{R}$, *estudiar cuál es la topología relativa* $\tau_{|C}$ *y si es conocida.*

Una base de $\tau_{|C}$ es $\beta_{|C} = \{B \cap C : B \in \beta\}$. La intersección de B con C o es vacío o es un punto. Concretamente, dicha base tiene al menos las siguientes intersecciones:

$$\{((-1, 1) \times \{y\}) \cap C = \{(0, y)\} : y \in \mathbb{R}\}.$$

Esto prueba que los puntos de C son abiertos y así, $\tau_{|C}$ es la topología discreta.

Prueba Tema 1. Topología I
Doble grado en Informática y Matemáticas
7 de noviembre de 2019

1.– Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y $K \subset \mathbb{R}$ el subconjunto:

$$K := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Consideramos la familia $\mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathcal{B} := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{(a,b) \setminus K : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

1. ¿Es $\mathcal{B}$ base de una topología en $\mathbb{R}$?
2. Sea T_K la topología generada por $\mathcal{B}$. Probar que T_K es estrictamente más fina que la topología usual T_u de $\mathbb{R}$ ($T_u \subset T_K$, pero $T_u \neq T_K$).
3. ¿Es $(\mathbb{R}, T_K)$ un espacio Hausdorff?
4. Calcular la clausura de $(0,1)$ en $(\mathbb{R}, T_K)$.
5. Dar un ejemplo de una sucesión convergente con la topología usual T_u que no converge con la topología T_K.

1. Para probar que $\mathcal{B}$ es base de una topología hay que verificar:
   1. $\mathbb{R} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,
   2. Para cualquier par de conjuntos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

La primera propiedad se comprueba fácilmente puesto que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$$

ya que $(-n, n) \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para probar la segunda propiedad, tomamos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Distinguimos varios casos:

(a) Si $B_1 = (a_1, b_1), B_2 = (a_2, b_2)$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $B_3 = B_1 \cap B_2 = (c, d)$ pertenece a $\mathcal{B}$, con $c = \max\{a_1, a_2\}, d = \min\{b_1, b_2\}$).

(b) Si $B_1 = (a_1, b_1), B_2 = (a_2, b_2) \setminus K$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $B_3 = B_1 \cap B_2 = (c, d) \setminus K$ pertenece a $\mathcal{B}$, con $c = \max\{a_1, a_2\}, d = \min\{b_1, b_2\}$.

El caso $B_1 = (a_1, b_1) \setminus K, B_2 = (a_2, b_2)$ se reduce a (b) intercambiando los papeles de B_1 y B_2.

(c) Si $B_1 = (a_1, b_1) \setminus K, B_2 = (a_2, b_2) \setminus K$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $B_3 = B_1 \cap B_2 = (c, d) \setminus K$ pertenece a $\mathcal{B}$, con $c = \max\{a_1, a_2\}, d = \min\{b_1, b_2\}$.

2. Para probar que $T_u \subset T_K$ tenemos en cuenta que la base $\mathcal{B}_u = \{(a,b) : a < b\}$ de la topología usual T_u está contenida en $\mathcal{B}$. Tomamos $U \in T_u$. Entonces existen conjuntos $\{B_i\}_{i \in I}$ pertenecientes a $\mathcal{B}_u$ tales que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Como $B_i \in \mathcal{B}_u \subset \mathcal{B} \subset T_K$ para todo $i \in I$, concluimos que $U \in T_K$ por ser unión de elementos de T_K.

Para probar que $T_u \subsetneq T_K$ tomamos el conjunto $U = (-1, 1) \setminus K$. Dicho conjunto pertenece a $\mathcal{B}$ y es, por tanto, abierto en la topología T_K. Sin embargo no es abierto de T_u porque $0 \in U$ no es punto interior de U. Para probarlo tenemos en cuenta que los conjuntos $\{(-\varepsilon, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forman una base de entornos en 0 en T_u. Si $0 \in \operatorname{int}(U)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset U = (-1, 1) \setminus K$. Entonces $\frac{1}{n} \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es imposible.

3. Sea $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Como $(\mathbb{R}, T_u)$ es Hausdorff, existen dos abiertos $U, V \in T_u$ tales que $x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$. Como $T_u \subset T_K$, los conjuntos U, V son abiertos en T_K, disjuntos, y contienen a x, y, respectivamente. Esto demuestra que $(\mathbb{R}, T_K)$ es un espacio Hausdorff.

4. Para calcular la clausura de $(0, 1)$ en T_K tenemos en cuenta que $[0, 1]$ es cerrado en T_K puesto que es cerrado en T_u ($T_u \subset T_K$ lo que implica que los cerrados de T_u son cerrados de T_K). Entonces la clausura de $(0, 1)$ en T_K está contenida en $[0, 1]$.

Veamos que $0, 1 \in \overline{(0, 1)}$, lo que demostraría que $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x en T_K. Si $U \in \mathcal{B}(1)$, entonces $U = (a, b)$, con $a < 1 < b$ (los conjuntos de la forma $(a, b) \setminus K$ no contienen a 1). Entonces $(0, 1) \cap (a, b) = (\max\{0, a\}, 1) \neq \emptyset$.

Si $U \in \mathcal{B}(0)$, entonces U es de la forma (a, b) o de la forma $(a, b) \setminus K$, con $a < 0 < b$. En el primer caso $U \cap (0, 1) = (0, \min\{1, b\}) \neq \emptyset$. En el segundo caso, $U \cap (0, 1) = (0, \min\{1, b\}) \setminus K \neq \emptyset$. Por tanto, $0 \in \overline{(0, 1)}$.

5. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en T_u. Veamos que no converge a ningún punto con la topología T_K. No puede converger a 0 en T_K porque $(-1, 1) \setminus K$ es un entorno de 0 que no contiene a ningún elemento de la sucesión. Tampoco puede converger en T_K a otro punto $x \neq 0$: tomamos $\delta, \varepsilon > 0$ tales que $(-\delta, \delta) \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$. Como $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 en T_u, todos los elementos de la sucesión salvo una cantidad finita están en $(-\delta, \delta)$, por lo que solo hay una cantidad finita en $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Esto implica que la sucesión no puede converger a $x \neq 0$ en T_K.