Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del tema 14

1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el conjunto A y calcular su integral:

a) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 > 1 \, , \; y > 0 \}$
$f(x,y) = \dfrac{x + y}{\left(x^2 + y^2 \right)^\alpha} \qquad \forall\, (x,y) \in A \qquad (\alpha \in \mathbb{R}\, , \; \alpha > 3/2)$

b) $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 < x^2 + y^2 < 1 \, , \; z > 1 \}$
$f(x,y,z) = z^\alpha \left(x^2 + y^2 \right)^\beta \quad \forall\, (x,y,z) \in A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}\, , \; \alpha < -1 < \beta)$

c) $A = \{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 > 1 \}$
$f(x,y,z) = \dfrac{x\,y\,z}{\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^4} \qquad \forall\, (x,y,z) \in A$

Solución

a) Usamos un cambio de variable a coordenadas polares, considerando el conjunto

$$E =]\, 1\, , +\infty\, [\times]\, 0\, , \pi\, [$$

y la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\rho\, , \theta) = \rho\, f(\rho \cos\theta\, , \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho^2 \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \right)}{\rho^{2\alpha}} \qquad \forall\, (\rho\, , \theta) \in E$$

Usando el teorema de Tonelli, comprobamos que $g \in \mathcal{L}_1(E)$, ya que

$$\begin{aligned} \int_E |\, g(\rho,\theta)\, |\, d(\rho,\theta) &\le 2 \int_E \rho^{2-2\alpha}\, d(\rho,\theta) = 2 \int_0^\pi \left(\int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha}\, d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^{3-2\alpha}}{3 - 2\alpha} \right]_1^{+\infty} = \frac{2\pi}{2\alpha - 3} < \infty \end{aligned}$$

El teorema de cambio de variable nos dice que $f \in \mathcal{L}_1(A)$ y que la integral de f sobre A coincide con la de g sobre E, que calculamos usando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_A f(x,y)\, d(x,y) &= \int_E g(\rho,\theta)\, d(\rho,\theta) = \int_E \rho^{2-2\alpha} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d(\rho,\theta) \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha}\, d\rho \right) (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\alpha - 3} \int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \frac{2}{2\alpha - 3} \end{aligned}$$

b) Usamos el cambio de variable a coordenadas cilíndricas, considerando el conjunto

$$E =]\,0\,,\,1\,[\,\times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\,\times\,]\,1\,,\,+\infty\,[$$

y la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$g\big(\rho\,,\,\theta\,,\,z\big) \,=\, \rho\, f\big(\rho\,\cos\theta\,,\,\rho\,\operatorname{sen}\theta\,,\,z\big) \,=\, z^{\alpha}\,\rho^{2\beta+1} \qquad \forall\,\big(\rho\,,\,\theta\big) \in E$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el de Tonelli, nos dicen que $f \in \mathcal{L}_1(A)$, pues de hecho se tiene

$$\begin{aligned}
\int_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) \,&=\, \int_E g(\rho,\theta,z)\,d(\rho,\theta,z) \,=\, \int_E z^{\alpha}\rho^{2\beta+1}\,d(\rho,\theta,z) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \rho^{2\beta+1}\left(\int_1^{+\infty} z^{\alpha}\,dz\right)d\rho\right)d\theta \\
&= 2\pi\left[\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{+\infty}\left[\frac{\rho^{2\beta+2}}{2\beta+2}\right]_0^1 \,=\, -\,\frac{\pi}{(\alpha+1)(\beta+1)}
\end{aligned}$$

■

c) Usamos el cambio de variable a coordenadas esféricas, considerando el conjunto

$$E =]\,1\,,\,+\infty\,[\,\times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\,\times\,]-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$$

y la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}
g\big(r\,,\,\theta\,,\,\varphi\big) \,&=\, r^2\,\cos\varphi\; f\big(r\,\cos\theta\,\cos\varphi\,,\,r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi\,,\,r\,\operatorname{sen}\varphi) \\
&= \frac{\cos\theta\;\operatorname{sen}\theta\;\cos^3\varphi\;\operatorname{sen}\varphi}{r^3} \qquad \forall\,\big(r\,,\,\theta\,,\,\varphi\big) \in E
\end{aligned}$$

Usando el teorema de Tonelli, comprobamos que $g \in \mathcal{L}_1(E)$, ya que

$$\begin{aligned}
\int_E |\,g(r,\theta,\varphi)\,|\,d(r,\theta,\varphi)) \,\le\, \int_E \frac{d(r,\theta,\varphi)}{r^3} \,&=\, \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^3}\right)d\theta\right)d\varphi \\
&= 2\pi^2\left[-\frac{1}{2\,r^2}\right]_1^{+\infty} \,=\, \pi^2 \,<\, \infty
\end{aligned}$$

El teorema de cambio de variable nos dice que $f \in \mathcal{L}_1(A)$. Para calcular su integral escribimos $A \,=\, A_+ \uplus A_0 \uplus A_-$ donde $A_0 \,=\, \big\{\,(x,y,z) \in A \,:\, x \,=\, 0\,\big\}$, mientras que

$$A_+ \,=\, \big\{\,(x,y,z) \in A \,:\, x \,>\, 0\,\big\} \qquad \text{y} \qquad A_- \,=\, \big\{\,(x,y,z) \in A \,:\, x \,<\, 0\,\big\}$$

El conjuunto A_0 tiene medida nula, por estar contenido en un plano, y es claro que

$$A_- \,=\, \big\{\,(-x,y,z) \,:\, (x,y,z) \in A^+\,\big\} \quad \text{y} \quad f(-x,y,z) \,=\, -\,f(x,y,z) \;\;\forall\,(x,y,z) \in A_+$$

Deducimos que

$$\int_{A_0} f = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{A_-} f = -\int_{A_+} f$$

con lo que la aditividad de la integral nos permite concluir que

$$\int_A f = \int_{A_0} f + \int_{A_+} f + \int_{A_-} f = 0 \qquad \blacksquare$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto A:

a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\quad f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \quad \forall\,(x,y) \in A$

b) $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > x^2 + y^2 \right\}$
$f(x,y,z) = \left(x^3 + y^3\right) \cos(x\,y)\, e^{-z} \qquad \forall\,(x,y,z) \in A$

c) $A = \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{\left(1 + x^2 + y^2 + z^2\right)^{\alpha}} \quad \forall\,(x,y,z) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

Solución

a) Descomponemos el conjunto A en la forma $E = A_1 \uplus A_2$ donde

$$A_1 = \left\{ (x,y) \in A \ : \ x^2 + y^2 \geq 1 \right\} \quad \text{y} \quad A_1 = \left\{ (x,y) \in A \ : \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

para estudiar por separado la integrabilidad de f en A_1 y A_2 . Para el primero se tiene claramente que

$$|\, f(x,y)\, | \leq \frac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \qquad \forall\,(x,y) \in A_1$$

Usamos un cambio de variable a coordenadas polares, considerando el conjunto

$$E_1 = [\,1\,,\, +\infty\,[\times]\, -\pi\,,\, \pi\,[$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el teorema de Tonelli nos dicen que

$$\int_{A_1} |\, f(x,y)\,|\, d(x,y) \leq \int_{A_1} \frac{d(x,y)}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} = \int_{E_1} \frac{d(\rho,\theta)}{\rho^2}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_1^{+\infty} \frac{d\,\rho}{\rho^2} \right) d\,\theta = 2\,\pi \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^{+\infty} = 2\,\pi < \infty$$

Para trabajar en el conjunto A_2 usamos una acotación diferente. Del teorema del valor medio se deduce que $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y obtenemos que

$$|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \forall (x,y) \in A_2$$

Usamos ahora el cambio de variable a coordenadas polares, considerando el conjunto

$$E_2 =]0,1[\times]-\pi,\pi[$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el teorema de Tonelli nos dicen ahora que

$$\int_{A_2} |f(x,y)|\, d(x,y) \leq \int_{A_2} \frac{|xy|\, d(x,y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{E_2} \frac{\rho\,|\rho\cos\theta|\,|\rho\operatorname{sen}\theta|}{\rho^3}\, d(\rho,\theta)$$
$$\leq \int_{E_2} d(\rho,\theta) = 2\pi < \infty$$

Hemos probado que f es integrable en A_1 y en A_2, luego $f \in \mathcal{L}_1(A)$. ■

c) Usamos el cambio de variable a coordenadas esféricas, considerando el conjunto

$$E = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el teorema de Tonelli, nos dicen que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \int_E \frac{r^2\cos\varphi\, d(r,\theta,\varphi)}{(1+r^2)^\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{r^2\cos\varphi\, dr}{(1+r^2)^\alpha}\right)d\varphi\right)d\theta =$$
$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{r^2\, dr}{(1+r^2)^\alpha}\right) = 4\pi\int_0^{+\infty}\frac{r^2\,dr}{(1+r^2)^\alpha}$$

Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$ si, y sólo si, $h \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$, donde $h(r) = r^2(1+r^2)^{-\alpha}$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Definiendo $h(0) = 0$ convertimos h en una función continua, luego localmente integrable, en $\mathbb{R}_0^+$. En particular h es integrable en el intervalo $[0,1]$, luego será integrable en $\mathbb{R}^+$ si, y sólo si, lo es en $J = [1,+\infty[$. En esta nueva semirrecta podemos usar el criterio de comparación con la función $g : J \to \mathbb{R}$ dada por $g(r) = r^{2-2\alpha}$ para todo $r \in J$, que es localmente integrable y no se anula en J. Se tiene claramente que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{|h(r)|}{|g(r)|} = \lim_{r\to+\infty}\frac{r^{2\alpha}}{(1+r^2)^\alpha} = 1$$

y el criterio de comparación nos dice que h es integrable en J si, y sólo si, lo es g, pero sabemos que esto equivale a que se tenga $2-2\alpha < -1$, es decir, $\alpha > 3/2$.

Concluimos de esta forma que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$ si, y sólo si, $\alpha > 3/2$. ■

3. Calcular el volumen de la llamada *bóveda de Viviani*:

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (2x-1)^2 + 4y^2 \leq 1, \ \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ \ z \geq 0 \right\}$$

Solución

El volumen de B coincide con el de la subgráfica de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \left(2x-1\right)^2 + y^2 \leq 1 \right\} \qquad \text{y} \\ f(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \forall\, (x,y) \in A \end{aligned}$$

ya que la diferencia entre ambos conjuntos tiene medida nula. Por tanto, se tiene

$$\lambda_3(B) = \int_A \sqrt{1-x^2-y^2}\; d(x,y)$$

Para calcular esta integral doble, usaremos el cambio de variable a coordenadas polares, por lo que deberemos encontrar el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de A. Si $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in]-\pi, \pi[$, se tiene que $\left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta\right) \in A$ si, y sólo si,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left(2\rho\cos\theta - 1\right)^2 + 4\rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + 1 + 4\rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 4\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 1 = 4\rho\left(\rho - \cos\theta\right) + 1 \end{aligned}$$

lo que equivale a que se tenga $\rho \leq \cos\theta$. Además, esta desigualdad sólo es posible cuando $\cos\theta \geq 0$, es decir, cuando $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Por tanto, el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de A viene dado por

$$E = \left\{ (\rho,\theta) \ : \ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \ \ 0 < \rho \leq \cos\theta \right\}$$

Usando ya el teorema de cambio de variable, junto con el de Tonelli, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_3(B) &= \int_A \sqrt{1-x^2-y^2}\; d(x,y) = \int_E \rho\sqrt{1-\rho^2}\; d(\rho,\theta) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos\theta} \rho\sqrt{1-\rho^2}\; d\rho \right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}\left(1-\rho^2\right)^{3/2} \right]_0^{\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - |\operatorname{sen}\theta|^3\right) d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}\theta|^3\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\; d\theta = \frac{\pi}{3} - \int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta\; d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi - 4}{9} \end{aligned}$$

■