Prueba evaluación continua Tema 3. Topología I
Doble grado en ingeniería informática y matemáticas
Curso 2022–23

1.– Sea $I_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Se define I_n inductivamente por la igualdad

$$I_n = I_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

1. Probar que cada conjunto I_n es unión finita de intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/3^n$ y que los extremos de dichos intervalos pertenecen a C.
2. Probar que $I_n \subset I_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Probar que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un conjunto compacto no vacío.
4. Probar que C es totalmento disconexo (las únicas componentes conexas son puntos).

Al conjunto C se le denomina el *conjunto de Cantor*. Para probar 4, usar 1 del siguiente modo: si $x, y \in C$, $x < y$, $|x-y| > 1/3^n$, entonces existe $z \notin I_n$ tal que $x < z < y$.