Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del tema 11

1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el intervalo J y calcular su integral:

$a)$ $J =]\,0\,,\,1\,[$, $\qquad f(x) = x^2 \log x \quad \forall x \in J$

$b)$ $J = \mathbb{R}^+$, $\qquad f(x) = e^{-x} \cos(2\,x) \quad \forall x \in J$

$c)$ $J =]\,2\,,\,+\infty\,[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1} \quad \forall x \in J$

$d)$ $J = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in J$

$e)$ $J =]\,0\,,\,1\,[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \quad \forall x \in J$

$f)$ $J =]\,1\,,\,+\infty\,[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}} \quad \forall x \in J$

$g)$ $J =]\,0\,,\,\pi/2\,[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} \quad \forall x \in J$

$h)$ $J =]\,1\,,\,+\infty\,[$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} \quad \forall x \in J$

Solución

a) Definiendo $f(0) = f(1) = 0$ convertimos f en una función continua en el intervalo compacto $[0,1]$, luego integrable en dicho intervalo, así que $f \in \mathcal{L}_1(J)$. Usaremos la fórmula de integración por partes, tomando $F(x) = \log x$ y $G(x) = x^3/3$ para todo $x \in J$, que son funciones derivables en J. La función $F\,G' = f$ es integrable en J, e igual ocurre con $F'\,G$, ya que $F'(x)\,G(x) = x^2/3$ para todo $x \in J$. Se tiene entonces que

$$\int_0^1 x^2 \log x\; dx = \int_0^1 F(x)\,G'(x)\,dx = \Big[F(x)\,G(x) \Big]_0^1 - \int_0^1 F'(x)G(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} \log x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,dx = -\frac{1}{9} \qquad \blacksquare$$

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $\left|e^{-x} \cos(2x)\right| \leq e^{-x}$ y $\left|e^{-x} \operatorname{sen}(2x)\right| \leq e^{-x}$. Como la función $x \mapsto e^{-x}$ es integrable en $\mathbb{R}^+$, igual le ocurre a f, y también a la función $x \mapsto e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$. Para abreviar la notación, escribiremos

$$\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \beta = \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Tomamos ahora $F(x) = e^{-x}$ y $G(x) = (1/2)\,\text{sen}(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, que son funciones derivables, tales que $F\,G'$ y $F'\,G$ son integrables en $\mathbb{R}^+$. Ello permite usar la fórmula de integración por partes, obteniendo que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^{+\infty} F(x)\,G'(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,G(x)\,\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} F'(x)\,G(x)\,dx \\
&= \left[\,\frac{1}{2}\,e^{-x}\,\text{sen}(2x)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\text{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\,\beta
\end{aligned}$$

El mismo razonamiento, pero tomando $G(x) = -(1/2)\,\cos(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, nos dice que

$$\beta = \left[\,-\frac{1}{2}\,e^{-x}\,\cos(2x)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\cos(2x)\,dx = \frac{1-\alpha}{2}$$

De las dos igualdades anteriores deducimos que $\alpha = 1/5$ y $\beta = 2/5$. ■

c) Para todo $x \in J$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^4 - 1} &= \frac{(1 + x^2) - (x^2 - 1)}{2\,(x^2 - 1)\,(x^2 + 1)} = \frac{1}{2\,(x^2 - 1)} - \frac{1}{2\,(x^2 + 1)} \\
&= \frac{1}{4\,(x - 1)} - \frac{1}{4\,(x + 1)} - \frac{1}{2\,(x^2 + 1)}
\end{aligned}$$

con lo que claramente observamos que $f = F'$, donde

$$F(x) = \frac{1}{4}\,\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x \qquad \forall\, x \in J$$

Además, tenemos claramente que

$$\lim_{x\to 2} F(x) = -\frac{1}{4}\log 3 - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{\pi}{4}$$

Como f no toma valores negativos, el criterio de integrabilidad nos dice que f es integrable en J con

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\log 3 + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,2 - \frac{\pi}{4}$$ ■

d) Usamos el teorema de cambio de variable, con $\varphi(t) = \log t$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^+$, cuya derivada no se anula, y tal que $\varphi(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = \frac{1/t}{t + (1/t)} = \frac{1}{t^2+1} \qquad \forall + \in \mathbb{R}^+$$

Esta función es claramente integrable en $\mathbb{R}^+$, luego el teorema nos dice que f es integrable en $\mathbb{R}$ con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$$ ■

e) Usamos el teorema de cambio de variable, con $\varphi(t) = t^2$ para todo $t \in]0,1[$, una función de clase C^1 cuya derivada no se anula y que aplica el intervalo J sobre sí mismo. Tenemos entonces que

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = \frac{2\,t}{t^4+t} = \frac{2}{t^3+1} \qquad \forall\, t \in J$$

una función que tiene límite tanto en 0 como en 1, luego se puede ver como una función continua, y por tanto integrable, en $[0,1]$. El teorema de cambio de variable nos dice que f también es integrable en J. Para calcular su integral usaremos la versión elemental de la regla de Barrow, pues sólo trabajamos con funciones continuas en el intervalo compacto $[0,1]$.

Empezamos observando que, para todo $t \in [0,1]$, se tiene

$$\frac{2}{t^3+1} = \frac{2}{(t+1)\,(t^2-t+1)} = \frac{2}{3\,(t+1)} - \frac{2\,t-4}{3\,(t^2-t+1)}$$

y vemos, por una parte, que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \Big[\log(t+1)\Big]_0^1 = \log 2$$

mientras que, para el otro sumando, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{2\,t-4}{t^2-t+1} &= \frac{2\,t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{t^2-t+1} \\
&= \frac{2\,t-1}{t^2-t+1} - \frac{12}{(2\,t-1)^2+3} \\
&= \frac{2\,t-1}{t^2-t+1} - \frac{4}{\big((2\,t-1)/\sqrt{3}\big)^2+1}
\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(2\,t-4)\,dt}{t^2-t+1} &= \int_0^1 \frac{(2\,t-1)\,dt}{t^2-t+1} - \int_0^1 \frac{4}{\big((2\,t-1)/\sqrt{3}\big)^2+1} \\
&= \Big[\log\,(t^2-t+1)\Big]_0^1 - \left[2\sqrt{3}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\,t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = -\frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Usando las dos integrales antes calculadas, concluimos finalmente que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{t^3+1} = \frac{2}{3}\,\log 2 + \frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \blacksquare$$

f) Usamos de nuevo el teorema de cambio de variable, tomando ahora $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ para todo $t \in]\pi/4\,,\,\pi/2\,[$, una función de clase C^1 cuya derivada no se anula, y que transforma el intervalo $I =]\pi/4\,,\,\pi/2\,[$ en J. Para todo $t \in I$ se tiene claramente que

$$\begin{aligned} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t\,\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t} \\ &= \frac{1/\cos t}{\operatorname{sen}^2 t/\cos^2 t} = \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\cos t > 0$ para todo $t \in I$. La función obtenida tiene límite en $\pi/4$ y $\pi/2$, luego se puede extender para obtener una función continua, y por tanto integrable, en el intervalo compacto $\overline{I}$. Deducimos que f es integrable en J, y usando la versión elemental de la regla de Barrow obtenemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\operatorname{sen}^2 t} = \left[-\frac{1}{\operatorname{sen} t}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \sqrt{2} - 1 \qquad \blacksquare$$

g) La función f se puede extender tomando $f(0) = f(\pi/2) = 1/2$, para obtener una función continua, luego integrable, en el intervalo compacto $[\,0\,,\,\pi/2\,]$. Esto permite también usar la versión elemental del teorema de cambio de variable, para hacer la sustitución $x = 2\operatorname{arc\,tg} t$, teniendo en cuenta que $x = 0$ para $t = 0$ y $x = \pi/2$ para $t = 1$. Además se tiene

$$1 + \cos x + \operatorname{sen} x = 1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{2\,(t+1)}{1 + t^2}$$

de donde deducimos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x} = \int_0^1 \frac{dt}{2\,(t+1)} = \left[\frac{1}{2}\log(t+1)\right]_0^1 = \frac{\log 2}{2} \qquad \blacksquare$$

h) Usamos el teorema de cambio de variable, tomando ahora $\varphi(t) = 1/\cos t$ para todo $t \in I =]\,0\,,\,\pi/2\,[$, función de clase C^1 cuya derivada no se anula, con $\varphi(I) = J$. Para $t \in I$ se tiene $\operatorname{tg} t > 0$ con lo que $\sqrt{\varphi(t)^2 - 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t} = \operatorname{tg} t$, y tenemos

$$f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = \frac{\cos^3 t\,\operatorname{sen} t}{\operatorname{tg} t\,\cos^2 t} = \cos^2 t \qquad \forall\, t \in I$$

Esta función es integrable en I por estar acotada, luego f es integrable en J.

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el intervalo J:

$$\begin{array}{llll} a) & J = \mathbb{R}^+ \,, & f(x) = \dfrac{x^a}{e^x - 1} & \forall x \in J \quad (a \in \mathbb{R}) \\ b) & J = \mathbb{R} & f(x) = x^n e^{-x^2} \cos x & \forall x \in J \quad (n \in \mathbb{N}) \\ c) & J =]\,0\,,\,\pi\,[\,, & f(x) = \dfrac{x^\rho}{1 - \cos x} & \forall x \in J \quad (\rho \in \mathbb{R}) \\ d) & J =]\,0\,,\,1\,[\,, & f(x) = \dfrac{x^a (1-x)^b \log(1 + x^2)}{(\log x)^2} & \forall x \in J \quad (a, b \in \mathbb{R}) \end{array}$$

Solución

a) La función f es localmente integrable en $\mathbb{R}^+$, por ser continua. En la semirrecta cerrada $J_1 = [\,1\,,\,+\infty\,[$ usamos el criterio de comparación, con $g_1(x) = e^{-x/2} > 0$ para todo $x \in J_1$, que es una función integrable en J_1. Puesto que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_1(x)\,|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = 0$$

el criterio nos dice que, para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$

En el intervalo $J_2 =]\,0\,,\,1\,]$ usamos el mismo criterio, pero ahora comparamos con la función $g_2(x) = x^{a-1} > 0$ para todo $x \in J_2$, que es localmente integrable en J_2, por ser continua. Puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_2(x)\,|} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

deducimos que $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$ si, y sólo si, $g_2 \in \mathcal{L}_1(J_2)$, pero sabemos que esto equivale a que se tenga $a - 1 > -1$, es decir, $a > 0$.

Así pues, se tiene $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, $a \in \mathbb{R}^+$. ■

b) La función f es localmente integrable en $\mathbb{R}$, por ser continua. Usamos ahora el criterio de comparación, tanto en $\mathbb{R}_0^+$ como en $\mathbb{R}_0^-$, con la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(x) = e^{-|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, que como sabemos, es integrable en ambas semirrectas. Puesto que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g(x)\,|} = \lim_{x \to \pm\infty} |\,x\,|^n\,|\cos x\,|\,e^{|x| - x^2} = 0$$

concluimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función f es integrable en ambas semirrectas, luego $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. ■

c) Definiendo $f(\pi) = \pi^\rho/2$, extendemos f para que sea continua, luego localmente integrable, en el intervalo $]\,0\,,\pi\,]$. Usamos ahora el criterio de comparación, con la función g definida por $g(x) = x^{\rho-2} > 0$ para todo $x \in]\,0\,,\,\pi\,]$, que también es continua, y es integrable en $]\,0\,,\,\pi\,]$ si, y sólo si, $\rho > 1$. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g(x)\,|} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2$$

obtenemos que $f \in \mathcal{L}_1(J)$, si, y sólo si, $\rho > 1$ ■

d) La función f es localmente integrable en J por ser continua.

En primer lugar, para el intervalo $J_1 = [1/2\,,\,1[$ usamos el criterio de comparación, tomando $g_1(x) = (1-x)^{b-2} > 0$ para todo $x \in J_1$, una función continua en J_1. Puesto que

$$\lim_{x \to 1} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_1(x)\,|} = (\log 2) \lim_{x \to 1} \left(\frac{\log x}{1-x} \right)^2 = \log 2$$

el criterio nos dice que $f \in \mathcal{L}_1(J_1)$ si, y sólo si, $g_1 \in \mathcal{L}_1(J_1)$, pero sabemos que esto equivale a que se tenga $b-2 > -1$, es decir, $b > 1$.

En el intervalo $J_2 =]\,0\,,\,1/2\,]$ consideramos tres casos, según el valor de a.

(i). Si $a > -3$ usamos el criterio de comparación, tomando $g_2(x) = x^{a+2} > 0$ para todo $x \in J_2$, función que es integrable en J_2, por ser $a+2 > -1$. Puesto que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_2(x)\,|} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^b}{(\log x)^2} \, \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 0$$

deducimos que $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$.

(ii). Si $a < -3$, fijamos $c \in$ con $a < c < -3$ y tomamos $g_2(x) = x^{c+2} > 0$ para todo $x \in J_2$, con lo que g_2 es continua, pero no integrable en J_2, ya que $c+2 < -1$. Puesto que $\lim_{x \to 0} x^{c-a}(\log x)^2 = 0$, se tiene que

$$\frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_2(x)\,|} = \frac{(1-x)^b}{x^{c-a}(\log x)^2} \, \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \to +\infty \qquad (x \to 0)$$

y deducimos que f tampoco es integrable en J_2.

(iii). Finalmente, en el caso $a = -3$ tomamos $g_2(x) = x^{-1}(\log x)^{-2} > 0$ para todo $x \in J_2$. Del criterio de integrabilidad deducimos que g_2 es integrable en J_2 con

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_0^{1/2} = \log 2$$

Teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\,f(x)\,|}{|\,g_2(x)\,|} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-x)^b \log(1+x^2)}{x^2} = 1$$

el criterio de comparación nos asegura que $f \in \mathcal{L}_1(J_2)$.

En resumen, $f \in \mathcal{L}_1(J)$ si, y sólo si, se tiene que $a \geq -3$ y $b > 1$. ■