Relación de ejercicios de test de exámenes

Ejercicio 2

Razona cual es la respuesta correcta:

1.- Dados grupos G y H:

a.- Si tienen el mismo orden son isomorfos.

b.- Si son isomorfos tienen el mismo orden.

c.- Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.

2.- Se tiene que:

a.- En D_4 todos los elementos tienen orden par.

b.- D_4 y S_4 son grupos isomorfos.

c.- Salvo isomorfismo D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.

3.- Si $f: G \to H$ es un homomorfismo de grupos, y $o(-)$ denota el orden de un elemento de un grupo, entonces:

a.- $o(x)$ divide a $o(f(x))$ $\forall x \in G$.

b.- $o(f(x))$ divide a $o(x)$ $\forall x \in G$.

c.- $o(x) = o(f(x))$ $\forall x \in G$.

4.- Dadas las permutaciones $\sigma = (2 \quad 3 \quad 6)(6 \quad 5 \quad 7 \quad 1 \quad 3 \quad 4)$, $\tau = (2 \quad 4 \quad 7 \quad 3) \in S_{10}$ se tiene que $\tau\sigma\tau^{-1}$:

a.- Es par.

b.- Su orden es 12.

c.- Es un ciclo de longitud 7.

5.- Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

a.- $\mu_6 \cong C_6$

b.- $\mu_6 \cong S_3$

c.- $\mu_6 \cong D_6$

6.- En S_4 se tiene que:

a.- $\{(1 \quad 2), (3 \quad 4)\}$ es un conjunto de generadores.

b.- $\{(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)\}$ es un conjunto de generadores.

c.- $\{(1 \quad 2), (2 \quad 3), (3 \quad 4)\}$ es un conjunto de generadores.

7.- Sea G un grupo y $f: G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

a.- f es homomorfismo de grupos.

b.- f es un automorfismo.

c.- Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8.- Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $sign(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene que:

a.- $sign(\sigma) = sign(\sigma^{-1})$.

b.- $sign(\sigma) = -sign(\sigma^{-1})$.

c.- Ninguna de las anteriores.

9.- Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

a.- Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.

b.- Es producto de trasposiciones.

c.- Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10.- El grupo $GL_2(Z_2)$ de matrices invertibles $2x2$ con entradas en Z_2:

a.- Es un grupo no abeliano de orden 8.

b.- Es un grupo isomorfo a Z_6.

c.- Es un grupo isomorfo a S_3.

Ejercicio 9

Razona cual es la respuesta correcta:

1.- Sean C_8 y C_{12} los grupos cíclicos de órdenes 8 y 12 respectivamente. El número de homomorfismos de grupos de C_8 en C_{12} es:

a.- Dos.

b.- Tres.

c.- Cuatro.

2.- Si $\sigma = (2\ \ 5\ \ 8\ \ 4\ \ 1\ \ 3)(4\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 5)(8\ \ 10\ \ 11) \in S_{11}$, entonces la permutación σ^{1000}:

a.- Es impar.

b.- Tiene orden 3.

c.- Es un $6 - ciclo$.

3.- La ecuación $x(1\ \ 2\ \ 3)x^{-1} = (1\ \ 3)(5\ \ 7\ \ 8)$ en S_8:

a.- No tiene solución.

b.- Tiene una única solución.

c.- Tiene solución pero no es única.

4.- La ecuación $x(1\ \ 2)(3\ \ 4)x^{-1} = (5\ \ 6)(1\ \ 3)$ en S_6:

a.- No tiene solución.

~~b~~.- Tiene una única solución.

c.- Tiene solución pero no es única.

5.- Si $G \neq 1$ es un grupo cíclico que tiene un solo generador entonces:

a.- G es finito.

b.- No existe G en esas condiciones.

c.- G tiene como mucho 2 elementos.

6.- Si $G \neq 1$ es un grupo entonces:

No hay ninguna correcta.
Tomar Q_2.

a.- G puede tener un subgrupo propio isomorfo a G.

b.- Si todos los subgrupos propios de G son abelianos entonces G es abeliano.

~~c~~.- Si todos los subgrupos propios de G son cíclicos entonces G es cíclico.

7.- El grupo simétrico S_4:

a.- Es cíclico.

b.- No es cíclico pero se puede generar por dos elementos.

c.- No tiene subgrupos de orden 6.

8.- Si se consideran los grupos aditivos Z de los enteros, Q de los racionales y Z_n de los enteros módulo $n = 2, 5, 10$, se tiene que:

a.- Los grupos ZxZ_2 y Z son isomorfos.

b.- Los grupos QxZ_{10} y Z_2xQxZ_5 son isomorfos.

c.- Los grupos ZxZ_2 y QxZ_2 son isomorfos.

9.- El subgrupo $SL_3(Z_2) < GL_3(Z_2)$ de las matrices invertibles $3x3$ con entradas en Z_2 y de determinante 1:

~~a~~.- Es un subgrupo impropio. No hay ninguna correcta

b.- Es un grupo abeliano de orden 168.

c.- Es un grupo no abeliano de orden 84.

10.- Se tiene que

a.- El grupo ZxZ_5 es cíclico.

b.- El grupo ZxZ_5 tiene todos sus elementos de orden infinito.

c.- El grupo ZxZ_5 es finitamente generado.

11.- Sea $C_{120} = \langle x \setminus x^{120} = 1 \rangle$ y se consideran sus subgrupos $H = \langle x^{42} \rangle$ y $K = \langle x^{36} \rangle$. Entonces se tiene que:

a.- $K < H$.

b.- $H < K$.

c.- $H = K$.

12.- Sea $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

a.- Si f es inyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.

b.- Si f es inyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.

c.- Ninguno de los dos enunciados es cierto.

13.- Dados los grupos $C_8 = \langle a \setminus a^8 = 1 \rangle$ y $D_4 = \langle x, y \setminus x^4 = 1 = y^2 \;\; yx = x^{-1}y \rangle$ se tiene que la asignación $x \to a^2 \;\; y \to a^4$:

a.- Determina un homomorfismo de grupos sobreyectivo.

b.- Determina un homomorfismo de grupos pero no es sobreyectivo.

c.- No determina un homomorfismo de grupos.

14.- Se considera el subgrupo de S_5, $H = \langle (1 \quad 2 \quad 3), (4 \quad 5) \rangle$. Entonces:

~~a.-~~ H es un grupo abeliano pero no es cíclico.

b.- H es un grupo cíclico.

$H = \{1, (45), (123), (132), (123)(45), (132)(45)\}$
$= \langle (123)(45) \rangle$
Nada más hay que comprobar que $|H| = 6$ y $\exists x \in H / o(x) = 6$

c.- S_5 es un grupo no abeliano y por tanto, H tampoco es abeliano.

15.- Sea $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

a.- Si f es sobreyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.

b.- Si f es sobreyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.

c.- Ninguno de los dos enunciados es cierto.

Ejercicio 18

Razona cual es la respuesta correcta:

1.- Si G es un grupo, la aplicación orden $o: G \to (Q^+, .)$:

$G = C_6$. Sup. que es hom.

$1 = o(1) = o(x^2 x^4) = o(x^2)\, o(x^4) = 3 \cdot 3 = 9$!!!

a.- Es un homomorfismo de grupos.

~~b.-~~ Si G es abeliano es un homomorfismo de grupos.

c.- No es un homomorfismo de grupos.

2.- Se tiene que:

a.- Todos los subgrupos de un grupo de orden 6 son abelianos.

b.- Todos los grupos no abelianos de orden 6 son isomorfos.

c.- Todos los grupos de orden 6 son cíclicos.

A_4 es de orden 6, pero no es abeliano, ni cíclico.

3.- Si H es el subgrupo de S_4 generado por $(1 \quad 2 \quad 3)$ entonces:

a.- Todas las clases laterales por la izquierda de H en S_4 tiene 3 elementos.

b.- La clase xH donde $x = (3 \quad 4)$ es $\{1, (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3)\}$.

c.- La clase Hx donde $x = (3 \quad 4)$ es $\{(3 \quad 4), (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3), (1 \quad 4 \quad 3 \quad 2)\}$.

$$o(1 \quad 2 \quad 3) = 3 \Longrightarrow H = \{Id, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\}$$

$$xH = \{(3 \quad 4)Id, (3 \quad 4)(1 \quad 2 \quad 3), (3 \quad 4)(1 \quad 3 \quad 2)\} =$$

$$= \{(3 \quad 4), (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3), (1 \quad 4 \quad 3 \quad 2)\}$$

$$Hx = \{Id(3 \quad 4), (1 \quad 2 \quad 3)(3 \quad 4), (1 \quad 3 \quad 2)(3 \quad 4)\} =$$

$$= \{(3 \quad 4), (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4), (1 \quad 3 \quad 4 \quad 2)\}$$

4.- El número de automorfismos del grupo cíclico C_{36} es:

a.- 6.

b.- 12.

c.- 18.

$$\varphi(36) = 12$$

5.- Se tiene que:

a.- Todos los grupos abelianos de orden 8 son cíclicos.

b.- Todos los grupos no abelianos de orden 8 son isomorfos.

c.- Hay al menos tres grupos no isomorfos de orden 8.

$$Q_2, D_4, C_8$$

6.- La permutación $\sigma = (1 \quad 2 \quad 3)(2 \quad 4) \in S_4$ tiene:

a.- 8 conjugados.

b.- 10 conjugados.

c.- 6 conjugados.

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad 3)(2 \quad 4) = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3)$$

Los conjugados tienen que ser del mismo tipo, en este caso, es decir, 4-ciclo, y hay de dicho tipo 6.

7.- Se tiene que:

a.- El retículo de subgrupos de C_{27} es totalmente ordenado pero el de C_{10} no lo es.

b.- El retículo de subgrupos de C_{27} es totalmente ordenado pero el de C_{10} también.

c.- El retículo de subgrupos de C_{27} no es totalmente ordenado pero el de C_{10} tampoco lo es.

$$\begin{tikzcd} C_{27} \\ C_9 \arrow[u, "3"'] \\ C_3 \arrow[u, "3"'] \\ 1 \arrow[u, "3"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C_{10} & \\ C_5 \arrow[ur, "2"] & & C_2 \arrow[ul, "5"'] \\ & 1 \arrow[ul, "5"] \arrow[ur, "2"'] & \end{tikzcd}$$

8.- Si $\boldsymbol{\sigma = (2 \quad 3 \quad 5)(4 \quad 3)(6 \quad 9)(1 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 8) \in S_{11}}$ entonces la permutación $\boldsymbol{\sigma^{2008}}$:

a.- Es impar.

b.- Tiene orden 3.

c.- Es un 4-ciclo.

$$\sigma = (2 \quad 3 \quad 5)(4 \quad 3)(6 \quad 9)(1 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 8) = (1 \quad 2 \quad 7 \quad 8)(4 \quad 5 \quad 3)(6 \quad 9)$$

$$\sigma^{2008} = \sigma^4 = (3 \quad 4 \quad 5) \quad o(\sigma^{2008}) = 3$$

9.- Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo y $\boldsymbol{x \in G}$ un elemento de orden 150. Entonces:

a.- $\langle x^{35} \rangle \vee \langle x^{24} \rangle = \langle x \rangle$.

b.- $\langle x^{35} \rangle \vee \langle x^{24} \rangle = \langle x^{59} \rangle$.

c.- $\langle x^{35} \rangle \vee \langle x^{24} \rangle = \langle x^{11} \rangle$.

Sea G un grupo y $a \in G$ con $o(a) = n$. Entonces, si $k > 0$, se tiene que $\langle a^k \rangle = \langle a^d \rangle$ con $d = mcd(n, k)$ y $o(a^k) = {}^{n}/_{d}$.

$$mcd(35,150) = 5 \Longrightarrow \langle x^{35} \rangle = \langle x^5 \rangle \quad mcd(24,150) = 5 \Longrightarrow \langle x^{24} \rangle = \langle x^6 \rangle$$

$$\cancel{\langle x^{35} \rangle \vee \langle x^{24} \rangle = \langle x^5 \rangle \vee \langle x^6 \rangle = \langle x^5 x^6 \rangle = \langle x^{11} \rangle}$$

$$\langle x^{35} \rangle \vee \langle x^{24} \rangle = \langle x^{mcd(35,24)} \rangle = \langle x \rangle$$

10.- Sea $\boldsymbol{G}$ un grupo y $\boldsymbol{x \in G}$ un elemento de orden 150. Entonces:

a.- $\langle x^{35} \rangle \cap \langle x^{24} \rangle = 1$.

b.- $\langle x^{35} \rangle \cap \langle x^{24} \rangle = \langle x^{30} \rangle$.

c.- $\langle x^{35} \rangle \cap \langle x^{24} \rangle = \langle x^{11} \rangle$.

$$\langle x^{35} \rangle \cap \langle x^{24} \rangle = \langle x^5 \rangle \cap \langle x^6 \rangle = \langle x^{30} \rangle \quad mcm(5,6) = 30$$

11.- Desde el grupo A_3 al grupo A_4 se puede definir exactamente:

a.- 9 homomorfismos.

b.- 3 homomorfismos.

~~c~~.- 8 homomorfismos.

$\varphi: C_3 \cong A_3 \longrightarrow A_4$

$C_3 = \langle x / x^3 = 1 \rangle \longrightarrow$ Por Dyck, la cumplen el 1 y los elementos de orden 3.

$$A_3 = \{Id, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\} = \langle (1 \quad 2 \quad 3) \rangle \cong C_3$$

$$Los\ elementos\ de\ orden\ 3\ de\ A_4\ son$$

$a_1 \quad a_2 \quad \ldots$

$\{(1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2), (1 \quad 2 \quad 4), (1 \quad 4 \quad 2), (1 \quad 3 \quad 4), (1 \quad 4 \quad 3), (2 \quad 3 \quad 4), (2 \quad 4 \quad 3)\}$

Hay 9 homomorfismos de A_3 en A_4. $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x) = a_i$ $\quad i = 1 \ldots 8$

12.- El grupo D_5:

a.- Tiene 6 subgrupos propios.

b.- Tiene 4 elementos de orden 10.

c.- Es isomorfo a $C_2 x C_5$.

$$|D_5| = 10, y\ D_5\ no\ es\ abeliano \Longrightarrow D_5 \ncong C_2 x C_5 \cong C_{10}$$

Si hubiera un elemento $a \in D_5 : o(a) = 10 \Longrightarrow D_5$ es cíclico, absurdo.

13.- Se tiene que:

a.- Los grupos $Q_2\ y\ C_4 x C_2$ tienen el mismo número de elementos de orden 2.

b.- Los grupos $D_4\ y\ C_8$ tienen el mismo número de elementos de orden 4.

c.- Los grupos $A_4\ y\ D_6$ tienen el mismo número de elementos de orden 6.

$$C_8 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}\ los\ elementos\ de\ orden\ 4\ son: x^2\ y\ x^6$$

$$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}\ los\ elementos\ de\ orden\ 4\ son: r\ y\ r^3$$

$$Q_2\ tiene\ un\ solo\ elemento\ de\ orden\ 2:\ -1$$

$$C_4 x C_2\ los\ elementos\ de\ orden\ 2\ son: (1, b), (a^2, b)\ y\ (a^2, 1)$$

$$A_4\ no\ tiene\ elementos\ de\ orden\ 6, \qquad D_6\ si\ tiene\ por\ ejemplo\ r$$

14.- La correspondencia $D_4 \to Q_2$ que aplica $r \to i$ y $s \to -1$:

a.- Determina un homomorfismo inyectivo de grupos.

b.- Determina un homomorfismo sobreyectivo de grupos.

c.- No determina un homomorfismo de grupos.

Tema 6

1.- Un grupo de orden 110.

a.- Siempre tiene un subgrupo normal de orden 5

b.- Siempre tiene un subgrupo normal de orden 2

c.- Siempre tiene un subgrupo normal de orden 11

2.- Un grupo de orden 110.

a.- Puede tener o no elementos de orden 2,3, 11 y 10.

b.- Siempre tiene elementos de orden 2,5 y 11 y como 2 y 5 son primos relativos también tiene que tener un elemento de orden 10.

c.- Siempre tiene elementos de orden 2,5 y 11 pero aunque 2 y 5 son primos relativos no tiene porqué tener un elemento de orden 10.

3.- Dada una acción de grupo de orden 13 sobre un conjunto con 13 elementos

a.- puede no ser ni fiel ni trivial

$C_{13} \longrightarrow X = \{1 \cdots 13\}$

Los homomorfismos tienen como imagen elementos de orden 13. (12!) y el 1.

b.- es fiel o es la acción trivial

$\phi : C_{13} \to S_X \cong S_{13}$

c.- no se puede definir una acción de un grupo de orden 13 sobre un conjunto con 13 elementos ya que 13 es primo.

Al llevar el generador de C_{13} (orden 13) en elementos de orden 13 es inyectiva.

4.- Dada una acción de grupo de orden 25 sobre un conjunto con 13 elementos

a.- no tiene por qué tener puntos fijos y podría ser transitiva

$\phi : G \to S_{13}$

b.- tiene al menos 3 puntos fijos y por lo tanto no puede ser transitiva

c.- tiene al menos 3 puntos fijos y puede ser transitiva

$|X| = |Fix(X)| + \sum_{s \in A'} [G : St(s)]$

5.- En el grupo diédrico D_{10}

~~a~~.- los 2-subgrupos de Sylow tienen orden 4 y hay 5, y los s5-subgrupos de Sylow tienen orden 5 y hay 1.

b.- el centro tiene orden 2 y es normal y por tanto hay solo un 2-subgrupo de Sylow y los 5-subgrupos de Sylow tienen orden 3 y hay 1.

c.- hay solo un 5-subgrupo de Sylow que es normal por tener índice 2.

$n_5 \mid 2 \quad n_5 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow n_5 = 1$

$[D_{10} : P_5] = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow P_5 \trianglelefteq D_{10}$

6.- Un grupo de orden 130

a.- siempre es resoluble tiene longitud 3 y sus factores de composición son C_2, C_3 y C_{13}.

b.- no tiene porqué ser resoluble.

c.- siempre es resoluble pero no puedo asegurar que su longitud sea 3.

7.- Elige la opción correcta

a.- Si $p \neq 2$ todo p-subgrupo de Sylow de A_n es p-subgrupo de Sylow de S_n y por tanto, si $n \geq 5$, S_n tiene más de un p-subgrupo de Sylow para todo primo distinto de 2 que divida a $n!$.

b.- Si $p \neq 2$ todo p-subgrupo de Sylow de A_n no tienen porqué ser p-subgrupos de Sylow de S_n.

c.- Los p-subgrupo de Sylow de S_n y de A_n coinciden incluso para $p = 2$ siempre que $n \geq 5$.

8.- El centro de un grupo no abeliano de orden 27

a.- siempre tiene orden 9 pues su índice es 3 que es el menor primo que divide a 27.

b.- nunca es trivial ni es total por tanto puede tener orden 3 o 9.

c.- siempre tiene orden 3.

9.- Sea G un grupo de orden 35

a.- debe ser abeliano tener longitud dos y sus factores de composición C_5 y C_7.

b.- no tiene porqué ser abeliano pero su longitud es dos y sus factores de composición son C_5 y C_7.

c.- no tiene porqué ser abeliano y tampoco puedo asegurar que su longitud sea dos y sus factores de composición son C_5 y C_7.

10.- Sea G un grupo de orden 22

a.- siempre es abeliano su longitud es dos y sus factores de composición son C_2 y C_{11}.

b.- no puedo asegurar ser abeliano pero si que tiene longitud dos y que sus factores de composición son C_2 y C_{11}.

c.- no tiene porqué ser abeliano y tampoco puedo asegurar que su longitud sea dos y sus factores de composición son C_2 y C_{11}.

$|G| = 2 \cdot 11 = 22$

$n_2 | 11 \quad n_2 \equiv 1 \mod 2 \Rightarrow n_2 = 1, 11$

$n_{11} | 2 \quad n_{11} \equiv 1 \mod 11 \Rightarrow n_{11} = 1$

Sup. $n_2 = 11$. Habría $10 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 1$

Tema 3

1.- Sea H el subgrupo de S_4 generado por $(1\quad 2\quad 3\quad 4)(3\quad 2\quad 1)$ entonces

$\shortparallel$

(14)

a.- el índice de H en S_4 es 12.

$[S_4 : \langle(14)\rangle] = \frac{4!}{2} = 4 \cdot 3 = 12$

b.- el índice de H en S_4 es 1.

c.- el índice de H en S_4 es 2.

2.- Los grupos D_4 y Q_2

a.- tienen el mismo orden y por tanto son isomorfos.

b.- aunque tiene el mismo orden no son isomorfos porque, por ejemplo, D_4 tiene ocho elementos de orden 2 y Q_2 sólo uno.

c.- aunque tiene el mismo orden y además tienen al menos un elemento de orden 4 y otro de orden 2 por lo que tienen que ser isomorfos.

3.- Puedo encontrar un morfismo $f: Q_2 \to D_4$ tal que

a.- $f(-1) = r$ y $f(i) = s$, donde r es el giro de 90 grados y s es una simetría.

b.- $f(i) = r$ y $f(-1) = s$, donde r es el giro de 90 grados y s es una simetría.

c.- las otras opciones son falsas.

4.- Sea G un grupo de orden 6, entonces

a.- como 6 divide a 6, siempre G tiene que tener elementos de orden 6 y por tanto también elementos de orden 2 y 3.

b.- G tiene un elemento de orden 6 o es isomorfo a S_3.

c.- puede que G no tenga de orden 6 y tampoco sea isomorfo a S_3, por ejemplo, $G \cong Z_2 x Z_3$.

5.- El grupo $Z_9 x Z_5$

a.- no es cíclico y por tanto no puedo asegurar que tiene 6 subgrupos.

b.- no es cíclico y tiene 6 subgrupos, que se obtienen como producto de los tres de Z_9 con los dos de Z_5.

c.- es cíclico y tiene 6 subgrupos.

6.- El grupo $Z_4 x Z_5$

a.- hay elementos de orden 2,4,5 y 10 pero no de orden 20 por ser no cíclico.

b.- hay elementos de orden 2,4,5,10 y 20.

c.- sólo hay elementos de orden 1,4,5 o 20.

7.- En S_5 hay

a.- las otras dos respuestas son falsas.

b.- 24 elementos de orden 5 pero sólo 12 subgrupos de orden 5.

c.- 24 elementos de orden 5 pero sólo 6 subgrupos de orden 5.

8.- Si H es un subgrupo de D_n que contiene una simetría y un giro no trivial entonces

a.- puedo asegurar que $H = D_n$ aunque n no sea primo.

b.- que sea $H = D_n$ no tiene nada que ver con que n sea o no primo, esto es, habrá primos en los que $H = D_n$ y otros en los que no.

c.- si n es primo puedo asegurar que $H = D_n$.

9.- Si G es un grupo de orden n y m es un divisor de n entonces

a.- si G es cíclico puedo asegurar que G tiene un elemento de orden m.

b.- siempre puedo asegurar que G tiene un elemento de orden m.

c.- en ningún caso puedo asegurar que G tiene un elemento de orden m.

10.- En el grupo Z_2xQ_2

a.- hay elementos de orden 2,4,8 y 16 por ser un grupo de orden 16.

b.- hay elementos de orden 2,4,8 y 16 pero no de orden 16.

c.- hay elementos de orden 2 y 4 pero no de orden 8.

Tema 5

1.- Los grupos C_3xC_3 y C_9

a.- tienen el mismo orden, la misma longitud y los mismos factores de composición y por tanto son isomorfos.

b.- tienen el mismo orden, la misma longitud y los mismos factores de composición y pero no son isomorfos.

c.- tienen el mismo orden, la misma longitud pero distintos factores de composición, por lo tanto no son isomorfos.

2.- Si G es un grupo de orden $2p$ con p primo que además tiene un elemento de orden p entonces

a.- siempre es abeliano por tanto siempre es resoluble tiene longitud 2 y los factores de composición son C_2 y C_p.

b.- no puedo asegurar que es abeliano por tanto tampoco que es resoluble y su longitud y factores de composición pueden variar.

c.- puede no ser abeliano pero siempre es resoluble, tiene longitud 2 y los factores de composición son C_2 y C_p. Tomar D_3

3.- Tengo un subgrupo H de G de índice primo

a.- si H es normal puedo asegurar que $G' \leq H$.

b.- no puedo asegurar que $G' \leq H$ ni siquiera en el caso de que H sea normal.

c.- siempre puedo asegurar que $G' \leq H$.

4.- Dado un grupo G

a.- el primer derivado G'siempre es un subgrupo normal y el cociente $G/_{G'}$ siempre es resoluble.

b.- el primer derivado G'siempre es un subgrupo normal y el cociente $G/_{G'}$ puede que no sea resoluble.

c.- el primer derivado G' y el cociente $G/_{G'}$ siempre son resolubles.

5.- Dado un morfismo $f: G \to H$

a.- si G es resoluble $kerf$ e Imf son resolubles.

b.- si H es resoluble $kerf$ e Imf son resolubles.

c.- si G es resoluble $kerf$ es resoluble pero Imf puede no ser resoluble.

6.- El grupo A_3xA_4

a.- ni es simple siempre no es resoluble.

b.- es simple y resoluble.

c.- no es simple pero si es resoluble.

7.- Si G es un grupo simple, entonces

a.- tiene longitud 1 y es resoluble si y solo si es abeliano.

b.- tiene longitud 1, es resoluble y además tiene orden primo.

c.- tiene longitud 1 y siempre es resoluble.

8.- Si H y K son subgrupos normales de G entonces

a.- el conmutador $[H:K]$ es siempre un subgrupo normal que está contenido en $H \cap K$.

b.- el conmutador $[H:K]$ puede no ser un subgrupo normal pero siempre está contenido en $H \cap K$.

c.- el conmutador $[H:K]$ es siempre un subgrupo normal pero no tiene que estar contenido en $H \cap K$.

9.- La serie normal $Q_2 \trianglerighteq \langle j \rangle \trianglerighteq 1$

a.- es una serie de composición con factores abelianos.

b.- es un aserie de composición pero los factores no son abelianos ya que Q_2 no es abeliano.

c.- no es una serie de composición, aunque sus factores son abelianos.

Tema 2

1.- Si a es un elemento de un grupo finito G de orden $o(a) = n$ y m es un entero positivo tal que $a^m = 1$. Entonces

a.- m es un divisor de n.

b.- sólo puedo asegurar que $m \geq n$ pero no que sea un múltiplo de n.

c.- m es un múltiplo de n.

2.- La permutación $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(4 \quad 2 \quad 5)$ tiene orden

a.- 12

b.- 6

c.- 4

3.- Dados $a, b \in G$ dos elementos de un grupo de órdenes n y m respectivamente

a.- el orden del producto ab es siempre divisor de nm.

b.- no se nada del orden del producto ab a menos que conmuten, en cuyo caso puedo asegurar que es un divisor de nm.

c.- si a y b conmutan, el orden del producto ab es el mínimo común múltiplo de n y m.

4.- En el grupo S_5 las permutaciones $(1 \quad 2 \quad 3)$ y $(3 \quad 4)(3 \quad 5)$

a.- son conjugadas porque tienen el mismo tipo.

b.- no tienen el mismo tipo pero si son conjugadas.

c.- no tienen el mismo tipo y por tanto no son conjugadas.

5.- En el grupo aditivo $Z_2 x Z_3$ el elemento $\{1, 1\}$ tiene orden

a.- 3

b.- 6

c.- 2

6.- El grupo Z_9^* de las unidades en Z_9

a.- está generado por 2 y tiene 6 elementos.

b.- está generado por 4 y tiene 6 elementos.

c.- está generado por 1 y tiene 6 elementos.

7.- En el grupo diédrico D_n la rotación r y su inversa r^{-1}

a.- pueden ser o no ser conjugadas dependiendo del valor de n.

b.- son conjugadas independientemente del valor de n.

c.- no son conjugadas independientemente del valor de n.

8.- La permutación $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)(4 \quad 2 \quad 5)$ tiene signatura

a.- no puedo calcular su signatura porque no está descompuesta en ciclos distintos.

b.- -1 y por tanto, es impar.

c.- 1 y por tanto es par.

9.- El ciclo $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7)$

a.- tiene longitud 7, orden 7 y es par. Ciclo de longitud impar es par

b.- tiene longitud 7, orden 6 y es par.

~~c~~.- tiene longitud 7, orden 7 y es impar.

10.- El tipo de la permutación $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ es

a.- 3,4

b.- 3,3

c.- 2,2,3

Tema 4

1.- Considera el subgrupo $\boldsymbol{H} = \langle(\mathbf{1} \quad \mathbf{2})\rangle \leq \boldsymbol{S_4}$ entonces

a.- $N_{S_4}(H) = \langle(1 \quad 2),(3 \quad 4)\rangle$

b.- $N_{S_4}(H) = H$

c.- $N_{S_4}(H) = S_4$

2.- El grupo $\boldsymbol{V} = \{\mathbf{1},(\mathbf{1} \quad \mathbf{2})(\mathbf{3} \quad \mathbf{4}),(\mathbf{1} \quad \mathbf{3})(\mathbf{2} \quad \mathbf{4}),(\mathbf{1} \quad \mathbf{4})(\mathbf{2} \quad \mathbf{3})\}$

a.- no es un subgrupo normal de S_4 ni de S_3.

b.- es un subgrupo normal de S_5 pero no es subgrupo normal de S_6.

c.- es un subgrupo normal de S_4 pero no es subgrupo normal de S_5.

3.- Elige el enunciado correcto

a.- todo subgrupo de un grupo abeliano es normal pero hay grupos como Q_2 que tiene todos sus subgrupos normales y sin embargo no es abeliano.

b.- todo subgrupo de un grupo abeliano es normal y el recíproco también es cierto, esto es, si G es un grupo que tiene todos sus subgrupos normales entonces es abeliano.

c.- todos los subgrupos de un grupo abeliano son abelianos pero no tienen que ser normales.

4.- Considerando los grupos $D_4 = \langle r, s; r^4 = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$ y

$Q_2 = \langle i, j; i^4 = 1, j^2 = i^2, ij = ji^{-1} \rangle$ entonces

a.- podemos definir un morfismo $f: Q_2 \to D_4$ tal que $f(i) = r$ y $f(j) = s$ y también podemos definir un morfismo $f: D_4 \to Q_2$ tal que $f(r) = i$ y $f(s) = j$.

b.- podemos definir un morfismo $f: Q_2 \to D_4$ tal que $f(i) = r$ y $f(j) = s$ pero no podemos definir un morfismo $f: D_4 \to Q_2$ tal que $f(r) = i$ y $f(s) = j$.

c.- no podemos definir un morfismo $f: Q_2 \to D_4$ tal que $f(i) = r$ y $f(j) = s$ y tampoco podemos definir un morfismo $f: D_4 \to Q_2$ tal que $f(r) = i$ y $f(s) = j$.

5.- Considera el grupo diédrico $D_n, n \geq 3$ generado por el giro r y la simetría s. Entonces

a.- el subgrupo $H = \langle r \rangle$ puede ser normal o no pero el subgrupo $K = \langle s \rangle$ tiene dos elementos y por tanto siempre es normal.

b.- el subgrupo $H = \langle r \rangle$ puede ser normal o no y lo mismo ocurre con el subgrupo $K = \langle s \rangle$.

c.- el subgrupo $H = \langle r \rangle$ es siempre normal y el cociente ${}^{D_4}/_{H}$ tiene dos elementos. El subgrupo $K = \langle s \rangle$ tiene dos elementos pero nunca es normal.

6.- Elige una opción

a.- El núcleo de un morfismo de grupos es siempre un subgrupo normal y la imagen es siempre un subgrupo que puede ser o no ser normal.

b.- Puedo asegurar que el núcleo y la imagen de un morfismo de grupos son subgrupos pero no puedo asegurar que alguno de ellos sea siempre normal, depende de como sea el morfismo.

c.- El núcleo y la imagen de un morfismo de grupos son siempre subgrupos normales.

7.- Considera la cadena de subgrupos $H \leq K \leq G$

a.- Para que se dé la igualdad $[G: H] = [G: K][K: H]$ los subgrupos tiene que ser normales.

b.- Siempre $[G: H] = [G: K][K: H]$ pero si H es normal en K y K es normal en G no tiene que ser H normal en G.

c.- Siempre $[G: H] = [G: K][K: H]$ además si H es normal en K y K es normal en G entonces tiene que ser H normal en G.

8.- Considera $\boldsymbol{D_4 = \langle r, s; r^4 = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1}\rangle}$

a.- puedo definir un morfismo $f: D_4 \to S_4$ tal que $f(r) = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y $f(s) = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$ cuyo núcleo es trivial y cuya imagen es un subgrupo normal.

b.- No puedo un morfismo $f: D_4 \to S_4$ tal que $f(r) = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y $f(s) = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$.

c.- puedo definir un morfismo $f: D_4 \to S_4$ tal que $f(r) = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ y $f(s) = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$ cuyo núcleo es trivial y cuya imagen no es un subgrupo normal.

9.- Considera $\boldsymbol{S_3}$ y $\boldsymbol{K = \langle (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)\rangle}$ como subgrupos de $\boldsymbol{S_4}$

a.- S_3 y K son subgrupos normales pero S_4 no es producto directo de S_3 y K.

b.- S_3 y K son subgrupos normales, $S_3 x K$ tiene 24 elementos y además la intersección $S_3 \cap K = 1$ por tanto S_4 es producto directo de S_3 y K.

c.- ninguno de los subgrupos es normal y por tanto S_4 no es producto directo de S_3 y K.

10.- Considera $\boldsymbol{D_6 = \langle r, s; r^6 = 1, s^2 = 1, rs = sr^{-1}\rangle}$ y los subgrupos $\boldsymbol{H = \langle r^3\rangle}$ y $\boldsymbol{K = \langle r^2, s\rangle}$ entonces

a.- D_6 no es producto directo de H y K porque $HK \neq D_6$.

b.- D_6 no es producto directo de H y K porque H o K no es un subgrupo normal.

c.- D_6 es producto directo de H y K.

Bullejos

1.- Si un grupo finito tiene todos sus subgrupos normales.

a.- tiene todos sus p-subgrupos de Sylow normales pero eso no implica que sea resoluble.

b.- es siempre abeliano y por tanto resoluble.

c.- tiene todos sus p-subgrupos de Sylow normales y por tanto resoluble.

2.- He encontrado un grafo plano con un número par de vértices y de lados pero un número impar de caras.

a.- ese grafo no puede ser conexo.

b.- no hay problema pero al ser plano tiene que ser conexo.

c.- es imposible que ese grafo exista.

3.-Sea $\boldsymbol{C_{36} = \langle x; x^{36} = 1\rangle}$

a.- el orden de x^{10} es 13 y en C_{36} hay $\varphi(10) = 4$ elementos de orden 13.

b.- el orden de x^{10} es 13 y en C_{36} hay $\varphi(13) = 12$ elementos de orden 13.

c.- el orden de x^{10} es $2 = mcd(10{,}36)$ y en C_{36} hay $\varphi(2) = 1$ elementos de orden 2.

4.- Si $\boldsymbol{G}$ es un grupo de orden $\boldsymbol{n}$

a.- No puedo asegurar que para cada divisor m de n existe un subgrupo de orden m de G ni siquiera en el caso de abeliano.

b.- Para cada divisor m de n existe un subgrupo de orden m sea G abeliano o no.

c.- Solo puedo asegurar que para cada divisor m de n existe un subgrupo de orden m si G es abeliano.

5.- Los factores de composición de un grupo

a.- son siempre abelianos cíclicos de orden primo.

b.- son siempre abelianos pero no tiene porqué ser cíclicos.

c.- ninguna de las otras opciones son correctas.

Sea la serie de composición: $S_5 \rhd A_5 \rhd 1$, y sean los factores de composición:

$$S_5/A_5 \cong C_2 \quad A_5/\{1\} = A_5 \; no\ es\ abeliano\ ni\ cíclico$$

6.- Grupos abelianos de orden 200

a.- Salvo isomorfismo hay 6 y todos tienen la misma longitud pero no todos los mismos factores de composición.

b.- Salvo isomorfismo hay 5 y todos tienen la misma longitud y los mismos factores de composición.

c.- Salvo isomorfismo hay 6 y todos tienen la misma longitud y los mismos factores de composición.

$$|G| = 200 = 2^3 x 5^2 \quad hay\ \ 6\, salvo\ isomorfismo$$

7.- Si N es un subgrupo normal de G y p es un primo que divide al orden de N

a.- todo p-subgrupo de Sylow de N es un p-subgrupo de Sylow de G.

b.- todo p-subgrupo de Sylow de G está contenido en N.

c.- las otras opciones son falsas.

Sea $G = Q_2, |G| = 8 = 2^3$ y sea $N = \langle i \rangle \lhd Q_2$, ya que $|N| = 4 = 2^2$. Solo hay 2-subgrupo de Sylow de N, que es N que no es un 2-subgrupo de Sylow de G, ya que solo hay 2-subgrupo de Sylow de G, es el propio. Y G no está contenido en N.

8.- Sea $n \geq 3$ entonces

a.- el grupo D_n tiene longitud 2 si y solo si n es primo y el grupo S_n tiene longitud 2 siempre.

b.- el grupo D_n tiene longitud 2 si y solo si n es primo y el grupo S_n tiene longitud 2 si y solo si $n \neq 4$.

c.- el grupo D_n tiene longitud 2 siempre y el grupo S_n tiene longitud 2 si y solo si $n \neq 4$.

D_n tiene longitud 2 si y solo si n es primo $\Longrightarrow 1 \lhd \langle r \rangle \lhd D_n$

$$n = 3 \Longrightarrow 1 \lhd A_3 \lhd S_3$$

$$n = 4 \Longrightarrow 1 \lhd C_2 \lhd V \lhd A_4 \lhd S_4$$

$$n \geq 5 \Longrightarrow 1 \lhd A_n \lhd S_n$$

9.- Sea N es un subgrupo normal de G y sea $N' = [N: N]$ el primer derivado de N, entonces

a.- N' es normal en N y también en G.

~~b~~.- N' es normal en G pero no tiene por qué serlo en N.

c.- N' es normal en N pero no tiene por qué serlo en G.

$H, K \trianglelefteq G \Longrightarrow [H, K] \trianglelefteq G \Longrightarrow$

$\begin{cases} N \trianglelefteq G \Longrightarrow [N:N] \trianglelefteq G \\ N \trianglelefteq N \Longrightarrow [N:N] \trianglelefteq N \end{cases}$

10.- Si G es un grupo de orden 405 entonces:

a.- G no es simple pero si resoluble.

b.- G no es simple ni resoluble.

c.- G es simple y resoluble.

$$n_3 = 1 \Longrightarrow G\ no\ es\ simple, es\ resoluble$$

11.- Se tiene que el centro del grupo $S_5 x A_3$:

a.- trivial.

b.- es un subgrupo de Sylow.

c.- es cíclico de orden 3.

$$A_3 \cong C_3\ abeliano\ \ Z(S_5 x A_3) = Z(S_5) x Z(A_3) = \{1\} x A_3 \cong A_3 \cong C_3$$

12.- Sea G un grupo tal que todo subgrupo propio normal es abeliano, entonces:

a.- G sería abeliano y por tanto, resoluble.

b.- G no tiene porqué ser resoluble.

c.- el conmutador $[G:G]$ es normal y por tanto sería abeliano lo que implica que es resoluble y el cociente $G_{ab} = {}^{G}/_{[G:G]}$ es abeliano por tanto, resoluble, de donde deducimos que G es resoluble.

Si $[G:G] = G$, entonces G no tiene por qué ser resoluble. En el caso, de que $[G:G] \lhd G$, si sería el apartado c.

13.- Una acción de C_5 sobre un conjunto con 5 elementos:

a.- puede no ser ni transitiva ni trivial.

b.- es transitiva o trivial.

c.- es siempre transitiva.

14.- Sea N es un subgrupo normal de G tal que el cociente ${}^{G}/_{N}$ es abeliano, entonces:

a.- G_{ab} es un cociente de ${}^{G}/_{N}$.

b.- ${}^{G}/_{N}$ es un cociente de G_{ab}.

c.- G_{ab} es un subgrupo de ${}^{G}/_{N}$.

15.- El número de morfismos no triviales de C_2 en $D_n, n \geq 3$:

a.- es n si n es impar y $n+1$ si n es par.

b.- es siempre n.

c.- es siempre $n+1$.

Si es D_n, los elementos de orden 2 son $s, sr, \dots, sr^{n-1}$, y además, si n es par, $r^{n/2}$.

17.- El grupo de automorfismos $Aut(C_n)$:

a.- siempre tiene orden $\varphi(n)$ pero no puedo asegurar que sea cíclico ni siquiera en el caso en que n sea primo.

~~b.-~~ siempre es cíclico de orden $\varphi(n)$.

c.- si n es primo, se cíclico de orden $\varphi(n)$.

18.- Homomorfismos sobreyectivos de D_{13} en C_{12}:

a.- Hay sólo 1.

b.- Hay al menos 2.

c.- No hay ninguno.

Si hubiera un homomorfismo sobreyectivo de D_{13} en C_{12}, por el primer teorema de isomorfía:

$$D_{13}/_{kerf} \cong Imf = C_{12} \Longrightarrow \frac{|D_{13}|}{|kerf|} = |C_{12}| \Longrightarrow \frac{26}{|kerf|} = 12 \Longrightarrow |kerf| = \frac{26}{12} \text{ ¡¡¡}$$

19.- Un grupo de orden 56

a.- puede tener 7 2-subgrupos de Sylow y 8 7-subgrupos de Sylow.

b.- tiene un único 2-subgrupos de Sylow ó un único 7-subgrupos de Sylow.

c.- tiene un único 2-subgrupos de Sylow y un único 7-subgrupos de Sylow.

20.- Se tiene que:

a.- $D_3 x D_4$ es un grupo no abeliano de orden 48.

b.- $D_3 x D_4$ es un grupo simple de orden 48.

c.- $D_3 x D_4 \cong D_{24}$.

$|D_3 x D_4| = 6x8 = 48$, y $\{1\}x\{r\} \lhd D_3 x D_4$, es decir, no es simple. Y además, no es abeliano.

De Garzón

1.- Homomorfismos inyectivos de C_5 en S_5:

a.- Hay 5.

b.- Hay 24.

c.- Hay 12.

Como C_5 es cíclico, los homomorfismos inyectivos, mandan el generador a elementos de S_5 de orden 5, es decir, las permutaciones longitud 5:

$$\frac{V_n^m}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m} = \frac{5!}{5} = 24$$

2.- Se tiene que:

a.- Si G tiene orden pq siendo p y q primos distintos entonces G es simple.

b.- S_4 tiene un subgrupo isomorfo a Q_2.

c.- No hay grupos simples de orden 992.

3.- El grupo simétrico S_7:

a.- tiene ocho 7-subgrupos de Sylow.

b.- tiene quince 7-subgrupos de Sylow.

c.- tiene ciento veinte 7-subgrupos de Sylow.

$$\frac{V_n^m}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m} = \frac{7!}{7} = 6! = 120$$

4.- Sea la acción natural de $S_4 = perm\{1,2,3,4\}$ sobre $X = \{1,2,3,4,5\}$ (restricción de la acción natural de S_5) se tiene entonces:

a.- la órbita $O(5)$ tiene 5 elementos.

b.- $\left|Stab_{S_4}(5)\right| = 24$.

c.- $\left|Stab_{S_4}(i)\right| = 6$ para todo $i \in X$.

$$Stab_{S_4}(5) = \{\sigma \in S_4 \setminus \sigma(5) = 5\} \Longrightarrow \left|Stab_{S_4}(5)\right| = |S_4| = 24$$

Todas las permutaciones de S_5 que deja fija a 5, serían todas las de S_4.

5.- Grupos abelianos de orden 200:

a.- Salvo isomorfismos hay 6 y todos tienen la misma longitud pero distintos factores de composición.

~~b.~~- Salvo isomorfismos hay 6 y todos tienen la misma longitud 5.

c.- Salvo isomorfismos hay 5 y todos tienen la misma longitud pero distintos factores de composición.

$$|G| = 200 = 2^3x5^2$$

6.- Se tiene que:

a.- Salvo isomorfismo hay un único grupo de orden 841.

b.- Salvo isomorfismo hay un único grupo de orden 161.

c.- Todo grupo de orden 1994 es abeliano.

$$|G| = 841 \;\; impar \;\; 841 = 29^2 \quad G \cong C_{29}xC_{29} \text{ ó } C_{29^2}$$

$$|G| = 161 \;\; impar \;\; 161 = 7x23 \quad G \cong C_7xC_{23}$$

$$|G| = 1994 \quad G \cong D_{997} \; no \; es \; abeliano$$

7.- Se tiene que el índice $[\boldsymbol{Z_{220}}: \langle\overline{\boldsymbol{28}}\rangle]$:

a.- vale 4.

b.- vale 55.

c.- vale 6.

$$|\overline{28}| = \frac{|Z_{220}|}{mcd(220,28)} \Longrightarrow [Z_{220}: \langle\overline{28}\rangle] = mcd(220,28) = 4$$

8.- Si $\boldsymbol{G}$ es un grupo de orden 405 entonces:

a.- G no es simple pero si resoluble.

b.- G no es simple ni resoluble.

c.- G es simple y resoluble.

9.- Si $\boldsymbol{H}$ es un subgrupo de un grupo $\boldsymbol{G}$ se tiene que:

a.- El normalizador $N_G(H)$ de H en G es un subgrupo del centro $Z(G)$.

b.- El normalizador $N_G(H)$ de H en G es un subgrupo del centro G, pero no tiene porque ser normal en G.

c.- El normalizador $N_G(H)$ de H en G es un subgrupo normal de G.

10.- Si G es un grupo finito en el que todos sus subgrupos son normales entonces:

a.- G es abeliano.

b.- G es cíclico.

c.- G es resoluble.

En Q_2 todos sus subgrupos propios son normales, pero no es abeliano, ni cíclico.

12.- Se tiene que:

a.- $D_3 x D_4$ es un grupo no abeliano de orden 48.

b.- $D_3 x D_4$ es un grupo simple de orden 48.

c.- $D_3 x D_4 \cong D_{24}$.

13.- Una acción de A_5 sobre un conjunto con 4 elementos:

a.- es transitiva.

b.- es fiel.

c.- es trivial.

14.- Se tiene que:

a.- Hay grupos resolubles que no son abelianos.

b-. No hay grupos no abelianos que tengan todos sus subgrupos propios normales. $\longrightarrow Q_2$

c.- Todo grupo simple es resoluble.

15.- El grupo $\frac{Z}{50Z}$ tiene:

a.- 4 subgrupos propios.

b.- 3 subgrupos propios.

c.- 5 subgrupos propios.

$$\frac{Z}{50Z} \cong Z_{50} \Longrightarrow |Z_{50}| = 50 = 2x5^2 \Longrightarrow Z_2, Z_5, Z_{10}, Z_{25}$$

Los subgrupos de $\mathbb{Z}_n$ son los $< [\frac{n}{d}] > / d|n$

Ejercicio 3

Una representación del grupo abeliano A está dada por:

$$\boldsymbol{A = \langle x, y, z, t, w \setminus \begin{cases} 30x + 9y - 12z + 21t + 15w = 0 \\ 48x + 15y - 12z + 39t = 0 \\ -18x - 6y + 42z - 18t = 0 \end{cases} \rangle}$$

a.- Calcula de forma razonada, el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. Razona si A tiene elementos de orden ∞, de orden 6 o de orden 4 dando, en su caso, un ejemplo de cada uno de ellos.

$$M = \begin{pmatrix} 30 & 9 & -12 & 21 & 15 \\ 48 & 15 & -12 & 39 & 0 \\ -18 & -6 & 42 & -18 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C1-3C2} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & 21 & 15 \\ 3 & 15 & -12 & 39 & 0 \\ 0 & -6 & 42 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2-F1} \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & 21 & 15 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & -15 \\ 0 & -6 & 42 & -18 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 18 & -15 \\ 0 & -6 & 42 & -18 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C4+C5}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & -15 \\ 0 & -6 & 42 & -18 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -15 \\ 0 & 18 & 42 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-6F2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 42 & -42 & 90 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -42 & 90 \end{pmatrix} \xrightarrow{C5+2C4}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & -42 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -42 & 42 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ Fact. inv.: d_1 = 6 \ d_2 = 3 \ d_3 = 3$$

El rango libre es $r = 5 - 3 = 2$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} A \cong Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_6 \oplus Z^2 \overset{DCP}{\Longrightarrow} Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_2 \oplus Z^2$$

La parte de torsión es $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_6$ y la libre de torsión es Z^2.

Por lo tanto, A tiene elementos de orden infinito porque la parte libre de torsión es Z^2. Y también tiene elementos de orden finito, porque la parte de torsión es $Z_3 \oplus Z_3 \oplus Z_6$.

$$|T(A)| = 3x3x6 = 54$$

Como ${}^{6}/_{54}$, tiene elementos de orden 6, en cambio, 4 no divide a 54, luego no tiene elementos de orden 4.

$$(\bar{1}, \bar{0}, \bar{3}, (0,0)) \ \ \bar{1} \in Z_3 \ \ \bar{0} \in Z_3 \ \ \bar{3} \in Z_6 \ \ (0,0) \in Z^2 \Longrightarrow o(\bar{1}, \bar{0}, \bar{3}, (0,0)) = 6$$

$$(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, (1,1)) \ \ \bar{0} \in Z_3 \ \ \bar{0} \in Z_3 \ \ \bar{0} \in Z_6 \ \ (1,1) \in Z^2 \Longrightarrow (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, (1,1)) = \infty$$

b.- Clasifica, dando su descomposición cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea igual al orden de $T(A)$, el grupo de torsión de A, e identifica cuál de ellos es justamente $T(A)$. Determina la longitud y los factores de composición de todos ellos.

$$|T(A)| = 54 = 2x3^3$$

$$Caso\ I \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_{54} \Longrightarrow C_{54} \rhd C_{27} \rhd C_9 \rhd C_3 \rhd 1 \Longrightarrow C_3, C_3, C_3, C_2 \quad longitud\ 4$$

$$Caso\ II \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_3 \oplus C_{18} \Longrightarrow C_3 \oplus C_{18} \rhd C_{18} \rhd C_9 \rhd C_3 \rhd 1 \Longrightarrow C_3, C_3, C_3, C_2 \quad longitud\ 4$$

$$Caso\ III \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong T(A) \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_6$$

$$Caso\ IV \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_2$$

Álgebra a 28 de octubre de 2022

3.- Si $\boldsymbol{\sigma = (2 \quad 3 \quad 8 \quad 4)(3 \quad 6 \quad 7)(1 \quad 2 \quad 8) \in S_8}$ se tiene que:

a.- $\sigma \in A_8$

b.- σ^{-1} tiene orden 5

c.- σ^3 tiene orden 10

$$\sigma = (2 \quad 3 \quad 8 \quad 4)(3 \quad 6 \quad 7)(1 \quad 2 \quad 8) = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 8)(2 \quad 4) \quad o(\sigma) = 10$$

$$o(\sigma^{-1}) = 10 \quad \sigma \notin A_8 \quad o(\sigma^3) = 10$$

4.- En el grupo diédrico $\boldsymbol{D_n, n \geq 3}$, se tiene que:

a.- Los únicos elementos de orden 2 son las reflexiones en los ejes de simetría.

b.- Existe un n tal que D_n tiene exactamente 6 elementos de orden 2.

c.- Si $n = p$ es primo entonces D_p tiene p elementos de orden 2.

$$n = 5 \Longrightarrow los\ elementos\ de\ orden\ 2\ son: s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\ \ hay\ 5$$

$$n = 6 \Longrightarrow los\ elementos\ de\ orden\ 2\ son: s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, r^3\ \ hay\ 7$$

Si $n = p \neq 2$ es primo, n es impar y tiene p elementos de orden 2.

5.- Si $\boldsymbol{\sigma = (2 \quad 3 \quad 8 \quad 4)(3 \quad 6 \quad 7)(1 \quad 2 \quad 8), \tau = (2 \quad 5 \quad 8) \in S_8}$ se tiene que:

a.- $\tau\sigma\tau^{-1}$ tiene orden 5

b.- $\tau\sigma\tau^{-1}$ es impar

c.- $\tau\sigma\tau^{-1}$ es un ciclo de longitud 7

6.- Se tiene que:

a.- Si los dos grupos finitos no cíclicos se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.

b.- Dos grupos finitos que tiene subgrupos propios isomorfos son necesariamente isomorfos.

c.- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

$$D_4\ \ y\ \ S_4\ no\ son\ isomorfos \qquad C_8\ x\ C_2\ \ncong C_8 \rtimes C_2$$

7.- Se tiene que:

a.- El grupo lineal $GL_3(Z_2)$ es un grupo no abeliano de orden 168

b.- $\mu_6 \cong D_3$

c.- $S_4 = \langle (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4), (2 \quad 4) \rangle$

8.- Se tiene que:

a.- La aplicación $\varphi: A_n \to A_n, n \geq 3$, dado por $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ es un homomorfismo de grupos.

b.- Para cualesquiera permutaciones $\sigma, \tau \in S_n, n \geq 3, \sigma\,\tau = \tau\sigma$ tiene el mismo orden.

c.- Si G es un grupo cíclico entonces el grupo de automorfismos $Aut(G)$ también es cíclico.

$$\varphi(\sigma\,\tau) = (\sigma\,\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1} = \varphi(\tau)\varphi(\sigma) \neq \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$$

9.- Se tiene que:

a.- Si $\sigma = (4 \quad 3 \quad 5 \quad 2)(1 \quad 5 \quad 3) \in S_7$, entonces $\sigma^{25} = \sigma$

b.- No existe ningún homomorfismo sobreyectivo de D_6 en S_3.

c.- No existe ningún homomorfismo de Z_4 en Z_5.

$$\sigma = (4 \quad 3 \quad 5 \quad 2)(1 \quad 5 \quad 3) = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 3) \;\; o(\sigma) = 4 \Longrightarrow \sigma^{25} = \sigma^{24}\sigma = \sigma$$

10.- La ecuación $x(2 \quad 3)(5 \quad 6)x^{-1} = (3 \quad 4)(4 \quad 7)$ en S_7

a.- No tiene solución.

b.- Tiene solución única.

c.- Tiene solución pero no es única.

$$x(2 \quad 3)(5 \quad 6)x^{-1} = (3 \quad 4)(4 \quad 7) \Longrightarrow x(2 \quad 3)(5 \quad 6)x^{-1} = (3 \quad 4 \quad 7) \rightarrow \text{tipo } 3$$

tipo 2-2 el mismo tipo

Dos permutaciones conjugadas tienen ~~la misma longitud~~, por lo tanto, no tiene solución.

11.- Se tiene que:

a.- Un grupo finito todos sus subgrupos propios abelianos es abeliano.

b.- Un grupo finito todos sus subgrupos propios cíclicos es cíclico.

c.- Un grupo finito no abeliano puede tener todos sus subgrupos propios cíclicos.

Para a) y b) se considera Q_2.

12.- Si se considera el grupo cíclico $C = \langle x: x^{84} = 1\rangle$ y sus subgrupos $H = \langle x^{24}\rangle$ y $K = \langle x^{63}\rangle$ entonces se tiene que:

a.- $H < K$

b.- $[C: H \vee K] = 3$

c.- $H \cap K = \langle x^{42}\rangle$

$$mcd(24,84) = 4 \;\; H = \langle x^{42}\rangle = \langle x^{4}\rangle \quad mcd(63,84) = 3 \;\; K = \langle x^{63}\rangle = \langle x^{3}\rangle$$

$$3 \; no \; divide \; a \; 4 \Longrightarrow H \nless K$$

$$mcm(24,84) \neq 42$$

$$|H \vee K| = mcd(24,63) = 3$$

13.- Si G es un grupo, para cada $x \in G$ la aplicación $f_x: G \to G$ dada por $f_x(y) = xyx^{-1}$.

a.- Es un homomorfismo de grupos no inyectivo.

b.- No es un homomorfismo de grupos.

c.- Es un automorfismo.

14.- En un grupo G se tiene que:

a.- La ecuación $x^n = 1$ tiene como máximo n soluciones.

b.- El subconjunto de los elementos de orden finito es un subgrupo.

c.- Para cualquier $a \in G$ existe un $b \in G$ tal que $aba = 1$.

En Q_2, la ecuación $x^2 = 1$ tiene más de dos soluciones.

Si $b = 1$, entonces $a^2 = 1$, todos los elementos de G son de orden 2, absurdo.

Si $b \neq 1$, entonces $a^{-1} = ab = ba$, es decir, todos los conmutadores son distintos del trivial, absurdo.

15.- Se tiene que:

a.- S_4 no tiene subgrupos de orden 6.

b.- ZxZ_6 es un grupo cíclico.

c.- Si $f: G \to H$ es monomorfismo de grupos y H es abeliano entonces G es abeliano.

$S_4 \; tiene \; 4 \; subgrupos \; de \; orden \; 6$: $\langle (1 \quad 2), (1 \quad 3)\rangle, \langle (1 \quad 2), (1 \quad 4)\rangle, \langle (1 \quad 3), (1 \quad 4)\rangle, \langle (2 \quad 3), (2 \quad 4)\rangle$

$$f(xy) = f(x)f(y) = f(y)f(x) = f(yx) \xRightarrow{f \; inyectiva} xy = yx \;\; \forall x, y \in G$$

16.- Se tiene que:

a.- El subgrupo $H = \langle (1\quad 4\quad 5), (5\quad 3)\rangle$ de S_5 es cíclico de orden 6.

b.- Si $\sigma = (1\quad 5)(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5)(2\quad 3\quad 6) \in S_6$ entonces σ^{16} es una permutación par de orden 4.

c.- El grupo $Aut(Z_{24})$ es un grupo abeliano de orden 12.

$$|Aut(Z_{24})\,| = \varphi(24) = 2^2(2-1)(3-1) = 8 \neq 12$$

$$\sigma = (1\quad 5)(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5)(2\quad 3\quad 6) = (1\quad 2\quad 4)(3\quad 6)\;\; o(\sigma) = 6$$

$$\Longrightarrow \sigma^{16} = \sigma^4 = (1\quad 2\quad 4) \Longrightarrow o(\sigma^{16}) = 3 \neq 4$$

17.- Si X es un conjunto no vacío y G es un grupo y se considera G^X de las aplicaciones de X en G con la operación $(f \otimes g) = f(x)g(x), x \in X$, se tiene que:

a.- $(G^X, \otimes)$ no es grupo porque no existe simétrico de cada elemento.

b.- $(G^X, \otimes)$ es un grupo si y solo si X es también grupo.

c.- $(G^X, \otimes)$ es un grupo que es abeliano si lo es G.

Claramente es asociativa. Sea $1_G : X \to G$, tal que $1_G(x) = 1$, entonces,

$$(f \otimes 1_G)(x) = f(x)1_G(x) = 1_G(x)f(x) = (1_G \otimes f)(x)$$

Luego $(G^X, \otimes)$tiene elemento neutro. Además, si existe el simétrico de cada elemento.

$$(f \otimes g)(x) = 1_G(x)\ \forall x \in X \Longrightarrow f(x)g(x) = 1\ \forall x \in X$$

Como G es un grupo, $\exists \big(f(x)\big)^{-1} \in G\ \forall x \in X$, luego $g : X \to G$ tal que

$$g(x) = \big(f(x)\big)^{-1} \Longrightarrow (f \otimes g)(x) = f(x)\big(f(x)\big)^{-1} = 1\ \forall x \in X$$

Luego $(G^X, \otimes)$ es un grupo. Y además, si G es abeliano se tiene que, para cada $f, g \in G^X$ $y\ x \in X$:

$$(f \otimes g)(x) = f(x)g(x) = g(x)\,f(x) = (g \otimes f)(x)\ \ \forall x \in X \Longrightarrow\ f \otimes g = g \otimes f\ \ \forall\, f, g \in G^X$$

18.- Dadas las permutaciones $\boldsymbol{\sigma = (1 \quad 4)(2 \quad 3)}$ y $\boldsymbol{\tau = (2 \quad 3 \quad 4)}$ de $\boldsymbol{S_4}$ se tiene que:

a.- $\langle \sigma, \tau \rangle = S_4$

b.- $\langle \sigma, \tau \rangle = A_4$

c.- $\langle \sigma, \tau \rangle$ tiene orden 6

$$\sigma = (1 \quad 4)(2 \quad 3) \in A_4 \;\; \tau = (2 \quad 3 \quad 4) \in A_4 \Longrightarrow \langle \sigma, \tau \rangle \neq S_4$$

$$|\langle \sigma, \tau \rangle| \big/ |A_4| = |\langle \sigma, \tau \rangle| \big/ 12 \Longrightarrow |\langle \sigma, \tau \rangle| = 1,2,3,4,6 \text{ ó } 12$$

$$\Longrightarrow \langle \sigma, \tau \rangle = \{Id, \sigma, \tau, \tau^2, \sigma\tau, \sigma\tau^2, \tau\sigma, \dots\} \Longrightarrow |\langle \sigma, \tau \rangle| = 12 \Longrightarrow |\langle \sigma, \tau \rangle| = A_4$$

$$\tau^2 = (2 \quad 4 \quad 3) \;\; \sigma\tau = (1 \quad 4 \quad 3) \;\; \sigma\tau^2 = (1 \quad 4 \quad 2) \;\; \tau\sigma = (1 \quad 2 \quad 4)$$

19.- Se tiene que:

a.- Homomorfismos inyectivos de Z_3 en A_4 hay 8.

b.- Homomorfismos inyectivos de Z_3 en S_5 hay 15.

c.- Homomorfismos inyectivos de Z_5 en S_4 hay 5.

Usando el 1º Teorema de isomorfía:

$$|Z_5| = |Imf| = 5 \; no \; divide \; a \; |S_4| = 24$$

$$|Z_3| = |Imf| = 3 \; divide \; a \; |A_4|, \qquad elementos \; de \; orden \; 3 \; hay \; 8$$

$$|Z_4| = |Imf| = 4 \; divide \; a \; |S_5| = 60$$

20.- Se tiene que:

a.- El grupo de unidades $U(Z_8)$ es un grupo cíclico con 4 generadores.

b.- El grupo de unidades $U(Z_{13}) = \langle \overline{11} \rangle = \langle \overline{7} \rangle$.

c.- El grupo de unidades $U(Z_{19})$ no hay elementos de orden 6.

$$Z_8 = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}\} \;\; |U(Z_8)| = \varphi(8) = 4 \Longrightarrow U(Z_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$$

$$o(\overline{1}) = 1 \;\; o(\overline{3}) = 2 \quad o(\overline{5}) = 2 \;\; o(\overline{7}) = 2 \Longrightarrow U(Z_8) \cong V \;\; no \; es \; cíclico$$

$$|U(Z_{13})| = \varphi(13) = 12 \Longrightarrow o(\overline{11}) = 12 \Longrightarrow o(\overline{7}) = 12$$

$$11 \xrightarrow{11} 121 = 4 \xrightarrow{11} 5 \xrightarrow{11} 3 \xrightarrow{11} 7 \xrightarrow{11} 12 \xrightarrow{11} 132 = 2 \dots$$

$$7 \xrightarrow{7} 10 \xrightarrow{7} 5 \xrightarrow{7} 9 \xrightarrow{7} 11 \xrightarrow{7} 12 \xrightarrow{7} 6 \dots$$

$$|U(Z_{19})| = \; \varphi(19) = 18 \Longrightarrow a^6 = 1$$

Test del examen ordinario de Álgebra II del 21 de enero 2022

1.- Se tiene que:

a.- El subgrupo $H = \langle(12)(34)\rangle$ de A_4 es normal.

b.- El conjunto de clases laterales por la izquierda de $H = \langle(12)(34)\rangle$ en A_4 tiene 6 elementos y el máximo común divisor de los órdenes de los elementos de cada clase es 3.

c.- El conjunto de clases laterales por la izquierda de $H = \langle(12)(34)\rangle$ en A_4 hay una clase en la que el máximo común divisor de los órdenes de sus elementos es 2.

$$A_4 = \begin{Bmatrix} (1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 2),(1\quad 4\quad 2),(1\quad 2\quad 4),(1\quad 4\quad 3),(1\quad 3\quad 4), \\ (2\quad 4\quad 3),(2\quad 3\quad 4),(1\quad 2)(3\quad 4),(1\quad 3)(2\quad 4),(1\quad 4)(2\quad 3),1 \end{Bmatrix}$$

$$H = \langle(12)(34)\rangle \ntrianglelefteq A_4 \quad |H| = 2 \quad H = \{(12)(34),1\}$$

$$xH$$

$$1H = H = \{(12)(34),1\} = (1\quad 2)(3\quad 4)H \qquad m(1H) = 1$$

$$(1\quad 2\quad 3)H = \{(1\quad 2\quad 3),(1\quad 3\quad 4)\} = (1\quad 3\quad 4)H \quad m\big((1\quad 2\quad 3)H\big) = 3$$

$$(1\quad 3\quad 2)H = \{(1\quad 3\quad 2),(2\quad 3\quad 4)\} = (2\quad 3\quad 4)H \quad m\big((1\quad 3\quad 2)H\big) = 3$$

$$(1\quad 4\quad 2)H = \{(1\quad 4\quad 2),(2\quad 4\quad 3)\} = (2\quad 4\quad 3)H \quad m\big((1\quad 4\quad 2)H\big) = 3$$

$$(1\quad 2\quad 4)H = \{(1\quad 2\quad 4),(1\quad 4\quad 3)\} = (1\quad 4\quad 3)H \quad m\big((1\quad 2\quad 4)H\big) = 3$$

$$(1\quad 3)(2\quad 4)H = \{(1\quad 3)(2\quad 4),(1\quad 4)(2\quad 3)\} = (1\quad 4)(2\quad 3)H$$

$$m\big((1\quad 4)(2\quad 3)\big) = 2$$

3.- Sea $H = \langle x^{28}\rangle$ el subgrupo cíclico del grupo $G = \langle x : x^{70} = 1\rangle$. Se tiene entonces que:

a.- $[G:H] = 14$

b.- $[G:H] = 5$

c.- $[G:H] = 1$

$$\Longrightarrow |G| = 70 \quad mcm(28,70) = 140 \Longrightarrow {}^{140}/_{28} = 5 \Longrightarrow |H| = 5$$

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{70}{5} = 14$$

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{70}{\frac{70}{mcd(70,28)}} = mcd(70,28) = 14$$

4-. Se tiene que el número de homomorfismos inyectivos de Z_4 en S_4 es exactamente:

a.- 6

b.- 8

c.- 4

$$\frac{V_n^m}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m} = \frac{4!}{4} = 6$$

5.- Sean $n \geq 1$, p y q primos y $p > q$. Entonces la afirmación: "Si G es un grupo finito de orden $p^n q$, G no es simple pero si es resoluble".

a.- Es siempre verdadera

b.- Es siempre falsa

c.- Es verdadera o falsa dependiendo de G, p y q.

Claramente es resoluble siempre y $n_p = 1, \exists P \lhd G: |P| = p^n$, es decir, G no es simple.

6.- Se tiene que la afirmación "Todos los grupos de orden 99 son cíclicos":

a.- Es verdadera.

b.- Es falsa porque hay grupos de ese orden que no son abelianos.

c.- Es falsa porque hay grupos de ese orden que no cíclicos.

$$Z_3 x Z_{33} \quad de\ orden\ 99\ y\ no\ es\ cíclico$$

7.- Se tiene que el número de 5-subgrupos de Sylow de A_7:

a.- 1

b.- 21

c.- 126

$$|A_7| = 2520 = 2^3 x 3^2 x 5 \Longrightarrow n_5 = 1 \text{ ó } 36 \Longrightarrow n_5 = 1$$

8.- Se tiene que el número, salvo isomorfismo, de grupos no abelianos de orden ≤ 20 es:

a.- Menor que 11.

b.- Igual a 11.

c.- Mayor que 11.

Hasta ≤ 15 hay 8 Orden $16 = 2^4$; D_8, Q_4 , Orden 17 , Orden 18, D_9, Orden 19,

Orden 20, D_{10}, luego hasta ≤ 20 hay 12.

9.- Se tiene que el centralizador de la permutación $(\mathbf{12})(\mathbf{34})$ en S_4

a.- Es cíclico de orden 8

b.- Es isomorfo a D_4

c.- Es isomorfo a Q_2

$$C\big((12)(34)\big) = \{\sigma \in S_4 : (12)(34)\sigma = \sigma(12)(34)\}$$

$$|S_4| = 24 \quad no\ hay\ ningún\ elemento\ de\ S_4\ de\ orden\ 8\ \ luego\ \big|C\big((12)(34)\big)\big| \neq 8$$

$$(12)(34)\sigma = \sigma(12)(34)$$

$$(24) = (12)(34)(1\quad 2\quad 3\quad 4) = (1\quad 2\quad 3\quad 4)(12)(34) = (134)$$

$$(1\quad 2\quad 4\quad 3), (1\quad 3\quad 2\quad 4), (1\quad 3\quad 4\quad 2)$$

$$(1\quad 4\quad 2\quad 3), (1\quad 4\quad 3\quad 2)$$

Suponiendo que no hay ninguno, entonces la opción c

10.- Se tiene que

a.- A_4xZ_3 tiene 4 3-subgrupos de Sylow ¿¿

b.- El centro de A_4xZ_3 es trivial

c.- A_4xZ_3 es resoluble de longitud 4

$$|A_4xZ_3| = 36 = 2^2x3^2 \;\; n_3 = 1\ ó\ 4$$

Si $P \in P_3\ : |P| = 9 \quad P = HxK \Longrightarrow |H| = 3\ \ |K| = 3 \Longrightarrow K = Z_3$

$$\Longrightarrow |H| = 3\ \ hay\ 4\ subgrupos\ de\ orden\ 3\ en\ 4$$

$$\{1\} \lhd Z_3 \quad \{1\} \lhd\ Z_2 \lhd V \lhd A_4$$

$$\{1\}x\{1\} \lhd Z_2x\{1\} \lhd Z_2xZ_3 \lhd VxZ_3 \lhd A_4xZ_3$$

$$Z(A_4) = \{1\} \;\; Z(Z_3) = \{Z_3\} \quad Z(A_4xZ_3) = \{1\}xZ_3 \neq \{1\}x\{1\}$$