Examen Ordinaria 22-23

1. Sea A el grupo abeliano $\left\langle x, y, z;\ \begin{array}{c} 10x + 12y + 4z = 0 \\ 8x + 11y + 6z = 0 \\ 4x + 6y + 8z = 0 \end{array} \right\rangle$. Indique las descomposiciones Cíclica Primaria y Cíclica de A, así como su orden y el rango de su parte libre. Clasifique, indicando sus descomposiciones Cíclicas Primaria y Cíclicas todos los grupos abelianos del mismo orden que A.

Error copiando matriz.

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 12 & 11 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 10 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 \\ 8 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -13 \\ 8 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 13 \\ 8 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 13 \\ 0 & 42 & -98 \\ 0 & 28 & -70 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 98 \\ 0 & 28 & 70 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -42 \\ 0 & 28 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 42 \\ 0 & 28 & 70 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 42 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Concluimos, por tanto, que $A \cong \mathbb{Z}_{14} \oplus \mathbb{Z}_{14}$, obteniendo así su descomposición cíclica. En cuanto a su descomposición cíclica primaria tenemos que $A \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$.

El rango de su parte libre será *número de generadores* $-$ *rango de* $M = 3 - 3 = 0$. Finalmente $|A| = 14 \cdot 14 = 196$.

Tenmos que $196 = 2^2 \cdot 7^2$, por tanto existen $\mathscr{P}(2) \cdot \mathscr{P}(2) = 2 \cdot 2 = 4$ grupos abelianos de orden 196:

DCP	**DC**
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_{14} \oplus \mathbb{Z}_{14}$
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{49}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{98}$
$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{28}$
$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{49}$	$\mathbb{Z}_{196}$

2. Sea $G = \langle (1234) \rangle \leq S_5$.

a) Calcula el número de conjugados de (1234) y demuestra que G no es normal en S_5.

b) Demuestra que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

c) Construye un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contenga a G.

Los conjugados de (1234) son las permutaciones de S_5 de tipo 4, es decir los ciclos de longitud 4. Calculamos el número de ciclos de longitud 4 en S_5:

$$\frac{V_5^4}{4} = \frac{5!}{4 \cdot 1} = 30$$

Como $|G| = |(1234)| = 4 < 30$, G no contiene a todos los conjugados de (1234) y por tanto, $G \ntrianglelefteq S_5$.

Como $|S_5| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, los 2-subgrupos de Sylow serán los subgrupos de S_5 de orden 8. Como $|G| = 4 \neq 8$, concluimos que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

Para construir un subgrupo de orden 8, construiremos D_4, con $\rho = (1234)$. Para elegir τ imponemos que:

$$\tau\rho = \rho^{-1}\tau \Rightarrow \tau(1234)\tau^{-1} = (1234)^{-1} = (4321) \Rightarrow (\tau(1)\tau(2)\tau(3)\tau(4)) = (4321)$$

Por tanto podemos elegir como $\tau = (14)(23)$, obteniendo así un grupo con 8 elementos $Q = \langle (1234), (14)(23) \rangle$, que obviamente contiene a G.

3. Sea G un grupo de orden 125.

a) Sea x un elemento de G con orden 25, y sea $K = \langle x \rangle$. Prueba que K es normal.

b) Sea y un elemento de G que no está en K y que tiene orden 5. Sea ahora $H = \langle y \rangle$. Prueba que $G = K \rtimes H$.

c) Prueba que ${}^{y}x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.

d) Si se cumple $yxy^{-1} = x^6$ demuestra que $\langle a, b; a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ es una presentación de G.

Calculamos el índice de K:

$$[G : K] = \frac{|G|}{|K|} = 5$$

y como 5 es el menor primo que divide a $|G|$ concluimos que K es normal.

Se debe tener que $K \cap H = 1$, ya que como $\varphi(5) = 4$, cualquier elemento de H distinto de 1 es un generador de H. Por tanto, si $y^i \in K$, se tendrá que $\langle y \rangle \subset K$, pero $y \notin K$, y concluimos que $K \cap H = 1$.

Tenemos que $K \trianglelefteq G, H \leq G, H \cap K = 1$ y por último tenemos que:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K} = |H||K| = 5 \cdot 25 = 125 = |G|$$

Concluimos que $G = K \rtimes H$.

Demostrar que ${}^{y}x = x^6$ es una acción de grupos de H sobre K es equivalente a demostrar que la función:

$$\begin{array}{ccc} C_5 \cong H & \longrightarrow & Aut(K) \cong Aut(C_{25}) \\ y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

con $\varphi(y)(x) = x^6$ es un homomorfismo. Utilizando el teorema de Dyck, tendremos que comprobar que $\varphi(y)^5 = Id$, lo cual efectivamente ocurre:

$$x \longmapsto x^6 \longmapsto x^{11} \longmapsto x^{16} \longmapsto x^{21} \longmapsto x$$

Sea $Q = \langle a, b; a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle$ y definimos la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & x \\ b & \longmapsto & y \end{array}$$

y comprobamos utilizando el teorema de Dyck que se trata de un homomorfismo:

$$x^{25} = 1, y^5 = 1, yx = x^6 y$$

Ahora demostramos que el homomorfismo recién definido es biyectivo, y pora tanto es un isomorfismo:

- El homomorfismo es **sobreyectivo**, ya que x e y generan G, ya que todo elemento es $x^i y^j$ porque $G = K \rtimes H$. Como el homomorfismo es sobreyectivo, tenemos que $|Q| \geq 125$.
- Como en Q se verifica $ba = a^6 b$, todo elemento de Q es de la forma $a^i b^j$ con $i = 0, 1, \ldots 24$ y $b = 0, 1 \ldots 4$. Por tanto, $|Q| \leq 25 \cdot 5 = 125$.
- Concluimos que $|Q| = 125$, sumado a que el homomorfismo es sobreyectivo, obtenemos que es un isomorfismo.

4. Demuestra que:

a) Ningún grupo de orden 390 es simple.

b) Ningún grupo de orden 30 es simple.

c) Todo grupo de orden 390 es resoluble.

Sea G tal que $|G| = 390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, entonces tenemos que $n_{13} \mid 30$ y $n_{13} \equiv 1 \mod 13$. Concluimos, por tanto que $n_{13} = 1$ y por tanto, G tiene un único 13-subgrupo de Sylow, y por tanto, es normal.

Como $1 < |P_{13}| < |G|$ y $P_{13} \trianglelefteq G$, tenemos que G no es un grupo simple.

Sea G tal que $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, entonces tenemos varias posibilidades: $n_5 = 1, 6$ y $n_3 = 1, 10$. Comprobamos que no se puede tener $n_5 = 6$ y $n_3 = 10$. Si se tiene $n_5 = 6$, entonces se tienen $6 \cdot 4 = 24$ elementos de orden 5 distintos (la intersección de grupos de orden 5 distintos es 1). La intersección de los 3 subgrupos de Sylow entre ellos o con los 5-subgrupos de Sylow es 1. Entonces se necesitarían otros 20 elementos de orden 3 en el grupo, sin embargo solo quedan $30 - 25 = 5$ elementos, que podrían ser de orden 3. Por tanto, concluimos que se debe tener $n_3 = 1$.

Por tanto, se deber tener que $n_3 = 1$ o $n_5 = 1$, es decir, o bien existe un 5-subgrupo de Sylow que es normal en G, o bien existe un 3-subgrupo de Sylow que es normal en G. En cualquier caso, concluimos que G no es un grupo simple.

Si $|G| = 390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, entonces sabemos que existe un grupo de orden 13 que es normal en G, el cociente viene dado por:

$$\bar{G} = G/P_{13}$$

que tiene orden 30. Un grupo de orden 30 tiene, por el apartado anterior, un subgrupo normal, que será de orden 3 o de orden 5, en ambos casos primo, y por tanto será resoluble, por ser un grupo abeliano. El cociente tendrá orden $2 \cdot 3$ u orden $2 \cdot 5$, en ambos casos, orden $p \cdot q$, y por tanto, también será resoluble.

Concluimos por tanto que $\bar{G}$ es resoluble, y por tanto, G es resoluble.

1. Sea A el grupo abeliano $\left\langle x, y, z;\ \begin{array}{c} 10x + 12y + 4z = 0 \\ 8x + 11y + 6z = 0 \\ 4x + 6y + 8z = 0 \end{array} \right\rangle$. Indique las descomposiciones Cíclica Primaria y Cíclica de A, así como su orden y el rango de su parte libre. Clasifique, indicando sus descomposiciones Cíclicas Primaria y Cíclicas todos los grupos abelianos del mismo orden que A.

Sea la matriz de relaciones de A:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 11 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[C_2 + 2C_1]{C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & -14 & 28 \\ 6 & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \underset{\text{mcd} = 1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 28 \\ 0 & -8 & 20 \end{pmatrix}} \xleftrightarrow{C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 14 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\underset{\text{mcd} = 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix}} \xleftrightarrow{F_3 - 6F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

FI: $d_1 = 2 \quad d_2 = 28 \qquad DE = \{2, 2^2, 7\}$

$r = 3 \Rightarrow n - r = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \nexists$ parte libre de torsión.

$A \overset{DCP}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_7 \overset{DC}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{28} \Rightarrow |A| = 2 \cdot 28 = 56$

Sea G abeliano / $|G| = |A| = 56 = 7 \cdot 2^3$

Caso 1: $DE = \{2^3, 7\}$ FI: $d_1 = 56 \Rightarrow G \overset{DCP}{\cong} \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_7 \overset{DC}{\cong} \mathbb{Z}_{56}$

Caso 2: $DE = \{2, 2^2, 7\}$ FI: $d_1 = 2, d_2 = 28 \Rightarrow G \overset{DCP}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_7 \overset{DC}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{28}$

Caso 3: $DE = \{2, 2, 2, 7\}$ FI: $d_1 = 2, d_2 = 2, d_3 = 14 \Rightarrow G \overset{DCP}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_7 \overset{DC}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{14}$

2. Sea $G = \langle(1234)\rangle \leq S_5$.

a) Calcula el número de conjugados de (1234) y demuestra que G no es normal en S_5.

Los conjugados de un ciclo son aquellos con su misma longitud

$\Rightarrow$ Nº de ciclos de longitud $m=4$ en S_5, $n=5$ es

$$\frac{V_m^n}{m} = \frac{n!}{m(n-m)!} = \frac{5!}{4\cdot 1!} = 30 \text{ conjugados}$$

$G = \{1, (1234), (13)(24), (4321)\}$

$G \trianglelefteq S_5 \Leftrightarrow \forall x \in S_5, \forall g \in G, \; x g x^{-1} \in G$. Tomando el generador cubrimos todos los casos:

Sea $x = (12) \in S_5 \Rightarrow xgx^{-1} = (12)(1234)(12) = (1342) \notin G \Rightarrow$ $G \ntrianglelefteq S_5$

b) Demuestra que G no es un 2-subgrupo de Sylow de S_5.

Vemos que $|G| = 4 = 2^2 \Rightarrow$ es un 2-subgrupo.

Veamos subgrupos de Sylow de S_5.

$|S_5| = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 5\cdot 3\cdot 2^3 \Rightarrow$ los 2-subgrupos de Sylow de S_5 tendrían $2^3 = 8$ elementos $\Rightarrow 8 \neq 4 = |G| \Rightarrow G$ no es 2-subgrupo de Sylow de S_5.

$c)$ Construye un 2-subgrupo de Sylow de S_5 que contenga a G.

Como debe contener a G, uno de los generadores va a ser (1234).

$|P_2| = 8 \Longrightarrow$ Buscamos isomorfismo $f: D_4 \longrightarrow \langle (1234), \tau \rangle = H$

$D_4 = \langle r, s \,/\, r^4 = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$

Por tanto, $\tau(1234) = (4321)\tau \Longrightarrow$

$\tau(1234)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \tau(3), \tau(4)) = (4321)$ y $\tau^2 = 1$

Es fácil obtener $\tau = (14)(23)$

Por Tª Dick, $\exists_1 f: D_4 \longrightarrow H \;\Big/\; \begin{array}{l} f(r) = (1234) \\ f(s) = (14)(23) \end{array}$

Claramente $Im(f) = \langle (1234), (14)(23) \rangle = H \Longrightarrow f$ sobreyectiva

$\ker f = \{ x \in D_4 \,/\, f(x) = 1 \}$

Sea $x = s^i r^j$, $i = 0, 1$, $j = 0 \ldots 3$

$f(s^i r^j) = f(s^i) f(r^j) = (14)^i (23)^i (1234)^j = 1 \Longrightarrow i = j = 0 \Longrightarrow \ker f = \{1\}$

(Viendo todas las imágenes podemos comprobarlo).

Por tanto, $D_4 \cong H \Longrightarrow |D_4| = |H| = 8 = 2^3 \Longrightarrow$

$H \leq S_5$ es un 2-subgrupo de Sylow que contiene a G.

3. Sea G un grupo de orden 125.

a) Sea x un elemento de G con orden 25, y sea $K = \langle x \rangle$. Prueba que K es normal.

Vemos $[G:K] = \frac{125}{25} = 5$, que es el menor primo que divide a $|G| \Rightarrow K \trianglelefteq G$

b) Sea y un elemento de G que no está en K y que tiene orden 5. Sea ahora $H = \langle y \rangle$. Prueba que $G = K \rtimes H$.

$G = K \rtimes H \Leftrightarrow K \trianglelefteq G$, $KH = G$, $K \cap H = \{1\}$

Primero veamos que $H \cap K = \{1\}$.

Vemos $\varphi(5) = 4 \Rightarrow$ todo elemento de H, $\neq 1$, es generador suyo.

Sup. $H \cap K \neq \{1\} \Rightarrow$

$\exists i = 0..4 \mid y^i \in K \Rightarrow y \in \langle y \rangle \subseteq K$, pero $y \notin K$!!!

Por tanto, $H \cap K = \{1\}$

Como $K \trianglelefteq G$, $H \leq G \Rightarrow$ Por 2º Tª Isomorfía, $K \cap H \trianglelefteq H$ y

$$\frac{H}{H \cap K} = \frac{H}{\{1\}} \cong \frac{HK}{K} \Rightarrow |HK| = |H|\,|K| = 25 \cdot 5 = 125 \Rightarrow$$

$HK = H \vee K = G$

Por tanto, $G = K \rtimes H$

c) Prueba que ${}^y x = x^6$ es una acción de grupos de H en K.

$H \times K \to K$ / $(y, x) \mapsto {}^y x = x^6$ es acción $\iff$

$\varphi : H \cong C_5 \longrightarrow Aut(K) \cong Aut(C_{25})$ / $\varphi(y)(x) = x^6$ homomorfismo

Veamos condiciones del Tª Dyck:

1) $\varphi(y)^5(x) = \varphi(y)(\varphi(y) \cdots (\varphi(y)(x))\cdots) = \left(\left(\left((x^6)^6\right)^6\right)^6\right)^6 = \left(\left((x^{11})^6\right)^6\right)^6 = ((x^{16})^6)^6 = (x^{21})^6 = x \quad \forall x \in C_{25}$

$\Rightarrow \varphi(y)^5 = Id_{C_{25}}$

Por Tª Dyck, $\exists \varphi : C_5 \longrightarrow Aut(C_{25})$ / $\varphi(y)(x) = x^6$ homomorfismo.

d) Si se cumple $yxy^{-1} = x^6$ demuestra que $\langle a, b; a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b\rangle$ es una presentación de G.

Sea $\theta : Q = \langle a, b / a^{25} = b^5 = 1, ba = a^6 b \rangle \longrightarrow G$ / $\theta(a) = x$
$\theta(b) = y$

Verificamos condiciones del Tª Dyck:

1) $x^{25} = 1 \quad \forall x \in K$ 2) $y^5 = 1 \quad \forall y \in H$

3) $yx = x^6 y \iff yxy^{-1} = x^6$ (verdadero por hipótesis)

Por Tª Dyck $\exists \theta : Q \to G$ / $\theta(a) = x$ $\theta(b) = y$ homomorfismo

Notamos que $G = KH = K \vee H = \langle x \rangle \vee \langle y \rangle = \langle x, y \rangle = Im\, \theta \Rightarrow$

θ sobreyectivo $\Rightarrow |Q| \geq |G| = 125$

Como $ba = a^6 b \Rightarrow Q = \{a^i b^j / i = 0 \ldots 24, j = 0 \ldots 4\} \Rightarrow |Q| \leq 25 \cdot 5 = 125$

Por tanto, θ epimorfismo y $|Q| = 125 \Rightarrow \theta$ isomorfismo.

4. Demuestra que:

a) Ningún grupo de orden 390 es simple.

$|G| = 390 = 2\cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

$n_2 | 195 \quad n_2 \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow n_2 = 1, 3, 5, 13, 15, 39, 65, 195$

$n_3 | 130 \quad n_3 \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow n_3 = 1, \cancel{2}, \cancel{5}, 10, 13, \cancel{26}, \cancel{65}, 130$

$n_5 | 78 \quad n_5 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow n_5 = 1, \cancel{2}, \cancel{3}, 6, \cancel{13}, 26, \cancel{39}, \cancel{78}$

$n_{13} | 30 \quad n_{13} \equiv 1 \bmod 13 \Rightarrow n_{13} = 1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{10}, \cancel{15}, \cancel{30}$

Vemos que siempre $\exists P_{13} \trianglelefteq G$ 13-SS / $|P_{13}| = 13 \Rightarrow G$ no es simple.

b) Ningún grupo de orden 30 es simple.

$|G| = 30 = 2\cdot 3 \cdot 5$

$n_2 | 15 \quad n_2 \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow n_2 = 1, 3, 5, 15$

$n_3 | 10 \quad n_3 \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow n_3 = 1, \cancel{2}, \cancel{5}, 10$

$n_5 | 6 \quad n_5 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow n_5 = 1, \cancel{2}, \cancel{3}, 6$

Supongamos G simple $\Leftrightarrow n_2, n_3, n_5 \neq 1$

- $n_3 = 10 \Rightarrow \exists P_3^i \leq G$ 3-SS / $|P_3^i| = 3 \quad i = 1 .. 10$
- $n_5 = 6 \Rightarrow \exists P_5^j \leq G$ 5-SS / $|P_5^j| = 5 \quad j = 1 .. 6$
- $n_2 \neq 1 \Rightarrow \exists P_2^k \leq G$ 2-SS / $|P_2^k| = 2 \quad k \in \underset{\alpha_1}{\{1..3\}}$ ó $\underset{\alpha_2}{\{1..5\}}$ ó $\underset{\alpha_3}{\{1..15\}}$

Como podemos asegurar que los p-subgrupos tienen intersección trivial ($p = 2^1 \vee 3^1 \vee 5^1$, los exponentes son $= 1$), en total hay $1 + 2\cdot 10 + 4 \cdot 6 + \sum_{\ell = 1..3} (|P_2^\ell| - 1) > 30 = |G|$ elementos

Por tanto, se tiene $n_2 = 1 \vee n_3 = 1 \vee n_5 = 1 \Rightarrow G$ no es simple.

$c)$ Todo grupo de orden 390 es resoluble.

Hemos visto en a) que $\exists P_{13} \trianglelefteq G$ 13-SS / $|P_{13}| = 13$, que es soluble por ser un 13-grupo.

Veamos G/P_{13} soluble

$|G/P_{13}| = 30 \Rightarrow$ por b), siempre existe un p-SS normal, P, $p=2 \vee p=3 \vee p=5 \Leftrightarrow |P| = 2 \vee |P| = 3 \vee |P| = 5$, que además es soluble por ser p-grupo.

$\left| \frac{G/P_{13}}{P} \right| = 15 \vee 10 \vee 6 = pq$, p, q primos $\Rightarrow$

$\frac{G/P_{13}}{P} \cong C_p \times C_q \cong C_{pq}$ abeliano $\Rightarrow$ soluble

Por tanto, G/P_{13} soluble $\Rightarrow G$ soluble