Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
13 de Mayo de 2019

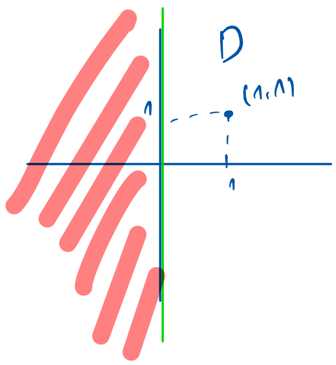
NOMBRE:

1. Resuelve el problema

$$x' = \frac{x}{t} + (\frac{x}{t})^2, \quad x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida la solución?

Se trata de una ecuación homogénea: $h(\xi) = \xi + \xi^2$

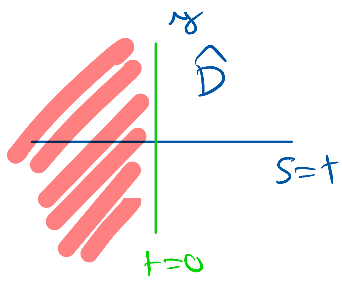


$D =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$

Sea el cambio de variable

$$\begin{cases} s = t \\ y = x/t \end{cases} \Rightarrow x = ty \Rightarrow x' = y + ty' = y + y^2 \Rightarrow$$

$ty' = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{t} y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Tenemos ec. variables separadas.



Sol. ctes: NO, pues $y^* = \frac{1}{t} y^{*2} \Rightarrow y^* = 0$, pero incumple $y(1) = 1$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y^2 \Rightarrow \int \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{y^2} dy \Leftrightarrow \ln t + C = \frac{-1}{y}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \ln(1) + C = -\frac{1}{1} \Rightarrow C = -1$$

$$-\frac{1}{y} = \ln(t) - 1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1 - \ln(t)} \quad \forall t \in]0, e[\Rightarrow x(t) = \frac{t}{1 - \ln(t)}$$

$$\forall t \in I =]0, e[$$

2. La ecuación diferencial

$$x' = \frac{2x + t + 1}{2x + t + 7}$$

pertenece a una de las familias estudiadas en clase. ¿De qué familia se trata? Encuentra un cambio de variable que la transforme en una ecuación de variables separadas.[1]

Vemos que se trata de una ecuación reducible a homogénea, de la forma

$$x' = h\left(\frac{ax+bt+c}{Ax+Bt+C}\right) = \frac{2x+t+1}{2x+t+7}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Usamos cambio } \varphi \begin{cases} s = t \\ y = 2x+t \end{cases}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \frac{2x'+1}{1} = 2\frac{(2x+t+1)}{2x+t+7} + 1 = \frac{2(y+1)}{y+7} + 1 = \frac{3y+9}{y+7} \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{ds} = 3\,\frac{y+9}{y+7}$$

Por tanto vemos que $\frac{dy}{ds} = p(s)\,q(y) \Longrightarrow$ se trata de ecuación de variables separadas.

[1]Se precisarán los dominios sobre los que actúa este cambio

3. Se considera la ecuación $x' = x+t$. ¿Tiene soluciones polinómicas? ¿Cuántas?

$$x(t) = e^{A(t)} \left(K + \int e^{-A(t)} t \, dt \right) = e^{t} \left(K - e^{-t}(1+t) \right)$$

$$A(t) = \int dt = t$$

$$\int e^{-t} t \, dt = \left[\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = \int e^{-t} dt = -e^{-t} \end{array} \right] =$$

$$-te^{-t} + \int e^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t} = -e^{-t}(1+t)$$

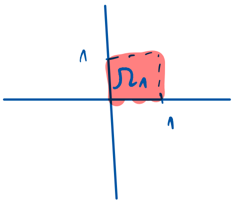
Para que la solución sea polinómica necesitamos que $K = 0 \Rightarrow$
$\exists_1$ x polinómica, con $x(t) = -1-t$.

4. Se consideran los dominios del plano

$$\Omega_1 =]0,1[\times]0,1[, \quad \Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 - x^2 < 1\}.$$

¿Tienen forma de estrella?

• Ω_1



Ω_1 estrellado $\Longleftrightarrow$

$\exists z_* \in \Omega_1 \,/\, [z_*, z] = \{(1-\lambda)z_* + \lambda z \,/\, \lambda \in [0,1]\} \subseteq \Omega_1 \ \forall z \in \Omega_1$

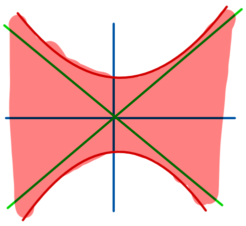
Sean $z_* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z = (x, y) \in \Omega_1$

$$[z_*, z] = \left\{ (1-\lambda)\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \lambda(x,y) \,/\, \lambda \in [0,1] \right\} = \left\{ \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{2} + \lambda x, \tfrac{1}{2} - \tfrac{\lambda}{2} + y\right) / \lambda \in [0,1] \right\} =$$
$$= \left\{ \left(\tfrac{1}{2} + \lambda\left(-\tfrac{1}{2} + x\right), \tfrac{1}{2} + \lambda\left(-\tfrac{1}{2} + y\right)\right) / \lambda \in [0,1] \right\}$$

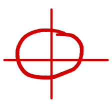
Vemos que $\lambda\left(-\frac{1}{2} + x\right) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\lambda \in [0,1] \Longrightarrow \frac{1}{2} + \lambda\left(-\frac{1}{2} + x\right) \in]0,1[$

Análogo para la otra componente, vemos que $[z_*, z] \subseteq \Omega_1 \Rightarrow$ es estrellado.

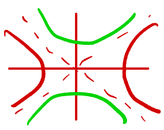
• Ω_2



Nota: La ecuación $ax^2 + by^2 = 1$ representa:



Elipse si $a, b > 0$



Hipérbola si a, b tienen $\neq$ signo

Sea $z_* = (0,0)$, $z = (x,y) \in \Omega_2$

$$[z_*, z] = \{(1-\lambda) z_* + \lambda z \,/\, \lambda \in [0,1]\} = \{(\lambda x, \lambda y) \,/\, \lambda \in [0,1]\}$$

$$(\lambda y)^2 - (\lambda x)^2 = \lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2 = \underbrace{\lambda^2}_{\leq 1}\underbrace{(y^2 - x^2)}_{< 1} < 1 \Longrightarrow (\lambda x, \lambda y) \in \Omega_2 \ \forall (x,y) \in \Omega_2 \ \forall \lambda \in [0,1]$$

$\Longrightarrow [z_*, z] \subseteq \Omega_2 \Longrightarrow \Omega_2$ estrellado.

5. Se considera la ecuación $x' = a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t)$, donde $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. En el dominio $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$ se efectúa el cambio de variable $s = -t$, $y = \frac{1}{x}$. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que la ecuación permanezca invariante por este cambio de variable?