Tema 6.- G-grupos y p-grupos.

Definición

Sea G un grupo y $X \neq \emptyset$ un conjunto. *Una acción* de G sobre X (por la izquierda) es una aplicación:

$$ac: GxX \to X \quad ac(g,x) = x´$$

que verifica:

1.- ${}^{1}x = x \ \ \forall x \in X$

2.- ${}^{g}\left({}^{h}x\right) = {}^{gh}x \ \ \forall x \in X; \ \forall g,h \in G$

En tal caso se dice que G *actúa* (opera) por la izquierda sobre X (o también que X es un $G - conjunto$) y "ac" es la llamada aplicación de $G - estructura$.

Proposición

Sea G un grupo y $X \neq \emptyset$ un conjunto. Se tiene que dar una acción de G sobre X es equivalente a dar un homomorfismo de grupos de G en el grupo $Perm(X)$ de permutaciones de X.

Al homomorfismo $\phi: G \to Perm(X)$ asociado a la acción se conoce como *la representación de G por permutaciones asociada a la acción*.

El núcleo de ϕ; $Ker(\phi) = \{g \in G \setminus \phi(g) = id_X\} = \left\{g \in G \setminus {}^{g}x = x \ \ \forall x \in X\right\}$ se conoce como *el núcleo de la acción* y, en el caso de que $Ker(\phi) = 1$ se dice que la acción es *fiel*.

Teorema de Cayley

Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de permutaciones.

Definición

Para cualquier grupo G se tiene una acción por traslación

$$ac: GxG \to G \quad ac(g,h) = {}^{g}h = gh$$

La representación asociada $\phi: G \to Perm(G)$ está dada por $\phi(g)(h) = {}^{g}h = gh$ y es un acción fiel.

Definiciones

Sea G un grupo y X un G-conjunto. Se puede definir en X una relación binaria

$$y \sim x \Leftrightarrow \exists g \in G: y = {}^{g}x$$

La clase de equivalencia de cada $x \in X$ se llama *órbita* de x y es el conjunto

$$O(x) = \left\{y \in X \setminus y = {}^{g}x \ \ con \ g \in G\right\}$$

Y $X/_{\sim}$ es el conjunto de órbitas, y se tiene una partición de X:

1.- $O(x) = O(y) \Leftrightarrow x \sim y$

2.- $O(x) \neq O(y) \Leftrightarrow O(x) \cap O(y) = \emptyset$

3.- $X = \bigcup_{i \in I} O(x_i)$ *unión disjunta.*

Si $X/_{\sim}$ es unitario, es decir, si hay una sola órbita se dice que la acción es *transitiva.*

Dado un G-conjunto X, para cada $x \in X$ se puede considerar el llamado *estabilizador* de x en G definido por

$$Stab_G(x) = \{g \in G \setminus {}^{g}x = x\}$$

Es un subgrupo de G, que es también llamado el *grupo de isotropía* de x.

Proposición

Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X. Entonces, para cada $x \in X$, la órbita $O(x)$ es un conjunto finito y se tiene que $|O(x)| = [G : Stab_G(x)]$. En particular se tiene que el cardinal de la órbita es un divisor del orden de G.

Proposición

Sea X un G-conjunto. Si $x, y \in X$ están en la misma órbita entonces $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son subgrupos de G conjugados.

Definición

Sea un G-conjunto. Un elemento $x \in X$ se dice que es *fijo* por la acción si ${}^{g}x = x \ \ \forall g \in G$. Se puede considerar el conjunto de elementos fijos

$$Fix(X) = \{x \in X \setminus {}^{g}x = x \ \ \forall g \in G\}$$

Y se tiene que

$$x \in Fix(X) \Leftrightarrow O(x) = \{x\} \Leftrightarrow Stab_G(x) = G$$

Si X es finito y $X/_{\sim} = \{O(x_1), \dots, O(x_n)\}$ entonces

$$|X| = |Fix(X)| + \sum_{x_i \notin Fix(X)} |O(x_i)| = |Fix(X)| + \sum_{x_i \notin Fix(X)} [G : Stab_G(x_i)]$$

Ejemplos

1.- Considerando la acción por traslación de $G \neq 1$ sobre sí mismo

$$ac: GxG \to G \quad ac(g,h) = {}^{g}h = gh$$

Se tiene que, $\forall h \in G$:

$$O(h) = \{ {}^{g}h \setminus g \in G \} = \{gh \setminus g \in G\} = G$$

$$Stab_G(h) = \{g \in G \setminus {}^{g}h = gh = h\} = 1$$

$$Fix(G) = \{h \in G \setminus {}^{g}h = gh = h \ \ \forall g \in G\} = \emptyset$$

2.- Considerando la acción

$$ac: Gxsubg(G) \to subg(G) \quad ac(g,h) = {}^{g}H = gH$$

Se tiene que, $\forall H < G$:

$$O(H) = \{ {}^{g}H \setminus g \in G \} = \{gH \setminus g \in G\} = {}^{G}/_{\sim}$$

$$Stab_G(H) = \{g \in G \setminus {}^{g}H = gH = H\} = H$$

$$Fix\big(Gsubg(G)\big) = \{H < G \setminus {}^{g}H = gH = H \ \ \forall g \in G\} = \{G\}$$

3.- Considerando la acción de conjugación de $G \neq 1$ sobre sí mismo

$$ac: GxG \to G \quad ac(g,h) = {}^{g}h = ghg^{-1}$$

Se tiene que, $\forall h \in G$:

$$O(h) = \{ {}^{g}h \setminus g \in G \} = \{ghg^{-1} \setminus g \in G\} = Cl_G(h) \ clase \ de \ conjugación \ de \ h \ en \ G$$

$$Stab_G(h) = \{g \in G \setminus {}^{g}h = ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \setminus gh = hg\} = C_G(h)$$

$$centralizador \ de \ h \ en \ G$$

$$Fix(G) = \{h \in G \setminus {}^{g}h = ghg^{-1} = h \ \ \forall g \in G\} = \{h \in G \setminus gh = hg \ \ \forall g \in G\} = Z(G)$$

4.- Considerando la acción de conjugación de $G \neq 1$ sobre $subg(G)$

$$ac: GxG \to G \quad ac(g,H) = {}^{g}H = gHg^{-1}$$

Se tiene que, $\forall H < G$: $O(H) = \{ {}^{g}H \setminus g \in G \} = \{gHg^{-1} \setminus g \in G\}$

$$Stab_G(H) = \{g \in G \setminus {}^{g}H = gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \setminus gH = Hg\} = N_G(H)$$

$$Fix\big(subg(G)\big) = \{H < G \setminus {}^{g}H = gHg^{-1} = H \ \ \forall g \in G\} = \{H < G \setminus H \lhd G\}$$

Definición

Si p es primo, un grupo G se dice que es un $p-grupo$ si el orden de todo elemento de G es una potencia de p. Para cualquier grupo G si $H < G$ y H es un p-grupo, p primo, se dice que H es un $p-subgrupo$ de G.

Teorema de Cauchy

Si G es un grupo finito y p es un primo que divide al orden de G entonces G tiene un elemento de orden p, y por tanto, un subgrupo de orden p que es un $p-subgrupo$.

Corolario

Sea G es un grupo finito. Entonces G es un $p-grupo \iff |G| = p^n$ para algún $n \in N$.

Teroema de Burnside

Si G es un $p-grupo$ finito no trivial entonces $|Z(G)| \geq p$, y en particular, $Z(G) \neq 1$.

Corolario

Si $|G| = p^n$ p primo entonces $|Z(G)| \neq p^{n-1}$. En particular, si $|G| = p^2$ entonces G es abeliano.

Teorema

Sea G es un grupo finito con $|G| = n$ y sea p un primo. Entonces para cada potencia p^i que divida a n existe $H < G$ con $|H| = p^i$.

Definición

Si G es un grupo finito con $|G| = n$ y sea p un primo que divide a n, un $p-subgrupo\ de\ Sylow$ de G es un p-subgrupo de G cuyo orden es la mayor potencia de p que divide al orden de G, es decir, que si $|G| = p^k m$ con $mcd(p, m) = 1$, un p-subgrupo $H < G$ es *de Sylow* si $|H| = p^k$.

Corolario (Primer teorema de Sylow)

Para todo grupo finito G y todo divisor primo p de su orden existe al menos un $p-subgrupo\ de\ Sylow$ de G.

Lema

Si P es un $p-subgrupo\ de\ Sylow$ de G grupo finito y H es un p-subgrupo de $N_G(P)$ en G de P, entonces H está contenido en P.

Teorema (Segundo teorema de Sylow)

Sea grupo finito G y p un primo y supongamos que $|G| = p^k m$ con $mcd(p,m) = 1$, y que n_p denota el número de $p - subgrupo\ de\ Sylow$ de G, entonces:

1.- Todo p-subgrupo de G está contenido en un $p - subgrupo\ de\ Sylow$ de G.

2.- Cualesquiera dos $p - subgrupos\ de\ Sylow$ de G son conjugados.

3.- El número de $p - subgrupos\ de\ Sylow$ de G, n_p es un divisor de m y verifica que

$$n_p \equiv 1 mod p$$

Corolario

Sea P es un $p - subgrupo\ de\ Sylow$ de G grupo finito G. Entonces P es el único $p - subgrupo\ de\ Sylow$ de $C \Leftrightarrow P \lhd G$.

Teorema

Sea G un grupo finito en el que todos sus subgrupos de Sylow son normales. Entonces G es el producto directo interno de sus subgrupos de Sylow.

Nota

Si G es un grupo abeliano finito entonces G tiene un único $p - subgrupo\ de\ Sylow$ para cada primo p (este subgrupo está formado por todos los elementos cuyo orden es una potencia de p y se llama la componente $p - primaria$ del grupo abeliano)

Ejercicio 1

Si X es un G-grupo demostrar que $x^g = {}^{g^{-1}}x \;\; x \in X, g \in G$, define una acción por la derecha de G sobre X.

Solución

1.- $x^1 = {}^{1^{-1}}x = {}^{1}x = x \;\; \forall x \in X$

2.- $(x^g)^h = \left({}^{g^{-1}}x\right)^h = {}^{h^{-1}}\left({}^{g^{-1}}x\right) = {}^{h^{-1}g^{-1}}x = {}^{(gh)^{-1}}x = x^{gh} \quad \forall x \in X;\; \forall g, h \in G$

Por lo tanto, define una acción por la derecha de G sobre X.

Ejercicio 2

Dado el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ para cada subgrupo $H \leq S_4$ se considera la acción de H sobre X dada por ${}^{\sigma}i = \sigma(i), \sigma \in H, i \in X$. Encontrar la órbita y el estabilizador de cada punto $i \in X$ para los siguientes subgrupos:

1.- $H = \langle(1 \quad 2 \quad 3)\rangle = \{1, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\}$

$$orb(1) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}1 = \sigma(1) \;\; con\, \sigma \in H\} = \{1,2,3\}$$

$$orb(2) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}2 = \sigma(2) \;\; con\, \sigma \in H\} = \{1,2,3\}$$

$$orb(3) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}3 = \sigma(3) \;\; con\, \sigma \in H\} = \{1,2,3\}$$

$$orb(4) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}4 = \sigma(4) \;\; con\, \sigma \in H\} = \{4\}$$

$$Stab_H(1) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(2) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(3) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(4) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2)\} = H$$

2.- $H = A_4$

3.- $H = V = \{1, (1 \quad 2)(3 \quad 4), (1 \quad 3)(2 \quad 4), (1 \quad 4)(2 \quad 3)\}$

$$orb(1) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}1 = \sigma(1) \;\; con\; \sigma \in H\} = \{1,2,3,4\} = X$$

$$orb(2) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}2 = \sigma(2) \;\; con\; \sigma \in H\} = \{1,2,3,4\} = X$$

$$orb(3) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}3 = \sigma(3) \;\; con\; \sigma \in H\} = \{1,2,3,4\} = X$$

$$orb(4) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}4 = \sigma(4) \;\; con\; \sigma \in H\} = \{1,2,3,4\} = X$$

$$Stab_H(1) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(2) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(3) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(4) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

4.- $H = \langle (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \rangle = \{1, (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4), (1 \quad 3)(2 \quad 4), (1 \quad 4 \quad 3 \quad 2)\}$

$$orb(1) = \{j \in X : j = {}^{\sigma}i = {}^{\sigma}1 = \sigma(1) \;\; con\; \sigma \in H\} = \{1,2,3,4\} = X$$

$$orb(1) = orb(2) = orb(3) = orb(4) = X$$

$$Stab_H(1) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(2) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(3) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

$$Stab_H(4) = \{\sigma \in H : {}^{\sigma}1 = \sigma(1) = 1\} = \{1\}$$

Ejercicio 5

Demostrar que G contiene un elemento x que tiene exactamente dos conjugados, entonces G tiene un subgrupo normal propio.

Solución

Si existe $x \in G$ tal que $|conj(x)| = 2$ y como $C_G(x) \leq G$:

$$[G: C_G(x)] = |orb(x)| = |conj(x)| = 2 \Longrightarrow C_G(x) \trianglelefteq G$$

Si $|G| = 2, G = C_2$ no tiene una clase de conjugación de dos elementos $\Longrightarrow H = 1$, por lo tanto, $|G| > 2 \Longrightarrow H = C_G(x) \neq 1$.

Ejercicio 8

Se dice que la acción de un grupo finito G sobre un conjunto X es transitiva si hay una sóla órbita para esta acción (es decir, si para cada $x, y \in X$ existe algún $g \in G$ tal que ${}^g x = y$). Demostrar que si G actúa transitivamente sobre un conjunto X con n elementos, entonces $|G|$ es un múltiplo de n.

Solución

Si G actúa transitivamente sobre un conjunto X con n elementos, sea $x \in X$ entonces:

$$orb(x) = X \Longrightarrow n = |orb(x)| = [G: Stab_G(x)] \Longrightarrow {}^{[G: Stab_G(x)]}/_{|G|} \Longrightarrow {}^{n}/_{|G|}$$

Es decir, $|G|$ es un múltiplo de n.

Ejercicio 11

Calcular el número de clases de conjugación de S_5. Dar un representante de cada una y encontrar el orden de cada clase. Calcular el estabilizador de $(1 \quad 2 \quad 3)$ bajo la acción de conjugación de S_5 sobre sí mismo.

Solución

Las clases de conjugación de S_5 sobre sí mismo están formadas por las permutaciones que tiene la misma forma. Veamos el número de tipos distintos:

$$1 \to 1 \quad (1 \quad 2) \to \binom{5}{2} = 10 \quad (1 \quad 2 \quad 3) \to \frac{V_3^5}{3} = 20 \quad (1 \quad 2)(3 \quad 4 \quad 5) = 20$$

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \to \frac{V_4^5}{4} = 30 \quad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5) \to 24 \quad (1 \quad 2)(3 \quad 4) \to \frac{10x3}{2} = 15$$

Vamos a calcular $Stab_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)$:

$$\big|orb\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big| = \big[conj\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big] = 20$$

$$\big|orb\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big| = \big[S_5 : C_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big] = \frac{|S_5|}{\big|C_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big|} = \frac{120}{\big|C_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big|}$$

$$\big|Stab_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big| = \big|C_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big| = \frac{120}{\big|orb\big((1 \quad 2 \quad 3)\big)\big|} = \frac{120}{20} = 6$$

$$Stab_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big) = C_{S_5}\big((1 \quad 2 \quad 3)\big) = \{\sigma \in S_5 : \sigma(1 \quad 2 \quad 3)\sigma^{-1} = (1 \quad 2 \quad 3)\} =$$

$$= \{1, (1 \quad 2 \quad 3), (1 \quad 3 \quad 2), (4 \quad 5), (1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5), (1 \quad 3 \quad 2)(4 \quad 5)\}$$

Ejercicio 13

Sea G un p-grupo actuando sobre un conjunto finito X. Demostrar que

$$|\boldsymbol{X}| \equiv |\boldsymbol{Fix_G}(\boldsymbol{X})| \boldsymbol{modp}$$

Solución

Como G es un p-grupo:

$$|G| = p^n$$

Se tiene que

$$|X| = |Fix_G(X)| + \sum_{x \in \Delta} [G: St(x)]$$

$$[G: St(x)] = |orb(x)| \leq |x| \ \ finito \ \ y \ \ \frac{[G: St(x)]}{|G|} \ \ luego\ [G: St(x)] = p^i$$

Si $i = 0 \Longrightarrow [G: St(x)] = 1 \Longrightarrow x \in \Delta' = \Delta \setminus Fix_G(X)$

$\Longrightarrow |orb(x)| = 1$¡¡ $ya\ que\ orb(x) = \{x\}$ debe ser punto fijo.

$$\sum_{x \in \Delta} [G: St(x)] \equiv 0 modp \Longrightarrow |X| \equiv |Fix_G(X)| modp$$

Ejercicio 14

Sea G un 2-grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X cuya cardinalidad es un número impar. ¿Podemos afirmar que existe al menos un punto de X que queda fijo bajo la acción de G?¿Podemos decir lo mismo si $|X|$ es par?

Solución

Sea $|G| = 2^m$,

$$|X| = |Fix_G(X)| + \sum_{x \in \Delta} [G: St(x)]$$

$$|X|\ es\ impar \Longrightarrow |X| \equiv 1 mod2 \ \ \sum_{x \in \Delta} [G: St(x)] \equiv 0 mod2$$

$$\Longrightarrow |Fix_G(X)| \equiv 1 mod2 \ \Longrightarrow \ |Fix_G(X)| \neq 0 \Longrightarrow Fix_G(X) \geq 1 \Longrightarrow Fix_G(X) \neq \emptyset$$

Si $|X|$ es para no se puede decir que haya algún punto fijo.

Ejercicio 17

Sea H un subgrupo de un grupo finito G con $[G:H] = p$ primo y p el menor primo que divide a $|G|$. Demostrar que entonces es normal en G.

Solución

Sea ${}^{G}/_{H\sim} = \{gH: g \in G\}$:

Sea ${}^{GxG}/_{H\sim} \to {}^{G}/_{H\sim}$ dado por $gxH \coloneqq gxH \ \ acción$

$$G \xrightarrow{f} S\left({}^{G}/_{H\sim}\right) \cong S_p \ \ ya\ que\ [G:H] = p\ un\ morfismo$$

Calculamos el $Ker(f) = \left\{g \in G:\ {}^{g}xH = xH\ \forall x \in G\right\}$

$${}^{g}xH = gxH = xH \Leftrightarrow x^{-1}gx \in H$$

Como $g \in x^{-1}Hx\ \ \forall x \in G$ entonces

$$Ker(f) = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$$

Tomando $x = 1$,

$$Ker(f) = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx \subseteq H \Longrightarrow Ker(f) \leq H \leq G$$

$$|Im(f)| = \left|{}^{G}/_{Ker(f)}\right| = [G:Ker(f)] = [G:H][H:Ker(f)] = p[H:Ker(f)]$$

$$\Longrightarrow\ Im(f) \leq S_p \Longrightarrow {}^{|Im(f)|}/_{p!} \Longrightarrow {}^{p[H:Ker(f)]}/_{p!} \Longrightarrow {}^{[H:Ker(f)]}/_{(p-1)!}$$

Es decir, $[H:Ker(f)]$ es divisor de $|H|$ y de $|G|$ y como $(p-1)! = (p-1)(p-2)\dots 1$ producto de primos más pequeños que p. Absurdo.

$$\Longrightarrow [H:Ker(f)] = 1 \Longrightarrow H = Ker(f) \trianglelefteq G$$

Ejercicio 20

Si G es un grupo de orden p^n, p primo, demostrar que para todo $k, 0 \leq k \leq n$, existe un subgrupo normal de G de orden p^k.

Solución

Ejercicio 21 muy importante

Hallar todos los subgrupos de Sylow de los grupos S_3 y S_4.

Solución

$$|S_3| = 6 = 2x3$$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$n_2/_3 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3 \Longrightarrow n_2 \equiv 1mod2 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3$$

Veamos cuantos P_3, 3-subgrupos de Sylow hay:

$$n_3/_2 \Longrightarrow n_3 = 1 \text{ ó } 2 \Longrightarrow n_3 \equiv 1mod3 \Longrightarrow n_3 = 1$$

Sólo hay un 3-subgrupos de Sylow, $P_3 \trianglelefteq S_3 \quad |P_3| = 3, P_3 = \langle(1 \quad 2 \quad 3)\rangle$

Si $n_2 = 1$, sólo hay un 2-subgrupos de Sylow, $P_2 \trianglelefteq S_3 \quad |P_2| = 2$, además

$$|S_3| = 6 = 2x3 = |P_2||P_3| \;\; P_2 \trianglelefteq S_3 \;\; P_3 \trianglelefteq S_3 \Longrightarrow S_3 = P_2xP_3 \;\; producto\ directo$$

$$\Longrightarrow S_3 \cong C_2xC_3 \;\; absurdo \Longrightarrow n_2 \neq 1 \Longrightarrow n_2 = 3$$

$$\Longrightarrow P_2^1 = \langle(1 \quad 2)\rangle \qquad P_2^2 = \langle(1 \quad 3)\rangle \qquad P_2^3 = \langle(2 \quad 3)\rangle$$

$$|S_4| = 24 = 2^3x3$$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$n_2/_3 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3 \Longrightarrow n_2 \equiv 1mod2 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3$$

Veamos cuantos P_3, 3-subgrupos de Sylow hay:

$$n_3/_8 \Longrightarrow n_3 = 1, 2, 4, \text{ó } 8 \Longrightarrow n_3 \equiv 1mod3 \Longrightarrow n_3 = 1 \text{ ó } 4$$

Si $n_3 = 1$, sólo hay un 3-subgrupos de Sylow, $P_3 \trianglelefteq S_4 \quad |P_3| = 3$,

$$\langle(1 \quad 2 \quad 3)\rangle \ntrianglelefteq S_4 \quad \langle(1 \quad 2 \quad 4)\rangle \ntrianglelefteq S_4 \quad \langle(1 \quad 3 \quad 4)\rangle \ntrianglelefteq S_4 \; \langle(2 \quad 3 \quad 4)\rangle \ntrianglelefteq S_4$$

Es decir, ningún subgrupo de orden 3 es normal en S_4, es decir , $n_3 \neq 1 \Longrightarrow n_3 = \;4$

$$\Longrightarrow P_3^1 = \langle(1 \quad 2 \quad 3)\rangle \qquad P_3^2 = \langle(1 \quad 2 \quad 4)\rangle \qquad P_3^3 = \langle(1 \quad 3 \quad 4)\rangle \;\; P_3^4 = \langle(2 \quad 3 \quad 4)\rangle$$

Si $n_2 = 1$, sólo hay un 2-subgrupos de Sylow, $P_2 \trianglelefteq S_4 \quad |P_2| = 8$,

$$\langle(1 \quad 2)\rangle xV \ntrianglelefteq S_4 \quad \langle(1 \quad 3)\rangle xV \ntrianglelefteq S_4 \quad \langle(2 \quad 4)\rangle xV \ntrianglelefteq S_4$$

$$\Longrightarrow n_2 \neq 1 \Longrightarrow n_2 = 3$$

$$\Longrightarrow P_2^1 = \langle(1 \quad 2)\rangle xV \qquad P_2^2 = \langle(1 \quad 3)\rangle xV \qquad P_2^3 = \langle(2 \quad 4)\rangle xV$$

Ejercicio 22

Hallar todos los subgrupos de Sylow de los grupos $Z_{600}, Q_2, D_6, D_5, A_4, A_5$ y S_5.

Solución

Ejercicio 25

1.- Demostrar que no existen grupos simples de orden 12. Más concretamente, demostrar que todo grupo de orden 12 admite un subgrupo normal de orden 3 o de orden 4.

2.- Demostrar que no existen grupos simples de orden 28. Más concretamente, demostrar que todo grupo de orden 28 admite un subgrupo normal de orden 7.

3.- Demostrar que no existen grupos simples de orden 56. Más concretamente, demostrar que todo grupo de orden 56 admite un subgrupo normal de orden 7 ó de orden 8.

4.- Demostrar que no existen grupos simples de orden 148, ni de orden 200 ni de orden 351.

Solución

1.- $|G| = 12 = 2^2x3$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_2}/_3 \Rightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3 \Rightarrow n_2 \equiv 1mod2 \Rightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 3$$

Veamos cuantos P_3, 3-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_3}/_4 \Rightarrow n_3 = 1{,}2 \text{ ó } 4 \Rightarrow n_3 \equiv 1mod3 \Rightarrow n_3 = 1 \text{ ó } 4$$

Si $n_3 = 4$, $|P_3^j| = 3$, $j = 1, \dots, 4$, entonces $P_3^j \cong C_3$, en cada uno hay dos elementos de orden 3, y como $P_3^j \cap P_3^i = \{1\}$ $i \neq j$ $i,j = 1, \dots, 4$. Entonces hay 8 elementos de orden 3. Y quedan 4 elementos donde $|P_2| = 4$, es decir, $n_2 = 1$, sólo hay un 2-subgrupo de Sylow, $P_2 \trianglelefteq G$.

Y en consecuencia, si $n_2 = 3$, se tiene que $n_3 = 1$, y sólo hay un 3-subgrupo de Sylow, que es normal, $P_3 \trianglelefteq G$. Por lo tanto, G no es simple.

2.- $|G| = 28 = 2^2x7$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_2}/_7 \Rightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 7 \Rightarrow n_2 \equiv 1mod2 \Rightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 7$$

Veamos cuantos P_7, 7-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_7}/_4 \Rightarrow n_7 = 1{,}2 \text{ ó } 4 \Rightarrow n_7 \equiv 1mod7 \Rightarrow n_7 = 1$$

Por lo tanto, $n_7 = 1$, sólo hay un 7-subgrupo de Sylow, $P_7 \trianglelefteq G$, G no es simple.

3.- $|G| = 56 = 2^3x7$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$n_2/_7 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 7 \Longrightarrow n_2 \equiv 1 mod2 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 7$$

Veamos cuantos P_7, 7-subgrupos de Sylow hay:

$$n_7/_8 \Longrightarrow n_7 = 1{,}2{,}4 \text{ ó } 8 \Longrightarrow n_7 \equiv 1 mod7 \Longrightarrow n_7 = 1 \text{ ó } 8$$

Si $n_7 = 8$, $|P_7^j| = 7, j = 1, \dots, 8$, entonces $P_7^j \cong C_7$, en cada uno hay 6 elementos de orden 7, y como $P_7^j \cap P_7^i = \{1\}$ $i \neq j$ $i, j = 1, \dots, 8$. Entonces hay 48 elementos de orden 7. Y quedan 8 elementos, donde , $|P_2| = 8$, es decir, $n_2 = 1$, sólo hay un 2-subgrupo de Sylow, $P_2 \trianglelefteq G$.

Si $n_7 = 1$, sólo hay un 7-subgrupo de Sylow, $P_7 \trianglelefteq G$. Por lo tanto, G no es simple.

4.- $|G| = 148 = 2^2x37$

Veamos cuantos P_2, 2-subgrupos de Sylow hay:

$$n_2/_{37} \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 37 \Longrightarrow n_2 \equiv 1 mod2 \Longrightarrow n_2 = 1 \text{ ó } 37$$

Veamos cuantos P_{37}, 37-subgrupos de Sylow hay:

$$n_{37}/_4 \Longrightarrow n_{37} = 1{,}2 \text{ ó } 4 \Longrightarrow n_{37} \equiv 1 mod37 \Longrightarrow n_{37} = 1$$

Como $n_{37} = 1$, sólo hay un 37-subgrupo de Sylow, $P_{37} \trianglelefteq G$. Por lo tanto, G no es simple.

Ejercicio 26

Calcular el número de elementos de orden 7 que tiene un grupo simple de orden 168.

Solución

$$|G| = 168 = 2^3x3x7$$

Veamos cuantos P_7, 7-subgrupos de Sylow hay:

$$n_7/_{24} \Longrightarrow n_7 = 1{,}2{,}3{,}4{,}6{,}8{,}12 \text{ ó } 24 \Longrightarrow n_7 \equiv 1 mod7 \Longrightarrow n_7 = 1 \text{ ó } 8$$

Como G es simple, n_2, n_3 y n_7 son distintos de 1, luego $n_7 = 8$, $|P_7^j| = 7$, $j = 1, \dots, 8$, entonces $P_7^j \cong C_7$, en cada uno hay 6 elementos de orden 7, y como $P_7^j \cap P_7^i = \{1\}$ $i \neq j$ $i, j = 1, \dots, 8$. Entonces hay 48 elementos de orden 7.

Ejercicio 27

Demuestra que todo p-grupo finito es resoluble.

Solución

Sea G un p-grupo finito, $|G| = p^n \;\; n \in N$, se realiza por inducción sobre n:

Para $n = 1$, $|G| = p$, entonces $G \cong C_p$, G es abeliano, y en consecuencia resoluble.

Supongamos cierto para n, veamos para $n + 1$:

$$|G| = p^{n+1}$$

Por el ejercicio 20, $\exists N \trianglelefteq G$ tal que $|N| = p^n \Longrightarrow N \; es \; resoluble$

$$\left|{}^{G}\!/_{N}\right| = \frac{p^{n+1}}{p^n} = p \Longrightarrow {}^{G}\!/_{N} \cong C_p \Longrightarrow {}^{G}\!/_{N} \;\; es \; resoluble$$

Si $N \trianglelefteq G, N \; y \; {}^{G}\!/_{N} \;\; son \; resolubles, entonces \; G \; es \; resoluble.$

Ejercicio 28

Demuestra que todo grupo de orden pq, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Solución

Sean $p \neq q \;\; p < q$, y sea $|G| = pq$, entonces

Veamos cuantos P_p, p-subgrupos de Sylow hay:

$${}^{n_p}\!/_{q} \Longrightarrow n_p = 1 \text{ ó } q \Longrightarrow n_p \equiv 1 mod p \Longrightarrow n_p = 1 \text{ ó } q$$

Veamos cuantos P_q, q-subgrupos de Sylow hay:

$${}^{n_q}\!/_{p} \Longrightarrow n_q = 1 \text{ ó } p \Longrightarrow n_q \equiv 1 mod q \Longrightarrow como \; p < q \Longrightarrow n_q = 1$$

Como $n_q = 1$, sólo hay un q-subgrupo de Sylow, $P_q \trianglelefteq G$, además, $|P_q| = q$, es decir, $P_q \cong C_q$, P_q es abeliano, y en consecuencia resoluble.

$$\left|{}^{G}\!/_{P_q}\right| = \frac{pq}{q} = p \Longrightarrow {}^{G}\!/_{P_q} \cong C_p \Longrightarrow {}^{G}\!/_{P_q} \;\; es \; resoluble$$

Si $P_q \trianglelefteq G, P_q \; y \; {}^{G}\!/_{P_q} \;\; son \; resolubles, entonces \; G \; es \; resoluble.$

Si $p = q$, por el ejercicio anterior es resoluble.

Ejercicio 29

Demuestra que todo grupo de orden p^2q, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Solución

Caso 1º: $q < p < p^2$. Veamos cuantos P_p, p-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_p}/_{q} \Longrightarrow n_p = 1 \text{ ó } q \Longrightarrow n_p \equiv 1 mod p \Longrightarrow p > q \Longrightarrow n_p = 1$$

Como $n_p = 1$, sólo hay un p-subgrupo de Sylow, $P_p \trianglelefteq G$, además, $|P_p| = p^2$, es decir, $P_p \cong C_p x C_p$ ó C_{p^2}, P_p es abeliano, y en consecuencia resoluble.

$$\left| ^{G}/_{P_p} \right| = \frac{p^2q}{p^2} = q \Longrightarrow {}^{G}/_{P_p} \cong C_q \Longrightarrow {}^{G}/_{P_p} \ es\ resoluble$$

Si $P_p \trianglelefteq G, P_p\ y\ {}^{G}/_{P_p}\ son\ resolubles, entonces\ G\ es\ resoluble.$

Caso 2º: $p < p^2 < q$. Veamos cuantos P_q, q-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_q}/_{p^2} \Longrightarrow n_q = 1, p \text{ ó } p^2 \Longrightarrow n_q \equiv 1 mod q \Longrightarrow p < p^2 < q \Longrightarrow n_q = 1$$

Como $n_q = 1$, sólo hay un q-subgrupo de Sylow, $P_q \trianglelefteq G$, además, $|P_q| = q$, es decir, $P_q \cong C_q$, P_q es abeliano, y en consecuencia resoluble.

$$\left| ^{G}/_{P_q} \right| = \frac{p^2q}{q} = p^2 \Longrightarrow {}^{G}/_{P_q} \cong C_p x C_p \text{ ó } C_{p^2} \Longrightarrow {}^{G}/_{P_q} \ es\ resoluble$$

Si $P_q \trianglelefteq G, P_q\ y\ {}^{G}/_{P_q}\ son\ resolubles, entonces\ G\ es\ resoluble.$

Caso 3º: $p < q < p^2$. Veamos cuantos P_p, p-subgrupos de Sylow hay:

$$^{n_p}/_{q} \Longrightarrow n_p = 1 \text{ ó } q \Longrightarrow n_p \equiv 1 mod p \Longrightarrow p < q < p^2 \Longrightarrow n_p = 1 \text{ ó } q$$

$$^{n_q}/_{p^2} \Longrightarrow n_q = 1, p \text{ ó } p^2 \Longrightarrow n_q \equiv 1 mod q \Longrightarrow p < q < p^2 \Longrightarrow n_q = 1 \text{ ó } p^2$$

Si $n_q = p^2$, $|P_q^j| = q$, $j = 1, \dots, p^2$, entonces $P_q^j \cong C_q$, en cada uno hay $q-1$ elementos de orden q, y como $P_q^j \cap P_q^i = \{1\}\ i \neq j\ \ i,j = 1, \dots, p^2$. Entonces hay $p^2(q-1)$ elementos de orden q. Si $n_p = q$, $|P_p^j| = p^2$, $j = 1, \dots, q$, entonces, en cada uno hay $p(p-1)$ elementos de orden p, p^2. Entonces hay $qp(p-1)$ elementos de orden p, p^2.

$$p^2(q-1) + qp(p-1) = p^2q - p^2 + qp^2 - qp = p^2q + p(pq - q - p) < pq\ ¡¡$$

$$pq - q - p > 0 \Longrightarrow pq > q + p$$

Entonces $n_q = 1$ ó $n_p = 1$, por los casos anteriores, G es resoluble.

Ejercicio 31

1.- Demuestra que todo grupo de orden 70 es resoluble.

2.- Demuestra que todo grupo de orden 24 es resoluble.

3.- Demuestra que todo grupo de orden 100 es resoluble.

4.- Demuestra que todo grupo de orden 48 es resoluble.

5.- Sea G un grupo de orden 200. Demuestra que GxD_{41} es resoluble.

6.- Demuestra que todo grupo de orden 63 es resoluble.

Solución