Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\,\mathrm{e}^{-at}\,.$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in]0,1[$ se verifica

$$\text{máx}\{|f(z)|\colon |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

Granada, 16 de junio de 2021

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

A)

Sea $\gamma_n : [n, n+1] \to \mathbb{C} \mid \gamma_n(x) = x$ un camino en $\mathbb{C}$

Sea $\Phi_n : \gamma_n^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \Phi_n(t,z) = \dfrac{e^{\frac{z^3}{1+t}}}{1+t^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Claramente Φ_n cont por ser cociente de continuas

Además, $\forall t \in \gamma_n^*\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, $(\Phi_n)_t(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid (\Phi_n)_t(z) = \Phi(t,z)$ es entera por ser cociente de enteras.

Por T^a Holomorfía de Integrales Dependientes de Parámetros,

$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, $f_n(z) = \displaystyle\int_{\gamma_n} \Phi_n(t,z)\,dt$

B)

$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |f_n(z)| \leq \dfrac{\left|e^{\frac{z^3}{1+t}}\right|}{1+n^2} = \dfrac{e^{\operatorname{Re}\frac{z^3}{1+t}}}{1+n^2} =$

$\dfrac{e^{\operatorname{Re}(z^3)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+t}\right) - \operatorname{Im}(z^3)\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+t}\right)}}{1+n^2} = \dfrac{e^{\frac{\operatorname{Re}(z^3)}{1+t}}}{1+n^2} \leq \dfrac{e^{\frac{1}{1+n}}}{1+n^2}\, e^{\operatorname{Re}(z^3)}$

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $\varphi : K \to \mathbb{C} \mid \varphi(z) = |\operatorname{Re}(z^3)|$ sea $M \in \mathbb{R}_0^+ \mid \varphi(z) \leq M \quad \forall z \in K$

$e^{\operatorname{Re}(z^3)} \leq e^{\varphi(z)} \leq e^M \quad \forall z \in K \implies |f_n(z)| \leq \dfrac{e^M}{e^{1+n}(1+n^2)}$

Por Criterio comparación por Paso al Límite con $\frac{1}{1+n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^{1+n}(1+n^2)}}{\frac{1}{1+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{1+n}} = 0.$

Como $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2}$ converge $\implies \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{e^{1+n}(1+n^2)}$ converge.

Por Test Weierstrass, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$

Recubriendo $\mathbb{C}$ por compactos, sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$

Por T^a Convergencia de Weierstrass para series, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Probar que no hay más funciones enteras e inyectivas que los polinomios de grado uno.

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función inyectiva y entera. Supongamos f entera no polinómica.

por corolario del T^a Casorati, $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\{f(z) \,/\, |z| > r\}$ es denso en $\mathbb{C} \Rightarrow \overline{f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,r))} = \mathbb{C}$

f inyectiva $\Rightarrow$ f no cte $\Rightarrow$ por T^a Aplicación abierta $f(D(0,1))$ abierto

Tomando $R > 1 \Rightarrow$ Por def. de denso, $f(\mathbb{C} \setminus D(0,R)) \cap f(D(0,1)) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f$ no inyectiva !!!! Contradicción $\Rightarrow f$ polinómica.

Como f no cte $\Rightarrow f'$ cte $\vee$ Por T^a Fundamental del Álgebra,

$\exists z \in \mathbb{C} \,/\, f'(z) = 0$.

Pero f inyectiva $\Rightarrow f'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f'$ cte $\Rightarrow f$ tiene grado 1.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $r \in]0,1[$ se verifica

$$\text{máx}\{|f(z)| \colon |z| = r\} = r^n.$$

Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.