Probabilidad - 2º Curso (Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas)
Convocatoria extraordinaria y examen de incidencias ordinaria (14 de julio de 2021)

Apellidos, nombre:

---

[1]

1. Sea (X,Y) un vector aleatorio. Se pretenden predecir, por mínimos cuadrados, los valores de la variable Y a partir de una función lineal de la variable X, y viceversa.

   a) Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal de Y sobre X.

   b) Si $5y-x+1=0$ y $2x-5y+2=0$ son las rectas de regresión del vector (X,Y): identificar la recta de regresión de Y sobre X; obtener una medida de la proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal y calcular la esperanza del vector (X,Y).

2. Sean $X_1,\ldots,X_n$ v.a. continuas e independientes, tales que $\exists\, E[X_i]\ \forall i=1,\ldots,n$, con momento no centrado de orden dos finito y $g_1,\ldots,g_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones medibles. Justificar de forma razonada las siguientes afirmaciones:

   a) $\exists\, E[X_1\cdots X_n]=E[X_1]\cdots E[X_n]$.

   b) $\exists\, E[g_1(X_1)\cdots g_n(X_n)]=E[g_1(X_1)]\cdots E[g_n(X_n)]$.

   c) $\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2\operatorname{Var}(X_i), \quad \forall\, a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.

   d) $(X_1,\ldots,X_n)$ es un vector aleatorio continuo.

   e) Si para cualquier $n\in\mathbb{N}$, se tienen las hipótesis anteriores, adicionalmente a que su distribución es idéntica, es decir, la misma para todas las componentes, determinar el límite en probabilidad y casi seguramente de la secuencia $(S_n-E[S_n])/n$, así como la variable aleatoria que define el límite en distribución o en ley de la secuencia $(S_n-E[S_n])/\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}$, siendo $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

3. Definimos el experimento de lanzar 10 veces una moneda, y se denota por X la variable aleatoria que indica el número de lanzamientos hasta que aparece cara. X vale cero si no aparece cara. La variable Y denota el número de lanzamientos hasta que aparece cruz. Dicha variable vale cero si no aparece cruz.

   a) Calcular la función masa de probabilidad conjunta

   b) Calcular la distribución condicionada X/Y, para los diferentes valores de $Y=0,\ldots,10$.

4. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme en el recinto

$$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}.$$

   a) Calcular la función de distribución de probabilidad conjunta.

   b) Calcular las funciones de densidad condicionadas.

5. Se considera (X,Y) la distribución uniforme en el cuadrado unidad.

   a) Calcular la función de densidad de probabilidad de $Z=(X+Y,X-Y)$

   b) La función de densidad de probabilidad conjunta del máximo y el mínimo.

---

[1]**Puntuación**: 2 puntos para Problema 1; 2 puntos para Problema 2; 2 puntos para Problema 3; 2 puntos para Problema 4; 2 puntos para Problema 5