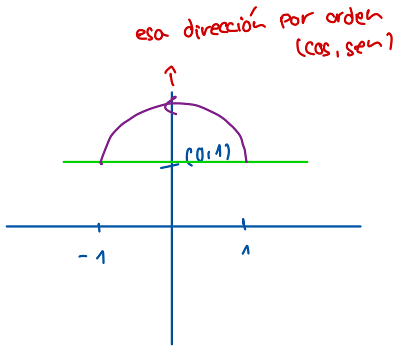
Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
10 de Mayo de 2018

NOMBRE:



1. Se considera el campo de fuerzas

$$F : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \left(\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2}\right).$$

¿Admite un potencial? Calcula el trabajo a lo largo de la curva

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, 1+\operatorname{sen}\theta), \quad \theta\in[0,\pi]. = [a,b]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{y^2}$$ $\Rightarrow$ se verifica condición de exactitud

Como $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ convexo $\Rightarrow$ tiene forma estrella $\Rightarrow$

$\exists$ potencial U / $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = F_2$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \Rightarrow U(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx = \int \frac{2x}{y}\,dx = \frac{x^2}{y} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = F_2 = -\frac{x^2}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = cte$$

Tomamos $\varphi(y) = 0$

$$U(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

Dado que el campo es conservativo,

$$W(\gamma(a),\gamma(b)) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(\cos(b), 1+\operatorname{sen}(a)) =$$

$$\frac{\cos^2(b)}{1+\operatorname{sen} b} - \frac{\cos^2 a}{1+\operatorname{sen} a} = 1-1 = 0$$

2. Demuestra que la ecuación diferencial

$$x' = (x - t)^2$$

admite una solución polinómica de grado uno. Encuentra un cambio de variable que transforme esta ecuación en una ecuación lineal.

Si se admite sol. polinómica de grado 1, será de la forma

$x(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

$x'(t) = a = (at + b - t)^2 \iff a = (t(a-1) + b)^2 \iff$

$a = t^2(a-1)^2 + b^2 + 2tb(a-1)$

$(a-1)^2 = 0 \implies a = 1$

$2b(a-1) = 0 \implies$ se verifica pues $a = 1$

$b^2 = a \implies b = \pm 1$

Por tanto, tomamos $x(t) = t - 1$.

Vemos que la ecuación es de Riccati:

$x' = x^2 - 2tx + t^2 = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$

Por tanto, sabemos que admite un cambio

$\varphi \begin{cases} s = t \\ y = \dfrac{1}{x - x_*(t)} \end{cases}$ donde $x_*(t)$ es sol. particular, y da lugar a

$y' = -(2a(t)x_*(t) + b(t))y - a(t) \iff y' = -y(2(t-1) - 2t) - 1 \iff$

$y' = 2y - 1$

3. Dadas dos funciones $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que cumplen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, demuestra que la función

$$U(x,y) = \int_0^y Q(0,s)ds + \int_0^x P(s,y)ds$$

es solución de

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

Dado que $Q \in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow Q_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q_0(s) = Q(0,s) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$F(y) = \int_0^y Q_0(s)\,ds \in C^1(\mathbb{R})$ con $\frac{dF}{dx}(y) = 0$

por tratarse de una función de y. y $F'(y) = Q_0(y) = Q(0,y)$ por T^a Fundamental del cálculo.

Sea $G(x) = \int_0^x P_y(s)\,ds$, donde $P_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $P_y(s) = P(s,y)$

Claramente $P_y \in C(\mathbb{R})$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Por T^a Fundamental del cálculo

$G'(x) = P_y(x) = P(x,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

Por tanto, se tiene que $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{dF}{dx}(y) + G'(x) = P(x,y)$

Dado que $P \in C^1(\mathbb{R}^2)$, por T^a Derivación de integrales dependientes de parámetros:

$H(x,y) = \int_0^x P(s,y)\,ds \in C^1(\mathbb{R}^2)$ con

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(s,y)\,ds = \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(s,y)\,ds \overset{\text{Regla Barrow}}{=} Q(x,y) - Q(0,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(0,y) + Q(x,y) - Q(0,y) = Q(x,y)$$

4. Considera las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

¿Son linealmente independientes? Calcula su Wronskiano.

Veamos que $f_1 f_2 \in C^1(\mathbb{R})$

$$f'_1(t) = \begin{cases} 3t^2 & t<0 \\ 0 & 0<t \end{cases} \qquad \lim_{t\to 0^-} f_1'^{-}(t) = \lim_{t\to 0^+} f_1'^{+}(t) = 0 \Rightarrow f_1 \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f'_2(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 3t^2 & 0<t \end{cases} \qquad \lim_{t\to 0^-} f_2'^{-}(t) = \lim_{t\to 0^+} f_2'^{+}(t) = 0 \Rightarrow f_2 \in C^1(\mathbb{R})$$

- Sea $t<0$.

$$W(f_1,f_2)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & 0 \\ 3t^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Sea $t \geq 0$

$$W(f_1,f_2)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t^3 \\ 0 & 3t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, no tenemos información.

f_1, f_2 L.I. en $\mathbb{R} \Leftrightarrow [a f_1(t) + b f_1(t) = 0 \;\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow a=b=0]$

- Sea $t<0$:

$a f_1(t) + b f_2(t) = a t^3 = 0 \Rightarrow a = 0$

- Sea $t \geq 0$

$a f_1(t) + b f_2(t) = b t^3 = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow f_1, f_2$ L.I.

5. Dada una función continua $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a(t)$, se denota por Z al conjunto de funciones $x \in C^1(\mathbb{R})$, $x = x(t)$, que satisfacen la ecuación integro-diferencial

$$x'(t) + x(t) = \int_0^t a(s)x(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demuestra que Z admite una estructura de espacio vectorial. ¿Qué dimensión tiene?

Definimos $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ y $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in Z$

Vemos $x(t) = -x'(t) + \int_0^t a(s)x(s)ds$

1) Asociativa: Es claro por la linealidad de la derivada y la integral.

2) Conmutativa: Claro por la conmutatividad de la suma.

3) Existencia del neutro: Tomamos $y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$x(t) + y(t) = x(t) - y'(t) + \int_0^t a(s)y(s)ds = x(t) + 0 + 0 = x(t) =$
$y(t) + x(s) = 0 + 0 + x(s).$

4) Existencia del opuesto: $\forall x \in Z$, tomamos $-x$, de forma que

$x(t) + (-x(t)) = -x'(t) + \int_0^t a(s)x(s)ds + x'(t) - \int_0^t a(s)x(s)ds = 0$

5) El resto de propiedades respecto a la multiplicación por escalares, (pseudo-asociatividad, distributividad y unimodularidad) son triviales por la linealidad de la derivada y la integral.

Para unimodularidad tomamos $\lambda = 1$.