**Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada**

**Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas**

**Convcatoria de junio**

**Ejercicio 1.** (**2 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in D(0,1)$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ verificando $n \geqslant 2$ se cumple que

$$f(1/n)g(1/n) - f'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre $f$ y $g$?

**Ejercicio 2.** (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \longmapsto \dfrac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R, \ \operatorname{Im} z > 0\}$ , con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx.$$

**Ejercicio 3.** (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{T}$.

a) Probar que $f$ tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

b) Probar que $f\big(\overline{D}(0,1)\big) = \overline{D}(0,1)$.

**Ejercicio 4.** (**3 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ y definimos la función $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ por $f_n(z) = \dfrac{1}{z - a_n}$ .

a) Si $K = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, probar que la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $\Omega$.

b) Deducir que la función dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ es holomorfa en $\Omega$ y estudiar sus singularidades aisladas.

c) Probar que para cada $\delta > 0$ el conjunto $f\big(D(0,\delta) \setminus K\big)$ es denso en $\mathbb{C}$.

*Granada, 14 de junio de 2017*

**Ejercicio 1.** (**2 puntos**) Sean $f,g \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ con $f(z) \neq 0$ para cada $z \in D(0,1)$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ verificando $n \geqslant 2$ se cumple que

$$f(1/n)g(1/n) - f'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre $f$ y $g$?

**Ejercicio 3.** (**2.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ no constante, continua en $\overline{D}(0,1)$ y verificando que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \mathbb{T}$.

a) Probar que $f$ tiene un numero finito (no nulo) de ceros en $D(0,1)$.

b) Probar que $f(\overline{D}(0,1)) = \overline{D}(0,1)$.

A)

$f \in C(\overline{D}(0,1)) \Longrightarrow |f| \in C(\overline{D}(0,1))$. Como $\overline{D}(0,1)$ compacto además,

$$\left.\begin{array}{l} \exists \min \{ |f(z)| \mid z \in \overline{D}(0,1) \} \\ \exists \max \{ |f(z)| \mid z \in \overline{D}(0,1) \} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists z_0 \in \overline{D}(0,1) \mid |f(z_0)| \leq |f(z)| \ \forall z \in \overline{D}(0,1) \\ \exists z_1 \in \overline{D}(0,1) \mid |f(z_1)| \geq |f(z)| \ \forall z \in \overline{D}(0,1) \end{array}\right.$$

Sup. $|f(z_0)| = |f(z_1)| \Longrightarrow |f|$ cte en $\overline{D}(0,1) \Longrightarrow |f|$ cte $D(0,1)$

Como $D(0,1)$ es dominio $\Longrightarrow f$ cte. en $D(0,1) \Longrightarrow f$ cte en $\overline{D}(0,1)$ !!!
(extensión por continuidad)

$\Longrightarrow |f(z_0)| < |f(z_1)|$

$z_1 \in D(0,1) \Longrightarrow$ Por Principio del Módulo Máximo, $f$ cte. en $D(0,1)$ !!!

$z_0 \in D(0,1) \Longrightarrow$ Por principio del Módulo Mínimo, $f$ cte $\vee$
$\exists a \in D(0,1) \mid f(a) = 0 \Longrightarrow f$ tiene un 0 en $D(0,1)$.

Sup. $\exists \{a_n\} \subseteq D(0,1)$ distintos $\mid f(a_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

También podemos suponer $\{a_{\sigma(n)}\} \longrightarrow a_0 \in \overline{D}(0,1)$ (T$^a$ Bolzano-Weierstrass)

- $a_0 \in D(0,1) \Longrightarrow A = \{a_n\} \cup \{a_0\}$ tiene un pto. acumulación $\Longrightarrow$ $A' \cap D(0,1) \neq \emptyset \Longrightarrow$ Por Principio identidad $f \equiv 0$ en $D(0,1) \Longrightarrow$ $f$ cte. en $\overline{D}(0,1)$ !!!

- $a_0 \in \mathbb{T} \Longrightarrow |f(a_0)| = 1$, pero $|f(a_0)| \overset{f \text{ continua}}{=} \lim_{n \to +\infty} |f(a_n)| = 0$ !!!

Por tanto, el nº de ceros es finito.

B)

$\subseteq$) Por Corolario del Principio del Módulo Máximo,

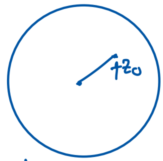
$\max\{|f(z)| / z\in \bar{D}(0,1)\} = \max\{|f(z)| / z\in \mathbb{T}\} = 1 \Rightarrow f(\bar{D}(0,1)) \subseteq \bar{D}(0,1)$

$\supseteq$) Como $f\in C(\bar{D}(0,1))$, $\bar{D}(0,1)$ compacto $\Rightarrow f(\bar{D}(0,1))$ compacto $\Rightarrow$ solo debemos probar $D(0,1)\subseteq f(\bar{D}(0,1))$

Sup. $\exists z_0\in D(0,1) \notin f(\bar{D}(0,1))$

Veamos $\exists w\in Fr(f(\bar{D}(0,1))) / |w|<1$.

Por a), $0\in f(D(0,1))$




Consideramos $A=\{0<t\leq 1 / tz_0\in f(\bar{D}(0,1))\}$

Sea $t_0=\sup(A)$, $t_0<1$ $\quad t_0z_0\in f(\bar{D}(0,1)) \Rightarrow |t_0z_0|<1$

Sup. $t_0z_0 \in f(\bar{D}(0,1)) \Rightarrow \exists\, \delta>0 / D(t_0z_0,\delta) \subseteq f(\bar{D}(0,1)) \Rightarrow$

$\left(t_0+\frac{\delta}{2}\right) z_0 \in f(\bar{D}(0,1))$ !!! pues $t_0=\sup(A)$ $\Rightarrow t_0z_0\in Fr(f(\bar{D}(0,1)))$

Tomando $w=t_0z_0 \Rightarrow \exists z\in \bar{D}(0,1) / f(z)=w$, $|w|<1 \Rightarrow z\in D(0,1)$ !!!

Pues por Tª Aplicación Abierta, $f$ lleva ptos interiores en interiores, pero $z$ es interior y $w\in Fr(f(\bar{D}(0,1)))$.

Por tanto, $z_0\in f(\bar{D}(0,1))$