MODELOS DE COMPUTACION

RELACION DE PROBLEMAS 5

1. Determinar una gramática que acepte el lenguaje $N(M)$ donde,

$$M = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset\}$$

   y donde

   $\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

   $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, \varepsilon)\}$

   $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$

   $\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, XX)\}$

   $\delta(q_1, a, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

   $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

   y el resto de transiciones son el conjunto vacio.

2. Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje

$$\{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i \mid i \geq 0\} \cup \{b^i \mid i \geq 0\}$$

   a) Por el criterio de estados finales.

   b) Por el criterio de pila vacía

   Indicar si el autómata es determinístico.

3. Obtener a partir de la gramática $G = (\{S, T\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, con

$$P = \{S \to abS, S \to cdT, T \to bT, T \to b\},$$

   un autómata con pila que acepta por el criterio de estados finales el lenguaje generado por esa gramática.

4. Demostrar que los siguientes lenguajes son libres del contexto y obtener para cada uno de ellos un autómata con pila no determinista que pueda ser usado como reconocedor:

   - $L_1 = \{a^p b^q \mid p, q \geq 1; p > q\}$,
   - $L_2 = \{a^p b^q \mid p, q \geq 1; p < q\}$,
   - $L_3 = \{a^p b^q a^r \mid p + q \geq r \geq 1\}$

5. Dado el lenguaje

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

- y haciendo uso de resultados matemáticos concretos, identifica a que tipos de lenguajes NO pertenece L,
- además encuentra, si es posible, un reconocedor para las cadenas de ese lenguaje.

6. Construir un autómata con pila que por el criterio de estados finales acepte el lenguaje de las palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ en las que el numero de 0 es el doble que el número de 1.

   Construir a partir del autómata una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere el mismo lenguaje.

7. Construir un autómata con pila que acepte el lenguage sobre el alfabeto $A=\{a,b\}$ de todas aquella palabras en las que el número de símbolos a es distinto del número de símbolos b. Construir una gramática en forma normal de Chomsky a partir de dicho autómata.

8. Dado $L=\{a^ib^jc^ka^i \mid i\geq 1, j\geq k\geq 1\}$ construir un autómata con pila que acepte dicho lenguaje por el criterio de pila vacía. Transformar dicho autómata en uno que lo acepte por el criterio de estados finales.

9. Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje:

$$L=\{a^ib^jc^kd^l \mid i+l=j+k\}$$

10. Sea el alfabeto $A=\{0,1\}$ y para $u\in\{0,1\}^*$, sea $\overline{u}$ la palabra obtenida a partir de u cambiando los 0 por 1 y los 1 por 0. Considerar el lenguaje $L=\{u\in\{0,1\}^* \mid u^{-1}=\overline{u}\}$.

    - Dar una gramática en forma normal de Chomsky que acepte L
    - Dar un autómata con pila que acepte L por el criterio de estados finales

11. Construir un autómata con pila que acepte el siguiente lenguaje:

$$L=\{0^r1^s : r\leq s\leq 2r\}$$

    - Construir, a partir de dicho autómata, una gramática libre de contexto que acepte el mismo lenguaje.
    - Eliminar símbolos y producciones inútiles de la gramática.

12. Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes:

    a) El conjunto de todas las palabras u con el mismo número de síbolos a y b, y tal que en todo prefijo el número de símbolos a es menor o igual que el número de símbolos b.

b) $L = \{a^i b^j c^k \, : \, (i = j) \vee (j = k)\}$.

Los autómatas deberán de ser determinísticos en caso de que sea posible.

13. Dado el autómata con pila $M = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, donde

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, AAZ_0)\}, \quad \delta(q_0, 0, A) = \{(q_0, AAA)\}$$

$$\delta(q_0, 0, B) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \quad \delta(q_1, \varepsilon, B) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, A)\}, \quad \delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, BZ_0)\}$$

$$\delta(q_0, 1, A) = \{(q_0, \varepsilon)\}, \quad \delta(q_0, 1, B) = \{(q_0, BB)\}$$

Encontrar una gramática libre de contexto que genere el mismo lenguaje que este autómata acepta por el criterio de pila vacía. Se valorará que se haga por el procedimiento explicado en clase.

14. Encontrar un autómata con pila que acepte el siguiente lenguaje

$$L_1 = \{uvv^{-1}u^{-1} \, : \, u, v \in \{0,1\}^*\}.$$

15. Construir un autómata con pila determinístico que reconozca el lenguaje $L = L_1 \cap L_2$ sobre el alfabeto $A = \{0,1,2\}$, donde

   - L_1 es el conjunto de todas las palabras $u \in A^*$ tales que en todo prefijo u' de u, la cantidad de símbolos 0 es mayor que la cantidad de 1
   - L_2 es el lenguaje de todas las palabras sobre A que contienen la subcadena 0102

16. Encontrar autómatas con pila para los siguientes lenguajes:

   - $L_1 = \{a^i b^j c^k \, : \, i + k = j, i, j, k \geq 0\}$
   - $L = \{0^n 1^m 2^p 0^q 1^n \, : \, q = p + m, m \geq 1, p \geq 0\}$

17. Dado el alfabeto $A = \{0,1\}$,

   a) Construir un autómata con pila que acepte por el criterio de estados finales el conjunto de palabras con el triple de ceros que de unos.

   b) Construir una gramática independiente del contexto asociada al autómata

18. Construir autómatas con pila (si es posible, deterministas) que acepten por el criterio de pila vacía los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

- $L = \{0^n 1^n \,:\, n \geq 1\} \cup \{0^n 1^{2n} \,:\, n \geq 1\}$
- $L = \{0^n 1^m 0^m 1^n \,:\, n,m \geq 1\}$

19. Dado el autómata con pila dado por las transiciones (R es el símbolo inicial):

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_1,0,R) = \{(q_1,BR)\} & \delta(q_1,1,R) = \{(q_1,GR)\} & \delta(q_1,0,B) = \{(q_1,BB)\} \\
\delta(q_1,1,B) = \{(q_1,GB)\} & \delta(q_1,0,G) = \{(q_1,BG)\} & \delta(q_1,1,G) = \{(q_1,GG)\} \\
\delta(q_1,1,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_2,0,B) = \{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_2,1,G) = \{(q_2,\varepsilon)\} \\
\delta(q_2,\varepsilon,R) = \{(q_2,\varepsilon)\} & \delta(q_1,\varepsilon,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,\varepsilon,B) = \{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,\varepsilon,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_1,0,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,0,B) = \{(q_2,B)\} \\
\delta(q_1,0,G) = \{(q_2,G)\} & \delta(q_1,1,R) = \{(q_2,R)\} & \delta(q_1,1,B) = \{(q_2,B)\}
\end{array}
$$

Construir una gramática independiente del contexto (siguiendo el procedimiento explicado en clase) que acepte el mismo lenguaje. Eliminar símbolos y producciones inútiles.

20. Construir autómatas con pila (si es posible, deterministas) que acepten por el criterio de estados finales los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    - $L = \{0^i 1^j \,:\, j \geq i \geq 1\}$
    - $L = \{0^i 1^j 0^i \,:\, i,j \geq 1\} \cup \{1^i 0^j 1^i \,:\, i,j \geq 1\}$

21. Construye un autómata con pila determinista por el criterio de estados finales que reconozca el lenguaje:

    $L = \{ucv \mid u,v \in \{a,b\}^+$ y nº de subcadenas $'ab'$ en u es igual al nº subcadenas $'ba'$ en $v\}$

    ¿Es posible encontrarlo por el criterio de pila vacía?

22. Sea el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a,b,c,d\}$, dado por las siguientes reglas:

    a) a y b son palabras del lenguaje.

    b) Cualquier sucesión no vacía de palabras del lenguaje es una palabra del lenguaje.

    c) Si u es una palabra del lenguaje, entonces $cudd$ es una palabra del lenguaje.

    Decid de qué tipo es el lenguaje generado. Según sea el tipo del lenguaje, crear un autómata finito minimal o un autómata con pila que lo acepten.

23. Describir autómatas con pila para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{a,b,c\}$ (si es posible hacerlos determistas e indicar si se ha conseguido):

    a) Palabras de longitud impar con una b en el centro.

b) $L = \{a^n b^m c^k \,:\, n = m \vee n \leq 3\}$

24. Supongamos un operador $\otimes$ que puede aparecer en el código de un lenguaje de programación con la siguiente estructura:

$$\otimes(u,v);$$

donde

- $u \in \{0,1\}^*$ es una cadena de símbolos binarios que determina:
  a) La operación que se ejecutará. Si el número de 0's en la cadena u es igual al números de 1's se realiza una suma, en caso contrario se hace un producto.
  b) El número de operandos de $\otimes$ (número de ocurrencias de la subcadena '10' en u).
- $v \in \{a,b,c\}^*$ es una cadena donde cada símbolo representa un operando de $\otimes$.

Construir, si es posible:

a) Un autómata finito determinista que reciba como entrada la cadena u y le indique al ordenador si realiza una suma (estado final) o si realiza un producto (estado no final).

b) Construir un autómata con pila determinista por el criterio de pila vacía definido sobre el alfabeto de entrada

$$A = \{'\otimes' \,,\, '(' \,,\, ')' \,,\, ',' \,,\, ';' \,,\, '0' \,,\, '1' \,,\, 'a'\}$$

que reciba como entrada una expresión del conjunto

$$\{\otimes(u,v); : u \in \{0,1\}^*, v \in \{a,b,c\}^*\}$$

y nos informe si está bien construida sintácticamente (de acuerdo con lo especificado anteriormente) y si el número de operandos es correcto.

25. Construir un autómata con pila (si es posible, determinista) que reocnozca el siguiente lenguaje: $L_1 = \{a^i b^j c^k \quad | \quad i = 2j \vee j = 2k\}$.

26. a) Construye una gramática libre de contexto que genere el siguiente lenguaje en el alfabeto $\{a,b,c,d\}$:
$L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+n \geq p+q\}$

b) Construye un autómata con pila determinista que reconozca las cadenas del anterior lenguaje L por el criterio de estados finales.

27. Construye un autómata con pila que acepte el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a,b\}$ de todas aquellas palabras en las que el número de símbolos a es distinto al número de símbolos b.

28. Dado el siguiente lenguaje libre de contexto: $L = \{(01)^i(10)^j \mid j \geq i \geq 1\}$

    a) Encuentra una gramática libre de contexto que lo genere.

    b) Transforma la gramática anterior a un autómata con pila que acepte las cadenas del lenguaje L por el criterio de pila vacía.

    c) Transforma el autómata con pila anterior para que acepte las cadenas por el criterio de estados finales.

    d) Encuentra un autómata con pila determinista que acepte las cadenas del lenguaje L por el criterio de estados finales.

1. Determinar una gramática que acepte el lenguaje $N(M)$ donde,

$$M = \{\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset\}$$

y donde

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$$

$$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, \varepsilon)\}$$

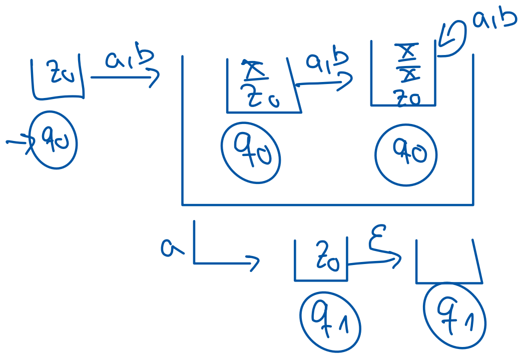
$$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$$

$$\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, XX)\}$$

$$\delta(q_1, a, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

y el resto de transiciones son el conjunto vacio.



$S \to BSa \mid \varepsilon$

$B \to a \mid b$

2. Construir un autómata con pila que acepte el lenguaje

$$\{a^i b^i \mid i \geq 0\} \cup \{a^i \mid i \geq 0\} \cup \{b^i \mid i \geq 0\}$$

a) Por el criterio de estados finales.

b) Por el criterio de pila vacía

A)

$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{Z_0, X, A, B\}, \delta, q_1, Z_0, \{q_3\})$

$\delta(q_1, a, Z_0) = \{(q_1, XZ_0), (q_3, AZ_0)\}$

$\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_3, BZ_0)\}$

$\delta(q_1, a, X) = \{(q_2, XX)\}$ ¿q_1?

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, b, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

$\delta(q_3, a, A) = \{(q_3, A)\}$

$\delta(q_3, b, B) = \{(q_3, B)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_3, Z_0)\}$

B)

$M = (\{q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, X, A, B\}, \delta, q_1, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_1, a, Z_0) = \{(q_1, XZ_0), (q_2, AZ_0)\}$

$\delta(q_1, b, Z_0) = \{(q_2, BZ_0)\}$

¿q_1?

$\delta(q_2, a, X) = \{(q_1, XX)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, b, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

¿q_1?

$\delta(q_2, a, A) = \{(q_2, A)\}$

$\delta(q_2, b, B) = \{(q_2, B)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, A) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

3. Obtener a partir de la gramática $G = (\{S,T\},\{a,b,c,d\},P,S)$, con

$$P = \{S \to abS, S \to cdT, T \to bT, T \to b\},$$

un autómata con pila que acepta por el criterio de estados finales el lenguaje generado por esa gramática.

$L = \{(ab)^i cd\, b^j \;/\; i \geq 0, j \geq 1\}$

Criterio de Estados Finales:

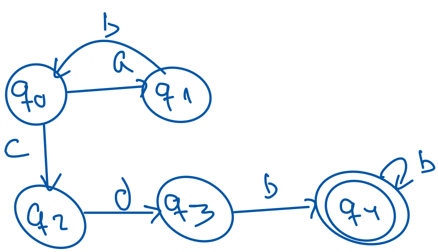
$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a,b,c,d\}, \{z_0\}, \delta, q_0, z_0, \{q_4\})$

$\delta(q_0, a, z_0) = \{(q_1, z_0)\}$ $\quad$ $\delta(q_0, c, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$

$\delta(q_1, b, z_0) = \{(q_0, z_0)\}$ $\quad$ $\delta(q_2, d, z_0) = \{(q_3, z_0)\}$

$\delta(q_3, b, z_0) = \{(q_4, z_0)\}$ $\quad$ $\delta(q_4, b, z_0) = \{(q_4, z_0)\}$

Vemos que es regular, por lo que $\exists$ AFD que admite lenguaje.



4. Demostrar que los siguientes lenguajes son libres del contexto y obtener para cada uno de ellos un autómata con pila no determinista que pueda ser usado como reconocedor:

- $L_1 = \{a^p b^q \mid p,q \geq 1; p > q\}$,

$S \to aS \mid aX$
$X \to aXb \mid ab$

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_1, XX)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
$\delta(q_2, b, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, b, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

- $L_2 = \{a^p b^q \mid p,q \geq 1; p < q\}$,

$S \to Sb \mid Xb$
$X \to aXb \mid ab$

$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX)\}$
$\delta(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_0, XX), (q_1, XX)\}$
$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

- $L_3 = \{a^p b^q a^r \mid p+q \geq r \geq 1\}$

$M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X, Y\}, S, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$
$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, X)\}$
$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, YZ_0)\}$
$\delta(q_0, b, X) = \{q_0, YX)\}$
$\delta(q_0, b, Y) = \{q_0, YY)\}$
$\delta(q_0, a, Y) = \{(q_1, Y)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, a, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
$\delta(q_1, a, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

5. Dado el lenguaje

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

A) ▪ y haciendo uso de resultados matemáticos concretos, identifica a que tipos de lenguajes NO pertenece L,

B) ▪ además encuentra, si es posible, un reconocedor para las cadenas de ese lenguaje.

A)

Sea $n \in \mathbb{N}$. $z = a^n b^n c^{2n}$ $|z| \geq n$. Considero descomposición

$z = uvw$ $\begin{cases} u = a^k \\ v = a^l \\ w = a^{n-k-l} b^n c^{2n} \end{cases}$ $\begin{matrix} l \geq 1 \\ k + l \leq n \end{matrix}$

Tomando $i = 2$, $uv^2w = a^{n+l} b^n c^{2n} \notin L$, pues $\begin{matrix} n+l+n \neq 2n \\ l \geq 1 \end{matrix}$ $\Rightarrow L$ no regular

B)

$M = (Q = \{q_0, q_1\}, A = \{a, b, c\}, B = \{X, Y, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ → Palabra vacía

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, X Z_0)\}$

$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, XX)\}$ → saltar a c's sin b's.

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, Y Z_0)\}$

$\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, YX)\}$ → Empezar a poner b's

$\delta(q_0, b, Y) = \{(q_0, YY), (q_1, YY)\}$ → Empezar a poner c's.

$\left.\begin{matrix} \delta(q_1, c, X) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, c, Y) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, \varepsilon)\} \end{matrix}\right\}$ añadir c's hasta terminar

8. Dado $L = \{a^i b^j c^k a^i \mid i \geq 1, j \geq k \geq 1\}$ construir un autómata con pila que acepte dicho lenguaje por el criterio de pila vacía. Transformar dicho autómata en uno que lo acepte por el criterio de estados finales.

Criterio de la pila vacía:

$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{Z_0, A, B\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, AZ_0)\}$

$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, AA)\}$

$\delta(q_1, b, A) = \{(q_2, BA)\}$

$\delta(q_2, b, B) = \{(q_2, BB)\}$