Probabilidad - 3er Curso (Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria ordinaria (21 de enero de 2022)

Apellidos, nombre:

PARTE 1 (2.5 puntos)

1. **(0.25 puntos)** Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una ley Binomial, $B(3, \frac{1}{2})$. Justificar que $P[X_1 + X_2 + X_3 = 8] = \frac{9}{2^9}$.

2. **(0.25 puntos)** Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley de Poisson, $P(3)$. Justificar que $P[X_1 + X_2 > 0] = \frac{e^6-1}{e^6}$.

3. Para predecir los valores de una variable aleatoria X a partir de los de otra variable aleatoria Y se considera un modelo lineal:

   a) **(0.50 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal considerado.

   b) **(0.75 puntos)** Si $x - y = 1$ y $2y - 3x = -1$ son las dos rectas de regresión para el vector (X,Y), se pide: identificar la recta de regresión del apartado anterior; obtener una medida de la bondad del ajuste y calcular la esperanza del vector (X,Y).

4. **(0.75 puntos)** Las componentes de un vector aleatorio continuo son variables aleatorias continuas. Sin embargo, en general, un conjunto de variables aleatorias continuas no da lugar a un vector aleatorio continuo. Justificar que este recíproco sí es cierto si consideramos un conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables aleatorias continuas independientes.

PARTE 2 (7.5 puntos)

1. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio continuo (X,Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x < 0, y < 0\}$$

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   d) **(0.50 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X - Y > 0$.

   e) **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.

   f) **(0.50 puntos)** Obtener una medida de la bondad del ajuste del apartado anterior.

2. **(2.5 puntos)** Dado un vector aleatorio (X,Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = exp\left(\frac{2t_1 + 4t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2}{2}\right)$$

   (a) **(0.75 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X,Y).

   (b) **(0.75 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y/X = 1$ y $X/Y = 0$.

   (c) **(1 punto)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y - X)$. Justificar que las variables aleatorias $2X$ y $Y - X$ tienen cierta asociación lineal en sentido negativo.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 1.b** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.
- Si necesitara obtener la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, realizar el cambio de variable unidimensional $x = \sin(t)$.
- $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$.
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$