Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Primera parte

1. Este ejercicio propone un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)e^x + b(t)$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) Se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = e^{-x}.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?

c) Se supone $a(t) = 1$, $b(t) = \frac{1}{t}$, $I =]-\infty, 0[$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(-1) = 2$. ¿Está definida en todo el intervalo I?

2. Se considera la familia de curvas del plano con la siguiente propiedad: el área del triángulo de vértices O, A y B se mantiene constante a lo largo de la curva. Los puntos de corte de los ejes coordenados con la recta tangente a la curva se designan por A y B. Encuentra la ecuación diferencial asociada a esta familia ¿Es posible expresarla en forma normal?

3. Se considera el dominio del plano $D =]0, \infty[\times]0, \infty[$. Se pide:

a) Determina los valores de α, β para los cuales la transformación $\varphi : D \to D$, $\varphi(x, y) = (u, v)$ definida por

$$u = x, \quad y = v^\alpha x^\beta$$

es un difeomorfismo.

b) Determina los valores de α, β para los cuales la transformación anterior convierte en variables separadas la ecuación

$$yf(xy) + xg(xy)y' = 0,$$

donde $f, g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ son funciones continuas arbitrarias.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Segunda parte.

1. Dada la ecuación

$$2y - 6x + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

se pide:

a) Comprueba que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(xy^2)$.

b) Resuelve implícitamente la ecuación.

c) Discute si existe una solución tal que $y(0) = 1$.

2. Dadas dos funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$ infinitamente derivables, se pide:

a) Demuestra que

$$\frac{d}{dt}W[f,g] = W[f',g] + W[f,g'], \quad t \in I.$$

b) Encuentra una fórmula que exprese la derivada segunda de $W[f,g]$ como suma de Wronskianos.

c) Encuentra una fórmula análoga a la del apartado anterior para la derivada de orden n con $n \geq 3$.

d) Se supone ahora que las funciones f y g solo admiten un número finito $k \geq 1$ de derivadas ¿Cuántas derivadas hacen falta en el apartado b)?

3. Identifica los cambios de variable $s = t$, $y = \Psi(x)$ que dejan invariante la ecuación

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x \in]0, \infty[.$$

En cada caso se precisarán las regiones de validez del cambio efectuado.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final. Tercera parte.

1. Por medio de la técnica de superposición y coeficientes indeterminados, calcula una solución particular de la ecuación
$$y'' - y' + y = (e^t + 2)^2.$$
Calcula la solución general.

2. En este ejercicio se pretende probar que la ecuación integral

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

admite al menos una solución continua $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Demuestra que la sucesión de funciones definida por la recurrencia

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x_n(s)ds, \quad t \in [0,1], n \geq 0$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$

b) Demuestra que la función límite $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es solución de la ecuación integral.

3. Se designa por Z al espacio de soluciones del sistema $x' = Ax$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se define la aplicación lineal

$$\Psi : Z \to \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

¿Es Ψ un isomorfismo?

3. Se designa por Z al espacio de soluciones del sistema $x' = Ax$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se define la aplicación lineal

$$\Psi : Z \to \mathbb{R}^2, \quad \Psi(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

¿Es Ψ un isomorfismo?

Como $x_2 \in C^1(I) \Rightarrow x_1 \in C^2(I)$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2' = x_1'' \Rightarrow x_1'' = x_1 \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$x_2(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_2 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \int_0^1 c_1 e^t + c_2 e^{-t} \, dt \\ \int_0^1 c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[c_1 e^t - c_2 e^{-t}\right]_0^1 \\ \left[c_1 e^t + c_2 e^{-t}\right]_0^1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 e - c_2 \cdot \frac{1}{e} - c_1 + c_2 \\ c_1 e + c_2 \cdot \frac{1}{e} - c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(e-1) + c_2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ c_1(e-1) + c_2\left(-1 + \frac{1}{e}\right) \end{pmatrix}$$

Dado que $\dim Z = \dim \mathbb{R}^2$, veamos si es inyectiva:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} c_1(e-1) + c_2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ c_1(e-1) + c_2\left(-1 + \frac{1}{e}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} e-1 & 1 - \frac{1}{e} \\ e-1 & -1 + \frac{1}{e} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e-1 & 1 - \frac{1}{e} \\ 0 & -2 + \frac{2}{e} \end{vmatrix} = (e-1)\left(-2 + \frac{2}{e}\right) = -2e + 2 + 2 - \frac{2}{e} = 4 - 2e - \frac{2}{e} \neq 0$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow x$ inyectiva.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
18 de Junio de 2018. Examen Final.

1. Este ejercicio propone un método para la resolución de las ecuaciones diferenciales del tipo

$$(*) \quad x' = a(t)e^x + b(t)$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

a) Se definen las nuevas variables

$$s = t, \quad y = e^{-x}.$$

Encuentra dominios del plano D y $\hat{D}$ de manera que la transformación $(t, x) \in D \mapsto (s, y) \in \hat{D}$ sea un cambio admisible para la ecuación $(*)$.

b) Transforma la ecuación $(*)$ mediante el cambio del apartado anterior. ¿Qué tipo de ecuación se obtiene?

c) Se supone $a(t) = 1$, $b(t) = \frac{1}{t}$, $I =]-\infty, 0[$. Encuentra la solución de $(*)$ que cumple $x(-1) = 2$. ¿Está definida en todo el intervalo I?

2. Se considera la familia de curvas del plano con la siguiente propiedad: el área del triángulo de vértices O, A y B se mantiene constante a lo largo de la curva. Los puntos de corte de los ejes coordenados con la recta tangente a la curva se designan por A y B. Encuentra la ecuación diferencial asociada a esta familia ¿Es posible expresarla en forma normal?

3. Dada la ecuación

$$2y - 6x + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

se pide:

a) Comprueba que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(xy^2)$.

b) Resuelve implícitamente la ecuación.

c) Discute si existe una solución tal que $y(0) = 1$.

4. Por medio de la técnica de superposición y coeficientes indeterminados, calcula una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' + y = (e^t + 2)^2.$$

Calcula la solución general.

5. En este ejercicio se pretende probar que la ecuación integral

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

admite al menos una solución continua $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Demuestra que la sucesión de funciones definida por la recurrencia

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x_n(s)ds, \quad t \in [0,1], n \geq 0$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$

b) Demuestra que la función límite $x(t) = \text{lím}_{n\to\infty} x_n(t)$ es solución de la ecuación integral.

6. Identifica los cambios de variable $s = t$, $y = \Psi(x)$ que dejan invariante la ecuación

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x \in]0,\infty[.$$

En cada caso se precisarán las regiones de validez del cambio efectuado.

3. Dada la ecuación

$$2y - 6x + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0,$$

se pide:

a) Comprueba que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = m(xy^2)$.

b) Resuelve implícitamente la ecuación.

c) Discute si existe una solución tal que $y(0) = 1$.

A)

sea $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

sea $P(x,y) = 2y - 6x$, $Q(x,y) = 3x - \frac{4x^2}{y} \quad \in C^1(\Omega)$

$$\mu \text{ f.i.} \iff \begin{cases} \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \\ \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \iff \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \iff \end{cases}$$

$$2yx\, m'(xy^2) \cdot P + 2m(xy^2) = y^2 m'(xy^2) Q + m(xy^2)\left(3 - \frac{8x}{y}\right) \iff$$

$$\frac{m'(xy^2)}{m(xy^2)} = \frac{1 - \frac{8x}{y}}{2yxP - y^2 Q} = \frac{1 - \frac{8x}{y}}{2yx(2y - 6x) - y^2\left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)} =$$

$$\frac{1 - \frac{8x}{y}}{4xy^2 - 12x^2y - 3xy^2 + 4x^2y} = \frac{1 - \frac{8x}{y}}{xy^2 - 8x^2y} = \frac{1 - 8x/y}{xy^2(1 - 8x/y)} =$$

$$\frac{1}{xy^2} = f(xy^2)$$

Tomando $\xi = xy^2$, $m' = f(\xi)\, m \implies m(\xi) = e^{F(\xi)} \quad \forall \xi \neq 0 \implies$

Tomamos $\xi \in \mathbb{R}^+ \implies x \in \mathbb{R}^+$

$$F(\xi) = \int \frac{1}{\xi}\, d\xi = \ln|\xi| = \ln|xy^2| = \ln(xy^2)$$

Por tanto, $\mu(x,y) = m(xy^2) = e^{\ln(xy^2)} = xy^2$

B)

$$xy^2\left(2y-6x+\left(3x-\frac{4x^2}{y}\right)y'\right) =$$

$$2xy^3-6x^2y^2 + (3x^2y^2-4x^3y)\,y' = 0 \quad \forall (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$$

Sea $P(x,y)=2xy^3-6x^2y^2$, $Q(x,y)=(3x^2y^2-4x^3y)\in C^1((\mathbb{R}^+)^2)$

Dado que se cumple cond. exactitud y $(\mathbb{R}^+)^2$ estrellado,

$\exists U\in C^2((\mathbb{R}^+)^2)$ / $\frac{\partial U}{\partial x}=P$ $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=P \Rightarrow U(x,y)=\int 2xy^3-6x^2y^2\,dx + \varphi(y) = x^2y^3-2x^3y^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)= 3x^2y^2-4x^3y + \varphi'(y) = 3x^2y^2-4x^3y \Rightarrow \varphi(y)=C,\ C\in\mathbb{R}$$

Tomamos $\varphi(y)=0$

$$U(x,y) = x^2y^3-2x^3y^2$$

La ecuación se expresa como $\frac{d}{dx}(U(x,y))=0 \Rightarrow$

$U(x,y)=C$

La sol. vendrá definida por la ecuación, con $C=U(x_0,y_0)$,

$(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}^+)^2$, si $\frac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)\neq 0$, en un entorno de (x_0,y_0)

C)

Vemos $(0,1)\in(\mathbb{R}^+)^2$, $Q(0,1)=0 \Rightarrow \nexists$ sol. que cumpla esa cond. inicial.

4. Por medio de la técnica de superposición y coeficientes indeterminados, calcula una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' + y = (e^t + 2)^2.$$

Calcula la solución general.

$y'' - y' + y = e^{2t} + 4 + 4e^t$

- $y'' - y' + y = e^{2t}$

  Sea $y(t) = ae^{2t}$

  $4ae^{2t} - 2ae^{2t} + ae^{2t} = 3ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow a = 1/3 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$

- $y'' - y' + y = 4 \Rightarrow y(t) = 4$

- $y'' - y' + y = 4e^t$

  Sea $y(t) = ae^t$

  $ae^t - ae^t + ae^t = 4e^t \Rightarrow a = 4 \Rightarrow y(t) = 4e^t$

Por tanto, una sol. particular es $y_*(t) = 4 + \frac{1}{3}e^{2t} + 4e^t$

- $y'' - y' + y = 0$

  Buscamos sol $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

  $\lambda^2 e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

  $y_1(t) = e^{\frac{t}{2}} \cdot \operatorname{Re}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}\right) = e^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

  $y_2(t) = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right) = e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

  $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} = \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$

Por tanto, la sol. general es:

$y(t) = e^{t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + 4 + \frac{1}{3}e^{2t} + 4e^t +$

5. En este ejercicio se pretende probar que la ecuación integral

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x(s)ds, \quad t \in [0,1]$$

admite al menos una solución continua $x : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Demuestra que la sucesión de funciones definida por la recurrencia

$$x_0(t) = 0, \quad x_{n+1}(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)x_n(s)ds, \quad t \in [0,1], n \geq 0$$

converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$

b) Demuestra que la función límite $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ es solución de la ecuación integral.

A)

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left|e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 0\, ds\right| = e^t \leq e \quad \forall t \in [0,1]$$

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-S)\,(x_1(s) - x_0(s))ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |t-s|e\, ds \leq \frac{1e}{2}\int_0^1 |t|+|s|ds \leq \frac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$|x_3(t) - x_2(t)| = \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)\,(x_2(s) - x_1(s))ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |t-s|\left|\frac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{2}\right)\right|ds \leq \frac{1}{2^2}e\left(1+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 |t|+|s|ds \leq \frac{1}{2^2}e\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

Veamos por inducción $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2^n}e\left(1+\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}e\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^n}{2^{2n}}e = a_n$

- $n=0$: $|x_1(t) - x_0(t)| \leq e$ ✓
- Supongamos válido para n y probamos para $n+1$:

$$|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)| = \left|\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-S)\,(x_{n+1}(s) - x_n(s))ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |t-s|\,|x_{n+1}(s) - x_n(s)|ds \leq$$

$$\frac{1}{2}\frac{3^n}{2^{2n}}e\int_0^1 |t-s|ds \leq \frac{1}{2}\frac{3^n}{2^{2n}}e\int_0^1 |t|+|s|ds \leq \frac{1}{2}\frac{3^n}{2^{2n}}e\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3^n}{2^{2n}}e = \frac{3^{n+1}}{2^{2n+2}}e$$

Por Crit. Cociente,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e3^{n+1}}{2^{2n+2}}}{e3^n/2^{2n}} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \Rightarrow$$

$\{x_n\} \to x$ c.u. por Test Weierstrass.

B)

Dado que $\{x_n\} \to x$ cu.

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}(t) = x(t) = \lim_{n\to+\infty} e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)\, x_n(s)\, ds =$$

$$e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s) \overset{*}{\lim_{n\to+\infty}} x_n(s)\, ds = e^t + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(t-s)\, x(s)\, ds$$

* Dado que sen, $x \in C([0,1])$, por la continuidad del producto, $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(t-s)\, x_n(s) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(t-s) \lim_{n\to+\infty} x_n(s) =$

$$\operatorname{sen}(t-s) \lim_{n\to+\infty} x_n(s)$$