Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{z^2 - t}}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\{\alpha_n\} \subset \Omega$ una sucesión convergente a $\alpha \in \Omega$. Sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(\alpha_n) = g^k(\alpha_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sea f una función entera y sea $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{f(0)\})$ verificando que $g\big(f(z)\big) = \frac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

- Probar que f es inyectiva en $\mathbb{C}^*$.
- Probar que f es un polinomio de grado uno.
- Deducir la forma que debe tener g.

Granada, 15 de julio de 2021