Algebra II

Relación 4

Ejercicio 1. Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de composición entonces G tiene una serie de composición.

Ejercicio 2. Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y sólo si G es finito.

Ejercicio 3. Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Ejercicio 4. Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G entonces $l(G) = l(H) + l(G/H)$.

Ejercicio 5. Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:
a) El grupo diédrico D_4; b) El grupo alternado A_4;
c) El grupo simétrico S_4; d) El grupo diédrico D_5;
e) El grupo de cuaternios Q_2; f) El grupo cíclico C_{24};
g) El grupo simétrico S_5.

Ejercicio 6. Sea G un grupo finito, y

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = \{1\}$$

una serie normal de G. Demostrar que

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right), \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}\right).$$

Ejercicio 7. Si $G_1, G_2 \ldots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i), \quad fact(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i).$$

Ejercicio 8. Sea G un grupo cíclico de orden p^n con p primo. Demostrar que $l(G) = n$ y que $fact(G) = (\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p, \overset{(n)}{\ldots}, \mathbb{Z}_p)$

Ejercicio 9. Sea G un grupo cíclico de orden n. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(G) = e_1 + \cdots + e_r,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}).$$

Aplica el resultado cuando $n = 12$ y compara su longitud y factores de composición con los del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

Ejercicio 10. Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que

$$l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1,$$

y que

$$fact(G) = (\mathbb{Z}_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, \mathbb{Z}_{p_r}, \mathbb{Z}_2).$$

Ejercicio 11. Demostrar que D_4, D_5, S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

Ejercicio 12. Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que G/H y G/K son ambos resolubles. Demostrar que $G/(H \cap K)$ también es resoluble.

Ejercicio 13. Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial A de H que es abeliano y normal en G.