Ejercicio 1.- **(a) Dado el grupo abeliano** $A = \langle x, y, z;\ \begin{array}{l} 6x - 4y + 4z = 0 \\ 8x + 4y + 6z = 0 \\ 6x + 4y + 4z = 0 \end{array} \rangle$. **Calcula sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, el orden de** A **y el rango de su parte libre. (1)**

Sea la matriz de relaciones

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & -28 & -2 \\ 0 & -20 & -2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

mcd = 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & -2 \\ 0 & -20 & -2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -28 \\ 0 & -2 & -20 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

mcd = 2

$d_1 = d_2 = 2 \quad d_3 = 8 \qquad DE = \{2, 2, 2^3\} \qquad A \underset{DC}{\overset{DCP}{\cong}} C_2 \oplus C_2 \oplus C_8 \qquad |A| = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32$

Rango parte libre = rg(M) − nº generadores = 0

(b) Escribe las descomposiciones cíclicas y cíclicas primárias de todos los grupos abelianos de orden 108. (1)

$|G| = 108 = 2^2 \cdot 3^3$

1) $DE = \{2^2, 3^3\}$ FI: $d_1 = 108$ $\qquad G \overset{DCP}{\cong} C_4 \oplus C_{27} \overset{DC}{\cong} C_{108}$

2) $DE = \{2, 2, 3^3\}$ FI: $d_1 = 2, d_2 = 54$ $\qquad G \overset{DCP}{\cong} C_2 \oplus C_2 \oplus C_{27} \overset{DC}{\cong} C_2 \oplus C_{54}$

3) $DE = \{2^2, 3^2, 3\}$ FI: $d_1 = 3, d_2 = 36$ $\qquad G \overset{DCP}{\cong} C_4 \oplus C_9 \oplus C_3 \overset{DC}{\cong} C_3 \oplus C_{36}$

4) $DE = \{2^2, 3, 3, 3\}$ FI: $d_1 = 3, d_2 = 3, d_3 = 12$ $\qquad G \overset{DCP}{\cong} C_4 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \overset{DC}{\cong} C_3 \oplus C_3 \oplus C_{12}$

5) $DE = \{2, 2, 3^2, 3\}$ FI: $d_1 = 6 \ d_2 = 18$ $\qquad G \overset{DCP}{\cong} C_2 \oplus C_2 \oplus C_9 \oplus C_3 \overset{DC}{\cong} C_6 \oplus C_{18}$

6) $DE = \{2, 2, 3, 3, 3\}$ FI: $d_1 = 3, d_2 = d_3 = 6$ $\qquad G \cong C_2 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_3 \oplus C_3 \overset{DC}{\cong} C_3 \oplus C_6 \oplus C_6$

(c) Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria del grupo abeliano $Aut(C_{16})$. **(1)**

$|Aut(C_{16})| = \varphi(16) = \varphi(2^4) = 2^3(2-1) = 8$

$Aut(C_{16}) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{16}) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$o(1) = 1 \quad o(3) = 4 \quad o(5) = 4 \quad o(7) = 2 \quad o(9) = 2 \quad o(11) = 4 \quad o(13) = 4 \quad o(15) = 2$

Los grupos abelianos de orden 8 son C_8, $C_2 \oplus C_4$, $C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$

Como $Aut(C_{16})$ no tiene elementos de orden 8 y sí de orden 4, $Aut(C_{16}) \not\cong C_8, C_2 \oplus C_2 \oplus C_2$

$\Rightarrow Aut(C_{16}) \cong C_2 \oplus C_4$

Ejercicio 2.- **(a) Sea $\sigma = (234)(123) \in S_5$ calcula σ^{123}. (0,5)**

$\sigma = (234)(123) = (13)(24) \Rightarrow o(\sigma) = 2 \Rightarrow \sigma^{122}\sigma = \sigma$

(b) **Calcula el número de 3-subgrupos de Sylow de S_5. (1,5)**

$|S_5| = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 40$

$n_3 = 1, 4, 10, 40 \Rightarrow \exists P_3^i \leq G$ 3-SS / $|P_3^i| = 3$ $i \in A = \{1 .. n_3\} \Rightarrow P_3^i \cap P_3^j = \{1\}$ $\forall i \neq j$

El nº elementos de orden 3 en S_5 es $\frac{V_5^3}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3} = 20$

Por 2º Tª Sylow, todo 3-grupo está contenido en un 3-SS $\Rightarrow \left|\bigcup_{i \in A} P_3^i\right| = 20 + 1$

$\Rightarrow$ Como en cada 3-SS hay 2 elementos de orden 3, $n_3 = \frac{20}{2} = 10$

Ejercicio 3.- (a) **Prueba que hay sólo un grupo de orden 885 que además es abeliano. (2)**

$|G| = 885 = 3 \cdot 5 \cdot 59$

$n_3 | 5 \cdot 59$, $n_3 \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow n_3 = 1, 295 \Rightarrow \exists P_3 \leq G$ 3-SS / $|P_3| = 3$

$n_5 | 3 \cdot 59$, $n_5 \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow n_5 = 1 \Rightarrow \exists_1 P_5 \trianglelefteq G$ 5-SS / $|P_5| = 5$

$n_{13} | 3 \cdot 5$, $n_{13} \equiv 1 \mod 13 \Rightarrow n_{13} = 1 \Rightarrow \exists_1 P_{13} \trianglelefteq G$ 13-SS / $|P_{13}| = 13$

Claramente $H, K \trianglelefteq G \Rightarrow HK \trianglelefteq G$, pues $\forall hk \in HK$, $\forall x \in G$, $xhkx^{-1} = \underset{H}{xhx^{-1}}\,\underset{K}{xkx^{-1}} \in HK$

Por tanto, $P_3 \leq G$, $P_5P_{13} \trianglelefteq G$, $P_3 \cap (P_5P_{13}) = \{1\}$, $|P_3(P_5P_{13})| = |G| \Rightarrow P_3(P_5P_{13}) = G$

$G \cong (P_5P_{13}) \rtimes P_3$

Sean las acciones $P_3 \cong C_3 \xrightarrow{\theta} Aut(P_5P_{13}) \cong Aut(C_{295})$

$C_3 = \langle a / a^3 = 1 \rangle$ $Aut(C_{295}) = \{f_i : C_{295} \to C_{295} / f_i(x) = x^i \ \forall i \in U(\mathbb{Z}_{295})\}$

se verifica que $a^3 = 1 \Rightarrow \theta^3(a) = 1$ por ser morfismo $\Rightarrow$

$o(\theta) \mid |Aut(C_{295})| = \varphi(295) = \varphi(5)\varphi(59) = 4 \cdot 58 = 232$

$o(\theta) = 1, 3 | 232 \Rightarrow o(\theta) = 1 \Rightarrow$ Acción trivial con morfismo asociado

$\theta : C_3 \to Aut(C_{295})$ / $\theta(a)(b) = aba^{-1} = b \Rightarrow$

$G = \langle a, b / a^3 = 1, b^{295} = 1, ab = ba \rangle \cong C_3 \times C_{295} \cong C_{885}$

(b) **Prueba que todo grupo de orden 351 es un producto semidirecto. (1,5)**

$|G| = 351 = 3^3 \cdot 13$

$n_3 | 13 \quad n_3 \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow n_3 = 1, 13 \Rightarrow \exists P_3 \leq G$ 3-ss / $|P_3| = 27$

$n_{13} | 27 \quad n_{13} \equiv 1 \bmod 13 \Rightarrow n_{13} = 1, 27 \Rightarrow \exists P_{13} \leq G$ 13-ss / $|P_{13}| = 13$

• $n_{13} = 27 \Rightarrow \exists P_{13}^i \leq G$ 13-ss / $|P_{13}^i| = 13 \quad i = 1..27 \Rightarrow P_{13}^i \cap P_{13}^j = \{1\} \ \forall i \neq j \Rightarrow$
Por 2º Tª Sylow, todos los elementos de orden 13 están en 13-ss $\Rightarrow$
$\left|\bigcup_{i=1}^{13} P_{13}^i\right| = 1 + 12 \cdot 27 = 325 \Rightarrow$ hay restantes $351 - 325 = 26$ elementos de orden
3, 9 ó 27 $\Rightarrow$ Necesariamente $n_3 = 1 \Rightarrow \exists_1 P_3 \trianglelefteq G$ 3-ss / $|P_3| = 27$

• $n_{13} = 1 \Rightarrow \exists_1 P_{13} \trianglelefteq G$ 13-ss / $|P_{13}| = 13$

Por tanto, $P_{13} \trianglelefteq G \wedge P_3 \leq G \quad \vee \quad P_{13} \leq G \wedge P_3 \trianglelefteq G$,

con $|P_{13}P_3| = |G| \Rightarrow P_{13}P_3 = P_3P_{13} = G \quad P_{13} \cap P_3 = \{1\}$

• $P_{13} \trianglelefteq G, P_3 \leq G \Rightarrow G \cong P_{13} \rtimes P_3$

• $P_{13} \leq G, P_3 \trianglelefteq G \Rightarrow G \cong P_3 \rtimes P_{13}$

(c) **Calcula todos los productos semidirectos $C_{13} \rtimes C_{27}$. ¿Cuantos hay salvo isomorfismo? (1,5)**

Sean los morfismos asociados al producto semidirecto

$$C_{27} \xrightarrow{\theta} Aut(C_{13}) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{13}) = \{1..12\}$$

$C_{27} = \langle a / a^{27} = 1 \rangle \qquad |Aut(C_{13})| = \varphi(13) = 12$

θ morfismo $\Rightarrow \theta^{27}(a) = 1 \Rightarrow O(\theta) = 1, 3, 9, 27 \mid 12 \Rightarrow O(\theta) = 1, 3$

$O(\theta) = 1 \Rightarrow$ Acción trivial $\quad G = C_{13} \times C_{27}$

$O(\theta) = 3 \Rightarrow \theta(a)(b) = b^3 \vee \theta(a)(b) = b^9$

$G_2 = \langle a, b / a^{27} = 1 \quad b^{13} = 1, \quad aba^{-1} = b^3 \rangle$

$G_3 = \langle c, d / c^{27} = 1 \quad d^{13} = 1, \quad cdc^{-1} = d^9 \rangle$

Sea $f : G_3 \longrightarrow G_2 \mid f(c) = a^2$
$f(d) = b$

$(a^2)^{27} = 1 \quad b^{13} = 1$

$a^2 b a^{-2} = a b^3 a^{-1} = (aba^{-1})^3 = b^9$

Claramente $\operatorname{Im} f = \langle a^2, b \rangle = G_2$, $|G_3| = |G_2| \Longrightarrow G_3 \cong G_2$

Por tanto, $C_{13} \rtimes C_{27} = C_{13} \times C_{27} \vee \langle a, b \mid a^{27} = 1, b^{13} = 1, aba^{-1} = b^3 \rangle$