Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, se tiene

$$f'(1/n)g(1/n) - f(1/n)g'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\, \mathrm{e}^{-at}\,.$$

Ejercicio 3. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t+z)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 9 de junio de 2018

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, se tiene

$$f'(1/n)g(1/n) - f(1/n)g'(1/n) = 0.$$

¿Qué se puede afirmar sobre f y g?

Supongamos $g \not\equiv 0$

Sea $h(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ $\quad \forall z \in \Omega = D(0,1) \setminus Z(g)$

$h(\frac{1}{n}) = \left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'\Big|_{z=\frac{1}{n}} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Sea $A = \{\frac{1}{n} \mid 2 \leq n \in \mathbb{N}\}$

Sup. $|Z(g)| = \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \in Z(g)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in Z'(g)$!!!

Absurdo por Principio de Ceros Aislados

Por tanto, $\exists m \in \mathbb{N} / \forall n \geq m$ $\frac{1}{n} \in \Omega$, $h(\frac{1}{n}) = 0$

Claramente $A' \neq \emptyset \Rightarrow A' \cap \Omega \neq \emptyset$, y $h \in \mathcal{H}(\Omega) \overset{\text{Principio Identidad}}{\Longrightarrow} h(z) = 0 \ \forall z \in \Omega$

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ cte $\Rightarrow f(z) = k g(z)$ $k \in \mathbb{C}$ $\forall z \in \Omega$

No está del todo correcto