Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convcatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 2. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f(g(1/n)) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Granada, 22 de junio de 2023

Ejercicio 2. (**2.5 + 1.5 puntos**) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ y supongamos que f diverge en 0 y en ∞. Probar que f se anula en algún punto de $\mathbb{C}^*$. (**Extra. 1.5 puntos**) Demostrar que, de hecho, f se anula al menos dos veces (contando multiplicidad) y que tiene un número finito de ceros.

Supongamos $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$. Definimos $g: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ / $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

$g(0) = 0$

Claramente g cont., pues $g(0) = 0 = \lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \dfrac{1}{f(z)}$, por ser f divergente en 0.

$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*) \Rightarrow g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*), \\ g \in C(\{0\}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Tª Extensión Riemann

Como $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, y $\lim_{z \to \infty} g(z) = 0 \Rightarrow g$ acotada, Por Tª Liouville, g cte

Contradicción, pues f no cte (diverge en 0 e ∞) $\Longrightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ /

$f(z_0) = 0$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

A)

Sea el camino $\gamma_n : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \gamma_n(t) = t$

Sea $\Phi_n : \gamma^* \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \Phi_n(t,z) = \dfrac{\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)}{1+t^4}$

Claramente Φ continua por ser cociente de continuas.

Además, $\forall t \in \gamma^*$, $(\Phi_n)_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, (\Phi_n)_t(z) = \Phi_n(t,z)$ es holomorfa por ser cociente de holomorfas.

Por la Holomorfía de Integrales Dependientes de Parámetros, $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, f_n(z) = \displaystyle\int_n^{n+1} \Phi_n(t,z)\, dt$ es entera.

B)

$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall z \in \mathbb{C}$, $|f_n(z)| \leq \underbrace{\ell([n, n+1])}_{=1} \|\Phi_n\|_\infty \Longrightarrow$

$$|f_n(z)| \leq \frac{|\cos(t+z^2) + \operatorname{sen}(t^2 - z)|}{|1+t^4|} \leq \frac{1}{2} \frac{\left| e^{i(t+z^2)} + e^{-i(t+z^2)} + e^{i(t^2-z)} - e^{-i(t^2-z)} \right|}{1+n^4} \leq$$

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-\operatorname{Im}(z^2)} + e^{\operatorname{Im}(z^2)} + e^{\operatorname{Im}(z)} + e^{-\operatorname{Im}(z)}}{1+n^4}$$

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $\varphi_1 : K \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \varphi_1(z) = |\operatorname{Im}(z^2)|$
$\varphi_2 : K \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \varphi_2(z) = |\operatorname{Im}(z)|$

Como $\varphi_1, \varphi_2 \in C(K) \Longrightarrow \varphi_1(K), \varphi_2(K)$ compacto $\Longrightarrow \exists M_1, M_2 \geq 0 \,/$
$\varphi_1(z) \leq M_1,\ \varphi_2(z) \leq M_2 \quad \forall z \in K$

$$e^{-\operatorname{Im}(z^2)} + e^{\operatorname{Im}(z^2)} + e^{\operatorname{Im}(z)} + e^{-\operatorname{Im}(z)} \leq 2e^{M_1} + 2e^{M_2} \quad \forall z \in K$$

Por tanto, $|f_n(z)| \leq \dfrac{e^{M_1} + e^{M_2}}{1+n^4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in K$

Por criterio de comparación por paso al límite, comparamos con $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$, que es convergente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{1+n^4} = 1 > 0 \implies \sum_{n\geq 0} \frac{e^{M_1}+e^{M_2}}{1+n^4} \text{ converge}$$

Por test Weierstrass, $\sum_{n\geq 0} f_n$ c.u. y c.a. en $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto

Como $\mathbb{C} = \mathbb{C}^\circ \implies \mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \implies$ conservamos c.a. $\forall z \in \mathbb{C}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{f_n\} \xrightarrow[\forall K \subseteq \mathbb{C} \text{ compacto}]{\text{c.u.}} f \implies$

Por T^a Convergencia de Weierstrass para series, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f(g(1/n)) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

$f \circ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow f \circ g \in C(\mathbb{C}) \Rightarrow (f \circ g)(0) = 0$

$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid (f \circ g)(z) = z^3 \} = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$
$A' \neq \emptyset$
$\left.\right\} \xRightarrow{\text{Principio Identidad}} (f \circ g)(z) = z^3 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Es claro g no es cte.

Supongamos que g es entera no polinómica.

Por corolario de Casorati, $\forall r > 0$, $g(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,r))$ es denso en $\mathbb{C}$, lo que nos permite tomar una sucesión $\{z_n\} \to \infty \mid g(z_n) \to z_0$ fijo

$(f \circ g)(z_n) = z_n^3 \to \infty$, pero $(f \circ g)(z_n) \to f(z_0) \in \mathbb{C}$!!! $\Rightarrow$

g pol. no cte. por red. al absurdo $\Rightarrow$ g sobreyectiva por T^a Fundamental del Álgebra.

Otra vía: Probar g diverge en ∞:

sea $\{z_n\} \to \infty$, $f(g(z_n)) = z_n^3 \to \infty$

$\{g(z_n)\}$ puede tener parcial acotada? NO, pues si fuera así

$\exists \{z_{\sigma(n)}\}$ parcial de $\{z_n\} \mid \{g(z_{\sigma(n)})\} \to w_0 \in \mathbb{C}$ convergente. $\Rightarrow$

$\underbrace{\{f(g(z_{\sigma(n)}))\}}_{f(w_0)} = \{z_{\sigma(n)}^3\} \to \infty$!!!

Veamos f polinomio.

sea $\{w_n\} \to \infty \xRightarrow{g \text{ sobreyectiva}} \exists z_n \in \mathbb{C} \mid g(z_n) = w_n$

$\{w_n\} \to \infty$
$g(z_n) = w_n$
sup. $\{z_n\} \not\to \infty \Rightarrow \exists \{z_{\sigma(n)}\} \to z_0 \Rightarrow \underbrace{\{g(z_{\sigma(n)})\}}_{\{w_{\sigma(n)}\} \to \infty} \to g(z_0)$!!!

Por tanto, $\{z_n\} \to \infty$

$\infty \leftarrow z_n^3 = \{f(w_n)\} \quad \forall \{w_n\} \to \infty \xRightarrow{\text{Ej. rel. 9}} f$ es polinomio

$gr(f \circ g) = 3 = gr(f) \, gr(g)$ ∎