a_{n+1}/a_n

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}\, dt.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\,\mathrm{e}^{-at}.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Probar que una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ que diverge en cero y en infinito tiene al menos un cero. Probar además que el número de ceros de f es finito y mayor o igual que 2 (contando multiplicidad).

Ejercicio 4. (2.5) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0)=0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Probar que $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ o $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)| : z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

Granada, 10 de junio de 2024

Ejercicio 1. **(2.5 puntos)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_1^2 \frac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}\, dt.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y que su suma es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

A)

Sea $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$

Sea el camino $\gamma_n : [1,2] \to \mathbb{C} \;/\; \gamma_n(t) = t \quad \forall n \in \mathbb{N}$

sea $\Phi_n : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C} \;/\; \Phi_n(t,z) = \dfrac{\log(nz+t^2)}{n^2+t^2}$

claramente Φ_n cont. por ser cociente de continuas $\forall n \in \mathbb{N}$.

Además, $\forall t \in \gamma^*$, $(\Phi_n)_t : \Omega \to \mathbb{C} \;/\; (\Phi_n)_t(z) = \Phi_n(t,z)$ es holomorfa por ser cociente de holomorfas.

Por tanto, por Tª Holomorfía de Integrales Dependientes de Parámetros,

$f_n : \Omega \to \mathbb{C} \;/\; f_n(z) = \int_\gamma \Phi_n(t,z)\, dz$ es holomorfa $\forall n \in \mathbb{N}$

B)

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f_n(z)| \leq \ell([1,2])\, \|\Phi_n\|_\infty = \|\Phi_n\|_\infty =$

$\max\{ |\Phi_n(t,z)| \;/\; t \in \gamma^* \}$

$$|f_n(z)| \leq \frac{|\log(nz+t^2)|}{n^2+t^2} \leq \frac{\ln|nz+4| + i\pi}{1+n^2} \leq \frac{\ln(n|z|+4) + i\pi}{n^2} \leq$$

$$\frac{\ln(n|z|+4) + i\pi}{1+n^2}$$

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $\varphi : K \to \mathbb{C} \;/\; \varphi(z) = |z|$

$\varphi \in C(K) \Rightarrow \varphi(K)$ compacto $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}_0^+ \;/\; \varphi(z) \leq M \quad \forall z \in K$

$\ln(n|z|+4) \leq \ln(n\varphi(z)+4) \leq \ln(nM+4) \quad \forall z \in K$

Por tanto, $\left| f_n(z) \right| \leq \|\Phi_k\|_\infty \leq \dfrac{\ln(nM+4)}{n^2}$

Por Crit. Comparación por paso al Límite con $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln(nM+4)}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{n^2} \ln(nM+4) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n^{3/2}\cdot n^{1/2}}{n^2}}_{\downarrow\, 1} \frac{\ln(nM+4)}{n^{1/2}} = 0 \implies \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(nM+4)}{n^2} \text{ converge}$$

Por Test Weierstrass, $\sum_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[\forall K \subseteq \mathbb{C} \text{ compacto}]{\text{c.u.}} f : K \to \mathbb{C}$

Como $\Omega = \Omega^\circ = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, conservamos convergencia absoluta a $f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Como $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y por lo anterior, por Crit. Convergencia de Weierstrass para Series, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$