Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
16 de Marzo de 2017

NOMBRE:

1. Se considera la familia de curvas

$$xy = c$$

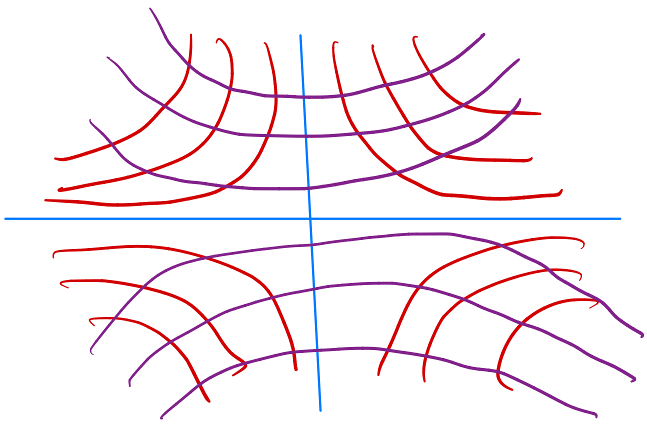
donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Calcula la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias de curvas sobre el plano (x, y).

Ec. diferencial de φ:

$y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -y/x$

Ec. diferencial de $\varphi^{\perp}$: $y' = \frac{x}{y} \Rightarrow yy' - x = 0 \Rightarrow$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{2} = c$



2. Demuestra que la ecuación

$$e^{x+t} + x = 0$$

define de forma implícita una función $x = x(t)$ que es derivable y está definida en todo $\mathbb{R}$. Encuentra una ecuación diferencial que admita a esta función como solución.

Probemos que la ecuación define una función

veamos $\forall t \in \mathbb{R}, \exists_1 x \in \mathbb{R} / e^{x+t} + x = 0$

sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid F(t,x) = e^{x+t} + x$

consideramos la restricción

$F_t: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid F_t(x) = F(t,x) = e^{x+t} + x$, $F_t \in C^1(\mathbb{R})$

$F_t'(x) = e^{x+t} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ es inyectiva al ser estrictamente creciente.

$\lim_{x \to -\infty} F_t(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} F_t(x) = +\infty$

Al ser continua y por el resultado de los límites, por Tª Bolzano, es sobreyectiva.

Por tanto, F_t es biyectiva $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \exists_1 x \in \mathbb{R} /$
$F_t(x) = 0$

Usemos Tª Función implícita para ver que F es derivable, aplicándolo $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^{x+t} + 1 \neq 0 \qquad \forall (t, x(t)) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{d}{dt}[F(t,x(t))] = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t))\, x'(t) =$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{x+t} + (e^{x+t} + 1)\, x' = 0 \Rightarrow x' = \dfrac{-e^{x+t}}{e^{x+t}+1} \\ x' = \dfrac{x}{-x+1} \end{array}\right\} \longrightarrow$$

Son ec. diferenciales diferentes con la misma solución.

3. El sistema

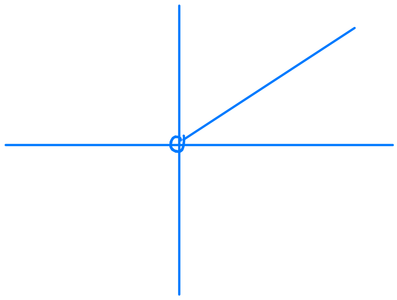
$$x' = y, \quad y' = x$$

admite la solución $(x(t), y(t))$ con $x(t) = y(t) = e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Dibuja la órbita asociada en el plano (x, y). Encuentra la ecuación diferencial de las órbitas de este sistema.

Órbita: $\{ (e^t, e^t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$\downarrow$

$x = y$



Las exponenciales toman valores en $\mathbb{R}^+$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Nota:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^t}{e^t} = 1$ sería la solución concreta de las órbitas, pero no su ecuación diferencial.

4. Se considera el cambio de variables

$$\varphi : \ s = x, \ y = t.$$

¿En qué circunstancias se puede asegurar que es un cambio admisible para la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua?

Se considera la nueva ecuación $\frac{dy}{ds} = \hat{f}(s,y)$, ¿Qué relación hay entre f y $\hat{f}$?

Para asegurar que el cambio sea admisible:

1) $f(t,x)$ continua: dado por hipótesis.

2) φ difeomorfismo C^1:

Vemos $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \exists_1 (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(t,x) = (x,t)$

Vemos que $\varphi^{-1} = \varphi$, pues $\begin{cases} t = y \\ x = s \end{cases}$

3) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,t)\, f(x,t) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,t)\, f(x,t) = 1 \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

La relación entre f y $\hat{f}$:

$$\hat{f}(s,y) = \hat{f}(x,t) = \frac{\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x)\, f(t,x)} = \frac{1}{f(t,x)} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\hat{f}(s,y) = \frac{1}{f(y,s)}}$$

5. Dada una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ de clase C^1 y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$ se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y(x)) = 0, \;\; y(x_0) = y_0.$$

Encuentra (si es que existen) una función F y un punto (x_0, y_0) en las condiciones anteriores y para los que el problema de funciones implícitas no admita solución.

Nota: se considera el problema local, la posible solución $y(x)$ está definida en algún entorno de x_0