4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e^t, \quad y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Vemos claramente $x = f(t)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Debemos ver que $\exists f^{-1} \,/\, t = f^{-1}(x)$

Veamos f biyectiva:

- Inyectiva: $f'(t) = 1 + e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ estrictamente creciente e inyectiva.
- Sobreyectiva:

$\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

Como f continua, por T^a Bolzano, f sobreyectiva.

Por tanto, concluimos que f biyectiva y $\exists f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, t = f^{-1}(x)$, que además es de C^1 por serlo f.

Por tanto, escribimos $y(x) = 1 + (f^{-1}(x))^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, que claramente es derivable por serlo f^{-1}.

Vemos $y(x) = 1 + t^4 \geq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ El mín se alcanza si $t = 0 = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(0) = 0 + e^0 = 1$

Encontrar e^{tA}, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Vemos A no es diagonalizable

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ doble}$$

$\dim(V_0) = 1 \Rightarrow$ no es diagonalizable, ya que no coincide multiplicidad geométrica y aritmética.

Sabemos e^{tA} es m.f. principal en $t_0 = 0$ del sist. $x' = Ax$

Si $\Phi(t) = \left(x_1(t) \mid x_2(t) \right)$ es m.f. y $x(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$ es sol.

basta imponer $\phi_{11}(t_0) = 1 \quad \phi_{21}(t_0) = 0$, pues
$\phi_{12}(t_0) = 0 \quad \phi_{22}(t_0) = 1$

$\Phi(t_0) = I_2$