

## Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Estamos ya en condiciones de probar algo que hemos anunciado varias veces: toda función holomorfa en un abierto del plano es de hecho analítica, es decir, admite un desarrollo en serie de potencias centrado en cada punto de dicho abierto. La demostración es una consecuencia fácil de la fórmula de Cauchy y, por la forma concreta en que se obtiene el desarrollo en serie de una función holomorfa, o *desarrollo en serie de Taylor*, el resultado tiene utilidad incluso cuando se aplica a una función para la que ya sabemos que es analítica. En particular, veremos que toda función entera es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia infinito, y análogamente, toda función holomorfa en un disco abierto es la suma de una serie de potencias que converge en dicho disco.

Probamos también la llamada *fórmula de Cauchy para las derivadas*, una representación integral para las sucesivas derivadas de una función holomorfa. Finalmente aclaramos una cuestión que tenemos pendiente, probando que una función holomorfa en un abierto, salvo en un punto donde sólo sabemos que es continua, es también derivable en ese punto. De hecho probamos un resultado más fuerte que se conoce como *teorema de extensión de Riemann*.

### 8.1. Desarrollo en serie de Taylor

Dado un abierto  $\Omega$  del plano y una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , fijemos  $a \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ . La fórmula de Cauchy nos dice entonces que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r)$$

Pensemos en el integrando del segundo miembro como una función definida en  $D(a, r)$ , es decir, la función  $z \mapsto f(w)/(w-z)$  con  $w \in C(a, r)^*$  fijo. Se trata de una función racional que podemos desarrollar fácilmente en serie de potencias, luego si conseguimos permutar la integral con la suma de la serie, tendremos la función  $f$  expresada como suma de una serie de potencias. Este desarrollo será válido en un entorno de cada punto del abierto  $\Omega$  en el que  $f$  es holomorfa y habremos probado que  $f$  es analítica en  $\Omega$ . Esto explica por adelantado la forma de obtener el siguiente resultado fundamental.

**Teorema (Desarrollo en serie de Taylor).** Si  $\Omega$  es un abierto no vacío de  $\mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , entonces  $f$  es analítica en  $\Omega$  y, en particular,  $f$  es indefinidamente derivable en  $\Omega$ . Además:

(i) Si  $\Omega = \mathbb{C}$ , para todo  $a \in \mathbb{C}$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$  tiene radio de convergencia infinito y se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

(ii) Si  $\Omega \neq \mathbb{C}$  y para cada  $a \in \Omega$  tomamos  $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R_a$  y se verifica que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, R_a) \quad (2)$$

**Demostración.** Fijamos  $a \in \Omega$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$  con  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$  y  $z \in D(a, r)$ . Usando, como ya hemos hecho anteriormente, la serie geométrica, tenemos

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n \quad \forall w \in C(a, r)^* \quad (3)$$

y la serie converge uniformemente en  $C(a, r)^*$ , pues tomando  $M = \max \{|f(w)| : w \in C(a, r)^*\}$ , aplicamos el test de Weierstrass:

$$\left| \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{r} \left( \frac{|z-a|}{r} \right)^n \quad \forall w \in C(a, r)^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Usando ahora la fórmula de Cauchy y la continuidad de la integral curvilínea, obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n \quad (4)$$

Resaltamos que las integrales del segundo miembro no dependen del punto  $z \in D(a, r)$  fijado, escribiendo

$$\alpha_n(a, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Entonces, como  $z \in D(a, r)$  era arbitrario, hemos probado que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a, r) (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, r) \quad (5)$$

Así pues, en  $D(a, r)$ , la función  $f$  coincide con la suma de una serie de potencias, cuyo radio de convergencia será mayor o igual que  $r$ , pues sabemos que la serie converge en  $D(a, r)$ . Como  $a \in \Omega$  también era arbitrario, hemos probado que  $f$  es analítica en  $\Omega$ .

Para probar las afirmaciones (i) y (ii) basta aprovechar la libertad en la elección de  $r$ . Aparentemente, los coeficientes de la serie de potencias obtenida en (4) o (5) dependen de  $r$ , pero enseguida nos damos cuenta de que esto no es así. En efecto, el teorema de holomorfía de la suma de una serie de potencias nos permite deducir que

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \alpha_n(a, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (6)$$

Esto deja claro que los coeficientes no dependen de  $r$ , siempre que se tenga  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ . Concretamente tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, r) \quad (7)$$

La serie de potencias que aparece en el segundo miembro es la **serie de Taylor** de  $f$  centrada en  $a$ , luego tenemos un **desarrollo en serie de Taylor** de  $f$  centrado en  $a$ , que de momento es válido en  $D(a, r)$ , siempre que  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ . Para saber hasta donde llega a ser válido este desarrollo, todo lo que queda es elegir  $r$  tan grande como el abierto  $\Omega$  nos lo permita.

(i). En el caso  $\Omega = \mathbb{C}$ , cualquiera que sea  $a \in \mathbb{C}$ , la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $a$  converge en  $D(a, r)$  para todo  $r \in \mathbb{R}^+$ , luego tiene radio de convergencia infinito. Además, para todo  $z \in \mathbb{C}$  podemos aplicar (7) con  $r > |z-a|$  para obtener (1). Así pues, el desarrollo en serie de Taylor de  $f$ , centrado en cualquier punto  $a \in \mathbb{C}$ , es válido en todo  $\mathbb{C}$ .

(ii). Para  $a \in \Omega$  y  $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ , la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $a$  converge en  $D(a, r)$  para todo  $r \in ]0, R_a[$ , luego tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R_a$ . Además, para todo  $z \in D(a, R_a)$  podemos aplicar (7) tomando  $r$  de forma que  $|z-a| < r < R_a$  y obtenemos (2). Esta vez el desarrollo de Taylor es válido en  $D(a, R_a)$ , que es el máximo disco abierto de centro  $a$  contenido en  $\Omega$ . ■

Ni que decir tiene, lo más útil del teorema anterior es la equivalencia entre analiticidad y holomorfía. Para muchas aplicaciones de la teoría local de Cauchy, esto será más que suficiente, pero hay en el teorema más información que conviene resaltar, porque es útil aunque sepamos de entrada que nuestra función es analítica.

Empezando por el caso  $\Omega = \mathbb{C}$ , el teorema anterior nos dice que, por el procedimiento que ya conocíamos, sumar series de potencias con radio de convergencia infinito, obtenemos todas las funciones enteras. Para entender mejor esta idea, consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha(n)|^{1/n} = 0 \}$$

La fórmula de Cauchy-Hadamard no dice que, para cada  $\alpha \in \Lambda$ , la serie de potencias  $\sum_{n \geq 0} \alpha(n) z^n$  tiene radio de convergencia infinito, luego su suma es una función entera

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (8)$$

Además, por el principio de identidad para series de potencias, sabíamos que si  $\alpha, \beta \in \Lambda$  verifican que  $f_\alpha = f_\beta$ , entonces  $\alpha = \beta$ . Hasta aquí el método constructivo ya conocido, que nos da tantas funciones enteras como elementos tiene el conjunto  $\Lambda$ .

Ahora sabemos que ese método nos da *todas* las funciones enteras, pues si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ , el teorema anterior nos dice que tomando  $\alpha(n) = f^{(n)}(0)/n!$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , tenemos  $\alpha \in \Lambda$  tal que  $f = f_\alpha$ . Así pues, la aplicación  $\alpha \mapsto f_\alpha$ , de  $\Lambda$  en  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$  es biyectiva, o por así decirlo,  $\Lambda$  “parametriza” al conjunto de todas las funciones enteras:  $\mathcal{H}(\mathbb{C}) = \{f_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ .

Todavía en el caso  $\Omega = \mathbb{C}$ , tenemos aún más información. Sabíamos que la función  $f_\alpha$  definida por (8) era una función entera, pero no que  $f_\alpha$  fuese analítica en  $\mathbb{C}$ . Esto habría exigido que, para cada  $a \in \mathbb{C}$  hubiésemos expresado  $f_\alpha$ , al menos en un disco abierto  $D(a, \rho_a)$  con  $\rho_a > 0$ , como suma de una serie de potencias centrada en  $a$  y convergente en dicho disco, cosa que en general no es del todo fácil. Por ejemplo, la función exponencial se definió usando (8) con  $\alpha(n) = 1/n!$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , pero para probar que la exponencial es una función analítica en  $\mathbb{C}$ , usamos la fórmula de adición, una propiedad muy específica de la función exponencial. Ahora sabemos que la función  $f_\alpha$  siempre es analítica en  $\mathbb{C}$ , y todavía algo más que conviene resaltar.

Supongamos que ya sabemos que una función  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$ . Entonces, para cada  $a \in \mathbb{C}$ , sabemos que existe  $\rho_a > 0$  tal que la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $a$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $\rho_a$  y su suma coincide con  $f$  en  $D(a, \rho_a)$ . Pero el teorema anterior nos dice más: dicha serie de Taylor siempre tiene radio de convergencia infinito y su suma coincide con  $f$  en todo el plano. Queda claro que tenemos nueva información sobre las funciones analíticas en  $\mathbb{C}$ .

Todo lo dicho en el caso  $\Omega = \mathbb{C}$  puede repetirse, casi literalmente, para un disco abierto  $\Omega = D(a, R)$ , con  $a \in \mathbb{C}$  y  $R \in \mathbb{R}^+$ . Lógicamente, ahora usamos el conjunto

$$\Lambda_R = \{ \alpha : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : \{ |\alpha(n)|^{1/n} \} \text{ mayorada con } \limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha(n)|^{1/n} \leq 1/R \}$$

Para cada  $\alpha \in \Lambda_R$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} \alpha(n) (z-a)^n$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$  y podemos definir

$$f_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n) (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega \quad (9)$$

para obtener  $f_\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Otra vez, la aplicación  $\alpha \mapsto f_\alpha$  es una biyección de  $\Lambda_R$  sobre  $\mathcal{H}(\Omega)$ . Lo nuevo es la sobreyectividad de esta aplicación, que se deduce del teorema anterior teniendo en cuenta que  $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = R$ . Tampoco sabíamos hasta ahora que la función  $f_\alpha$  definida por (9) es analítica en  $\Omega$ . Finalmente, si  $f$  es una función analítica en  $\Omega$ , ahora sabemos que, para cada  $b \in D(a, R)$ , el desarrollo de Taylor de  $f$  centrado en el punto  $b$  es válido, no sólo en un disco abierto de centro  $b$  y contenido en  $\Omega$ , sino en el más grande posible:  $D(b, R_b)$  donde  $R_b = d(b, \mathbb{C} \setminus \Omega) = R - |b-a|$ .

Para un abierto  $\Omega$  arbitrario, no tenemos una “parametrización” tan explícita de  $\mathcal{H}(\Omega)$ , pero las otras dos observaciones que hemos hecho para el plano y para un disco abierto siguen siendo ciertas. Destacamos la última: si  $f$  es una función analítica en  $\Omega$  y  $a \in \Omega$ , el desarrollo de Taylor de  $f$  centrado en  $a$  es válido en el disco abierto más grande posible:  $D(a, R_a)$  donde  $R_a = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ .

## 8.2. Fórmula de Cauchy para las derivadas

La demostración del desarrollo en serie de Taylor incluye una información que aún no hemos comentado, porque no aparece en el enunciado del teorema. Se trata de la forma concreta en la que aparecieron por primera vez los coeficientes de la serie de Taylor. Para un abierto  $\Omega$  arbitrario y una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , fijados  $a \in \Omega$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ , en la igualdad (6) teníamos

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (10)$$

Comparemos este resultado con la fórmula de Cauchy que, con las mismas hipótesis, nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r) \quad (11)$$

Está claro que, si en (11) tomamos  $z = a$ , obtenemos (10) para  $n = 0$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , sabemos que  $f^{(n)} \in \mathcal{H}(\Omega)$ , luego podemos por supuesto aplicarle la fórmula de Cauchy, obteniendo

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z} dw \quad \forall z \in D(a, r) \quad (12)$$

Podríamos decir que aquí no hay nada nuevo, simplemente ahora podemos aplicar a  $f^{(n)}$  la fórmula de Cauchy, como a cualquier otra función holomorfa en  $\Omega$ . Si en (12) tomamos  $z = a$ , obtenemos  $f^{(n)}(a)$  como una integral que no es la que tenemos en (10), pues en el integrando aparece  $f^{(n)}$  y no  $f$ , aparte de que los denominadores tampoco coinciden. El interés de (10) estriba en que obtenemos  $f^{(n)}(a)$  directamente a partir de la función  $f$ , sin calcular ninguna derivada, por así decirlo. Sin embargo, las igualdades (10) tienen un claro inconveniente: para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sólo nos dan el valor de  $f^{(n)}$  en el punto  $a$ , y no en todo punto  $z \in D(a, r)$  como ocurre en (11) y (12). Pues bien, vamos a probar que las igualdades (10) siguen siendo válidas al sustituir  $a$  por un  $z \in D(a, r)$  arbitrario, obteniendo un resultado general que, para  $z = a$  es (10), y para  $n = 0$  es (11). Esto es lo que se conoce como fórmula de Cauchy para las derivadas, y no (12) como en principio podría pensarse.

**Fórmula de Cauchy para las derivadas.** Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Dado  $a \in \Omega$ , sea  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ . Se tiene entonces:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \quad \forall z \in D(a, r), \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

**Demostración.** Fijamos, para todo el razonamiento,  $k \in \mathbb{N}$ , pues el caso  $k = 0$  es conocido. Debemos analizar la demostración del desarrollo de Taylor, con un punto de vista diferente. Para  $z \in D(a, r)$  y  $w \in C(a, r)^*$ , usando la serie geométrica teníamos la igualdad (3):

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

Ahora leemos esta igualdad de forma diferente: fijado  $w \in C(a, r)^*$ , tenemos la función racional  $z \mapsto f(w)/(w-z)$ , expresada en el disco  $D(a, r)$  como suma de una serie de potencias. Ello nos permite calcular la  $k$ -ésima derivada de dicha función, derivando término a término la serie de potencias en cuestión, obteniendo que, para todo  $z \in D(a, r)$  se tiene:

$$\frac{k! f(w)}{(w-z)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \quad (13)$$

Pero esto es cierto para todo  $w \in C(a, r)^*$ , lo que permitirá cambiar otra vez el punto de vista.

Fijado  $z \in D(a, r)$ , la igualdad anterior nos da la función  $w \mapsto f(w)/(w-z)^{k+1}$  como suma de una serie de funciones continuas en  $C(a, r)^*$ . Veamos que la serie converge uniformemente en  $C(a, r)^*$ , usando el test de Weierstrass. Escribiendo  $M = \max \{|f(w)| : w \in C(a, r)^*\}$ , para todo  $w \in C(a, r)^*$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq k$ , tenemos

$$\left| \frac{n!}{(n-k)!} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^{n-k} \right| \leq \frac{M}{r|z-a|^k} \frac{n!}{(n-k)!} \left( \frac{|z-a|}{r} \right)^n = M_n$$

donde  $M_n$  viene definido por la última igualdad. Bastará pues comprobar que la serie  $\sum_{n \geq k} M_n$  es convergente, pero esto se deduce fácilmente del criterio del cociente, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|z-a|}{(n+1-k)r} = \frac{|z-a|}{r} < 1$$

Así pues, usando la continuidad de la integral curvilínea, deducimos de (13) que

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^{n-k} \quad (14)$$

y esta igualdad es válida para todo  $z \in D(a, r)$ .

Por otra parte recordamos el desarrollo en serie de Taylor de  $f$  tal y como se obtuvo por primera vez en (4),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n \quad \forall z \in D(a, r)$$

y lo usamos para calcular la  $k$ -ésima derivada de  $f$ , obteniendo

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^{n-k} \quad \forall z \in D(a, r) \quad (15)$$

En vista de (14) y (15), la demostración está concluida. ■

Destacamos el interés del teorema anterior, que incluye la fórmula de Cauchy (caso  $k = 0$ ), aunque se ha deducido de ella. Conociendo la función  $f$  en la circunferencia  $C(a, r)^*$  nos permite obtener todos los valores en el disco abierto  $D(a, r)$ , no sólo de la función  $f$ , sino de todas sus derivadas.

Tenemos también una nueva fórmula, útil para calcular integrales. Un ejemplo sencillo:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{z^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} \cos^{(4)}(0) = \frac{\pi i}{12}$$

### 8.3. Teorema de extensión de Riemann

Aclaremos ahora el problema que nos dio cierto trabajo en los teoremas de Cauchy para el triángulo y para dominios estrellados. Como se puso de manifiesto en la demostración de la fórmula de Cauchy, necesitábamos versiones más generales de ambos teoremas, pero podemos ya probar que esa mayor generalidad sólo es aparente, como habíamos anunciado.

Para mayor claridad, dado un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y un punto  $z_0 \in \Omega$ , tomamos una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ , que no suponemos siquiera definida en el punto  $z_0$ , y nos preguntamos por el comportamiento de  $f$  en dicho punto. Lo mejor que puede ocurrir es obviamente que podamos darle un valor en  $z_0$  para obtener una función holomorfa en  $\Omega$ . Es claro que para ello es necesario que  $f$  tenga límite en  $z_0$ , lo que implica que  $f$  debe estar acotada en un entorno reducido de  $z_0$ , es decir, han de existir  $\delta, M > 0$  tales que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \Omega$  que verifique  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Por último, este tipo de acotación implica claramente que  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ , por tratarse del producto de una función que tiende a 0 por otra que se mantiene acotada al acercarnos a  $z_0$ . Pues bien, vamos a probar que esta última condición, aparentemente la más débil, implica la primera, aparentemente la más fuerte.

Merece la pena considerar una situación análoga para funciones reales de variable real. Por ejemplo, para una función  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , derivable en  $\mathbb{R}^*$ , las anteriores propiedades de  $f$  en el origen tienen sentido y las tres implicaciones comentadas son ciertas, pero ninguna de ellas es reversible. Tomando  $f(x) = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ , tenemos una función derivable en  $\mathbb{R}^*$  con  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , pero ninguna extensión de  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ . La función signo es derivable y acotada en  $\mathbb{R}^*$ , pero no tiene límite en el origen. Por último, tomando  $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^*$  tenemos una función derivable en  $\mathbb{R}^*$ , con  $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$ , pero  $f$  no está acotada en ningún entorno reducido del origen. Esta comparación pone de manifiesto el interés del siguiente resultado:

**Teorema de extensión de Riemann.** Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  y  $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $g(z) = f(z)$  para todo  $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ .
- (ii)  $f$  tiene límite en el punto  $z_0$ .
- (iii) Existen  $\delta, M > 0$  tales que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z \in \Omega$  que verifique  $0 < |z - z_0| < \delta$ .
- (iv)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ .

**Demostración.** Por lo ya comentado, basta probar que  $(iv) \Rightarrow (i)$ . Definimos una función  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma:

$$F(z) = (z - z_0)^2 f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \quad \text{y} \quad F(z_0) = 0$$

Claramente  $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ , pero usando (iv) también tenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

luego  $F \in \mathcal{H}(\Omega)$  con  $F'(z_0) = 0 = F(z_0)$ .

Por tanto, fijado  $r \in \mathbb{R}^+$  con  $D(z_0, r) \subset \Omega$ , el desarrollo en serie de Taylor de  $F$  centrado en el punto  $z_0$  nos dice que, para todo  $z \in D(z_0, r)$  se tiene:

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}$$

En vista de la definición de  $F$ , para todo  $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  deducimos que

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n$$

y está ya muy claro el valor que debemos dar a  $f$  en el punto  $z_0$  para obtener la extensión holomorfa en  $\Omega$  que buscamos. Concretamente, definimos  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$g(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\} \quad \text{y} \quad g(z_0) = \frac{F''(z_0)}{2}$$

De esta forma tenemos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$$

así que  $g$  coincide en  $D(z_0, r)$  con la suma de una serie de potencias, luego es derivable en  $z_0$ . Como también es claramente holomorfa en  $\Omega \setminus \{z_0\}$  concluimos que  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ , como queríamos demostrar. ■

En el caso de que la función  $f$  esté ya definida y sea continua en el punto  $z_0$ , deducimos claramente lo que venimos anunciando:

■ Sean  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega \setminus \{z_0\}$  y continua en  $z_0$ , entonces  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .

Olvidando por un momento el valor de  $f$  en  $z_0$ , como su restricción a  $\Omega \setminus \{z_0\}$  tiene límite en  $z_0$ , el teorema anterior nos da una función  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  que coincide con  $f$  en  $\Omega \setminus \{z_0\}$  pero, como  $f$  y  $g$  son continuas en  $z_0$  tenemos

$$g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

luego  $f = g \in \mathcal{H}(\Omega)$ , como queríamos. ■

## 8.4. Ejercicios

1. Sea  $\gamma$  un camino y  $\varphi : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Se define  $f : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Probar que  $f$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  y que

$$f^{(k)}(z) = k! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{k+1}} dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$



2. Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  se define:

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \quad \forall z \in D(0,1)$$

3. Obtener el desarrollo en serie de Taylor de la función  $f$ , centrado en el origen, en cada uno de los siguientes casos:

$$(a) \quad f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \quad \forall z \in D(0,1)$$

$$(b) \quad f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$

$$(c) \quad f(z) = \arcsen z \quad \forall z \in D(0,1)$$

$$(d) \quad f(z) = \cos^2 z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

4. Dado  $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{N}$ , probar que existe una única función  $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ , verificando que

$$zf'(z) - \alpha f(z) = \frac{1}{1+z} \quad \forall z \in D(0,1)$$

5. Probar que existe una única función  $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ , verificando que  $f(0) = 0$  y

$$\exp(-zf'(z)) = 1 - z \quad \forall z \in D(0,1)$$

6. Para  $z \in \mathbb{C}$  con  $1 - z - z^2 \neq 0$  se define  $f(z) = (1 - z - z^2)^{-1}$ . Sea  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$  la serie de Taylor de  $f$  centrada en el origen. Probar que  $\{\alpha_n\}$  es la *sucesión de Fibonacci*:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Calcular en forma explícita dicha sucesión.

7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  verificando que  $f^{(n)}(0) = a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(a) \quad \Omega = \mathbb{C}, \quad a_n = n$$

$$(b) \quad \Omega = \mathbb{C}, \quad a_n = (n+1)!$$

$$(c) \quad \Omega = D(0,1), \quad a_n = 2^n n!$$

$$(d) \quad \Omega = D(0,1/2), \quad a_n = n^n$$

8. Dados  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , y  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $|b| < r < |a|$ , calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)^k}$$

9. Calcular la integral  $\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$ , para  $\gamma = C(1/4, 1/2)$ ,  $\gamma = C(1, 1/2)$  y  $\gamma = C(0, 2)$ .

10. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n} dz \quad (b) \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz \quad (c) \int_{C(0,1/2)} \frac{\log(1+z)}{z^n} dz$$

11. Probar la siguiente *fórmula de cambio de variable* para la integral curvilínea:

Si  $\Omega$  es un abierto del plano,  $\gamma$  un camino en  $\Omega$  y  $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ , entonces  $\varphi \circ \gamma$  es un camino y, para cualquier función  $f$  que sea continua en  $(\varphi \circ \gamma)^*$  se tiene:

$$\int_{\varphi \circ \gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(\varphi(w)) \varphi'(w) dw$$

12. Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} \quad (b) \int_{C(0,2)} \frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2(z-3)}$$