Probar que $\{a^p \mid p \text{ primo}\}$ no es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $z = a^p \mid p \geq n$ es primo $\quad |z| \geq n$

Considero descomposición:

$$z = uvw \begin{cases} u = a^k & \ell \geq 1 \\ v = a^\ell & k+\ell \leq n \\ w = a^{p-k-\ell} \end{cases}$$

Tomando $i = p+1 \Rightarrow u v^{p+1} w = a^{p+(p+1)\ell - \ell} = a^{p+\ell(p+1-1)} = a^{p+\ell p} = a^{p(1+\ell)} \notin L$ pues $p(1+\ell)$ no es primo.

Ver si $\{w \in \{a,b\}^* \mid |N_a(w) - N_b(w)| \text{ es primo}\}$ es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $a^p \mid p \geq n$ es primo $\Rightarrow a^p \in L$

y estamos en el caso anterior.

Ver si $\{1^k u \mid u \in \{0,1\}^*, k \geq 0, n_1(u) \leq k\}$ es regular.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $z = 1^n 0 1^n \in L$ $|z| \geq n$

considero descomposición de $z = uvw$ $\begin{cases} u = 1^k \\ v = 1^l \\ w = 1^{n-k-l} 0 1^n \end{cases}$ $l \geq 1$, $l + k \leq n$

Tomando $i = 0 \Rightarrow uv^i w = 1^{n-l} 0 1^n \notin L$, pues $n - l \neq n$, $l \geq 1$

Sea A alfabeto, L regular, P palíndromos. Estudiar si $L \cap P$ es siempre regular, nunca, o depende de L.

$P = \{u u^{-1} \mid u \in \{a,b\}^*\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $z = 1^n 00 1^n$, $|z| \geq n$. considero descomposición

$z = uvw$ $\begin{cases} u = 1^k \\ v = 1^l \\ w = 1^{n-k-l} 00 1^n \end{cases}$ $l \geq 1$, $k + l \leq n$

Tomando $i = 2$, $uv^2 w = 1^{n+l} 00 1^n \notin L$, pues $n + l \neq n$, $l \geq 1$ $\Rightarrow$ P no regular.

Por tanto, dependerá de cómo sea L que $L \cap P$ sea regular.

A) $L = \{a^m b^n c^p d^q \mid m+n \geq p+q\}$

Sea $n \in \mathbb{N}$, Sea $z = a^n b^n c^n d^n$ $|z| \geq n$

considero descomposición $z = uvw$ $\begin{cases} u = a^k \\ v = a^\ell \\ w = a^{n-k-\ell} b^n c^n d^n \end{cases}$

Tomando $i=0 \Rightarrow uv^iw = a^{n-\ell} b^n c^n d^n \notin L$, pues $n-\ell+n = 2n-\ell \not\geq n+n = 2n$

B) $L = \{0^i 1^j 0^k \mid i > j \Rightarrow j = k,\ i, j, k \geq 0\}$

La condición de pertenencia al conjunto se puede escribir como $j \neq k \Rightarrow i \leq j$

sea $n \in \mathbb{N}$. sea $z = 0^n 1^n 0^{2n+1}$ $|z| \geq n$

Considero descomposición $z = uvw$ $\begin{cases} u = 0^k \\ v = 0^\ell \\ w = 0^{n-k-\ell} 1^n 0^{2n+1} \end{cases}$

Tomando $i=2 \Rightarrow uv^iw = 0^{n+\ell} 1^n 0^{2n+1} \notin L$, pues $n \neq 2n+1 \not\Rightarrow n+\ell \leq n$, $\ell \geq 1$

VoF: La unión disjunta de lenguaje regular y no regular no es regular.

Por red. abs:

Supongamos $L_R \uplus L_{NR}$ es regular.

$$(L_R \uplus L_{NR}) \cap L_R = (L_R \cap L_R) \cup (\cancelto{\emptyset}{L_{NR} \cap L_R}) = L_R$$

$$\underbrace{(L_R \uplus L_{NR})}_{\text{Regular}} \cap \underbrace{\overline{L_R}}_{\text{Regular}} = (\cancelto{\emptyset}{L_R \cap \overline{L_R}}) \cup (L_{NR} \cap \overline{L_R}) = L_{NR} \cap \overline{L_R} = \underbrace{L_{NR}}_{\text{No regular!!}}$$

Por tanto, tenemos una contradicción, pues la intersección de regulares es regular, y la afirmación es verdadera.

Ver si es regular $L = \{0^n \mid n \geq 0\} \cup \{1^n 2^m \mid n \neq m, n, m \in \mathbb{N}\}$

Por lo probado anteriormente no es regular, pues la 2ª parte no es regular.