Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Primera parte

NOMBRE:

1.1. Consideramos la familia de curvas

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2), \qquad a > 0.$$

a) [14] Encuentra una ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que admita como soluciones a las funciones $y = y(x)$ definidas por dicha familia.

b) [6] ¿Es esta ecuación de alguno de los tipos vistos en clase?

c) [6] Determina los posibles dominios de definición de la ecuación.

d) [14] Fijado el dominio y dada $a > 0$, calcula el intervalo maximal de definición de cada una de las soluciones que componen la curva.

1.2. En este ejercicio se propone un método para resolver la ecuación

$$x' = a(t)e^{rx} + b(t),$$

donde $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $r > 0$.

a) [15] Dado $m \neq 0$ demuestra que

$$\varphi : (t, x) \mapsto (s, y), \quad s = t, \quad y = e^{mx}$$

define un difeomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y un dominio $D = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Describe D.

b) [15] Encuentra un valor de m que haga que el cambio φ transforme la ecuación anterior en una ecuación lineal.

c) [10] Resuelve por este procedimiento el problema $x' = 2e^x + 1$, $x(0) = 0$. Se precisará el intervalo de definición de la solución.

1.3 [20] Encuentra la ecuación diferencial que verifica la familia de circunferencias que pasan por el origen y son tangentes al eje OY en ese punto.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Segunda parte

NOMBRE:

2.1. Se consideran los operadores diferenciales $L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ y $\tilde{L} : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ definidos por $L[x] = x' + tx$ y $\tilde{L}[x] = x'' + tx'$. Se pide:

(a) [10] Calcula Ker$L$

(b) [10] Calcula Ker$\tilde{L}$

(c) [20] Encuentra todas las soluciones de $\tilde{L}[x] = t^2$.

2.2. Se considera el campo de fuerzas

$$F(x, y) = (\frac{2y}{x^2 + y^2}, \frac{-2x}{x^2 + y^2}), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) [10] ¿Se cumple la condición de exactitud $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$?

b) [30] Se calcula el trabajo a lo largo de dos caminos γ_1 y γ_2 que unen los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ y están definidos por

$$\gamma_1(t) = (\cos(2t), \text{sen}(2t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(2t), -\text{sen}(2t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

¿Se obtiene la misma cantidad?

2.3. [20] Se considera la transformación del primer cuadrante $x = u^3,\ t = s^3$. Identifica las funciones $f(t, x)$ tales que la ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ es invariante para dicha transformación.

2.1. Se consideran los operadores diferenciales $L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ y $\tilde{L} : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ definidos por $L[x] = x' + tx$ y $\tilde{L}[x] = x'' + tx'$. Se pide:

(a) [10] Calcula Ker$L$

(b) [10] Calcula Ker$\tilde{L}$

(c) [20] Encuentra todas las soluciones de $\tilde{L}[x] = t^2$.

A)

$$x' + tx = 0 \implies x(t) = ce^{-\frac{t^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Así, $\ker L = \{ c\, e^{-t^2/2} \mid c \in \mathbb{R} \}$

B)

$$x'' + tx' = 0$$

Vemos que $x_1(t) = 1$ es sol.

Por fórmula Liouville, $W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} s\,ds}, \quad t_0 \in \mathbb{R}$

Tomamos $W(x_1,x_2)(t_0) = 1 \implies \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \implies \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & x_2' \end{vmatrix} = e^{-t^2/2} \implies$

$$x_2'(t) = \int e^{-t^2/2}\,dt$$

Por tanto, $\ker \tilde{L} = \{ c_1 \int e^{-t^2/2}\,dt + c_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} = \{ \int_{t_0}^{t} k\, e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds \mid k, t_0 \in \mathbb{R} \}$

c)

$x'' + t x' = t^2$

Sea $y(t) = x'(t) \Rightarrow y'(t) + t y(t) = t^2 \Rightarrow y(t) =$

2.2. Se considera el campo de fuerzas

$$F(x,y) = (\frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{-2x}{x^2+y^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) [10] ¿Se cumple la condición de exactitud $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$?

b) [30] Se calcula el trabajo a lo largo de dos caminos γ_1 y γ_2 que unen los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ y están definidos por

$$\gamma_1(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)), \quad \gamma_2(t) = (\cos(2t), -\operatorname{sen}(2t)), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

¿Se obtiene la misma cantidad?

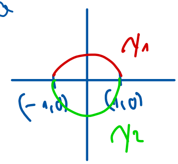
A)

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{-2(x^2+y^2)+4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

B)

Dado que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no tiene forma estrella no tenemos garantizada la existencia de potencial y el campo no tiene porqué ser conservativo. Por tanto, el recorrido influye en el trabajo.



$$F(\gamma_1(s)) = F(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t)) = \left(\frac{2\operatorname{sen}2t}{\cos^2 2t+\operatorname{sen}^2 2t}, \frac{-2\cos 2t}{\cos^2 2t+\operatorname{sen}^2 2t}\right) = 2(\operatorname{sen}2t, -\cos 2t)$$

$$F(\gamma_2(s)) = -2(\operatorname{sen}2t, \cos 2t)$$

$$\gamma_1'(s) = (-2\operatorname{sen}2t, 2\cos 2t) = 2(-\operatorname{sen}2t, \cos 2t)$$

$$\gamma_2'(s) = (-2\operatorname{sen}2t, -2\cos 2t) = -2(\operatorname{sen}2t, \cos 2t)$$

$$T_1 = \int_0^{\pi/2} \langle F(\gamma_1(s)), \gamma_1'(s) \rangle \, ds = 4\int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen}^2 2s - \cos^2 2s \, ds =$$

$$-4\int_0^{\pi/2} ds = -4\left[s\right]_0^{\pi/2} = -2\pi$$

$$T_2 = \int_0^{\pi/2} \langle F(\gamma_2(s)), \gamma_2'(s) \rangle ds = -4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2s + \cos^2 2s \, ds = -2\pi$$

Vemos que $T_1 = T_2$, pero no asegura que el campo sea conservativo.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
21 de Junio de 2016. Examen Final. Tercera parte

NOMBRE:

3.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, consideramos el sistema lineal de segundo orden

$$x'' = Ax$$

Se pide

a) [10] Justifica que el conjunto de soluciones forma un espacio vectorial y calcula su dimensión.

b) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que μ^2 es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x(t) = e^{\mu t} v$ es solución.

c) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que $-\mu^2$ es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x_1(t) = \operatorname{sen}(\mu t)v, x_2(t) = \cos(\mu t)v$ son soluciones.

d) [10] Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la solución general del sistema.

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) [10] Demuestra que si (x, y) es solución del sistema, entonces la primera componente x es solución de la ecuación

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

b) [15] Se sabe que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ forman un sistema fundamental de la ecuación del apartado anterior y se supone que $b \neq 0$. Construye una matriz fundamental del sistema en términos de ϕ_1, ϕ_2 y los coeficientes a, b, c, d.

c) [15] Utiliza los apartados anteriores para calcular e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.3. [20] Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = 3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(ts)x(s)ds$$

tiene a lo sumo una solución $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua.

3.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, consideramos el sistema lineal de segundo orden

$$x'' = Ax$$

Se pide

a) [10] Justifica que el conjunto de soluciones forma un espacio vectorial y calcula su dimensión.

b) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que μ^2 es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x(t) = e^{\mu t} v$ es solución.

c) [10] Si $\mu \in \mathbb{R}$ es tal que $-\mu^2$ es valor propio de A con vector propio asociado v, demuestra que $x_1(t) = \text{sen}(\mu t)v, x_2(t) = \cos(\mu t)v$ son soluciones.

d) [10] Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la solución general del sistema.

A)

Sea $L : C^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C(\mathbb{R}^N) \mid L[x] = x'' - Ax$

Veamos que L es lineal:

$$L[ax+by] = [ax+by]'' - A(ax+by) = ax''+by'' - Aax - Aby =$$
$$= a[x''-Ax] + b[y''-Ay] = aL[x] + bL[y]$$

Vemos que el espacio de soluciones es

$$\ker L = \{x \in \mathbb{R}^N \mid L[x] = x'' - Ax = 0\} = Z$$

Por tanto, queda probado que es espacio vectorial.

Además, sabemos que la aplicación $\Phi_{t_0} : Z \to \mathbb{R}^{2N} \,/\, \Phi_{t_0}(x) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \end{pmatrix}$ es un isomorfismo $\Rightarrow \dim(Z) = 2N$

B)

μ^2 v.p. $A \Longrightarrow Av = \mu^2 v \quad \forall v$ v.p. asociado a μ^2

$$x'' = \mu^2 e^{\mu t} v = e^{\mu t} \mu^2 v = e^{\mu t} Av = A e^{\mu t} v = A x(t)$$

c) $-\mu^2$ v.p. $A \Rightarrow Av = -\mu^2 v \quad \forall v$ v.p. asociado a $-\mu^2$

$$x_1'' = -\mu^2 \operatorname{sen}(\mu t)\, v = \operatorname{sen}(\mu t)\, Av = A\, v \operatorname{sen}(\mu t) = A x_1(t)$$

$$x_2'' = -\mu^2 \cos(\mu t)\, v = \cos(\mu t)\, Av = A v \cos(\mu t) = A x_2(t)$$

D)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 15 =$$

$$\lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 4$$

$$V_4 = \{ v \in \mathbb{R}^2 / (A - 4I)v = 0 \} \equiv \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv 5v_1 - 3v_2 = 0$$

$$V_{-4} = \{ v \in \mathbb{R}^2 / (A + 4I)v = 0 \} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv v_1 + v_2 = 0$$

$v_1 = (1, \frac{5}{3})$ es v.p. asociado a V_4

$v_2 = v_1^{\perp} = (1, -1)$ " " V_{-4}

Si $\mu^2 = 4 \Rightarrow \mu = \pm 2$

Si $\mu^2 = -4 \Rightarrow \mu = \pm 2i$

$$\varphi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} \quad \varphi_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} \quad \phi_3(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \phi_4(t) = e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son sol. del sist. para $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} e^{2it} \\ -e^{2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t) \\ -\cos(2t) - i \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

sea $\varphi_3(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^{2ti}) \\ \operatorname{Re}(-e^{2ti}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}$

$\varphi_4(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(e^{2ti}) \\ \operatorname{Im}(-e^{2ti}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix}$

$\varphi_1 \ldots \varphi_4$ forman sist. fund. $\Rightarrow$ las sol. son de la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i \varphi_i(t) \qquad c_i \in \mathbb{R} \quad i = 1 \ldots 4$$

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) [10] Demuestra que si (x, y) es solución del sistema, entonces la primera componente x es solución de la ecuación

$$x'' - (a+d)x' + (ad - bc)x = 0.$$

b) [15] Se sabe que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ forman un sistema fundamental de la ecuación del apartado anterior y se supone que $b \neq 0$. Construye una matriz fundamental del sistema en términos de ϕ_1, ϕ_2 y los coeficientes a, b, c, d.

c) [15] Utiliza los apartados anteriores para calcular e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

A)

$x'' = ax' + by'$

Sustituimos en la ecuación:

$ax' + by' - (a+d)x' + (ad - bc)x =$

$\cancel{ax'} + by' - \cancel{ax'} - dx' + (ad - bc)x =$

$by' - dx' + (ad - bc)x =$

$b(cx + dy) - dx' + adx - bcx = bdy - dx' + adx =$

$bdy - d(ax + by) + adx = bdy - dax - bdy + adx = 0$ ✓

B)

$\left.\begin{array}{l} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{array}\right\} \quad \dfrac{x' - ax}{b} = y$

$y' = cx + \dfrac{d}{b}(x' - ax) = \dfrac{x'' - ax'}{b} \Leftrightarrow$

$bcx + dx' - adx = x'' - ax' \Leftrightarrow \quad x'' = (a+d)x' + (ad - bc)x$

Por tanto, vemos que las soluciones de a ec. también son del sist. $\Rightarrow$

$x_i(t) = c_i \phi_1(t) + d_i \phi_2(t)$ y $y_i(t) = \dfrac{x_i'(t) - a x_i(t)}{b}$

Tomando $c_1 = 1, d_1 = 0$, $x_1(t) = \phi_1(t)$, $y_1(t) = \dfrac{\phi_1'(t) - a\phi_1(t)}{b}$

Tomando $c_2 = 0, d_2 = 0$, $x_2(t) = \phi_2(t)$, $y_2(t) = \dfrac{\phi_2'(t) - a\phi_2(t)}{b}$

Así, una m.f. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$, pues

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dfrac{\phi_1'(t) - a\phi_1(t)}{b} & \dfrac{\phi_2'(t) - a\phi_2(t)}{b} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{b}\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} - \frac{a}{b}\cancelto{0}{\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{vmatrix}} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

c)

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos

$$x'' - (-5+1)x' + (-5+9)x = 0 \iff x'' + 4x' + 4x = 0$$

Buscamos sol. de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2 \Longrightarrow x_1(t) = e^{-2t} \text{ es una sol. particular.} \Longrightarrow$$

$$y_1(t) = \frac{2e^{-2t} - 5e^{-2t}}{3} = -e^{-2t}$$

Por Fórmula de Liouville, dado un sist. fundamental $\{\varnothing_1, \varnothing_2\}$, $t_0 \in I$, $W(\varnothing_1, \varnothing_2)(t_0) = 1$

$$W(\varnothing_1, \varnothing_2)(t) = W(\varnothing_1, \varnothing_2)(t_0)\, e^{-\int 4\,dt} \iff$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = e^{-2t} x_2' + 2e^{-2t} x_2 = e^{-4t} \iff$$

$$x_2' + 2x_2 = e^{-2t} \iff x_2(t) = -2x_2(t) + e^{-2t} = a(t)x_2 + b(t)$$

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \int -2\,dt = -2t \\ \int e^{-A(t)} b(t)\,dt &= \int e^{2t} e^{-2t}\,dt = t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_2(t) = e^{-2t}(k+t)$$

Tomando $k=0 \Longrightarrow x_2(t) = te^{-2t} \Longrightarrow y_2(t) = \dfrac{e^{-2t}(1-2t) + 5e^{-2t}}{-3} = \dfrac{e^{-2t}(2t-6)}{3}$

Por tanto, una m.f. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -e^{-2t} & \dfrac{e^{-2t}(2t-6)}{3} \end{pmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

3.3. [20] Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = 3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(ts)x(s)ds$$

tiene a lo sumo una solución $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.

Sea $y(t)$ otra solución para la ecuación integral.

Sea $f(t) = x(t) - y(t)$

Vemos $f(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(ts) f(s)\, ds$

$$|f(t)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 \operatorname{sen} ts\, f(s)\, ds\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\operatorname{sen} ts||f(s)|ds \leq$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |f(s)|\, ds$$

Como $[0,1]$ compacto, $\exists\, M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = |f(t_0)|$

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 M\, ds = \frac{1}{2}M \qquad \forall t \in I$$

$$|f(t_0)| = M \leq \frac{1}{2}M \implies \frac{1}{2}M \leq 0 \implies M = 0 \implies$$

$$|f(t)| \leq 0 \implies f(t) = x(t) - y(t) = 0 \implies x(t) = y(t)$$