# TEMA 6.- Leyes de los Grandes Números. Teorema Central del Límite

## Asignatura: PROBABILIDAD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar



Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 11/09/2023 a 22/12/2023

## Recordatorio de convergencia puntual y uniforme de sucesiones de funciones

- **Convergencia puntual de sucesiones de funciones**
  Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definida sobre un conjunto $\Omega$. Se dice que $f_n$ **converge puntualmente** a otra función $f$ real definida sobre el mismo conjunto $\Omega$ si: $\forall\omega \in \Omega$ y $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\omega,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$.

- **Convergencia uniforme de sucesiones de funciones**
  Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones reales definida sobre un conjunto $\Omega$. Se dice que $f_n$ **converge uniformemente** a otra función $f$ real definida sobre el mismo conjunto $\Omega$ si: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$ $\forall\omega \in \Omega$.

## Obervaciones

- La convergencia uniforme es una generalización de la puntual cuando $n_0$ es independiente de $\omega$.
- La **convergencia uniforme implica convergencia puntual**.
- La **convergencia puntual no implica, necesariamente, la convergencia uniforme**. (Pensar en la sucesión de funciones $f_n = \omega^n$ para $\omega \in [0,1]$).

## Convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $X$ variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con funciones de distribución $\{F_{X_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, y $F_X$, respectivamente. Se definen los siguientes **tipos de convergencia**:

- **Convergencia casi segura**:

$$X_n \rightarrow^{c.s.} X, \quad n \rightarrow \infty \;\Leftrightarrow\; P\left[\omega : \lim_{n\rightarrow\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right] = 1.$$

- **Convergencia en probabilidad**:

$$X_n \rightarrow^{P} X, \quad n \rightarrow \infty \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0,\; \lim_{n\rightarrow\infty} P\left[\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\right] = 1.$$

- **Convergencia en Ley o en distribución**:

$$X_n \rightarrow^{L} X, \quad n \rightarrow \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\rightarrow\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in C(F_X),$$

  siendo $C(F_X)$ el conjunto de puntos de continuidad de $F_X$.

## Observaciones

1. En teoría de la medida la **convergencia casi segura** es equivalente al concepto de **convergencia en casi todo punto**.
2. En teoría de la medida la **convergencia en probabilidad** es equivalente al concepto de **convergencia para la medida**.
3. La convergencia en probabilidad indica que fijado un $\varepsilon > 0$ hay un subconjunto de $\Omega$ con una probabilidad tan cercana a uno como se quiera en el que la distancia entre $X_n$ y $X$ se puede hacer menor que $\varepsilon$ sin más que tomar $n$ suficientemente grande.

## Algunos resultados

1. $X_n \to^P X \Leftrightarrow X_n - X \to^P 0$.
2. $X_n \to^P X \Rightarrow X_n - X_m \to^P 0 \; \forall n, m \in \mathcal{N}$. (Convergencia de Cauchy).
3. $aX_n + bY_n \to^P aX + bY$ con $X_n \to^P X$, $Y_n \to^P Y$, con $a, b \in \mathcal{R}$.
4. $X_n \to^P X$, $Y_n \to^P Y \Rightarrow X_nY_n \to^P XY$.
5. $X_n \to^P X \Rightarrow X_nY \to^P XY$ con $Y$ una variable aleatoria cualquiera.
6. $X_n \to^P X \Rightarrow g(X_n) \to^P g(X)$ con $g$ cualquier función continua en los reales.
7. $X_n \to^{c.s.} X \;\Rightarrow\; X_n \to^P X \;\Rightarrow\; X_n \to^L X$.
8. $X_n \to^L c \; (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow \; X_n \to^P c$.

## Teorema de continuidad para funciones generatrices de momentos

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $X$ variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad. Supongamos que **existen las funciones generatrices de momentos** $M_{X_n}$, $n \in \mathbb{N}$, y $M_X$ **sobre un intervalo común** de $\mathbb{R}$ con límites finitos o infinitos, conteniendo al cero, i.e., sobre $(-a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Se tiene entonces que:

$$\text{Si } M_{X_n}(t) \to M_X(t), \quad n \to \infty, \quad \forall t \in (-a, b) \;\Rightarrow X_n \to^L X.$$

## Ejemplo

Sea $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de variables aleatorias con f.m.p. dada por $P[X_n = 1] = \frac{1}{n}$ y $P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$.

Comprobar que la familia de funciones generatices de momentos de $X_n$, $M_{X_n}(t)$, converge puntualmente a la función constante 1, que es la función generatriz de momentos de una v.a., $X$, degenerada en 0 y por tanto aplicando este teorema de continuidad se tiene que $X_n \to^L X$.

Ejemplo

Sea $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de variables aleatorias con f.m.p. dada por $P[X_n = 1] = \frac{1}{n}$ y $P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$.

Comprobar que la familia de funciones generatices de momentos de $X_n$, $M_{X_n}(t)$, converge puntualmente a la función constante 1, que es la función generatriz de momentos de una v.a., $X$, degenerada en 0 y por tanto aplicando este teorema de continuidad se tiene que $X_n \to^L X$.

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \frac{1}{n} & X_n = 1 \\ 1-\frac{1}{n} & X_n = 0 \end{cases}$$

$$¿X_n \xrightarrow{L} X?$$

1º camino: $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) =$

2º camino:

$$\lim_{n\to+\infty} M_n(t) = \lim_{n\to+\infty} E[e^{X_n t}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}e^t + 1 - \frac{1}{n} = 1 = M_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $X \rightsquigarrow D(c=0)$ $\Longrightarrow$ $\{X_n\} \xrightarrow{L} X \rightsquigarrow D(c=0)$

## Leyes de los grandes números

Sean $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **independientes**. Adicionalmente, sea $S_n$ la variable aleatoria que define las **sumas parciales** de la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1.$$

Se consideran dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n \uparrow \infty$.

- **Ley débil de los grandes números respecto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.** Se dice que la sucesión aleatoria $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley débil respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to^{P} 0.$$

- **Ley fuerte de los grandes números respecto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.** Se dice que la sucesión aleatoria $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la ley fuerte respecto a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to^{c.s.} 0.$$

## Leyes de los grandes números

A continuación se formulan resultados que proporcionan **condiciones suficientes** o **condiciones necesarias y suficientes** para que una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **satisfaga la anteriores leyes** respecto a sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ apropiadas.

**Teorema 1** Ley débil de Bernoulli

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro $p$, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^P 0, \text{ y en consecuencia } \frac{S_n}{n} \to^P p.$$

**Lema 0** Desigualdad de Chebychev

Sea $X$ una v.a. con esperanaza finita $E[X] < \infty$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ se tiene que:

$$P[\{|X| \geq \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon] \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2}.$$

**Observaciones:**

- Si se considera la v.a. $X - E[X]$ se obtiene la versión clásica de esta desigualdad,

$$P[\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega) - E[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

- Si se toman complementarios también se puede escribir como sigue:

$$P[\{|X - E[X]| < \varepsilon\}] = P[\omega : |X(\omega) - E[X]| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

**Teorema 2** Ley débil de Khintchine

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y existe $E[X_n]=\mu$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n-E[S_n]}{n}\to^P 0,\ \text{y en consecuencia}\ \frac{S_n}{n}\to^P \mu.$$

**Demostración:**

Se demostrará para el caso particular en el que existe $E[X_n^2]$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$. A partir de la desigualdad de Chebychev, para cualquier $\varepsilon>0$, teniendo en cuenta que $X_i$, $i=1,\dots,n$, son independientes y con la misma distribución, y por tanto,

$$\mathbf{Var}\left(S_n-E[S_n]\right)=\mathbf{Var}\left(S_n\right)=\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n Var(X_i)=n\mathbf{Var}(X_1),$$

$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{S_n-E[S_n]}{n}\right|\geq\varepsilon\right) &\leq \frac{\mathbf{Var}\left(S_n-E[S_n]\right)}{\varepsilon^2 n^2}\\ &= \frac{n\mathbf{Var}(X_1)}{n^2\varepsilon^2}\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

En particular, dado que $E[S_n]=n\mu$, se obtiene $S_n/n\to^P\mu$, $n\to\infty$.

La ley débil de Bernoulli, se obtiene entonces considerando $\mu=p$.

**Lema 1** de Borel-Cantelli

Se considera una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, consideramos el límite superior de esta famila cuando $n \to \infty$, dado por la siguiente expresión:

$$A_\infty = \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n.$$

Se tiene entonces que:

(i). Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \;\Rightarrow\; P(A_\infty) = 0$.

(ii). Si los sucesos $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, son independientes y

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \;\Rightarrow\; P(A_\infty) = 1.$$

**Lema 2** Criterio de Integrabilidad

Sea $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces $X$ es absolutamente integrable, i.e.,

$$E[|X|] < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n] < \infty.$$

**Lema 3**

Sea $X$ v.a. con $E[X] < \infty$, y sea

$$A_n = \{\omega \in \Omega; |X(\omega)| \leq n\}.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E[X^2 I_{A_n}] < \infty.$$

## Lema 4

Bajo las condiciones del resultado anterior, se considera una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de **variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, absolutamente integrables**, con media $\mu = E[X_1] = E[X_n]$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Se define la sucesión de variables aleatorias truncadas

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } |X_n| \leq n \\ 0 & \text{si } |X_n| > n. \end{cases}$$

Las variables aleatorias $Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, **satisfacen las siguientes propiedades**:

(i). $\lim_{n\to\infty} E[Y_n] = \mu$

(ii). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$

(iii). $\forall \omega \in \Omega\backslash\Omega_0 \quad \exists n_0(\omega);\ X_n(\omega) = Y_n(\omega), \quad \forall n \geq n_0(\omega),\ P(\Omega_0) = 0.$

**Demostración:**

La prueba de (i) se deriva a partir del Teorema de Convergencia Dominada. La prueba de (ii) es consecuencia del Lema 3. Finalmente, (iii) se obtiene de la aplicación del Lema de Borel Cantelli, con $A_n = \{\omega \in \Omega;\ |X_n(\omega)| > n\}$, aplicando el Lema 2, lo que implica que la sucesión $|X_n| \to_{c.s.} 0$.

### Corolario 1

Bajo las condiciones del lema anterior, el suceso

$$B = \left\{ \omega \in \Omega; \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |X_k(\omega) - Y_k(\omega)| = 0 \right\}.$$

se cumple con probabilidad uno, i.e., $P(B) = 1$.

**Demostración:**

Este corolario se obtiene de forma directa del Lema 4, teniendo en cuenta que para cualquier $\omega \in \Omega$, existe $n(\omega)$ tal que $|X_n(\omega) - Y_n(\omega)| = 0$, para $n \geq n(\omega)$. Por tanto,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |X_k(\omega) - Y_k(\omega)| = \frac{n(\omega)}{n}, \quad \forall n \geq n(\omega).$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |X_k(\omega) - Y_k(\omega)| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall \omega \in \Omega \backslash \Omega_0, \ P(\Omega_0) = 0.$$

**Lema 5** Primera ley fuerte de Kolmogorov

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con esperanza finita, y supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Entonces

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} \to^{c.s.} 0, \quad \mu_i = E[X_i], \quad i = 1, \ldots, n.$$

**Teorema 3** Segunda ley fuerte de Kolmogorov

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), con $E[|X_n|] < \infty$. Se tienen entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^{c.s} 0.$$

En realidad, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d.

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^{c.s} 0 \Leftrightarrow E[|X_n|] < \infty.$$

**Demostración:** Se consideran los sucesos,

$$\begin{aligned} C &= \{\omega \in \Omega;\ \frac{S_n(\omega)}{n} \to \mu, \quad n \to \infty\} \\ D &= \{\omega \in \Omega;\ \frac{Y_1(\omega) + \cdots + Y_n(\omega) - n\overline{\mu}_n}{n} \to 0, \quad n \to \infty\}, \end{aligned}$$

donde $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$, $\mu_i = E[Y_i]$, $i = 1, \dots, n$, e $Y_i$ se define como en el Lema 4, para $i = 1, \dots, n$. La sucesión $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la hipótesis del Lema 5 (primera ley fuerte de Kolmogorov). Por tanto, $\frac{Y_1(\omega)+\cdots+Y_n(\omega)-n\overline{\mu}_n}{n} \to 0$, c.s. Bajo las hipótesis consideradas, el suceso $B$ definido en el Corolario 1, se da con probabilidad 1 (i.e., aplicando el Lema 4). Por otra parte, si se da el suceso $C$, el suceso $D$ se da con $\overline{\mu}_n \to \mu$, $n \to \infty$, en virtud de $P(B) = 1$. Por tanto, $B \cap D \subset C$, y $P(B) = P(D) = 1 \Rightarrow P(C) = 1$.

**Corolario 2** Ley fuerte de Borel

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro $p$, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1, p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^{c.s.} 0, \qquad \frac{S_n}{n} \to^{c.s.} p.$$

**Teorema 4** Primer teorema límite (Bernoulli)

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro $p$, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^L 0.$$

**Demostracion:** Se obtiene de forma directa del Corolario 2, dado que la convergencia casi segura implica la convergencia en Ley.

**Teorema 5** Segundo teorema límite (De Moivre y Laplace)

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro $p$, i.e., $X_n \sim \mathcal{B}(1,p)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

**Teorema 6**

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una Bernoulli con parámetro $p_n$, y $S_{nn} = \sum_{i=1}^{n} X_{ni}$. Entonces,

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} np_n = \lambda(> 0) \ \Rightarrow \ S_{nn} \to^{L} Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

## Observación

A continuación se formulará un resultado sobre **el problema clásico de límite central**, que consiste en derivar condiciones suficientes que garanticen, que para una sucesión de variables aleatorias independientes, sobre el mismo espacio probabilístico base $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se dan los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \frac{S_n - E[S_n]}{n} &\to^{L} 0, \quad \exists E[X_n], \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} &\to^{L} Z \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \exists E[X_n^2], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Se considera el siguiente lema que se aplicará en la demostración del **Teorema límite de Lévy** que posteriormente se enuncia.

**Lema 6**

Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos tal que $c_n \to c$, $n \to \infty$. Entonces

$$\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n \to \exp(c), \quad n \to \infty.$$

**Teorema 7** Teorema límite de Lévy

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Se tienen los siguientes límites en ley:

(i) Si $\exists E[X_1] \Rightarrow \exists E[X_n]$, $\forall n$, se tiene $\frac{S_n - E[S_n]}{n} \to^L 0$.

(ii) Si $\exists E[X_1^2] \Rightarrow \exists E[X_n^2]$, $\forall n$, se tiene $\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \to^L Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

## Teorema límite de Levy (Demostración)

La afirmación (i) se obtiene como consecuencia directa del Teorema 2 o bien, del Teorema 3.

La afirmación (ii) se demostrará para el caso particular, donde existe la función generatriz de momentos de las variables aleatorias de la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas, todas ellas, sobre un intervalo común.

Se considera la secuencia

$$S_n^* = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma},$$

donde $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Se asume que $\mu = E[X_n] = 0$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se considera $\widetilde{X}_n = X_n - \mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Dado que $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, son independientes e idénticamente distribuidas, con $\mu = 0$, la función generatriz de momentos

$$M_{S_n^*}(t) = \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n,$$

donde $M_{X_1} = M_{X_n} = M_X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se considera ahora el desarrollo de Taylor de segundo orden de $M_X = E[\exp(tX)]$, $t \in (-a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, que relaciona las derivadas en cero de la función generatriz de momentos con los momentos de $X$. Es decir,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= 1 + \frac{dM_X(0)}{dt}t + \frac{1}{2}\frac{d^2M_X(0)}{dt^2}t^2 + t^2 e_2(t) \\ &= 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2 e_2(t) = 1 + t^2\left[\frac{\sigma^2}{2} + e_2(t)\right], \quad \lim_{t\to 0} e_2(t) = 0. \end{aligned}$$

## Teorema límite de Levy (Demostración continuación)

Se considera ahora la correspondiente aproximación para $M_{S_n^*}(t)$. Más concretamente,

$$M_{S_n^*}(t) \quad = \quad \left(1 + \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 \left[\frac{\sigma^2}{2} + e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right]\right)^n$$

Además,

$$t^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right] \to \frac{t^2}{2}, \quad n \to \infty.$$

Aplicando el Lema 6, fijado un $t$, siendo

$$c_n = t^2\left[\frac{1}{2} + \frac{e_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)}{\sigma^2}\right], \quad c = \frac{t^2}{2}$$

se obtiene

$$M_{S_n^*}(t) \to \exp\left(\frac{t^2}{2}\right), \quad n \to \infty,$$

que corresponde a la función generatriz de momentos de una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. Por el teorema de continuidad para funciones generatrices de momentos se obtiene que

$$S_n^* \to^L Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

### Observación

El nombre del **teorema del límite central** se debe a que **proporciona una buena aproximación en el centro** de la distribución, **pero no tan buena en las colas** de la misma.

[1] Ash, R.B. (2008). Basic Probability Theory. Dover Publications Inc., New York.

[2] Canavos, G. (2003). Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos. McGraw-Hill Interamericana, México.

[3] Casas Sánchez, J.M. (2000). Estadística I. Probabilidad y Distribuciones. Ed. Centro de estudios Ramón Areces, S.A.

[4] Chung, K.L., AitSahlia, F. (2003). Elementary Probability Theory with Stochastic Processes and an Introduction to Mathematical Finance. Springer-Verlag, New York.

[5] DeGroot, M.H., Schervish, M.J. (2002). Probability and Statistics. Addison-Wesley, Boston.

[6] García-Ligero, M.J., Hermoso Carazo, A., Maldonado Jurado, J.A., Román Román, P., Torres Ruíz, F. (2007). Curso Básico de Probabilidad con CDPYE (CD). Copicentro Editorial, Universidad de Granada.

[7] Haigh, J. (2002). Probability Models. Springer-Verlag, London.

[8] Mukhopadhyay, N. (2000). Probability and Statistical Inference. Marcel Dekker, New York.

[9] Rohatgi, V.K., Saleh, A.K. (2008). An Introduction to Probability and Statistics. John Wiley and Sons, New York.

[10] Ruiz-Camacho, M., Morcillo-Aixelá, M.C., García Galisteo, J., Del Castillo Vázquez, C. (2000). Curso de Probabilidad y Estadística. Universidad de Málaga/Manuales.

[11] Vélez, R., Hernández, V. (1995). Cálculo de Probabilidades 1. UNED, Madrid.