Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Primera parte

1.1. Se considera la transformación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ \varphi(t,x) = (s,y),\ s = 3t,\ y = x + \frac{x^3}{3}.$$

a) [10] Demuestra que φ es un C^1 difeomorfismo del plano.

b) [15] Demuestra que φ define un cambio admisible para la ecuación $x' = \frac{3x+x^3}{1+x^2}$ y encuentra la ecuación transportada al plano (s,y).

c) [15] Resuelve el problema $x' = \frac{3x+x^3}{1+x^2}$, $x(0) = 1$. ¿En qué intervalo está definida la solución?

1.2. Se considera la familia de curvas $\{\mathcal{C}_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ definida por la ecuación

$$x^2 + ay^2 = 1$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

a) [10] Dibuja la curva $\mathcal{C}_a$ distinguiendo los casos a positivo, $a = 0$ y a negativo.

b) [15] Encuentra la ecuación diferencial de esta familia de curvas.

c) [15] Encuentra y resuelve la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales.

1.3 [20] Se considera el sistema autónomo $x' = f(x,y), y' = g(x,y)$ donde $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y $g(x,y) \neq 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se supone que $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ es una solución. Demuestra que ψ admite una función inversa $t = \psi^{-1}(y)$, definida en algún intervalo abierto, y encuentra la ecuación diferencial que cumple la función $\varphi(\psi^{-1}(y))$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Segunda parte

2.1. Se considera la ecuación

$$x'' + \frac{1}{t}x' = 0, \quad t \in]0, \infty[$$

y se denota por Z al espacio vectorial de sus soluciones. Para cada $\tau > 0$ se considera la aplicación lineal $\Psi_\tau : Z \to \mathbb{R}^2, \ \ x \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau) \\ x'(\tau) \end{pmatrix}$.

a) [15] ¿Qué dimensión tiene Z? Encuentra una base.

b) [15] Calcula $\Psi_e^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) [10] Demuestra que $\Psi_{\tau_1} \neq \Psi_{\tau_2}$ si $\tau_1 \neq \tau_2$.

2.2. Se considera la función

$$\varphi(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty).$$

a) [10] Encuentra una función continua $p : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de manera que $\varphi(t)$ sea solución de la ecuación diferencial

$$x' = x^2 + p(t).$$

b) [30] Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(1) = 0$.

2.3. Se considera el campo de fuerzas

$$F(x, y) = \Big(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\Big), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

a) [10] ¿Admite F un potencial?

b) [10] Calcula el trabajo del campo F a lo largo de la curva $\gamma(t) = (\cos t, 2\text{sen } t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
14 de Junio de 2017. Examen Final. Tercera parte

3.1. Consideramos la ecuación lineal de tercer orden

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0$$

con a, b, c parámetros reales.

a) [10] Si $c > 0$, demuestra que la ecuación tiene al menos una solución no trivial $x(t)$ tal que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

b) [10] Determina el conjunto de parámetros a, b, c tal que e^{-t} es solución de la ecuación.

c) [20] Dada la ecuación completa

$$x''' + x'' + 4x' + 4x = \operatorname{sen} t,$$

encuentra una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados y calcula la solución general.

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & -a(t) \\ -b(t) & b(t) \end{pmatrix} x$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$.

a) [10] Encuentra una solución constante.

b) [15] Si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ es la solución tal que $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, relaciona las componentes $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ por medio de la fórmula de Jacobi-Liouville para sistemas.

c) [15] Sustituye en el sistema la relación obtenida en b) para expresar $\varphi(t)$ en términos de a, b y sus primitivas.

3.3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [10] Existe una función matricial $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ tal que $x = \begin{pmatrix} t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es solución del sistema $x' = A(t)x$.

b) [10] Si A es nilpotente, entonces e^A también lo es.

3.1. Consideramos la ecuación lineal de tercer orden

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0$$

con a, b, c parámetros reales.

a) [10] Si $c > 0$, demuestra que la ecuación tiene al menos una solución no trivial $x(t)$ tal que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

b) [10] Determina el conjunto de parámetros a, b, c tal que e^{-t} es solución de la ecuación.

c) [20] Dada la ecuación completa

$$x''' + x'' + 4x' + 4x = \operatorname{sen} t,$$

encuentra una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados y calcula la solución general.

A)

Buscamos sol. de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda^3 e^{\lambda t} + a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Si $c > 0 \Rightarrow \exists\, \lambda < 0$ que verifica la ecuación $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t} = 0$

B)

$x(t) = e^{-t}$, $x'(t) = -e^{-t}$, $x''(t) = e^{-t}$, $x'''(t) = -e^{-t}$

$-e^{-t} + ae^{-t} - be^{-t} + ce^{-t} = e^{-t}(-1 + a - b + c) = 0$

Por tanto, $a - b + c = 1$

C)

- $x''' + x'' + 4x' + 4x = \operatorname{sen} t$

Sea $x(t) = a \operatorname{sen} t + b\cos t$ $\quad$ $x''(t) = -a\operatorname{sen} t - b\cos t$

$x'(t) = a\cos t - b \operatorname{sen} t$ $\quad$ $x'''(t) = -a\cos t + b\operatorname{sen} t$

$-a\cos t + b\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} t - b\cos t + 4a\cos t - 4b\operatorname{sen} t + 4a\operatorname{sen} t + 4b\cos t =$

$\cos t(-a - b + 4a + 4b) + \operatorname{sen} t(b - a - 4b + 4a) = (3a + 3b)\cos t + (3a - 3b)\operatorname{sen} t$

$= \operatorname{sen} t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a + 3b = 0 \\ 3a - 3b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{1}{6} \end{array}\right.$

Por tanto, $x_*(t) = \frac{1}{6}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\cos t$ es sol. particular.

• $x''' + x'' + 4x' + 4x = 0$

Sea $x(t) = e^{\lambda t}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda^3 e^{\lambda t} + \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

sea $\lambda_1 = 2i$

$$e^{2ti} = \cos(2t) + i\,\text{sen}(2t)$$

$$y_1(t) = Re(e^{2ti}) = \cos 2t$$

$$y_2(t) = Im(e^{2ti}) = \text{sen}\, 2t$$

Por tanto,

$$y(t) = \frac{1}{6}(\text{sen}\, t - \cos t) + c_1 e^{-t} + C_2 \cos 2t + C_3\, \text{sen}\, 2t$$

3.2. Consideramos el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & -a(t) \\ -b(t) & b(t) \end{pmatrix} x$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$.

a) [10] Encuentra una solución constante.

b) [15] Si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ es la solución tal que $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, relaciona las componentes $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ por medio de la fórmula de Jacobi-Liouville para sistemas.

c) [15] Sustituye en el sistema la relación obtenida en b) para expresar $\varphi(t)$ en términos de a, b y sus primitivas.

A)

$$x_1' = a(t)\, x_1 - a(t)\, x_2$$

$$x_2' = -b(t)\, x_1 + b(t)\, x_2$$

Vemos que $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es cte y cumple el sist.

B)

Vemos que $W(x, \varphi)(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |W(x,\varphi)(0)| = 1 \neq 0 \Rightarrow x, \varphi_1$ base y $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ 1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ es m.f.

Si Φ es m.f del sist., por fórmula Jacobi-Liouville

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A} \Rightarrow -\varphi_1^{(t)} + \varphi_2^{(t)} = 1 \cdot e^{\int_0^t a(s) + b(s)\, ds} \Rightarrow$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + e^{\int_0^t a(s) + b(s)\, ds} \Rightarrow \varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1(t) + e^{\int_0^t a(s)+b(s) ds} \end{pmatrix}$$

C)

Como $a, b \in C(\mathbb{R})$, por TFC,

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_1'(t) + (a(t) + b(t))\, e^{\int_0^t a(s)+b(s)\, ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & -a(t) \\ -b(t) & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1(t) + e^{\int_0^t a(s)+b(s) ds} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -a(t)\, e^{\int_0^t a(s) + b(s) ds} \\ b(t)\, e^{\int_0^t a(s) + b(s) ds} \end{pmatrix}$$

3.3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [10] Existe una función matricial $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ tal que $x = \begin{pmatrix} t \\ \text{sen}t \end{pmatrix}$ es solución del sistema $x' = A(t)x$.

b) [10] Si A es nilpotente, entonces e^A también lo es.

A)

se tiene $\begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix}$

Vemos que $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, condición inicial que también cumple $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Por Tª unicidad no es posible.

B)

A nilpotente $\Rightarrow A^n = 0 \quad \forall n \geq N$, N= orden de la matriz.

Por tanto, $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} A^n$, la cual no puede ser nilpotente al tener una diagonal de 1's.