Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. 12 de Septiembre de 2017.

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \qquad x'' + 4x = 1 + \cos 3t.$$

a) [15] Encuentra todas las soluciones de esta ecuación.

b) [10] Determina la solución que cumple $x(0) = x'(0) = 0$. ¿Es única?

c) [5] ¿Es cierto que todas las soluciones cumplen $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$? ¿Son periódicas?

2 Se considera el sistema autónomo

$$x' = 2xy, \quad y' = x^2 - y^2.$$

a) [20] Encuentra la órbita que pasa por el punto $P = (1, 2)$.

b) [5] Expresa dicha órbita en la forma explícita $y = y(x)$, $x \in I$, para un intervalo I apropiado.

c) [5] Determina el intervalo I y dibuja la órbita.

3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [7] Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y dos funciones $P, Q \in C^1(\Omega)$, con $P(t,x) \neq 0$ para cada $(t,x) \in \Omega$, y tales que la ecuación diferencial $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$ admite simultáneamente los factores integrantes $\mu_1(t,x) = 1$ y $\mu_2(t,x) = x$.

b) [7] La sucesión $f_n(t) = t^n$ es uniformemente convergente en el intervalo $]0,1[$.

c) [7] Si A es nilpotente de orden 2, entonces $e^{(I+A)t} = e^t(I + At)$.

4. Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$ se supone que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$. Se define la función

$$\psi(t) = \int_0^t [\phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)] \cos s ds.$$

a) [7] Demuestra que $\psi \in C^2(\mathbb{R})$

b) [7] Encuentra una ecuación diferencial que tenga a ψ como solución.

c) [7] Halla todas las soluciones de la ecuación del apartado anterior.

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \quad x'' + 4x = 1 + \cos 3t.$$

a) [15] Encuentra todas las soluciones de esta ecuación.

b) [10] Determina la solución que cumple $x(0) = x'(0) = 0$. ¿Es única?

c) [5] ¿Es cierto que todas las soluciones cumplen $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$? ¿Son periódicas?

A)

Por Principio superposición, las soluciones serán de la forma

$x(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t) + \ker L$, donde

$L : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \,/\, L[x] = x'' + 4x$,

x_1^*, x_2^* son sol. particulares de $L[x] = 1$, $L[x] = \cos 3t$ resp.

- Homogénea:

$x'' + 4x = 0 \implies x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$,

pues $\dim(\ker L) = 2$ y $W(\varphi_1, \varphi_2)(t) = 1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

- $x'' + 4x = 1$

Vemos que $x_1^*(t) = \frac{1}{4}$ es sol. particular.

- $x'' + 4x = \cos 3t$

Sea $x(t) = a \cos 3t + b \operatorname{sen} 3t$ una sol. de la ec

$x'(t) = -3a \operatorname{sen} 3t + 3b \cos 3t$

$x''(t) = -9a \cos 3t - 9b \operatorname{sen} 3t$

Por ser sol., $-9a \cos 3t - 9b \operatorname{sen} 3t + 4a \cos 3t + 4b \operatorname{sen} 3t = \cos 3t \implies$

$-5a \cos 3t - 5b \operatorname{sen} 3t = \cos 3t \implies \begin{cases} a = -1/5 \\ b = 0 \end{cases}$

$x_2^*(t) = -\frac{1}{5} \cos 3t$ es sol. particular.

Por tanto, la sol. general es de la forma

$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cos 3t + c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$

B)

Por Tª Existencia y Unicidad, la sol. que cumple $x'(0)=x(0)=0$ es única.

$$x'(t) = \frac{3}{5}\,\text{sen}\,3t - 2c_1\,\text{sen}\,2t + 2c_2\cos 2t$$

$$x'(0) = 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1/20$$

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\cos 3t - \frac{1}{20}\cos 2t$$

C)

No es cierto, porque los senos y cosenos no tienen límite.

Todas las soluciones son periódicas, al ser suma de constante y trigonométricas.

2 Se considera el sistema autónomo

$$x' = 2xy, \quad y' = x^2 - y^2.$$

a) [20] Encuentra la órbita que pasa por el punto $P = (1,2)$.

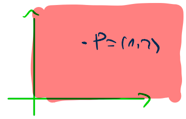
b) [5] Expresa dicha órbita en la forma explícita $y = y(x)$, $x \in I$, para un intervalo I apropiado.

c) [5] Determina el intervalo I y dibuja la órbita.

A)

Dado que se trata de un sist. autónomo, tiene sentido el cálculo de las órbitas.

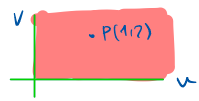
$$x' = f(x,y)$$
$$y' = g(x,y)$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$$

Vemos que se trata de una ecuación homogénea con grado de homogeneidad 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad h(\xi) = \frac{1-\xi^2}{2\xi^2}$$



Sea el cambio de variable $\varphi: \begin{cases} u = x \\ v = y/x \end{cases}$ $\quad \psi: \begin{cases} x = u \\ y = vu \end{cases}$

$y' = v'u + v \Rightarrow v' = \frac{1}{u}\left(\frac{1-v^2}{2v} - v\right)$. Se trata de una ecuación de variables separadas.

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}\left(\frac{-3v^2+1}{2v}\right)$$

Sol. ctes: $\frac{-3v^2+1}{2v} = 0 \Rightarrow v = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Descartamos, pues no pasa por P.

$$-\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{2v}{3v^2-1}\,dv \Rightarrow -\ln(u) + C = \frac{1}{3}\ln|3v^2-1| \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\ln(u^{-3}) + C = \ln|3v^2-1| \Rightarrow u^{-3}e^{C} = |3v^2-1| \Rightarrow$$

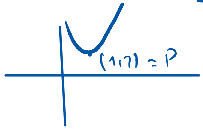
$$3v^2 - 1 = K u^{-3} \quad K \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = K x^{-3}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow 3\cdot 2^2 - 1 = K \Rightarrow K = 11$$

$$O = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \;/\; 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 - 11x^3 = 0\right\}$$

B) $\frac{3y^2}{x^2} - 1 = \frac{11}{x^3} \Rightarrow y = x\sqrt{\frac{\frac{11}{x^3}+1}{3}} \Rightarrow O = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \;/\; y = x\sqrt{\frac{\frac{11}{x^3}+1}{3}}\right\}$

C) $I =]0, +\infty[$



3. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

a) [7] Existe un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y dos funciones $P, Q \in C^1(\Omega)$, con $P(t,x) \neq 0$ para cada $(t,x) \in \Omega$, y tales que la ecuación diferencial $P(t,x) + Q(t,x)x' = 0$ admite simultáneamente los factores integrantes $\mu_1(t,x) = 1$ y $\mu_2(t,x) = x$.

b) [7] La sucesión $f_n(t) = t^n$ es uniformemente convergente en el intervalo $]0,1[$.

c) [7] Si A es nilpotente de orden 2, entonces $e^{(I+A)t} = e^t(I + At)$.

A)

Si $\mu_1(t,x) = 1 \Longrightarrow$ La ecuación es exacta $\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x}$

Por tanto, veamos si una ecuación exacta puede tener un f.i. de la forma $\mu_2(t,x) = m(x)$, $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mu_2 \text{ f.i.} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_2(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \Omega \\ \frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} \end{cases} \Longleftrightarrow \mu_x P + \mu P_x = \mu_t Q + \mu Q_t$$

$$\Longleftrightarrow P + xP_x = xQ_t \underset{\text{Condición exactitud}}{\Longleftrightarrow} P(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in \Omega \quad \text{CONTRADICCIÓN!!!}$$

Por tanto, no puede ocurrir.

B)

$\lim_{n \to +\infty} t^n = 0 \quad \forall t \in]0,1[= I$ Sea $f: I \to \mathbb{R} / f(t) = 0$ su límite puntual.

$\{f_n\}$ c.u. en $I =]0,1[\Longleftrightarrow \|f_n(t) - f(t)\|_\infty \to 0 \Longleftrightarrow$

$\|t^n\|_\infty = \sup_{t \in I} \{|t^n|\} = 1 \not\to 0 \Longrightarrow \{f_n\} \not\to f$ c.u.

C)

Si A nilpotente de orden 2 $\Longrightarrow A^2 = 0$

$$e^{(I+A)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}((I+A)t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(I+A)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(I+nA) =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} I + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(At) = e^t(I + At) \checkmark$$

4. Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$ se supone que $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$. Se define la función

$$\psi(t) = \int_0^t [\phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)] \cos s ds.$$

a) [7] Demuestra que $\psi \in C^2(\mathbb{R})$

b) [7] Encuentra una ecuación diferencial que tenga a ψ como solución.

c) [7] Halla todas las soluciones de la ecuación del apartado anterior.

A)

Dado que ϕ_1, ϕ_2 son soluciones de $x'' + a(t)x = 0$, $a \in C(\mathbb{R}) \Longrightarrow \phi_1, \phi_2 \in C^2(\mathbb{R})$

Por tanto, dado que $\phi_1(t)\phi_2(t) - \phi_1(t)\phi_2(t) \cdot \cos t \in C^2(\mathbb{R})$, por TFC $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

$$\psi(t) = \phi_1(t)\int_0^t \phi_2(s)\cos s \, ds - \phi_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\cos(s) \, ds$$

$$\psi'(t) = \phi_1'(t)\int_0^t \phi_2(s)\cos s ds + \phi_1(t)\phi_2(t)\cos t$$

$$- \phi_2'(t)\int_0^t \phi_1(s)\cos s ds - \phi_2(t)\phi_1(t)\cos t =$$

$$\phi_1'(t)\int_0^t \phi_2(s)\cos(s) ds - \phi_2'(t)\int_0^t \phi_1(s)\cos s ds$$

Por la misma razón que antes, por T.F.C. $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ con

$$\psi''(t) = \phi_1''(t)\int_0^t \phi_2(s)\cos(s) ds + \phi_1'(t)\phi_2(t)\cos(t)$$

$$- \phi_2''(t)\int_0^t \phi_1(s)\cos(s) ds - \phi_2'(t)\phi_1(t)\cos t =$$

$$\int_0^t (\phi_1''(t)\phi_2(s) - \phi_2''(t)\phi_1(s))\cos s ds + \cos t\,(\phi_1'(t)\phi_2(t) - \phi_1(t)\phi_2'(t))$$

B)

Como ϕ_1, ϕ_2 son sol., cumplen $\phi_1'' = -a(t)\phi_1$

$\phi_2'' = -a(t)\phi_2$

$\psi''(t) =$

$$\int_0^t (\phi_1''(t)\,\phi_2(s) - \phi_2''(t)\,\phi_1(s)) \cos s\, ds + \cos t\, (\phi_1'(t)\,\phi_2(t) - \phi_1(t)\,\phi_2'(t)) =$$

$$\int_0^t (-a(t)\,\phi_1(t)\,\phi_2(s) + a(t)\,\phi_2(t)\,\phi_1(s)) \cos s\, ds - W(\phi_1,\phi_2)(t)\cos t$$

$$= -a(t)\int_0^t (\phi_1(t)\,\phi_2(s) + \phi_2(t)\,\phi_1(s)) \cos s\, ds - W(\phi_1,\phi_2)(t)\cos t =$$

$$-a(t)\,\psi(t) - W(\phi_1,\phi_2)(t)\cos t$$

C)

Renombramos la ecuación:

$$x''(t) = -a(t)\,x(t) - W(\phi_1,\phi_2)(t)\cos t$$

Hemos visto que ϕ_1, ϕ_2 son sol. de la homogénea, y ψ es solución de la completa $\Rightarrow$ La solución general del sist vendrá dada por

$$x(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \psi(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$