EJERCICIO 1:

Dado (X, Y) discreto con f.m.p $P[X=x, Y=y] = k(x+1)(y+1)$ donde $x, y = 0, 1, 2$.

ⓐ Calcular k

Para que sea f.m.p. tiene que suceder que:

- $P[X=x, Y=y] = k(x+1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$
- $\sum_{x,y=0}^{2} P[X=x, Y=y] = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k[1+2+3+2+4+6+3+6+9] = 1$

$\Leftrightarrow 36k = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = 1/36}$

ⓑ Calcular las distribuciones marginales

Comenzamos con el cálculo de la f.m.p conjunta

$X \backslash Y$	0	1	2	Marginal de X (P_X)
0	1/36	2/36	3/36	6/36 = 1/6
1	2/36	4/36	6/36	12/36 = 1/3
2	3/36	6/36	9/36	18/36 = 1/2
Marginal de Y (P_Y)	1/6	1/3	1/2	$\sum_{x,y} = \frac{36}{36} = 1$

ⓒ Calcular las distribuciones condicionadas de $X/_{Y=y}$ con $y = 0, 1, 2$

Es fácil comprobar que:

$$P_{X/_{Y=0}} = P_{X/_{Y=1}} = P_{X/_{Y=2}} = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x=0 \\ 1/3 & \text{si } x=1 \\ 1/2 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

ⓓ Calcular $P[X+Y>2]$ y $P[X^2+Y^2 \leq 1]$

Para calcular estas probabilidades, tan solo hay que identificar los pares (X, Y) que satisfacen la condición pedida.

- $\boxed{P[X+Y>2]} = P[X+Y \geq 3] = 6/36 + 6/36 + 9/36 = 21/36 = \boxed{7/12}$

$(X, Y) = (1,2); (2,1); (2,2)$

- $\boxed{P[X^2+Y^2 \leq 1]} = 1/36 + 2/36 + 2/36 = \boxed{5/36}$

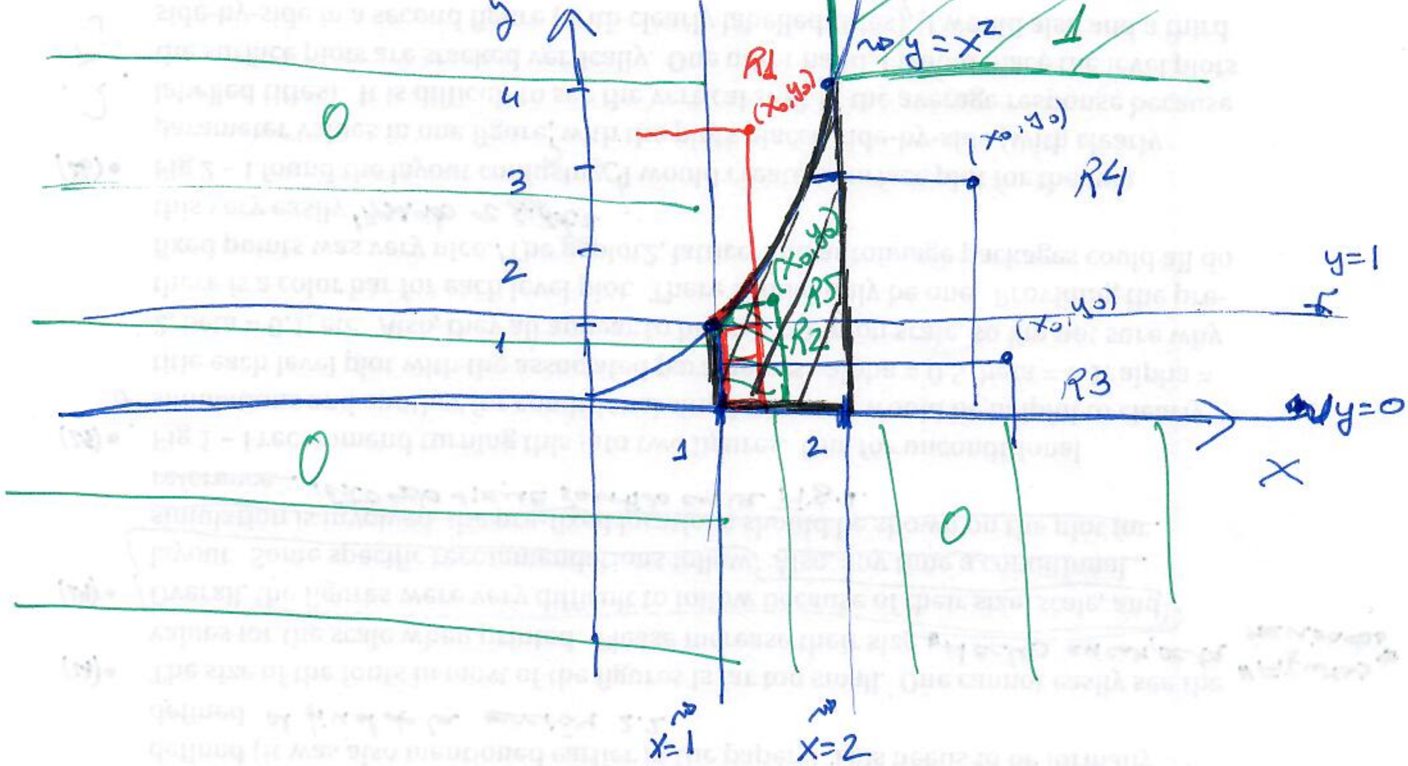
$(X, Y) = (0,0); (0,1); (1,0)$

EJERCICIO 2:

Sea (X, Y) con $f(x,y) = K/x^2$ si $1<x<2$, $0<y<x^2$

ⓐ obtener $K>0$ para que f sea función de densidad

Dibujamos el recinto donde $f(x,y)>0$. Está limitado por las rectas $x=1$, $x=2$, $y=0$ además de por la parábola $y=x^2$



Para que f sea función de densidad $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{K}{x^2}\,dy\,dx = \int_1^2 \frac{K}{x^2}\Big[y\Big]_0^{x^2} dx = \int_1^2 K\,dx = Kx\Big]_1^2 =$$

$$= K \Rightarrow \boxed{K=1}$$

y por tanto la función de densidad es

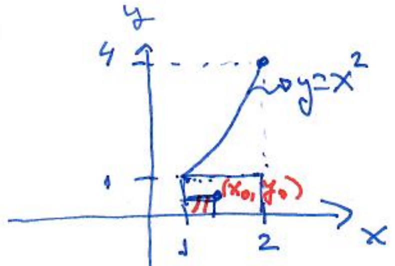
$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } 1<x<2;\ 0<y<x \\ 0 & \end{cases}}$$

ⓐ Obtener la función de distribución de f:

(Ver la representación gráfica del recinto en el aptdo. ⓐ anterior.

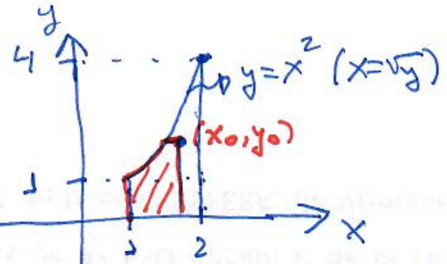
$$F(x_0,y_0)=P[X\le x_0, Y\le y_0]=\begin{cases} 0 & \longrightarrow x_0\le 1 \text{ ó } x_0\ge 1;\ y_0<0 \\ R_2=y_0-\dfrac{y_0}{x_0} & \longrightarrow 1<x_0<2;\ 0<y_0<1 \\ R_5=2\sqrt{y_0}-1-\dfrac{y_0}{x_0} & \longrightarrow 1<x_0<2;\ 1<y_0<x_0^2 \\ R_1=x_0-1 & \longrightarrow 1<x_0<2;\ y_0\ge x_0^2 \\ R_3=y_0/2 & \longrightarrow x_0\ge 2;\ 0<y_0<1 \\ R_4=2\sqrt{y_0}-1-\dfrac{y_0}{2} & \longrightarrow x_0\ge 2;\ 1<y_0<4 \\ 1 & \longrightarrow x_0\ge 2;\ y_0\ge 4 \end{cases}$$

$\boxed{R_2}$



$$R_2=\int_1^{x_0}\int_0^{y_0}\frac{1}{x^2}\,dy\,dx=\int_1^{x_0}\frac{y_0}{x^2}\,dx=\left(\frac{-y_0}{x}\right]_1^{x_0}=\underline{\underline{y_0-\frac{y_0}{x_0}}}$$

$\boxed{R_5}$



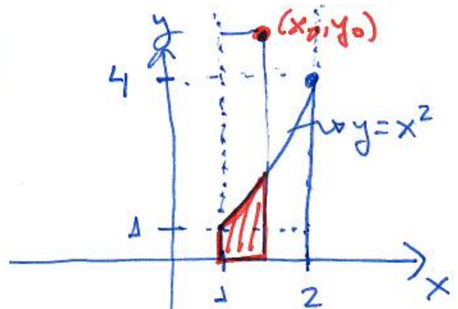
Nota: aquí he elegido el orden de integración $dx\,dy$, aunque también puede hacerse con el orden $dy\,dx$

$$R_5=\int_0^1\int_1^{x_0}\frac{1}{x^2}\,dx\,dy+\int_1^{y_0}\int_{\sqrt{y}}^{x_0}\frac{1}{x^2}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{x}\right]_1^{x_0}dy+\int_1^{y_0}\left(-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^{x_0}dy=\int_0^1 1-\frac{1}{x_0}\,dy+\int_1^{y_0}\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{x_0}\,dy=$$

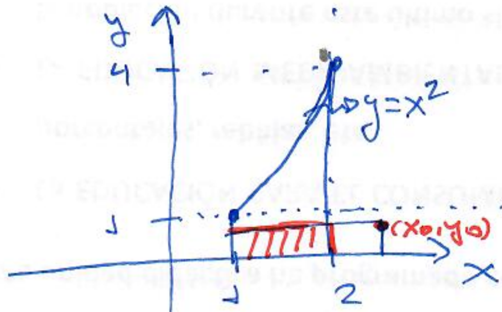
$$=1-\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}(y_0-1)+2\sqrt{y_0}-2=2\sqrt{y_0}-1-\frac{y_0}{x_0}$$

$\boxed{R_1}$



$$R_1 = \int_1^{x_0}\int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx = \int_1^{x_0} \frac{x^2}{x^2}\,dx = \int_1^{x_0} 1\,dx = \underline{x_0 - 1}$$

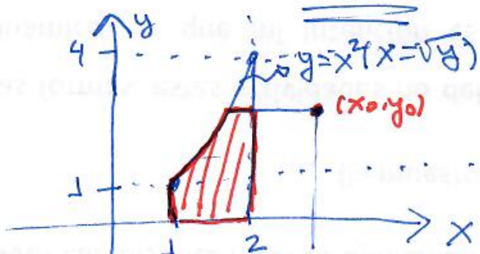
$\boxed{R_3}$



$$R_3 = \int_1^{2}\int_0^{y_0} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx = \int_1^{2} \frac{1}{x^2}\Big[y\Big]_0^{y_0} dx = y_0\left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 =$$

$$= y_0\left(-\tfrac{1}{2}+1\right) = \underline{\underline{\frac{y_0}{2}}}$$

$\boxed{R_4}$



Nota: aquí también he elegido el orden $dx\,dy$

$$R_4 = \int_0^1\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx\,dy + \int_1^{y_0}\int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 dy + \int_1^{y_0} \left[\frac{-1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_1^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2} + \Big[2\sqrt{y}\Big]_1^{y_0} - \frac{1}{2}\Big[y\Big]_1^{y_0} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{y_0} - 2 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2} =$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{y_0} - 1 - \frac{y_0}{2}}}$$

En conclusión si usamos $x = x_0$ e $y = y_0$

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \longrightarrow x<1 \text{ ó } x>1;\ y<0 \\ \cancel{(y - \frac{y}{x})}\ \cancel{(y - \frac{x}{y})}\ y - \frac{y}{x} & \longrightarrow 1<x<2;\ 0<y<1 \\ 2\sqrt{y} - 1 - \frac{y}{x} & \longrightarrow 1<x<2;\ 1<y<x^2 \\ x-1 & \longrightarrow 1<x<2;\ y>x^2 \\ y/2 & \longrightarrow x\geq 2;\ 0<y<1 \\ 2\sqrt{y} - 1 - y/2 & \longrightarrow x\geq 2;\ 1<y<4 \\ & \longrightarrow x\geq 2;\ y\geq 4 \end{cases}$$

ⓑ Calcular las densidades de probabilidad marginales (Ver recinto aptdo a))

- Marginal de X $(1<x<2)$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy = \frac{1}{x^2}\,y\Big]_0^{x^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 1<x<2 \\ 0 & \end{cases}}$$

- Marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2} & si \quad 0<y<1 \\ \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2} & si \quad 1<y<4 \end{cases}$$

ⓒ Obtener las distribuciones condicionadas

- Condicionada de $X/_{Y=y_0}$ $(1<x<2)$

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \frac{1/x^2}{1/2} = 2/x^2 & 1<x<2\,;\ y_0\in(0,1) \\ \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{y_0}} - 1/2} = \frac{2\sqrt{y_0}}{x^2(2-\sqrt{y_0})} & 1<x<2\,,\ y_0\in[1,4] \end{cases}$$

- Condicionada de $Y/_{X=x_0}$ $(0<y<4)$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{1/x_0^2}{1} = \frac{1}{x_0^2} \qquad 0<y<4\,;\ x_0\in(1,2)$$

EJERCICIO 3:

Sea (X, Y) con $f(x,y) = \begin{cases} k & 0<x<1/2 ;\ 0<y<1/2 \\ 0 & \text{———} \end{cases}$

- obtener k para que sea función de densidad

Para que sea función de densidad tiene que suceder que:

$k>0$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} k\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} k\,dy\,dx = \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow k=4$$

Luego la función de densidad es:

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0<x<1/2 ;\ 0<y<1/2 \\ 0 & \text{———} \end{cases}}$$

- obtener la función de densidad de probabilidad conjunta del vector transformado $(Z,T) = (X+Y, X-Y)$

$$\left.\begin{aligned} Z &= X+Y \\ T &= X-Y \end{aligned}\right\} \to x = T+Y = T+\frac{Z-T}{2} \Rightarrow x = \frac{T+Z}{2}$$

(−) reducción

$Z-T = 2y \to y = \frac{Z-T}{2}$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{T+Z}{2} \\ Y &= \frac{Z-T}{2} \end{aligned}\right\} \exists \text{ inversa}$$

¿Jacobiano $\neq 0$?

$$J(z,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial t} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2 \neq 0$$

Podemos aplicar el Tma de cambio de variable:

$$f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}\left(\frac{T+Z}{2}, \frac{Z-T}{2}\right)|J| = 4\cdot|-1/2| = 2$$

Por tanto:

$$\boxed{f_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0<t+z<1 ;\ 0<\cancel{z-t}<1 \\ 0 & \text{———} \end{cases}}$$

- Como $0<x<1/2 \Rightarrow 0<\frac{t+z}{2}<1/2 \Rightarrow 0<t+z<1$
- Como $0<y<1/2 \Rightarrow 0<t-z<1/2 \Rightarrow 0<t-z<1$

- Obtener las distribuciones de densidad marginales:

Es conveniente que dibujemos el recinto donde $f_{(Z,T)} \neq 0$

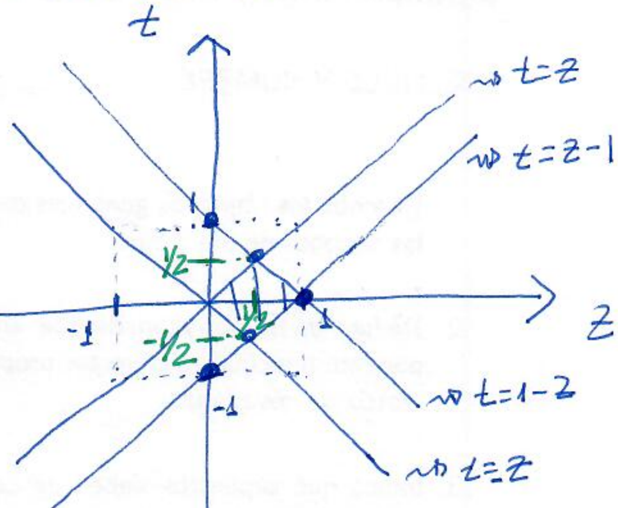
Este recinto está limitado por las rectas:

$t+z=0 \rightarrow t=-z$

$t+z=1 \rightarrow t=1-z$

$z-t=0 \rightarrow t=z$

$z-t=1 \rightarrow t=z-1$



Marginal de Z

$$f_Z(z)=\int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}\,dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-z}^{z} 2\,dt = 4z & \text{si } 0<z<1/2 \\ \displaystyle\int_{z-1}^{1-z} 2\,dt\,dz = 4(1-z) & \text{si } 1/2<z<1 \end{cases}$$

(ver recinto)

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases} 4z & \text{si } 0<z<1/2 \\ 4(1-z) & \text{si } 1/2<z<1 \end{cases}}$$

Marginal de T

$$f_T(t)=\int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}(z,t)\,dz = \begin{cases} \displaystyle\int_{-t}^{t+1} 2\,dz = 2(2t+1) & \text{si } -1/2<t<0 \\ \displaystyle\int_{t}^{1-t} 2\,dz = 2(1-2t) & \text{si } 0<t<1/2 \end{cases}$$

(ver recinto)

$$\boxed{f_T(t)=\begin{cases} 4t+2 & \text{si } -1/2<t<0 \\ 2-4t & \text{si } 0<t<1/2 \end{cases}}$$

EJERCICIO 4:

Sea $\underline{X}=(X_1,\dots,X_n)$ / $X_i \sim U([0,1])$ $\forall i=1,\dots,n$

entonces $f_{X_i}(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \forall i=1,\dots,n$ es la función de densidad.

Por tanto $F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_0^x 1\,dx = x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ es la función de distribución.

Nos dicen que la función de distribución conjunta es el producto de las marginales, de modo que:

$$F_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) = \begin{cases} 0 & x_i<0 \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_n & 0 \leq x_i \leq 1 \\ 1 & x_i \geq 1 \end{cases}$$

Sabemos que la función de distribución del máximo es:

$$F_{\max(X_1,\dots,X_n)}(t) = F_{\underline{X}}(t,\overset{n}{\dots},t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Y por tanto su función de densidad es:

$$f_{\max(X_1,\dots,X_n)}(t) = \frac{dF_{\max(X_1,\dots,X_n)}(t)}{dt} = nt^{n-1} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\boxed{f_{\max(X_1,\dots,X_n)}(t) = nt^{n-1} \quad 0 \leq t \leq 1}$$