Álgebra II. Extraordinario

Nombre: Federico Cabrera Linares

Ejercicio 1- Da la descomposición en ciclos disjuntos y en transposiciones de la permutación $\sigma = (1234)(235)(12)$. Calcula su orden.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4)(3\ 5)$$

1

que también es una descomposición como producto de transposiciones.

$ord(\sigma) = mcm(2,2) = \boxed{2}$.

Ejercicio 2.- Sea G un grupo de orden 27. Razona que su centro $Z(G)$ es un grupo cíclico.

$\{$no abeliano$\}$.

$|G| = 3^3 = 27$. G no abeliano $\Rightarrow |Z(G)| \neq 27$

G p-grupo $\Rightarrow |Z(G)| \geq 3$ al ser no trivial. th. Burside

Sabemos por teoría también que $|Z(G)| \neq 3^2 = 9$ (pues si fuese, $G/Z(G)$ sería (de orden 3) cíclico $\Rightarrow G$ abeliano)

Solo queda la posibilidad $|Z(G)| = 3 \Rightarrow \boxed{\text{cíclico}}$

0'9

Ejercicio 3.- Prueba que todo grupo de orden 18 es un producto semidirecto.

Tenemos $|G| = 2 \cdot 3^2$. $n_3 | 2 \Rightarrow n_3 \in \{1, 2\}$. Pero $n_3 \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow n_3 \neq 2$, $n_3 = 1$. Ese 3-SS es único y por tanto normal, llamémosle P_3. Sea P_2 un 2-SS, que existe gracias al 1er T. Sylow. Entonces se verifican las condiciones del producto semidirecto:

- $P_3 \trianglelefteq G$.
- $P_3 \cap P_2 = \{1\}$, ya que sus órdenes son primos relativos.
- $P_3 P_2 = G$ ya que, gracias al segundo Teorema de Isomorfía:

$$\frac{P_2 P_3}{P_3} \cong \frac{P_2}{P_2 \cap P_3} \Rightarrow |P_2 P_3| = |P_2| \cdot |P_3| = 2 \cdot 3^2 = 18 \Rightarrow P_2 P_3 = G.$$

Ya lo tenemos: $G = P_3 \rtimes P_2$.

(ordenado como en teoría daba la propos.)

Ejercicio 4.- Da las descomposiciones cíclica y cíclica primaria del grupo $\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6$.

$20 = 2^2 \cdot 5$

$6 = 2 \cdot 3$

$\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_6 = \boxed{\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3} \leftarrow$ DCP. $= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$

$\| \quad \boxed{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{60}} \leftarrow$ DC.

divisores elementales $= \{2, 2^2, 3, 5\}$

Factores invariantes $= \{2, 60\}$

Ejercicio 5.- Sea G un grupo de orden 18. ¿Puedes asegurar que G tiene un elemento de orden 3? ¿y de orden 9? Razona las respuestas.

Gracias al 1er T. Sylow, sabemos que existen grupos de orden 3 y 9, ya que son potencias de primos que dividen a $|G| = 18 = 2 \cdot 3^2$. Ese grupo de orden 3 será cíclico y generado por un elemento de orden 3. Ahora, no podemos decir lo mismo del otro grupo. Como contraejemplo: $C_2 \oplus C_3 \oplus C_3$ es de orden 18 y no tiene elementos de orden 9, el máximo orden es $mcm(2,3,3) = 6$.

Ejercicio 6.- Sea G un grupo de orden 18 y $g \in G$ un elemento de orden 9. Razona que G es isomorfo a D_9.

¡no abeliano!

Sabemos que una presentación de D_9 es $D_9 = \langle r, s : r^9 = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$. Utilizaremos el Teorema de Dyck. Sea G tal grupo. Entonces, por el ejercicio 3, tiene un único subgrupo de orden 9, que es el cíclico. Ahora, $n_2 \in \{1, 3, 9\}$. Necesariamente, $n_2 = 9$: ~~(ya que los demás elementos de $G \setminus C_9$ tienen orden 2 necesariamente: $x \in G \setminus C_9 \Rightarrow |x| \mid |G| = 2 \cdot 9$, $x \notin C_9 \Rightarrow |x| \nmid 9 \Rightarrow |x| \in \{2, 6\}$, pero 6 no puede ser porque si no.)~~

~~$n_3 = 1$~~

- $n_2 = 1$ no puede ser porque si no $G \cong C_2 \oplus C_9$ abeliano.
- De alguna forma que no termino de ver, se descarta también $n_2 = 3$ (~~sería: $n_2 = 3 \Rightarrow 18 - 12 = 6$ elementos de orden 6 $\Rightarrow$ 3 subgr. de orden 6~~)

Por tanto, fijamos a, b generadores de C_9 y algún C_2 en G. Veamos que se verifican las relaciones:

$(ab \neq 1)$

$ord(ab) = 2$

$a^9 = 1 = b^2$, $ab \notin C_9$ porque si no $b \in C_9$, y entonces $(ab)^2 = 1 \Rightarrow abab = 1 \Rightarrow ab = ba^{-1}$ ✓. Ya tenemos el morfismo $r \mapsto a$, $s \mapsto b$. Es sobreyectivo gracias a que $G = \langle a, b \rangle$ y $|G| = |D_9| \Rightarrow$ inyectivo. Lo tenemos.

$D_8/Z(D_8)$

Ejercicio 7.- ¿Es el drupo cociente ~~$D_8/Z(D_8)$~~ un grupo abeliano?

sabemos que $Z(D_n) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{r^{n/2}\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$. D_8, 8 es par $\Rightarrow Z(D_8) = \langle r^4 \rangle = \{1, r^4\}$

No es abeliano, ya que, por ejemplo:

- $(sZ(D_8))(rZ(D_8)) = srZ(D_8) = \{sr, sr^5\}$
- $(rZ(D_8))(sZ(D_8)) = rsZ(D_8) = \{rs, rsr^4\} = \{$ ~~...~~ $= \{sr^7, sr^3\}$

$\neq$

clases distintas $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No abeliano}}$

Ejercicio 8.- Da un isomorfismo $S_3 \cong Aut(C_9)$. ó $C_6 \cong Aut(C_9)$ ¿A cuál de los dos es isomorfo? Mallorlo.

Sabemos gracias a un ejercicio en la relación 2, que $Aut(C_9) \cong \mathbb{Z}_9^\times$.

$\mathbb{Z}_9^\times = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} = \langle 2 \rangle = \{2, 2^2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 7, 2^5 = 5, 2^6 = 1\}$

Y por tanto concluimos que $Aut(C_9) \cong C_6$. Este ~~...~~ isomorfismo viene dado por (por ejemplo) (utilizando que sí conocemos el isomorfismo de $\mathbb{Z}_9^\times \cong Aut(C_9)$):

$$\mathbb{Z}_6 = C_6 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_9^\times \xrightarrow{\cong} Aut(C_9)$$

$$x \longmapsto r = Res(2^x, 9) \longmapsto f_r$$

visto como número entero

siendo f_r definido por la imagen del generador de $C_9 = \langle a : a^9 = 1 \rangle$:

$$f_r(a) = a^r, \quad f_r \in Aut(C_9).$$

que es automorfismo gracias a que $mcd(9, r) = 1$ (ejercicio de la relación nos daba ~~ese~~ esta ~~...~~ información).

La composición entre isomorfismo da el isomorfismo buscado:

$$\mathbb{Z}_6 = C_6 \cong Aut(C_9), \quad x \longmapsto f_{Res(2^x, 9)}$$

Te estoy preguntando el ejercicio? de la relación para el ejercicio?

Ejercicio .9- Considera los grupos $C_3 = \langle a; a^3 = 1\rangle, K = \langle b, c; b^2 = c^2 = (bc)^2 = 1\rangle$ y la acción de C_3 sobre K determinada por ${}^ab = bc$ y ${}^ac = b$. En el producto semidirecto $G = K \rtimes C_3$ calcula el producto $(b,a)^{-1}(bc,a^2)(c,a)^{-1}$.

•) $(bc,a^2)(c,a)^{-2} = (bc,a^2)({}^{a^{-2}}c^{-2}, a^{-2}) = (bc,a^2)({}^{a^2}c, a^2) =$

$= (bc,a^2)(bc,a^2) = (bc\,{}^{a^2}(bc), a^2\cdot a^2) = (bc\,{}^a(bcb), a) = (bc\,{}^ac, a) =$

$= (bcb, a) = (c,a)$

•) $(b,a)^{-2}(c,a) = ({}^{a^{-2}}b^{-2}, a^{-2})(c,a) = ({}^{a^2}b, a^2)(c,a) = ({}^a(bc), a^2)(c,a) =$

$= (bcb, a^2)(c,a) = (c,a^2)(c,a) = (c\,{}^{a^2}c, 1) = (c\,{}^ab, 1) = (cbc, 1) =$

$= \boxed{(b,1)}$

Ejercicio 10.- Para el grupo $G = K \rtimes C_3$ del ejercicio anterior, calcula el conmutador $[G,G]$.

~~(Sabemos, gracias a la clasificación~~

$(b,a)(c,a) = (b\,{}^ac, a^2) = (bb, a^2) = (1,a^2)$ ≠

$(c,a)(b,a) = (c\,{}^ab, a^2) = (cbc, a^2) = (b,a^2)$ ⇒ G no es abeliano ⇓ $\{1\} \subsetneq [G,G]$.

Sabemos, por la definición de producto interno semidirecto, que $K\times\{1\} \trianglelefteq G$. Además, $\left|\frac{G}{K\times\{1\}}\right| = \frac{18}{4} = 3$ ⇒ abeliano

$\Rightarrow \{1\} \subsetneq [G,G] \leq K\times\{1\}$. Veamos que tiene dos elementos más a parte de 1:

calculado antes

$(b,a)(c,1)(b,a)^{-1}(c,1)^{-1} = (b,a)(c,1)(c,a^2)(c,1) = (b,a)(c,1)(b,a^2) =$

$= (b,a)(cb,a^2) = (b\,{}^a(cb), 1) = (bc,1)$

$(b,a)(b,1)(b,a)^{-2}(b,1)^{-2} = (b,a)(b,1)(c,a^2)(b,1) =$

$= (b,a)(b,1)(b,a^2) = (b,a)(1,a^2) = (b,1)$

$\Rightarrow |[G,G]| \geq 3 \Rightarrow \boxed{[G,G] = K\times\{1\}}$