

## Tema 1 Teoría elemental de grafos

### 1.1.- Combinatoria

Permutaciones:  $\text{Perm}(n) = n!$

Variaciones sin repetición:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1) \dots (n-m+1) \quad 1 \leq m \leq n$$

Variaciones con repetición:  $VR_n^m = n^m$

Combinaciones sin repetición:

$$C_n^m = \binom{n}{m} \quad 1 \leq m \leq n$$

Combinaciones con repetición:  $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$

Propiedades de n° combinatorios

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad n \geq 1$
- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \quad n \geq 1$
- $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \quad n > m > 0$

### 1.2.- Teoría de Grafos

#### Definición

Un grafo es una terna  $G = (V, E, \gamma)$  donde  $V$  son los vértices y  $E$  son las aristas o lados son conjuntos finitos, y  $\gamma: E \rightarrow \{\{u, v\}: u, v \in V\}$  es una aplicación, llamada *aplicación de incidencia* de  $G$ , que asocia a cada arista un par de vértices llamados *sus extremos*.

- Si  $e_1, e_2 \in E$  son tales que  $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$  se dice que  $e_1$  y  $e_2$  son *aristas paralelas*.
- Si  $e \in E$  es tal que  $\gamma(e) = \{v\}$  los dos extremos coinciden, se dice que  $e$  es un *lazo*.

Cuando en un grafo existen aplicaciones  $s, t: E \rightarrow V$  que asignan a cada arista un principio y un final se dice que el grafo es *dirigido (orientado)*.

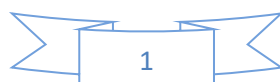
#### Definición

Un subgrafo de un grafo  $G = (V, E, \gamma)$  es una terna  $G' = (V', E', \gamma')$  donde  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  y  $\gamma'(e) = \gamma(e) \quad \forall e \in E'$ . El subgrafo se dice que es pleno si verifica que si  $e \in E$  es tal que  $\gamma(e) \subseteq V'$  entonces  $e \in E'$ , es decir, si tiene todas las aristas de  $G$  que unen vértices de  $V'$ .

#### Definiciones

Sea  $G = (V, E, \gamma)$  un grafo.

- Un camino de longitud  $n$  de  $v_1$  a  $v_{n+1}$  es una sucesión de aristas  $e_1, \dots, e_n$  con  $\gamma(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\} \quad i = 1, \dots, n$ .



- Un camino se dice *cerrado* si coinciden el primer vértice y el último.
- Un camino sin lados repetidos se dice que es *un recorrido*.
- Un recorrido sin vértices repetidos (salvo eventualmente el primero y el último) se dice que es *un camino simple*.
- Un camino cerrado que sea un recorrido se dice que es *un circuito*.
- Un circuito que sea un camino simple se dice que es *un ciclo*.

Si en un grafo existe un camino de  $u$  a  $v$  entonces existe un camino simple de  $u$  a  $v$  pues basta para ello quitar los vértices repetidos. Y si hay dos caminos simples distintos entre dos vértices distintos de un grafo entonces existe un ciclo en el grafo.

### Definición

En el conjunto de vértices  $V$  de un grafo  $G$  se puede establecer la siguiente relación binaria  $R$ :

$$u, v \in V \quad uRv \Leftrightarrow \text{existe un camino de } u \text{ a } v$$

Es una relación de equivalencia.

El grafo se dice que es *conexo* si cualesquiera dos vértices están relacionados por la relación anterior, es decir, están conectados por un camino.

En general, para cualquier grafo  $G$ , el subgrafo pleno determinado por cada clase de equivalencia se dice que es *una componente conexa* de  $G$ .

### Definición

Si  $G$  es un grafo, su *matriz de adyacencia* es la matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n(N)$  donde  $n$  es el número de vértices y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists e \in E: \gamma(e) = \{v_i, v_j\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es por tanto, simétrica con ceros en la diagonal.

### Definición

Si  $G$  es un  $(n, m)$  – grafo, su matriz de incidencia es la matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(N)$  donde  $n$  es el número de vértices y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in \gamma(e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### Definición

Dos grafos  $G = (V, E, \gamma)$  y  $G' = (V', E', \gamma')$  se dice que son *isomorfos* si existe una biyección  $h: V \rightarrow V'$  que verifica que:

$$\exists e \in E: \gamma(e) = \{u, v\} \Leftrightarrow \exists e' \in E': \gamma'(e') = \{h(u), h(v)\}$$

Para que dos grafos sean isomorfos es necesario que tengan el mismo número de vértices y de aristas.

### Definición

El grado de un vértice  $v$  en un grafo  $G$  es el número de aristas que son incidentes con  $v$ .

El grado es invariante por isomorfismos.

Si todos los vértices de un grafo tienen el mismo grado que suponemos  $d$ , entonces se dice que el grafo es *regular* de grado  $d$ .

Se llama grafo completo de  $n$  vértices, y se representa por  $K_n$ , al grafo en el que cualesquiera dos vértices son adyacentes, esto es, siempre hay arista que los une.

En un  $(n, m)$  – grafo completo se tiene que

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

### Definición

Una sucesión de números naturales  $d_1, \dots, d_n \in N$  es una *sucesión gráfica* si existe un grafo  $G$  con conjunto de vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tales que  $gr(v_i) = d_i$   $i = 1, \dots, n$ .

Una condición necesaria para que sea gráfica la suma de sus elementos ha de ser un número par y que cualquier número sea menor que el número de términos.

- La sucesión  $0, 0, \dots, 0$  es gráfica.
- Cualquier sucesión con un número par de 1 es gráfica: 1111
- La sucesión 2222 es gráfica.

### Teorema de Havel-Hakimi

Dada una sucesión de números naturales  $d_1, \dots, d_n \in N$  que lo suponemos ordenados en orden decreciente, esto es,  $d_1 \geq \dots \geq d_n$  y donde  $d_1 < n$  se tiene que la sucesión es gráfica si y solo si lo es la sucesión  $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ .

### 1.3 Grafos de Euler

#### Definición

Sea  $G$  un grafo.

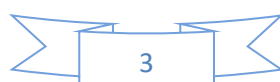
- Un camino de Euler en  $G$  es un recorrido en el que aparecen todos los lados.
- Un circuito de Euler en  $G$  es un camino de Euler cerrado.
- Un grafo  $G$  es de Euler si es conexo y tiene un circuito de Euler.

#### Teorema

Un grafo conexo  $G$  es un grafo de Euler si y solo si cada vértice de  $G$  tiene grado par.

#### Corolario

El grafo completo  $K_n$  es de Euler si y solo si  $n$  es impar.



### Algoritmo de Fleury

- 1.- Verificar que el grafo es conexo con todos los vértices de grado par.
- 2.- Seleccionar un vértice arbitrario.
- 3.- Seleccionar una arista a partir de ese vértice que no sea puente ( $e$ ) es decir que no desconecte el grafo, a menos que no haya otra alternativa.
- 4.- Desconectar los vértices que están unidos por la arista seleccionada.
- 5.- Reiterar desde el punto 3 hasta que todos los vértices estén desconectados en cuyo caso ya se tiene el circuito de Euler.

### Proposición

Un grafo conexo  $G$  tiene un camino de Euler conectando todos los vértices  $u$  y  $v$  si y solo si  $u$  y  $v$  son los únicos vértices de  $G$  que tienen grado impar.

### 1.4 Grafos de Hamilton

Un camino de Hamilton en un grafo es un camino que recorre todos los vértices una sola vez.

- Un circuito de Hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices del grafo una sola vez (salvo los extremos).
- Un grafo de Hamilton es un grafo con un circuito de Hamilton.

Un grafo de Hamilton con  $n$  vértices ( $n \geq 3$ ) tiene al menos  $n$  lados que son los que aparecen en el circuito de Hamilton.

### Teorema

Sea  $G$  un  $(n, m)$  – grafo. Entonces:

- 1.- Si  $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ ,  $G$  es de Hamilton.
- 2.- Si  $n \geq 3$  y para cada par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$  se verifica que  $gr(u) + gr(v) \geq n$  se tiene que  $G$  es de Hamilton.

### 1.5.- Grafos Planos

#### Definición

Un grafo  $G$  se dice *plano* si admite una representación plana, esto es, una representación en el plano de sus vértices y aristas de forma que éstas solo se corten en vértices.

Si  $G$  es un grafo plano, una *cara* de  $G$  es cada una de las regiones en que queda dividido el plano por una representación plana.

### Teorema

Sea  $G$  un  $(n, m)$  – grafo plano y conexo y sea  $c$  el número de caras de una representación plana. Se tiene que entonces la igualdad  $n - m + c = 2$  (que afirma que la característica de Euler  $n - m + c$  es 2).

En general, si  $G$  es un grafo plano y  $\chi$  el número de componentes conexas, se tiene que  $n - m + c = 1 + \chi$ .

### Corolario

En un poliedro, si  $v$  es el número de vértices,  $l$  es número de aristas y  $c$  es el número de caras se verifica que  $v - l + c = 2$ .

De forma que solo hay 5 sólidos regulares:

	$c$	$v$	$l$	Característica de Euler
Tetraedro	4	4	6	2
Octaedro	8	12	12	2
Icosaedro	20	30	30	2
Cubo	6	12	12	2
Dodecaedro	12	30	30	2

### Corolario

Sea  $G$  un grafo plano conexo sin vértices de grado 1. Entonces se tiene que

$$3c \leq 2m \quad y \quad m \leq 3n - 6$$

Los únicos grafos no planos son  $K_5$  y  $K_{3,3}$ .