PROBABILIDAD (Curso 2023/2024)
Relación de ejercicios del TEMA 6
Aplicación de las distintas leyes débiles y fuertes de los grandes números, así como del Teorema del Límite Central.

---

1. Se realizan 2500 lanzamientos independientes de una moneda correcta. Calcular la probabilidad aproximada de obtener $1/2$ como frecuencia relativa de cara con un error máximo de 0.02.

2. Calcular, aproximadamente, la probabilidad de que al lanzar 100 veces un dado, la media de los puntos obtenidos sea mayor que 3.7.

3. El número de piezas correctas elaboradas en una fábrica cuadruplica el de piezas defectuosas, y la probabilidad de producir una pieza defectuosa se mantiene constante durante todo el proceso de fabricación.

   a) Se eligen al azar 200 piezas, calcular aproximadamente la probabilidad de que el número de defectuosas oscile entre 40 y 50.
   b) El número de piezas que, aproximadamente, deben elegirse para asegurar, con probabilidad no menor de 0.9, que más de 100 sean correctas.

4. Se elige un punto aleatorio $(X_1, \ldots, X_{100})$ en el espacio $\mathbb{R}^{100}$. Suponiendo que las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{U}([-1,1])$, calcular, aproximadamente, la probabilidad de que el cuadrado de la distancia del punto al origen sea menor que 40.

5. Para predecir el resultado de una elección a la que se presentan dos candidatos, A y B, se seleccionan aleatoria e independientemente n personas del censo y se les pregunta su preferencia. Si la probabilidad de seleccionar un votante de A es p, calcular el tamaño mínimo de muestra hay que elegir para que la frecuencia relativa de votantes de A en la muestra difiera de p menos de 0.001 con probabilidad mayor o igual que 0.99.

6. Una persona tiene la oportunidad de jugar al siguiente juego. Elige al azar dos números enteros, A entre 0 y 3 y B entre -2 y 0. Gana una moneda si $A - B < 3$ y pierde una moneda en caso contrario. Si tiene la posibilidad de repetir este juego indefinidamente de forma independiente, calcular el número de jugadas necesario para ganar una cantidad superior o igual a 20 monedas con probabilidad al menos 0.52392.

7. Cierta enfermedad afecta al 0.5% de una población. Existe una prueba para la detección de la enfermedad, que da positiva en los individuos enfermos con probabilidad 0.99 y da negativa en los individuos sanos con probabilidad 0.99.

   a) Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar esté realmente enfermo si la prueba da resultado positivo.
   b) Calcular, aproximadamente, el número mínimo de personas con resultado positivo en la prueba que deben ser elegidas, de forma aleatoria e independiente, para asegurar una proporción de personas realmente enfermas en la muestra inferior a un $1/2$, con probabilidad mayor o igual que 0.95.

8. Supongamos que una máquina recreativa puede dar como resultado cualquier combinación de cuatro de los números, $1,3,5,7$ repetidas o no, con la misma probabilidad. En cada jugada, el

jugador gasta una moneda y puede obtener los siguientes premios

Combinaciones ganadoras	Premio
1 1 1 1	50
1 1 1 −	15
− 1 1 1	15
1 1 − −	5
− 1 1 −	5
− − 1 1	5
1 − − −	2
− 1 − −	2
− − 1 −	2
− − − 1	2

donde - representa cualquier número distinto de 1. Calcular el número de veces que debería jugar para obtener una ganancia neta mínima de 50 monedas con probabilidad no menor de 0.70194

9. Una empresa necesita adquirir al menos 100 vehículos. Para ello realiza una prueba a una población de coches compuesta de dos tipos distintos (un 40% de tipo A y un 60% de tipo B) y un coche es adquirido si supera la prueba. Un coche de tipo A supera la prueba con probabilidad $1/3$, mientras que para uno de tipo B, dicha probabilidad es $2/3$.

   a) Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar supere la prueba.
   b) Calcula el número de coches que deben examinarse para cubrir las necesidades de la empresa con probabilidad mayor o igual que 0.901147.

10. Para realizar una compra de un determinado material eléctrico del que se sabe que es defectuoso con probabilidad 0.25, se le somete a una determinada prueba que da los resultados A, B y C, con probabilidades 0.8, 0.15 y 0.05, si el material es válido, y probabilidades $0.2, 0.3$ y 0.5, si el material es defectuoso. Si cada lote se somete a seis pruebas de forma independiente, y se acepta para su compra si no aparece nunca el resultado C ni más de dos veces el resultado B, calcular la probabilidad de que un lote elegido al azar sea aceptado para su compra. Calcular el número de lotes que hay que probar para comprar al menos 20 con probabilidad mayor o igual que 0.9452.

11. Sean X, Y y Z variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad y con funciones de densidad conjuntas:

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= xy, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ f_{(X,Z)}(x,z) &= \frac{1}{2}, \quad 0 < z < x < 2 \\ f_{(Y,Z)}(y,z) &= 1, \quad 0 < z < 2y < 2. \end{aligned}$$

   Una persona realiza el siguiente juego: obtiene una predicción mínimo cuadrática del valor de la variable Z, y si dicha predicción es mayor que 0.4 gana una moneda; en caso contrario pierde una moneda. La predicción de la variable aleatoria Z se hace después de observar un valor del vector (X, Y), si $X > Y$ se predice la variable Z a partir de X y, en caso contrario, a partir de la variable Y. Cuántos juegos de forma independiente debe realizar para ganar al menos 10 monedas con probabilidad aproximada mayor o igual que 0.91924.

12. La longitud de vida (en horas) de una determinada pieza de cierta máquina es una variable aleatoria que se distribuye de acuerdo a la función de densidad

$$f(x) = \exp(1 - x), \quad x > 1.$$

   Cuando falla la pieza, se sustituye por otra de las mismas características, y se supone que las longitudes de vida de distintas piezas son independientes. Calcular aproximadamente el número de piezas de recambio necesario para asegurar el funcionamiento de la máquina al menos durante 1000 horas, con probabilidad mayor que 0.95.