Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2022/23)

Leandro Jorge Fdez. Vega DGIIM

1 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\left(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, x_n)\right)$$

a) Determina el valor de los parámetros (en función del parámetro α_1) para que el método tenga orden 2. ¿Sería consistente en ese caso?

b) Estima el error de truncatura local (también en función de α_1).

c) Estudia la estabilidad y la convergencia en función del parámetro α_1.

d) Si $\alpha_1 = 0$ ¿encuentras relación con algún método conocido? ¿Y en el caso $\alpha_1 = 1$?

e) Utiliza este método con $\alpha_1 = 1/2$ en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones del método haciendo uso del método de Euler para calcular los datos iniciales que necesites. Muestra todas las iteraciones.

1 Dado el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = \mu \end{cases}$$

se pretende utilizar el siguiente método numérico para estimar el valor de $x(b)$, con $b > a$:

$$x_{n+2} = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_0 x_n + h\,(\beta_1 f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, x_n))$$

a) Determina el valor de los parámetros (en función del parámetro α_1) para que el método tenga orden 2. ¿Sería consistente en ese caso?

Vemos $k = 2 =$ nº pasos

$$C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 1 - \alpha_0 - \alpha_1$$

$$C_1 = k - \sum_{j=1}^{k-1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{k} \beta_j = 2 - \alpha_1 - \beta_0 - \beta_1$$

$$C_2 = \frac{k^2}{2!} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^2}{2!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{2-1}}{(2-1)!}\beta_j = 2 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \beta_1$$

$$C_3 = \frac{k^3}{3!} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j^3}{3!}\alpha_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{3-1}}{(3-1)!}\beta_j = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1$$

El método tendrá orden 2 $\Longleftrightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0 \neq C_3 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 - \alpha_1 \\ \beta_1 = 2 - \dfrac{\alpha_1}{2} \\ \beta_0 = 2 - \alpha_1 - \beta_1 = 2 - \alpha_1 - 2 + \dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{-\alpha_1}{2} \\ C_3 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\alpha_1}{6} - 1 + \dfrac{\alpha_1}{4} = \dfrac{8 - 2\alpha_1 - 12 + 3\alpha_1}{12} = \dfrac{\alpha_1 - 4}{12} \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq 4 \end{cases}$$

Método consistente $\Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j = 1 \Longleftrightarrow 1 - \alpha_1 + \alpha_1 = 1 \ ✓ \\ \displaystyle k - \sum_{j=0}^{k-1} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \Longleftrightarrow 2 - \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1 = \frac{-\alpha_1}{2} + 2 - \frac{\alpha_1}{2} \ ✓ \end{cases}$

$\Longleftrightarrow C_0 = C_1 = 0$

Por tanto, también es consistente.

b) Estima el error de truncatura local (también en función de α_1).

$$R_{n+2} = \mathcal{L}_2(x(t_n), h) = C_0 x(t_n) + C_1 x'(t_n) h + C_2 x''(t_n) h^2 + C_3 x'''(t_n) h^3 + O(h^4)$$
$$= \frac{\alpha_1 - 4}{12} x'''(t_n) + O(h^4) \text{ , pues } \alpha_1 \neq 4$$

c) Estudia la estabilidad y la convergencia en función del parámetro α_1.

Método estable $\Longleftrightarrow$ todas las raíces λ del polinomio característico cumplen $|\lambda| < 1 \vee [|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \text{ simple}]$

Tomando el valor de α_0 obtenido en a):

Su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_1 \lambda - \alpha_0 = \lambda^2 - \alpha_1 \lambda - 1 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4 - 4\alpha_1}}{2} = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{(\alpha_1 - 2)^2}}{2} = \frac{\alpha_1 \pm |\alpha_1 - 2|}{2}$$

- Si $\alpha_1 = 2 \Rightarrow$ Raíz doble $\lambda = \frac{\alpha_1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}|\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 2$
- Si $\alpha_1 \neq 2 \Rightarrow \frac{\alpha_1 \pm (\alpha_1 - 2)}{2} = \begin{cases} \alpha_1 - 1 \Rightarrow |\alpha_1 - 1| \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \alpha_1 \leq 2 \\ 1 \end{cases}$

Como el método es consistente, será convergente cuando sea estable, cumpliendo las condiciones anteriores $\begin{cases} \cdot\ \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 \in]-2, 2[\\ \cdot\ \alpha_1 \neq 2 \Rightarrow \alpha_1 \in [0, 2] \end{cases}$

d) Si $\alpha_1 = 0$ ¿encuentras relación con algún método conocido? ¿Y en el caso $\alpha_1 = 1$?

- Si $\alpha_1 = 0 \Rightarrow x_{n+2} = x_n + h(2f(t_{n+1}, x_{n+1}))$

Se parece a un método de Euler explícito, aunque para serlo debería tener el término x_{n+1} en vez de x_n.

- Si $\alpha_1 = 1 \Rightarrow x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(\frac{3}{2} f(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2} f(t_n, x_n)\right)$

Es claramente un método multipaso lineal.

e) Utiliza este método con $\alpha_1 = 1/2$ en el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = -3x + t \\ x(0) = 0.3 \end{cases}$$

para estimar el valor de $x(1)$. Realiza cuatro iteraciones del método haciendo uso del método de Euler para calcular los datos iniciales que necesites. Muestra todas las iteraciones.

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) + \frac{h}{4}\left(7 f(t_{n+1}, x_{n+1}) - f(t_n, x_n)\right)$$

Sea $f(t,x) = -3x + t$, $t_0 = 0$, $x_0 = x(t_0) = 0'3$, $t_1 = t_0 + h = h$

Euler: $x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n)$

$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0) = 0'3 + h(-3 \cdot 0'3 + 0) = 0'3 - 0'9h$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_0) + \frac{h}{4}\left(7 f(t_1, x_1) - f(t_0, x_0)\right) =$$

$$\frac{1}{2}(0'3 - 0'9h + 0'3) + \frac{h}{4}\left(7 \cdot (1'27h - 0'9) + 0'9\right) =$$

$$0'3 - 0'45h + 2'2225h^2 - 1'35h = 2'2225h^2 - 1'8h + 0'3$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) + \frac{h}{4}\left(7 f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)\right) =$$

$$\frac{1}{2}(2'2225h^2 - 1'8h + 0'3 + 0'3 - 0'9h) + \frac{h}{4}\left(7(2h - 3(2'2225h^2 - 1'8h + 0'3)) + 1'27h - 0'9\right) =$$

$$1'11125h^2 - 1'35h + 0'3 + \frac{h}{4}\left(7(2h - 6'6675h^2 + 5'4h + 0'9) + 1'27h - 0'9\right) =$$

$$1'11125h^2 - 1'35h + 0'3 + \frac{h}{4}\left(-46'6725h^2 + 51'8h + 6'3 + 1'27h - 0'9\right) =$$

$$-11'668125h^3 + 14'37875h^2 + 0'3$$

El resto de iteraciones son análogas.