Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
19 de Diciembre de 2023

NOMBRE:

1. Se consideran las funciones $f_1, f_2 :]0,1[\to \mathbb{R}$, $f_1(t) = 1$ si $t \in]0,1[$, $f_2(t) = 1$ si $t \in]0, \frac{2}{3}]$, $f_2(t) = 0$ si $t \in]\frac{2}{3}, 1[$. ¿Son estas funciones linealmente independientes en el intervalo $]0,1[$?

f_1, f_2 L.I. $\Longleftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{2} \lambda_i f_i(t) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \right]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } t \in]0, \frac{2}{3}] \Longrightarrow \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{Sea } t \in]\frac{2}{3}, 1[\Longrightarrow \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = \lambda_1 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Longrightarrow f_1, f_2$ L.I.

2. Se considera la ecuación diferencial

$$ax + by + (cx + dy)y' = 0,$$

con $a, b, c, d \in]0, \infty[$. ¿En qué casos se puede afirmar que $\mu(x, y) = e^{x+y}$ es un factor integrante?

Sea $P(x,y) = ax + by$, $Q(x,y) = cx + dy \in C^1(\mathbb{R}^2)$

μ f.i. $\iff \begin{cases} \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \end{cases} \iff \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \iff$

$e^{x+y}(P + P_y) = e^{x+y}(Q + Q_x) \iff ax + by + b = cx + dy + c \iff$

$a = b = c = d$, ya que en el espacio de polinomios de grado ≤ 1

$\{1, x, y\}$ es base.

3. Dada una función $a \in C(\mathbb{R})$, se supone que φ_1, φ_2 son las soluciones de la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ que cumplen las condiciones iniciales

$$\varphi_1(0) = 1, \ \ \varphi_1'(0) = 0, \ \ \varphi_2(0) = 0, \ \ \varphi_2'(0) = 1.$$

Demuestra que la función

$$x(t) = \varphi_2(t)\int_0^t e^s\varphi_1(s)ds - \varphi_1(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds + 2024\varphi_2(t)$$

pertenece a $C^2(\mathbb{R})$ y encuentra una ecuación diferencial de la que es solución.

Por ser soluciones, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$. Dado que $e^s\varphi_1(s)$, $e^s\varphi_2(s) \in C(\mathbb{R})$ $\Longrightarrow$ Por T^a Fundamental cálculo, $x \in C^1(\mathbb{R})$ con

φ_1, φ_2 e 2 sist. fund. $\Longleftrightarrow \exists\, t_0 \in \mathbb{R} \,/\, W(\varphi_1,\varphi_2)(t_0) \neq 0 \Longleftrightarrow W(\varphi_1,\varphi_2)(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$t_0 = 0 \Longrightarrow W(\varphi_1, \varphi_2)(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \varphi_1, \varphi_2$ son sist. fundamental

Además, $W(\varphi_1,\varphi_2)(t) = W(\varphi_1,\varphi_2)(0)\, e^{-\int_0^t 0\, ds} = 1 \cdot 1 = 1$

Por ser sol., se verifica $\varphi_1'' = -a(t)\varphi_1$ y $\varphi_2'' = -a(t)\varphi_1$

$x'(t) = \varphi_2'(t)\int_0^t e^s\varphi_1(s)ds + e^t\varphi_1\cancel{(t)}\varphi_2(t) - \varphi_1'(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds - e^t\varphi_1\cancel{(t)}\varphi_2(t) + 2024\varphi_2'(t)$

$= \varphi_2'(t)\left(2024 + \int_0^t e^s\varphi_1(s)ds\right) - \varphi_1'(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds$

$x''(t) = \varphi_2''(t)\left(2024 + \int_0^t e^s\varphi_1(s)ds\right) + e^t\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1''(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds - e^t\varphi_1'(t)\varphi_2(t) =$

$e^t W(\varphi_1,\varphi_2)(t) + \varphi_2''(t)\left(2024 + \int_0^t e^s\varphi_1(s)ds\right) - \varphi_1''(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds =$

$e^t - a(t)\varphi_2(t)\left(2024 + \int_0^t e^s\varphi_1(s)ds\right) + a(t)\varphi_1(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds =$

$e^{-t} - a(t)\left(2024\varphi_2(t) + \varphi_2(t)\int_0^t e^s\varphi_1(s)ds - \varphi_1(t)\int_0^t e^s\varphi_2(s)ds\right) = -a(t)x(t) + e^{-t}$

4. Encuentra todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las desigualdades

$$0 \le f(t) \le \frac{1}{1+t^2} F(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

Usamos Lema : sea $f : J \to \mathbb{R}_0^+$, $\alpha > 0$, $t_0 \in J$ intervalo cualquiera /

$f(t) \le \alpha \left| \int_{t_0}^t f(s) ds \right| \quad \forall t \in J \implies f(t) = 0 \quad \forall t \in J$

Sea $J = \mathbb{R}$

• Si $t \ge 0$:

$0 \le f(t) \le \int_0^t \frac{1}{1+t^2} f(s) ds \le \int_0^t f(s) ds \le \left| \int_0^t f(s) ds \right| \implies f(t) = 0 \quad \forall t \in J$

• Si $t < 0$:

$0 \le f(t) \le \frac{1}{1+t^2} \int_0^t f(s) ds \le 0 \implies f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

5. El espacio vectorial de soluciones de las ecuación $x'' + 4x = 0$ se denota por Z_x. De igual modo, Z_y será el espacio vectorial de soluciones de $y''+2y'+5y = 0$. Demuestra que la transformación

$$\Psi : Z_x \to Z_y, \;\; x \mapsto y, \;\; y(t) = e^{-t}x(t)$$

define un isomorfismo. Encuentra bases de Z_x y Z_y y calcula la matriz que representa a Ψ en esas bases.

- Veamos ψ está bien definida:

Si x es sol de $x''+4x=0$, $y = e^{-t}x$ deberá serlo de $y''+2y'+5y=0$

$y'(t) = -e^{-t}x + e^{-t}x' = e^{-t}(x'-x)$

$y''(t) = -e^{-t}(x'-x) + e^{-t}(x''-x') = e^{-t}(x''-2x'+x)$

$y''+2y'+5y = e^{-t}(x''-2x'+x) + 2e^{-t}(x'-x) + 5e^{-t}x =$

$e^{-t}(x''-2x'+x+2x'-2x+5x) = e^{-t}(x''+4x) = e^{-t}\cdot 0 = 0$ ✓

- Veamos ψ lineal:

$\psi(ax+by) = e^{-t}(ax+by) = ae^{-t}x + be^{-t}y = a\psi(x) + b\psi(y)$

- Veamos ψ inyectiva $\Longleftrightarrow \ker\psi = \{0\}$

$\ker\psi = \{x \in Z_x \,/\, \psi(x) = e^{-t}x = 0\} = \{0\}$

- Dado que Z_x y Z_y son espacios de soluciones de ecuaciones lineales de 2° orden, $\dim(Z_x) = \dim(Z_y) = 2$.

Por tanto, queda probado que ψ es isomorfismo.

Podemos comprobar que $\varphi_1(t) = \cos 2t$ y $\varphi_2(t) = \operatorname{sen} 2t$ forman sist fundamental de $Z_x \Rightarrow \mathcal{B}_x = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es base de $Z_x \Rightarrow \mathcal{B}_y = \{\psi(\varphi_1), \psi(\varphi_2)\} = \{e^{-t}\varphi_1, e^{-t}\varphi_2\}$ forman base de Z_y. Por tanto,

$$M(\psi; \mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$