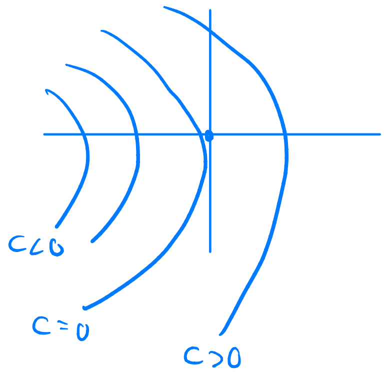
Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
21 de Marzo de 2019

NOMBRE:

1. En el plano con coordenadas (x, y) se considera la familia de curvas dada por la ecuación
$$\frac{y^2}{2} + x = c$$
donde $c \in \mathbb{R}$ actúa como parámetro. Encuentra la familia de trayectorias ortogonales. Dibuja ambas familias.

$$\Phi(x, y, C) = \frac{y^2}{2} + x - c$$



$$yy' + 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{y}$$

$$y' = -\frac{1}{-1/y} = y$$

$$y' = y \Rightarrow y(x) = Ke^x \ / \ K \in \mathbb{R}$$

2. Escribe la ecuación diferencial que modela la desintegración del Radio 226 sabiendo que la masa se reduce a la mitad (periodo de semi-desintegración) en 1600 años.

Sea $m(t)$ la masa del elemento en el instante de tiempo $t \geq 0$.
Sea $\lambda > 0$ un parámetro que depende de la sustancia.

Sabemos que la ecuación de desintegración es de la forma

$$m'(t) = -\lambda m(t) \implies m(t) = c e^{-\lambda t}, \quad c > 0$$

$$m(1600) = \frac{m(0)}{2} \implies c e^{-\lambda 1600} = \frac{c}{2} \implies e^{-\lambda 1600} = \frac{1}{2} \implies \lambda = \frac{\ln(2)}{1600}$$

Por tanto, nuestra ecuación es la siguiente: $m'(t) = -\frac{\ln(2)}{1600} m(t)$

3. Encuentra las órbitas del sistema autónomo

$$x' = (x^2 + 3y^2 + 1)y, \quad y' = -(x^2 + 3y^2 + 1)x.$$

¿Qué tipo de curvas son?

Órbita $= \{ (x(t), y(t)) \ / \ t \in I \}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = (x^2 + 3y^2 + 1)\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = -(x^2 + 3y^2 + 1)\, x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

Llegamos a una ecuación de variables separadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \Rightarrow \int -x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + c = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C} = 1$$

Por tanto, vemos que la órbita es una elipse.

4. Se considera la transformación $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t,x) = (s,y)$ con

$$s = e^t, \quad y = e^t x.$$

Determina la imagen $\varphi(\mathbb{R}^2) = \hat{\Omega}$ y prueba que φ es un C^1-difeomorfismo entre $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $\hat{\Omega}$. ¿Es este cambio de variable admisible para la ecuación $x' = t^2 \cos x$?

$\varphi(t,x) = (e^t, e^t x)$

- Veamos $\varphi(\mathbb{R}^2) = \hat{\Omega} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$\subseteq$) Sea $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. $\varphi(t,x) = (e^t, e^t x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$\supseteq$) Sea $(s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Si pérdida de generalidad, podemos tomar $(s,y) = (e^t, e^t x) = \varphi(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \forall (s,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \exists (t,x) \in \mathbb{R}^2 /$ $\varphi(t,x) = (s,y) \Rightarrow (s,y) \in \varphi(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subseteq \varphi(\mathbb{R}^2)$

- Veamos φ difeomorfismo C^1, $\Leftrightarrow \varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \hat{\Omega})$ y $\exists \varphi^{-1} = \psi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^2 /$ $\psi \in C^1(\hat{\Omega})$

Sea $\psi : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^2 \;/\; \psi(s,y) = \left(\ln(s), \frac{y}{s}\right)$

Claramente $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\psi \in C^1(\hat{\Omega})$ por serlo cada componente.

$$\varphi(\psi(s,y)) = \varphi\left(\ln(s), \frac{y}{s}\right) = \left(e^{\ln(s)}, \frac{y}{s} \cdot e^{\ln(s)}\right) = (s,y)$$

$$\psi(\varphi(t,x)) = \psi(e^t, xe^t) = \left(\ln(e^t), \frac{xe^t}{e^t}\right) = (t,x)$$

Por tanto, son inversas.

- Para ser admisible para $x' = t^2 \cos x = f(t,x)$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) f cont: claro

2) φ difeomorfismo C^1: probado

3) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(t,x) f(t,x) = e^t + 0 = e^t \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

Por tanto, es accesible.

5. Por un argumento visto en clase sabemos que la ecuación

$$x^{55} + x + t = 0$$

define una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x = x(t)$, de clase C^1. Demuestra que esta función también es de clase C^2 y encuentra una ecuación diferencial de segundo orden que la admita como solución.