Tema 11

Comportamiento local de una función holomorfa

En la última serie de aplicaciones de la teoría local de Cauchy que vamos a estudiar, sacamos partido a un aspecto clave de la fórmula de Cauchy, que se comentó en su momento pero aún no hemos aprovechado a fondo: la fórmula nos da los valores de una función holomorfa en un disco abierto a partir de los valores en la circunferencia. Como caso muy particular de esta idea, obtendremos la llamada *propiedad de la media*, afirmando que el valor de una función holomorfa en el centro de una circunferencia es la media de sus valores en la circunferencia. De aquí deducimos fácilmente el *principio del módulo máximo*, que nos da una de las propiedades más útiles e importantes de las funciones holomorfas. Dicho principio resulta ser equivalente a otro resultado muy llamativo, como es el *teorema de la aplicación abierta*. De él se deduce a su vez la versión para funciones holomorfas del *teorema de la función inversa*, afirmando que toda función holomorfa es localmente inversible en cada punto donde la derivada no se anule. Estudiaremos también cómo se comporta una función holomorfa en el entorno de un cero de su derivada. De esta forma tenemos una descripción del comportamiento local de una función holomorfa, mucho más completa que la que nos da el cálculo en dos variables para funciones diferenciables en sentido real.

11.1. Principio del módulo máximo

En gran medida, todos los resultados que siguen se basan en una observación muy sencilla:

Propiedad de la media. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Para $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, se tiene:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(a + r e^{it}\big)\, dt \tag{1}$$

Demostración. Basta aplicar la fórmula de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f\big(a+re^{it}\big)}{re^{it}}\,ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\big(a+re^{it}\big)dt \qquad \blacksquare$$

Si tenemos en cuenta la definición de la integral de Cauchy como límite de sumas integrales, el segundo miembro de (1) puede muy bien interpretarse como la media de los valores de f en la circunferencia $C(a,r)^*$. Se pone aquí de manifiesto una idea que ya se comentó al obtener la fórmula de Cauchy: para conocer la función f en $D(a,r)$, y en particular para conocer $f(a)$, basta conocer los valores de f en $C(a,r)^*$. Lo único que hemos añadido ahora es el hecho de que la integral que nos permite calcular $f(a)$ es muy sencilla e intuitiva. Para preparar la forma en que usaremos la propiedad de la media, conviene destacar la siguiente consecuencia obvia:

▪ *Con las mismas hipótesis del resultado anterior, se tiene:*

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f\big(a+re^{it}\big)\big|\,dt \tag{2}$$

De nuevo, el segundo miembro es la media de los valores de $|f|$ en la circunferencia, lo cual es aún más intuitivo, pues ahora estamos promediando números reales. Tenemos solamente una desigualdad, pero se adivina lo que va a ocurrir cuando el valor promedio $|f(a)|$ sea mayor o igual que todos los valores de $|f|$ en $C(a,r)^*$ que son los que promediamos. Esta es la idea que enseguida vamos a aprovechar:

Principio del módulo máximo. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Entonces f es constante.*

Demostración. Fijado $r \in]0,\delta[$, la función continua $\psi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = |f(a)| - |f(a+re^{it})| \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]$$

verifica que $\psi(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. Pero usando (2) también tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,dt = 2\pi\left(|f(a)| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(a+re^{it}|\,dt\right) \leqslant 0 \tag{3}$$

Por una propiedad bien conocida de la integral de Cauchy para funciones continuas con valores reales, si fuese $\psi(t) > 0$ para algún $t \in [-\pi,\pi]$, la integral de ψ sería estrictamente positiva, luego (3) no deja más salida que $\psi(t) = 0$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$. Hemos probado así que $|f(a+re^{it})| = |f(a)|$ para todo $t \in [-\pi,\pi]$, pero esto además es válido para todo $r \in]0,\delta[$, luego tenemos:

$$|f(z)| = |f(a)| \qquad \forall z \in D(a,\delta)$$

Así pues, la restricción de f al dominio $D(a,\delta)$ es holomorfa y tiene módulo constante, luego es constante. Por el principio de identidad, como obviamente $D(a,\delta)$ tiene puntos de acumulación en Ω, concluimos que f es constante en Ω, como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Para sacar partido al teorema anterior, es natural ponerse en una situación que asegure la existencia de un máximo, como hacemos a continuación.

- *Sea* Ω *un dominio acotado y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω. *Entonces:* $\max\{\,|f(z)|\ :\ z \in \overline{\Omega}\,\} = \max\{\,|f(z)|\ :\ z \in \mathrm{Fr}(\Omega)\,\}$.

Nótese que ambos máximos existen, pues $\overline{\Omega}$ y $\mathrm{Fr}(\Omega)$ son compactos. Dado $a \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(a)| = \max\{\,|f(z)|\ :\ z \in \overline{\Omega}\,\}$, caben dos posibilidades. Si $a \in \mathrm{Fr}(\Omega)$, la igualdad buscada es evidente. En otro caso tenemos $a \in \Omega$ y podemos aplicar el teorema anterior a la restricción de f a Ω, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en a, obteniendo que f es constante en Ω. Por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$ y la igualdad buscada vuelve a ser evidente. ■

Así pues, para una función en las condiciones del enunciado anterior, cualquier acotación de su módulo que consigamos en la frontera de Ω, es también válida en $\overline{\Omega}$. Usando esta idea, probamos un resultado nada trivial sobre sucesiones de funciones holomorfas:

- *Sea* Ω *un dominio acotado y, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $f_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω. *Si la sucesión* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $\mathrm{Fr}(\Omega)$, *entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $\overline{\Omega}$ *a una función continua en* $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω.

Por hipótesis, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\mathrm{Fr}(\Omega)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p,q \geqslant m$ se tiene $\max\{\,|f_p(z) - f_q(z)|\ :\ z \in \mathrm{Fr}(\Omega)\,\} < \varepsilon$. Entonces, para $p,q \geqslant m$, podemos aplicar el resultado anterior a la función $f_p - f_q$, obteniendo que $\max\{\,|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \overline{\Omega}\,\} < \varepsilon$. Por tanto, $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en $\overline{\Omega}$, luego converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, que de entrada es continua, pues la convergencia uniforme preserva la continuidad. Como obviamente tenemos convergencia uniforme en todo subconjunto compacto de Ω, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. ■

En otro orden de ideas, es claro que en el principio del módulo máximo, si en lugar de un máximo relativo, suponemos un mínimo relativo, o incluso absoluto, no podemos llegar a la misma conclusión. En efecto, si una función holomorfa en un dominio se anula en un punto, es claro que su módulo tiene un mínimo absoluto en dicho punto y eso no puede implicar que la función sea constante. Sin embargo, vamos ahora a comprobar que, descartado el caso trivial de que la función sea constante, sus ceros son los únicos puntos en los que el módulo de la función puede tener un mínimo absoluto, o incluso relativo.

Principio del módulo mínimo. *Sea* Ω *un dominio y* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Supongamos que* $|f|$ *tiene un mínimo relativo en un punto* $a \in \Omega$. *Entonces, o bien* $f(a) = 0$, *o bien* f *es constante.*

Demostración. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Suponiendo que $f(a) \neq 0$, probaremos que f es constante. Por continuidad, existe $\eta > 0$ tal que $D(a,\eta) \subset D(a,\delta)$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\eta)$. Esto nos permite considerar la función $g : D(a,\eta) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = 1/f(z)$ para todo $z \in D(a,\eta)$, holomorfa en el dominio $D(a,\eta)$, cuyo módulo tiene un máximo absoluto en el punto a. Por el principio del módulo máximo, g es constante, luego f es constante en $D(a,\eta)$, y basta aplicar el principio de identidad. ■

Nótese que este principio es más débil que el del módulo máximo, pero ha quedado claro que es lo mejor que podíamos esperar. Los dos principios pueden usarse conjuntamente para encontrar ceros de una función, es decir, para probar que ciertas ecuaciones tienen solución.

- *Sea Ω un dominio acotado y f una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, que no sea constante. Si $|f|$ es constante en* $\mathrm{Fr}(\Omega)$*, entonces existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$.*

Si $|f|$ fuese constante en $\overline{\Omega}$, f sería constante. Como $\overline{\Omega}$ es compacto, existen $a, b \in \overline{\Omega}$ tales que $|f(a)| = \text{mín}\,\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} < \text{máx}\,\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = |f(b)|$. Por el principio del módulo máximo, tenemos $b \in \mathrm{Fr}(\Omega)$ y, puesto que $|f|$ es constante en $\mathrm{Fr}(\Omega)$, deducimos que $a \in \Omega$. El principio del módulo mínimo nos dice entonces que $f(a) = 0$. ■

11.2. Teorema de la aplicación abierta

El principio del módulo máximo se puede reformular de manera equivalente, para poner de manifiesto otra propiedad clave de las funciones holomorfas. Excluidas situaciones más o menos triviales, toda función holomorfa es una aplicación abierta, es decir, transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. No hay ningún resultado análogo a éste en Análisis real, ni siquiera para funciones reales de una variable real. Cabe pensar por ejemplo en las funciones seno y coseno, funciones analíticas en $\mathbb{R}$ cuya imagen no es un conjunto abierto.

Teorema de la aplicación abierta. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para todo abierto $U \subset \Omega$ se tiene que $f(U)$ es abierto.*

Demostración. Probamos que $f(\Omega)$ es abierto, es decir, el caso $U = \Omega$, y el caso general se deducirá fácilmente. Fijado $b \in f(\Omega)$, escribimos $b = f(a)$ con $a \in \Omega$, y debemos encontrar $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(b,\rho) \subset f(\Omega)$.

La función $z \mapsto f(z) - b$ es holomorfa en Ω y se anula en el punto a, pero no puede ser idénticamente nula, ya que f no es constante. Por el principio de los ceros aislados, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $f(z) \neq b$ para todo $z \in \overline{D}(a,r) \setminus \{a\}$. Bastará entonces tomar

$$\rho = \frac{1}{2}\,\text{mín}\,\{|f(z) - b| \;:\; z \in C(a,r)^*\} > 0$$

Fijado $w_0 \in D(b,\rho)$, pensamos en la función $g : \overline{D}(a,r) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(z) - w_0$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Como $|g|$ es continua en el compacto $\overline{D}(a,r)$, existe $z_0 \in \overline{D}(a,r)$ tal que $|g(z_0)| \leqslant |g(z)|$ para todo $z \in \overline{D}(a,r)$. Para $z \in C(a,r)^*$ tenemos

$$|g(z)| = |f(z) - w_0| \geqslant |f(z) - b| - |w_0 - b| \geqslant 2\rho - |w_0 - b| > \rho$$

mientras que $|g(z_0)| \leqslant |g(a)| = |b - w_0| < \rho$, luego $z_0 \notin C(a,r)^*$, así que $z_0 \in D(a,r)$. Por tanto, el módulo de la función $g \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tiene un mínimo absoluto en $z_0 \in D(a,r)$. Si g fuese constante, f sería constante en $D(a,r)$ y, por el principio de identidad, también sería constante en Ω, contra la hipótesis. Al aplicar a g el principio del módulo mínimo, obtenemos que $g(z_0) = 0$, es decir, $w_0 = f(z_0) \in f(D(a,r)) \subset f(\Omega)$, como queríamos.

Si ahora U es un subconjunto abierto de Ω, comprobamos fácilmente que $f(U)$ es abierto. Expresando U como unión de sus componentes conexas, basta obviamente ver que la imagen por f de cada componente conexa de U es un conjunto abierto. Si V es una componente conexa de U, entonces V es un dominio y $f\big|_V$ es una función holomorfa en V, no constante, pues si f fuese constante en V, el principio de identidad nos diría que f es constante en Ω, de nuevo en contra de la hipótesis. Aplicando a V y $f\big|_V$ lo ya demostrado para Ω y f, obtenemos que $f(V)$ es abierto, como queríamos. ■

Este resultado generaliza claramente otros que habíamos deducido de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante, el conjunto $f(\Omega)$ es abierto, luego no puede estar contenido en una recta ni en una circunferencia, y en particular, ninguna de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ y $|f|$ puede ser constante.

También vemos fácilmente que el principio del módulo máximo se deduce a su vez del teorema anterior:

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $|f|$ tiene un máximo relativo en un punto $a \in \Omega$, es decir, que existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y el conjunto $f\big(D(a,\delta)\big)$ está contenido en $\overline{D}\big(0,|f(a)|\big)$. Si f no fuese constante, el teorema anterior nos diría que $f\big(D(a,\delta)\big)$ es abierto, pero entonces tendríamos $f\big(D(a,\delta)\big) \subset D(0,|f(a)|)$ y, en particular, $|f(a)| < |f(a)|$ lo cual es absurdo. Por tanto, f es constante, como queríamos demostrar.

Así pues, el principio del módulo máximo y el teorema de la aplicación abierta pueden verse como resultados equivalentes. Nótese sin embargo que, para deducir el teorema de la aplicación abierta del principio del módulo máximo, el razonamiento es laborioso y requiere el principio de identidad, mientras que en sentido recíproco las cosas son mucho más fáciles, como acabamos de comprobar.

11.3. Teorema de la función inversa

El teorema de la aplicación abierta nos sugiere claramente que pensemos en una función holomorfa e inyectiva en un dominio, que es una aplicación abierta, así que la función inversa también está definida en un abierto y es continua, lo que nos pone en camino para probar que dicha función inversa sea a su vez una función holomorfa. Sin embargo, de entrada es preferible que la inyectividad de nuestra función no sea una hipótesis, pues no suele ser fácil de comprobar, sino que sea parte de la tesis del teorema.

La hipótesis natural para conseguir la inyectividad de una función holomorfa consiste en suponer que su derivada no se anula. En un sentido “global”, enseguida nos damos cuenta de que esta hipótesis no asegura la inyectividad: la exponencial es una función entera cuya derivada no se anula nunca, pero está muy lejos de ser inyectiva.

Sin embargo, si lo que buscamos es un teorema “local”, el ejemplo anterior no nos debe desanimar. Lo que necesitamos es que, cuando la derivada de una función holomorfa no se anule en un punto, la función sea inyectiva en un entorno de dicho punto, y eso sí lo vamos a poder probar. Nótese, por ejemplo, que la función exponencial es inyectiva en un entorno de cada punto del plano: concretamente es inyectiva en $D(a,\pi)$ para todo $a \in \mathbb{C}$.

Para conseguir la inyectividad local que buscamos, podríamos usar el teorema de la función inversa para funciones diferenciables en sentido real, pero es más sencillo usar argumentos propios del plano complejo. Concretamente nos basamos en el siguiente resultado, que volverá a ser útil más adelante:

Lema. *Sea Ω un abierto del plano y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Consideremos la función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida, para cualesquiera $z, w \in \Omega$, por:*

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f\,'(w) = f\,'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Entonces Φ es continua.

Demostración. La continuidad separada de Φ en cada variable está muy clara, pero se trata de probar su continuidad en las dos variables, es decir, que Φ es continua considerando en $\Omega \times \Omega$ la topología producto. El conjunto $U = \{(w,z) \in \Omega \times \Omega : w \neq z\}$ es abierto y $\Phi\big|_U$ es continua, como cociente de funciones continuas, luego Φ es continua en U. Fijado $a \in \Omega$ bastará pues probar que Φ es continua en el punto (a,a).

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de $f\,'$ en el punto a nos da un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y

$$|f\,'(\xi) - f\,'(a)| < \varepsilon \qquad \forall \xi \in D(a,\delta) \tag{4}$$

Basta claramente probar que $|\Phi(w,z) - \Phi(a,a)| < \varepsilon$ para cualesquiera $w, z \in D(a,\delta)$. Si $w = z$, la desigualdad buscada es la que aparece en (4), sin más que tomar $\xi = z$. Suponiendo entonces que $w \neq z$, tenemos

$$\Phi(w,z) - \Phi(a,a) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - f'(a) = \frac{1}{w - z} \int_{[z,w]} \big(f'(\xi) - f'(a)\big)\, d\xi$$

donde hemos usado la regla de Barrow para la integral curvilínea, puesto que evidentemente, f' es una primitiva de f mientras que la función constantemente igual a $f'(a)$ tiene también una primitiva obvia.

Basta ya acotar la integral que aparece en la igualdad anterior. Para $\xi \in [z,w]^* \subset D(a,\delta)$ usamos (4) y obtenemos claramente:

$$\big|\Phi(w,z) - \Phi(a,a)\big| < \frac{1}{|w - z|}\, l\big([z,w]\big)\, \varepsilon = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Teorema de la función inversa (local). *Sea Ω un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto U, con $a \in U \subset \Omega$, verificando:*

(i) La función f es inyectiva en U y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.
(ii) El conjunto $V = f(U)$ es abierto y, escribiendo $\varphi = f\big|_U$, se tiene que $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con

$$\big(\varphi^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

Demostración. Aplicando el lema anterior, por ser $\Phi(a,a) = f'(a) \neq 0$, la continuidad de Φ en el punto (a,a) nos permite encontrar un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y $\Phi(w,z) \neq 0$ para cualesquiera $w,z \in D(a,r)$. Tomando $U = D(a,r)$ comprobaremos fácilmente las dos afirmaciones del teorema.

(i). Para $w,z \in U$ con $w \neq z$, se tiene que $f(w) - f(z) = \Phi(w,z)(w-z) \neq 0$, luego f es inyectiva en U. Además, para todo $z \in U$ se tiene también $f'(z) = \Phi(z,z) \neq 0$.

(ii) Por el teorema de la aplicación abierta, $\varphi = f\big|_U$ es abierta, en particular $V = \varphi(U)$ es abierto, pero además sabemos ya que φ^{-1} es continua.

Sea $w \in V$ y $\{w_n\}$ una sucesión de puntos de $V \setminus \{w\}$ tal que $\{w_n\} \to w$. Si $z = \varphi^{-1}(w)$ y $z_n = \varphi^{-1}(w_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de $U \setminus \{z\}$ y, por ser φ^{-1} continua en el punto w, tenemos que $\{z_n\} \to z$. Por tanto:

$$\left\{\frac{w_n - w}{z_n - z}\right\} = \left\{\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}\right\} \to f'(z) \neq 0$$

y deducimos que

$$\left\{\frac{\varphi^{-1}(w_n) - \varphi^{-1}(w)}{w_n - w}\right\} = \left\{\frac{z_n - z}{w_n - w}\right\} \to \frac{1}{f'(z)}$$

Esto demuestra que φ^{-1} es derivable en todo punto $w \in V$, es decir $\varphi^{-1} \in \mathcal{H}(V)$. Además, para $z \in U$ arbitrario, al aplicar lo anterior con $w = f(z)$ vemos que $\big(\varphi^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. ■

Nuestro próximo objetivo es averiguar lo que ocurre en el teorema anterior si eliminamos la hipótesis $f'(a) \neq 0$, es decir, analizar como se comporta una función holomorfa en el entorno de un cero de su derivada, lógicamente excluyendo el caso trivial de una función constante. Haremos una descripción muy concreta de este comportamiento, algo que está muy lejos de ser posible para funciones diferenciables en sentido real. En particular veremos que la condición $f'(a) \neq 0$, no sólo es suficiente para tener la inyectividad local de f, sino también necesaria.

Como ejemplo orientativo, fijado $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant 2$, consideremos la función $z \mapsto z^m$, cuya derivada se anula en el origen. Para cada $w \in \mathbb{C}^*$, la ecuación $z^m = w$ tiene exactamente m soluciones distintas. Pues bien, en general vamos a probar que cualquier función f, holomorfa y no constante en un entorno de un punto a, con $f'(a) = 0$, se comporta exactamente de la misma forma en un entorno de a. El valor de m para el que esto va a ocurrir se adivina fácilmente, si pensamos que la función $z \mapsto z^m$ tiene un cero de orden m en el origen. En general deberemos usar el orden del cero en el punto a de la función $z \mapsto f(z) - f(a)$.

Para la demostración de este importante resultado, necesitamos algo que se deduce muy fácilmente del teorema local de Cauchy, una vez que sabemos que la derivada de una función holomorfa también es holomorfa. Hasta ahora no habíamos tenido ocasión de usar este hecho, sobre el que volveremos más adelante.

- *Sea Ω un dominio estrellado y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Entonces f admite un logaritmo holomorfo en Ω, es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$. Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función f admite una raíz m-ésima holomorfa en Ω, es decir, existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = \big(h(z)\big)^m$ para todo $z \in \Omega$.*

En efecto, f'/f es una función holomorfa en Ω que, por el teorema local de Cauchy, admite una primitiva $g_0 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Basta ahora recordar cómo, a partir de g_0 se obtiene fácilmente un logaritmo holomorfo de f. Sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\lambda + g_0(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, luego $g = \lambda + g_0$ es el logaritmo buscado. Fijado $m \in \mathbb{N}$ definimos entonces $h(z) = e^{g(z)/m}$ para todo $z \in \Omega$, obteniendo evidentemente una raíz m-ésima holomorfa de f. ■

Teorema (Comportamiento local de una función holomorfa en un cero de su derivada). *Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante, y $a \in \Omega$ tal que $f'(a) = 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero en el punto a de la función $z \mapsto f(z) - f(a)$. Entonces existen dos abiertos U y V del plano, con $a \in U \subset \Omega$ y $f(a) \in V$, tales que, para cada $w \in V \setminus \{f(a)\}$, la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente m soluciones distintas en U, es decir, el conjunto $\{z \in U : f(z) = w\}$ tiene m elementos.*

Demostración. La caracterización del orden de un cero, nos permite escribir

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m g(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

donde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(a) \neq 0$. Usando entonces la continuidad de g en el punto a, encontramos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$.

Por tanto, g es una función holomorfa que no se anula en el dominio estrellado $D(a,r)$, luego admite en dicho dominio una raíz m-ésima holomorfa, es decir, existe $h \in \mathcal{H}\big(D(a,r)\big)$ tal que $g(z) = \big(h(z)\big)^m$ para todo $z \in D(a,r)$. Tenemos entonces

$$f(z) = f(a) + \big((z-a)\,h(z)\big)^m = f(a) + \big(\psi(z)\big)^m \qquad \forall z \in D(a,r) \tag{5}$$

donde hemos escrito $\psi(z) = (z-a)\,h(z)$ para todo $z \in D(a,r)$.

Observamos ahora que ψ es una función holomorfa en $D(a,r)$ con

$$\psi'(z) = h(z) + (z-a)\,h'(z) \qquad \forall z \in D(a,r)$$

y, en particular $\psi'(a) = h(a) \neq 0$, ya que $\big(h(a)\big)^m = g(a) \neq 0$.

Podemos por tanto aplicar a ψ el teorema de la función inversa local, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$, con $\delta < r$, tal que ψ es inyectiva en $D(a,\delta)$ y $\psi\big(D(a,\delta)\big)$ es un conjunto abierto. Como $\psi(a) = 0$, existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(0,\rho) \subset \psi\big(D(a,\delta)\big)$. Los abiertos U y V que buscamos se consiguen ya tomando

$$U = D(a,\delta) \cap \psi^{-1}\big(D(0,\rho)\big) \qquad \text{y} \qquad V = D\big(f(a),\rho^m\big)$$

Fijado $w \in V \setminus \{f(a)\}$ debemos pues comprobar que el conjunto $\{z \in U : f(z) = w\}$ tiene m elementos. Denotemos por $w_1, w_2, \ldots, w_m$ a las raíces m-ésimas del número complejo no nulo $w - f(a)$, que sabemos son todas distintas, es decir, para $k, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ con $k \neq j$, se tiene $w_k \neq w_j$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos $|w_k|^m = |w - f(a)| < \rho^m$, de donde $w_k \in D(0,\rho) \subset \psi\big(D(a,\delta)\big)$ y podemos escribir $w_k = \psi(z_k)$ con $z_k \in D(a,\delta)$. De nuevo los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ son todos distintos, pues de $z_k = z_j$ con $k, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ deducimos que $w_k = \psi(z_k) = \psi(z_j) = w_j$, luego $k = j$. Concluiremos entonces la demostración probando que $\{z \in U : f(z) = w\} = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Para $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, es claro que $z_k \in U$, y usando (5) se tiene

$$f(z_k) = f(a) + \big(\psi(z_k)\big)^m = f(a) + w_k^m = w$$

lo que nos da una inclusión. Recíprocamente, si $z \in U$ y $f(z) = w$, de (5) deducimos que $\big(\psi(z)\big)^m = w - f(a)$ luego existe $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ tal que $\psi(z) = w_k = \psi(z_k)$, pero ψ es inyectiva en U luego $z = z_k$. ■

Como una consecuencia relevante del teorema anterior, obtenemos que la condición de que la derivada no se anule, no sólo es suficiente, sino también necesaria para la inyectividad local:

- *Si Ω es un abierto del plano, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es inyectiva en un entorno de un punto $a \in \Omega$ si, y sólo si, $f'(a) \neq 0$.*

Cuando $f'(a) \neq 0$, el teorema de la función inversa local nos asegura la existencia de un entorno de a en el que f es inyectiva. Para el recíproco, sea $r \in \mathbb{R}^+$ verificando que $D(a,r) \subset \Omega$ y que f es inyectiva en $D(a,r)$. Si fuese $f'(a) = 0$, podríamos aplicar el teorema anterior a la restricción de f al dominio $D(a,r)$, teniendo en cuenta que la función $z \mapsto f(z) - f(a)$ tiene en el punto a un cero de orden $m \geqslant 2$. Obtendríamos un abierto U contenido en $D(a,r)$, tal que f no es inyectiva en U, cual es una contradicción. ■

El resultado anterior no tiene un análogo para funciones de una o varias variables reales. La función $x \mapsto x^3$, de $\mathbb{R}$ en sí mismo, es inyectiva, pero su derivada se anula en el origen. Análogamente, $(x,y) \mapsto (x^3, y^3)$ es una función inyectiva de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, cuya diferencial en el origen es idénticamente nula. Para funciones holomorfas, la ventaja de la equivalencia se pone de manifiesto en el siguiente resultado:

Teorema (de la función inversa global). *Sea U un dominio y $f \in \mathcal{H}(U)$ una función inyectiva. Entonces $V = f(U)$ es un dominio y $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ con*

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)} \qquad \forall z \in U$$

Demostración. Que V es abierto se deduce del teorema de la aplicación abierta, y está claro que V es conexo, puesto que U es conexo y f es continua. Por el resultado anterior, como f es inyectiva en un entorno de cada punto de U, tenemos que $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, y todo lo que queda es aplicar el teorema de la función inversa local. Para cada $z \in U$, dicho teorema nos da dos abiertos U_0 y V_0, con $z \in U_0 \subset U$ y $f(z) \in V_0 \subset V$, tales que si llamamos f_0 a la restricción de f a U_0, entonces f_0 es una biyección de U_0 sobre V_0 y f_0^{-1} es derivable en el punto $f(z)$ con $\big(f_0^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. Como de hecho f es inyectiva, está claro que la inversa local f_0^{-1} ha de coincidir con la restricción a V_0 de la inversa global f^{-1}. Por tanto f^{-1} es derivable en el punto $f(z)$ con $\big(f^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = 1/f'(z)$. Como esto es válido para todo $z \in \Omega$, vemos que $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ y la demostración está concluida. ■

11.4. Ejercicios

1. Sea $R \in \mathbb{R}^+$ y $f \in \mathcal{H}\big(D(0,R)\big)$, no constante. Probar que la función $M :]0,R[\to \mathbb{R}$ definida por
$$M(r) = \max\left\{ |f(z)| : z \in C(0,r)^* \right\} \qquad \forall r \in]0,R[$$
es estrictamente creciente.

2. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω, que tenga límite en ∞. Probar que $|f|$ tiene un máximo absoluto en un punto de $\mathbb{T}$. Suponiendo que f no es constante, probar que la función $M : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$M(r) = \max\left\{ |f(z)| : z \in C(0,r)^* \right\} \qquad \forall r \in]1,+\infty[$$
es estrictamente decreciente.

3. Sea P un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ y $M = \max\{|P(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Probar que
$$z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geqslant 1 \implies |P(z)| \leqslant M|z|^n$$

4. Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, que verifica la siguiente condición:
$$z \in \mathbb{T} \implies |f(z)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Re} z \leqslant 0 \\ 2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$
Probar que $|f(0)| \leqslant \sqrt{2}$.

5. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ y supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in]0,1[$ se tiene
$$\max\left\{ |f(z)| : |z| = r \right\} = r^n$$
Probar que existe $\alpha \in \mathbb{T}$ tal que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in D(0,1)$.

6. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ verificando que
$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1)$$
Probar que f es constante.

7. Mostrar que el teorema fundamental del Álgebra se deduce directamente del principio del módulo mínimo.

8. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

9. Sea $f : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$, tal que $\operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{T}$. Probar que f es constante.

10. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función inyectiva. Dados $a \in \Omega$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, calcular, para cada $z \in D(a,r)$, la integral
$$\int_{C(a,r)} \frac{w\,f'(w)}{f(w) - f(z)}\,dw$$