Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba intermedia de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. (**4 puntos**) Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(nz)}{3^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ -\ln(3) < \operatorname{Im} z < \ln(3)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω. Probar que la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{3^n} \qquad \big(z \in \Omega\big)$$

es continua en Ω y calcular $\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z}\, dz$.

Ejercicio 2. (**3 puntos**) Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\overline{z}) \qquad g(z) = z(z-1)f(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. (**3 puntos**) Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Granada, 4 de mayo de 2022