Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+i\pi, -R+i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\, dx.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que f es constante.

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Sea a una singularidad aislada de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a .

Granada, 18 de julio de 2023

Ejercicio 1. **(2.5 puntos)** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

A)

Sea $\gamma_n : [n, n+1] \to \mathbb{C}$ / $\gamma_n(x) = x \Rightarrow \gamma_n'(x) = 1$, un camino $\forall n \in \mathbb{N}_0$

sea $\Phi_n : \gamma^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ / $\Phi_n(t,z) = \dfrac{\cos(e^z - t)}{1+t^2}$, que es claramente cont. por ser cociente de continuas y sea $(\Phi_n)_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ / $(\Phi_n)_t(z) = \Phi_n(t,z)$, $\forall t \in \gamma_n^*$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ claramente entera por ser cociente de enteras.

Por T^a Holomorfía de integrales dependientes de parámetros, $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, con $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ / $f_n(z) = \int_{\gamma_n} \Phi_n(t,z)\, dt$

Además, sabemos $|f_n(z)| \leq \ell(\gamma_n) \max\left\{ \left| \dfrac{\cos(e^z - t)}{1+t^2} \right| \mid t \in \gamma^* \right\}$

$|1+t^2| \geq 1+n^2 \quad \forall t \in \gamma^*$

$|\cos(e^z - t)| = \left| \dfrac{e^{i(e^z - t)} + e^{-i(e^z - t)}}{2} \right| \leq \dfrac{e^{-\mathrm{Im}(e^z)} + e^{\mathrm{Im}(e^z)}}{2} =$

$\dfrac{e^{-e^{\mathrm{Re} z} \cdot \mathrm{sen}(\mathrm{Im}\, z)} + e^{e^{\mathrm{Re} z} \cdot \mathrm{sen}(\mathrm{Im}\, z)}}{2}$

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $\varphi : K \to \mathbb{C}$ / $\varphi(z) = |e^{\mathrm{Re} z} \mathrm{sen}(\mathrm{Im}\, z)|$

Con $\varphi(z) \leq M$ $\forall z \in K$

$$\left.\begin{aligned} e^{-e^{\mathrm{Re} z} \mathrm{sen}(\mathrm{Im}\, z)} &\leq e^{\varphi(z)} \leq e^M \\ e^{e^{\mathrm{Re} z} \cdot \mathrm{sen}\, \mathrm{Im}\, z} &\leq e^{\varphi(z)} \leq e^M \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos(e^z - t) \leq e^M \quad \forall z \in K \subseteq \mathbb{C} \text{ compacto}$$

Como $e^M \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2}$ converge, por Test Weierstrass, $\sum_{n\geq 0} f_n$

converge uniforme, absoluta y puntualmente en $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto.

Recubriendo $\mathbb{C}$ por compactos, $\sum_{n\geq 0} f_n$ c.a. en $\mathbb{C}$, y $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ Por T^a^ convergencia de Weierstrass para series, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$,

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \,/\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$

Ejercicio 3. **(2.5 puntos)** Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando que

$$|f(z)| \leqslant |f(z^2)| \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Probar que f es constante.

Sea $\{z_n\} = \{z^{2^n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $z \in D(0,1)$ $\Rightarrow$ $\{z_n\} \to 0$

sencilla inducción

Por hipótesis, $|f(z_n)| \leq |f(z_{n+1})| \Rightarrow |f(z)| \leq |f(z_n)|$

Como $f \in C(D(0,1)) \Rightarrow$ tomando límite $|f(z)| \leq |f(0)|$ $\forall z \in D(0,1)$ $\Rightarrow$

0 es máx rel. $\Rightarrow$ Por Principio del Módulo Máximo, f cte.

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Sea a una singularidad aislada de una función f. Probar que la función $\operatorname{Re} f$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a .

- a singularidad esencial $\Rightarrow$ Tª Casorati, $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\overline{f(D(a,r)\setminus\{a\})} = \mathbb{C} \Rightarrow$ f no acotada $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f$ no acotada en $D(a,r)\setminus\{a\}$

- a polo $\Rightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \exists r>0 / \forall z \in D(a,r)\setminus\{a\}$, $|f(z)| \geq 1$

Sea $g: D(a,r) \to \mathbb{C} \;/\; \begin{cases} g(z) = \dfrac{1}{f(z)} & z \neq a \\ g(a) = \lim_{z\to a} \dfrac{1}{f(z)} = 0 \end{cases}$

Tª Extensión Riemann

$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{H}(D(a,r)\setminus\{a\}) \Rightarrow g \in \mathcal{H}(D(a,r)\setminus\{a\}) \\ g \in C(\{a\}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \in \mathcal{H}(D(a,r))$

Claramente g no es cte., pues f diverge $\Rightarrow$ Por Tª Aplicación Abierta

$g(D(a,r))$ abierto con $0 \in g(D(a,r)) \Rightarrow \exists \delta > 0 \;/\; D(0,\delta) \subseteq g(D(a,r))$

$g(D(a,r)) = \left\{ \dfrac{1}{f(z)} \;/\; z \in D(a,r)\setminus\{a\} \right\} = h(f(D(a,r)\setminus\{a\}))$

donde $h(w) = \dfrac{1}{w}$ $\forall w \in f(D(a,r)\setminus\{a\})\setminus\{0\}$

$D(0,\delta) \subseteq g(D(a,r)) \Rightarrow D(0,\delta)\setminus\{0\} \subseteq g(D(a,r))\setminus\{0\} \Rightarrow$

$\mathbb{C}\setminus \overline{D}(0,1/\delta) = h(D(0,\delta)\setminus\{0\}) \subseteq h(h(f(D(a,r))\setminus\{a\})\setminus\{0\}) = f(D(a,r)\setminus\{a\})\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \exists R>0 \;/\; \mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R) \subseteq f(D(a,r)\setminus\{a\})\setminus\{0\} \Rightarrow f$ no acotada $\Rightarrow \operatorname{Re} f$ no acotada