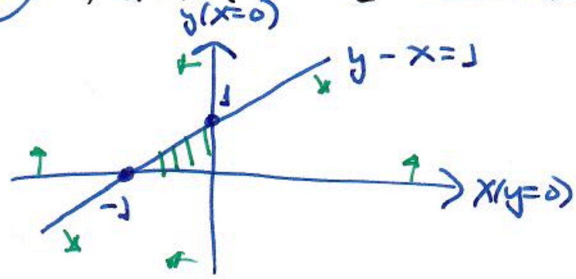
Ejercicio 1:-

Sea $(X,Y) \sim \mathcal{U}(G)$ con $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x < 1,\ x < 0,\ y > 0\}$

(a) Función de densidad conjunta



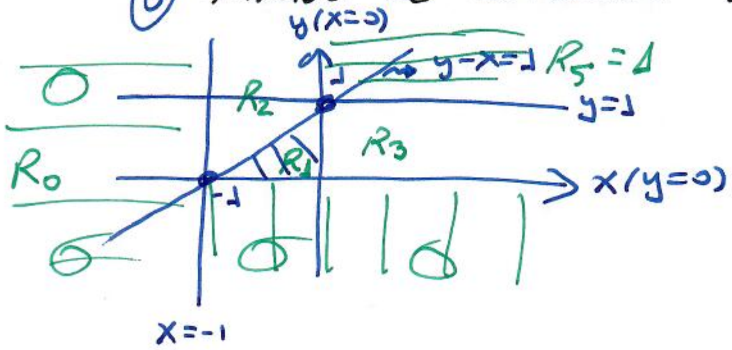
Dibujo $y - x = 1$

x	y
0	1
-1	0

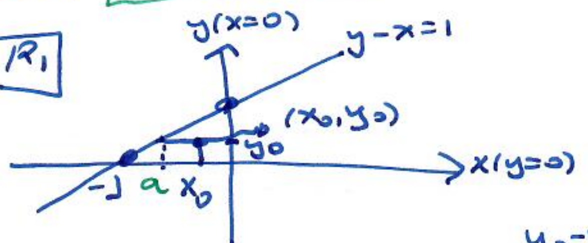
Como el área de G (Triángulo de base 1 y altura 1) es 1/2 ⇒

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } \underline{y - x < 1},\ x < 0,\ y > 0 \\ 0 & \end{cases}}$$

(b) Función de distribución conjunta



- $\boxed{R_0}$ $\boxed{F(x_0,y_0) = 0 \quad \forall (x_0,y_0) \in R_0}$
- $\boxed{R_5}$ $\boxed{F(x_0,y_0) = 1 \quad \forall (x_0,y_0) \in R_5}$
- $\boxed{R_1}$



$\underline{a}$ es el punto de corte $\begin{cases} y - x = 1 \\ y = y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a = y_0 - 1}$

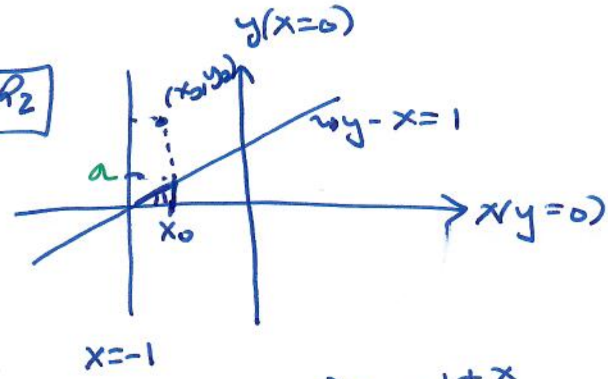
Por tanto, $F(x_0,y_0) = \underbrace{\int_{-1}^{y_0-1}\int_0^{1+x} 2\,dy\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{y_0-1}^{x_0}\int_0^{y_0} 2\,dy\,dx}_{②}$

① $\int_{-1}^{y_0-1}\int_0^{1+x} 2\,dy\,dx = \int_{-1}^{y_0-1} 2+2x\,dx = \left(2x+x^2\right]_{-1}^{y_0-1} = 2(y_0-1)+(y_0-1)^2+1$

② $\int_{y_0-1}^{x_0}\int_0^{y_0} 2\,dy\,dx = \int_{y_0-1}^{x_0} 2y_0\,dx = 2y_0(x_0+1-y_0)$

$\Rightarrow \boxed{F(x_0,y_0) = ① + ② \text{ en } R_1}$

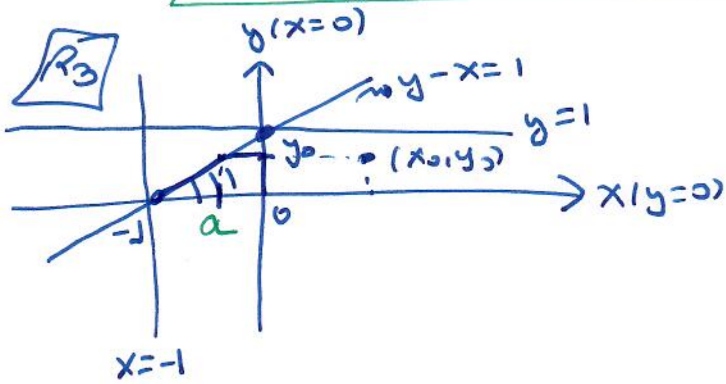
• $\boxed{R_2}$



$$F(x_0,y_0) = \int_{-1}^{x_0}\int_{0}^{1+x} 2\,dy\,dx = \int_{-1}^{x_0} 2+2x\,dx = 2x+x^2\Big]_{-1}^{x_0}$$

$$\rightarrow \boxed{F(x_0,y_0) = 2x_0 + x_0^2 + 1 \text{ en } R_2}$$

• $\boxed{R_3}$



Como en R_1 se tiene que $a = y_0 - 1$ y por tanto

$$F(x_0,y_0) = \underbrace{\int_{-1}^{y_0-1}\int_{0}^{1+x} 2\,dy\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{y_0-1}^{0}\int_{0}^{y_0} 2\,dy\,dx}_{②}$$

$$① \int_{-1}^{y_0-1}\int_{0}^{1+x} 2\,dy\,dx = \int_{-1}^{y_0-1} 2+2x\,dx = \left(2x+x^2\right]_{-1}^{y_0-1} =$$

$$= 2(y_0-1)+(y_0-1)^2+1$$

$$② \int_{y_0-1}^{0}\int_{0}^{y_0} 2\,dy\,dx = \int_{y_0-1}^{0} 2y_0\,dx = 2y_0(1-y_0)$$

Luego $\boxed{F(x_0,y_0) = ① + ② \text{ en } R_3}$

Conclusión:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y)\in R_0 \\ 2(y-1)+(y-1)^2+1+2y(x+1-y) & (x,y)\in R_1 \\ 2x+x^2+1 & (x,y)\in R_2 \\ 2(y-1)+(y-1)^2+1+2y(1-y) & (x,y)\in R_3 \\ 1 & (x,y)\in R_5 \end{cases}$$

(c) Funciones de densidad condicionadas

- $\boxed{X/Y=y_0}$

$$f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{2}{2(1-y_0)} = \frac{1}{1-y_0} \quad \text{si } \begin{matrix} y_0 - x < 1 \\ x<0 \\ (0<y_0<1) \end{matrix}$$

$$f_Y(y_0) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y_0)\,dx = \int_{y-1} 2\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y_0) = 2(1-y_0) \text{ si } 0<y_0<1$$

Por tanto, $\boxed{f_{X/Y=y_0}(x) = \frac{1}{1-y_0} \text{ si } y_0-1<x<0 \ (0<y_0<1)}$

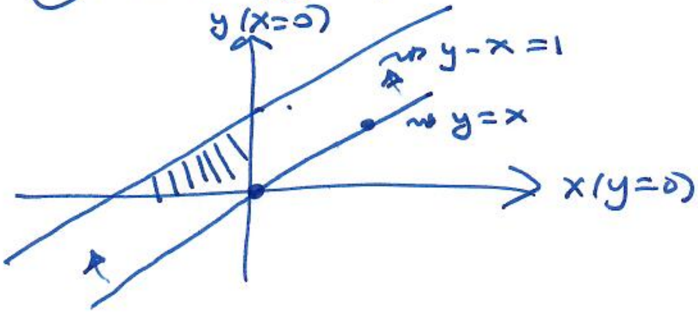
- $\boxed{Y/X=x_0}$

$$f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{f(x,y_0)}{f_X(x_0)} = \frac{2}{2(1+x_0)} \quad \text{si } \begin{matrix} y-x_0<1 \\ y>0 \\ (-1<x_0<0) \end{matrix}$$

$$f_X(x_0) = \int_{\mathbb{R}} f(x_0,y)\,dy = \int_0^{1+x} 2\,dy = 2(1+x_0) \text{ si } -1<x_0<0$$

Por tanto, $\boxed{f_{Y/X=x_0}(y) = \frac{1}{1+x_0} \text{ si } \begin{matrix} 0<y<1+x_0 \\ (-1<x_0<0) \end{matrix}}$

(d) $P[X-Y>0] = ?$



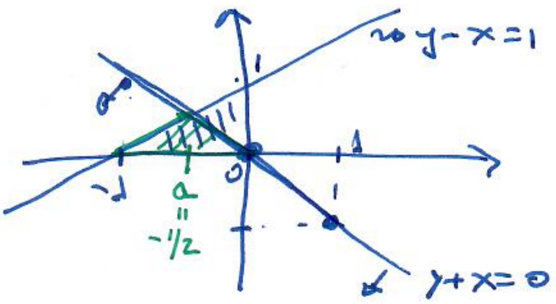
Dibujo la recta $x-y=0$

x	y
0	0
1	1

Como $X-Y>0 \Rightarrow$ La región barre a todo el dominio de definición de $f(x,y)$ y por tanto $\boxed{P[X-Y>0]=1}$

correción de errata. La **probabilidad es 0** porque es la región por debajo de la recta Y=X que no toca nunca al recinto de d

(e) $P[X+Y<0] = ?$



Dibujo $X+Y=0$

x	y
0	0
1	−1

$\underline{a}$ es el punto de corte de $(+)\begin{cases} y+x=0 \\ y-x=1 \\ \hline 2y = 1 \end{cases} \to x = 1/2 - 1 \to x = \boxed{-1/2 = a}$, $y = 1/2$

Por tanto, $P[X+Y<0] = \underbrace{\int_{-1}^{-1/2}\int_0^{1+x} 2\,dy\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{-1/2}^{0}\int_0^{-x} 2\,dy\,dx}_{(2)} =$

$(1) = \int_{-1}^{-1/2}\int_0^{1+x} 2\,dy\,dx = \int_{-1}^{-1/2} 2+2x\,dx = \left(2x+x^2\right]_{-1}^{-1/2} =$

$= \cancel{-1} + \frac{1}{4} + 2 \cancel{-1} = 1/4$

$(2) = \int_{-1/2}^{0}\int_0^{-x} 2\,dy\,dx = \int_{-1/2}^{0} -2x\,dx = \left(-x^2\right]_{-1/2}^{0} =$

$= \frac{1}{4}$

Por tanto, $\boxed{P[X+Y<0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1/2}$

Nota

Se podría haber deducido directamente porque nos piden resolviendo el (doble del área) del triangulo de base 1 y altura 1/2

el área sería $\frac{1 \cdot 1/2}{2} = \frac{1}{4}$ y el doble $\boxed{2 \cdot \frac{1}{4} = 1/2}$

f) • Mejor aproximación $= E[Y/X]$

Obtengamos su expresión punto a punto.

$$E[Y/X=x_0] = \int_{supp(f_{Y/X=x_0})} y\, f_{Y/X=x_0}(y)\, dy = \int_0^{1+x_0} \frac{y}{1+x_0}\, dy = \left[\frac{y^2}{2(1+x_0)}\right]_0^{1+x_0}$$

$supp(f_{Y/X=x_0}) = \{(x_0,y)\in\mathbb{R}^2 / 0<y<1+x_0,\ -1<x_0<0\}$

Por tanto, $E[Y/X=x_0] = \dfrac{1+x_0}{2}$. De modo que

La mejor aproximación de Y observando X es

$\boxed{\text{la v.a. } \dfrac{1+X}{2}}$ $(-1<X<0)$

• Error cuadrático medio

$$ECM = E[Var(Y/X)] = E[Y^2] - E\left((E[Y/X])^2\right)$$

$\hookrightarrow$ $$E[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^1 2y^2(1-y)\, dy = \int_0^1 2y^2 - 2y^3\, dy =$$

$$= \left(2\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$\hookrightarrow$ $$E\left[(E[Y/X])^2\right] = E\left[\left(\frac{1+X}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} E[(1+X)^2] =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^0 (1+x)^2 \cdot \underbrace{2(1+x)}_{f_X(x)}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 2(1+x)^3\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{(1+x)^4}{4}\right]_{-1}^0 = \frac{1}{8}$$

Por tanto $\boxed{ECM = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{2}{48} = 1/24}$

⑧ Una medida de la bondad del ajuste es $\eta^2_{Y/X}$

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{Var(E[Y/X])}{Var\, Y} = 1 - \frac{E[Var(Y/X)]}{Var\, Y}$$

Del apartado anterior $E[M] = E[Var(Y/X)] = \frac{1}{24}$

$$Var\, Y = \underbrace{E[Y^2]}_{1/6} - \left(E[Y]\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

(del aptdo anterior)

$$\hookrightarrow E[Y] = \int_0^1 2y(1-y)\,dy = 2\int_0^1 y - y^2\,dy =$$

$$= 2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{6} = 1/3$$

En conclusión $\eta^2_{Y/X} = 1 - \frac{1/24}{1/18} = 1 - \frac{18}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$$\boxed{\eta^2_{Y/X} = 1/4 = 0'25}$$

De modo que el 25% de la variabilidad de Y queda explicada por la curva de regresión

Ejercicio 2

Sea (X,Y) tal que $M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = e^{\frac{t_2 + 16t_1^2 + 4t_2^2 + 10t_1t_2}{2}}$

ⓐ obtener $\rho_{X,Y}$ = coeficiente de correlación y $\eta^2_{Y/X} = \eta^2_{X/Y} = \rho^2_{X,Y}$

Solución:

$M_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ es la f.g.m. de un vector normal bivariante con vector de media $(\mu_1,\mu_2) = (0, 1/2)$ y matriz de covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Como $\sigma_1\sigma_2\rho = 5 \Rightarrow 4 \cdot 2\rho = 5 \Rightarrow \boxed{\rho_{X,Y} = 5/8}$ y $\boxed{\rho^2_{X,Y} = \frac{25}{64}}$

ⓑ Distribuciones de $Y/_{X=0}$ y $X/_{Y=2}$

• $Y/_{X=0} \sim N\left(\underset{1/2}{\mu_2} + \underset{5/8}{\rho} \frac{\overset{\sqrt{4}}{\sigma_2}}{\underset{\sqrt{16}}{\sigma_1}} (\underset{0}{x} - \underset{0}{\mu_1}),\ \underset{4(1-\frac{25}{64})}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right) = N\left(1/2, \underset{2'44}{\frac{156}{64}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{Y/_{X=0} \sim N(1/2,\ 2'44)}$$

• $X/_{Y=2} \sim N\left(\underset{0}{\mu_1} + \underset{5/8}{\rho} \frac{\overset{\sqrt{16}}{\sigma_1}}{\underset{\sqrt{4}}{\sigma_2}} (\underset{2}{y} - \underset{1/2}{\mu_2}),\ \underset{16}{\sigma_1^2}(1-\underset{25/64}{\rho^2})\right) = N\left(\frac{15}{8}, \frac{624}{64}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X/_{Y=2} \sim N(1'88,\ 9'75)}$$

ⓒ $(2X, Y-X) = (X,Y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Como $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

y como (X,Y) es una normal bivariante, entonces:

$(2X, Y-X) \sim N_2(\mu A,\ A^t \Sigma A) = \boxed{N_2\left((0, 1/2),\ \Sigma = \begin{pmatrix} 64 & -22 \\ -22 & 10 \end{pmatrix}\right)}$

$\left(\begin{matrix} \mu = (0, 1/2) \\ \Sigma = \begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}\right)$

• Como $\underset{\sqrt{64}}{\sigma_1}\underset{\sqrt{10}}{\sigma_2}\rho = -22 \Rightarrow$ ... relación negativa muy buena

Ejercicio 3 (a)

Obtener los coeficientes del modelo lineal X sobre Y.

Solución:

En este caso se pretenden deducir los valores de X, conocidos los de Y, mediante el modelo $X = aY + b$.

En este sentido, se busca la función $\ell^L_{opt}(Y) = \min_{a,b} E[(X-aY-b)^2]$

(minimiza el error cuadrático medio).

Por tanto el problema se reduce a obtener a y b que minimizan $L = E[(X-aY-b)^2] = E[X^2] + a^2E[Y^2] + b^2 +$

$+ 2ab\,E[Y] - 2a\,E[XY] - 2b\,E[X]$.

Para obtener los candidatos a extremos relativos de L planteamos el sistema $\nabla L \equiv 0$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 2a\,E[Y^2] + 2b\,E[Y] - 2E[XY] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2b + 2a\,E[Y] - 2E[X] = 0 \Rightarrow \boxed{b = E[X] - a\,E[Y]}$$

$$\Rightarrow a\,E[Y^2] + (E[X] - a\,E[Y])\cdot E[Y] - E[XY] = 0$$

$$a\,E[Y^2] + E[X]\cdot E[Y] - a(E[Y])^2 - E[XY] = 0$$

$$a\underbrace{\left[E[Y^2] - (E[Y])^2\right]}_{Var(Y)} = \underbrace{E[XY] - E[X]\cdot E[Y]}_{cov(X,Y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{cov(X,Y)}{Var(Y)}}$$

En conclusión $R_{X/Y} \equiv X = aY + b$ con $\begin{cases} a = \dfrac{cov(X,Y)}{Var\,Y} \\ b = E[X] - a\,E[Y] \end{cases}$

Ejercicio (3)(b)

- Supongamos que $3y - x = -1$ es $R_{Y/X}$ y, por tanto,

$x - 2y - 1 = 0$ será $R_{X/Y}$.

Entonces:

$R_{Y/X} \rightarrow y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma_{Y/X} = \frac{1}{3}$ (pendiente o coef. de regresión)

$R_{X/Y} \rightarrow x = 2y + 1 \Rightarrow \gamma_{X/Y} = 2$ (pendiente)

Sabemos que $\rho^2_{X,Y} = \gamma_{Y/X} \cdot \gamma_{X/Y} = \frac{2}{3}$. Como este valor es coherente la elección es adecuada y por tanto $\boxed{R_{Y/X} \equiv y = \frac{x}{3} - 1/3}$

- Una medida de la variabilidad explicada por el modelo lineal es el coeficiente de determinación $\boxed{\rho^2_{X,Y} = 2/3 = 0'66}$, por tanto el 66% de la variabilidad de Y queda explicada por el modelo lineal y viceversa

- La $E(X,Y) = (E[X], E[Y])$ es el punto de corte de las rectas de regresión:

$$\begin{array}{rl} (+) & 3y - x = -1 \\ & x - 2y = 1 \\ \hline & y = 0 \end{array} \quad \rightarrow x = 1$$

Por tanto $\boxed{E(\bar{X},\bar{Y}) = (1,0)}$

Ejercicio 4

Sabemos que $X_1, \dots, X_n$ son v.a.i.i.d según $\mathcal{U}([0,\theta])$ $(\theta>0)$

Entonces $f_{X_i}(x) = f_{X_1}(x) = \frac{1}{\theta}$ si $0 \le x \le \theta \Rightarrow F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x}{\theta} & 0 \le x < \theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases}$

Por otro lado sabemos que:

$$F_{\max(X_1,\dots,X_n)}(y) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(y,\dots,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Como las v.a. son independientes:

$$F_{\max(X_1,\dots,X_n)}(y) = F_{X_1}(y) \cdots F_{X_n}(y) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(son t.b independientes)}}}{=} [F_{X_1}(y)]^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\max(X_1,\dots,X_n)}(y) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \le x < \theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases}$$

Si consideramos las sucesión $X_{(n)} = \max\{X_1,\dots,X_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ probar que converge en ley a una v.a. aleatoria degenerada en θ es ver que la sucesión de funciones de distribución converge puntualmente a la función de distribución de una v.a. degenerada en θ.

$$F_{(n)}(x) = F_{(X_1,\dots,X_n)}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 \le x < \theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases}$$

Es trivial que $\lim_{n \to +\infty} F_{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & x<\theta \\ 1 & x \ge \theta \end{cases}$ que

es la función de distribución de una v.a. degenerada en θ

Así que $\boxed{\{X_{(n)}\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta}$