

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(z^2 + t)}{1 + t^2} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge en \mathbb{C} y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Sean f y g funciones enteras verificando que $g(f(z)) = z^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las dos funciones es un polinomio de grado dos y la otra un polinomio de grado uno.

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si la función $\operatorname{Re} f$ tiene un extremo relativo entonces f es constante.