Tema 1 Teoría elemental de grafos

1.1.- Combinatoria

Permutaciones: $Perm(n) = n!$

Variaciones sin repetición:

$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1) \quad 1 \le m \le n$

Variaciones con repetición: $VR_n^m = n^m$

Combinaciones sin repetición:

$$C_n^m = \binom{n}{m} \quad 1 \le m \le n$$

Combinaciones con repetición: $CR_n^m = C_{n+m-1}^m$

Propiedades de nº combinatorios

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad n \ge 1$
- $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \quad n \ge 1$
- $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \quad n > m > 0$

1.2.- Teoría de Grafos

Definición

Un grafo es una terna $G = (V, E, \gamma)$ donde V son *los vértices* y E son *las aristas o lados* son conjuntos finitos, y $\gamma: E \to \{\{u, v\}: u, v \in V\}$ es una aplicación, llamada *aplicación de incidencia* de G, que asocia a cada arista un par de vértices llamados *sus extremos*.

- Si $e_1, e_2 \in E$ son tales que $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$ se dice que e_1 y e_2 son *aristas paralelas*.
- Si $e \in E$ es tal que $\gamma(e) = \{v\}$ los dos extremos coinciden, se dice que e es *un lazo*.

Cuando en un grafo existen aplicaciones $s, t: E \to V$ que asignan a cada arista un principio y un final se dice que el grafo es *dirigido (orientado).*

Definición

Un subgrafo de un grafo $G = (V, E, \gamma)$ es una terna $G' = (V', E', \gamma')$ donde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y $\gamma'(e) = \gamma(e) \ \forall e \in E'$. El subgrafo se dice que es pleno si verifica que si $e \in E$ es tal que $\gamma(e) \subseteq V'$ entonces $e \in E'$, es decir, si tiene todas las aristas de G que unen vértices de V'.

Definiciones

Sea $G = (V, E, \gamma)$ un grafo.

- *Un camino de longitud* n de v_1 a v_{n+1} es una sucesión de aristas $e_1, \dots, e_n$ con $\gamma(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ $i = 1, \dots, n$.

- Un camino se dice *cerrado* si coinciden el primer vértice y el último.
- Un camino sin lados repetidos se dice que es *un recorrido*.
- Un recorrido sin vértices repetidos (salvo eventualmente el primero y el último) se dice que es *un camino simple.*
- Un camino cerrado que sea un recorrido se dice que es *un circuito*.
- Un circuito que sea un camino simple se dice que es *un ciclo*.

Si en un grafo existe un camino de u a v entonces existe un camino simple de u a v pues basta para ello quitar los vértices repetidos. Y si hay dos caminos simples distintos entre dos vértices distintos de un grafo entonces existe un ciclo en el grafo.

Definición

En el conjunto de vértices V de un grafo G se pude establecer la siguiente relación binaria R:

$$u, v \in V \quad uRv \Leftrightarrow existe\ un\ camino\ de\ u\ a\ v$$

Es una relación de equivalencia.

El grafo se dice que es *conexo* si cualesquiera dos vértices están relacionados por la relación anterior, es decir, están conectados por un camino.

En general, para cualquier grafo G, el subgrafo pleno determinado por cada clase de equivalencia se dice que es *una componente conexa* de G.

Definición

Si G es un grafo, su *matriz de adyacencia* es la matriz $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(N)$ donde n es el número de vértices y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \exists e \in E: \gamma(e) = \{v_i, v_j\} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Es por tanto, simétrica con ceros en la diagonal.

Definición

Si G es un $(n, m) - grafo$, su matriz de incidencia es la matriz $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{nxm}(N)$ donde n es el número de vértices y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ v_i \in \gamma(e) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Definición

Dos grafos $G = (V, E, \gamma)$ y $G' = (V', E', \gamma')$ se dice que son *isomorfos* si existe una biyección $h: V \to V'$ que verifica que:

$$\exists e \in E: \gamma(e) = \{u, v\} \Leftrightarrow \exists e' \in E': \gamma'(e') = \{h(u), h(v)\}$$

Para que dos grafos sean isomorfos es necesario que tengan el mismo número de vértices y de aristas.

Definición

El grado de un vértice v en un grafo G es el número de aristas que son incidentes con v.

El grado es invariante por isomorfismos.

Si todos los vértices de un grafo tienen el mismo grado que suponemos d, entonces se dice que el grafo es *regular* de grado d.

Se llama grafo completo de n vértices, y se representa por K_n, al grafo en el que cualesquiera dos vértices son adyacentes, esto es, siempre hay arista que los une.

En un $(n, m) - grafo$ completo se tiene que

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Definición

Una sucesión de números naturales $d_1, \dots, d_n \in N$ es una *sucesión gráfica* si existe un grafo G con conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ tales que $gr(v_i) = d_i \;\; i = 1, \dots, n$.

Una condición necesaria para que sea gráfica la suma de sus elementos ha de ser un número par y que cualquier número sea menor que el número de términos.

- La sucesión ceros 0,0,…,0 es gráfica.
- Cualquier sucesión con un número par de 1 es gráfica: 1111
- La sucesión 2222 es gráfica.

Teorema de Havel-Hakini

Dada una sucesión de números naturales $d_1, \dots, d_n \in N$ que lo suponemos ordenados en orden decreciente, esto es, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ y donde $d_1 < n$ se tiene que la sucesión es gráfica si y solo si lo es la sucesión $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$.

1.3 Grafos de Euler

Definición

Sea G un grafo.

- *Un camino de Euler* en G es un recorrido en el que aparecen todos los lados.
- *Un circuito de Euler* en G es un camino de Euler cerrado.
- *Un grafo G es de Euler* si es conexo y tiene un circuito de Euler.

Teorema

Un grafo conexo G es un grafo de Euler si y solo si cada vértice de G tiene grado par.

Corolario

El grafo completo K_n es de Euler si y solo si n es impar.

Algoritmo de Fleury

1.- Verificar que el grafo es conexo con todos los vértices de grado par.

2.- Seleccionar un vértice arbitrario.

3.- Seleccionar una arista a partir de ese vértice que no sea puente (e) es decir que no desconecte el grafo, a menos que no haya otra alternativa.

4.- Desconectar los vértices que están unidos por la arista seleccionada.

5.- Reiterar desde el punto 3 hasta que todos los vértices estén desconectados en cuyo caso ya se tiene el circuito de Euler.

Proposición

Un grafo conexo G tiene un camino de Euler conectando todos los vértices u y v si y solo si u y v son los únicos vértices de G que tienen grado impar.

1.4 Grafos de Hamilton

Un camino de Hamilton en un grafo es un camino que recorre todos los vértices una sola vez.

- *Un circuito de Hamilton* es un camino cerrado que recorre todos los vértices del grafo una sola vez (salvo los extremos).
- *Un grafo de Hamilton* es un grafo con un circuito de Hamilton.

Un grafo de Hamilton con n vértices $(n \geq 3)$ tiene al menos n lados que son los que aparecen en el circuito de Hamilton.

Teorema

Sea G un $(n, m) - grafo$. Entonces:

1.- Si $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2, G$ es de Hamilton.

2.- Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices no adyacentes u y v se verifica que $gr(u) + gr(v) \geq n$ se tiene que G es de Hamilton.

1.5.- Grafos Planos

Definición

Un grafo G se dice *plano* si admite una representación plana, esto es, una representación en el plano de sus vértices y aristas de forma que éstas solo se corten en vértices.

Si G es un grafo plano, una *cara* de G es cada una de las regiones en que queda dividido el plano por una representación plana.

Teorema

Sea G un $(n, m) - grafo$ plano y conexo y sea c el número de caras de una representación plana. Se tiene que entonces la igualdad $n - m + c = 2$ (que afirma que la característica de Euler $n - m + c$ es 2).

En general, si G es un grafo plano y χ el número de componentes conexas, se tiene que $n - m + c = 1 + \chi$.

Corolario

En un poliedro, si v es el número de vértices, l es número de aristas y c es el número de caras se verifica que $v - l + c = 2$.

De forma que solo hay 5 sólidos regulares:

	c	v	l	Característica de Euler
Tetraedro	4	4	6	2
Octaedro	8	12	12	2
Icosaedro	20	30	30	2
Cubo	6	12	12	2
Dodecaedro	12	30	30	2

Corolario

Sea G un grafo plano conexo sin vértices de grado 1. Entonces se tiene que

$$3c \leq 2m \quad y \quad m \leq 3n - 6$$

Los únicos grafos no planos son K_5 y K_{33}.