

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria extraordinaria

Ejercicio 1. (2.5 puntos) Sea U un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{C}$ y supongamos que $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene un polo en a . Probar que existe $R > 0$ de modo que $\mathbb{C} \setminus D(0, R) \subset f(U)$.

Ejercicio 2. (2.5 puntos) Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + i\pi, -R + i\pi, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ejercicio 3. (2.5 puntos) Sea f una función entera verificando que $f(f(z)) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f ?

Ejercicio 4. (2.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\cos(t+z)}{1+t^2} dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
- b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en \mathbb{C} y que su suma es una función entera.

Granada, 29 de junio de 2018