Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
1 de Junio de 2017

NOMBRE:

1. Encuentra la solución del problema

$$x'' + 9x = t^2, \;\; x(0) = 0, \; x'(0) = 0.$$

Buscamos sol. particular "a ojo" mediante método de coeficientes indeterminados.

$x(t) = A + Bt + Ct^2$

$x'(t) = B + 2Ct$

$x''(t) = 2C$

$$2C + 9A + 9Bt + 9Ct^2 = t^2 \Rightarrow \begin{cases} 9C = 1 \Rightarrow C = 1/9 \\ 9B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ 2C + 9A = 0 \Rightarrow A = -2/81 \end{cases}$$

$x_*(t) = \frac{-2}{81} + \frac{1}{9}t^2$ Sol. particular

Ec. homogénea

$x'' + 9x = 0$ $\quad \varphi_1(t) = \cos 3t$, $\varphi_2(t) = \operatorname{sen} 3t$

$x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + x_*(t)$

$0 = x(0) = c_1 + x_*(0) = c_1 - \frac{2}{81} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{81}$

$0 = x'(0) = -3c_1 \operatorname{sen} 3t + 3c_2 \cos 3t + x_*'(0) \Rightarrow c_2 = 0$

$x(t) = \frac{2}{81} \cos 3t + x_*(t)$

2. Sea Z el espacio de soluciones del sistema $x' = Ax$ donde A es la matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos la aplicación lineal $\Psi : Z \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(x) = (x_1(0), x_2(1))$. Encuentra $\mathrm{Ker}\Psi$.

El sist es $\left.\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = 0 \end{array}\right\}$

- $x_2' = 0 \Rightarrow x_2(t) = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$
- $x_1' = c_2 \Rightarrow x_1(t) = c_1 + c_2 t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\psi : Z \to \mathbb{R}^2 \mid \psi(x) = (x_1(0), x_2(1)) = (c_1, c_2)$

$\mathrm{ker}(\psi) = \{ x \in Z \mid \psi(x) = 0 \}$

$\psi(x) = (c_1, c_2) = (0,0) \Rightarrow \mathrm{ker}(\psi) = \{(0,0)\}$

3. Demuestra que la función

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} t^2+1 & t^2+2 & t^2+3 & \cdots & t^2+n \\ t^3+1 & t^3+2 & t^3+3 & \cdots & t^3+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^n+1 & t^n+2 & t^n+3 & \cdots & t^n+n \\ t^{n+1}+1 & t^{n+1}+2 & t^{n+1}+3 & \cdots & t^{n+1}+n \end{vmatrix}$$

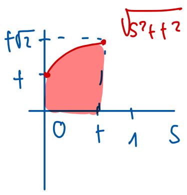
es derivable y calcula $\chi'(0)$.

Vemos las columnas son LD, pues restando la fila $i+1$ y i, $\forall i = 1 \dots n$ (col.), se obtienen columnas de 1's $\Rightarrow \chi(t) = 0 \Rightarrow \chi$ derivable $\Rightarrow \chi'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \chi'(0) = 0$.

4. Demuestra que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$ si $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por las fórmulas recursivas

$$f_0(t) = 7, \quad f_{n+1}(t) = 7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_n(s)\,ds.$$

Primero habría que probar que las iteradas están bien definidas. Para ello, por clara inducción, f_n es cont., gracias al Tª de Derivación de integrales dependientes de parámetros.



Por tanto, vemos $\int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\,ds \le t^2\sqrt{2} \quad \forall t \in I = [0,1]$

$\sqrt{s^2+t^2} \le t\sqrt{2} \quad \forall s \in [0,t]$

$$|f_1(t) - f_0(t)| = \left|\int_0^t 7\sqrt{s^2+t^2}\,ds\right| \le 7t^2\sqrt{2}$$

$$|f_2(t) - f_1(t)| = \left|7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_1(s)\,ds - \left(7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_0(s)\,ds\right)\right| = \left|\int_0^t \sqrt{s^2+t^2}(f_1(s)-f_0(s))\,ds\right|$$

$$\le \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\,|f_1(s)-f_0(s)|\,ds \le \int_0^t t\sqrt{2} \cdot |7s^2\sqrt{2}|\,ds = t\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}\,t^3}{3} = \frac{7(\sqrt{2})^2}{3}t^4$$

$$|f_3(t) - f_2(t)| = \left|7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_2(s)\,ds - \left(7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_1(s)\,ds\right)\right| =$$

$$\left|\int_0^t \sqrt{s^2+t^2}(f_2(s)-f_1(s))\,ds\right| \le \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\,|f_2(s)-f_1(s)|\,ds \le$$

$$\int_0^t t\sqrt{2}\, \frac{7(\sqrt{2})^2}{3} s^4\,ds = \frac{(\sqrt{2})^3 \cdot 7}{3\cdot 5}t^6$$

Veamos $|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \le \dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 7}{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)}\, t^{2(n+1)} \le \dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 7}{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)} = a_n$ por inducción.

• $n=0 \Rightarrow |f_1(t) - f_0(t)| \le 7\sqrt{2}\,t^2 \quad \forall t \in I$

• Supongamos válido para n y probemos para $n+1$:

$$|f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| = \left|7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_{n+1}(s)\,ds - \left(7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\, f_n(s)\,ds\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^t \sqrt{s^2+t^2}(f_{n+1}(s) - f_n(s))\,ds\right| \le \int_0^t \sqrt{s^2+t^2}\,|f_{n+1}(s)-f_n(s)|\,ds$$

$$\le \int_0^t t\sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 7}{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)}\, s^{2(n+1)}\,ds = t\sqrt{2}\,\frac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 7}{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)}\, \frac{t^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} = \frac{7(\sqrt{2})^{n+2}}{\prod_{i=1}^{n+1}(2n+1)}\, t^{2(n+2)} \le \frac{7(\sqrt{2})^{n+2}}{\prod_{i=1}^{n+1}(2n+1)}$$

Por Crit. Cociente: $\left(\dfrac{7(\sqrt{2})^{n+2}}{\prod_{i=1}^{n+1}(2n+1)}\right) : \dfrac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot 7}{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+3} \longrightarrow 0 < 1$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n$ converge $\Rightarrow$ por Test Weierstrass $\{f_n\}$ c.u. en I.

5. Dado un sistema lineal y homogéneo $x' = A(t)x$ con $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ continua, se considera una matriz solución $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Demuestra que el rango de la matriz $\Phi(t)$ es independiente de t.

Sabemos que $\varphi_1 \dots \varphi_N \in Z$, $\varphi_1 \dots \varphi_N$ base $\iff \det(\varphi_1(t) \dots \varphi_N(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$

Sea $\widetilde{\varphi} : I \to \mathbb{R}^P \mid \widetilde{\varphi}(t) = (\widetilde{\varphi}_1(t), \dots \widetilde{\varphi}_P(t)) = (\varphi_1(t) \dots \varphi_P(t))$, $P \in \mathbb{N}$

Si $\varphi_1 \dots \varphi_N \in Z \implies \exists P \in \{1 \dots N\}$, $\widetilde{\varphi}_1 \dots \widetilde{\varphi}_P : I \to \mathbb{R}^P \mid \widetilde{\varphi}_1 \dots \widetilde{\varphi}_P$ son L.I.

La matriz sol. es de la forma $\Phi(t) = (\varphi_1(t) | \dots | \varphi_N(t))$

- Si $\det(\varphi_1(t) | \dots | \varphi_N(t)) \neq 0$ $\forall t \in I \implies rg(\Phi) = N$
- Si $\det(\varphi_1(t) | \dots \varphi_N(t)) = 0$ $\forall t \in I \implies \exists P \in \mathbb{N}$, $1 \leq P < N \mid \widetilde{\varphi}_1 \dots \widetilde{\varphi}_P$ son L.I. $\implies$ $\det(\widetilde{\varphi}_1(t) | \dots | \widetilde{\varphi}_P(t)) \neq 0$ $\forall t \in I \implies rg(\Phi) = P$

Sabemos además, que

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{i1} & \cdots \\ \lambda_i a_{12} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_i a_{1n} & \vdots \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots \\ a_{12} & \\ \vdots & \end{vmatrix}$$

Por tanto, como las combinaciones lineales de soluciones también lo son, por esta propiedad de los determinantes tenemos asegurado $\det(\Phi(t)) \neq 0$