Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
28 de Abril de 2016

NOMBRE:

1. Dada la ecuación diferencial

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

con $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ¿bajo qué condiciones existe un factor integrante del tipo $\mu(x, y) = m(x + 2y)$?

1) $\mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$

$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$

$\mu_y(x,y) = 2m'(x+2y)$

$\mu_x(x,y) = m'(x+2y)$

$\mu_y P - \mu_x Q = \mu (Q_x - P_y)$

$2m'(x+2y)P - m'(x+2y)Q = m(x+2y)(Q_x - P_y)$

$\frac{m'(x+2y)}{m(x+2y)}(2P - Q) = Q_x - P_y \Rightarrow \frac{m'(x+2y)}{m(x+2y)} = \frac{Q_x - P_y}{2P - Q} = f(x+2y)$

Si $2P - Q \neq 0$

$\exists \mu(x,y) = m(x+2y) \Longleftrightarrow \frac{Q_x - P_y}{2P-Q} = f(x+2y)$

$\Rightarrow$ se deduce de la existencia de μ sabiendo que $2P(x,y) - Q(x,y) \neq 0$

$\Leftarrow$

Si $\xi = x+2y$, tomamos $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)} = f(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

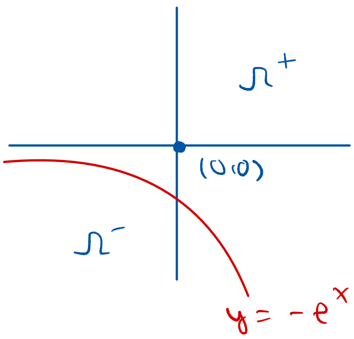
$m'(\xi) = f(\xi)m(\xi) \Rightarrow m(\xi) = e^{F(\xi)} \Rightarrow \mu(x,y) = m(x+2y) = e^{F(x+2y)}$,

donde F es primitiva de f.

2. Comprueba que la ecuación diferencial

$$\underbrace{\frac{e^x}{y+e^x}+2x}_{P(x,y)}+\underbrace{\frac{1}{y+e^x}}_{Q(x,y)}y'=0$$

es exacta. Encuentra la solución que cumple $y(0)=0$.



$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y+e^x=0\}$

Tomamos Ω^+, pues $(0,0)\in\Omega^+$

Debemos cumplir condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{e^x}{(y+e^x)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \Rightarrow U(x,y) = \int \frac{e^x}{y+e^x}+2x\,dx = \ln(y+e^x)+x^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q = \frac{1}{y+e^x}+\varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=c,\ c\in\mathbb{R},$$

Tomamos $c=0 \Rightarrow \varphi(y)=0 \Rightarrow U(x,y)=\ln(y+e^x)+x^2$

La ecuación puede escribirse como $\frac{d}{dx}[U(x,y)]=0 \Rightarrow U(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R}$

$U(0,0)=0=c \Rightarrow$

$\ln(y+e^x)+x^2=0 \Rightarrow y(x)=e^{-x^2}-e^x \quad \forall x\in\Omega^+$

3. Demuestra que las funciones $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t^2$ y $f_3(t) = |t|^3 t$ son linealmente independientes en $]-1, 1[$.

Sea $I =]-1,1[$

Debemos ver $f_i \in C^2(I)$ $i=1,2,3$

$f_1, f_2 \in C^2(I)$ claramente.

$$f_3(t) = \begin{cases} -t^4 & t \in]-1,0] \\ t^4 & t \in [0,1[\end{cases} \qquad f_3'(t) = \begin{cases} -4t^3 & t \in]-1,0[\\ 4t^3 & t \in]0,1[\end{cases}$$

$$f_3'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_3(h) - f_3(0)}{h} = 0 = f_3'(0^-) \Rightarrow f_3 \in C^1(I)$$

$$f_3''(t) = \begin{cases} -12t^2 & t \in]-1,0[\\ 12t^2 & t \in]0,1[\end{cases}$$

$$f_3''(0^+) = f_3''(0^-) = 0 \Rightarrow f_3 \in C^2(I)$$

$$W(f_1,f_2,f_3)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t^2 & |t^3|t \\ 0 & 2t & 4|t^3| \\ 0 & 2 & 12|t|t \end{vmatrix} = 24|t|t^2 - 8|t|^3$$

Como $W(f_1,f_2,f_3)(\frac{1}{2}) \neq 0$ y $f_i \in C^2(I)$ $i=1,2,3$ $\Rightarrow f_1,f_2,f_3$ L.I. en I.

Leandro Jorge Fdez. Vega DGIIM

4. En el intervalo $I =]-1,1[$ se dan dos funciones $A \in C^1(I)$, $\beta \in C(I)$ y se define

$$x(t) = 3e^{A(t)} - 2e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)ds.$$

Encuentra una ecuación lineal de primer orden para la que la función $x(t)$ sea solución.

$$x(t) = e^{A(t)}\left(3 - 2\int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)\,ds\right)$$

Sea $A'(t) = a(t)$ $\forall t \in I$, pues $A \in C^1(I)$.

Además, dado que $e^{-A(t)}\beta(t)$ es cont. por serlo A, β, $\Rightarrow$

$F(t) = \int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)\,ds \in C^1(I)$, con $F'(t) = e^{-A(t)}\beta(t)$ $\forall t \in I$, por Tª Fundamental del Cálculo.

Dado que A y F son derivables en I, x lo es con:

$$x'(t) = a(t)\,e^{A(t)}\left(3 - 2\int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)\,ds\right) - 2e^{A(t)}e^{-A(t)}\beta(t) = a(t)\,x(t) - 2\beta(t)$$

5. Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y con inversa $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ también de clase C^1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define el cambio de variable en el plano $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(t, x) \mapsto (s, y)$ por las fórmulas

$$s = t, \quad y = f(g(x) + \lambda).$$

Demuestra que $\mathcal{G} = \{\varphi_\lambda : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de difeomorfismos del plano.

1) Cerrado para la composición:

Sean $\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2} \in \mathcal{G}$.

$$\varphi_{\lambda_1}(\varphi_{\lambda_2}(t,x)) = \varphi_{\lambda_1}(s, f(g(x)+\lambda_2)) = (s, f(g(f(g(x)+\lambda_2))+\lambda_1))$$

2) Asociatividad:

$$(\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2}) \circ \varphi_{\lambda_3} = \varphi_1 \circ (\varphi_{\lambda_2} \circ \varphi_{\lambda_3})$$