Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(z) = g^k(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Integrando la función $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{(1+z^2)^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del disco $D(0,R)$ calcular la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $f\big(g(z)\big) = z^2$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las funciones f y g es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado dos.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1+t^2}\,dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Granada, 9 de junio de 2020

Instrucciones:

- Enviad la prueba resuelta a mi email (jmeri@ugr.es) en un único archivo .pdf con el nombre en el formato Apellido1Apellido2Nombre.pdf
- Tenéis hasta las 13:00 para entregar la prueba.

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que $f^k(z) = g^k(z)$ para todo $z \in \Omega$. Probar que existe $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda^k = 1$, tal que $f(z) = \lambda g(z)$ para cada $z \in \Omega$.

si $g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$, y podemos tomar $\lambda = 1$.

si $g \not\equiv 0 \Rightarrow \exists a \in \Omega \,/\, g(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \,/\, D(a,\delta) = D \subseteq \Omega$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D$, por continuidad de g.

Definimos $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ $\forall z \in D$

Por hipótesis, $h(z)^k = \left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)^k = \dfrac{f(z)^k}{g(z)^k} = 1 \Rightarrow h(D) \subseteq [\sqrt[k]{1}]$

D conexo, h cont. por ser cociente de continuas $\Rightarrow h(D)$ conexo $\Rightarrow$ se limita a un único punto $\lambda = h(z)$ $\forall z \in D \,/\, \lambda^k = 1 \Rightarrow$

$\lambda = \dfrac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in D$

Como $f, \lambda g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $D' \cap \Omega \neq \emptyset \Rightarrow$ Por Principio Identidad

$f(z) = \lambda g(z)$ $\forall z \in \Omega$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $f\big(g(z)\big) = z^2$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Probar que una de las funciones f y g es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado dos.

$f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow f \circ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos g polinómica.

Sup. g es entera no polinómica $\Rightarrow$ Por Corolario T^a Casorati. $\forall r > 0$ $f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,r))$ es denso en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists \{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \setminus D(0,r) \,/\, \{z_n\} \to \infty$ y $\{g(z_n)\} \to z_0 \Rightarrow$

$\{f(g(z_n))\} = \{f(z_0)\} \to f(z_0) \in \mathbb{C}$, pero $\{f(g(z_n))\} = \{z_n^2\} \to \infty$!!! $\Rightarrow$

g entera polinómica

Veamos f es entera polinómica:

Tenemos $f(g(z)) = z^2$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Sea $\{w_n\} \subseteq \mathbb{C} \,/\, \{w_n\} \to \infty$

g sobreyectiva por T^a Fundamental del Álgebra $\Rightarrow \exists \{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \,/\, g(z_n) = w_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sup $\{z_n\} \not\to \infty \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} / \{z_{\sigma(n)}\} \to z_0 \Rightarrow \{g(z_{\sigma(n)})\} \to g(z_0) \in \mathbb{C}$,

pero $\{g(z_{\sigma(n)})\} = \{w_{\sigma(n)}\} \to \infty$!!!

Ej 9) Rel 9

Por tanto, $\forall \{w_n\} \to \infty$, $\{f(w_n)\} = \{z_n^2\} \to \infty \Rightarrow f$ polinómica

f, g polinómicas $\Rightarrow gr(f \circ g) = gr f \, gr g = 2 \Rightarrow gr f = 1$, $gr g = 2$ ó viceversa.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1 + t^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

A)

Sea $\gamma_n : [n, n+1] \to \mathbb{C} \mid \gamma_n(x) = x \Rightarrow \gamma_n'(x) = 1$, un camino

Sea $\Phi_n : \gamma_n^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \Phi_n(t, z) = \dfrac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1+t^2}$, que es claramente continua $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Además $\forall t \in \gamma_n^*$ $(\Phi_n)_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid (\Phi_n)_t(z) = \Phi_n(t, z)$ es entera por ser cociente de funciones enteras, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Por Tª holomorfía de integrales dependientes de parámetros,

$f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f_n(z) = \int_{\gamma_n} \Phi_n(w, z)\, dw$ es entera $\forall n \in \mathbb{N}_0$

B)

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |f_n(z)| = \left| \int_{\gamma_n} \Phi_n(t, z)\, dt \right| \leq \ell(\gamma_n) M_n$

$$M_n = \max \left\{ \left| \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1+t^2} \right| \mid t \in \gamma_n^* \right\}$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(t^n + z)\cos(t^n + z)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\left| \dfrac{e^{i(t^n+z)} - e^{-i(t^n+z)}}{2i} \right| \left| \dfrac{e^{i(t^n+z)} + e^{-i(t^n+z)}}{2} \right|}{1+n^2} =$$

$$\left| \frac{e^{2i(t^n+z)} + \cancel{1} - \cancel{1} - e^{-2i(t^n+z)}}{4(1+n^2)} \right| \leq \frac{e^{\operatorname{Re}(2i(t^n+z))} + e^{\operatorname{Re}(-2i(t^n+z))}}{1+n^2} = \frac{e^{-2\operatorname{Im} z} + e^{2\operatorname{Im} z}}{1+n^2}$$

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, $\varphi : K \to \mathbb{C} / \varphi(z) = |\operatorname{Im} z|$

Dado que φ cont. en compacto, tomamos $M \in \mathbb{R}_0^+ / \varphi(z) \leq M$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-2\operatorname{Im} z} \leq e^{2\varphi(z)} \leq e^{2M} \\ e^{2\operatorname{Im} z} \leq e^{2\varphi(z)} \leq e^{2M} \end{array}\right\} \Rightarrow M_n \leq \frac{2e^{2M}}{1+n^2}$$

Como $2e^{2M}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1+n^2}$ convergente $\Longrightarrow$ por test Weierstrass $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolutamente, puntualmente y uniformemente en cada compacto de $\mathbb{C}$

Recubriendo $\mathbb{C}$ por compactos, $\sum_{n\geq 0} f_n$ c.a. en $\mathbb{C}$

Por Tª Convergencia de Weierstrass para Series,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ es entera.