Algebra II (Curso 2021-2022)

Grado en Matemáticas. Doble Grado Física-Matemáticas

Relación de ejercicios de Teoría de Grupos
(propuestos en exámenes de los cursos 2017-18, 2018-19, 2019-20 y 2020-21)

Curso 2021-2022

Ejercicio 1. (Parcial Octubre 2017)

1. Demostrar que en un grupo de orden par el número de elementos de orden 2 es impar.
2. Describe dos grupos de orden 6 que sean isomorfos y otros dos que no lo sean. Razona la respuesta.

Ejercicio 2. (Parcial Octubre 2017)
Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Dados grupos G y H:
   a) Si tienen el mismo orden son isomorfos.
   b) Si son isomorfos tienen el mismo orden.
   c) Si se pueden generar por el mismo número de elementos son isomorfos.
2. *a*) En D_4 todos los elementos tienen orden par.
   b) D_4 y S_4 son grupos isomorfos.
   c) Salvo isomorfismo, D_4 es el único grupo no abeliano de orden 8.
3. Si $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, y $o(-)$ denota el orden de un elemento de un grupo, entonces:
   a) $o(x)$ divide a $o(f(x))$ $\forall x \in G$.
   b) $o(f(x))$ divide a $o(x)$ $\forall x \in G$.
   c) $o(x) = o(f(x))$ $\forall x \in G$.

4. Dadas las permutaciones $\sigma = (2\,3\,6)(6\,5\,7\,1\,3\,4), \tau = (2\,4\,7\,3) \in S_{10}$ se tiene que $\tau\sigma\tau^{-1}$:

   a) Es par.

   b) Su orden es 12.

   c) Es un ciclo de longitud 7.

5. Si μ_6 denota el grupo de las raíces sextas de la unidad, entonces:

   a) $\mu_6 \cong C_6$.

   b) $\mu_6 \cong S_3$.

   c) $\mu_6 \cong D_6$.

6. En S_4 se tiene que:

   a) $\{(1\,2), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

   b) $\{(1\,2\,3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

   c) $\{(1\,2), (2\,3), (3\,4)\}$ es un conjunto de generadores.

7. Sea G un grupo y $f : G \to G$ la aplicación dada por $f(x) = x^{-1}$. Entonces:

   a) f es un homomorfismo de grupos.

   b) f es un automorfismo.

   c) Si f es un homomorfismo entonces G es abeliano.

8. Para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, si $sign(\sigma)$ denota su signo o paridad, se tiene:

   a) $sign(\sigma) = sign(\sigma^{-1})$.

   b) $sign(\sigma) = -sign(\sigma^{-1})$.

   c) Ninguna de las anteriores.

9. Cualquier permutación $\sigma \in S_n$:

   a) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones.

   b) Es producto de trasposiciones.

   c) Se descompone de forma única como producto de trasposiciones disjuntas.

10. El grupo $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{Z}_2$:

    a) Es un grupo no abeliano de orden 8.

    b) Es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

c) Es un grupo isomorfo a S_3.

Ejercicio 3. (Final Enero 2018) Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $\sigma = (1\,2\,4\,3)(5\,2) \in S_5$ entonces $\sigma^{106} = \sigma$.
2. Usando las presentaciones usuales de D_{14} y D_7 se puede definir un homomorfismo sobreyectivo de D_{14} en D_7.
3. Los grupos $D_3 \times D_4$ y D_{24} son isomorfos.
4. En $D_6 =< r, s \,|\, r^6 = 1 = s^2, sr = r^{-1}s >$ se tiene que el subgrupo $H =< r^3 >$ es normal y el cociente D_6/H tiene un único subgrupo de orden 2 y otro de orden 3.
5. Si $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ y $\tau = (2\,7)(3\,6)(4\,5)$ son dos permutaciones de S_7, se tiene que $G =< \sigma, \tau >\cong D_7$.

Ejercicio 4. (Final Enero 2018)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t \,|\, \begin{array}{c} 12y + 24z = 0 \\ 4x + 10y + 12z + 6t = 0 \\ 4x + 8y + 4t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos de orden 504.
3. Razona que no hay grupos simples de orden 992.

Ejercicio 5. (Final Enero 2018)
Considera el grupo de orden 24

$$Q_6 =< x, y \,|\, x^{12} = 1, x^6 = y^2, yx = x^{-1}y >,$$

cuyos elementos son todos de la forma $x^j y^k$ con $j = 0, \dots, 11$ y $k = 0, 1$ y sus subgrupos $P =< x^3, y >$ y $H =< x^4 >$.

1. Demuestra que $P \cong Q_2$ y que $H \cong C_3$.
2. ¿Son P y H subgrupos normales de Q_6?
3. Calcula el número de p-subgrupos de Sylow para cada primo que divide al orden de Q_6. ¿Es Q_6 el producto directo de sus subgrupos de Sylow?

Ejercicio 6. (Extra Febrero 2018)

Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Podemos definir un homomorfismo de grupos $f : D_4 \to S_3$ que lleve los generadores r y s de D_4 en $f(r) = (1\,2)$ y $f(s) = (2\,3)$.

2. Si H es un subgrupo normal de un grupo G entonces todo subgrupo K de H es también normal en G.

3. Si X es un conjunto con 11 elementos sobre el que actúa el grupo de Klein, entonces en X hay un elemento fijo bajo dicha acción.

4. D_4 no es producto directo interno de dos subgrupos propios suyos.

Ejercicio 7. (Extra Febrero 2018)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A = < x, y, z, t \mid \begin{array}{c} 14x + 4y + 4z + 14t = 0 \\ -6x + 4y + 4z + 10t = 0 \\ -16x - 4y - 4z - 20t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y todos los grupos abelianos no isomorfos de orden igual al de la torsión de A. ¿Tiene A algún elemento de orden ∞? ¿Y de orden 12?

2. Ordena de mayor a menor los enteros positivos n_1, n_2, n_3, n_4 donde n_1 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 252, n_2 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 585, n_3 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 1683 y n_4 es el número de grupos abelianos no isomorfos de orden 440. Describe a continuación las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de los grupos abelianos no isomorfos de orden el mayor de los n_i, $i = 1, 2, 3, 4$. ¿Hay algún n_i de los anteriores de forma que no existen grupos simples de ese orden?

Ejercicio 8. (Extra Febrero 2018)

Sean, p un número primo, G un grupo finito, H un subgrupo normal de G y P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuéstrese que:

1. $H \cap P$ es p-subgrupo de Sylow de H.

2. HP/H es un p-subgrupo de Sylow de G/H.

Ejercicio 9. (Parcial Octubre 2018)

Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Sean C_8 y C_{12} los grupos cíclicos de órdenes 8 y 12 respectivamente. El número de homomorfismos de grupos de C_8 en C_{12} es:

    a) Dos.

    b) Tres.

    c) Cuatro.

2. Si $\sigma = (2\,5\,8\,4\,1\,3)(4\,6\,7\,8\,5)(8\,10\,11) \in S_{11}$, entonces la permutación σ^{1000}:

    a) Es impar.

    b) Tiene orden 3.

    c) Es un 6-ciclo.

3. La ecuación $x(1\,2\,3)x^{-1} = (1\,3)(5\,7\,8)$ en S_8:

    a) No tiene solución.

    b) Tiene una única solución.

    c) Tiene solución pero no es única.

4. La ecuación $x(1\,2)(3\,4)x^{-1} = (5\,6)(1\,3)$ en S_6:

    a) No tiene solución.

    b) Tiene una única solución.

    c) Tiene solución pero no es única.

5. Si $G \neq 1$ es un grupo cíclico que tiene un solo generador entonces:

    a) G es infinito.

    b) No existe G en esas condiciones.

    c) G tiene como mucho 2 elementos.

6. Sea $G \neq 1$ un grupo. Entonces:

    a) G puede tener un subgrupo propio isomorfo a G.

    b) Si todos los subgrupos propios de G son abelianos entonces G es abeliano.

    c) Si todos los subgrupos propios de G son cíclicos entonces G es cíclico.

7. El grupo simétrico S_4:

    a) Es cíclico.

    b) No es cíclico pero se puede generar por dos elementos.

c) No tiene subgrupos de orden 6.

8. Si se consideran los grupos aditivos $\mathbb{Z}$ de los enteros, $\mathbb{Q}$ de los racionales y $\mathbb{Z}_n$ de los enteros módulo n=2,5,10, se tiene que:

   a) Los grupos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos.
   b) Los grupos $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_5$ son isomorfos.
   c) Los grupos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_2$ son isomorfos.

9. El subgrupo $SL_3(\mathbb{Z}_2) < GL_3(\mathbb{Z}_2)$ de las matrices invertibles 3×3 con entradas en $\mathbb{Z}_2$ y de determinante 1:

   a) Es un subgrupo impropio.
   b) Es un grupo abeliano de orden 168.
   c) Es un grupo no abeliano de orden 84.

10. a) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ es cíclico.
    b) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ tiene todos sus elementos de orden infinito.
    c) El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ es finitamente generado.

11. Sea $C_{120} =< x \,|\, x^{120} = 1 >$ y se consideran sus subgrupos $H =< x^{42} >$ y $K =< x^{36} >$. Entonces se tiene que:

    a) $K < H$.
    b) $H < K$.
    c) $H = K$.

12. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

    a) Si f es inyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.
    b) Si f es inyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.
    c) Ninguno de los enunciados anteriores es cierto.

13. Dados los grupos $C_8 =< a \,|\, a^8 = 1 >$ y $D_4 =< x, y \,|\, x^4 = 1, y^2 = 1, yx = x^{-1}y >$, se tiene que la asignación $x \mapsto a^2, y \mapsto a^4$:

    a) Determina un homomorfismo de grupos sobreyectivo.
    b) Determina un homomorfismo de grupos pero no es sobreyectivo.
    c) No determina un homomorfismo de grupos.

14. Se considera el subgrupo de S_5, $H =< (123), (4, 5) >$. Entonces:

    a) H es un grupo abeliano pero no es cíclico.
    b) H es un grupo cíclico.

c) S_5 es un grupo no abeliano y por tanto H tampoco es abeliano.

15. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces:

    a) Si f es sobreyectivo y G es abeliano entonces H es abeliano.

    b) Si f es sobreyectivo y H es abeliano entonces G es abeliano.

    c) Ninguno de los enunciados anteriores es cierto.

Ejercicio 10. (Parcial Octubre 2018)

1. Sea $f : S_4 \to S_6$ la aplicación dada por $f(\sigma) = \overline{\sigma}$ donde $\overline{\sigma}$ actúa igual que σ sobre los elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ y los elementos $\{5, 6\}$ los fija si σ es par o bien los intercambia si σ es impar. Demuestra que f es un homomorfismo inyectivo de grupos y que su imagen está contenida en A_6.

2. Considera los grupos $Q_2 =< x, y \,|\, x^4 = 1, y^2 = x^2, yx = x^{-1}y >$ y S_4. Demuestra que la asignación

$$x \mapsto (12)(34) \ \ , \ \ y \mapsto (34)$$

   determina un homomorfismo de grupos. Calcula su imagen y su núcleo, dando todos sus elementos.

Ejercicio 11. (Final Enero 2019)

1. Si $\sigma = (1\,2\,3)(1\,3\,4\,5)(4\,5\,6)(1\,6) \in S_6$ ¿Es verdad que σ^{16} es una permutación par de orden 3?

2. Razona, utilizando el teorema de Dyck, que S_5 tiene un subgrupo isomorfo a D_5.

Ejercicio 12. (Final Enero 2019)
Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t, w \,|\, \begin{array}{c} 13x + 14z + 7t = 0 \\ 9x + 3y + 12z = 0 \\ 12x + 12z + 6t = 0 \\ 9x + 3y - 18z = 0 \end{array} >$$

1. Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. ¿Tiene A elementos de orden 5? ¿Y de orden ∞?.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos del mismo orden que $T(A)$, la torsión de A.

Ejercicio 13. (Final Enero 2019)

1. Clasifica todos los grupos (abelianos o no) de orden 6175. Da una serie de composición para cada uno de ellos.

2. Sea G un grupo de orden 1690.

   a) Demuestra que G contiene un subgrupo normal N de orden 169 que es abeliano.
   b) Demuestra que G contiene un subgrupo normal M que contiene a N con $|M| = 845$.
   c) Si G tiene un único 2-subgrupo de Sylow, demuestra que G contiene un subgrupo normal H de orden 338.

Ejercicio 14. (Final Enero 2019)
Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si un grupo G tiene un único subgrupo H de un orden dado entonces H es un subgrupo normal de G.

2. El orden del elemento $(a^3, b, c^2) \in C_{21} \oplus C_{25} \oplus C_5$ es 35, donde a, b, c son, respectivamente, los generadores de C_{21}, C_{25} y C_5.

3. No hay grupos simples de orden 561 y todo grupo de este orden es resoluble.

4. El grupo $S_3 \times \mathbb{Z}_4$ es resoluble, tiene un único 3-subgrupo de Sylow y un 2-subgrupo de Sylow que no es normal.

5. Todo subgrupo de S_n de orden impar está contenido en A_n.

Ejercicio 15. (Extraord Febrero 2019)
Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si G es un grupo tal que $[G : Z(G)] = 15$ entonces G es abeliano.

2. Un grupo simple de orden 60 tiene 30 elementos de orden 5.

3. Si G es un grupo finito y N un subgrupo normal suyo entonces, $\forall x \in G$ se tiene que el orden del elemento xN en el cociente G/N divide al orden de x en G.

4. No hay grupos simples de orden 429 y todo grupo de este orden es resoluble.

5. Si X es un conjunto con 23 elementos sobre el que actúa el grupo diédrico D_4 entonces en X hay un punto fijo.

6. Si H y K son subgrupos normales de un grupo G tales que $H \cap K = 1$ entonces $hk = kh \ \forall h \in H$ y $\forall k \in K$.

Ejercicio 16. (Extraord Febrero 2019)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A = < x, y, z, t \mid \begin{array}{r} 35x + 12y + 12z = 0 \\ 12x - 4y - 6z - 18t = 0 \\ 18x + 6y + 6z = 0 \\ 17x + 6y + 6z - 18t = 0 \end{array} >$$

   Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. ¿Tiene A elementos de orden 6? ¿Y de orden 12? ¿Y de orden ∞? En caso afirmativo encontrar uno.

2. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos de orden 144.

3. Si G es un grupo simple de orden 168, calcula el número de 7-subgrupos de Sylow de G. Si P es un 7-subgrupo de Sylow de G, calcula el orden del normalizador $N_G(P)$ y razona entonces que G no tiene subgrupos de orden 14.

Ejercicio 17. (Parcial Octubre 2019)

Sea G un grupo, H un grupo abeliano y $f, g : G \to H$ dos homomorfismos de grupos. Demuestra que la aplicación $f \oplus g : G \to H$ definida por $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in G$, es un homomorfismo de grupos. Si $Hom(G, H)$ denota el conjunto de homomorfismos de G en H, demuestra que $Hom(G, H)$ junto con la operación:

$$Hom(G,H) \times Hom(G,H) \xrightarrow{\oplus} Hom(G,H) \ , \quad (f,g) \mapsto f \oplus g \, ,$$

es un grupo abeliano y, a continuación, determina los siguientes grupos: i) $Hom(C_{15}, C_{14})$; ii) $Hom(C_{15}, C_{12})$; iii) $Hom(C_{15}, C_5)$.

Ejercicio 18. (Parcial Octubre 2019)

Razona cual es la respuesta correcta en cada una de las siguientes cuestiones:

1. Si G es un grupo, la aplicación orden $o : G \to (\mathbb{Q}^+, .)$:

   a) Es un homomorfismo de grupos.

   b) Si G es abeliano es un homomorfismo de grupos

   c) No es un homomorfismo de grupos

2.
   a) Todos los subgrupos de un grupo de orden 6 son abelianos.
   b) Todos los grupos no abelianos de orden 6 son isomorfos.
   c) Todos los grupos de orden 6 son cíclicos.

3. Si H es el subgrupo de S_4 generado por $(1\,2\,3)$ entonces:
   a) Todas las clases laterales por la izquierda de H en S_4 tiene 3 elementos.
   b) La clase xH donde $x = (3\,4)$ es $\{1, (1\,2\,4\,3)\}$.
   c) La clase Hx donde $x = (3\,4)$ es $\{(3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,4\,3\,2)\}$.

4. El número de automorfismos del grupo cíclico C_{36} es:
   a) 6
   b) 12
   c) 18

5.
   a) Todos los grupos abelianos de orden 8 son cíclicos.
   b) Todos los grupos no abelianos de orden 8 son isomorfos.
   c) Hay al menos tres grupos no isomorfos de orden 8.

6. La permutación $\sigma = (1\,2\,3)(2\,4)) \in S_4$ tiene :
   a) 8 conjugados.
   b) 10 conjugados.
   c) 6 conjugados.

7.
   a) El retículo de subgrupos de C_{27} es totalmente ordenado pero el de C_{10} no lo es.
   b) El retículo de subgrupos de C_{27} es totalmente ordenado y el de C_{10} también.
   c) El retículo de subgrupos de C_{27} no es totalmente ordenado y el de C_{10} tampoco lo es.

8. Si $\sigma = (2\,3\,5)(4\,3)(6\,9)(1\,5\,2\,7\,8) \in S_{11}$, entonces la permutación σ^{2008}:
   a) Es impar.
   b) Tiene orden 3.
   c) Es un 4-ciclo.

9. Sea G un grupo y $x \in G$ un elemento de orden 150. Entonces:

   a) $< x^{35} > \bigvee < x^{24} >=< x >$.
   b) $< x^{35} > \bigvee < x^{24} >=< x^{59} >$.
   c) $< x^{35} > \bigvee < x^{24} >=< x^{11} >$.

10. Sea G un grupo y $x \in G$ un elemento de orden 150. Entonces:

   a) $< x^{35} > \bigcap < x^{24} >= 1$.
   b) $< x^{35} > \bigcap < x^{24} >=< x^{30} >$.
   c) $< x^{35} > \bigcap < x^{24} >=< x^{11} >$.

11. Desde el grupo A_3 al grupo A_4 se pueden definir exactamente:

   a) 9 homomorfismos.
   b) 3 homomorfismos.
   c) 8 homomorfismos.

12. El grupo D_5:

   a) Tiene 6 subgrupos propios.
   b) Tiene 4 elementos de orden 10.
   c) Es isomorfo a $C_2 \times C_5$.

13. Se tiene que:

   a) Los grupos Q_2 y $C_4 \times C_2$ tienen el mismo número de elementos de orden 2.
   b) Los grupos D_4 y C_8 tienen el mismo número de elementos de orden 4.
   c) Los grupos A_4 y D_6 tienen el mismo número de elementos de orden 6.

14. La correspondencia $D_4 \to Q_2$ que aplica $r \mapsto i$ y $s \mapsto -1$:

   a) Determina un homomorfismo inyectivo de grupos.
   b) Determina un homomorfismo sobreyectivo de grupos.
   c) No determina un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 19. (Final enero 2020)

1. Considera el grupo simétrico S_4 y el subgrupo suyo $H =< (1\,2\,3) >$.

   a) Construye el conjunto cociente $S_4/_H\sim$ de clases laterales por la izquierda xH.

b) Para cada clase xH denotamos $m(xH)$ al máximo común divisor de los ordenes de los elementos en xH. Considera el grafo G con vértices las clases xH y en el que hay un lado entre xH e yH si $m(xH)$ divide a $m(yH)$ o $m(yH)$ divide a $m(xH)$. Identifica el grafo G dando la sucesión de grados de sus vértices y su matriz de adyacencia. ¿Es G de Euler, de Hamilton o plano?

c) Considera el subgrafo G' obtenido a partir de G eliminando la clase $1H$, ¿es G' de Euler? En caso afirmativo aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 20. (Final enero 2020)
Sea $G =< x, y \,|\, x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^3 = 1 >$.

1. Demuestra que el subgrupo de G, $N =< x, yxy^2 >$ es isomorfo al grupo de Klein.

2. Demuestra que el grupo alternado A_4 puede generarse por las permutaciones $\sigma = (1\,2)(3\,4)$ y $\tau = (1\,2\,3)$.

3. Demuestra que existe un homomorfismo $G \longrightarrow A_4$ que es sobreyectivo y concluye que $|G| \geq 12$.

Ejercicio 21. (Final enero 2020)
Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si G y H son grupos, $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$ (donde $Z(-)$ denota el centro).

2. Si G es un grupo con $|G| = 50$ y con un único subgrupo de orden 2, entonces G es abeliano.

3. Salvo isomorfismo, hay 9 grupos no abelianos de orden ≤ 15.

4. Si p es un primo y N es un p-subgrupo normal de un grupo G, entonces N está contenido en todo p-subgrupo de Sylow de G.

5. El producto de grupos alternados $A_5 \times A_4$ es un grupo no simple y no resoluble con más de 3 series de composición distintas.

Ejercicio 22. (Final enero 2020)

1. Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t \,\left|\, \begin{array}{rl} 4x + 8y + 10z & = 0 \\ 6x + 10y + 12z & = 0 \\ 4x + 4y + 8z & = 0 \\ t & = 0 \end{array} \right. >$$

a) Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A y de su torsión $T(A)$. ¿Tiene A elementos de orden 8, 12 0 16? ¿Y de orden ∞?.

b) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea 2025.

2. Sea G un grupo de orden 36.

   a) Si G es simple demuestra entonces que existen dos 3-subgrupos de Sylow de G diferentes cuya intersección es no trivial.

   b) Si G es simple y H es un subgrupo no trivial de un 3-subgrupo de Sylow P, razona que $P \leq N_G(H)$ y, considerando la cadena de subgrupos $P \leq N_G(H) \leq G$, demuestra que $P = N_G(H)$.

   c) Deduce de lo anterior que no puede haber grupos simples de orden 36 pero que todo grupo de ese orden es resoluble.

Ejercicio 23. (Extraord febrero 2020)

Se considera el grupo $Q_2 =< x, y \,|\, x^4 = 1, x^2 = y^2, yx = x^{-1}y >$ y el grafo G cuyos vértices son los elementos de Q_2 y en el que, para cualquier $a \in Q_2$, hay un lado entre a y ax y también un lado entre a y ay.

1. Comprueba que G es un grafo regular dando la sucesión de grados de sus vértices y calcula su matriz de adyacencia.

2. Razona si G es un grafo de Hamilton o plano.

3. Razona si G es un grafo de Euler y, en caso afirmativo, aplica el algoritmo dado en clase para calcular un circuito de Euler.

Ejercicio 24. (Extraord febrero 2020)

Razona, de forma breve, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. No existen grupos simples de orden 30.

2. Si H y K son subgrupos abelianos de un grupo G tales que H es normal en G y $G = HK$, entonces G es resoluble.

3. Si p es un primo y P es el único p-subgrupo de Sylow de un grupo G, entonces $f_*(P) \subseteq P$ para cualquier endomorfismo $f : G \to G$.

4. Hay 3 homomorfismos de grupos de C_3 en $Aut(C_{12})$.

5. Si G es un grupo para el que sólo existen dos primos distintos p y q que dividen a su orden y para el que existe un único p-subgrupo de Sylow, entonces G es resoluble.

Ejercicio 25. (Extraord febrero 2020)

Sea $G =< x, y \,|\, x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^4 = 1 >$.

1. Demuestra que la correspondencia $x \mapsto (1\,2)$, $y \mapsto (2\,3\,4)$ determina un homomorfismo sobreyectivo $f : G \longrightarrow S_4$ y concluye que $|G| \geq 24$.

2. Demuestra que el subgrupo de G, $N =< (xy)^2, (yx)^2 >$, es isomorfo al grupo de Klein y que es un subgrupo normal de G.

3. Considera el grupo cociente G/N y demuestra que $|G/N| \leq 6$ viendo que existe un homomorfismo sobreyectivo $\varphi : D_3 \longrightarrow G/N$

4. Concluye que el homomorfismo $f : G \longrightarrow S_4$ del primer apartado es un isomorfismo.

Ejercicio 26. (Extraord febrero 2020)

Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A =< x, y, z, t; \begin{array}{rl} 6x + 9y + 27z + 6t & = 0 \\ 9x + 9y + 9z + 6t & = 0 \\ 12x + 18y + 6z & = 0 \end{array} >$$

1. Calcula el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A.

2. Para cada primo p que divida al orden de la torsión de $A, T(A)$, identifica el p-subgrupo de Sylow de $T(A)$ y los factores de composición de $T(A)$.

3. Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos cuyo orden sea 10 veces el orden de $T(A)$.

Ejercicio 27. (Parcial Octubre 2020)

1. Sea $Z(G) = \{a \in G \,|\, ax = xa \;\; \forall x \in G\}$ el centro de un grupo G. Demuestra que si G tiene un único elemento a de orden n, $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \in Z(G)$.

2. *a*) Demuestra que el grupo alternado A_4 puede generarse por las permutaciones $\sigma = (1\,4)(2\,3)$ y $\tau = (2\,3\,4)$.

   b) Si G es el grupo dado por la presentación

   $$G =< x, y \,|\, x^2 = 1, y^3 = 1, (xy)^3 = 1 > ,$$

   razona que existe un homomorfismo de grupos sobreyectivo $f : G \to A_4$ y concluye entonces que $|G| \geq 12$.

Ejercicio 28. (Final Enero 2021)

Demuestra que si G es un grupo de orden p^2q^2, siendo p y q primos diferentes tales que p no divide a q^2-1 y q no divide a p^2-1, entonces G es un grupo abeliano.

Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

$$A = < x, y, z, t \mid \begin{array}{c} 4x-2y-8z=0 \\ 8x+6y+14z=0 \\ 2x+14y+26z=0 \end{array} > .$$

Calcula de forma razonada el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. Encuentra entonces en A, si existe, un elemento de orden 3, uno de orden 4 y uno de orden infinito.

Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos de orden 2352. ¿Cuales de ellos son grupos cíclicos?

Ejercicio 29. (Final Enero 2021)

1. Sea G un grupo y H y K subgrupos de G. Demuestra que $H \cup K$ es un subgrupo de G si y solo si $H \subset K$ o bien $K \subset H$.

2. Demuestra que

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong < a, b \mid a^m = 1, b^n = 1, ab = ba > .$$

Ejercicio 30. (Extraord Febrero 2021)

1. Si P es un p-subgrupo de Sylow de un grupo G, demuestra que P es el único p-subgrupo de Sylow de G contenido en $N_G(P)$.

2. Si G es un grupo de orden 184041, demuestra que G no es simple pero si es resoluble.

3.
   a) Una presentación del grupo abeliano A está dada por:

   $$A = < x, y, z, t \mid \begin{array}{c} 5x+6y+2z-4t=0 \\ 38x+45y+14z+28t=0 \\ -5x-6y-50z+4t=0 \end{array} > .$$

   Calcula de forma razonada el rango (de la parte libre) y las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de A. Identifica las componentes p-primarias de la torsión $T(A)$.

   b) Clasifica, dando sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria, todos los grupos abelianos salvo isomorfismo de orden igual al de $T(A)$. ¿Cual de ellos es el grupo dado por la presentación anterior?

Ejercicio 31. (Extraordinario diciembre 2021)

Considera el grupo cíclico de orden 20, $C_{20} = \langle a; a^{20} = 1 \rangle$. Calcula $Aut(C_{20})$. Razona que es un grupo abeliano y da sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.

Ejercicio 32. (Extraordinario diciembre 2021)

Considera los grupos cíclicos $C_4 = \langle b; b^4 = 1 \rangle$ y $C_{20} = \langle a; a^{20} = 1 \rangle$. Razona que la aplicación $\varphi : C_4 \to C_{20}$ determinada por $\varphi(b)(a) := a^3$ es un morfismo de grupos. Considera el producto semidirecto $C_{20} \ltimes C_4$ con acción dada por φ. Calcula el orden del elemento (a, b).

Ejercicio 33. (Extraordinario diciembre 2021)

Razona que el grupo $C_{20} \ltimes C_4$ del ejercicio 3 es resoluble.

Ejercicio 34. (Extraordinario diciembre 2021)

Razona que el grupo $C_{20} \ltimes C_4$ del ejercicio 3 tiene un único 5-subgrupo de Sylow y 16 2-subgrupos de Sylow.