Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
8 de Junio de 2016

NOMBRE:

1. Calcula e^{tA} si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Diagonalizamos:

$$p_\lambda(A) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$V_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 / (A+I)v = 0 \} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv v_1 + v_2 = 0$$

$V_1 = V_{-1}^{\perp}$ por ser A simétrica.

Por tanto, $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,1)$ son vectores propios y

$\phi_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\phi_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son sol. al sist.

$x' = Ax$, de m.f. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}$

Sabemos e^{tA} es m.f. principal en $t_0 = 0$ del sist. $x' = Ax \Rightarrow$

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

2. Encuentra una matriz fundamental del sistema

$$x_1' = 3x_1 + x_2, \quad x_2' = 3x_2 + x_3, \quad x_3' = 3x_3.$$

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_3 \end{cases}$$

- $x_3' = 3x_3 \Rightarrow x_3(t) = c_3 e^{3t}$

- $x_2' = 3x_2 + c_3 e^{3t} \Rightarrow x_2(t) = e^{A(t)}\left(c_2 + \int e^{-A(t)} b(t)\,dt\right) = e^{3t}(c_2 + c_3 t)$

$A(s) = \int 3\,dt = 3t$

$\int e^{-3t} c_3 e^{3t}\,dt = c_3 t$

- $x_1' = 3x_1 + e^{3t}(c_2 + c_3 t) \Rightarrow x_1(t) = e^{A(t)}\left(c_1 + \int e^{-A(t)} b(t)\,dt\right) = e^{3t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$

$A(t) = \int 3\,dt = 3t$

$\int e^{-A(t)} b(t)\,dt = \int e^{-3t} e^{3t} (c_2 + c_3 t)\,dt = c_2 t + c_3 t^2$

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) \\ e^{3t}(c_2 + c_3 t) \\ e^{3t} c_3 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\phi_1(t) \mid \phi_2(t) \mid \phi_3(t)) = e^{27t}\begin{vmatrix} t^2 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -e^{27t}\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = e^{27t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \phi_1, \phi_2, \phi_3$ forman base del espacio de soluciones del sist.

Una matriz fundamental viene dada por $\Phi(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} t^2 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Se considera el problema de valores iniciales

$$x' = 3x + \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0$$

y se define la correspondiente sucesión de iterantes de Picard $\{x_n(t)\}_{n\geq 0}$. Calcula $x_2(t)$.

$$x' = a(t)x + b(t) \implies \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} a(s)x(s) + b(s)\,ds \iff$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\,x(s) + b(s)\,ds$$

Definimos los iterantes como

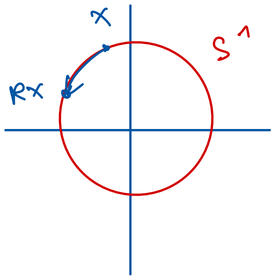
$$x_0(t) = x(t_0) = x_0 = 0$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\,x_n(s) + b(s)\,ds = \int_0^t a(s)\,x_n(s) + b(s)\,ds$$

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(s)\,ds = -\cos t + 1$$

$$x_2(t) = \int_0^t -3\cos(s) + 1 + \operatorname{sen}(s)\,ds = -3\operatorname{sen} t + t - \cos t + 1 = -3\operatorname{sen} t + t + x_1(t)$$

4. Se emplea la norma Euclídea en $\mathbb{R}^2$ y la norma matricial asociada en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcula $||R||$ para la matriz $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rx = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

$$||Rx|| = \sqrt{(x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta)^2 + (x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta)^2} =$$

$$\sqrt{x_1^2\cos^2\theta + x_2^2\operatorname{sen}^2\theta + x_1^2\operatorname{sen}^2\theta + x_2\cos^2\theta} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Veamos $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$

$R(S^1) = S^1$

$$||R|| = \text{máx}\{||Rx|| \mid ||x|| = 1\} = \text{máx}\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\} = 1$$

Otra forma de verlo:

Dado que $R(S_1) = S_1$, $\Rightarrow \forall x \in S^1$, $Rx = x \Rightarrow ||Rx|| = ||x|| = 1 \Rightarrow$
$||R|| = \text{máx}\{||Rx|| \,/\, ||x|| = 1\} = 1$

5. Se considera una sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que cumplen $f_0(t) = 1 + t,\ f_1(t) = 4 + t,$

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 7 \int_0^t |f_n(s) - f_{n-1}(s)| ds \ \text{ si } n \geq 1,\ t \in [0,1].$$

Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Weierstrass:

$$\left.\begin{array}{l} |f_1(t) - f_0(t)| = |4 + t - 1 - t| = |3| \quad \forall t \in [0,1] \\ |f_2(t) - f_1(t)| \leq 7 \int_0^t |3| ds = 7 \cdot 3t \quad \forall t \in [0,1] \\ |f_3(t) - f_2(t)| \leq 7^2 \cdot 3 \cdot \frac{t^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 3 \cdot 7^n \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in [0,1]$$

Por inducción:

- $n = 0 \Rightarrow |f_1(t) - f_0(t)| \leq 3$ ✓
- Suponemos válido para n y probamos para $n+1$

$$|f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| \leq 7 \int_0^t |f_{n+1}(s) - f_n(s)| ds \leq 7 \int_0^t 3 \cdot \frac{7^n s^n}{n!} ds = 3 \cdot 7^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow |f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 3 \cdot \frac{7^n}{n!}$$

¿ $\sum_{n \geq 1} 3 \cdot \frac{7^n}{n!} < \infty$?

Por crit. cociente, $\frac{7^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{7^n}{n!} = \frac{7}{n+1} \longrightarrow 0.$

Por tanto, por criterio de Weierstrass, $\{f_n\}$ c.v. en $[0,1]$.