Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
Primera prueba de clase, 31 de Octubre de 2023

1. Prueba que la ecuación

$$e^x + x^3 + t = 0$$

define una única función implícita $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además la función $x(t)$ es decreciente.

2. Se considera la función

$$F:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_0^{\sqrt{t}} e^{s^2} ds.$$

¿Es F de clase C^1? En caso afirmativo calcula la derivada.

3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = (\frac{x}{t})^3 + \frac{x}{t} - 1, \; x(1) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida?

4. Demuestra que las fórmulas

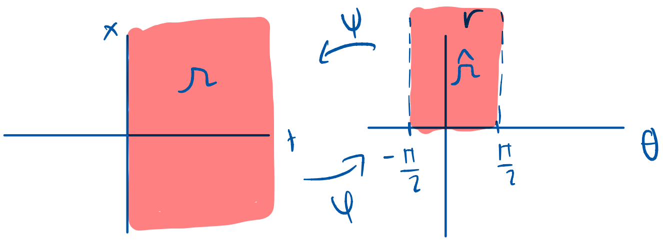
$$s = -e^t, \quad y = (t^2 + 1)x$$

definen un difeomorfismo que va de $D = \mathbb{R}^2$ a un dominio $\hat{D}$ que se especificará. Prueba que se trata de un cambio admisible para la ecuación $x' = x + t$ y encuentra la ecuación transformada.

5. Se considera la transformación en el plano

$$\psi(\theta, r) = (t, x), \quad t = r\cos\theta, \; x = r\,\text{sen}\,\theta, \quad (\theta, r) \in \hat{\Omega} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, +\infty[.$$

Determina $\Omega = \psi(\hat{\Omega})$ y prueba que ψ es un difeomorfismo de $\hat{\Omega}$ a Ω. Dada una ecuación $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ con $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ¿bajo qué condiciones se puede asegurar que el difeomorfismo $\varphi = \psi^{-1}$ es admisible?



$\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

- $\psi(\hat{\Omega}) \subseteq \Omega$, claramente, pues $t = \underset{>0}{r}\underset{>0}{\cos\theta} > 0$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- ¿Dado $(t,x) \in \Omega$, $\exists_1\, (\theta, r) \in \hat{\Omega} \mid \psi(\theta, r) = (t,x)$? $(\Omega \subseteq \psi(\hat{\Omega}))$

Para ello, resolvemos las ecuaciones y vemos que la solución es única.

$$\left.\begin{array}{l} t = r\cos\theta \\ x = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} t^2 + x^2 = r^2 \Rightarrow r = +\sqrt{t^2+x^2} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{t} = \tan\theta \\ \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array}\right\} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{t}\right)$$

Por tanto, vemos que ψ es difeomorfismo y $\Omega \subseteq \psi(\hat{\Omega}) \Rightarrow \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \psi(\hat{\Omega})$

Para que el cambio sea admisible:

$\psi^{-1} = \varphi : \Omega \to \hat{\Omega} \mid \varphi(t,x) = \left(\sqrt{t^2+x^2}, \arctan\left(\frac{x}{t}\right)\right)$

1) $f \in C(\Omega)$

2) φ dif. $C^1(\Omega)$ ✓

3) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t,x) = \frac{-1}{1+\frac{x^2}{t^2}} \frac{x}{t^2} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{t^2}} \frac{1}{t} f(t,x) \neq 0 \Rightarrow$

$-\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t} f(t,x) \neq 0 \Rightarrow \frac{t f(t,x) - x}{t^2} \neq 0 \Rightarrow t f(t,x) - x(t) \neq 0$
$\forall t \in \Omega$