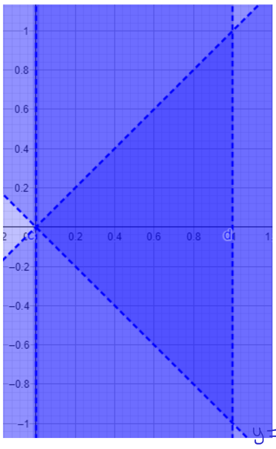
12. Supongamos que (X,Y) tiene función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1, & |y| < x,\ x \in (0,1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtener y representar las rectas y curvas de regresión. Calcular el coeficiente de correlación lineal, las razones de correlación y el error cuadrático medio cometido al predecir cada variable según cada una de las funciones de regresión. Interpretar los resultados.



$\longrightarrow$ Marginales: $f_{\mathbb{X}}(x) = \int_{-x}^{x} dy = 2x \qquad 0<x<1$

$$f_y(y) = \begin{cases} \int_{-y}^{1} dx = 1+y & \text{si} \quad -1<y<0 \\ \int_{y}^{1} dx = 1-y & \text{si} \quad 0<y<1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Condicionadas:

$$f_{\mathbb{X}/Y=y_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y_0} & \begin{matrix} -1<y_0<0 \\ -y_0<x<1 \end{matrix} \\ \dfrac{1}{1-y_0} & \begin{matrix} 0<y_0<1 \\ y_0<x<1 \end{matrix} \end{cases}$$

$$f_{y/\mathbb{X}=x_0}(y) = \frac{1}{2x_0} \qquad \begin{matrix} 0<x_0<1 \\ -x_0<y<x_0 \end{matrix}$$

$\longrightarrow$ CURVAS DE REGRESIÓN

$\longrightarrow$ $\mathbb{X}/Y$

·) Si $-1<y_0<0$, $E\left[\mathbb{X}/Y=y_0\right] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{\mathbb{X}/Y=y_0}(x)\,dx = \int_{-y_0}^{1} x \frac{1}{1+y_0}\,dx = \frac{1}{1+y_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y_0}^{1} =$

$$= \frac{1}{1+y_0}\,\frac{1^2-(-y_0)^2}{2} = \frac{(1-y_0)(1+y_0)}{(1+y_0)\ 2} = \frac{1-y_0}{2}$$

·) Si $0<y_0<1$, $E\left[\mathbb{X}/Y=y_0\right] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{\mathbb{X}/Y=y_0}(x)\,dx = \int_{y_0}^{1} x \frac{1}{1-y_0}\,dx = \frac{1}{1-y_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y_0}^{1} =$

$$= \frac{1}{1-y_0}\,\frac{1^2-y_0^2}{2} = \frac{(1-y_0)(1+y_0)}{2\,(1-y_0)} = \frac{1+y_0}{2}$$

Por tanto,

$$\boxed{E\left[\mathbb{X}/Y\right] = \begin{cases} \dfrac{1-Y}{2} & \text{si} \quad -1<Y<0 \\ \dfrac{1+Y}{2} & \text{si} \quad 0<Y<1 \end{cases} \qquad \text{C.R. de } \mathbb{X}/Y}$$

$\longrightarrow$ $Y/\mathbb{X}$

$$E\left[Y/\mathbb{X}=x_0\right] = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{y/\mathbb{X}=x_0}(y)\,dy = \int_{-x_0}^{x_0} y \cdot \frac{1}{2x_0}\,dy = \frac{1}{2x_0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x_0}^{x_0} = 0.$$

$$\boxed{E\left[Y/\mathbb{X}\right] = 0 \qquad \text{CR } Y/\mathbb{X}}$$

→ RECTAS DE REGRESIÓN

→ Y/X

Hemos visto que la curva de regresión de Y/X era una recta, luego la recta de regresión coincide con la curva de regresión:

$$\boxed{y=0}$$

Además, podemos sacar más información. Como la R.R. Y/X es $y=0$, sabemos que $E[Y]=0$ y que la pendiente es 0, es decir, $\frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}=0 \Rightarrow Cov[X,Y]=0$.

→ X/Y

$$x = E[X] + \frac{Cov[X,Y]}{Var[Y]}(y - E[Y])$$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2x = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}} \qquad (Cov[X,Y]=0)$$

→ COEFICIENTE DE CORRELACIÓN LINEAL

$$\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = 0.$$

→ RAZONES DE CORRELACIÓN

→ $$\eta^2_{X/Y} = \frac{Var[E[X/Y]]}{Var[X]} = 1 - \frac{E[Var[X/Y]]}{Var[X]}$$

Para calcularla, tenemos varias opciones. Desarrollaré, a modo didáctico, varias de ellas:

1) ·) Cálculo $Var[E[X/Y]]$:

Sabemos que $Var[T] = E[T^2] - (E[T])^2$, siendo T una v.a.:

$$Var[E[X/Y]] = E\left[(E[X/Y])^2\right] - \left(E[E[X/Y]]\right)^2 = E\left[(E[X/Y])^2\right] - (E[X])^2.$$

$$\hookrightarrow E[E[h(X)/Y]] = E[h(X)]$$

$$(E[X/Y])^2 = \begin{cases} \frac{(1-y)^2}{4} & \text{si} \quad -1<y<0 \\ \frac{(1+y)^2}{4} & \text{si} \quad 0<y<1 \end{cases}$$

$$E\left[(E[X/Y])^2\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-y)^2}{4} f_Y(y)dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+y)^2}{4} f_Y(y)dy = \int_{-1}^0 \frac{(1-y)^2}{4}(1+y)dy + \int_0^1 \frac{(1+y)^2}{4}(1-y)dy =$$

Aquí hago la esperanza de una función: $E[h(X)] = \int h(x) f_X dx$

$$= \frac{11}{48} + \frac{11}{48} = \frac{11}{24}$$

Luego $Var\left[E\left[X/Y\right]\right] = E\left[\left(E\left[X/Y\right]\right)^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = \frac{11}{24} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{72}.$

2) •) Cálculo $E\left[Var\left[X/Y\right]\right]$

2.1) ⟶ Opción 1: $Var\left[X/Y\right] = E\left[X^2/Y\right] - \left(E\left[X/Y\right]\right)^2$. La calculo y después aplico esperanza.

•) Si $-1<y_0<0$, $E\left[X^2/Y=y_0\right] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X/Y=y_0}(x)\,dx = \int_{-y_0}^{1} x^2 \frac{1}{1+y_0}\,dx = \frac{1}{1+y_0}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-y_0}^{1} =$

$$= \frac{1}{1+y_0}\,\frac{1+y_0^3}{3} = \frac{y_0^2-y+1}{3}$$

•) Si $0<y_0<1$, $E\left[X^2/Y=y_0\right] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X/Y=y_0}(x)\,dx = \int_{y_0}^{1} x^2 \frac{1}{1-y_0}\,dx = \frac{1}{1-y_0}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y_0}^{1} =$

$$= \frac{1}{1-y_0}\,\frac{1-y_0^3}{3} = \frac{y_0^2+y+1}{3}$$

$$E\left[X^2/Y\right] = \begin{cases} \frac{Y^2-Y+1}{3} & \text{si} \quad -1<Y<0 \\ \frac{Y^2+Y+1}{3} & \text{si} \quad 0<Y<1 \end{cases}$$

$$Var\left[X/Y\right] = \begin{cases} \frac{Y^2-Y+1}{3} - \frac{(1-Y)^2}{4} & \text{si} \quad -1<Y<0 \\ \frac{Y^2+Y+1}{3} - \frac{(1+Y)^2}{4} & \text{si} \quad 0<Y<1 \end{cases}$$

$$E\left[Var\left[X/Y\right]\right] = \int_{-1}^{0}\left(\frac{y^2-y+1}{3} - \frac{(1-y)^2}{4}\right) f_Y(y)\,dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{y^2+y+1}{3} - \frac{(1+y)^2}{4}\right) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{y^2-y+1}{3} - \frac{(1-y)^2}{4}\right)(1+y)\,dy + \int_{0}^{1}\left(\frac{y^2+y+1}{3} - \frac{(1+y)^2}{4}\right)(1-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{48} + \frac{1}{48} = \frac{1}{24}$$

2.2) ⟶ Opción 2: $E\left[Var\left[X/Y\right]\right] = E\left[E\left[X^2/Y\right] - \left(E\left[X/Y\right]\right)^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[\left(E\left[X/Y\right]\right)^2\right]$

$$E\left[\left(E\left[X/Y\right]\right)^2\right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-y)^2}{4} f_Y(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+y)^2}{4} f_Y(y)\,dy = \int_{-1}^{0} \frac{(1-y)^2}{4}(1+y)\,dy + \int_{0}^{1} \frac{(1+y)^2}{4}(1-y)\,dy =$$

Aquí hago la esperanza de una función: $E[h(X)] = \int h(x) f_X\,dx$

$$= \frac{11}{48} + \frac{11}{48} = \frac{11}{24}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Luego $E\left[Var\left[X/Y\right]\right] = \frac{1}{2} - \frac{11}{24} = \frac{1}{24}$.

Aquí están desarrolladas tres posibles opciones. Por tanto, como $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{Var[E[X/Y]]}{Var[X]} \overset{(1)}{=} \frac{1/72}{1/18} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\eta^2_{X/Y} = 1 - \frac{E[Var[X/Y]]}{Var[X]} \overset{(2)}{=} 1 - \frac{1/24}{1/18} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow \eta^2_{Y/X} = \frac{Var[E[Y/X]]}{Var[Y]} = \frac{Var[0]}{Var[Y]} = \frac{0}{Var[Y]} = \boxed{0}.$$

$E[Y/X] = 0$

$\longrightarrow$ Errores Cuadráticos Medios

$\longrightarrow$ C.R. X/Y $\qquad E[Var[X/Y]] = \boxed{\frac{1}{24}}$.

Lo hemos calculado anteriormente de diferentes formas. No obstante, podemos jugar con estas expresiones, en función de lo que tengamos calculado.

·) $Var[X] = Var[E[X/Y]] + \underbrace{E[Var[X/Y]]}_{ECM}$

·) $E[Var[X/Y]] = (1 - \eta^2_{X/Y})\, Var[X]$

$\longrightarrow$ C.R. Y/X

$$E[Var[Y/X]] = (1 - \eta^2_{Y/X})\, Var[Y] = Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{6} - 0^2 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$E[Y] = 0$

$$E[Y^2] = \int_{-1}^{0} y^2(1+y)\,dy + \int_0^1 y^2(1-y)\,dy = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Otra opción sería utilizar la fórmula de descomposición de la varianza:

$$Var[Y] = \cancel{Var[\underbrace{E[Y/X]}_{0}]}^{\,0} + E[Var[Y/X]]$$

$\longrightarrow$ R.R. X/Y $\qquad ECM(R.R\, X/Y) = Var[X] - \cancel{\frac{Cov^2[X,Y]}{Var[Y]}}^{\,0} = Var[X] = \boxed{\frac{1}{18}}$

$\longrightarrow$ R.R. Y/X $\qquad ECM(R.R.\, Y/X) = Var[Y] - \cancel{\frac{Cov^2[X,Y]}{Var[X]}}^{\,0} = Var[Y] = \boxed{\frac{1}{6}}$