Actividad EVALUABLE 1 (Repaso de PRELIMINARES)
Responder de forma razonada a las cuestiones que se plantean.

Leandro Jorge Fdez. Vega DGIIM

1. Se denota por $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio probabilístico base. Se considera la siguiente definición de medida de probabilidad:

   Definition 1 $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, *es una función de probabilidad si satisface los siguientes tres axiomas:*

   A1 $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

   A2 $P(\Omega) = 1$

   A3 *Para cualquier secuencia* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ *de sucesos disjuntos*

   $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

   Demostrar, a partir de la definición anterior, las siguientes propiedades:

   a) $P(\emptyset) = 0$.
   b) Probabilidad del suceso complementario: $p(A^c) = 1 - P(A)$:
   c) Aditividad finita para procesos disjuntos: $P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
   d) Probabilidad de la diferencia y monotonía: $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, $P(A-B) = P(A) - P(B)$, $P(B) \leq P(A)$.
   e) $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   f) Principio de inclusión-exclusión para la unión finita de sucesos no disjuntos.
   g) Subaditividad: $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
   h) Desigualdad de Boole: $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right). \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$

A) $P(\emptyset) = 0$

Sea $A_1 = A$ $\quad A_n = \emptyset$ $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = P(A) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \Longrightarrow$$

$P(\emptyset) = 0$, pues $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$

B) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Sea $A_1 = A$ $\quad A_2 = A^c$ $\quad A_n = \emptyset$ $\quad \forall n \geq 3$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \overset{P(\emptyset)=0}{=} P(A) + P(A^c) = 1 \Longrightarrow$$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

C) $P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j \in \{1..N\}$

Sea $n, N \in \mathbb{N}$

Tomemos la sucesión $A_n \neq \emptyset$, $\forall n \leq N$, $A_n = \emptyset$ $\forall n > N$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j \leq N$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n),$$

pues $P(A_n) = 0$ $\forall A_n \in \mathcal{A} / n > N$

D) $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, $P(A-B) = P(A) - P(B)$,

$P(B) \leq P(A)$

Veamos $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A = (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow$

$P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) \overset{\text{Disjuntos}}{=} P(A-B) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Si $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$

$P(A-B) = P(A) - P(B) \geq 0 \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

E) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$

$A = (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow$

$P(A) = (P(A-B) \cup (A \cap B)) \overset{\text{Disjuntos}}{=} P(A-B) + P(A \cap B)$

$P(B) = P((B-A) \cup (B \cap A)) = P(B-A) + P(B \cap A)$

$P(A) + P(B) = P(A-B) + P(A \cap B) + P(B-A) + P(B \cap A) \Rightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A-B) + P(B-A) + P(B \cap A) \overset{\text{Disjuntos}}{=}$

$P((A-B) \cup (B-A) \cup (B \cap A)) = P(A \cup B) \Rightarrow$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

F) $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j)$

$+ \sum_{i<j<k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$

Probemos por inducción:

- $n=2$ probado en E).

- Supongamos válido para n y probemos para $n+1$

Reformulamos el principio de la siguiente manera:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1 \dots n\} \\ |I| = i}} P(A_I) \,,\quad A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) =$$

$$\underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}_{\text{Hipótesis Inducción}} + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1 \dots n\} \\ |I| = i}} P(A_I) + P(A_{n+1}) - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)}_{\text{Hipótesis Inducción}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1 \dots n\} \\ |I| = i}} P(A_I) + P(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1 \dots n\} \\ |I| = i}} P(A_I \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1 \dots n+1\} \\ |I| = i}} P(A_I)$$

G) $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \forall A_n \in \mathcal{A}$

Sea $A'_1 = A_1 \quad A'_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \quad \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$

Claramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$, $A'_i \cap A'_j = \emptyset \ \forall i\neq j \in \mathbb{N}$

y $A'_n \subseteq A_n \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow P(A'_n) \leq P(A_n) \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A'_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

H) $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) \overset{*}{\geq} 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$$

$*$ $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \forall A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$$-P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq -\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$