Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo B
29 de Mayo de 2018

NOMBRE:

1. Calcula la solución de $x'' - x = \operatorname{sen} t, \ \ x(0) = 1, \ x'(0) = 2.$

- Sol. homogénea: $x'' - x = 0 \Longrightarrow x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$
- Sol. particular:

$x(t) = a\cos t + b\,\text{sen}\,t$

$x'(t) = -a\,\text{sen}\,t + b\cos t$

$x''(t) = -a\cos t - b\,\text{sen}\,t$

Sustituyendo en la ecuación:

$-a\cos t - b\,\text{sen}\,t - a\cos t - b\,\text{sen}\,t = \text{sen}\,t \iff -2a\cos t - 2b\,\text{sen}\,t = \text{sen}\,t$

$$\begin{cases} -2a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ -2b = 1 \Rightarrow b = -1/2 \end{cases}$$

Por tanto, $x_*(t) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t$ es sol. particular.

- Solución general: $x(t) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t + c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$

$x'(t) = -\frac{1}{2}\cos t + c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ x'(0) = -\frac{1}{2} + c_1 - c_2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{5}{2} \\ \hline 2c_1 \quad = \frac{7}{2} \Longrightarrow c_1 = \frac{7}{4} \\ \qquad\qquad c_2 = 1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Por tanto, la solución a nuestra ecuación es

$x(t) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t + \frac{7}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t}$

2. Encuentra la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema $x' = Ax$ donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Dado que se trata de una matriz con coeficientes ctes, diagonalizamos:

$$P_\lambda(A) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^2 / (A - 2I) v = 0 \} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv v_1 - v_2 = 0$$

$$V_{-1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 / (A + I) v = 0 \} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv v_1 = 0$$

Tenemos vectores propios $v_1 = (1,1)$ $v_2 = (0,1)$

$\phi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\phi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son sol. del sist.

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix}$ es una m.f. del sist.

La m.f. principal en $t_0 = 0$ será $\Phi(t)\, \Phi(t_0)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

3. Calcula el determinante de la matriz e^A si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Sabemos $\det(e^A) = e^{tr(A)} = e^4$.

4. Se considera la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\geq 0}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por la recurrencia

$$f_0(t) = 0, \quad f_n(t) = 7 + \frac{1}{3}[f_{n-1}(t-1)\cos t + f_{n-1}(t+1)\operatorname{sen} t] \text{ si } n \geq 1,$$

válida para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestra que esta sucesión converge uniformemente a una función $f(t)$ continua en todo $\mathbb{R}$.

$f_1(t) = 7 + \frac{1}{3}\left(f_0(t-1)\cos t + f_0(t+1)\operatorname{sen} t \right) = 7$

$f_2(t) = 7 + \frac{1}{3}\left(f_1(t-1)\cos t + f_1(t+1)\operatorname{sen} t \right) = 7 + \frac{1}{3}\left(7\cos t + 7\operatorname{sen} t\right)$

$f_3(t) = 7 + \frac{1}{3}\left(f_2(t-1)\cos t + f_2(t+1)\operatorname{sen} t \right) =$

$7 + \frac{1}{3}\left[7 + \frac{1}{3}\left(7\cos(t-1) + 7\operatorname{sen}(t-1)\right) + 7 + \frac{1}{3}\left(7\cos(t+1) + 7\operatorname{sen}(t+1)\right)\right]$

$|f_1(t) - f_0(t)| = 7$

$|f_2(t) - f_1(t)| = |\cancel{7} + \frac{1}{3}[f_1(t-1)\cos t + f_1(t+1)\operatorname{sen} t] - \cancel{7}| \leq \frac{1}{3}|7\cos t + 7\operatorname{sen} t| \leq \frac{2}{3}\cdot 7 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$|f_3(t) - f_2(t)| = |\cancel{7} + \frac{1}{3}[f_2(t-1)\cos t + f_2(t+1)\operatorname{sen} t] - (\cancel{7} + \frac{1}{3}[f_1(t-1)\cos t + f_1(t+1)\operatorname{sen} t])| =$

$\frac{1}{3}|f_2(t-1)\cos t - f_1(t-1)\cos t + f_2(t+1)\operatorname{sen} t - f_1(t+1)\operatorname{sen} t| \leq$

$\frac{1}{3}[|f_2(t-1)\cos t - f_1(t-1)\cos t| + |f_2(t+1)\operatorname{sen} t - f_1(t+1)\operatorname{sen} t|] \leq$

$\frac{1}{3}[|f_2(t-1) - f_1(t-1)| + |f_2(t+1) - f_1(t+1)|] \leq$

$\frac{1}{3}[\frac{1}{3}|7\cos(t-1) + 7\operatorname{sen}(t-1)| + \frac{1}{3}|7\cos(t+1) + 7\operatorname{sen}(t+1)|] \leq$

$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 7 + \frac{2}{3}\cdot 7\right) = \frac{1}{3^2}\cdot 2^2\cdot 7$

Veamos por inducción $|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{3^n}\cdot 2^n\cdot 7 = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

• $n = 0 \Rightarrow |f_1(t) - f_0(t)| = 7 \leq 7$ ✓

• Supongamos válido para n y probemos para $n+1$

$|f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| =$

$\left| \cancel{7} + \frac{1}{3}[f_2(t-1)\cos t + f_2(t+1)\operatorname{sen} t] - (\cancel{7} + \frac{1}{3}[f_1(t-1)\cos t + f_1(t+1)\operatorname{sen} t]) \right| =$

$\frac{1}{3}|f_{n+1}(t-1)\cos t - f_n(t-1)\cos t + f_{n+1}(t+1)\operatorname{sen} t - f_n(t+1)\operatorname{sen} t| \leq$

$\frac{1}{3}[|f_{n+1}(t-1)\cos t - f_n(t-1)\cos t| + |f_{n+1}(t+1)\operatorname{sen} t - f_n(t+1)\operatorname{sen} t|] \leq$

$\frac{1}{3}[|f_{n+1}(t-1) - f_n(t-1)| + |f_{n+1}(t+1) - f_n(t+1)|] \leq$

$\frac{1}{3}[\frac{1}{3^n} \cdot 2^n \cdot 7 + \frac{1}{3^n} \cdot 2^n \cdot 7] = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot 7$

Por Criterio del Cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\cancel{7} \cdot 2^{\cancel{n}+1}}{3^{\cancel{n}+1}}}{\frac{\cancel{7} \cdot 2^{\cancel{n}}}{3^{\cancel{n}}}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge}$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ c.u. en $\mathbb{R}$ por Test Weierstrass.

5. Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se define su conmutador como $[A, B] = AB - BA$. Dadas $A, X_0 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ se considera el problema

$$X' = [X, A], \quad X(0) = X_0.$$

La incógnita $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ es una función derivable con valores matriciales. Demuestra que este problema admite una única solución. Encuentra dicha solución en el caso de que las matrices A y X_0 conmuten.