

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba intermedia de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. (4 puntos) Probar que la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\ln(2) < \operatorname{Im} z < \ln(2)\}$. Estudiar la convergencia uniforme en subconjuntos de Ω . Probar que la función $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \quad (z \in \Omega)$$

es continua en Ω y calcular $\int_{C(0,1)} \frac{g(z)}{z} dz$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Estudiar la derivabilidad de la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = e^{\bar{z}} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que una función $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en Ω si $\phi \in C^2(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

a) (1.5 puntos) Sea $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armónica en Ω . Probar que la función $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x + iy) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

es holomorfa en Ω .

b) (1.5 puntos) Suponiendo que Ω es un dominio estrellado probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de modo que $\operatorname{Re} f = \phi$ y que f es única salvo una constante.

c) (1 punto) Deducir que una función armónica en un dominio estrellado es, de hecho, de clase C^∞ .

Granada, 9 de mayo de 2023