Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
12 de Septiembre de 2016

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \quad t^2x'' - 2x = 0, \ t > 0.$$

a) [10] Encuentra una solución no trivial y polinómica de esta ecuación.

b) [10] Dada cualquier solución $x(t)$ de $(\star)$ que no se anule en un intervalo I contenido en $]0, \infty[$, se define

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}, \quad t \in I.$$

Demuestra que $y(t)$ cumple una ecuación de primer orden que designaremos por $(\star\star)$.

c) [10] ¿Es la ecuación $(\star\star)$ de alguno de los tipos vistos en clase? En caso afirmativo explica el método a seguir para resolverla. No es necesario efectuar los cálculos pero sí se especificará el cambio de variable que se debe usar.

2. Se considera el sistema de ecuaciones integrales

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_2(s)ds, \quad x_2(t) = 2 + \int_0^t x_1(s)ds,$$

donde las incógnitas $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

a) [5] Reduce este sistema a un problema de valores iniciales equivalente.

b) [5] Justifica la existencia y unicidad de solución.

c) [15] Calcula dicha solución.

3 [30] Encuentra la curva en forma explícita $y = y(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$ y cumple la siguiente propiedad:

en cada punto de la curva la distancia al origen coincide con la ordenada del punto de corte de la recta tangente y el eje vertical.

Indicación: $\int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} d\xi = \text{arg sh } \xi$, argumento del seno hiperbólico, función inversa del seno hiperbólico.

4. Se consideran dos funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ que son de clase C^1 y se define

$$U(x, y) = \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta.$$

a) [5] Demuestra que la función U también es de clase C^1.

b) [10] Se supone ahora que P y Q cumplen la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Demuestra que en este caso U es de clase C^2.

1 Consideramos la ecuación

$$(\star) \quad t^2x'' - 2x = 0,\ t > 0.$$

a) [10] Encuentra una solución no trivial y polinómica de esta ecuación.

b) [10] Dada cualquier solución $x(t)$ de $(\star)$ que no se anule en un intervalo I contenido en $]0, \infty[$, se define

$$y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}, \quad t \in I.$$

Demuestra que $y(t)$ cumple una ecuación de primer orden que designaremos por $(\star\star)$.

c) [10] ¿Es la ecuación $(\star\star)$ de alguno de los tipos vistos en clase? En caso afirmativo explica el método a seguir para resolverla. No es necesario efectuar los cálculos pero sí se especificará el cambio de variable que se debe usar.

A)

$$x'' - \frac{2x}{t^2} = 0 \implies x'' = \frac{2}{t^2}x$$

Vemos $x_1(t) = \frac{t^2}{2}$ verifica la ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t) = t \\ x_1''(t) = 1 \end{array}\right\} \implies 1 = \frac{2}{t^2}\cdot\frac{t^2}{2} = 1$$

B)

$I \subseteq \mathbb{R}^+$

$$y'(t) = \frac{x''x - x'x'}{x^2} = \frac{\frac{2}{t^2}xx - x'x'}{x^2} = \frac{\frac{2}{t^2}x^2 - (x')^2}{x^2} =$$

$$\frac{2}{t^2} - \left(\frac{x'}{x}\right)^2 = \frac{2}{t^2} - y^2$$

$y' = -y^2 + \frac{2}{t^2}$ se trata de una ecuación de Riccati:

Si $\frac{t^2}{2}$ es sol de $*$, $y(t) = \frac{t}{\frac{t^2}{2}} = \frac{2}{t}$ es sol de $**$

$\left(-\frac{2}{t^2} = -\frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^2} \checkmark\right)$. Por tanto, el cambio a realizar es:

$$\varphi \begin{cases} p = t \\ q = \frac{1}{y - \frac{2}{t}} \end{cases}$$ en $\hat{D} = I \times \mathbb{R} = \{(t, y) \in I \times \mathbb{R} /\ y > \frac{2}{t}\}$

2. Se considera el sistema de ecuaciones integrales

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_2(s)ds, \quad x_2(t) = 2 + \int_0^t x_1(s)ds,$$

donde las incógnitas $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

a) [5] Reduce este sistema a un problema de valores iniciales equivalente.

b) [5] Justifica la existencia y unicidad de solución.

c) [15] Calcula dicha solución.

A)

Al ser x_1, x_2 cont, $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R})$ por T.F.C. con:

$x_1'(t) = x_2(t)$, $x_1(0) = 1$

$x_2'(t) = x_1(t)$, $x_2(0) = 2$

B)

Sea $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Vemos que $x' = A(t)x$, $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2})$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Por T^a Existencia y Unicidad, en estas condiciones $\exists_1 x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ que resuelve el sist. y cumple las condiciones iniciales.

C)

Como $x_2 \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow x_1 \in C^2(\mathbb{R}) \Rightarrow x_1'' = x_1 \Rightarrow$

$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ es sol. general. $\Rightarrow x_2(t) = x_1'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Por tanto, $x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$ es sol general del sist.

4. Se consideran dos funciones $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ que son de clase C^1 y se define

$$U(x,y) = \int_0^x P(\xi, 0)d\xi + \int_0^y Q(x,\eta)d\eta.$$

a) [5] Demuestra que la función U también es de clase C^1.

b) [10] Se supone ahora que P y Q cumplen la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Demuestra que en este caso U es de clase C^2.

A)

Sea $Q_x(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, Q_x(y) = Q(x,y) \in C^1(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P(\xi,0), Q_x \in C(\mathbb{R})$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Por TFC $U \in C^1(\mathbb{R})$. Como $Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, por 1^a Integrales Dep. Parámetros:

B)

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,0) + \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x,\eta)d\eta = P(x,0) + \int_0^y \frac{\partial P}{\partial y}(x,\eta)\, d\eta \overset{\text{Barrow}}{=}$$

$$\left.\begin{aligned} &P(x,0) + P(x,y) - P(x,0) = P(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ &\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 0 + Q(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U \in C^2(\mathbb{R}^2)$$