Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. (**3 puntos**) Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z^2 - i}{z^2 + i}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Ejercicio 2. (**3 puntos**) Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = z^2\, \mathrm{e}^{\overline{z}} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \operatorname{sen}(z) f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3. (**1 punto**) Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z(z-2)^2} dz$.

Ejercicio 4. (**3 puntos**) Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y sea $R > 0$ de modo que $R > \max\{|a|, |b|\}$. Probar que, si f es una función entera, se tiene que:

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = 2\pi i \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deducir que toda función entera y acotada es constante (Teorema de Liouville).

Ejercicio 5. (**Extra: 1.5 puntos**) Sea $\emptyset \neq \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sean $g, g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en cada compacto de Ω si, y sólo si, para cada $a \in \Omega$ existe un entorno de a en el que $\{g_n\}$ converge uniformemente a g.

Granada, 20 de abril de 2020

Instrucciones:

- Enviad la prueba resuelta a mi email (jmeri@ugr.es) en un único archivo .pdf con el nombre en el formato Apellido1Apellido2Nombre.pdf
- Tenéis hasta el miércoles 22 de abril a las 22:00 para entregar la prueba.