Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
27 de Abril de 2017

NOMBRE:

1. Encuentra la solución del problema

$$\underbrace{y - 4x^3}_{P(x,y)} + (\underbrace{2y + x}_{Q(x,y)})y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

¿En qué intervalo está definida?

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists\, U : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \frac{\partial U}{\partial x} = P \ \text{y} \ \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y - 4x^3 \Rightarrow U(x,y) = \int y - 4x^3 \, dx = yx - x^4 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y + x = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

$$U(x,y) = yx - x^4 + y^2$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow yx - x^4 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4(x^4+1)}}{2}$$

Para cumplir la condición inicial, tomamos $y = \dfrac{-x - \sqrt{x^2+4(x^4+1)}}{2}$

definida en $I = \mathbb{R}$, pues $x^2 + 4(x^4+1) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

2. Encuentra un factor integrante del tipo $\mu(t,x) = m(t)$ para la ecuación

$$2t + t^2 x + x' = 0.$$

$P = 2t + t^2 x$, $Q = 1$

$\mu(t,x)$ factor integrante $\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu(t,x) \neq 0 & \forall (t,x) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu Q) \Rightarrow \end{cases}$

$\mu_x P + P_x \mu = \mu_t Q + Q_t \mu \Longrightarrow \mu_x P - \mu_t Q = \mu (Q_t - P_x)$

$-m'(t)\, Q = m(t)\,(Q_t - P_x)$, $Q(t,x) \neq 0 \quad \forall (t,x) \in \Omega$

$\dfrac{m'(t)}{m(t)} = \dfrac{-Q_t + P_x}{Q} = t^2 \Longrightarrow m'(t) = t^2 m(t) \Longrightarrow m(t) = e^{t^3/3} = \mu(t,x)$

En realidad, por teoría, sabemos que $\exists$ factor integrante por tratarse de ec. lineal.

3. Demuestra que las funciones

$$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(t) = e^t, \quad f_2(t) = e^{2t}, \quad f_3(t) = e^{3t}$$

son linealmente independientes.

Claramente $f_1, f_2, f_3 \in C^2(\mathbb{R})$ por tratarse de funciones exponenciales.

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^t & 4e^{2t} & 9e^{3t} \end{vmatrix} = 18e^{6t} + 4e^{6t} + 3e^{6t} - 2e^{6t} - 12e^{6t} - 9e^{6t} = 2e^{6t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1, f_2, f_3 \text{ L.I.}$$

4. Demuestra que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la integral

$$F(x) = \int_0^1 e^{\theta x^2} \cos^2(\theta) d\theta$$

es derivable y cumple $F'(0) = 0$.

Sea $\varphi(\theta, x) = e^{\theta x^2} \cos^2\theta \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$

Por T^a Integrales dependientes de parámetro, $F \in C^1(\mathbb{R})$ con derivada

$$F'(x) = \int_0^1 2\theta x \, e^{\theta x^2} \cos^2\theta \, d\theta = 2x \int_0^1 \theta e^{\theta x^2} \cos^2\theta \, d\theta \Rightarrow F'(0) = 0$$

5. Dada una función $\ell \in C^1(\mathbb{R})$ que cumple $\ell(t) > 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$ se define la transformación del plano

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ (t, x) \mapsto (t, \ell(t)x).$$

Demuestra que el conjunto de estas transformaciones es un grupo de difeomorfismos. Encuentra el subgrupo que deja invariante la ecuación $x' = 2t^2x$.

Para probar que $C = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \ell(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ell(t) \in C^1(\mathbb{R})\}$

1) Cerrado para la operación (en este caso composición):

Sean $\varphi, \psi \in C \Rightarrow \varphi(\psi(t,x)) = \varphi(t, \ell(t)x) = (t, \ell_\varphi(t)\ell_\psi(t)x)$

Dado que $\ell_\varphi(t)\ell_\psi(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi \circ \psi \in C$

2) Asociativa:

Claro por la asociatividad de la multiplicación.

3) Existencia del neutro:

Tomamos $Id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, Id_{\mathbb{R}^2}(t,x) = (t,x)$

$Id_{\mathbb{R}^2}(\varphi(t,x)) = \varphi(Id_{\mathbb{R}^2}(t,x)) = (t, \ell(t)x) \ \forall \varphi \in C.$

4) Existencia del inverso:

Tomamos $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \psi(s,y) = \left(s, \frac{y}{\ell_\varphi(s)}\right)$, que está bien definida, pues $\ell_\varphi(s) > 0 \ \forall s \in \mathbb{R}$ $\forall \varphi \in C$, donde $\ell_\psi(t) = \frac{1}{\ell_\varphi(t)} > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\psi(\varphi(t,x)) = \psi(t, \ell_\varphi(t)x) = \left(t, \frac{\ell_\varphi(t)x}{\ell_\varphi(t)}\right) = (t,x)$

$\varphi(\psi(s,y)) = \varphi\left(s, \frac{y}{\ell_\varphi(s)}\right) = \left(s, \ell_\varphi(s)\frac{y}{\ell_\varphi(s)}\right) = (s,y)$

Por tanto, vemos $\exists \varphi^{-1} = \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \forall \varphi \in C.$

Además $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2) \ \forall \varphi, \psi \in C$, por serlo ℓ_φ.

Por tanto, C es un grupo de difeomorfismos.

Veamos bajo qué condiciones se deja invariante la ecuación $x' = 2t^2 x$

$$\varphi \begin{cases} s = t \\ y = \ell(t)\, x \end{cases}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy/dt}{ds/dt} = \ell' x + \ell x' = \ell' \frac{y}{\ell} + \ell \cdot 2t^2 \cdot \frac{y}{\ell} =$$

$$\frac{\ell'}{\ell} y + 2s^2 y = \hat{f}(s,y)$$

sea $f(s,y) = 2s^2 y$

$$\hat{f}(s,y) = f(s,y) \iff \frac{\ell'}{\ell} y + 2s^2 y = 2s^2 y \iff$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = 0 \iff \ln(\ell) = k \iff \ell(t) = e^k \implies$$

$\ell(t) = c$, $c \in \mathbb{R}^+$