PROBABILIDAD - Doble Grado Ingeniería Informática y Matemáticas (Curso 2023/2024)
Convocatoria ordinaria
Fecha: 17 de enero de 2024 - Duración: 3 horas.

---

1. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio continuo (X,Y) distribuido uniformemente en el recinto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x < 1, x < 0, y > 0\}$$

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.
   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.
   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.
   d) **(0.25 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X - Y > 0$.
   e) **(0.25 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X + Y < 0$.
   f) **(1.50 puntos)** Obtener la mejor aproximación minimo cuadrática a la variable aleatoria Y conocidos los valores de la variable X y el error cuadrático medio de esta aproximación.
   g) **(0.50 puntos)** Obtener una medida de la bondad del ajuste del apartado anterior.

2. **(1 punto)** Dado un vector aleatorio (X,Y) con función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t_1,t_2) = exp\left(\frac{t_2 + 16t_1^2 + 4t_2^2 + 10t_1t_2}{2}\right)$$

   (a) **(0.25 puntos)** Obtener la razón de correlación y el coeficiente de correlación lineal de las variables (X,Y).
   (b) **(0.25 puntos)** Indicar las distribuciones de las variables aleatorias $Y/X = 0$ y $X/Y = 2$.
   (c) **(0.50 puntos)** Obtener la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(2X, Y - X)$. Justificar que las variables aleatorias $2X$ y $Y - X$ tienen asociación lineal muy alta en sentido negativo.

3. **(3 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio. Se pretenden predecir, por mínimos cuadrados, los valores de la variable Y a partir de una función lineal de la variable X, y viceversa.

   a) **(2 puntos)** Obtener de forma razonada los coeficientes del modelo lineal de X sobre Y.
   b) **(1 punto)** Si $3y - x + 1 = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$ son las rectas de regresión del vector (X,Y): identificar la recta de regresión de Y sobre X; obtener una medida de la proporción de varianza de cada variable que queda explicada por el modelo de regresión lineal y calcular la esperanza del vector (X,Y).

4. **(1 punto)** Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas según una ley uniforme en el intervalo $[0,\theta]$ con $\theta > 0$. Se considera la sucesión de variables aleatorias cuyo término general es de la forma $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Probar que la sucesión anterior converge en ley a una variable aleatoria degenerada en θ.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 1.b** se obtiene **hasta 1 punto** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.5 puntos** si se obtienen sus primitivas de forma explícita.