Tema 5.- Grupos resolubles.

Definiciones

Sea G un grupo:

- Una serie de G es *una cadena finita de subgrupos* tal como

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_r = 1$$

- El natural r se llama la *longitud de la serie*.
- Si $G = H_0 > H_1 > \cdots > H_s = 1$ es otra serie de G, se dice que la primera es *un refinamiento* de la segunda si todo grupo que aparece en la segunda también lo hace en la primera. El refinamiento se dice *propio* si en la primera hay grupos que no aparecen en la segunda.
- La serie $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_r = 1$ se dice *propia* si todas las inclusiones entre subgrupos son propias.
- La serie $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_r = 1$ se dice que es una *serie normal* si $G_{i-1} \rhd G_i$ para todo $i = 1, \dots, r$.
- En una serie normal $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$ los grupos cocientes ${G_{i-1}}/{G_i}$ se llaman *factores* de la serie.
- Dos series normales de un grupo G; $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$ y $G = H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots \rhd H_s = 1$ se dice que son *isomorfos* si $r = s$ (tienen la misma longitud) y existe $\sigma \in S_r$ tal que ${G_{i-1}}/{G_i} \cong {H_{\sigma(i)-1}}/{H_{\sigma(i)}}$ $\forall$todo $i = 1, \dots, r$.
- Una serie de G se dice que es *una serie de composición* de G si es una serie normal sin refinamientos normales propios.
- En una serie de composición de G los factores de la serie se llaman *factores de composición* de G y sus órdenes se llaman *índices de composición*.
- Un grupo G se dice que es *simple* si no es trivial y no tiene subgrupos normales propios.

Lema

Un grupo abeliano es simple si y solo si es cíclico de orden primo.

Lema

Si un grupo G tiene una serie de composición los factores son grupos simples.

Proposición

Si G es un grupo finito entonces G tiene una serie de composición.

Teorema de refinamiento de Shreier

Dos series normales arbitrarias de cualesquier gr**upo** G tienen refinamientos isomorfos.

Teorema (Jordan-Holder)

Si un grupo G admite una serie de composición cualquier serie normal puede refinarse a una serie de composición. Además, dos series de composición de un grupo G son isomorfos.

Teorema (Abel)

El grupo alternado A_n es simple para $n \geq 5$.

Definición

La serie derivada de un grupo G es la cadena de subgrupos normales

$$G = G^0 \rhd G^1 \rhd \cdots \rhd G^{(i} \rhd \cdots \ donde\ G^{(i+1} = \left[G^{(i}, G^{(i}\right]$$

Un grupo G se dice *resoluble* si existe i tal que $G^{(i} = 1$, es decir, si la serie derivada alcanza el grupo trivial.

Ejemplos

- S_3 es resoluble.
- S_4 es resoluble.
- A_4 es resoluble.
- A_n no es resoluble para $n \geq 5$
- S_n no es resoluble para $n \geq 5$

Teorema

Sea G un grupo finito. Son equivalentes:

1.- G es resoluble.

2.- G tiene una serie normal con factores abelianos.

3.- Los factores de composición de G son cíclicos de orden primo.

4.- G tiene una serie normal con factores cíclicos.

Proposición

1.- Todo subgrupo de un grupo resoluble es resoluble.

2.- Todo cociente de un grupo resoluble es resoluble.

3.- Si $N \lhd G$ y N y ${}^{G}/_{N}$ son resolubles, entonces G es resoluble.

Corolario

Cualquier producto finito de grupos resolubles es resoluble.

Ejercicio 1

Sea $N \trianglelefteq G$, un subgrupo normal y simple de un grupo G. Demostrar que si G/N tiene una serie de descomposición entonces G tiene una serie de composición.

Solución

Si $G/N = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = 1$ es una serie de composición de G/N se tiene que cada $G_i, i = 0, \dots, n$ es de la forma $G_i = K_i/N$ donde $N \trianglelefteq K_i \trianglelefteq G$ donde $K_0 = G$ y $K_n = N$ y $K_{i-1} \rhd K_i$ $i = 1, \dots, n$.

Se tiene la serie normal de G: $G = K_0 \rhd K_1 \rhd \cdots \rhd K_{n-1} \rhd K_n = 1$ $(*)$ que es propia, porque $K_{i-1} = K_i \Leftrightarrow G_{i-1} = G_i$ y que los factores son simples pues

$$K_{i-1}/K_i \cong \frac{K_{i-1}/N}{K_i/N} = G_{i-1}/G_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

Como G_{i-1}/G_i $i = 1, \dots, n-1$ son simples ya que son los factores de la serie de composición de G/N, y además, $K_{n-1}/K_n = K_{n-1}/N = G_{n-1}$ es simple por hipótesis, así que $(*)$ es una serie de composición de G .

Ejercicio 2

Sea G un grupo abeliano. Demostrar que G tiene series de composición si y solo si G es finito.

Solución

$\Longleftarrow$) Por ser G finito tiene series de composición.

$\Longrightarrow$) Si G tiene series de composición entonces los cocientes tienen que ser simples y como G es abeliano son abelianos:

$$\left|{}^{G_i}/_{G_{i+1}}\right| = p_i \ \ primo \quad i = 0, \dots, r-1$$

De donde

$$|G| = [G:G_1]|G_1| = \left[{}^{G_0}/_{G_1}\right]|G_1| = p_0|G_1|$$

$$|G_1| = [G_1:G_2]|G_2| = \left[{}^{G_1}/_{G_2}\right]|G_2| = p_1|G_2|$$

Y así sucesivamente se tiene que

$$|G| = p_0 p_1 \dots p_{r-1} < \infty \Longrightarrow G \ es \ finito$$

Ejercicio 3

Sea H un subgrupo normal de un grupo finito G. Demostrar que existe una serie de composición de G uno de cuyos términos es H.

Solución

Ejercicio 4

Se define la longitud de un grupo finito G, denotada $l(G)$, como la longitud de cualquiera de sus series de composición. Demostrar que si H es un subgrupo normal de G entonces

$$l(G) = l(H) + l\left({}^{G}/_{H}\right)$$

Solución

Ejercicio 5

Encontrar todas las series de composición, calcular la longitud y la lista de factores de composición de los siguientes grupos:

a.- D_4 b.- A_4 c.- S_4 d.- D_5 e.- Q_2 f.- C_{24} g.- S_5

Solución

a.- $D_4 = \langle r, s / \, s^2 = 1 \;\; r^4 = 1 \;\; sr = r^{-1}s \rangle \quad |D_4| = 8 \;\; \langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3\} \;\; \langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$

$$D_4 \rhd \langle r \rangle \rhd \langle r^2 \rangle \rhd 1 \quad {}^{D_4}\!/_{\langle r \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r \rangle}\!/_{\langle r^2 \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r^2 \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

$$D_4 \rhd \langle r^2, s \rangle \rhd \langle r^2 \rangle \rhd 1 \quad {}^{D_4}\!/_{\langle r \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r^2, s \rangle}\!/_{\langle r^2 \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r^2 \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

$$D_4 \rhd \langle r^2, s \rangle \rhd \langle s \rangle \rhd 1 \quad {}^{D_4}\!/_{\langle r \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r^2, s \rangle}\!/_{\langle s \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle s \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

Y así sucesivamente, viendo el retículo de subgrupos. La longitud es 3 y los factores de composición son C_2, C_2 y C_2.

b.- A_4, $|A_4| = 12$

$$A_4 \rhd V \rhd \langle (1 \;\; 2)(3 \;\; 4) \rangle \rhd 1$$

$${}^{A_4}\!/_{V} \cong C_3 \quad {}^{V}\!/_{\langle (1 \;\; 2)(3 \;\; 4) \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle (1 \;\; 2)(3 \;\; 4) \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

$$A_4 \rhd V \rhd \langle (1 \;\; 3)(2 \;\; 4) \rangle \rhd 1$$

$${}^{A_4}\!/_{V} \cong C_3 \quad {}^{V}\!/_{\langle (1 \;\; 3)(2 \;\; 4) \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle (1 \;\; 3)(2 \;\; 4) \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

$$A_4 \rhd V \rhd \langle (1 \;\; 4)(2 \;\; 3) \rangle \rhd 1$$

$${}^{A_4}\!/_{V} \cong C_3 \quad {}^{V}\!/_{\langle (1 \;\; 4)(2 \;\; 3) \rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle (1 \;\; 4)(2 \;\; 3) \rangle}\!/_{1} \cong C_2$$

La longitud es 3 y los factores de composición son C_2, C_2, C_3.

c.- S_4

$$S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(1 \quad 2)(3 \quad 4)\rangle \rhd 1$$

$$S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(1 \quad 3)(2 \quad 4)\rangle \rhd 1$$

$$S_4 \rhd A_4 \rhd V \rhd \langle(1 \quad 4)(2 \quad 3)\rangle \rhd 1$$

La longitud es 4 y los factores de composición son C_2, C_2, C_2, C_3.

d.- $D_5 = \langle r, s/\, s^2 = 1 \quad r^5 = 1 \quad sr = r^{-1}s\rangle \quad |D_5| = 10 \;\; \langle r\rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$$D_5 \rhd \langle r\rangle \rhd 1 \qquad {}^{D_5}/_{\langle r\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle r\rangle}/_{1} \cong C_5$$

La longitud es 2 y los factores de composición son C_2, C_5.

e.- $Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} \quad |Q_2| = 8$

$$Q_2 \rhd \langle i\rangle \rhd \langle -1\rangle \rhd 1 \qquad {}^{Q_2}/_{\langle i\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle i\rangle}/_{\langle -1\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle -1\rangle}/_{1} \cong C_2$$

$$Q_2 \rhd \langle j\rangle \rhd \langle -1\rangle \rhd 1 \qquad {}^{Q_2}/_{\langle j\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle j\rangle}/_{\langle -1\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle -1\rangle}/_{1} \cong C_2$$

$$Q_2 \rhd \langle k\rangle \rhd \langle -1\rangle \rhd 1 \qquad {}^{Q_2}/_{\langle k\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle k\rangle}/_{\langle -1\rangle} \cong C_2 \quad {}^{\langle -1\rangle}/_{1} \cong C_2$$

La longitud es 3 y los factores de composición son C_2, C_2, C_2.

f.- $C_{24} = \langle a/\, a^{24} = 1\, \rangle \, |C_{24}| = 24 = 2^3x3$

$$C_{24} \rhd C_8 \rhd C_4 \rhd C_2 \rhd 1 \quad {}^{C_{24}}/_{C_8} \cong C_3 \quad {}^{C_8}/_{C_4} \cong C_2 \; {}^{C_4}/_{C_2} \cong C_2 \quad {}^{C_2}/_{1} \cong C_2$$

$$C_{24} \rhd C_{12} \rhd C_6 \rhd C_2 \rhd 1 \quad {}^{C_{24}}/_{C_{12}} \cong C_2 \quad {}^{C_{12}}/_{C_6} \cong C_2 \; {}^{C_6}/_{C_2} \cong C_3 \quad {}^{C_2}/_{1} \cong C_2$$

$$C_{24} \rhd C_{12} \rhd C_6 \rhd C_3 \rhd 1 \quad {}^{C_{24}}/_{C_{12}} \cong C_2 \quad {}^{C_{12}}/_{C_6} \cong C_2 \; {}^{C_6}/_{C_2} \cong C_2 \quad {}^{C_2}/_{1} \cong C_3$$

$$C_{24} \rhd C_{12} \rhd C_4 \rhd C_2 \rhd 1 \quad {}^{C_{24}}/_{C_{12}} \cong C_2 \quad {}^{C_{12}}/_{C_4} \cong C_3 \; {}^{C_4}/_{C_2} \cong C_2 \quad {}^{C_2}/_{1} \cong C_2$$

La longitud es 4 y los factores de composición son C_2, C_2, C_2, C_3.

g.- S_5

$$S_5 \rhd A_5 \rhd 1 \qquad {}^{S_5}/_{A_5} \cong C_2\; simple \quad {}^{A_5}/_{1} \cong A_5\; simple$$

La longitud es 2 y los factores de composición son C_2, A_5.

Ejercicio 6

Sea G un grupo finito y $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$ una serie normal de G. Demostrar que:

$$l(G) = \sum_{i=0}^{r-1} l\left({}^{G_i}/_{G_{i+1}}\right) \qquad fact(G) = \bigcup_{i=0}^{r-1} fact\left({}^{G_i}/_{G_{i+1}}\right)$$

Solución

Ejercicio 7

Si $G_1, G_2, \dots, G_r$ son grupos finitos, demostrar que

$$l(G_1 x G_2 x \dots x G_r) = \sum_{i=1}^{r} l(G_i) \quad fact(G_1 x G_2 x \dots x G_r) = \bigcup_{i=1}^{r} fact(G_i)$$

Solución

Ejercicio 8

Demostrar que $\boldsymbol{Q_2}$, $\boldsymbol{D_4}$, $\boldsymbol{D_5}$, $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$ y $\boldsymbol{S_4}$ son grupos resolubles.

Solución

Se va a utilizar el siguiente resultado:

"Si $N \lhd G$ y N y G/N son resolubles, entonces G es resoluble".

En Q_2, como $Q_2 \rhd \{1,-1\}$, $|\{1,-1\}| = 2$, $\{1,-1\} \cong C_2\ abeliano \Longrightarrow \{1,-1\}\ es\ resoluble$

$$\left|Q_2/_{\{1,-1\}}\right| = 4 \Longrightarrow Q_2/_{\{1,-1\}} \cong C_4 \text{ ó } C_2 x C_2\ abelianos \Longrightarrow Q_2/_{\{1,-1\}}\ es\ resoluble$$

Es decir, Q_2 es resoluble.

Ejercicio 9

Sean H y K subgrupos normales de un grupo G tales que $G/_{H}$ y $G/_{K}$ son ambos resolubles. Demostrar que $G/_{(H \cap K)}$ también es resoluble.

Solución

Ejercicio 10

Sea G un grupo resoluble y sea H un subgrupo normal no trivial de G. Demostrar que existe un subgrupo no trivial de H que es abeliano y normal en G.

Solución

Teorema

$$\{1\} \lhd \langle r\rangle \lhd D_n \; es\ longitud\ es\ 2 \Leftrightarrow n\ es\ primo$$

Ejercicio 11

Da una serie de composición de D_9 calcula su longitud y sus factores de composición.

Solución

$$\{1\} \lhd \langle r^3\rangle \lhd \langle r\rangle \lhd D_9 \;\; longitud\ es\ 3$$

$\langle r\rangle \lhd D_9$ ya que $[D_9 : \langle r\rangle] = 2$, y además:

$$\left| {}^{D_9}/_{\langle r\rangle} \right| = 2 \Longrightarrow {}^{D_9}/_{\langle r^3\rangle} \cong C_2 \; que\ es\ ciclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

$$\left| {}^{\langle r\rangle}/_{\langle r^3\rangle} \right| = 3 \Longrightarrow {}^{\langle r\rangle}/_{\langle r^3\rangle} \cong C_3 \; que\ es\ ciclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

$$\left| {}^{\langle r^3\rangle}/_{\{1\}} \right| = 3 \Longrightarrow {}^{\langle r^3\rangle}/_{\{1\}} \cong C_3 \; que\ es\ cíclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

Ejercicio 12

Da una serie de composición de D_8 calcula su longitud y sus factores de composición.

Solución

$$\{1\} \lhd \langle r^4\rangle \lhd \langle r^2\rangle \lhd \langle r\rangle \lhd D_8 \; y\ longitud\ 4$$

$\langle r\rangle \lhd D_8$ ya que $[D_8 : \langle r\rangle] = 2$, y además:

$${}^{D_8}/_{\langle r\rangle} \cong C_2 \; que\ es\ cíclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

$$\left| {}^{\langle r\rangle}/_{\langle r^2\rangle} \right| = 2 \Longrightarrow {}^{\langle r\rangle}/_{\langle r^2\rangle} \cong C_2 \; que\ es\ cíclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

$$\left| {}^{\langle r^2\rangle}/_{\langle r^4\rangle} \right| = 2 \Longrightarrow {}^{\langle r^2\rangle}/_{\langle r^4\rangle} \cong C_2 \; que\ es\ cíclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

$$\left| {}^{\langle r^4\rangle}/_{\{1\}} \right| = 2 \Longrightarrow {}^{\langle r^4\rangle}/_{\{1\}} \cong \; C_2 \;\; que\ es\ cíclico\ y\ por\ lo\ tanto\ abeliano$$

Ejercicio 13

Da una serie de composición de D_{10} calcula su longitud y sus factores de composición.

Solución

$$\{1\} \lhd \langle r^2 \rangle \lhd \langle r \rangle \lhd D_{10} \; y \; longitud \; 3$$

$\langle r \rangle \lhd D_{10}$ ya que $[D_{10}\colon \langle r \rangle] = 2$, y además:

$$ {}^{D_{10}}\!/_{\langle r \rangle} \cong C_2 \qquad \left| {}^{\langle r \rangle}\!/_{\langle r^2 \rangle} \right| = 2 \Longrightarrow {}^{\langle r \rangle}\!/_{\langle r^2 \rangle} \cong C_2 \qquad \left| {}^{\langle r^2 \rangle}\!/_{\{1\}} \right| = 5 \Longrightarrow {}^{\langle r^2 \rangle}\!/_{\{1\}} \cong C_5 $$