Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Prueba intermedia de Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Ejercicio 1. (**3 puntos**) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos convergente a $w\in\mathbb{C}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos la función $f_n\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{a_n\})$ por $f_n(z)=\dfrac{1}{z-a_n}$. Dado el conjunto compacto $K=\{a_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{w\}$, probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{f_n(z)}{n^2}$ converge absolutamente en todo punto del dominio $\Omega=\mathbb{C}\setminus K$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en Ω.

Ejercicio 2. (**3 puntos**) Estudiar la derivabilidad de las funciones $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dadas por

$$f(z)=\operatorname{sen}(\bar{z})\qquad g(z)=z(z-1)f(z)\qquad (z\in\mathbb{C}).$$

Ejercicio 3. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto verificando $\overline{D}(0,1)\subset\Omega$ y sea $f\in\mathcal{H}(\Omega)$.

a) (**1 punto**) Justificar que para cada $z_0\in D(0,1)$ se tiene

$$|f(z_0)|\leqslant \text{máx}\{|f(z)|: z\in C(0,1)^*\}.$$

b) (**1.5 puntos**) Demostrar que

$$\text{máx}\{|f(z)|: z\in\overline{D}(0,1)\}=\text{máx}\{|f(z)|: z\in C(0,1)^*\}.$$

c) (**1.5 puntos**) Supongamos que existe $z_0\in D(0,1)$ tal que $|f(z_0)|=\text{máx}\{|f(z)|: z\in\overline{D}(0,1)\}$. Dado $r>0$ con $\overline{D}(z_0,r)\subset D(0,1)$, probar que existe $\lambda\in\mathbb{C}$ de modo que $f_{|\overline{D}(z_0,r)}\equiv\lambda$. (**Extra: 1 punto**) Probar que, de hecho, $f_{|\overline{D}(0,1)}\equiv\lambda$.

Granada, 10 de mayo de 2021