Normas para la realización del examen: **Duración: 2.5 horas**

- **El Ejercicio 7 es opcional y sirve como nota complementaria (sólo suma). Tiene una dificultad mayor y no es recomendable hacerlo sin haber terminado antes las otras preguntas.**
- **Para la evaluación única global hay que entregar dos ejercicios adicionales de problemas y se dispone de 1 hora adicional.**

◁ Ejercicio 1 ▷ Problema [2.5 puntos]

Decir cuales de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ son regulares y/o independientes del contexto. Justificar las respuestas.

1. $L_1 = \{a^k b^m c^n \ : \ (k = n \text{ ó } m = n) \text{ y } k + m + n \geq 2\}$
2. $L_2 = \{a^k b^m c^n \ : \ (k = n \text{ ó } m = n) \text{ y } k + m + n \leq 2\}$
3. $L_3 = \{a^k b^m c^n \ : \ k + m + n \geq 2\}$

◁ Ejercicio 2 ▷ Problema [2.5 puntos]

Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$, procurando que sean deterministas cuando sea posible

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k \ : \ i \neq j, \text{ ó } j \neq k\}$
2. L_2: conjunto de palabras u tales que en todo prefijo de u el número de a's más el número de b's es menor o igual al doble del número de c's.

◁ Ejercicio 3 ▷ Ejercicio [1.25 puntos]

Decir si las siguientes afirmaciones sobre expresiones regulares son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. $(\mathbf{rr} + \epsilon)^*(\mathbf{r} + \epsilon) = \mathbf{r}^*$
2. $(\mathbf{r_1r_1} + \mathbf{r_1r_2} + \mathbf{r_2r_1} + \mathbf{r_2r_2})^* = (\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2})^*(\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2})$

◁ Ejercicio 4 ▷ Ejercicio [1.25 puntos]

Pon ejemplos de lenguajes que cumplan la siguientes condiciones:

- Un lenguaje independiente del contexto y no regular L y un homomorfismo f, tal que $f(L)$ es regular.
- Un lenguaje independiente del contexto y no regular tal que su complementario es independiante del contexto.
- Un lenguaje independiante del contexto L y otro regular R, tal que $R \cap L$ no es independiante del contexto.

◁ Ejercicio 5 ▷ Teoría [1.25 puntos]

Describe la función ELIMINA$_2(A)$ en el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach.

◁ Ejercicio 6 ▷ Cuestión Teoría [1.25 puntos]

Describe el paso de 'Terminación' en el algoritmo de Early

◁ Ejercicio 7 ▷ Problema [1 punto]

Dado un autómata finito determinista M que acepta el lenguaje L, determinar cómo se construiría una autómata finito (puede ser no determinista) que acepta el lenguaje:

$$Ciclo(L) = \{vu \ : \ uv \in L\}$$

¿Es cierto que si $Ciclo(L)$ es regular, entonces L es siempre regular?

◁ **Ejercicio 1** ▷ **Problema** **[2.5 puntos]**

Decir cuales de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ son regulares y/o independientes del contexto. Justificar las respuestas.

1. $L_1 = \{a^k b^m c^n : (k = n \text{ ó } m = n) \text{ y } k + m + n \geq 2\}$
2. $L_2 = \{a^k b^m c^n : (k = n \text{ ó } m = n) \text{ y } k + m + n \leq 2\}$
3. $L_3 = \{a^k b^m c^n : k + m + n \geq 2\}$

1)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $p = a^n c^n \in L$ Considero descomposición

$$p = uvw \begin{cases} u = a^k & \ell \geq 1 \\ v = a^\ell & k+\ell \leq n \\ w = a^{n-k-\ell} c^n \end{cases}$$

Tomando $i=2$, $uv^iw = a^{n+\ell} c^n \notin L$, pues $\ell = 1$ y estamos en caso $k=n$. $\Rightarrow$ es IC no regular.

2) El lenguaje es finito por tanto regular.

3)

$S \to aA \mid bB \mid cC$

$A \to aX$ $\quad B \to bY$ $\quad C \to cZ$

$X \to aX \mid bY \mid cZ \mid \varepsilon$ $\quad Y \to bY \mid cZ \mid \varepsilon$ $\quad Z \to cZ \mid \varepsilon$

Por tanto, vemos que es regular.

◁ **Ejercicio 2** ▷ **Problema** **[2.5 puntos]**

Construir autómatas con pila que acepten los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$, procurando que sean deterministas cuando sea posible

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \neq j,\ \text{ó } j \neq k\}$
2. L_2: conjunto de palabras u tales que en todo prefijo de u el número de a's más el número de b's es menor o igual al doble del número de c's.

1) Crit. Pila vacía.

$i \neq j$:

- $i > j$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, XZ_0), (q_3, XZ_0), (q_5, Z_0)\}$

$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_2, c, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$

- $i < j$

$\delta(q_3, a, X) = \{(q_3, XX)\}$

$\delta(q_3, b, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$

$\delta(q_3, b, Z_0) = \{(q_3, Z_0), (q_4, Z_0)\}$

$\delta(q_4, c, Z_0) = \{(q_4, Z_0)\}$

$\delta(q_4, \varepsilon, Z_0) = \{(q_4, \varepsilon)\}$

$j \neq k$: análogo pero metemos todas las a's que queramos al principio.

$\delta(q_5, a, Z_0) = \{(q_5, Z_0), (q_6, Z_0),$

2)

$M = (Q = \{q_0, q_1\}, A = \{a, b, c\}, B = \{X, Y, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, F = \{q_1\})$

$\delta(q_0, c, Z_0) = \{(q_1, XXZ_0)\}$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, YZ_0)\}$

$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, YZ_0)\}$

$\delta(q_0, c, Y) = \{(q_0, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, a, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, c, X) = \{(q_1, XXX)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$

No está bien del todo

◁ **Ejercicio 3** ▷ **Ejercicio** **[1.25 puntos]**

Decir si las siguientes afirmaciones sobre expresiones regulares son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. $(\mathbf{rr}+\epsilon)^*(\mathbf{r}+\epsilon)=\mathbf{r}^*$
2. $(\mathbf{r_1r_1}+\mathbf{r_1r_2}+\mathbf{r_2r_1}+\mathbf{r_2r_2})^*=(\mathbf{r_1}+\mathbf{r_2})^*(\mathbf{r_1}+\mathbf{r_2})$

1)

$(rr+\varepsilon)^*(r+\varepsilon) = (rr)^*(r+\varepsilon) = (rr)^* + (rr^*)r = r^*$, pues permite generar las concatenaciones de r pares y las impares.

2)

Falso, ε no puede ser generada por la 2º expresión, si r_1 y r_2 representan lenguajes $\mid \varepsilon \notin L_{r_1}, L_{r_2}$

◁ **Ejercicio 4** ▷ **Ejercicio** **[1.25 puntos]**

Pon ejemplos de lenguajes que cumplan la siguientes condiciones:

- Un lenguaje independiente del contexto y no regular L y un homomorfismo f, tal que $f(L)$ es regular.
- Un lenguaje independiente del contexto y no regular tal que su complementario es independiante del contexto.
- Un lenguaje independiante del contexto L y otro regular R, tal que $R\cap L$ no es independiante del contexto.

A)

Sean $L=\{a^ib^i \mid i\geq 0\}$ y $f:\{a,b\}^*\to\{0,1\}^*$ / $f(a)=1$, $f(b)=1$ un homomorfismo.

$f(L)=\{1^{2i} \mid i\geq 0\} \in \mathcal{L}_3$

B)

Basta tomar uno que sea determinista, pues sabemos que si L es I.C.D., $\bar{L}$ también.

$L=\{wcw^{-1} \mid w\in\{0,1\}^*\}$, que sabemos que es IC determinista.

C)

No es posible, pues si R regular y L IC $\Rightarrow L\cap R \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow$ $L\cap R$ siempre es IC.

◁ **Ejercicio 5** ▷ **Teoría** **[1.25 puntos]**

Describe la función ELIMINA$_2(A)$ en el algoritmo para pasar una gramática a forma normal de Greibach.

Sirve para eliminar producciones de la forma $A \to A\alpha$, $A_k \in V$, $\alpha \in V^*$

y así evitar ciclos en el proceso.

Elimina$_2$(A) {

1) Añadir B_A

2) $\forall A \to A\alpha$

3) Añadir $B_A \to \alpha$, $B_A \to \alpha B_A$

4) Eliminar $A \to A\alpha$

5) $\forall A \to \beta$ / β no empieza por A

6) Añadir $A \to \beta B_A$

}