Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I
4 de Julio de 2018.

NOMBRE:

1. Se considera la ecuación integral

$$u(x) = 1 + \lambda u(x) \int_x^1 u(s)ds$$

con $\lambda > 0$, donde la incógnita $u : I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en algún intervalo abierto I con $1 \in I$.

1.1. Demuestra que una posible solución no puede tener ceros.

1.2. Encuentra una ecuación diferencial asociada (con condición inicial) equivalente.

1.3 Demuestra que la ecuación integral tiene una solución, dando el intervalo maximal de definición.

2. Calcula la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x = y - 1 + Ce^{-y},$$

con $C \in \mathbb{R}$. Dibuja la gráfica de la familia de curvas obtenidas.

3. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, y $\Psi(t)$ matriz fundamental de $x' = -A(t)^T x$, donde $A(t)^T$ es la matriz transpuesta de $A(t)$.

3.1. Demuestra que la función matricial $\Psi(t)^T \Phi(t)$ es constante.

3.2. Demuestra que el cambio $y = \Psi(t)^T x$ lleva el sistema $x' = A(t)x$ a $y' = 0$.

4. Se considera la ecuación

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = \operatorname{sen}(\omega t).$$

4.1. Describe el circuito eléctrico modelado por esta ecuación.

4.2. Calcula la solución general cuando $L = 0$.

4.3. Calcula la solución general cuando $CR^2 > 4L > 0$.

5. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ se define la matriz

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}.$$

5.1. Demuestra que la serie matricial anterior es convergente.

5.2. Calcula $\cos(A)$ si A es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. Se considera la ecuación integral

$$u(x) = 1 + \lambda u(x) \int_x^1 u(s)ds$$

con $\lambda > 0$, donde la incógnita $u : I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en algún intervalo abierto I con $1 \in I$.

1.1. Demuestra que una posible solución no puede tener ceros.

1.2. Encuentra una ecuación diferencial asociada (con condición inicial) equivalente.

1.3 Demuestra que la ecuación integral tiene una solución, dando el intervalo maximal de definición.

1.1)

Supongamos que $\exists x_* \in I \,/\, u(x_*) = 0$, pero

$u(x_*) = 1 + \lambda u(x_*) \int_{x_*}^1 u(s)ds = 1$ ABSURDO!!!

Por tanto, u no tiene ceros

1.2)

Vemos $1 - \frac{1}{u} = -\lambda \int_1^x u(s)\,ds$

Como u cont., por T.F.C.,

$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\lambda u(x) \Rightarrow u'(x) = -\lambda u(x)^3$

Imponemos condición inicial $u(1) = 1$, pues todas las sol. la cumplen.

1.3)

$u'(x) = -\lambda u(x)^3$ es una ecuación de variables separadas.

Sol ctes: $-\lambda u(x)^3 = 0 \Rightarrow u(x) = 0$ No, pues u no se anula.

$\int \frac{1}{u^3} du = \int -\lambda dx \Rightarrow \frac{u^{-2}}{2} = -\lambda x + C \Rightarrow u^{-2} = -2\lambda x + K \Rightarrow$

$C \in \mathbb{R}$ $\quad K \in \mathbb{R}$

$u(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda x + K}}$ $\qquad u(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-2\lambda + K}} = 1 \Rightarrow K = 1 + 2\lambda$

$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda(1-x) + 1}}$ $\qquad \forall x \in \left]\frac{1+2\lambda}{2\lambda}, +\infty\right[\cap I$

$-2\lambda x + 1 + 2\lambda > 0 \Rightarrow \frac{1+2\lambda}{2\lambda} > x$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda(1-x)+1}} = 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda(1-x)+1}} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{2\lambda(1-s)+1}}\, ds =$$

$$1 + \frac{\cancel{\lambda}}{\sqrt{2\lambda(1-x)+1}} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{\lambda}}\right)\left[1 - \sqrt{2\lambda(1-x)+1}\right] = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\lambda(1-x)+1}}$$

No se donde falta signo ⊖

$$\int \frac{1}{\sqrt{-2\lambda s+1+2\lambda}}\, ds = \left[\begin{array}{l} -2\lambda s+1+2\lambda = t^2 \\ -2\lambda\, ds = 2t\, dt \end{array}\right] = -\frac{1}{\lambda}\int \frac{t}{\sqrt{t^2}}\, dt = -\frac{t}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\sqrt{2\lambda(1-s)+1}$$

2. Calcula la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x = y - 1 + Ce^{-y},$$

con $C \in \mathbb{R}$. Dibuja la gráfica de la familia de curvas obtenidas.

Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid \Phi(x,y,C) = x - y - 1 - Ce^{-y} = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= y - 1 + Ce^{-y} \\ 1 &= y' - Ce^{-y} y' \end{aligned}\right\} \; C = \frac{y'-1}{e^{-y} y'}$$

$$x = y - 1 + \frac{y'-1}{\cancel{e^{-y}} y'} \cdot \cancel{e^{-y}} \Rightarrow x = y \cancel{-1} \cancel{+1} - \frac{1}{y'}$$

$$\frac{1}{y'} = y - x \Rightarrow y' = \frac{1}{y-x}$$

una ec. diferencial para $\Phi^\perp$ será

$$y' = x - y \Rightarrow y' + y - x = 0$$

Sabemos que las funciones cont. admiten un factor integrante de la forma $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid \mu(x,y) = f(x)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sea $P(x,y) = -x + y \qquad Q(x,y) = 1$

$$\mu \text{ f.i.} \Rightarrow \begin{cases} \mu(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \end{cases} \iff \cancel{\mu_y}^{\to 0} P + \mu P_y = \mu_x Q + \cancel{\mu Q_x}^{\to 0}$$

$$\iff f(x) = f'(x) \Rightarrow \mu(x,y) = f(x) = ce^x \quad c \in \mathbb{R}$$

Tomando $c = 1$,

$$\frac{d}{dx}\left[y' e^x + y e^x - x e^x\right] = 0 \Rightarrow y e^x - e^x(x-1) = C \Rightarrow$$

$$y(x) = \frac{C}{e^x} + x - 1$$

3. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$, y $\Psi(t)$ matriz fundamental de $x' = -A(t)^T x$, donde $A(t)^T$ es la matriz transpuesta de $A(t)$.

3.1. Demuestra que la función matricial $\Psi(t)^T\Phi(t)$ es constante.

3.2. Demuestra que el cambio $y = \Psi(t)^T x$ lleva el sistema $x' = A(t)x$ a $y' = 0$.

3.1)

Si Φ, ψ mf $\Rightarrow \Phi, \psi \in C^1(I)$, $\det(\Phi), \det(\psi) \neq 0$ y $\Phi' = A(t)\Phi$, $\psi' = -A(t)^T\psi$

Veamos $(\psi^T\Phi)' = 0$

$$(\psi^T\Phi)' = (\psi^T)'\Phi + \psi^T\Phi' = (\psi')^T\Phi + \psi^T\Phi' = -\psi^T A(t)\Phi + \psi^T A(t)\Phi = 0$$

3.2)

$$\frac{dy}{dt} = (\psi^T)'x + \psi^T x' = (\psi')^T x + \psi^T x' = \psi^T A(t)x + \psi^T A(t)x = 0$$

$\Longleftrightarrow y' = 0$

5. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ se define la matriz

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}.$$

5.1. Demuestra que la serie matricial anterior es convergente.

5.2. Calcula $\cos(A)$ si A es la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.1)

Usamos el siguiente Lema:

Sea $\{M_n\}$ una suc de matrices en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ / $\sum \|M_n\|$ converge $\Rightarrow$ $\sum M_n$ converge.

Sea $M_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$

$$\|M_n\| = \frac{1}{(2n)!} \|A^{2n}\| \leq \frac{1}{(2n)!} \|A\|^{2n} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por Crit Cociente, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\|A\|^{2(n+1)} / (2(n+1))!}{\|A\|^{2n} / (2n)!} = \frac{\|A\|^2}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{(2n)!} \|A\|^{2n}$ converge $\Rightarrow$

$\sum \|M_n\|$ converge por Crit. comparación $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$ converge

5.2)

Vemos que A es nilpotente de orden 3 $\Rightarrow A^n = 0 \ \forall n \geq 3$

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} = I - \frac{1}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$