Apellidos			Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	Grupo	

Métodos Numéricos II. Curso 2022/23.

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

7 de junio de 2023

1 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considera la fórmula:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12}f(a+h) + \frac{2h}{3}f(a) - \frac{h}{12}f(a-h) + R(f)$$

a) Demuestra que es de tipo interpolatorio y determina el grado de exactitud.

b) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

c) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula.

[3 puntos]

2 Dado el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu, \end{cases} \tag{1}$$

utiliza la fórmula del ejercicio anterior para construir razonadamente un método lineal multipaso de la forma

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

y contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Es el método convergente?

b) ¿Cuál es el orden de convergencia local del método?

c) Si queremos utilizar el método de Euler como predictor y este método como corrector para resolver el problema, ¿cuál es el número óptimo de correcciones que se deberían aplicar?

d) Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

Para ello, tomando $h = 1/3$, utiliza el método de Euler para la primera iteración. A continuación utiliza un método predictor-corrector donde el predictor es el método de Euler y el corrector es el método anterior con una única corrección en cada paso.

[4 puntos]

3 Para resolver el PVI (1) se propone el método:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, x_n)$$

Estudia su A-estabilidad.

[1 punto]

(Continúa detrás)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Se pretende aproximar la integral

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) + R(f) \tag{2}$$

donde $S_n(f)$ es una fórmula de integración compuesta obtenida al hacer una partición uniforme del intervalo $[a,b]$ de la forma:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad x_i = x_{i-1} + h, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

y $R(f)$ es el error de integración numérica que tiene el siguiente desarrollo:

$$R(f) = a_1 h^3 + a_2 h^6 + \cdots + a_m h^{3m} + \ldots$$

Siguiendo el mismo argumento de la integración de Romberg, combina $S_n(f)$ con $S_{3n}(f)$ para obtener una aproximación más precisa para la integral. Aplica recursivamente el método.

[2 puntos]

1 A veces, para construir fórmulas de integración numérica es posible utilizar nodos que se encuentran fuera del intervalo de integración. Considera la fórmula:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{5h}{12}f(a+h) + \frac{2h}{3}f(a) - \frac{h}{12}f(a-h) + R(f)$$

a) Demuestra que es de tipo interpolatorio y determina el grado de exactitud.

Fórmula $L(f) \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(f)$ de tipo interpolatorio $\Leftrightarrow \exists p \in Dom(L) \mid L(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(f)$

Sea $x_0 = a-h$, $x_1 = a$, $x_2 = a+h$

Construyendo polinomios de Lagrange,

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{3} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$\ell_0(x) = \frac{(x-a)(x-a-h)}{(a-h-a)(a-h-a-h)} = \frac{x^2-ax-hx-ax+a^2+ah}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}(x^2-x(2a+h)+a(a+h))$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-a+h)(x-a-h)}{(a-a+h)(a-a-h)} = \frac{x^2-ax-\cancel{hx}-ax+a^2+\cancel{ah}+\cancel{hx}-\cancel{ah}-h^2}{-h^2} = \frac{1}{h^2}(-x^2+2ax-a^2+h^2)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-a+h)(x-a)}{(a+h-a+h)(a+h-a)} = \frac{x^2-ax-ax+a^2+hx-ah}{2h^2} = \frac{1}{2h^2}(x^2+x(h-2a)+a(a-h))$$

$$\alpha_0 = \int_a^{a+h} \ell_0(x) = \frac{-h}{12} \qquad \alpha_1 = \int_a \ell_1(x)\,dx = \frac{2h}{3} \qquad \alpha_2 = \int_a^{a+h} \ell_2(x)dx = \frac{5h}{12}$$

Tomando $L_i(f) = f(x_i)$ $i=0,1,2$, vemos que la fórmula es de tipo interpolatorio clásico.

Para hallar grado de exactitud hallamos error.

Sea $\Pi(x) = (x-a+h)(x-a)(x-a-h)$, que vemos que no cambia de signo en $I=[a,a+h]$

$$R(f) = \int_a^{a+h} f[x_0,x_1,x_2,x]\,\Pi(x)\,dx = f[x_0,x_1,x_2,\mu]\int_a^{a+h}\Pi(x)dx = \frac{f'''(\xi)}{3!}\int_a^{a+h}\Pi(x)dx$$

Por tanto, vemos que la fórmula tiene grado 2 de exactitud.

b) Proporciona una expresión para el error de integración numérica asociado a la fórmula.

Calculado en el apartado anterior.

c) Deduce la fórmula compuesta asociada a dicha fórmula.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dado el PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \mu, \end{cases} \tag{1}$$

utiliza la fórmula del ejercicio anterior para construir razonadamente un método lineal multipaso de la forma

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n) \quad (2)$$

y contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Es el método convergente?

(2) convergente $\Longleftrightarrow$ consistente y estable.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \sum_{i=0}^{1} \alpha_i \lambda^i = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1 \Rightarrow (2) \text{ estable}$$

$$q(\lambda) = \sum_{i=0}^{2} \beta_i \lambda^i = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2$$

(2) consistente $\Longleftrightarrow$ $p'(1) = q(1) \wedge p(1) = 0$

$p(1) = 0$

$p'(\lambda) = 2\lambda - 1 \Rightarrow p'(1) = 1 = \beta_2 + \beta_1 + \beta_0 = q(1)$

Por tanto, (2) será convergente $\Longleftrightarrow$ $\beta_2 + \beta_1 + \beta_0 = 1$

b) ¿Cuál es el orden de convergencia local del método?

$$C_0 = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} \alpha_j = 0$$

$$C_1 = K - \sum_{j=1}^{K-1} j\alpha_j - \sum_{j=0}^{K} \beta_j = 2 - 1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 1 - \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{K^2}{2!} - \sum_{j=1}^{K-1} \frac{j^2}{2!} \alpha_j - \sum_{j=1}^{K} \frac{j^{2-1}}{(2-1)!} \beta_j = 2 - \frac{1}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 = \frac{3}{2} - \beta_1 - 2\beta_2 =$$

$$\frac{1}{2} + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 - \beta_1 - 2\beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_0 - \beta_2$$

c) Si queremos utilizar el método de Euler como predictor y este método como corrector para resolver el problema, ¿cuál es el número óptimo de correcciones que se deberían aplicar?

Sabemos que el método de Euler tiene orden $1 = p^*$. Si p es el orden de nuestro corrector, el nº óptimo de correcciones m debe verificar $p^* + m = p \Rightarrow m = p - 1$

d) Se pretende aproximar $x(1)$ donde $x(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

Para ello, tomando $h = 1/3$, utiliza el método de Euler para la primera iteración. A continuación utiliza un método predictor-corrector donde el predictor es el método de Euler y el corrector es el método anterior con una única corrección en cada paso.

Sea $f(t,x) = 3x - 2$

Euler:

$h = \frac{1}{3}$, $t_0 = 0$, $x_0 = x(t_0) = 1$, $t_{n+1} = t_n + h$

$x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) = x_n + h(3x_n - 2) = (3h+1)x_n - 2h$

$x_1 = \left(3 \cdot \frac{1}{3} + 1\right) \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Predictor: $x_{n+2}^{(0)} = x_{n+1} + h f(t_{n+1}, x_{n+1})$ (Euler)

Corrector: $x_{n+2}^{(1)} = x_{n+1} + \frac{1}{3}\left(\beta_2 f(t_{n+2}, x_{n+2}^{(0)}) + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right) =$

Vemos que $1 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} = t_0 + 3h = t_3$

Debemos calcular $x_3^{(1)}$, a partir de x_2 y $x_3^{(0)}$.

$\boxed{3}$ Para resolver el PVI (1) se propone el método:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2}hf(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}hf(t_n, x_n) \quad (3)$$

Estudia su A-estabilidad.

(3) A-estable $\Longleftrightarrow$ al aplicarlo a $x' = \lambda x = f(t,x)$, $Re(\lambda) < 0$ $\quad x(0) = \mu$,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \forall h > 0$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{3}{2} h \lambda x_{n+1} - \frac{1}{2} h \lambda x_n \Longleftrightarrow x_{n+1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} h\lambda\right)}{1 - \frac{3}{2} h\lambda} x_n$$

Sea $w = \lambda h$

$$x_{n+1} = \frac{2-w}{2-3w} x_n = \left(\frac{2-w}{2-3w}\right)^{n+1} x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{2-w}{2-3w}\right| < 1 \Longleftrightarrow |2-w| < |2-3w| \overset{*}{\Longleftrightarrow}$$

Sea $w = a + bi$

$$|2-w| = |2-a-bi| = \sqrt{4+a^2-4a+b^2} = \sqrt{a^2-4a+4+b^2}$$
$$|2-3w| = |2-3a-3bi| = \sqrt{4+9a^2-12a+9b^2} = \sqrt{9a^2-12a+4+9b^2}$$

$$\overset{*}{\Longleftrightarrow} a^2-4a+\cancel{4}+b^2 < 9a^2-12a+\cancel{4}+9b^2 \Longleftrightarrow 0 < 8a^2-8a+8b^2 \checkmark, \text{ pues}$$

$$a = Re(w) = Re(\lambda h) = h\,Re(\lambda) < 0$$

Por tanto, $\forall h > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C} /\ Re(\lambda) < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow$ (3) es A-estable