Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} \colon \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\, dx.$$

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{z-t} \operatorname{sen}(t^n + z^2)\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Ejercicio 4. (**2.5 puntos**) Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verificando $g(f(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n^3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y la otra un polinomio de grado tres.

Granada, 15 de junio de 2022

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Sea $g(z) = e^{if(z)} \quad \forall z \in \Omega$

$|g(z)| = e^{Re(if(z))} = e^{-Im(f(z))}$

- Es máx rel. $\Rightarrow \exists a \in \Omega / \ Im(f(a)) \geq Im(f(z)) \ \forall z \in \Omega \Leftrightarrow$

$e^{Im(f(a))} \geq e^{Im(f(z))} \Leftrightarrow e^{-Im(f(a))} \leq e^{-Im(f(z))} \Leftrightarrow |g(a)| \leq |g(z)|$

$\Rightarrow$ Por Principio Modulo mín, g cte v $g(a) = 0$,
pero $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega \Rightarrow g$ cte $\Rightarrow f$ cte

- Es mín rel. $\Rightarrow \exists a \in \Omega / \ Im(f(a)) \leq Im(f(z)) \ \forall z \in \Omega \Leftrightarrow$

$|g(a)| \geq |g(z)| \Rightarrow$ Por Principio Modulo Máximo g cte $\Rightarrow$ f cte

Por tanto, f cte.