Ecuaciones Diferenciales I 15/16

Relación de Ejercicios 3

1 Calcula, si es posible, una función potencial para las siguientes parejas de funciones. Especifica en cada caso el dominio en el que se trabaja.

a) $P(x,y) = x + y^3$, $Q(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$

b) $P(x,y) = \frac{1}{2}\sin 2x - xy^2$, $Q(x,y) = y(1-x^2)$

c) $P(x,y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$, $Q(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones, sabiendo que admiten un factor integrante que depende de una sola de las variables x, y

a) $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

b) $2y\cos x - xy\sin x + (2x\cos x)y' = 0$

3 Ecuentra $p, q \in \mathbb{R}$ para que la ecuación

$$-y^2 + (x^2 + xy)y' = 0$$

admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^p y^q$. Usa dicho factor integrante para resolver la ecuación. Indica un método de resolución alternativo.

4 Encuentra una condición suficiente para que la ecuación $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ admita un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(xy)$. Mediante un factor integrante de este tipo, encuentra la solución general de la ecuación

$$1 + xy + y^2 + (1 + xy + x^2)y' = 0.$$

5 Dada una función $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $H = H(x,y)$, se considera el sistema Hamiltoniano asociado

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y),\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y).$$

Al tratarse de un sistema autónomo, es posible obtener la ecuación de las órbitas.

a) Demuestra que la ecuación de las órbitas se puede escribir como

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)y' = 0$$

y comprueba que se trata de una ecuación exacta.

b) Se supone que $H(x,y) = x^2 + 2y^2$. Escribe el sistema, la ecuación de las órbitas y encuentra las soluciones y las órbitas.

6 Dado un dominio Ω del plano se considera un campo vectorial $B : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $B = (B_1, B_2)$, $B = B(x,y)$. Se supone $B \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Diremos que B es un campo solenoidal si se cumple

$$\text{div } B := \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} = 0,$$

donde div es el operador divergencia.

a) Determina los valores de las constantes a, b, c, d para los que el campo $B(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ es solenoidal.

b) Demuestra que si el dominio Ω tiene forma de estrella entonces para cada campo solenoidal B existe una función $A \in C^2(\Omega)$ tal que $\frac{\partial A}{\partial x} = B_2$, $\frac{\partial A}{\partial y} = -B_1$.

7 Se considera un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x, y, z)$, de clase C^1.

a) Demuestra que existe una función $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que cumple $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ si y solo si se cumplen las condiciones de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b) Generalización a $\mathbb{R}^d$.

8 Se considera un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$, $F = F(x, y)$, de clase C^1. Se define la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T = T(x, y)$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\gamma(t) = (tx, t^2y)$, $t \in [0, 1]$.

a) Demuestra que T es una función de clase C^1.

b) Calcula las derivadas parciales de T.

c) Se define ahora $\tilde{T}$ como el trabajo realizado a lo largo del camino $\tilde{\gamma}(t) = (t^2x, ty)$, $t \in [0, 1]$. ¿Se puede asegurar que T y $\tilde{T}$ coinciden?

2 Resuelve las siguientes ecuaciones, sabiendo que admiten un factor integrante que depende de una sola de las variables x, y

a) $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

b) $2y\cos x - xy\sin x + (2x\cos x)y' = 0$

A) $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

$\mu = m(x)$
$\quad\; m(y)$

$$\underbrace{m(y)\,6xy}_{\tilde{P}} + \underbrace{m(y)\,(4y+9x^2)}_{\tilde{Q}}\, y' = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x \qquad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = 6x\,m(y) + 6xy\,m'(y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 18x \qquad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = m(y)\,18x$$

$$6m(y) + 6y\,m'(y) = 18m(y)$$

$$6y\,m'(y) = 12m(y) \Rightarrow m'(y) = \frac{2}{y}m(y)$$

$$\mu(x,y) = y^2$$

$$m(y) = e^{2\ln(y)} = y^2$$

7 Se considera un campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F = F(x, y, z)$, de clase C^1.

a) Demuestra que existe una función $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ que cumple $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$ si y solo si se cumplen las condiciones de exactitud

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \; \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \; \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

b) Generalización a $\mathbb{R}^d$.

A)

sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

$\exists U \in C^2(\mathbb{R}^3) \mid \frac{\partial U}{\partial x_k} = F_k, \; k = 1, 2, 3 \iff$ se cumple cond. exactitud $\iff$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \; \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \; \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

$\Rightarrow)$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}$$

$\Leftarrow)$

sea $\gamma(\lambda) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

$$U(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 \langle (F_1 \circ \gamma(\lambda), F_2 \circ \gamma(\lambda), F_3 \circ \gamma(\lambda)) \gamma'(\lambda) \rangle \, d\lambda =$$

$$x_1 \int_0^1 F_1(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda + x_2 \int_0^1 F_2(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda + x_3 \int_0^1 F_3(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 F_1(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda + x_1 \int_0^1 \lambda \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda +$$

$$x_2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda + x_3 \int_0^1 \lambda \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\lambda x_1, x_2, x_3) \, d\lambda \overset{\text{Hipótesis}}{=}$$