Tema 4.- Grupos cocientes. Teoremas de isomorfía.

Definición

Un subgrupo H de un grupo G se dice que H es un subgrupo *normal*, $H \lhd G$, si

$$xH = Hx \ \forall x \in G$$

Si $H \lhd G$, los grupos cocientes coinciden, entonces ${}^{G}/_{H}$ es el conjunto de clases laterales de H en G.

Proposición

Sea G un grupo y $H < G$. Son equivalentes:

$i)$ $H \lhd G$

$ii)$ $\forall x \in G \ \forall h \in H \Longrightarrow xhx^{-1} \in H$

$iii)$ $\forall x \in G \ \Longrightarrow xHx^{-1} \subset H$

$iv)$ $\forall x \in G \ \Longrightarrow xHx^{-1} = H$, es decir que H coinciden con sus conjugados.

Ejemplos

$i)$ Los subgrupos impropios de cualquier grupo son normales.

$ii)$ Todo subgrupo de un grupo abeliano es normal.

$iii)$ Todo subgrupo de índice 2 es normal, si $H < G \ y \ [G{:}H] = 2 \Longrightarrow H \lhd G$.

Definición

Para cualquier grupo G se define su *centro* como:

$$Z(G) = \{a \in G \setminus ax = xa \ \forall x \in G\}$$

Es un subgrupo normal de G, es decir, $Z(G) \lhd G$. Si G es abeliano se tiene que $Z(G) = G$. Si $n \geq 3$, entonces $Z(S_n) = 1$ y si $n \geq 4$, entonces $Z(A_n) = 1$

Lema

Sea G un grupo y $H < G$. Entonces

$$H \lhd G \Longleftrightarrow [\forall x, y \in G \setminus xy \in H \Longrightarrow yx \in H]$$

Teorema

Sea G un grupo y $H \lhd G$. Entonces, en el conjunto cociente ${}^{G}/_{H}$ de clases laterales de H en G existe una única operación ${}^{G}/_{H} \, x \, {}^{G}/_{H} \rightarrow {}^{G}/_{H}$ que convierte a ${}^{G}/_{H}$ en un grupo de forma que la proyección canónica $p{:}\, G \rightarrow {}^{G}/_{H}$, $p(x) = xH$, sea un homomorfismo de grupos, dicho conjunto se conoce como el grupo cociente de G sobre H.

Corolario

Un subgrupo H de G un grupo es normal si y solo si existe un homomorfismo de grupos $f: G \to G'$ tal que $Ker(f) = H$.

Teorema (Propiedad universal del grupo cociente)

Sea G un grupo, $H \lhd G$ y $p: G \to {}^{G}/_{H}$ el homomorfismo proyección. Entonces, para cualquier homomorfismo de grupos $f: G \to G'$ tal que $H \subseteq Ker(f)$, existe un único homomorfismo de grupos $\varphi: {}^{G}/_{H} \to G'$ tal que $\varphi \circ p = f$, esto es, hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & {}^{G}/_{H} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

Además, f sobreyectivo $\Leftrightarrow$ φ es sobreyectivo y $Ker(f) = H \Leftrightarrow \varphi$ es inyectivo.

Teorema (Primer teorema de isomorfía para grupos)

Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces, inducido por f, se tiene un isomorfismo de grupos ${}^{G}/_{Ker(f)} \cong Im(f)$ dado por $xKer(f) \to f(x)$.

Teorema (Segundo teorema de isomorfía para grupos o del paralelogramo)

Sea G un grupo y $H, K < G$ con $K \lhd G$. Entonces $H \cap K \lhd H$ y existe un isomorfismo de grupos

$$\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{HK}{K}$$

Representada la situación en el retículo de subgrupos:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & G \arrow[d] & \\ & HK \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H \arrow[dr] & & K \arrow[dl] \\ & H \cap K & \end{tikzcd}$$

El teorema viene a indicar que, en el paralelogramo formado, los dos lados paralelos son isomorfos.

Teorema (Tercer teorema de isomorfía para grupos o del doble cociente)

Sea G un grupo y $N \lhd G$, existe una biyección entre los subgrupos de G que contienen a N y los subgrupos de ${}^{G}/_{N}$ dada por $H \leftrightarrow {}^{H}/_{N}$. Además, $H \lhd G \Leftrightarrow {}^{H}/_{N} \lhd {}^{G}/_{N}$ y en ese caso existe un isomorfismo

$$\frac{{}^{G}/_{N}}{{}^{H}/_{N}} \cong {}^{G}/_{H}$$

Lema

Sea G un grupo y $A, B, C < G$ con $A < C$. Entonces se tiene que $A(B \cap C) = (AB) \cap C$

Lema

Sea G un grupo y $A, B, C < G$ con $B \lhd A$. Entonces:

$i)$ $B \cap C \lhd A \cap C$ y

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \cong \frac{B(A \cap C)}{B}$$

$ii)$ Si también $C \lhd G$ entonces $BC \lhd AC$ y

$$\frac{AC}{BC} \cong \frac{A}{B(A \cap C)}$$

Teorema (Cuarto teorema de isomorfía para grupos o lema de la mariposa)

Sea G un grupo y $C_1, A_1, C_2, A_2 < G$ tales que $C_1 \lhd A_1$ y $C_2 \lhd A_2$. Entonces:

$i)$ $(A_1 \cap C_2)C_1 \lhd (A_1 \cap A_2)C_1$

$ii)$ $(A_2 \cap C_1)C_2 \lhd (A_1 \cap A_2)C_2$

$iii)$ Existen isomorfismos:

$$\frac{(A_1 \cap A_2)C_1}{(A_1 \cap C_2)C_1} \cong \frac{A_1 \cap A_2}{(A_2 \cap C_1)(A_2 \cap C_1)} \cong \frac{(A_1 \cap A_2)C_2}{(A_2 \cap C_1)C_2}$$

Definición

Sean H y K dos grupos. Definimos una operación en HxK por componentes:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$$

HxK con esta operación tiene estructura de grupo, es el llamado *producto directo* de H yK.

Si H y K son dos grupos finitos$\Longrightarrow$ $|HxK| = |H||K|$ y $o(h,k) = mcm(o(h), o(k))$.

Teorema (Propiedad universal del producto directo)

Si G un grupo y sean $f_1: G \to H$, $f_2: G \to K$ dos homomorfismos de grupos cualesquiera. Existe un único homomorfismo $f: G \to HxK$ tal que $p_1 f = f_1$ y $p_2 f = f_2$.

Teorema

Si L es un grupo y $l_1: L \to H$, $l_2: L \to K$ dos homomorfismos de grupos que verifican la propiedad: Para todo grupo G y todo par de homomorfismos $f_1: G \to H$, $f_2: G \to K$, existe un único homomorfismo $f: G \to L$ tal que $l_1 f = f_1$, $l_2 f = f_2$. Entonces $L \cong HxK$.

Teorema

Sea G es un grupo y sean $f_1: H \to G$, $f_2: K \to G$ dos homomorfismos de grupos tales que $\forall h \in H\ \forall k \in K, f_1(h)f_2(k) = f_2(k)f_1(h)$. Entonces existe un único homomorfismo $f: HxK \to G$ tal que $f i_j = f_j, j = 1,2$.

Teorema

Sea L es un grupo y sean $l_1: H \to L$, $l_2: K \to L$ dos homomorfismos de grupos tales que $\forall h \in H\ \forall k \in K, l_1(h)l_2(k) = l_2(k)l_1(h)$ y que verifican la propiedad: Para todo grupo G y todo par de homomorfismos $f_1: H \to G$, $f_2: K \to G$, tales que $\forall h \in H\ \forall k \in K, f_1(h)f_2(k) = f_2(k)f_1(h)$, existe un único homomorfismo $f: L \to G$ tal que $f l_j = f_j, j = 1,2$. Entonces $L \cong HxK$.

Teorema (Caracterización del producto directo)

Sea G un grupo y $H, K < G$. Son equivalentes:

$i)$ La aplicación $\phi: HxK \to G\ \ \phi(h,k) = hk$ es un isomorfismo.

$ii) H, K \lhd G, HK = G\ \ y\ \ H \cap K = 1.$

$iii) \forall h \in H\ \forall k \in K \Longrightarrow hk = kh\ \ H \vee K = G\ y\ \ H \cap K = 1.$

$iv) \forall h \in H\ \forall k \in K \Longrightarrow hk = kh\ y\ \forall g \in G\ \exists_1 h \in H\ \exists_1 k \in K\ tales\ que\ g = hk.$

Definición

Un grupo G verificando las condiciones del teorema anterior se llama *producto directo interno* de los subgrupos H y K.

Lema

Sean $H_1 < H, K_1 < K$. Entonces:

1.- $H_1 x K_1 < HxK$.

2.- Existe un monomorfismo $Aut(H)xAut(K) \to Aut(HxK)$.

Teorema

Sean H, K dos grupos finitos tales que $mcd(|H|, |G|) = 1$. Entonces:

1.- $\forall L < HxK\ \ \exists_1 H_1 < H, \exists_1 K_1 < K$ tales que $L = H_1 x K_1$.

2.- $Aut(H)xAut(K) \cong Aut(HxK)$.

Teorema (Propiedad universal del producto directo)

Sea $\{G_\lambda \setminus \lambda \in \Lambda\}$ una familia de grupos y sea $G = \Pi_\lambda G_\lambda$ su producto directo, con proyecciones $p_\lambda: G \to G_\lambda$. Para cualquier familia de homomorfismos de grupos (con el mismo conjunto de índices) $\{f_\lambda: H \to G_\lambda\}$ existe un único homomorfismo $f: H \to G$ tal que $\forall \lambda. f_\lambda = p_\lambda f$. Además, cualquier otro grupo que verifique esta propiedad es isomorfo a G.

Teorema

Sea $\{G_\lambda \setminus \lambda \in \Lambda\}$ una familia de grupos, y para cada $\lambda \in \Lambda$ sea $H_\lambda < G_\lambda$. Entonces

$$\Pi_\lambda H_\lambda < \Pi_\lambda G_\lambda$$

Teorema

Sea $\{G_\lambda \setminus \lambda \in \Lambda\}$ una familia de grupos. Existe un monomorfismo:

$$\Pi_\lambda Aut(G_\lambda) \to Aut(\Pi_\lambda G_\lambda)$$

Teorema

1.- Sean G_1, G_2, G_3 grupos. Entonces

$$(G_1 x G_2) x G_3 \cong G_1 x G_2 x G_3 \cong G_1 x (G_2 x G_3)$$

2.- Sean $G_1, \dots, G_n$ grupos. Para todo $k = 1, \dots, n-1$ se verifica:

$$\left(\prod_{\lambda=1}^{k} G_\lambda\right) x \left(\prod_{\lambda=k+1}^{n} G_\lambda\right) \cong \prod_{\lambda=1}^{n} G_\lambda$$

Teorema

Sean $G_1, \dots, G_n$ grupos y sea $G = G_1 x \dots x G_n$. Entonces:

1.- $|G| = |G_1| \dots |G_n|$. En particular, si G es finito si y solo si todos los G_λ son finitos.

2.- $\forall (g_1, \dots, g_n) \in G$, $o(g_1, \dots, g_n) = mcm\big(o(g_1), \dots, o(g_n)\big)$.

Teorema (Caracterización del producto directo)

Sea G un grupo y $G_1, \dots, G_n < G$. Son equivalentes:

$i)$ La aplicación $\phi: G_1 x \dots x G_n \to G \;\; \phi(g_1, \dots, g_n) = g_1 \dots g_n$ es un isomorfismo.

$ii)\ Para\ \lambda = 1, \dots, n\ \ G_\lambda \lhd G, G_1 \dots G_n = G \quad y \quad (G_1 \dots G_{i-1}) \cap G_i = 1\ \ para\ i = 2, \dots, n.$

$iii) Para\ \lambda \neq \mu\ \ g_\lambda \in G_\lambda\ \ y\ g_\mu \in G_\mu \Longrightarrow g_\lambda g_\mu = g_\mu g_\lambda;\ G_1 \vee \dots \vee G_n = G\ y$

$$(G_1 \dots G_{i-1}) \cap G_i = 1\ \ para\ i = 2, \dots, n.$$

$iv) Para\ \lambda \neq \mu\ \ g_\lambda \in G_\lambda\ \ y\ g_\mu \in G_\mu \Longrightarrow g_\lambda g_\mu = g_\mu g_\lambda;\ \ tales\ que\ g = g_1 \dots g_n$ de forma única.

Teorema

Sea $G_1, \dots, G_n$ una familia finita de grupos finitos tales que sus órdenes son primos relativos dos a dos. Sea $G = \prod_{\lambda=1}^{n} G_\lambda$. Entonces:

1.- $\forall L < G\ \ \exists_1 H_\lambda < G_\lambda$ tales que $L = H_1 x \dots x H_n$.

2.- $Aut(G_1) x \dots x Aut(G_n) \cong Aut(G)$.

Veamos ahora el caso de grupos cíclicos, pero el producto directo de grupos cíclicos no es cíclico.

Proposición

Sean G y H grupos cíclicos finitos. Entonces:

$$G \oplus H\ es\ cíclico \Longleftrightarrow mcd(|G|, |H|) = 1$$

Corolario

Sean $G_1, \dots, G_n$ grupos cíclicos finitos. Entonces:

$$G_1 \oplus \dots \oplus G_n\ es\ cíclico \Longleftrightarrow mcd\left(|G_i|, \left|G_j\right|\right) = 1\ \ i \neq j$$

Ejercicio 1

Demostrar que si $G \leq S_n$, entonces $G \subseteq A_n$ o bien se tiene que $[G: G \cap A_n] = 2$. Concluir que un subgrupo de S_n consiste sólo en permutaciones pares, o bien contiene el mismo número de permutaciones pares que impares.

Solución

Ejercicio 2

Dado un cuerpo K, el grupo lineal especial de orden n sobre K, $SL_n(K)$ (también llamado unimodular de orden n sobre K) es

$$SL_n(K) = \{G \in GL_n(K) \setminus det(G) = 1\}$$

1.- Se considera la aplicación $det: GL_n(K) \to K^*$ que aplica cada matriz en su determinante. Demostrar que dicha aplicación es un epimorfismo de grupos. ¿Cuál es el núcleo de este homomorfismo?

Solución

2.- Si K es un cuerpo finito con q elementos. Determinar el orden del grupo $SL_n(K)$.

Solución

Ejercicio 3

Sea $n > 1$ un número natural, y sea G un grupo verificando que para todo par de elementos $x, y \in G$ se tiene que $(xy)^n = x^n y^n$. Se definen $H = \langle x \in G/\ x^n = 1 \rangle$ y $K = \langle x^n/\ x \in G \rangle$. Demostrar que H y K son subgrupos normales de G y que $|K| = [G: H]$.

Solución

Ejercicio 4

Para un grupo G se define el centro como:

$$Z(G) = \{a \in G \setminus \forall x \in G \ xa = ax\}$$

1.- Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo de G.

2.- Demostrar que $Z(G)$ es normal de G.

3.- Demostrar que $Z(G)$ es abeliano si y solo si $G = Z(G)$.

4.- Demostrar que ${}^{G}/_{Z(G)}$ es cíclico, entonces G es abeliano.

Solución

Ejercicio 5

Determinar el centro del grupo diédrico D_4. Observar que el cociente $D_4/_{Z(D_4)}$ es abeliano, aunque D_4 no lo sea.

Solución

$$D_4 = \langle r, s / \ s^2 = 1 \ \ r^4 = 1 \ \ sr = r^{-1}s = r^3 s\rangle = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$$

x	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Ejercicio 6

Determinar el centro de los grupos S_n y A_n, para $n \geq 2$.

Solución

Ejercicio 7

Determinar el centro de los grupos D_n para $n \geq 3$.

Solución

Ejercicio 8

Sean H y K dos subgrupos finitos de un grupo G, uno de ellos normal. Demostrar que

$$|H||K| = |HK||H \cap K|$$

Solución

Ejercicio 9

Sean $N \trianglelefteq G$. **Probar que** ${}^{G}\!/_{N} \cong G$ **si y solo si,** $N = \{1\}$ **y que** ${}^{G}\!/_{N} \cong \{1\}$ **si y solo si,** $N = G$**.**

Solución

Ejercicio 10

Sean G y H dos grupos cuyos órdenes sean primos relativos. Probar que si $f: G \to H$ es un homomorfismo, entonces necesariamente $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, es decir, que el único homomorfismo entre ellos es el trivial.

Solución

Ejercicio 11

Sean H y K dos subgrupos de un grupo G y sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G tal que $HN = KN$. Demostrar que

$$\frac{H}{H \cap H} \cong \frac{K}{K \cap N}$$

Solución

Ejercicio 12

Sea N un subgrupo normal de G tal que N y ${}^{G}/_{N}$ son abelianos. Sea H un subgrupo cualquiera de G. Demostrar que existe un subgrupo normal $K \trianglelefteq H$ tal que K y ${}^{H}/_{K}$ son abelianos.

Solución

Ejercicio 13

Sea G un grupo finito, y sean H, K subgrupos de G, con K normal y tales que $|H|$ y $[G:K]$ son primos relativos. Demostrar que H está contenido en K.

Solución

Ejercicio 14

Sea G un grupo:

1.- Demostrar que para cada $a \in G$ la aplicación $\varphi_a: G \to G$ definida por $\varphi_a(x) = axa^{-1}$, es un automorfismo de G, φ_a se llama *automorfismo interno o de conjugación* de G definido por a.

2.- Demostrar que la aplicación $G \to Aut(G)$, $a \to \varphi_a$, es un homomorfismo.

3.- Demostrar que el conjunto de automorfismos internos de G, que se denota $Int(G)$, es un subgrupo normal de $Aut(G)$.

4.- Demostrar que ${}^{G}/_{Z(G)} \cong Int(G)$.

5.- Demostrar que $Int(G) = 1$ si y solo si G es abeliano.

Ejercicio 15

Demostrar que el grupo de automorfismos de un grupo no abeliano no puede ser cíclico.

Solución

Ejercicio 16

Demostrar que el grupo $Aut(Z_2xZ_2)$ es isomorfo a S_3.

Solución

Sea $Z_2 = \langle x; x^2 = 1\rangle$, Z_2xZ_2 no es cíclico, para que un producto de grupos sea cíclico los órdenes deben ser primos relativos.

$$Z_2xZ_2 = \langle (1,1), (x,1), (1,x), (x,x)\rangle$$

Veamos los automorfismos:

$$Id: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (x,1) \\ (1,x) \to (1,x) \\ (x,x) \to (x,x) \end{cases} \quad \varphi_1: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (1,x) \\ (1,x) \to (x,1) \\ (x,x) \to (x,x) \end{cases}$$

$$\varphi_2: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (x,x) \\ (1,x) \to (1,x) \\ (x,x) \to (x,1) \end{cases} \quad \varphi_3: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (x,1) \\ (1,x) \to (x,x) \\ (x,x) \to (1,x) \end{cases}$$

$$\varphi_4: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (1,x) \\ (1,x) \to (x,x) \\ (x,x) \to (x,1) \end{cases} \quad \varphi_5: Z_2xZ_2 \to Z_2xZ_2 \begin{cases} (1,1) \to (1,1) \\ (x,1) \to (x,x) \\ (1,x) \to (x,1) \\ (x,x) \to (1,x) \end{cases}$$

Sea $f: Aut(Z_2xZ_2) \to S_3$ dado por:

$$f(Id) = 1 \quad f(\varphi_1) = (1 \quad 2) \quad f(\varphi_2) = (1 \quad 3) \quad f(\varphi_3) = (2 \quad 3)$$

$$f(\varphi_4) = (1 \quad 2 \quad 3) \quad f(\varphi_5) = (1 \quad 3 \quad 2)$$

Claramente es un homomorfismo de grupos biyectivo, por lo tanto, $Aut(Z_2xZ_2) \cong S_3$.

Ejercicio 17

Demostrar que los grupos S_3, Z_{p^n} (con p primo) y Z no son producto directo internos de subgrupos propios.

Solución

Ejercicio 18

En cada uno de los siguientes casos, decidir si el grupo G es o no producto directo de los subgrupos H y K.

1.- $G = R^x \;\; H = \{\pm 1\} \;\; K = \{x \in R : x > 0\}$

2.- $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(R)\right\} \;\; H = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(R)\right\} \;\; K = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)\right\}$

3.- $G = C^x \;\; H = \{z \in C \setminus |z| = 1\} \;\; K = \{x \in R : x > 0\}$

Solución

Ejercicio 24

Sean $H, K \lhd G$, tales que $H \cap K = 1$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $G/_H \, x \, G/_K$.

Solución

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "p_H"'] \arrow[d, dashed, "p"] \arrow[dr, "p_K"] & \\
G/_H & G/_H \, x \, G/_K \arrow[l] \arrow[r] & G/_K
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 25

Sean $H, K \lhd G$, tales que $HK = G$. Demostrar que:

$$\frac{G}{H \cap K} \cong \frac{H}{H \cap K} x \frac{K}{H \cap K} \cong \frac{G}{H} x \frac{G}{K}$$

Solución

Ejercicio 26

Demostrar que si G es un grupo que es producto directo interno de subgrupos H y K, y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$, entonces N es abeliano.

Solución

Ejercicio 27

Dar un ejemplo de un grupo G que sea producto directo interno de dos subgrupos propios H y K, y que contenga a un subgrupo normal no trivial N que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$. Concluir que para $N \trianglelefteq HxK$ es posible que se tenga

$$N \neq \big(N \cap (Hx1)\big)x\big(N \cap (1xK)\big)$$

Solución

Ejercicio 28

Sea G un grupo finito que sea producto directo interno de dos subgrupos H y K tales que $mcd(|H|,|K|) = 1$. Demostrar que para todo subgrupo $N \leq G$ verifica que

$$N = (N \cap H)x(N \cap K)$$

Solución

Ejercicio 29

Sea G un grupo y sea $f: G \to G$ un endomorfismo idempotente (esto es, verificando $f^2 = f$) y tal que $Im(f) \trianglelefteq G$. Demostrar que $G \cong Im(f) x Ker(f)$.

Solución

Ejercicio 30

Sea S un subconjunto de un grupo G. Se llama *centralizador* de S en G al conjunto

$$C_G(S) = \{x \in G \setminus xs = sx\ \forall s \in S\}$$

Y se llama *normalizador* de S en G al conjunto

$$N_G(S) = \{x \in G \setminus xS = Sx\}$$

1.- Demostrar que $N_G(S)$ es un subgrupo de G.

2.- Demostrar que $C_G(S)$ es un subgrupo normal de $N_G(S)$.

3.- Demostrar que si S es un subgrupo de G entonces S es un subgrupo normal de $N_G(S)$.

Solución

Ejercicio 31

Sea G un grupo y H y K subgrupos suyos con $H \subset K$. Entonces demostrar que H es normal en K si y solo si $K < N_G(H)$. (Así, el normalizador $N_G(H)$ queda caracterizado como el mayor subgrupo de G en el que H es normal)

Solución

Ejercicio 32

1.- Demostrar que $C_G(Z(G)) = G$ y que $N_G(Z(G)) = G$.

2.- Si G es un grupo y $H < G$. ¿Cuándo es $N_G(H) = G$? ¿Y cuándo es $C_G(H) = G$?

3.- Si H es un subgrupo de orden 2 de un grupo G, demostrar que $N_G(H) = C_G(H)$. Deducir que H es normal en G si y solo si está contenido en $Z(G)$.

Solución

Ejercicio 33

Sea G un grupo arbitrario. Para dos elementos $x, y \in G$ se define su conmutador como el elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. (El conmutador recibe tal nombre porque $[x, y]yx = xy$).

Como $[x, y]^{-1} = [x, y]$, el inverso de un conmutador es un conmutador. Sin embargo el producto de dos conmutadores no tiene porqué ser un conmutador. Entonces se define el subgrupo conmutador o (primer) subgrupo derivado de G, denotado $[G: G]$, como subgrupo generado por todos los conmutadores de G.

1.- Demostrar que $\forall a, x, y \in G$, se tiene que $a[x, y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}]$.

2.- Demostrar que $[G: G]$ es un subgrupo normal de G.

3.- Demostrar que el grupo cociente $G/_{[G: G]}$, que se representa por G^{ab}, es un grupo abeliano (que se llama *el abelianizado* de G).

4.- Demostrar que G es abeliano si y solo si $[G: G] = 1$.

5.- Sea N un subgrupo normal de G. Demostrar que el grupo cociente $G/_N$ es abeliano si y solo si $N > [G: G]$ (así que el grupo $[G: G]$ es el menor subgrupo normal de G tal que el cociente es abeliano).

Ejercicio 34

1.- Calcular el subgrupo conmutador de los grupos S_3, A_4, D_4 y Q_2.

2.- Demostrar que, para $n \geq 3$, el subgrupo conmutador de S_n es A_n y que este es el único subgrupo de S_n de orden $^{n!}/_{2}$.

Solución

2.- Demostrar que, para $n \geq 3$, el subgrupo conmutador de S_n es A_n y que este es el único subgrupo de S_n de orden $^{n!}/_{2}$.

Solución