Tema 5

Funciones elementales

A continuación estudiamos algunos ejemplos de funciones holomorfas que, junto con las racionales, forman la familia de las llamadas *funciones elementales* de variable compleja. Son extensiones naturales de las funciones reales de variable real que llevan el mismo nombre.

Empezamos con el ejemplo más importante, la función *exponencial* compleja. Se trata de una función entera que extiende a la exponencial real y comparte con ella algunas propiedades, entre las que destaca la *fórmula de adición*, pero difiere en un aspecto esencial: toma todos los valores complejos no nulos y, no sólo no es inyectiva, sino que es periódica.

Ocurre pues que cada número complejo no nulo tiene infinitos *logaritmos*, que calculamos explícitamente, encontrando una correspondencia biunívoca entre logaritmos y argumentos de un número complejo no nulo. Al argumento principal corresponde el *logaritmo principal*, que es una extensión natural del logaritmo real. Planteamos, y analizamos de forma preliminar, un problema acerca de los logaritmos complejos, típico de muchas funciones complejas: la posibilidad de elegir, para cada punto de un abierto del plano, uno de sus logaritmos, de forma que se obtenga una función holomorfa en dicho abierto.

A partir de la exponencial y el logaritmo se definen fácilmente el resto de las funciones elementales: potencias, raíces y funciones trigonométricas e hiperbólicas. Las mencionamos brevemente, comentando algunas de sus propiedades.

5.1. La exponencial

Partimos del desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial real:

$$\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia infinito, luego su suma nos da una función definida en todo el plano, que extiende a la exponencial real, por lo que podemos denotarla de la misma forma.

Así pues la **exponencial compleja** es la función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Si no hay peligro de confundir esta función con la exponencial real, que es su restricción a $\mathbb{R}$, la llamamos simplemente *la exponencial*. La holomorfía de la suma de una serie de potencias nos da la primera propiedad de la exponencial, que será la clave para deducir todas las demás:

E.1. *La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.*

En efecto, el mencionado teorema nos dice que

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Deducimos fácilmente la propiedad más genuina de la exponencial:

E.2. Formula de adición. *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:* $e^{z+w} = e^z e^w$

La demostración es bien sencilla. Fijado $a \in \mathbb{C}$, definimos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$h(z) = e^z e^{a-z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

La regla de la cadena y la de derivación de un producto nos dicen que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con

$$h'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Como $\mathbb{C}$ es un dominio, deducimos que h es constante, es decir, $h(z) = h(0) = e^a$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Pero $a \in \mathbb{C}$ era arbitrario, luego tenemos

$$e^z e^{a-z} = e^a \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall a \in \mathbb{C}$$

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, basta tomar $a = z + w$ para obtener la fórmula de adición. $\blacksquare$

En particular, $e^z e^{-z} = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego la exponencial no se anula y, por la fórmula de adición, es un homomorfismo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$. Una obvia inducción nos da: $e^{pz} = \left(e^z\right)^p$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{Z}$. Deducimos también que, ser una función entera que coincide con su derivada, caracteriza a la exponencial salvo un factor de proporcionalidad:

E.3. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifica que $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \lambda e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Definiendo $h(z) = f(z)e^{-z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos claramente $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Deducimos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $h(z) = \lambda$, luego $f(z) = f(z)e^{-z}e^z = h(z)e^z = \lambda e^z$. $\blacksquare$

Por supuesto, si en el resultado anterior queremos conseguir $f(z) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, bastará suponer adicionalmente que $f(0) = 1$.

Veamos otra consecuencia clara de la fórmula de adición:

E.4. *La exponencial es una función analítica en* $\mathbb{C}$.

En efecto, basta observar que para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^z = e^a e^{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \blacksquare$$

Por otra parte, para $x, y \in \mathbb{R}$ la fórmula de adición nos da $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, lo que nos lleva a pensar en la función $y \mapsto e^{iy}$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, que enseguida relacionamos con las funciones trigonométricas reales:

E.5. Fórmula de Euler. *Se verifica que* $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escribiendo, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = e^{it}, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} g(t) \quad \text{y} \quad \psi(t) = \operatorname{Im} g(t)$$

Como g es derivable en $\mathbb{R}$, con $g' = ig$, deducimos que φ y ψ también son derivables en $\mathbb{R}$, con $\varphi' + i\psi' = i(\varphi + i\psi)$. Tenemos por tanto $\varphi' = -\psi$ y $\psi' = \varphi$. Definimos ahora otra función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \big(\varphi(t) - \cos t\big)^2 + \big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

que es también derivable en $\mathbb{R}$ y, para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\big(\varphi(t) - \cos t\big)\big(\varphi'(t) + \operatorname{sen} t\big) + 2\big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)\big(\psi'(t) - \cos t\big) \\ &= 2\big(\varphi(t) - \cos t\big)\big(\operatorname{sen} t - \psi(t)\big) + 2\big(\psi(t) - \operatorname{sen} t\big)\big(\varphi(t) - \cos t\big) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $h(t) = h(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero de $g(0) = 1$ deducimos claramente que $h(0) = 0$, luego h es idénticamente nula, esto es, $\varphi(t) = \cos t$ y $\psi(t) = \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$, como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Más allá de la popular igualdad $e^{\pi i} + 1 = 0$, la fórmula de Euler muestra que la función exponencial está íntimamente ligada a la estructura básica del cuerpo complejo. Por ejemplo, tenemos $\mathbb{T} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ y el giro de ángulo $\theta \in \mathbb{R}$ no es más que la aplicación $z \mapsto e^{i\theta} z$. También podemos reescribir la definición de argumento, usando la exponencial:

$$\operatorname{Arg} z = \big\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta}\big\} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Por otra parte, las funciones trigonométricas seno y coseno, que como funciones reales de variable real, no guardan relación alguna con la exponencial real, se obtienen fácilmente a partir de la exponencial compleja. De la fórmula de Euler deducimos claramente que, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t$, luego

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Por ejemplo, las fórmulas de adición para las funciones seno y coseno pueden verse como casos muy particulares de la fórmula de adición para la exponencial compleja. Basta pensar que para $t, s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos(t+s) + i \operatorname{sen}(t+s) = e^{i(t+s)} = e^{it} e^{is} = (\cos t + i \operatorname{sen} t)(\cos s + i \operatorname{sen} s)$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$, la fórmulas de adición y de Euler nos dan $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$, donde vemos la parte real e imaginaria, el módulo y los argumentos de la exponencial:

E.6. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:*

(i) $\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$ *y* $\operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)$.
(ii) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ *y* $\operatorname{Arg}(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Deducimos la imagen de la exponencial y calculamos explícitamente los puntos en los que toma cada uno de sus valores. Denotamos de momento por $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a la función logaritmo.

E.7. *La imagen de la exponencial es $\mathbb{C}^*$. De hecho, para cada $w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:*

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln|w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\} \tag{1}$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ se tiene $\{e^z : z \in \mathbb{C},\ |z| > R\} = \mathbb{C}^*$.

De $e^z = w$ deducimos, por una parte, que $e^{\operatorname{Re} z} = |w|$, es decir, $\operatorname{Re} z = \ln|w|$, y por otra, que $\operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg} w$. Recíprocamente, si $z = \ln|w| + i\theta$ con $\theta \in \operatorname{Arg} w$, tendremos

$$e^z = e^{\ln|w|} e^{i\theta} = |w| e^{i\theta} = w$$

Fijados $R \in \mathbb{R}^+$ y $w \in \mathbb{C}^*$, tomando $\theta \in \operatorname{Arg} w$ tal que $\theta > R$, y $z = \ln|w| + i\theta$, tenemos $|z| > R$ y $e^z = w$. ■

Como $\{e^n\} \to \infty$ y $\{e^{-n}\} \to 0$, estaba claro que la exponencial no tiene límite ni diverge en infinito. Pero su comportamiento es mucho más caótico: fijado $R \in \mathbb{R}^+$, la condición $|z| > R$, por muy grande que sea R, no da ninguna información sobre el valor de e^z.

Comentamos finalmente la periodicidad de la exponencial. Esta propiedad se define para funciones complejas exactamente igual que para funciones reales de variable real. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que $w \in \mathbb{C}^*$ es un *periodo* de una función $f \in \mathcal{F}(A)$ cuando tanto A como f son invariantes por la traslación mediante w, esto es,

$$\{z + w : z \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(z+w) = f(z) \quad \forall z \in A$$

Naturalmente, decimos que f es una función *periódica* cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$. Está claro que entonces kw también es un periodo de f, para todo $k \in \mathbb{Z}$. De hecho el conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$. Cuando dicho grupo de periodos está engendrado por un sólo elemento, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$ se dice que f es *simplemente periódica* y que w es un *periodo fundamental* de f, en cuyo caso f tiene exactamente dos periodos fundamentales: w y $-w$. Pues bien:

E.8. *La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$.*

Es claro que $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego $2\pi i$ es un periodo de la exponencial, pero si w es otro periodo, se tendrá $e^w = 1$, de donde $w = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$. ■

5.2. Logaritmos de un número complejo

En vista de (1), para $z \in \mathbb{C}^*$ definimos el **conjunto de los logaritmos** de z por

$$\operatorname{Log} z = \{ w \in \mathbb{C} : e^w = z \} = \{ \ln |z| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} z \}$$

Geométricamente, los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$ están situados en la recta vertical de abscisa $\ln |z|$, separados a intervalos de longitud 2π. Tenemos una clara relación entre logaritmos y argumentos. Concretamente, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ podemos escribir

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im} \left(\operatorname{Log} z \right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

Al argumento principal $\arg z$ corresponde el **logaritmo principal** $\log z$, definido por

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Decimos también que la función $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es *el logaritmo principal*. No hay peligro de confusión, por el contexto se sabe si al hablar del logaritmo principal nos referimos a esta función o a su valor en un punto concreto. Nótese que el logaritmo principal es una extensión del logaritmo real: $\log x = \ln x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Los números reales negativos no tienen ningún logaritmo real.

La propiedad algebraica de la que gozaba el conjunto de todos los argumentos se transmite claramente al conjunto de todos los logaritmos pero, para los logaritmos, podemos también deducirla directamente de la fórmula de adición para la exponencial:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:*

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w = \{ \alpha + \beta : \alpha \in \operatorname{Log} z, \ \beta \in \operatorname{Log} w \}$$

De $e^\alpha = z$ y $e^\beta = w$ deducimos claramente $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta = zw$. Pero recíprocamente, dado $\lambda \in \operatorname{Log}(zw)$, elegimos $\alpha \in \operatorname{Log} z$ y tomando $\beta = \lambda - \alpha$ vemos que $\beta \in \operatorname{Log} w$, ya que $e^\beta = e^\lambda / e^\alpha = zw/z = w$. ■

La interpretación algebraica de esta propiedad es análoga a la hecha para los argumentos. El conjunto $2\pi i \mathbb{Z}$ de los múltiplos enteros de $2\pi i$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$ y la aplicación $z \mapsto \operatorname{Log} z$ es un epimorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ sobre el grupo cociente $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$.

Como ocurría con el argumento principal, el logaritmo principal no goza de esta propiedad algebraica y, de hecho no podemos elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo de forma que se tenga tal propiedad: si una función $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ verificase que $f(z) \in \operatorname{Log} z$ y $f(zw) = f(z) + f(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, tomando $\varphi = \operatorname{Im} f$ se tendría $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ y $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, pero sabemos que no existe ninguna función $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ con esas propiedades.

5.3. El problema del logaritmo holomorfo

Es natural preguntar si se puede elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo para obtener una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$, es decir, si existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ verificando que $f(z) \in \operatorname{Log} z$, o lo que es lo mismo $e^{f(z)} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Como consecuencia de un ejercicio propuesto en el Tema 2, la respuesta es negativa. En efecto, una tal función f sería en particular continua en $\mathbb{C}^*$, y entonces $\varphi = \operatorname{Im} f$ sería una función continua en $\mathbb{C}^*$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, pero el mencionado ejercicio afirmaba que tal función φ no existe. De hecho, más adelante probaremos un resultado negativo aún más fuerte.

Aceptado que no podemos elegir un logaritmo de cada número complejo no nulo para tener una función que sea siquiera continua en $\mathbb{C}^*$, lo oportuno es trabajar en abiertos más pequeños. Concretamente, para diversos abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, veremos que existe un *logaritmo holomorfo* en Ω, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) \in \operatorname{Log} z$ para todo $z \in \Omega$.

Conviene plantear un problema más general. Para un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, nos preguntamos si existe un *logaritmo holomorfo de la función* g, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando que $f(z) \in \operatorname{Log}\big(g(z)\big)$, o lo que es lo mismo, $e^{f(z)} = g(z)$, para todo $z \in \Omega$. Como consecuencia del siguiente resultado, vemos que la dificultad estriba en conseguir la continuidad de f, pues entonces su holomorfía es automática.

Lema 1. *(Derivabilidad de logaritmos continuos). Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, $g : A \to \mathbb{C}^*$ una función, y f un logaritmo de g, es decir, una función $f : A \to \mathbb{C}$ verificando que $e^{f(z)} = g(z)$, para todo $z \in A$. Si g es derivable en un punto $a \in A \cap A'$ y f es continua en a, entonces f es derivable en a con $f'(a) = g'(a)/g(a)$.*

Demostración. Sea $b = f(a)$ y consideremos la función $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w) = \frac{e^w - e^b}{w - b} \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \quad \text{y} \quad \Phi(b) = e^b$$

que claramente es continua en b con $\Phi(b) \neq 0$ por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Phi(w) \neq 0$ para todo $w \in D(b,\varepsilon)$. También es claro que $e^w - e^b = \Phi(w)(w-b)$ para todo $w \in \mathbb{C}$, luego tomando $w = f(z)$ obtenemos:

$$g(z) - g(a) = e^{f(z)} - e^{f(a)} = \Phi\big(f(z)\big)\big(f(z) - f(a)\big) \qquad \forall z \in A \tag{2}$$

Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que, para $z \in A \cap D(a,\delta)$ se tiene $|f(z) - b| < \varepsilon$, luego $\Phi\big(f(z)\big) \neq 0$. De (2) deducimos entonces claramente que

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{1}{\Phi\big(f(z)\big)} \, \frac{g(z) - g(a)}{z - a} \qquad \forall z \in \big(A \setminus \{a\}\big) \cap D(a,\delta) \tag{3}$$

Como $\Phi \circ f$ es continua en a, también tenemos

$$\lim_{z \to a} \Phi\big(f(z)\big) = \Phi\big(f(a)\big) = \Phi(b) = e^b = e^{f(a)} = g(a) \neq 0$$

Usando ahora que g es derivable en a, de (3) deducimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{g'(a)}{g(a)} \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior sugiere dos ideas importantes en relación con el problema que habíamos planteado. Por una parte, como ya de dijo, es una cuestión topológica: dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, para obtener un logaritmo holomorfo de g, bastará conseguir un *logaritmo continuo*, es decir: $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Ahora bien, obligadamente ha de ser $\operatorname{Re} f(z) = \ln |g(z)|$ para todo $z \in \Omega$, y esta función es continua, luego el problema es conseguir que $\operatorname{Im} f$ sea continua. Como también ha de ser $\operatorname{Im} f(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big)$ para todo $z \in \Omega$, el problema es conseguir un *argumento continuo* de g, esto es, una función continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big)$ para todo $z \in \Omega$.

Por otra parte, desde un punto de vista más analítico, el resultado anterior nos dice que cualquier logaritmo holomorfo f de nuestra función holomorfa g ha de ser una *primitiva* de la función g'/g. Recíprocamente, vamos a ver ahora que, a partir de una primitiva de g'/g, es fácil conseguir un logaritmo holomorfo de g, de modo que nuestro problema puede verse también como un problema de existencia de primitivas.

Lema 2. *(Logaritmos holomorfos y primitivas). Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $f'(z)g(z) = g'(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, que es constante en cada componente conexa de Ω, tal que $\lambda + f$ es un logaritmo holomorfo de g, es decir, $e^{\lambda(z)+f(z)} = g(z)$, para todo $z \in \Omega$.*

La función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por $h(z) = g(z)\,e^{-f(z)}$ para todo $z \in \Omega$ verifica que

$$h'(z) = g'(z)\,e^{-f(z)} - f'(z)\,g(z)\,e^{-f(z)} = 0 \qquad \forall z \in \Omega$$

luego h es constante en cada componente conexa de Ω. Como h no se anula, podemos definir $\lambda(z) = \log h(z)$ para todo $z \in \Omega$. Claramente λ también es constante en cada componente conexa de Ω, luego $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$. Finalmente tenemos

$$e^{\lambda(z)+f(z)} = e^{\lambda(z)}\,e^{f(z)} = h(z)\,e^{f(z)} = g(z) \qquad \forall z \in \Omega \qquad \blacksquare$$

Resumimos todas las ideas comentadas sobre el problema del logaritmo holomorfo en el siguiente enunciado, que lo reformula de tres maneras equivalentes:

- *Para un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *g admite un **argumento continuo**:* $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}(\Omega) : \varphi(z) \in \operatorname{Arg}\big(g(z)\big) \quad \forall z \in \Omega$
  - (ii) *g admite un **logaritmo continuo**:* $\exists\, f \in \mathcal{C}(\Omega) : e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in \Omega$
  - (iii) *g admite un **logaritmo holomorfo**:* $\exists\, f \in \mathcal{H}(\Omega) : e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in \Omega$
  - (iv) *g'/g admite una **primitiva**:* $\exists\, h \in \mathcal{H}(\Omega) : h'(z) = g'(z)/g(z) \quad \forall z \in \Omega$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Basta tomar $f(z) = \ln |g(z)| + i\varphi(z)$ para todo $z \in \Omega$.

$(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Se deducen del Lema 1.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Se deduce del Lema 2.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Evidente.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Basta tomar $\varphi = \operatorname{Im} f$. $\blacksquare$

5.4. Ejemplos de logaritmos holomorfos

En lo que sigue nos concentramos de nuevo en el caso que motivó la discusión anterior, es decir, el caso en que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ y $g(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. El Lema 1 de la sección anterior permite estudiar fácilmente la holomorfía del logaritmo principal:

- *El logaritmo principal es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, con*

$$\log'(z) = 1/z \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

El argumento principal $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es una función continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Para comprobarlo recordamos que, con el convenio $\operatorname{sgn} 0 = 1$, que no se va a usar siquiera, se tiene

$$\arg z = \operatorname{sgn}\big(\operatorname{Im} z\big) \arccos\big(\operatorname{Re} z / |z|\big) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

De la continuidad en $\mathbb{R}^*$ de la función signo deducimos la del argumento principal en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En cada punto $x \in \mathbb{R}^+$, basta observar que

$$\lim_{z \to x} |\arg z| = \lim_{z \to x} \arccos \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \arccos 1 = 0, \quad \text{luego} \quad \lim_{z \to x} \arg z = 0 = \arg x$$

Tenemos pues la continuidad en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ de la parte imaginaria del logaritmo principal. Su parte real, la función $z \mapsto \ln |z|$, es continua en $\mathbb{C}^*$. Por tanto, el logaritmo principal es una función continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, luego basta aplicar el Lema 1. ∎

El argumento principal no tiene límite en ningún punto de $\mathbb{R}^-$, luego lo mismo le ocurre al logaritmo principal. Concretamente, fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n = \rho\, e^{i\theta_n} \in \mathbb{C}^*$, donde $\theta_n = \pi + \big((-1)^n/n\big)$. Tenemos $0 < \theta_{2n-1} < \pi$, luego $\arg z_{2n-1} = \theta_n$, mientras que de $\pi < \theta_{2n} < 2\pi$ deducimos $\arg z_{2n} = \theta_n - 2\pi$. Por tanto $\{\arg z_{2n-1}\} \to \pi$ y $\{\arg z_{2n}\} \to -\pi$. Como $\{z_n\} \to -\rho$, pero $\{\arg z_n\}$ no es convergente, concluimos que el argumento principal no tiene límite en el punto $-\rho$, como se quería.

La semirrecta $\mathbb{R}^-$ no tiene nada de especial, podemos elegir el logaritmo de cada número complejo no nulo, para conseguir una función holomorfa en el dominio obtenido al suprimir de $\mathbb{C}^*$ cualquier otra semirrecta con vértice en el origen. De hecho, dicha función guarda una relación sencilla con el logaritmo principal:

- *Fijado $\theta \in \mathbb{R}$, la función $f_\theta : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f_\theta(z) = \log\big(e^{i(\pi-\theta)} z\big) - i(\pi - \theta) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

verifica que $f_\theta(z) \in \operatorname{Log} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Además, f_θ es holomorfa en el dominio $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho\, e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ con $f_\theta'(z) = 1/z$ para todo $z \in \Omega_\theta$.

Es evidente que $e^{f_\theta(z)} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. En cuanto a la holomorfía de f_θ basta aplicar la del logaritmo principal y la regla de la cadena. En efecto, para $z \in \Omega_\theta$ se tiene claramente que $e^{i(\pi-\theta)} z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, luego el logaritmo principal es derivable en $e^{i(\pi-\theta)} z$ y por tanto f_θ es derivable en el punto z con

$$f_\theta'(z) = \log'\big(e^{i(\pi-\theta)} z\big)\, e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{e^{i(\pi-\theta)} z}\, e^{i(\pi-\theta)} = \frac{1}{z} \qquad ∎$$

5.5. Desarrollos en serie

Vamos a calcular ahora el desarrollo en serie del logaritmo principal, centrado en cada punto de $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, lo que nos dará un ejemplo de función analítica más interesante que los conocidos hasta ahora. De hecho, empezamos por probar que la función $z \mapsto 1/z$ es analítica en $\mathbb{C}^*$.

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$ se tiene que $\big| -(z-a)/a \big| < 1$ y, usando la suma de la serie geométrica, obtenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1/a}{1 - \big(-(z-a)/a\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

Ahora, en el disco $D(a, |a|)$ es bien fácil encontrar una primitiva de la función $z \mapsto 1/z$, que usando el Lema 2 nos dará un logaritmo holomorfo en dicho disco. Basta pensar en una serie de potencias cuya derivada término a término sea la serie que acaba de aparecer. Concretamente, la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ también tiene radio de convergencia $|a|$ y su suma,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

es una función holomorfa en $D\big(a, |a|\big)$ con $h'(z) = 1/z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$.

Los discos son conexos, luego el Lema 2 nos da una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\lambda + h(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$. En particular, como $h(a) = 0$, se tendrá $e^{\lambda} = a$, luego λ puede ser cualquier logaritmo de a, ya que la expresión $e^{\lambda + h(z)}$ no se altera al sustituir λ por cualquier otro logaritmo de a. Así pues, tomando por ejemplo $\lambda = \log a$, hemos probado:

- *Dado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo*

$$f(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

se tiene que $f \in \mathcal{H}\big(D(a, |a|)\big)$ y $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a, |a|\big)$.

Cuando $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ podemos comparar el logaritmo holomorfo f que acaba de aparecer, con el logaritmo principal. Para ello usaremos un $\rho_a > 0$ de forma que $D(a, \rho_a) \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Cuando $\operatorname{Re} a \geqslant 0$ es claro que podemos tomar $\rho_a = |a|$, mientras que si $\operatorname{Re} a < 0$, basta tomar $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$. En todo caso, las restricciones de f y del logaritmo principal a $D(a, \rho_a)$ son funciones holomorfas en dicho disco con la misma derivada, luego por ser $D(a, \rho_a)$ un dominio, difieren en una constante. Como $f(a) = \log a$, concluimos que dichas funciones coinciden. Hemos probado:

- *Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = |a|$ si $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, y $\rho_a = |\operatorname{Im} a|$ si $\operatorname{Re} a < 0$. Entonces:*

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

5.6. Potencias complejas

Recordemos que la potencia de base $x \in \mathbb{R}^+$ y exponente $y \in \mathbb{R}$ se define por $x^y = e^{y \ln x}$. Usando la exponencial y los logaritmos complejos es claro que podemos extender la definición al caso de una base $z \in \mathbb{C}^*$ y un exponente $w \in \mathbb{C}$, pero tenemos claramente dos opciones: usar todos los logaritmos de z, obteniendo un conjunto de números complejos, o sólo el logaritmo principal, para tener un número complejo bien definido. Veremos que, dependiendo del uso que queramos hacer de la potencia, la opción más adecuada no es siempre la misma, así que por ahora consideramos ambas posibilidades.

Fijados $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$, definimos la **potencia** de base z y exponente w, como el conjunto $[z^w]$ de números complejos dado por

$$[z^w] = \exp\big(w \operatorname{Log} z\big) = \big\{ \exp(w\lambda) : \lambda \in \operatorname{Log} z \big\}$$

Usando el logaritmo principal tenemos un elemento concreto de la potencia: $\exp(w \log z)$. Antes de darle un nombre y una notación adecuada, consideremos los casos particulares en que este valor ya nos es familiar. En el caso $w = p \in \mathbb{Z}$, con $z \in \mathbb{C}^*$ arbitrario, la fórmula de adición para la exponencial nos da claramente $\exp(p \log z) = \big(\exp(\log z)\big)^p = z^p$. Un segundo caso ya se ha comentado: si $z = x \in \mathbb{R}^+$ y $w = y \in \mathbb{R}$, tenemos también $\exp(y \log x) = e^{y \ln x} = x^y$. Finalmente, en el caso $z = e$, para todo $w \in \mathbb{C}$ se tiene $\exp(w \log e) = \exp(w) = e^w$. En resumen, la igualdad $e^{w \log z} = z^w$ se verifica en todos los casos en los que el segundo miembro tiene por ahora sentido. Esto permite usar dicha igualdad como definición del segundo miembro en cualquier caso, generalizando así todos los casos conocidos.

Para $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$ definimos la **potencia principal** de base z y exponente w como el número complejo no nulo z^w dado por

$$z^w = e^{w \log z}$$

A partir de la potencia principal deducimos claramente todos los elementos del conjunto $[z^w]$:

$$[z^w] = \big\{ e^{w(\log z + 2k\pi i)} \ : \ k \in \mathbb{Z} \big\} = \big\{ z^w e^{2k\pi i w} \ : \ k \in \mathbb{Z} \big\}$$

No debemos pensar que este conjunto es siempre infinito, ya que la exponencial es periódica. Por ejemplo, si $w \in \mathbb{Z}$, es claro que $[z^w]$ tiene un solo elemento, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.

En general, será fácil saber si una potencia es un conjunto finito y en tal caso conocer su número de elementos. La igualdad anterior deja claro que esto no dependerá de la base, sino solamente del exponente, pues nos dice que, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $[z^w]$ es equipotente a $\big\{ e^{2k\pi i w} \ : \ k \in \mathbb{Z} \big\}$. Usaremos varias veces una observación inmediata: para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$e^{2\pi i \alpha} = e^{2\pi i \beta} \implies \alpha - \beta \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

pues de $e^{2\pi i(\alpha - \beta)} = 1$ deducimos $2\pi i(\alpha - \beta) = 2\pi i m$ con $m \in \mathbb{Z}$, luego $\alpha - \beta = m \in \mathbb{Z}$.

Dado $w \in \mathbb{C}$, si $k, h \in \mathbb{Z}$ verifican $e^{2k\pi i w} = e^{2h\pi i w}$, deducimos que $(k-h)w \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $k = h$, o bien $w \in \mathbb{Q}$. Por tanto:

- *Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de $\mathbb{Z}$ en $\left[z^w\right]$, es biyectiva.*

Para ver lo que ocurre cuando el exponente es un número racional, empezamos por el caso $w = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, el algoritmo de la división euclídea nos permite escribir $k = qn + r$ donde $q, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leqslant r < n$. Entonces $e^{2k\pi i/n} = e^{2q\pi i} e^{2r\pi i/n} = e^{2r\pi i/n}$, luego, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, el conjunto $\left[z^{1/n}\right]$ es finito y tiene a lo sumo n elementos. Además, si $r, s \in \mathbb{Z}$ verifican que $0 \leqslant r, s < n$, de $e^{2r\pi i/n} = e^{2s\pi i/n}$ usando (4) deducimos que $(r-s)/n \in \mathbb{Z}$, pero $-1 < (r-s)/n < 1$, luego $r = s$. Por tanto, $\left[z^{1/n}\right]$ tiene exactamente n elementos. Por otra parte, para $v \in \left[z^{1/n}\right]$ tenemos $v = e^{(1/n)\log z} e^{2k\pi i/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y la fórmula de adición para la exponencial nos dice claramente que $v^n = e^{\log z} e^{2k\pi i} = z$. Así pues, los n elementos de $\left[z^{1/n}\right]$ son soluciones de la ecuación $v^n = z$, que obviamente no puede tener más soluciones. Hemos probado:

- *Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo número complejo no nulo tiene n **raíces n-ésimas** distintas, que son precisamente los elementos de la potencia $\left[z^{1/n}\right]$:*

$$[z^{1/n}] = \left\{v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = z\right\} = \left\{z^{1/n} e^{2r\pi i/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n\right\}$$

Naturalmente decimos que $z^{1/n}$ es la **raíz n-ésima principal** de cada $z \in \mathbb{C}^*$. Cuando $z = x \in \mathbb{R}^+$, es claro que $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es la única raíz n-ésima positiva de x. Para $x = 1$ es obvio que $1^{1/n} = 1$ mientras el conjunto $\left[1^{1/n}\right]$ nos da las *raíces n-ésimas de la unidad* que, escribiendo $u_n = e^{2\pi i/n}$, vienen dadas por

$$\left[1^{1/n}\right] = \left\{v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = 1\right\} = \left\{1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{n-1}\right\}$$

Forman el grupo cíclico de orden n con generador u_n y, geométricamente, son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia de centro 0 y radio 1, de forma que un vértice es 1. A partir de ellas obtenemos las raíces n-ésimas de cualquier $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{z^{1/n} u_n^r \,:\, r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n\right\}$$

que de nuevo son los vértices del n-ágono regular inscrito en la circunferencia centrada en el origen con radio $|z|^{1/n}$, siendo $z^{1/n}$ uno de esos vértices.

Podemos ya contar fácilmente el número de elementos del conjunto $\left[z^w\right]$ para cualesquiera $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{Q}$. Para ello tomamos $n = \min\{m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z}\}$ conjunto que no es vacío porque $w \in \mathbb{Q}$, y tiene mínimo por el principio de buena ordenación. Entonces $w = p/n$ con $p \in \mathbb{Z}$ y la fórmula de adición para la exponencial nos dice claramente que

$$\left[z^w\right] = \left[z^{p/n}\right] = \left\{v^p \,:\, v \in \left[z^{1/n}\right]\right\} = \left\{z^{p/n} e^{2r\pi i p/n} : r \in \mathbb{Z},\, 0 \leqslant r < n\right\}$$

Para concluir que este conjunto tiene exactamente n elementos, supongamos por el contrario que $e^{2r\pi i p/n} = e^{2s\pi i p/n}$ con $r, s \in \mathbb{Z}$ y $0 \leqslant r < s < n$. Usando de nuevo (4) vemos que $(s-r)\,p/n \in \mathbb{Z}$, es decir, $(s-r)\,w \in \mathbb{Z}$, lo que contradice la definición de n, ya que $s - r \in \mathbb{N}$ y $s - r \leqslant s < n$.

- *Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\left[z^w\right]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$.*

5.7. Funciones exponenciales y funciones potencia

A la hora de definir este tipo de funciones, tenemos dos opciones, usar la potencia como un conjunto del que elegir un elemento según convenga, como hemos hecho con los logaritmos, o usar solamente la potencia principal.

Para las funciones exponenciales, fijamos la base $a \in \mathbb{C}^*$ y para $z \in \mathbb{C}$ debemos elegir entre a^z y $[a^z]$. La elección está muy clara, porque la función $z \mapsto a^z = e^{z \log a}$ tiene las propiedades deseables, tanto desde el punto de vista analítico, es una función entera, como desde el algebraico, es un epimorfismo del grupo aditivo $\mathbb{C}$ sobre el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$:

- *Fijado $a \in \mathbb{C}^*$ la función exponencial de base a es la función $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dada por*

$$\exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica que $a^{z+w} = a^z a^w$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.

Como ocurría en el caso real, esta gama de funciones no aporta nada nuevo, su estudio se reduce al de la función exponencial por antonomasia: $\exp_e = \exp$. Nótese que han aparecido funciones exponenciales cuya base es un número real negativo, por ejemplo : $(-1)^z = e^{i\pi z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. A título de curiosidad, la igualdad $[a^{z+w}] = [a^z]\,[a^w]$, donde el segundo miembro se entiende lógicamente como el conjunto de todos los productos de los elementos de $[a^z]$ por los de $[a^w]$, no es cierta en general. Por ejemplo, para $a = -1$ y $z = 1/2 = -w$ se tiene $[a^{z+w}] = \{1\}$ pero $[a^z] = [a^w] = \{i, -i\}$, luego $[a^z]\,[a^w] = \{1, -1\}$.

Con las funciones potencia va a ocurrir lo contrario que con las exponenciales. Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z \in \mathbb{C}^*$ debemos optar entre z^α y $[z^\alpha]$. Nótese que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, z^α es el único elemento de $[z^\alpha]$ y la función potencia $z \to z^\alpha$ no ofrece ningún problema, es una función racional. En general, es $z \mapsto [z^\alpha]$ la que tiene la propiedad algebraica típica de las funciones potencia:

$$[(zw)^\alpha] = [z^\alpha]\,[w^\alpha] \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Operando con conjuntos, el razonamiento es muy claro:

$$\begin{aligned}[(zw)^\alpha] &= \exp\big(\alpha \operatorname{Log}(zw)\big) = \exp\big(\alpha(\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w)\big) \\ &= \exp\big(\alpha \operatorname{Log} z\big)\,\exp\big(\alpha \operatorname{Log} w\big) = [z^\alpha]\,[w^\alpha]\end{aligned}$$

Por el contrario, en general $(zw)^\alpha$ puede no coincidir con $z^\alpha w^\alpha$. En el caso más sencillo, $\alpha = 1/2$, tomando $z = w = -1$ vemos que dicha igualdad no se verifica, pues $(-1)^{1/2} = i$, luego $(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = -1$, pero $1^{1/2} = 1$. Podríamos decir que, desde el punto de vista algebraico, la opción adecuada para la función potencia es $z \mapsto [z^\alpha]$.

Se plantea entonces, igual que con el logaritmo, el problema de elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, un elemento de $[z^\alpha]$, de forma que se obtenga una función holomorfa. Nos centramos en el caso $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ que es el más interesante. Ahora el problema es si podemos elegir, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, o incluso también para $z = 0$, una raíz n-ésima de z de forma que obtengamos una función que al menos sea continua. La relación de este problema con el planteado para el logaritmo es clara:

- *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ tal que exista un logaritmo holomorfo en Ω, es decir, una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una **raíz n-ésima holomorfa** en Ω, es decir, existe una función $\varphi_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi_n(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$.*

En efecto basta tomar $\varphi_n(z) = e^{(1/n)f(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En particular, fijado $\theta \in \mathbb{R}$, en el dominio $\Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$ existe una raíz n-ésima holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando $\theta = \pi$, se trata de la **raíz n-ésima principal** $z \mapsto z^{1/n}$, holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Cuando el abierto Ω contiene una circunferencia centrada en el origen, probamos ahora que no existe en Ω una raíz cuadrada continua, luego tampoco holomorfa. Por lo recién demostrado, tampoco puede existir en Ω un logaritmo holomorfo, como ya sabíamos, pero ahora tendremos un resultado más fuerte:

- *Sea $r \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la circunferencia $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. No existe una raíz cuadrada continua en S, es decir, no existe una función continua $\varphi : S \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in S$.*

Supongamos, por reducción al absurdo, que φ es una raíz cuadrada continua en S. Por otra parte sea ψ la restricción a S de la raíz cuadrada principal, es decir $\psi(z) = z^{1/2} = e^{(1/2)\log z}$ para todo $z \in S$, que sabemos es una función continua en $S_0 = S \setminus \{-r\} = S \cap (\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$, pero del comportamiento del logaritmo principal en $\mathbb{R}^-$ se deduce que ψ no tiene límite en $-r$.

Ambas funciones son continuas en S_0 y verifican que $\varphi(z)^2 = \psi(z)^2 = z \neq 0$ para todo $z \in S_0$ luego ψ/φ es una función continua en S_0 que sólo toma los valores 1 y -1. Ahora bien, S_0 es conexo, por ser la imagen del intervalo $]-\pi, \pi[$ por la función continua $t \mapsto re^{it}$. Por tanto, o bien $\psi(z) = \varphi(z)$ para todo $z \in S_0$, o bien $\psi(z) = -\varphi(z)$ para todo $z \in S_0$. En ambos casos llegamos a contradicción, pues φ tiene límite en $-r$ pero ψ no lo tiene. ■

Nótese que, para preguntarse si en un abierto no vacío Ω existe una raíz cuadrada continua, no parecía en principio necesario suponer que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, pero si $0 \in \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{D}(0, r) \subset \Omega$ y el resultado recién probado nos da respuesta negativa.

5.8. El seno y el coseno

La fórmula de Euler indica claramente cómo podemos extender las funciones reales seno y coseno para definirlas en todo el plano complejo. Por tanto, el **coseno** y el **seno** son las funciones enteras definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que claramente verifican $\operatorname{sen}' z = \cos z$ y $\cos'(z) = -\operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Nótese que seguimos teniendo $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pero obviamente esto ya no implica que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ sean la parte real e imaginaria de e^{iz}.

Como se puede adivinar, todas las propiedades del seno y el coseno, que generalizan las de sus restricciones a $\mathbb{R}$, se deducen fácilmente de las propiedades de la exponencial compleja. Repasaremos algunas de ellas, cuya comprobación es siempre rutinaria.

Es obvio que el coseno es una función *par* y el seno es una función impar, es decir, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos(-z) = \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, la fórmula de adición de la exponencial nos permite escribir

$$\begin{aligned} \cos(z+w) + i\operatorname{sen}(z+w) &= \big(\cos z + i\operatorname{sen} z\big)\big(\cos w + i\operatorname{sen} w\big) \qquad \text{y} \\ \cos(z+w) - i\operatorname{sen}(z+w) &= \big(\cos z - i\operatorname{sen} z\big)\big(\cos w - i\operatorname{sen} w\big) \end{aligned}$$

de donde claramente deducimos las *fórmulas de adición* para el seno y el coseno

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \qquad \text{y} \\ \operatorname{sen}(z+w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \end{aligned}$$

De ellas se deduce claramente que otras muchas identidades trigonométricas, conocidas en variable real, se siguen verificando en todo el plano complejo. Por ejemplo, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\cos\big(z + (\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} z = \cos'(z) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z = \operatorname{sen}'(z)$$

También vemos que, para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se tiene

$$\cos\big(z + (-1)^k\pi\big) = (-1)^k \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + (-1)^k\pi\big) = (-1)^k \operatorname{sen} z$$

luego el seno y el coseno son funciones 2π-*periódicas*.

De la fórmula de adición para el coseno, tomando $w = -z$ deducimos que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

pero es un error pensar que, como ocurría en $\mathbb{R}$, las funciones seno y coseno estén acotadas.

Para tener expresiones cómodas de la parte real e imaginaria del coseno y el seno, conviene introducir las funciones **coseno hiperbólico** y **seno hiperbólico**, que son las funciones enteras ch y sh definidas, para todo $z \in \mathbb{C}$, por

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Esta vez, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos claramente

$$\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z\,, \qquad \operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

La relación entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas es clara. Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = -i\operatorname{sh}(iz)$$

En particular, para $y \in \mathbb{R}$, tomando $z = iy$ obtenemos

$$\cos(iy) = \operatorname{ch}(-y) = \operatorname{ch} y \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(iy) = -i \operatorname{sh}(-y) = i \operatorname{sh} y$$

Ahora las fórmulas de adición nos dicen que para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Puesto que el seno y coseno hiperbólico, al igual que los trigonométricos, toman valores reales en el eje real, las anteriores igualdades nos dan la parte real e imaginaria del seno y coseno. También podemos calcular fácilmente su módulo

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \qquad \text{y} \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y$$

donde, para ambas igualdades hemos usado que $\operatorname{ch}^2 y = 1 + \operatorname{sh}^2 y$.

Como $\operatorname{sh} y \to +\infty$ $(y \to \pm\infty)$ vemos claramente que el seno y el coseno complejos no son funciones acotadas. De hecho probamos fácilmente que la imagen de ambas funciones es $\mathbb{C}$. En vista de la igualdad $\operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z$, basta trabajar con el coseno.

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \cos z = w \quad &\Leftrightarrow \quad e^{iz} - 2w = -e^{-iz} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 2we^{iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(e^{iz} - w\big)^2 = w^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - w \in \big[(w^2-1)^{1/2}\big] \end{aligned}$$

Para todo $w \in \mathbb{C}$, es claro que $w \pm \big(w^2 - 1\big)^{1/2} \neq 0$, luego la última ecuación tiene infinitas soluciones, que pueden describirse de la siguiente forma

$$\cos z = w \quad \Longleftrightarrow \quad z \in -i \operatorname{Log}\big(w \pm (w^2-1)^{1/2}\big)$$

Tenemos aquí calculados todos los valores del arco-coseno y podríamos hacer un estudio del mismo como función compleja de variable compleja, similar al del logaritmo y directamente relacionado con él. Preferimos estudiar con más detalle el arco-tangente.

5.9. La tangente y el arco-tangente

La tangente se definirá naturalmente como el cociente entre seno y coseno, luego debemos descartar los puntos en los que se anula el coseno. Se puede tomar $w = 0$ en la discusión anterior, pero también se puede usar el módulo del coseno, pues para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\cos(x+iy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh} y = \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \ \text{ y } \ x = (2k+1)\pi/2 \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}$$

Nos encontramos con la grata sorpresa de que el coseno complejo no tiene más ceros que los del coseno real, podemos definir la tangente en todo punto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Consideramos por tanto el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y definimos en él la función **tangente** por

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \forall z \in \Omega$$

Tenemos claramente $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z$ para todo $z \in \Omega$. También es claro que $\{z+\pi : z \in \Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z$ para todo $z \in \Omega$, luego la tangente es una función π-*periódica*. Para calcular su imagen, dados $w \in \mathbb{C}$ y $z \in \Omega$, tenemos claramente

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = iw\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz}\left(1 - iw\right) = e^{-iz}\left(1 + iw\right)$$

Cuando $w = \pm i$ la última igualdad es imposible puesto que uno de sus miembros se anula y el otro no. Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ tenemos claramente $(1+iw)/(1-iw) \neq 0$ y concluimos que

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$$

Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y para cada w en dicho conjunto, tenemos calculados los puntos en los que la tangente toma el valor w, que lógicamente serán todos los valores del arco tangente.

Cambiando la notación para usar siempre z como variable, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definimos el **conjunto arco-tangente** de z por

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Naturalmente, la función **arco-tangente principal** se define usando el logaritmo principal:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

Se puede deducir directamente de la definición que esta función extiende al arco-tangente real, lo que justifica la notación, pero lo comprobaremos de otra forma más adelante.

Vemos que $\operatorname{arc\,tg}$ es derivable en $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ si, y sólo si, $(1+iz)/(1-iz) \notin \mathbb{R}^-$. Es claro que $(1+iz)/(1-iz) \neq -1$, mientras que para $\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tenemos

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -\rho \quad \Leftrightarrow \quad z = i\,\frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \Leftrightarrow \quad z = iy \quad \text{con } y \in \mathbb{R}, \ |y| > 1$$

Tenemos por tanto una función holomorfa en el dominio $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, \ |y| \geqslant 1\}$ que se obtiene al suprimir del plano dos semirrectas contenidas en el eje imaginario. Calculamos fácilmente su derivada, usando la del logaritmo principal y las reglas de derivación:

$$\operatorname{arc\,tg}'(z) = \frac{1}{2i}\,\frac{1-iz}{1+iz}\,\frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in U$$

Si ahora f es la restricción a $\mathbb{R}$ del arco tangente principal, sabemos que f es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = 1/(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(0) = 0$, deducimos que f es el arco-tangente real, función que hemos extendido obteniendo una función holomorfa en U.

Finalmente, en $D(0,1)$ expresamos el arco-tangente como suma de una serie de potencias centrada en el origen. Para ello usamos nuevamente la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Esto nos lleva a considerar la función $h : D(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Tenemos claramente $h \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ con $h'(z) = 1/(1+z^2) = \operatorname{arc\,tg}'(z)$ para todo $z \in D(0,1)$. Por tanto, en el dominio $D(0,1)$, tenemos que h y el arco-tangente principal difieren en una constante. Como $h(0) = 0 = \operatorname{arc\,tg} 0$, concluimos que

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

5.10. Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando que

   $$f(z+w) = f(z)\, f(w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

   Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(r e^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

   $$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \{z_n^{w_n}\} \to e^{\lambda}$$

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} e^{-nz^2}$.

6. Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a+b+c=0$.

7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ y $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.

8. Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

   (a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$$

   (b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z)$$

9. Probar que la función $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$$

es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$ y consideremos el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$, probar que definiendo $f(z) = z^\rho$ para todo $z \in \Omega$, se obtiene una biyección de Ω sobre el dominio $\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_\rho)$.

11. Probar que el seno, el coseno y la tangente son funciones simplemente periódicas.

12. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$

13. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos f(z) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) = \arccos x$ para todo $x \in]-1, 1[$. Calcular la derivada de f.

14. Para $z \in D(0,1)$ con $\operatorname{Re} z \neq 0$, probar que

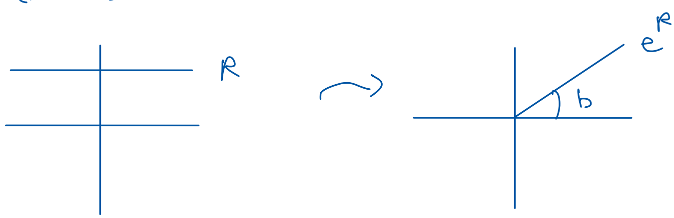
$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

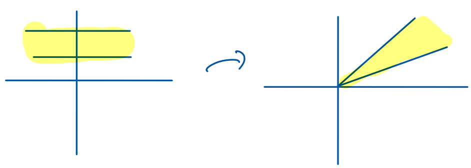
A) Recta horizontal:

Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo y la recta $R \equiv \{x+yi \,/\, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ Para $x+iy \in R$

$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ Como y fijo $\Rightarrow e^{iy}$ cte $\Rightarrow$ la imagen es el resultado de multiplicar e^{bi} por $e^x \in \mathbb{R}^+$, que sería como rotar el semieje positivo un ángulo $\arg(e^{ib}) = b$



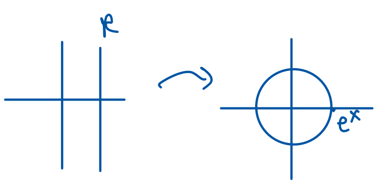
Por tanto, una banda:



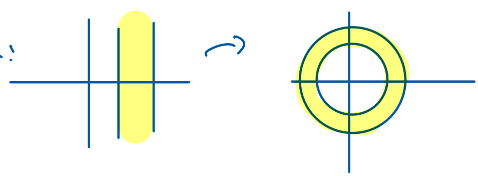
B) Recta vertical

Sea $x \in \mathbb{R}$ fijo y la recta $R \equiv \{x+yi \,/\, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ Para $x+iy \in R$

$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ Como x fijo $\Rightarrow e^x$ cte $\Rightarrow$ la imagen es la circunferencia centrada en el origen de radio e^x



Por tanto, una banda:

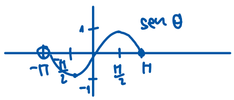


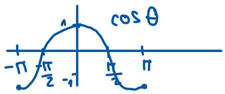
3. Dado $\theta \in]-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = \exp(re^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Como θ fijo $\Rightarrow \{re^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}^+\}$ es una semirrecta.

Como $r \in \mathbb{R}^+$, $|e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow re^{i\theta}$ es una rotación de θ del semieje positivo.

$$\lim_{r\to\infty} \exp(re^{i\theta}) = \lim_{r\to\infty} e^{r(\cos\theta + i \,\mathrm{sen}\,\theta)} = \lim_{r\to\infty} e^{r\cos\theta} e^{i r \,\mathrm{sen}\,\theta} = L$$





$\theta \in]-\pi, \pi] \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta < 0 \ \forall \theta \in]-\pi, 0[$, $\mathrm{sen}\,\theta > 0 \ \forall \theta \in]0, \pi]$

- $\cos\theta = 0 \Rightarrow \nexists L$, pues $\mathrm{sen}\,\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. es una espiral
- $\cos\theta > 0 \Rightarrow L = +\infty$
- $\cos\theta < 0 \Rightarrow L = 0$

5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nz^2}$.

Sea $f_n(z) = e^{-nz^2} = \left(e^{-z^2}\right)^n$

$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge abs $\iff \sum_{n\geq 0} |f_n|$ converge $\iff \left|e^{-z^2}\right| < 1 \iff e^{\operatorname{Re}(-z^2)} < 1 \overset{*}{\iff}$
$e^{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2} < 1 \iff (\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 < 0 \iff |\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|$

$* \; -z^2 = -(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)^2 = -(\operatorname{Re} z^2) + (\operatorname{Im} z)^2 - 2i \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$

Sea $A = \{ z \in \mathbb{C} / \; |\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z| \}$

Hemos visto, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge abs. en $A \Rightarrow$ también puntualmente.

Además, no lo hace en $\mathbb{C} \setminus A$.

Sea $K \subseteq A$ compacto, $g_n : K \to \mathbb{C} \; / \; g_n(z) = \left|e^{-z^2}\right|^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$g_n(K) \subseteq [0,1[\Rightarrow g_n(K) \subseteq [0, \varepsilon] \quad \varepsilon < 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\forall z \in K, \; g_n(z) \leq \varepsilon < 1$

$\left.\begin{array}{l} |f_n(z)| \leq g_n(z)^n \leq \varepsilon^n \\ \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n \text{ converge} \end{array}\right\} \overset{\text{Por Test Weierstrass}}{\Longrightarrow} \sum_{n\geq 0} f_n$ c.u. en $K \subseteq A$ compacto

12. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n}$

Sea $f_n(z) = \frac{\text{sen}(nz)}{2^n} = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2 \cdot 2^n i}$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n} - \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n}\right)$$

- $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n}$

Sea $f^1_n(z) = \frac{e^{inz}}{2^n} = \left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n$

$\sum_{n\geq 0} f^1_n$ c.a. $\Longleftrightarrow \left|\frac{e^{iz}}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow e^{\text{Re}(iz)} < 2 \Longleftrightarrow e^{-\text{Im}(z)} < 2 \Longleftrightarrow \text{Im} z > -\ln 2$

- $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n}$

Sea $f^2_n(z) = \frac{e^{-inz}}{2^n} = \left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n$

$\sum_{n\geq 0} f^2_n$ c.a. $\Longleftrightarrow \left|\frac{e^{-iz}}{2}\right| < 1 \Longleftrightarrow e^{\text{Im} z} < 2 \Longleftrightarrow \text{Im} z < \ln 2$

Por tanto, vemos que $\sum_{n\geq 0} f_n$ c.a. en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / -\ln 2 < \text{Im} z < \ln 2\} \Longrightarrow$ también puntualmente.

Análogamente a ejercicios anteriores, c.u. en cada compacto de Ω.