Universidad de Granada. Ecuaciones Diferenciales I. Grupo A
23 de Mayo de 2019

NOMBRE:

1. Dados números $a, b, c \in \mathbb{R}$, se definen las funciones

$$\phi_1(t) = a + bt^2 + \frac{c}{t}, \quad \phi_2(t) = a + 2bt^2 + \frac{b}{t}, \; t \in]0, \infty[.$$

Determina los valores de a, b y c para los que ϕ_1 y ϕ_2 forman un sistema fundamental de la ecuación

$$x'' - \frac{2}{t^2}x = 0.$$

$\phi_1'(t) = 2bt - \frac{c}{t^2}$ $\qquad$ $\phi_2'(t) = 4bt - \frac{b}{t^2}$

$\phi_1''(t) = 2b + \frac{2tc}{t^4} = 2b + \frac{2c}{t^3}$ $\qquad$ $\phi''(t) = 4b + \frac{2b}{t^3}$

Dado que $x \in C^2(\mathbb{R}^+) \Rightarrow$ el espacio de sol. $Z = \{c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \mid \phi_1, \phi_2 \in C^1(\mathbb{R}^+), c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Si ϕ_1, ϕ_2 forman sist fundamental deben ser solución:

$$2b + \frac{2c}{t^3} - \frac{2}{t^2}\left(a + bt^2 + \frac{c}{t}\right) = 2b + \frac{2c}{t^3} - \frac{2a}{t^2} - 2b - \frac{2c}{t^3} = -\frac{2a}{t^2} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$4b + \frac{2b}{t^3} - \frac{2}{t^2}\left(a + 2bt^2 + \frac{b}{t}\right) = 4b + \frac{2b}{t^3} - \frac{2a}{t^2} - 4b - \frac{2b}{t^3} = 0 = 0$$

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bt^2 + \frac{c}{t} & 2bt^2 + \frac{b}{t} \\ 2bt - \frac{c}{t^2} & 4bt - \frac{b}{t^2} \end{vmatrix} =$$

$$\left(bt^2 + \frac{c}{t}\right)\left(4bt - \frac{b}{t^2}\right) - \left(2bt^2 + \frac{b}{t}\right)\left(2bt - \frac{c}{t^2}\right) =$$

$$4b^2\cancel{t^3} - b^2 + 4bc - \frac{b\cancel{c}}{\cancel{t^3}} - 4b^2\cancel{t^3} + 2bc - 2b^2 + \frac{b\cancel{c}}{\cancel{t^3}} =$$

$$-3b^2 + 6bc = b(6c - 3b) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0, \; 6c - 3b \neq 0 \Rightarrow b \neq 2c$$

Por tanto, ϕ_1, ϕ_2 son sist. fundamental $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 \neq b \neq 2c \end{cases}$

2. Encuentra todas las soluciones de la ecuación

$$x'' - x = e^t + 2\cos t.$$

Por Principio de Superposición, la solución será de la forma

$x(t) = x_{1*}(t) + x_{2*}(t) + \ker L$, $L: C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ / $L[x] = x'' - x$

y x_{1*}, x_{2*} sol. particulares para $L[x] = e^t$ y $L[x] = 2\cos t$, respectivamente.

1) $x'' - x = e^t$

Las soluciones suelen ser $x_{1*}(t) = p(t)e^t$, con $p(t)$ polinomio.

$$\left.\begin{aligned} x'_{1*}(t) &= p'(t)e^t + p(t)e^t \\ x''_{1*}(t) &= p''(t)e^t + 2p'(t)e^t + p(t)e^t \end{aligned}\right\} \overset{\text{Por ser sol.}}{\Longrightarrow} p''(t)e^t + 2p'(t)e^t = e^t(p''(t) + 2p'(t)) = e^t$$

$\Rightarrow p''(t) + 2p'(t) = 1 \Longrightarrow p''(t) = 0 \Longrightarrow p'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow p(t) = \frac{1}{2}t \Longrightarrow$

$x_{1*}(t) = \frac{e^t t}{2}$ es una sol. particular.

2) $x'' - x = 2\cos t$

$x_*(t) = a\cos t + b\,\text{sen}\,t$

$x'_*(t) = -a\,\text{sen}\,t + b\cos t$

$x''_*(t) = -a\cos t - b\,\text{sen}\,t$

Al ser sol. debe verificar ecuación:

$-a\cos t - b\,\text{sen}\,t - a\cos t - b\,\text{sen}\,t = 2\cos t \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \Rightarrow a = -1 \\ -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

$x_{1*}(t) = -\cos t$ es sol. particular.

3) $x'' - x = 0$

Sabemos que $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Por tanto,

$x(t) = -\cos t + \frac{e^t t}{2} + c_1 e^t + c_2 e^{-t} = -\cos t + e^t\left(\frac{t}{2} + c_1\right) + c_2 e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3. Se definen las funciones

$$x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ x_0(t) = 1, \ x_{n+1}(t) = 1 + 2\int_0^t x_n(s)ds, \ n \geq 0.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, calcula $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$.
¿En qué sentido converge la sucesión de funciones $\{x_n\}_{n\geq 0}$?

Dado que $\mathbb{R}$ no está acotado, no podemos asemejar con los Iterantes de Picard.

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = 1 + 2\int_0^t x_0(s)ds = 1+2t$$

$$x_2(t) = 1+2\int_0^t x_1(s)ds = 1+2\int_0^t (1+2s)\, ds = 1+2t + 2t^2$$

$$x_3(t) = 1+2\int_0^t x_2(s)ds = 1+2\int_0^t 1+2s+2s^2 ds = 1+2t+2t^2 + 2\cdot 2\frac{t^3}{3}$$

$$x_4(t) = 1+2\int_0^t x_3(s)ds = 1+2\int_0^t 1+2s+2s^2 + 2\cdot 2\frac{s^3}{3} ds =$$

$$= 1+2t+2t^2+2\cdot 2\frac{t^3}{3} + 2\cdot 2\cdot 2\frac{s^4}{3\cdot 4}$$

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} 2^n \cdot \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(2t)^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = e^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\{x_n\}$ cu. a x en $\mathbb{R}$ $\iff \|x - x_n\|_\infty \to 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, donde

$$\|x-x_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t) - x_n(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| e^{2t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(2t)^n}{n!} \right| = +\infty$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ únicamente converge puntualmente.

4. Se consideran las funciones

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{\cos nt}{n}.$$

¿Converge uniformemente la sucesión $\{f_n\}$? ¿y la sucesión de derivadas $\{f_n'\}$?

Vemos $f(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\{f_n\}$ c.u. en $\mathbb{R} \iff \| f_n(t) - f(t) \|_\infty \to 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, donde

$\| f_n(t) - f(t) \|_\infty = \left\| \frac{\cos(nt)}{n} \right\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nt)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \to 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies$

$\| f_n(t) - f(t) \|_\infty \to 0 \implies \{f_n\}$ c.u. en $\mathbb{R}$ a f.

$f_n'(t) = -\operatorname{sen} nt$

Dado que $\{f_n'(t)\}$ no tiene límite $\forall t \in \mathbb{R} \implies \{f_n'\}$ no converge puntualmente

$\implies \{f_n'\}$ no c.u.

5. Se considera la ecuación lineal homogénea $x'' + 2x' = 0$ y se denota por Z al conjunto de soluciones. Se define la aplicación lineal

$$\Phi : Z \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(3) \end{pmatrix}.$$

¿Es un isomorfismo? Calcula $\Phi^{-1}(v)$ con $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sea $y = x' \Rightarrow y' + 2y = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^{-2t}$ $K \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x(t) = \int Ke^{-2t}dt = -2Ke^{-2t} + C = Ke^{-2t} + C$, $K, C \in \mathbb{R}$

es sol. de la ecuación y por tanto $x \in Z$

Veamos $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$ para ver que es inyectiva.

$\operatorname{Ker}\Phi = \{x \in Z \,/\, \Phi(x) = 0\}$

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(3) = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x'(3) = -2Ke^{-6} = 0 \Rightarrow K = 0 \\ x(0) = C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\Phi = \{0\} \Rightarrow \Phi$ inyectiva

Como $\dim(Z) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ y Φ inyectiva $\Rightarrow \Phi$ isomorfismo.

$\Phi^{-1}(v) = \{x \in Z \,/\, \Phi(x) = v\}$

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + C \\ -2Ke^{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = 0, C = 1 \Rightarrow \Phi^{-1}(v) = \{1\}$