Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Variable Compleja I, Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Convocatoria ordinaria

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \dfrac{z-\beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. (**2.5 puntos**) Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \mapsto \dfrac{z}{a - \mathrm{e}^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x \operatorname{sen}(x) dx}{1 + a^2 - 2a\cos(x)} = \frac{2\pi}{a} \ln\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

Ejercicio 3. (**2.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{z^2}{1+t^2}}}{(1+t)^2}\, dt \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

b) Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en $\mathbb{C}$ y que su suma es una función entera.

Ejercicio 4. (**2.5**) Probar el **Lema de Schwarz**: Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leqslant 1$ para cada $z \in D(0,1)$. Entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para cada $z \in D(0,1)$. Además, si ocurre $|f'(0)| = 1$ ó $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{T}$ de modo que $f(z) = \alpha z$ para cada $z \in D(0,1)$.

Pista: Para cada $0 < r < 1$ estimar convenientemente el valor $\max\{|g(z)|: z \in \overline{D}(0,r)\}$ donde la función $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $g(0) = f'(0)$ y $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ para cada $z \in D(0,1)$.

Granada, 11 de junio de 2019

Ejercicio 1. (**2.5 puntos**) Sean f, g funciones enteras verificando

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$ de modo que $g(z) = \alpha z + \beta$ y $f(z) = \dfrac{z-\beta}{\alpha}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Como $f, g \in C(\mathbb{C}) \Longrightarrow f(g(0)) = 0$

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(g(z)) = z\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \Longrightarrow A' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset \Longrightarrow$
Por Principio Identidad, $f(g(z)) = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Sup. g no polinómica $\Longrightarrow$ Corolario Casorati, $\forall r > 0, g(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,r))$
denso en $\mathbb{C} \Longrightarrow \exists \{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \setminus D(0,r) \mid \{z_n\} \to \infty$ y $\{g(z_n)\} \to z_0 \in \mathbb{C}$

$\{f(g(z_n))\} = \{z_n\} \to \infty$, pero también $\{f(g(z_n))\} \to f(z_0) \in \mathbb{C}$!!!

Por tanto, g polinomio. Veamos que f lo es:

Sea $\{w_n\} \to \infty$
Por T^a Fundamental Álgebra, g sobreyectiva $\Longrightarrow$
$\exists \{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \mid g(z_n) = w_n$

Supongamos $\{z_n\} \not\to \infty \Longrightarrow \exists \{z_{\sigma(n)}\} \subseteq \mathbb{C} \mid \{z_{\sigma(n)}\} \to z_0$

$\{g(z_n)\} = \{w_n\} \to \infty$, pero $\{g(z_n)\} \to g(z_0) \in \mathbb{C}$!!!

Por tanto $\forall \{w_n\} \to \infty$, $\exists \{z_n\} \to \infty \mid \{f(w_n)\} = \{f(g(z_n))\} = \{z_n\} \to \infty \Longrightarrow$
f polinómica.

Por tanto, $gr(f \circ g) = gr f \cdot gr g = 1$

Si $g(z) = \alpha z + \beta \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0 \qquad f(g(z)) = f(\alpha z + \beta) = z \Longrightarrow$

$f(z) = \dfrac{z - \beta}{\alpha} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$