## Tema 7.- Clasificación de grupos abelianos finitos

**Teorema (estructura de los p-grupos abelianos finitos)**

Sea $A$ un p-grupo abeliano finito con $|A| = p^n, n \geq 1$. Entonces existen enteros $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_t = 1$, tales que $\beta_1 + \cdots + \beta_t = n$ y $A \cong C_{p^{\beta_1}} \oplus \ldots \oplus C_{p^{\beta_t}}$. Además esta expresión es única.

**Teorema (estructura de los p-grupos abelianos finitos, descomposición cíclica primaria)**

Sea $A$ un p-grupo abeliano finito con $|A| = {p_1}^{r_1} \ldots {p_k}^{r_k}, p_i\, primos$. Entonces

$$A \cong \oplus \left( C_{{p_i}^{n_{i1}}} \oplus \ldots \oplus C_{{p_i}^{n_{ij}}} \right) \; sumatoria\; en\; i = 1, \ldots, k$$

Donde $n_{i1} \geq \cdots \geq n_{ij} \geq 1 \quad n_{i1} + \cdots + n_{ij} = r_i$ y es única salvo el orden.

Esta descomposición se llama la *descomposición cíclica primaria* de $A$ y los ${p_i}^{n_{ij}}$ *los divisores elementales* del grupo abeliano $A$.

**Teorema (descomposición cíclica de un grupo abeliano finito)**

Sea $A$ un p-grupo abeliano finito. Entonces

$$A \cong C_{d_1} \oplus \ldots \oplus C_{d_t}$$

Con $d_1, \ldots, d_t$son enteros positivos tales que $d_1 \ldots d_t = |A|$ y ${d_i}/{d_j}$ para cada $j \leq i$.

Además, esta descomposición es única salvo orden.

Esta descomposición se llama la *descomposición cíclica primaria* de $A$ y los ${p_i}^{n_{ij}}$ *los divisores elementales* del grupo abeliano $A$.

**Corolario**

Si $n = p_1 \ldots p_k$ números primos, entonces, salvo isomorfismo, el único grupo abeliano de orden $n$ es el cíclico $C_n$.

**Definiciones**

Un *grupo abeliano libre* es un grupo abeliano que tiene una base, es decir, existe un subconjunto del grupo que lo genera y que además, es Z-linealmente independiente.

Si $A$ es abeliano y finitamente generado entonces

$$A\; es\; libre \Leftrightarrow A \cong Z^n = Z \oplus \ldots \oplus Z \;\; para\; algún\; n$$

Y en tal caso todo subgrupo $H$ de $A$ vuelve a ser libre, y por tanto, $H \cong Z^r, r \leq n$.

Si $A$ es abeliano y finitamente generado y se considera

$$T = \{a \in A: o(a) es\; finito\}$$

Se tiene que $T$ es un subgrupo de $A$, que se llama **la torsión de $A$** y es un grupo abeliano finito.

Además $A/_{T}$ es libre de torsión (es decir, no tiene elementos de orden finito salvo el cero), y al ser finitamente generado es libre.

**Relación 7 Clasificación de grupos abelianos**

**Ejercicio 3**

**Calcular la descomposición cíclica y cíclica primaria de los grupos abelianos $C_{24}xC_{40}xC_{35}$ y $C_{14}xC_{100}xC_{40}$. ¿Son isomorfos?**

**Solución**

**Ejercicio 6**

**Listar todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 10, 16, 20, 30, 40, 108 y 360, dando sus factores invariantes, divisores elementales y descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.**

**Solución**

**Ejercicio 7**

**Calcular la forma normal, los factores invariantes y los divisores elementales de las siguientes matrices.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -22 & -48 & -267 \\ -4 & -4 & 31 \\ -4 & -24 & 105 \\ 4 & -6 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

**Solución**

**Ejercicio 8**

**Para los siguientes grupos abelianos calcular sus rangos y sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias:**

**a.-** $\boldsymbol{G_1 = \langle a, b, c; \begin{cases} 3a + 9b + 9c = 0 \\ 9a - 3b + 9c = 0 \end{cases} \rangle}$

**b.-** $\boldsymbol{G_2 = \langle a, b, c; \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0 \\ 5a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \rangle}$

**c.-** $\boldsymbol{G_3 = \langle a, b, c; \begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ 5a + 17b + 12c = 0 \\ 6a + 4c = 0 \end{cases} \rangle}$

**d.-** $\boldsymbol{G_4 = \langle a, b, c; \begin{cases} 12a + 4b + 6c = 0 \\ -4a + 2b + 8c = 0 \\ -2a + 16b + 34c = 0 \end{cases} \rangle}$

**e.-** $\boldsymbol{G_5 = Z_{24} \oplus Z_{40} \oplus Z_{35}}$

**Solución**

$a)\ G_1 = \langle a, b, c; \begin{cases} 3a + 9b + 9c = 0 \\ 9a - 3b + 9c = 0 \end{cases} \rangle$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & -3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_2 - 3C_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -30 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 3\ \ d_2 = 6 \quad n = 3\ \ r = 2$$

El rango libre es $n - r = 3 - 2 = 1$.

La descomposición cíclica es: $G_1 \cong Z_3 \otimes Z_6 \otimes Z^1 \cong Z_3 \otimes Z_6 \otimes Z$

La descomposición cíclica primaria: $G_1 \cong Z_2 \otimes Z_3 \otimes Z_3 \otimes Z$

La torsión de $G_1$ es $Z_2 \otimes Z_3 \otimes Z_3$ y la parte libre de torsión es $Z$**.**

$b)\ G_2 = \langle a, b, c; \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 0 \\ 5a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \rangle$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 + 9F_1]{F_2 \leftrightarrow F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1\ \ d_2 = 3 \quad n = 3 \ \ r = 2$$

El rango libre es $n - r = 3 - 2 = 1$.

La descomposición cíclica es: $G_2 \cong Z_1 \otimes Z_3 \otimes Z^1 \cong Z_3 \otimes Z$

La descomposición cíclica primaria:$G_2 \cong Z_3 \otimes Z$

La torsión de $G_2$ es $Z_3$ y la parte libre de torsión es $Z$.

$c)\ G_3 = \langle a, b, c; \begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ 5a + 17b + 12c = 0 \\ 6a + 4c = 0 \end{cases} \rangle$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 17 & 0 \\ 2 & 12 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \leftrightarrow F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1\ \ d_2 = 2 \ \ d_3 = 10\ \ n = 3 \ \ r = 3$$

El rango libre es $n - r = 3 - 3 = 0$.

La descomposición cíclica es: $G_2 \cong Z_1 \otimes Z_2 \otimes Z_{10} \cong Z_2 \otimes Z_{10}$

La descomposición cíclica primaria: $G_2 \cong Z_2 \otimes Z_2 \otimes Z_5$

La torsión de $G_2$ es $Z_2 \otimes Z_2 \otimes$ y no tiene parte libre de torsión.

**Ejercicio 9**

**Dados los grupos abelianos:**

$$\boldsymbol{G = \langle a, b, c, d; \begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ a + 5c + 5d = 0 \\ 2a + 4c + 2d = 0 \end{cases} \rangle \;\; y\; H = Z^3/_K}$$

**Donde $\boldsymbol{K}$ es el subgrupo de generadores $\boldsymbol{\{(1,2,7),(1,4,7),(-1,0,2)\}}$. Calcular:**

**1.- El rango, los factores invariantes y los divisores elementales de cada uno de ellos.**

**2.- Sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.**

**3.- Las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de $\boldsymbol{G \otimes H}$.**

**Solución**

1.- y 2.- Sea $G$ un grupo abeliano y $S = \langle a, b, c, d\rangle \subset G$ un conjunto de generadores:

$$G = \langle a, b, c, d; \begin{cases} a + 2c - d = 0 \\ a + 5c + 5d = 0 \\ 2a + 4c + 2d = 0 \end{cases} \rangle$$

Y se considera $F$ el grupo abeliano libre con base $S$, entonces existe el homomorfismo sobreyectivo:

$$\varphi: F \to G \quad \varphi(a, b, c, d) = (a + 2c - d, a + 5c + 5d, 2a + 4c + 2d) \quad ker\varphi \leq F$$

$$ker\varphi \xrightarrow{inclusión} F \overset{\varphi}{\to} G$$

$$\langle x, y\rangle = \langle a, b, c, d\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \langle a, b, c, d\rangle M \Longrightarrow \begin{cases} x = a + 2c - d \\ y = a + 5c + 5d \\ z = 2a + 4c + 2d \end{cases}$$

Y se lleva $M$ a su forma normal:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \leftrightarrow F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_2 - 2C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1 \;\; d_2 = 1 \;\; d_3 = 12 \quad n = 4 \quad r = 3$$

El rango libre es $n - r = 4 - 3 = 1$.

La descomposición cíclica es: $G \cong Z_1 \otimes Z_1 \otimes Z_{12} \otimes Z^1 = Z_{12} \otimes Z^1 = Z_{12} \otimes Z$

La descomposición cíclica primaria: $G \cong Z_3 \otimes Z_4 \otimes Z$

La torsión de $G$ es $Z_3 \otimes Z_4$ y la parte libre de torsión es $Z$ **.**

$$H = {Z^3}/{K} \text{ donde } K \text{ es el subgrupo de generadores } \{(1,2,7),(1,4,7),(-1,0,2)\}$$

$$H = \left\langle x,y,z\colon \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+4y=0 \\ 7x+7y+2z=0 \end{cases} \right\rangle$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftrightarrow C_3+C_1]{C_2 \leftrightarrow C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes\colon d_1 = 1 \;\; d_2 = 1 \;\; d_3 = 18 \;\; n = 3 \;\; r = 3$$

El rango libre es $n - r = 3 - 3 = 0$.

La descomposición cíclica es: $H \cong Z_1 \otimes Z_1 \otimes Z_{18} = Z_{18}$

La descomposición cíclica primaria: $H \cong Z_2 \otimes Z_9$

La torsión de $H$ es $Z_2 \otimes Z_9$ y no tiene parte libre de torsión.

3.- $G \otimes H$

La descomposición cíclica es: $G \otimes H \cong Z_{12} \otimes Z \otimes Z_{18} = Z_{12} \otimes Z_{18} \otimes Z$

La descomposición cíclica primaria: $G \otimes H \cong Z_2 \otimes Z_3 \otimes Z_4 \otimes Z_9 \otimes Z$

**Ejercicio 10**

**a.- Encuentra todos los grupos abelianos distintos, salvo isomorfismo, de orden 500. Da para cada uno de ellos sus descomposiciones cíclica y cíclica primaria.**

**b.- Calcula las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de**

$$\boldsymbol{G = \left\langle a, b, c; \begin{cases} 3a - 3b + 9c = 0 \\ 6a + 12b - 9c = 0 \\ 12b + 9c = 0 \end{cases} \right\rangle}$$

**¿Cuántos elementos tiene $G$? ¿Tiene algún elemento de orden seis?**

**Solución**

**Ejercicio 11**

**Dados los grupos abelianos:**

$$G = \left\langle a, b, c; \begin{cases} 2a - 6b + 18c = 0 \\ 6a + 6c = 0 \end{cases} \right\rangle \ \ y\, H = {Z^3}/{K}$$

**donde $K$ es el subgrupo de generadores $\{(1, -9, 3), (1, -7, 1), (1, -1, 1)\}$. Calcular:**

**1.- Calcula sus rangos, sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.**

**2.- ¿Son isomorfos? ¿Lo son sus grupos de torsión?**

**3.- ¿Cuántos elementos de orden 6 tiene $H$?¿Y $G$?**

**4.- ¿Cuántos grupos hay, salvo isomorfismos, con los mismos elementos que $H$?**

**Solución**

**Ejercicio 12**

**1.- Calcula la descomposición cíclica y cíclica primaria de todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 484.**

**2.- Sea**

$$\boldsymbol{G = \langle a, b, c; \begin{cases} 2a + b + 4c = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{cases} \rangle \ y \ H = Z^2/_K}$$

**donde $\boldsymbol{K}$ es el subgrupo de generadores $\{(2,3),(6,3)\}$. Razona, calculando las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias de ambos, que no son isomorfos.**

**Solución**

1.- $|G| = 484 = 2^2 x 11^2$

Caso 1: $\{2^2, 11^2\} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_4 \otimes C_{121} \overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{484}$

Caso 2: $\{2,2,11^2\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 11^2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 242 \\ d_1 = 2 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_2 \otimes C_{121} \overset{DC}{\Rightarrow} G = C_2 \otimes C_{242}$

Caso 3: $\{2^2, 11, 11\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2^2 & 11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 44 \\ d_1 = 11 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_4 \otimes C_{11} \otimes C_{11} \overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{11} \otimes C_{444}$

Caso 4: $\{2,2,11,11\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 22 \\ d_1 = 22 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_2 \otimes C_{11} \otimes C_{11} \overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{22} \otimes C_{22}$

2.- Sea $G$ un grupo abeliano y $S = \langle a, b, c \rangle \subset G$ un conjunto de generadores:

$$G = \langle a, b, c; \begin{cases} 2a + b + 4c = 0 \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{cases} \rangle$$

Y se considera $F$ el grupo abeliano libre con base $S$, entonces existe el homomorfismo sobreyectivo:

$$\varphi: F \to G \quad \varphi(a, b, c) = (2a + b + 4c, 2a + 2b + 6c) \quad ker\varphi \leq F$$

$$ker\varphi \xrightarrow{inclusión} F \overset{\varphi}{\to} G$$

$$\langle x, y \rangle = \langle a, b, c \rangle \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \langle a, b, c \rangle M \Longrightarrow \begin{cases} x = 2a + b + 4c \\ y = 2a + 2b + 6c \end{cases}$$

Y se lleva $M$ a su forma normal:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 - 4F_1]{F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1 \ \ d_2 = 2 \quad n = 3 \ \ r = 2$$

El rango libre es $n - r = 3 - 2 = 1$.

La descomposición cíclica es: $G = C_2 \otimes Z^1 = C_2 \otimes Z^1 = C_2 \otimes Z$

La descomposición cíclica primaria: $G = C_2 \otimes Z$

La torsión de $G$ es $C_2$ y la parte libre de torsión es $Z$ **.**

$$H = {Z^2}/_{K} \text{ donde } K \text{ es el subgrupo de generadores } \{(2,3),(6,3)\}$$

$$H = \left\langle x, y : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases} \right\rangle$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1 \;\; d_2 = 12 \quad n = 2 \;\; r = 2$$

El rango libre es $n - r = 2 - 2 = 0$.

La descomposición cíclica es: $H = C_{12}$

La descomposición cíclica primaria: $H = C_4 \otimes C_3 = C_{12}$

La torsión de $H$ es $C_{12}$ y no tiene parte libre de torsión**.**

Por lo tanto, $H$ y $G$, no son isomorfos porque uno tiene parte de torsión y otro no, es decir descomposiciones cíclicas distintas.

**Ejercicio 13**

**1.- Encuentra todos los grupos abelianos distintos, salvo isomorfismos, de orden 1176. Da para cada uno de ellos sus descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias.**

**2.- Calcular las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias del grupo abeliano dado en términos siguiente de generadores y relaciones siguientes:**

$$\boldsymbol{G = \langle x, y, z; \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2y - 5z = 0 \\ -5x + 2z = 0 \end{cases} \rangle}$$

**¿Qué tipo de órdenes tienen sus elementos?**

**Solución**

1.- $|G| = 1176 = 2^3 x 3 x 7^2$

Caso 1: $\{2^3, 3, 7^2\} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_8 \otimes C_3 \otimes C_{49} \overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{1176}$

Caso 2: $\{2, 2^2, 3, 7^2\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2^2 & 3 & 7^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 588 \\ d_1 = 2 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_4 \otimes C_3 \otimes C_{49}$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} G = C_2 \otimes C_{588}$$

Caso 3: $\{2,2,2,3,7^2\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7^2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} d_3 = 294 \\ d_2 = 2 \\ d_1 = 2 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_2 \otimes C_2 \otimes C_3 \otimes C_{49}$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} G = C_2 \otimes C_2 \otimes C_2 \otimes C_{294}$$

Caso 4: $\{2^3, 3,7,7\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2^3 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 168 \\ d_1 = 7 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_8 \otimes C_3 \otimes C_7 \otimes C_7$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{168} \otimes C_7$$

Caso 5: $\{2, 2^2, 3,7,7\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2^2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{cases} d_2 = 84 \\ d_1 = 14 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_4 \otimes C_3 \otimes C_7 \otimes C_7$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} G = C_{14} \otimes C_{84}$$

Caso 6: $\{2,2,2,3,7,7\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} d_3 = 42 \\ d_2 = 14 \\ d_1 = 2 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G = C_2 \otimes C_2 \otimes C_2 \otimes C_3 \otimes C_7 \otimes C_7$

$$\overset{DC}{\Rightarrow} G = C_2 \otimes C_{14} \otimes C_{42}$$

2.- $G = \langle x, y, z; \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2y - 5z = 0 \\ -5x + 2z = 0 \end{cases} \rangle$

Sea $\varphi: R^3 \to R^3$ definida por $\varphi(x,y,z) = (2x-5y, 2y-5z, -5x+2z)$, y se tiene que $G = ker\varphi$, cuya matriz asociada a $\varphi$ es:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A continuación se realiza la forma normal de $M$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_2+3C_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ -5 & -15 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ -15 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3+15F_1]{F_2 \leftrightarrow F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 25 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 25 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_2-C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 23 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_3-23F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 117 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 117 \end{pmatrix}$$

$$Factores\ invariantes: d_1 = 1\ \ d_2 = 1\ d_3 = 117 \quad n = 3 \quad r = 3$$

El rango libre es $n - r = 3 - 3 = 0$.

La descomposición cíclica es: $G = C_1 \otimes C_1 \otimes C_{117} = C_{117}$

La descomposición cíclica primaria: $G = C_{3^2} \otimes C_{13} = C_9 \otimes C_{13}$

Como no hay parte de libre de torsión, no tiene elementos de orden infinito, todos son de orden finito, y la parte de torsión es $C_{117}$, que es de orden 117, luego sus elementos dividen a 117, por lo tanto, son de orden: 1,3,9,13,39 $y$ 117.

**Ejercicio 14**

**Calcular las descomposiciones cíclicas y cíclicas primarias del grupo abeliano dado en términos siguiente de generadores y relaciones siguientes:**

$$\boldsymbol{G = \langle a, b, c, d; \begin{cases} 9a + 9b + c + 8d = 0 \\ 63a - b + 63c + 64d = 0 \\ 56a - 8b + 64c + 56d = 0 \end{cases} \rangle}$$

**¿Tiene $G$ elementos de orden infinito?¿Y de orden finito? Calcular cuántos grupos abelianos no isomorfos hay con el mismo orden que la torsión de $G$.**

**Solución**

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 1 & 8 \\ 63 & -1 & 63 & 64 \\ 56 & -8 & 64 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 63 & -1 & 63 & 64 \\ 64 & -8 & 56 & 56 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 64F_1]{F_2 - 63F_1} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & -568 & -504 & -440 \\ 0 & -584 & -520 & -456 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -568 & -504 & -440 \\ 0 & -584 & -520 & -456 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 : F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -568 & -504 & -440 \\ 0 & -16 & -16 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & -16 \\ 0 & -568 & -504 & -440 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_4 - C_2]{C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & -568 & 64 & 128 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 35F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 64 & 128 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 64 & 128 \\ 0 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 64 & 128 \\ 0 & 0 & -128 & -256 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -128 & -256 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -128 & -256 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -128 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 \end{pmatrix}$$

Los factores invariantes son: $d_1 = 1, d_2 = 8, d_3 = 128 \quad n = 4 \quad r = 3$. El rango libre: $n - r = 4 - 3 = 1$. Los divisores elementales: $2^3, 2^7$.

La parte libre de torsión de $G$ es $C^1$, y la parte de torsión es $C_1 \otimes C_8 \otimes C_{128} = C_8 \otimes C_{128}$

La descomposición cíclica: $G = C^1 \otimes C_8 \otimes C_{128}$, y la descomposición cíclica primaria: $G = C^1 \otimes C_8 \otimes C_{128}$

Si hay elementos de $G$ de orden infinito puesto que hay parte de libre de torsión de $G$. Y el número de elementos de orden finito de $G$ es:

$$|T(G)| = 8x128 = 1024 \; elementos$$

Veamos cuántos grupos abelianos no isomorfos de orden igual a la de la torsión:

$$|T(G)| = 1024 = 2^{10} \Longrightarrow$$

$$\{2^{10}\} \Longrightarrow G \cong C_{1024} \quad \{2, 2^9\} \Longrightarrow G \cong C_2 \otimes C_{512} \quad \{2,2,2^8\} \Longrightarrow G \cong C_2 \otimes C_2 \otimes C_{256} \ldots$$

Hay 10 grupos abelianos no isomorfos de orden igual a la de la torsión.

**Ejercicio 15**

**Calcular las descomposiciones cíclica y cíclica primaria de todos los grupos abelianos no isomorfos de orden 13916. Identifica la componente 3-primaria de cualquiera de esos grupos.**

**Solución**

$$|G| = 13916 = 2^2x7^2x71$$

Caso 1: $\{2^2, 7^2, 71\} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G \cong C_4 \otimes C_{49} \otimes C_{71} \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_{13916}$

Caso 2: $\{2,2,7^2,71\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7^2 & 71 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} d_1 = 6958 \\ d_2 = 2 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G \cong C_2 \otimes C_2 \otimes C_{49} \otimes C_{71} \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_2 \otimes C_{6958}$$

Caso 3: $\{2^2, 7,7,71\}$

$$\begin{pmatrix} 2^2 & 7 & 71 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} d_1 = 1988 \\ d_2 = 7 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G \cong C_4 \otimes C_7 \otimes C_7 \otimes C_{71} \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_7 \otimes C_{1988}$$

Caso 4: $\{2,2,7,7,71\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 71 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} d_1 = 994 \\ d_2 = 14 \end{cases} \overset{DCP}{\Longrightarrow} G \cong C_2 \otimes C_2 \otimes C_7 \otimes C_7 \otimes C_{71} \overset{DC}{\Rightarrow} G \cong C_{14} \otimes C_{994}$$

**Ejercicio 16**

**¿Cuántos grupos abelianos no isomorfos hay de orden $2^2x7^3x3^4x5^5$?**

**Solución**

$$|G| = 2^2x7^3x3^4x5^5$$

$$2^2 \rightarrow \begin{cases} 2^2 \\ 2,2 \end{cases} \quad 7^3 \rightarrow \begin{cases} 7^3 \\ 7,7^2 \\ 7,7,7 \end{cases} \quad 3^4 \rightarrow \begin{cases} 3^4 \\ 3,3^3 \\ 3^2,3^2 \\ 3,3,3^2 \\ 3,3,3,3 \end{cases} \quad 5^5 \rightarrow \begin{cases} 5^5 \\ 5,5^4 \\ 5^2,5^3 \\ 5,5,5^3 \\ 5,5^2,5^2 \\ 5,5,5,5^2 \\ 5,5,5,5,5 \end{cases}$$

Por lo tanto, hay $2x3x5x7 = 210$ grupos abelianos no isomorfos.