Algebra II

Relación 3

Grupos cociente. Teoremas de isomorfismo. Productos

Ejercicio 1. Demostrar que si $G \leq S_n$, entonces $G \subseteq A_n$ o bien se tiene que $[G : G \cap A_n] = 2$. Concluir que un subgrupo de S_n consiste sólo en permutaciones pares, o bien contiene el mismo número de permutaciones pares que de impares.

Ejercicio 2. Dado un cuerpo K, el grupo lineal especial de orden n sobre K, $SL_n(K)$, (también llamado el grupo unimodular de orden n sobre K) es

$$SL_n(K) = \{G \in GL_n(K) |\ \det(G) = 1\}$$

1. Se considera la aplicación $\det : GL_n(K) \to F^\times$ que aplica cada matriz en su determinante. Demostrar que dicha aplicación es un epimorfismo de grupos. ¿Cuál es el núcleo de este homomorfismo?

2. Si K es un cuerpo finito con q elementos, determinar el orden del grupo $SL_n(K)$.

Ejercicio 3. Sea $n > 1$ un número natural, y sea G un grupo verificando que para todo par de elementos $x, y \in G$ se tiene que $(xy)^n = x^n y^n$. Se definen $H = \{x \in G |\ x^n = 1\}$, y $K = \{x^n |\ x \in G\}$. Demostrar que H y K son subgrupos normales de G, y que $|K| = [G : H]$.

Ejercicio 4. Para un grupo G se define su **centro** como

$$Z(G) = \{a \in G |\ \forall\, x \in G\ xa = ax\}.$$

1. Demostrar que $Z(G)$ es un subgrupo de G.

2. Demostrar que $Z(G)$ es normal en G.

3. Demostrar que G es abeliano si, y sólo si, $G = Z(G)$.

4. Demostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

Ejercicio 5. Determinar el centro del grupo diédrico D_4. Observar que el cociente $D_4/Z(D_4)$ es abeliano, aunque D_4 no lo sea (compárese este hecho con el tercer apartado del ejercicio anterior).

Ejercicio 6. Determinar el centro de los grupos S_n y A_n para $n \geq 2$.

Ejercicio 7. Determinar el centro del grupo D_n para $n \geq 3$-

Ejercicio 8. Sean H y K dos subgrupos finitos de un grupo G, uno de ellos normal. Demostrar que

$$|H||K| = |HK||H \cap K|.$$

Ejercicio 9. Sea $N \trianglelefteq G$. Probar que $G/N \cong G$ si, y sólo si, $N = \{1\}$, y que $G/N \cong \{1\}$ si, y sólo si, $N = G$.

Ejercicio 10. Sean G y H dos grupos cuyos órdenes sean primos relativos. Probar que si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces necesariamente $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, es decir, que el único homomorfismo entre ellos es el trivial.

Ejercicio 11. Sean H y K subgrupos de G, y sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G tal que $HN = KN$. Demostrar que

$$\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{K}{K \cap N}.$$

Ejercicio 12. Sea N un subgrupo normal de G tal que N y G/N son abelianos. Sea H un subgrupo cualquiera de G. Demostrar que existe un subgrupo normal $K \trianglelefteq H$ tal que K y H/K son abelianos.

Ejercicio 13. Sea G un grupo finito, y sean H, K subgrupos de G, con K normal y tales que $|H|$ y $[G : K]$ son primos relativos. Demostrar que H está contenido en K.

Ejercicio 14. Sea G un grupo

1. Demostrar que para cada $a \in G$ la aplicación $\varphi_a : G \to G$ definida por $\varphi_a(x) = axa^{-1}$, es un automorfismo de G. φ_a se llama automorfismo interno o de conjugación de G definido por a.

2. Demostrar que la aplicación $G \to Aut(G)$, $a \mapsto \varphi_a$ es un homomorfismo.

3. Demostrar que el conjunto de automorfismos internos de G, que se denota $Int(G)$, es un subgrupo normal de $Aut(G)$.

4. Demostrar que $G/Z(G) \cong Int(G)$.

5. Demostrar que Int(G)=1 si y sólo si G es abeliano.

Ejercicio 15. Demostrar que el grupo de automorfismos de un grupo no abeliano no puede ser cíclico.

Ejercicio 16. Demostrar que el grupo $Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ es isomorfo a S_3.

Ejercicio 17. Demostrar que los grupos S_3, $\mathbb{Z}_{p^n}$ (con p primo) y $\mathbb{Z}$ no son producto directo internos de subgrupos propios.

Ejercicio 18. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el grupo G es o no producto directo de los subgrupos H y K.

1. $G = \mathbb{R}^\times$, $H = \{\pm 1\}$, $K = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$.
2. $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix} \right) \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$, $H = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix} \right) \in GL_2(\mathbb{R}) \}$, $K = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$.
3. $G = \mathbb{C}^\times$, $H = z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$, $K = x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$.

Ejercicio 19. Sean G, H y K grupos. Demostrar que:

1. $H \times K \cong K \times H$,
2. $G \times (H \times K) \cong (G \times H) \times K$.

Ejercicio 20. Dados isomorfismos de grupos $H \cong J$ y $K \cong L$, demostrar que $H \times K \cong J \times L$.

Ejercicio 21. Sean H, K, L y M grupos tales que $H \times K \cong L \times M$. ¿Se verifica necesariamente que $H \cong L$ y $K \cong M$?

Ejercicio 22. Demostrar que no todo subgrupo de un producto directo $H \times K$ es de la forma $H_1 \times K_1$, con H_1 subgrupo de H y K_1 subgrupo de K.

Ejercicio 23. Sean H, K dos grupos y sean $H_1 \lhd H$, $K_1 \lhd K$. Demostrar que $H_1 \times K_1 \lhd H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \cong \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{k_1}.$$

Ejercicio 24. Sean $H, K \lhd G$ tales que $H \cap K = 1$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/K$.

Ejercicio 25. Sean H y K subgrupos normales de G tales que $HK = G$. Demostrar que

$$G/(H \cap K) \cong H/(H \cap K) \times K/(H \times K) \cong (G/H) \times (G/K).$$

Ejercicio 26. Demostrar que si G es un grupo que es producto directo interno de subgrupos H y K, y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$, entonces N es abeliano.

Ejercicio 27. Dar un ejemplo de un grupo G que sea producto directo interno de dos subgrupos propios H y K, y que contenga a un subgrupo normal no trivial N tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$. Concluir que para $N \trianglelefteq H \times K$ es posible que se tenga

$$N \neq (N \cap (H \times 1)) \times (N \cap (1 \times K)).$$

Ejercicio 28. Sea G un grupo finito que sea producto directo interno de dos subgrupos H y K tales que $mcd(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que para todo subgrupo $N \leq G$ verifica que $N = (N \cap H) \times (N \cap K)$.

Ejercicio 29. Sea G un grupo y sea $f : G \to G$ un endomorfismo idempotente (esto es, verificando que $f^2 = f$) y tal que $Im(f) \trianglelefteq G$. Demostrar que $G \cong Im(f) \times Ker(f)$.

Ejercicio 30. Sea S un subconjunto de un grupo G. Se llama *centralizador* de S en G al conjunto

$$C_G(S) = \{x \in G \,|\, xs = sx \ \forall s \in S\}$$

y se llama *normalizador* de S en G al conjunto

$$N_G(S) = \{x \in G \,|\, xS = Sx\}$$

1. Demostrar que el normalizador $N_G(S)$ es un subgrupo de G.
2. Demostrar que el centralizador $C_G(S)$ es un subgrupo normal de $N_G(S)$.
3. Demostrar que si S es un subgrupo de G entonces S es un subgrupo normal de $N_G(S)$.

Ejercicio 31. Sea G un grupo y H y K subgrupos suyos con $H \subset K$. Entonces demostrar que H es normal en K si y sólo si $K < N_G(H)$. (Así, el normalizador $N_G(H)$ queda caracterizado como el mayor subgrupo de G en el que H es normal.)

Ejercicio 32.

1. Demostrar que $C_G(Z(G)) = G$ y que $N_G(Z(G)) = G$.
2. Si G es un grupo y $H < G$ ¿Cuando es $G = N_G(H)$? ¿Y cuando es $G = C_G(H)$?
3. Si H es un subgrupo de orden 2 de un grupo G, demostrar que $N_G(H) = C_G(H)$. Deducir que H es normal en G si y solo si está contenido en $Z(G)$.

Ejercicio 33. Sea G un grupo arbitrario. Para dos elementos $x, y \in G$ se define su conmutador como el elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. (El conmutador recibe tal nombre porque $[x, y]yx = xy$.)

Como $[x,y]^{-1} = [y,x]$, el inverso de un conmutador es un conmutador. Sin embargo el producto de dos conmutadores no tiene porqué ser un conmutador. Entonces se define el *subgrupo conmutador o (primer) subgrupo derivado* de G, denotado $[G,G]$, como el subgrupo generado por todos los conmutadores de G.

1. Demostrar que, $\forall a, x, y \in G$, se tiene que $a[x,y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}]$.
2. Demostrar que $[G,G]$ es un subgrupo normal de G.
3. demostrar que el grupo cociente $G/[G,G]$, que se representa por G^{ab}, es un grupo abeliano (que se llama el abelianizado de G).
4. Demostrar que G es abeliano si y sólo si $[G,G] = 1$.
5. Sea N un subgrupo normal de G. Demostrar que el grupo cociente G/N es abeliano si y sólo si $N > [G,G]$ (así que el grupo $[G,G]$ es el menor subgrupo normal de G tal que el cociente es abeliano).

Ejercicio 34.
1. Calcular el subgrupo conmutador de los grupos S_3, A_4, D_4 y Q_2.
2. Demostrar que, para $n \geq 3$, el subgrupo conmutador de S_n es A_n y que éste es el único subgrupo de S_n de orden $n!/2$.