Apellidos			Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	Grupo	

Métodos Numéricos II. Curso 2022/23.

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

27 de marzo de 2023.

1 Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

a) Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?.

b) Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

c) Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7}\,.$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

d) ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

[4 puntos]

2 Sucesión de Sturm

a) Sea $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a, b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \dots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x)\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a, b]$.

b) Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

c) Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en el que se encuentran.

[2 puntos]

3 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \qquad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

a) Sin realizar ningún calculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

b) Determina los valores de α_0, α_1, α_2, x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

c) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f. ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

d) Aplica el resultado para la función $x\,e^{x^2+1}$.

[4 puntos]

$\boxed{1}$ Se pretende estimar el valor de $\sqrt[7]{2}$ usando un método iterativo.

a) Determina justificadamente una función f y un intervalo $[a, b]$ donde se pueda aplicar el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para conseguir un error inferior a 10^{-4}?.

Sea $f(x) = x^7 - 2$, $I = [a,b] = [1,2]$

Vemos que f es continua y $f(1)f(2) = -1 \cdot (2^7 - 2) < 0 \Rightarrow \exists s \in I / f(s) = 0$

Sabemos $|e_n| = |m_n - s| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N}_0$ $\Longrightarrow$

$|e_n| = \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-4} \iff 10^4 \leq 2^{n+1} \iff n \geq \log_2\left(\dfrac{10^4}{2}\right) \approx 12'28 \Rightarrow n = 13$ iteraciones

b) Determina justificadamente un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que permita asegurar que el método de Newton-Raphson converge a $\sqrt[7]{2}$ y realiza 3 iteraciones del método.

Tomamos $I = [a,b] = [1,2]$

1) $f(a) f(b) < 0$

2) $f'(x) = 7x^6 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin I$

3) $f''(x) = 42x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin I \Rightarrow f''$ no cambia de signo

4) $\max\left\{\left|\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|, \left|\dfrac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\} = \max\left\{\left|\dfrac{-1}{7}\right|, \left|\dfrac{126}{448}\right|\right\} = 0'28125 \leq 2-1 = 1$ ✓

Por tanto, N-R converge a s $\forall x_0 \in I$ con orden al menos cuadrático.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^7 - 2}{7x_n^6} = \frac{6x_n^7 + 2}{7x_n^6}$$

n	x_n
0	1
1	8/7
2	1'10781
3	1'10412

c) Se propone el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{8x_n + 3x_n^8}{6 + 4x_n^7}.$$

Realiza 3 iteraciones del método empezando en el mismo valor x_0 del apartado anterior.

n	x_n
0	1
1	11/10
2	1'1040892
3	1'1040895

d) ¿Cuál de los dos métodos converge más rápidamente a la solución? Justifica la respuesta.

Sea $s = \sqrt[7]{2}$

Sea $g_1(x) = \dfrac{6x^7+2}{7x^6}$

$$g_1'(x) = \frac{42x^6 \cdot 7x^6 - (6x^7+2)\,42x^5}{49x^{12}} = \frac{42x^{12} - 84x^5}{49x^{12}} = \frac{6}{7} - \frac{12}{7x^7} \Rightarrow g'(s) = 0$$

$$g_1''(x) = \frac{12 \cdot 49x^6}{49x^{14}} = \frac{12}{x^8} \Rightarrow g''(s) \neq 0$$

Por tanto, vemos que N-R, efectivamente, tiene un orden al menos cuadrático de convergencia local.

Sea $g_2(x) = \dfrac{8x+3x^8}{6+4x^7}$

Vemos $g_2(s) = \dfrac{8\sqrt[7]{2} + 6\sqrt[7]{2}}{6+4\cdot 2} = \sqrt[7]{2} = s$

$$g'(x) = \frac{(8+24x^7)(6+4x^7) - (8x+3x^8)\,28x^6}{(6+4x^7)^2} = \frac{48+32x^7+144x^7+96x^{14}-224x^7-84x^{14}}{(6+4x^7)^2} =$$

$$\frac{12x^{14}-48x^7+48}{(6+4x^7)^2} \Rightarrow g'(s) = 0$$

$g''(x) = \ldots$

$g''(s) = 0$

Por tanto, vemos que el 2º método es al menos cúbico $\Rightarrow$ es más rápido que NR.

2 Sucesión de Sturm

a) Sea $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$ una sucesión de Sturm en el intervalo $[a,b]$ y $k_i \in \mathbb{R}$ con $k_i > 0$ para $i = 0, \ldots, m$. Demuestra que si se define $\tilde{f}_i = k_i f_i$, entonces $\{\tilde{f}_0(x), \tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_m(x)\}$ es también una sucesión de Sturm en $[a,b]$.

Veamos que se cumple la definición de suc. Sturm sabiendo $\{f_0 \ldots f_m\}$ lo es y $k_i > 0 \ \forall i = 0..m$:

1) $\tilde{f}_0(x) = k_0 f_0(x) \in C^1([a,b])$

2) $[\tilde{f}_0(x) = 0 \iff f_0(x) = 0] \Rightarrow \tilde{f}_0'(x)\tilde{f}_1(x) = k_0 k_1 f_0'(x) f_1(x) > 0$

3) $[\tilde{f}_j(x) = 0 \iff f_j(x) = 0] \Rightarrow \tilde{f}_{j-1}(x)\tilde{f}_{j+1}(x) = k_{j-1}k_{j+1} f_{j-1}(x) f_{j+1}(x) < 0 \quad \forall j = 1..m-1$

4) $\tilde{f}_m(x) = k_m f_m(x) \neq 0$

b) Dado el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$, determina justificadamente un intervalo en el que estén contenidas todas sus raíces.

$p(x) = x^3 - x + 1 = a_3 x^3 - a_1 x + a_0 1$

Por Tª Acotación de Raíces, cualquier raíz de p, s, verifica

$|s| \leq 1 + \text{máx}\left\{ \left|\frac{a_j}{a_k}\right| \,/\, j \in \{0..3\} \right\} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow s \in [-2,2]$

c) Construye una sucesión de Sturm para el polinomio p y utilízala para determinar el número de raíces reales así como intervalos de amplitud 1 en el que se encuentran.

$\cancel{x^3} - x + 1 \;\;|\;\; 3x^2 - 1$
$-\cancel{x^3} \quad + \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}$
$-x + \frac{4}{3}$

$\cancel{3x^2} - 1 \;\;|\;\; 3x - 4$
$-\cancel{3x^2} + 4x \qquad x$
$4x - 1$

$\cancel{3x} - 4 \;\;|\;\; -4x + 1$
$-\cancel{3x} + \frac{3}{4} \qquad -\frac{3}{4}$
$-\frac{13}{4}$

$f_0(x) = p(x) = x^3 - x + 1$

$f_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 1$

$f_2(x) = 3x - 4$

$f_3(x) = -4x + 1$

$f_4(x) = 1$

-2	-1	0	1	2
-5	1	1	1	7
11	2	-1	2	11
-10	-7	-4	-1	2
9	5	1	-3	-7
1	1	1	1	1
3	2	2	2	2

sean $I_1 = [-2,-1]$, $I_2 = [-1,0]$, $I_3 = [0,1]$, $I_4 = [1,2]$

Por Tª Sturm, hay una raíz únicamente en I_1.

3 Dada la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio:

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + R(f), \qquad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2.$$

a) Sin realizar ningún calculo, ¿puedes indicar el máximo grado de exactitud que puede tener la fórmula? Justifica la respuesta.

Sabemos que ninguna fórmula interpolatoria para derivadas de orden k puede ser exacta a partir de $\mathbb{P}_{n+k+1}$

Por tanto, dado que $\mathbb{P}_{n+k+1} = \mathbb{P}_{2+2+1} = \mathbb{P}_5$, la fórmula tiene grado de exactitud máximo 4.

b) Determina los valores de α_0, α_1, α_2, x_1 y x_2 para que la fórmula tenga el mayor grado de exactitud posible. ¿Cuál es ese grado de exactitud?

Imponemos exactitud en $\mathbb{P}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{x_2(x_2 - x_1)} \qquad \alpha_1 = -\frac{2}{x_1(x_2 - x_1)} \qquad \alpha_0 = \frac{2x_2 - 2x_1}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} = \frac{2}{x_1 x_2}$$

$$E(x) = f[0, x_1, x_2, x]\, \Pi(x)$$

$$E'(x) = f[0, x_1, x_2, x, x]\, \Pi(x) + f[0, x_1, x_2, x]\, \Pi'(x)$$

$$E''(x) = 2 f[0, x_1, x_2, x, x, x]\, \Pi(x) + f[0, x_1, x_2, x, x]\, \Pi'(x) +$$
$$f[0, x_1, x_2, x, x]\, \Pi'(x) + f[0, x_1, x_2, x]\, \Pi''(x)$$

$$\Pi(x) = x(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow \Pi(0) = 0$$

$$\Pi'(x) = (x-x_1)(x-x_2) + x[x-x_2+x-x_1] \Rightarrow \Pi'(0) = x_1 x_2$$

$$\Pi''(x) = x-x_2+x-x_1+x-x_2+x-x_1+2x = 2(3x-x_1-x_2) \Rightarrow$$

$$\Pi''(0) = -2(x_1+x_2)$$

$$E''(0) = 2\frac{f^{IV}(\mu_1)}{4!}x_1x_2 + -2\frac{f'''(\mu_2)}{3!}(x_1+x_2) \quad \mu_1, \mu_2 \in [\min\{0,x_1,x_2\}, \max\{0,x_1,x_2\}]$$

Sabemos $R(f) = E''(0) = 0 \iff$ fórmula exacta.

Para que sea exacta en $\mathbb{P}_3$, la fórmula debe ser exacta para $f(x) = x^3 \Rightarrow R(f) = E''(0) = 0 + -2 \cdot \frac{6}{3!}(x_1+x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \neq 0$

Sin embargo, no podrá ser exacta en $\mathbb{P}_4$, pues $x_1x_2 \neq 0$

Por tanto, para alcanzar máximo grado de exactitud (3)

$$\alpha_0 = \frac{2}{x_1x_2}, \quad \alpha_1 = -\frac{2}{x_1(x_2-x_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{x_2(x_2-x_1)}, \quad x_1 = -x_2 \neq 0$$

c) Determina la expresión del error indicando las condiciones sobre derivabilidad de la función f. ¿Hay alguna otra conclusión que obtengas respecto a los nodos?

Hemos visto $R(f) = E''(0) = \frac{f^{IV}(\mu_1)}{12}x_1x_2 - \frac{f'''(\mu_2)}{3}(x_1+x_2)$

Por tanto, $f \in C^4([\min\{0,x_1,x_2\}, \max\{0,x_1,x_2\}])$

d) Aplica el resultado para la función $x\,e^{x^2+1}$.

Sea $f(x) = x\,e^{x^2+1}$ vemos $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(0) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(-x_1) = (\alpha_1 - \alpha_2) f(x_1) = 0$$