Algebra II

Relación 5

G-conjuntos, p-grupos y teoremas de Sylow

Ejercicio 1. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$, para cada subgrupo $H \leq S_4$ se considera la acción de H sobre X dada por ${}^{\sigma}i = \sigma(i)$, $\sigma \in H$, $i \in X$. Encontrar la órbita y el estabilizador de cada punto $i \in X$ para los siguientes subgrupos:

i) $H = \langle(1\,2\,3)\rangle$; ii) $H = A_4$; iii) $H = V$; iv) $H = \langle(1\,2\,3\,4)\rangle$.

Ejercicio 2. Sea G un grupo y N un subgrupo normal abeliano de G. Demostrar que G/N actúa sobre N por conjugación y obtener un homomorfismo $G/N \to Aut(N)$.

Ejercicio 3. Sean S y T dos G–conjuntos. Se define la **acción diagonal** de G sobre el producto cartesiano $S \times T$ mediante ${}^{x}(s, t) = ({}^{x}s, {}^{x}t)$. Demostrar que, para la acción diagonal, el estabilizador de (s, t) es la intersección de los estabilizadores de s y t en las acciones dadas.

Ejercicio 4. Demostrar que si G contiene un elemento x que tiene exactamente dos conjugados, entonces G tiene un subgrupo normal propio. (**Pista:** Considerar el centralizador de x).

Ejercicio 5. Encontrar todos los grupos finitos que tienen exactamente dos clases de conjugación.

Ejercicio 6. Describir explícitamente las clases de conjugación del grupo D_4.

Ejercicio 7. Se dice que la acción de un grupo finito G sobre un conjunto X es **transitiva** si hay una sola órbita para esta acción (es decir, si para cada $x, y \in X$ existe algún $g \in G$ tal que ${}^{g}x = y$). Demostrar que si G actúa transitivamente sobre un conjunto X con n elementos, entonces $|G|$ es un múltiplo de n.

Ejercicio 8. Un subgrupo $G \leq S_n$ se dice **transitivo** si la acción de G sobre $\{1, 2, \cdots, n\}$ es transitiva. Encontrar todos los subgrupos transitivos de S_3 y S_4.

Ejercicio 9. Si $n > 0$ es un entero positivo, una partición de n es una sucesión no decreciente de enteros positivos cuya suma es n. Dada una permutación $\sigma \in S_n$, la descomposición en ciclos disjuntos (incluyendo los ciclos de longitud 1) de $\sigma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_r$ determina una partición $n_1, n_2, \cdots, n_r$ de n donde cada n_i es la longitud del ciclo γ_i. Dos permutaciones en S_n se dice que son del mismo tipo si determinan la misma partición de n. Demostrar:

1. Dos elementos de S_n son conjugados si y solo si son del mismo tipo.

2. El número de clases de conjugación de S_n e igual l número de particiones de n.

Ejercicio 10. Calcular el número de clases de conjugación de S_5. Dar un representante de cada una y encontrar el orden de cada clase. Calcular el estabilizador de $(1\,2\,3)$ bajo la acción de conjugación de S_5 sobre sí mismo.

Ejercicio 11. Sea G un grupo finito y $\Phi : G \to \mathrm{Perm}(G)$ la representación regular izquierda (que corresponde a la acción de G sobre si mismo por traslación por la izquierda).

1. Demostrar que si x es un elemento de G de orden n y $|G| = nm$, entonces $\Phi(x)$ es un producto de n-ciclos. Deducir que $\Phi(x)$ es una permutación impar si y solo si el orden de x es par y el cociente del orden de G y el de x es impar.

2. Demostrar que si $\mathrm{Img}(\Phi)$ contiene una permutación impar entonces G tiene un subgrupo de índice 2.

3. Demostrar que si $|G| = 2k$ con k impar, entonces G tiene un subgrupo de índice 2. (**Pista:** Usar el Teorema de Cauchy para obtener un elemento de orden 2 y entonces usar los dos apartados anteriores).

Ejercicio 12. Sea G un p–grupo actuando sobre un conjunto finito X. Demostrar que

$$|X| \equiv |Fix_G(X)| \mod p.$$

Ejercicio 13. Sea G un 2–grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X cuya cardinalidad es un número impar. ¿Podemos afirmar que existe al menos un punto de X que queda fijo bajo la acción de G? ¿Podemos decir lo mismo si $|X|$ es par?

Ejercicio 14. Sea $C_n = \langle a |\ a^n = 1\rangle$ un grupo cíclico de orden n. Describir sus subgrupos de Sylow.

Ejercicio 15. Sea G un grupo finito y $|G| = pn$ con p primo y $p > n$. Demostrar que G contiene un subgrupo normal de orden p y que todo subgrupo de G de orden p es normal en G

Ejercicio 16. Sea H un subgrupo de un grupo finito G con $[G : H] = p$ primo y p el menor primo que divide a $|G|$. Demostrar que entonces H es normal en G.

Ejercicio 17. Sea p un número primo. Demostrar:

1. Todo grupo no abeliano de orden p^3 tiene un centro de orden p.
2. Existen únicamente dos grupos no isomorfos de orden p^2.
3. Todo subgrupo normal de orden p de un p-grupo finito está contenido en el centro.

Ejercicio 18. Demostrar que si N es un subgrupo normal de G y N y G/N son p-grupos entonces G es un p-grupo.

Ejercicio 19. Si G es un grupo de orden p^n, p primo, demostrar que para todo k, $0 \leq k \leq n$, existe un subgrupo normal de G de orden p^k.

Ejercicio 20. Hallar todos los subgrupos de Sylow de los grupos S_3 y S_4. (**Pista:** Para los 2–subgrupos de Sylow de S_4, observar primero que todos deben contener al subgrupo de Klein V, y, al menos, una trasposición τ, y que como consecuencia se pueden obtener como producto de V por el grupo cíclico generado por τ.)

Ejercicio 21. Hallar todos los subgrupos de Sylow de los grupos $\mathbb{Z}_{600}$, Q_2, D_5, D_6, A_4, A_5, S_5.

Ejercicio 22. Demostrar que D_4 es isomorfo a los 2-subgrupos de Sylow de S_4 (**Pista:** Considerar la representación asociada a la acción de D_4 sobre los vértices del cuadrado.)

Ejercicio 23. Demostrar que todo grupo de orden 12 con más de un 3–subgrupo de Sylow es isomorfo al grupo alternado A_4. (**Pista:** Considerar la acción por traslación de un tal grupo sobre el conjunto de clases módulo $\mathcal{P}$, siendo $\mathcal{P}$ un 3-subgrupo de Sylow. Probar que dicha acción es fiel.)

Ejercicio 24.

1. Demostrar que no existen grupos simples de orden 12. Más concretamente, demostrar que todo grupo de orden 12 admite un subgrupo normal de orden 3 o de orden 4.
2. Demostrar que no existen grupos simples de orden 28. Más concretamente, probar que todo grupo de orden 28 contiene un subgrupo normal de orden 7.
3. Demostrar que no existen grupos simples de orden 56. Más concretamente, probar que todo grupo de orden 56 contiene un subgrupo normal de orden 7 o de orden 8.
4. Demostrar que no existen grupos simples de orden 148 ni de orden 200 ni de orden 351.

Ejercicio 25. Calcular el número de elementos de orden 7 que tiene un grupo simple de orden 168.

Ejercicio 26. Demuestra que todo p-grupo finito es resoluble.

Ejercicio 27. Demuestra que todo grupo de orden pq, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Ejercicio 28. Demuestra que todo grupo de orden p^2q, con p y q primos, es un grupo resoluble.

Ejercicio 29. Demuestra que si p_1, p_2, p_3 son tres primos tales que $p_3 > p_1p_2$ entonces cualquier grupo de orden $p_1p_2p_3$ es resoluble.

Ejercicio 30.

1. Demuestra que todo grupo de orden 70 es resoluble.
2. Demuestra que todo grupo de orden 24 es resoluble.
3. Demuestra que todo grupo de orden 100 es resoluble.
4. Demuestra que todo grupo de orden 48 es resoluble.
5. Sea G un grupo de orden 200. Demuestra que $G \times D_{41}$ es resoluble.
6. Demuestra que todo grupo de orden 63 es resoluble (sin usar que es un caso particular de un grupo de orden p^2q con p y q primos).