Sea $f(g(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Probar que una es polinomio de grado 1 y otra uno de grado 3.

$f \circ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Rightarrow f \circ g \in C(\mathbb{C}) \Rightarrow (f \circ g)(0) = 0$

$A = \{z \in \mathbb{C} \mid (f \circ g)(z) = z^3\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
$A' \neq \emptyset$
$\Bigg\} \xRightarrow{\text{Principio Identidad}} (f \circ g)(z) = z^3 \ \forall z \in \mathbb{C}$

Es claro g no es cte.

Supongamos que g es entera no polinómica.

Por corolario de Casorati, $\forall r > 0$, $g(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,r))$ es denso en $\mathbb{C}$, lo que nos permite tomar una sucesión $\{z_n\} \to \infty \mid g(z_n) \to z_0$ fijo

$(f \circ g)(z_n) = z_n^3 \to \infty$, pero $(f \circ g)(z_n) \to f(z_0) \in \mathbb{C}$!!! $\Rightarrow$

g pol. no cte. por red. al absurdo $\Rightarrow$ g sobreyectiva por T^a Fundamental del Álgebra.

Otra vía: Probar g diverge en ∞:

sea $\{z_n\} \to \infty$, $f(g(z_n)) = z_n^3 \to \infty$

$\{g(z_n)\}$ puede tener parcial acotada? No, pues si fuera así

$\exists \{z_{\sigma(n)}\}$ parcial de $\{z_n\} \mid \{g(z_{\sigma(n)})\} \to w_0 \in \mathbb{C}$ convergente. $\Rightarrow$

$\{f(g(z_{\sigma(n)}))\} = \{z_{\sigma(n)}^3\} \to \infty$!!!

$\Downarrow$

$f(w_0)$

Veamos f polinomio.

sea $\{w_n\} \to \infty \xRightarrow{g \text{ sobreyectiva}} \exists z_n \in \mathbb{C} \mid g(z_n) = w_n$

$\{w_n\} \to \infty$
$g(z_n) = w_n$
sup. $\exists \{z_{\sigma(n)}\} \to z_0 \Rightarrow \{g(z_{\sigma(n)})\} \to g(z_0)$

$\{w_{\sigma(n)}\} \to \infty$!!!

Por tanto, $\{z_n\} \to \infty$

$\infty \leftarrow z_n^3 = \{f(w_n)\}$ $\forall \{w_n\} \to \infty \xRightarrow{\text{Ej. rel. 9}} f$ es polinomio

$gr(f \circ g) = 3 = gr(f)\, gr(g)$ ■

Sea $g(f(z)) = z f(z)$ $\quad f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Decir rel. entre ellas.

Sup. f cte., $f(z) = \alpha$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$g(\alpha) = z\alpha \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- Si $\alpha \neq 0$!!!
- Si $\alpha = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Si g cte. $\exists \beta \in \mathbb{C} \,/\, g(z) = \beta \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(f(z)) = \beta = z f(z)$

$\Rightarrow \beta = 0 \equiv f$

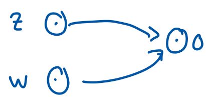
Si f, g polinomios $\Rightarrow gr(g)\,gr(f) = 1 + gr(f) \Rightarrow$

$gr(f)(gr(g) - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} gr(g) = 2 \\ gr(f) = 1 \end{cases}$

Importante: Las únicas funciones enteras e inyectivas son los polinomios de grado 1.

$z, w \in \mathbb{C} \,/\, f(z) = f(w)$. Si $f(z) f(w) \neq 0$

$$\underset{\displaystyle w f(w)}{\underset{\|}{g(f(w))}} = g(f(z)) = z f(z) \Rightarrow z = w$$



Sup. $\exists z \neq w \,/\, f(z) = f(w) = 0$

Fijado $r > 0$, $f|_{D(z,r)}$ no es cte. por Principio Identidad $\xRightarrow{\text{Tª Aplicación Abierta}} \exists \delta_1 > 0 \,/\, D(0, \delta_1) \subseteq f(D(z,r))$

Con $r < \dfrac{|w-z|}{2}$, $f|_{D(z,r)} \xRightarrow{\text{Tª Aplicación Abierta}} \exists \delta_2 > 0 \,/\, D(0, \delta_2) \subseteq f(D(w,r))$

Fijado $\underset{\neq 0}{z_0} \in D(0, \min\{\delta_1, \delta_2\}) \Rightarrow \exists z_1 \in D(z,r), w_1 \in D(w,r) \,/\, f(z_1) = w_0 = f(w_1)$!!!

Por tanto, f inyectiva $\Rightarrow f$ pol. grado 1 $\Rightarrow f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$

$g(az+b) = z(az+b)$. Sea $w = az + b \Rightarrow g(w) = \dfrac{w-b}{a}$

Relación entre f, g: $g(f(z)) = \frac{1}{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus f(0))$

probar f inyectiva en $\mathbb{C}^*$

Si $z, w \in \mathbb{C}^* \,/\, f(z) = f(w) \Rightarrow \frac{1}{z} = g(f(z)) = g(f(w)) = \frac{1}{w} \Rightarrow w = z$

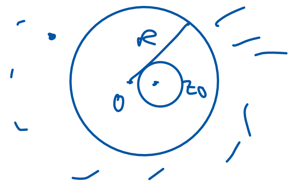
f entera e inyectiva en $\mathbb{C}^*$.

Corolario Casorati
Aplicación Abierta

Sup. f entera no polinómica $\Rightarrow f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R))$ abierto denso en $\mathbb{C}$.

Fijamos $z_0 \in \mathbb{C}^* \,/\, |z_0| > r > 0$, $D(z_0,r) \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow f(D(z_0,r))$ es abierto

Tomando $R > 0 \,/\, D(z_0,r) \subseteq D(0,R)$



Hay un pto. del exterior e interior que van a la misma imagen.

Por ser denso, corta a todos los abiertos $\Rightarrow f(\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)) \cap f(D(z_0,r)) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, z_1$ con $|z_1| > r$, $z_2 \in D(z_0,r) \subseteq D(0,R)$ con $|z_2| < R \,/\, f(z_1) = f(z_2)$!!!

$\Rightarrow f$ es polinomio
f inyectiva en $\mathbb{C}$

Comportamiento local en 0 de derivada

Si $gr(f) \geq 2 \Rightarrow f'$ se anula en $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists U$ entorno z_0, $\varepsilon > 0$ /

$f(U) = D(f(z_0), \varepsilon)$, y $\forall w \in D(f(z_0), \varepsilon) \setminus \{f(z_0)\}$, $f(z) = w$ tiene exactamente $m \geq 2$ soluciones en U !!! Contradictorio con la inyectividad en $\mathbb{C}^*$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio $\{\alpha_n\} \subseteq \Omega \mid \{\alpha_n\} \to \alpha \in \Omega$. $f, g \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \exists k \in \mathbb{N}$

$f^k(\alpha_n) = g^k(\alpha_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^k = 1$, $f(z) = \lambda g(z) \quad \forall z \in \Omega$

$\Omega \supseteq A = \{z \in \Omega \mid f^k(z) = g^k(z)\} \supseteq \{\alpha_n\} \cup \{\alpha\}$ tiene pto. acumulación en $\Omega \overset{\text{Principio Identidad}}{\Longrightarrow}$

$A = \Omega \Leftrightarrow f^k(z) = g^k(z) \quad \forall z \in \Omega$

- Si $g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ y hemos terminado
- Si $g \not\equiv 0$, $\exists z_0 \in \Omega$, $r > 0 \mid g|_{D(z_0, r)}(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, r)$

Sea $h: D(z_0, r) \to \mathbb{C} \mid h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)} \qquad h \in \mathcal{H}(D(z_0, r))$

$h^k(z) = \dfrac{f^k(z)}{g^k(z)} = 1 \quad \forall z \in D(z_0, r) \Rightarrow h(D(z_0, r)) \subseteq \{$raíces k-ésimas de $1\}$ finito discreto

$\Rightarrow h$ cte. en $D(z_0, r) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \mid h(z) = \lambda = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, $\lambda^k = 1 \overset{\text{Principio Identidad}}{\Longrightarrow} f(z) = \lambda g(z) \quad \forall z \in \Omega$

Sea $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(z) = \frac{1}{z - a_n}$ $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$

A) $\{a_n\} \cup \{0\} = K$ $\sum_{n\geq 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ c.a. en $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ y unif. $\forall K \subseteq \Omega$ compacto.

Fijamos $C \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ compacto. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in C, a_n \in K$

$|z - a_n| \geq d(C,K) > 0 \implies |f_n(z)| = \frac{1}{|z_n - a_n|} \leq \frac{1}{d(C,K)} \implies \frac{|f_n(z)|}{n^n} \leq \frac{1}{d(C,K)} \frac{1}{n^n}$

los compactos son disjuntos

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ converge

Test Weierstrass

$\implies \sum_{n\geq 1} \frac{f_n(z)}{n^n}$ c.a. y c.u. en C. hay c.a. en $\mathbb{C} \setminus K$

B) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n^n}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus K$ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$ por Tª convergencia Weierstrass.

Estudiar singularidades aisladas de f.

Fijado $n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists r > 0 \,/\, D(a_{n_0}, r) \setminus \{a_{n_0}\} \subseteq \mathbb{C} \setminus K$

$f \in \mathcal{H}(D(a_{n_0}, r) \setminus \{a_{n_0}\})$

Si $n \neq n_0$, $f_n \in \mathcal{H}((\mathbb{C} \setminus K) \cup \{a_{n_0}\}) \implies \sum_{n \neq n_0} \frac{f_n(z)}{n^n} \in \mathcal{H}((\mathbb{C} \setminus K) \cup \{a_{n_0}\}) \implies$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n \neq n_0} \frac{f_n(z)}{n^n}}_{\text{Parte regular}} + \underbrace{\frac{f_{n_0}}{n_0^{n_0}}}_{\text{Parte singular}} = \frac{1}{n_0^{n_0}} \cdot \frac{1}{z - a_{n_0}}$$

$\implies f$ tiene polo en a_{n_0}