Probabilidad - 3er Curso (Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas)
Convocatoria extraordinaria (13 de febrero de 2023)

Apellidos, nombre:

---

1. **(1.5 puntos)** Cierta enfermedad afecta al 0.5% de una población. Existe una prueba para la detección de la enfermedad, que da positiva en los individuos enfermos con probabilidad 0.99 y da negativa en los individuos sanos con probabilidad 0.99.

   a) **(0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que un individuo elegido al azar esté realmente enfermo si la prueba da resultado positivo.

   b) **(0.75 puntos)** Calcular, aproximadamente, el número mínimo de personas con resultado positivo en la prueba que deben ser elegidas, de forma aleatoria e independiente, para asegurar una proporción de personas realmente enfermas en la muestra inferior a un $1/2$, con probabilidad mayor o igual que 0.95.

2. **(1.5 puntos)** Sean $X_1,\dots,X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $T = min\{X_1,\dots,X_n\}$.

3. **(5 puntos)** Dado el vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en el recinto acotado, dentro el primer cuadrante, que está limitado por el interior de la parábola $y = x^2$ y la recta de ecuación $2y + x = 1$:

   a) **(0.25 puntos)** Obtener la función de densidad conjunta.

   b) **(1.50 puntos)** Obtener la función de distribución de probabilidad conjunta.

   c) **(0.75 puntos)** Obtener las funciones de densidad condicionadas.

   d) **(0.75 puntos)** Obtener la probabilidad de que $X \geq Y$.

   e) **(1.00 puntos)** Justificar que la mejor aproximación mínimo cuadrática a la variable Y conocidos los valores de la variable X viene dada por la variable aleatoria $\dfrac{1 - X + 2X^2}{4}$.

   f) **(0.75 puntos)** Obtener el error cuadrático medio cometido al obtener la mejor aproximación de la variable aleatoria Y observando el valor $x = \dfrac{1}{3}$.

4. **(2 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución multinomial de modo que la variable aleatoria X sigue una distribucion $B\left(6, \dfrac{1}{4}\right)$ y la variable aleatoria Y una $B\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$.

   a) **(0.5 puntos)** Indique los parámetros de la distribución de probabilidad que sigue el vector (X,Y) y escriba su función masa de probabilidad.

   b) **(0.5 puntos)** Indique qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria $X/Y = 2$ y escriba su función masa de probabilidad.

   c) **(0.5 puntos)** Escriba la expresión analítica de las funciones generatrices de momentos del vector (X,Y), de las variables aleatorias X e Y, y la de la variable aleatoria $X/Y = 2$.

   d) **(0.5 puntos)** Escriba la mejor aproximación mínimo cuadrática de la variable Y conocidos los valores de la variable X, y dar una medida de la bondad de este ajuste.

Observaciones e indicaciones:

- En el **apartado 1.b** hay que utilizar probabilidades de una distribución $N(0,1)$. Como el alumno no dispone de esta tabla en el examen se le facilita la siguiente información:
  1. Las probabilidades inmediatamente inferior y superior a 0.95 que aparecen en la tabla de esta distribución son 0.94950 y 0.95053, respectivamente.
  2. $P[Z \leq 1.64] = 0.94950$ y $P[Z \leq 1.65] = 0.95053$ con Z una variable aleatoria que sigue una distribucion $N(0,1)$.
- En el **apartado 3.b** se obtienen **hasta 1.25 puntos** si las integrales se dejan indicadas y **hasta 1.50 puntos** si se obtienen sus valores de forma explícita.

2. **(1.5 puntos)** Sean $X_1,\ldots,X_n$ n variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$. Deducir la expresión analítica de la función de densidad de la variable aleatoria $T = min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

$$\left.\begin{array}{lll} X_1,\ldots X_n \text{ id. distr.} & \Rightarrow & F_{X_i}(x) = F(x) \quad \forall i = 1 \ldots n \\ X_1 \ldots X_n \text{ ind} & \Rightarrow & F_{(X_1 \ldots X_n)}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \end{array}\right\} \Rightarrow F_{(X_1,\ldots X_n)}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$F_{\min(X_1,\ldots X_n)}(y) = P[\min(X_1 \ldots X_n) \leq y] = 1 - P[\min(X_1,\ldots X_n) > y] =$$

$$1 - P[X_1 > y, \ldots X_n > y] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P[X_i > y] = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F(y)) =$$

$$1 - (1 - F(y))^n$$

$$f_{\min(X_1,\ldots X_n)}(x) = \frac{dF_{\min(X_1,\ldots X_n)}}{dx}(x) = n(1-F(x))^{n-1} F'(x) = n f(x)(1-F(x))^{n-1},$$

donde f es la fdd de X_i $\forall i = 1 \ldots n$.

$$\text{sabemos } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x 1 \cdot dy = x \quad \forall x \in [0,1]$$

$$f_{\min(X_1,\ldots X_n)}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \forall x \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. **(2 puntos)** Sea (X,Y) un vector aleatorio con distribución multinomial de modo que la variable aleatoria X sigue una distribucion $B\left(6,\frac{1}{4}\right)$ y la variable aleatoria Y una $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$.

   a) **(0.5 puntos)** Indique los parámetros de la distribución de probabilidad que sigue el vector (X,Y) y escriba su función masa de probabilidad.

   b) **(0.5 puntos)** Indique qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria $X/Y=2$ y escriba su función masa de probabilidad.

   c) **(0.5 puntos)** Escriba la expresión analítica de las funciones generatrices de momentos del vector (X,Y), de las variables aleatorias X e Y, y la de la variable aleatoria $X/Y=2$.

   d) **(0.5 puntos)** Escriba la mejor aproximación mínimo cuadrática de la variable Y conocidos los valores de la variable X, y dar una medida de la bondad de este ajuste.

A)

$(X,Y) \rightsquigarrow M_2(n=6,\ p_1=\frac{1}{4},\ p_2=\frac{1}{2})$

$P_{(X,Y)}^{(x,y)} = P[X=x, Y=y] = \frac{n!}{x!\,y!}\,p_1^x\,p_2^y = \frac{6!}{x!\,y!\,4^x\,2^y}$ $\quad (x,y)\in\{0,6\}^2 /\ x+y\in\{0,6\}$

B)

$X/Y=2 \rightsquigarrow B(n'=6-2=4;\ p=\frac{p_1}{1-p_2}=\frac{1}{8})$

$P[X=x/Y=2] = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{8}\right)^x\left(\frac{7}{8}\right)^{4-x}$ $\quad x=0\ldots4$

C)

$M_X(t) = (p_1e^t+1-p_1)^n = \left(\frac{1}{4}e^t+\frac{3}{4}\right)^6$ $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$M_Y(t) = (p_2e^t+1-p_2)^n = \left(\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\right)^6$ $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

$M_{X/Y=3}(t) = (pe^t+1-p)^{n'} = \left(\frac{1}{8}e^t+\frac{7}{8}\right)^4$ $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

D)

$COV(X,Y) = -np_1p_2$

$E[X]=np_1,\ E[Y]=np_2$ $\quad$ La mejor aproximación es la rr.:

$$rr(Y/X) \equiv y = E[Y] + \frac{COV(X,Y)}{Var[X]}(x-E[X]) = np_2 + \frac{-\cancel{n}\cancel{p_1}p_2}{\cancel{n}\cancel{p_1}(1-p_1)}(x-np_1)$$

$$= np_2 + \frac{np_1p_2}{1-p_1} - \frac{p_2}{1-p_1}x = \frac{np_2 - \cancel{np_1p_2} + \cancel{np_1p_2}}{1-p_1} - \frac{p_2}{1-p_1}x = \frac{6\cdot 1/2}{1-1/4} - \frac{1/2}{1-1/4}x \Rightarrow$$

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

$$\rho^2_{X,Y} = \frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_{X,Y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$