



---

# INTELIGENCIA ARTIFICIAL

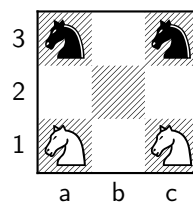
Curso 2022/23

Relación de Problemas 2

BÚSQUEDA

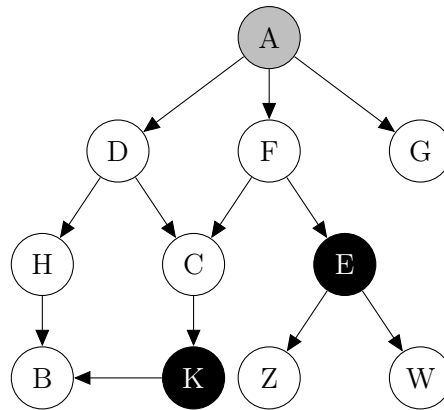
---

1. Tenemos un tablero de  $3 \times 3$  casillas como el siguiente:



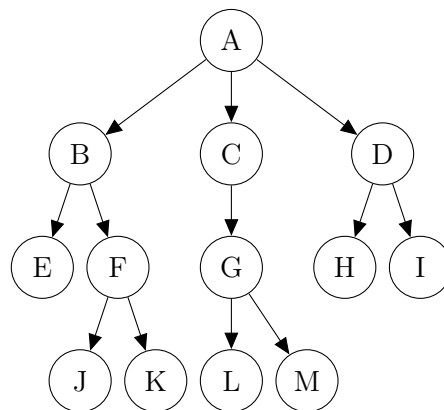
Deseamos intercambiar los caballos negros con los blancos.

- (a) Define que elementos forman:
- el estado inicial
  - le estado final
  - los operadores
- (b) ¿Importa el camino o sólo el estado final?
- (c) ¿La solución ha de ser óptima?
2. El grafo que se muestra a continuación determina un problema de búsqueda. Cada nodo representa un estado, mientras que los arcos modelan la aplicación de los operadores. Si A es el estado inicial y K y E son los estados meta:
- (a) Desarrolle el árbol de búsqueda en anchura
- (b) ¿Cuál de los nodos meta se expande primero?
- (c) La búsqueda en profundidad se diferencia de la búsqueda en anchura en que al expandir un nodo, los nodos hijo se insertan al inicio de la lista. Resuelva el problema usando este algoritmo.



3. Liste el orden en el que son visitados los nodos del árbol para cada una de las siguientes estrategias de búsqueda<sup>1</sup>. ¿Cuál es el número máximo de nodos que se ha requerido almacenar simultáneamente en memoria en cada caso?

- (a) Búsqueda primero en anchura.
- (b) Búsqueda en profundidad.
- (c) Búsqueda retroactiva.
- (d) Descenso iterativo.



4. Dar el orden de búsqueda para los nodos mostrados en la siguiente figura para:

- (a) Búsqueda en anchura.
- (b) Búsqueda retroactiva con profundidad limitada ( $d = 2$ ).
- (c) Descenso iterativo (profundidad inicial = 1).

<sup>1</sup>Eligiendo siempre el nodo más a la izquierda



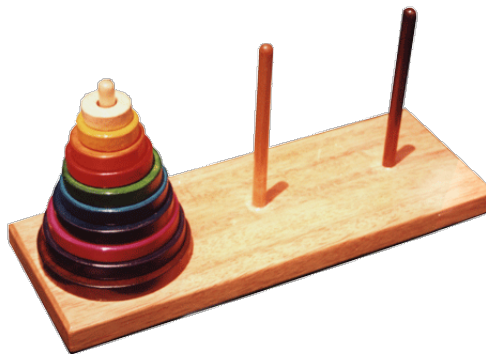


ugr

Universidad de Granada  
Departamento de Ciencias de la Computación  
e Inteligencia Artificial



- (a) Representar este problema como un problema de búsqueda
  - (b) Definir un estado inicial, el conjunto de estados meta, los operadores, así como el coste de cada operador.
  - (c) Encontrar una solución al problema utilizando un algoritmo de búsqueda.
8. "Las torres de Hanoi" es un juego matemático ideado en el siglo XVIII. Este juego consiste en pasar 64 discos de diámetro decreciente, de un poste a otro poste, utilizando un tercer poste auxiliar para los pasos intermedios.



Cada vez sólo se puede mover un disco, los discos siempre deben estar en algún poste y no se puede colocar un disco sobre otro de menor tamaño.

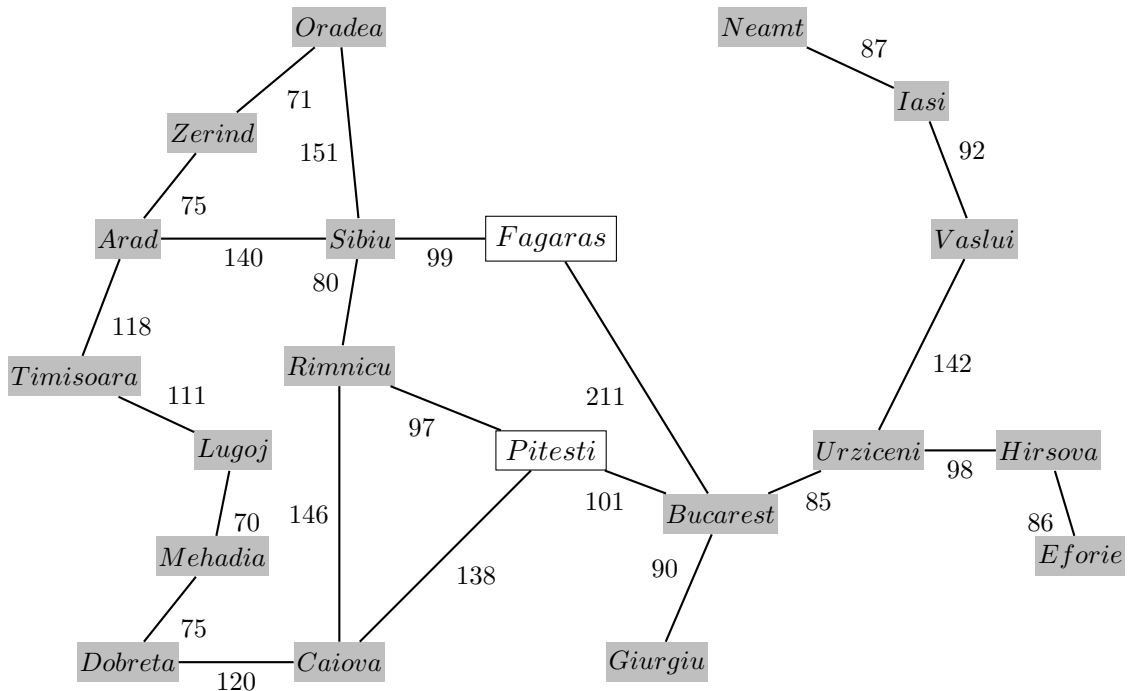
- (a) ¿Cómo representarías los estados?
  - (b) ¿Cuáles serían los operadores?
9. Un acertijo consiste en dados 4 números y un resultado, determinar las operaciones de suma o resta que hay que realizar sobre los números para obtener ese resultado. Por ejemplo:
- Números: 1, 4, 3, 2
  - Resultado: 0
  - Solución:  $4 - 3 - 2 + 1$

Suponiendo que resolvemos el acertijo como un problema de búsqueda, responde las siguientes cuestiones:

- (a) Propón una representación de los estados y explica cómo se generarían los estados sucesores.
- (b) ¿Cuál sería el tamaño del espacio de estados?
- (c) ¿Qué tipo de algoritmo de búsqueda no informada sería mejor utilizar y por qué?



10. Aplica la búsqueda de coste uniforme para encontrar la ruta más corta de Pitesti a Fagaras.



- (a) Desarrolla el árbol de búsqueda generado por el algoritmo, asumiendo que se evitan ciclos simples.
- (b) Indica el valor  $g$  de cada nodo, así como el orden en que se expanden.
11. Se han descubierto  $A$  fuentes de contaminación en un parque natural y se quieren colocar  $B$  aparatos de descontaminación (donde  $B < A$ ) para mejorar la situación. Para ello se dispone de un mapa del parque que indica la posición de la estación de trenes donde se han almacenado todos los aparatos y de los  $A$  lugares donde se necesita colocar los aparatos de descontaminación. Además también se dispone del nivel de contaminación que hay alrededor de cada fuente, de un mapa de los desplazamientos posibles de los aparatos en el territorio y del coste de cada desplazamiento. Cada aparato puede eliminar por completo la contaminación de una fuente, independientemente de su nivel.

El objetivo es colocar los aparatos de manera que se minimice la contaminación total en el parque y el coste del recorrido (suma de desplazamientos) que harán los aparatos en el sentido "estación  $\rightarrow$  fuente de contaminación". En los siguientes apartados se proponen diferentes alternativas para algunos de los elementos necesarios para plantear la búsqueda (solución inicial, operadores, función heurística). Hay que comentar la solución que se propone respecto a si es correcta, es eficiente, y es mejor o peor en comparación con otras alternativas, además de justificar todas las respuestas.

- (a) Se planea solucionar el problema mediante un método de escalada, partiendo de una solución inicial sin ningún aparato y con un operador que coloca un

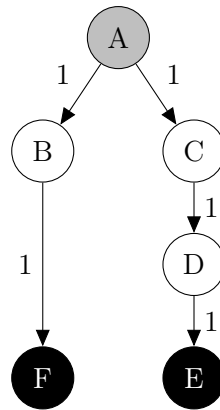


aparato en una fuente de contaminación determinada, controlando que el número de los aparatos colocados sea como máximo  $B$ .

- (b) Se plantea solucionarlo mediante un método de escalada, partiendo de una solución inicial con  $B$  aparatos colocados aleatoriamente, y utilizando como función heurística la suma de los costes de desplazamiento de la estación a cada una de las  $B$  fuentes.
  - (c) Se plantea solucionarlo mediante un método de escalada, partiendo de una solución inicial con  $B$  aparatos colocados aleatoriamente, y utilizando como función heurística la suma de los costes mínimos de los recorridos "estación  $\rightarrow$  fuente de contaminación" multiplicada por la suma de los niveles de contaminación correspondientes a los  $B$  aparatos.
  - (d) Se plantea solucionarlo mediante un método de escalada, partiendo de una solución inicial alcanzada colocando los  $B$  aparatos ordenadamente según el coste mínimo "estación  $\rightarrow$  fuente de contaminación" y empezando con el que tiene coste menor. Se plantea como operador mover un aparato a cualquier fuente cuyo producto de coste mínimo "estación  $\rightarrow$  fuente de contaminación" sea menor que el actual.
  - (e) Se plantea solucionarlo mediante algoritmos genéticos: se usan individuos de  $A$  bits y como población inicial se generan  $n$  individuos donde en cada uno hay exactamente  $B$  bits a 1. La función de idoneidad es la suma de los costes mínimos "estación  $\rightarrow$  fuente de contaminación" más la contaminación total residual del parque multiplicada por una constante. Como operadores se usan los habituales de cruce y mutación.
12. Sobre el problema de misioneros y caníbales tomar como función heurística el número total de personas en la orilla del río que hace de salida. ¿Qué resultado darían método de escalada en la resolución de este problema?
  13. El algoritmo  $A^*$  no termina mientras no se selecciona un nodo objetivo para su expansión. Sin embargo, es posible encontrar un camino al objetivo mucho antes.
    - (a) ¿Por qué no se termina en el momento en que se encuentra un nodo objetivo?
    - (b) Ilustre la respuesta anterior con un ejemplo.
  14. El grafo que se muestra en la figura describe un problema de búsqueda. Suponga que  $A$  es el estado inicial y que  $F$  y  $E$  son estados meta. Los arcos están etiquetados con el coste real de los operadores y  $h$  es una función heurística cuyos valores son:

	A	B	C	D	E	F
$h$	8	6	6	5	0	0

- (a) Desarrolle el árbol de búsqueda que genera el algoritmo  $A^*$ .
- (b) Indique el orden en que se expanden los nodos.
- (c) ¿Cuál de los nodos meta se encuentra primero?
- (d) ¿La función heurística es admisible? Argumente su respuesta.



15. Considere el problema de búsqueda del ejercicio precedente.
- Asigne los valores del coste real de los operadores y de la función heurística  $h$ , de modo que ésta resulte ser admisible.
  - Desarrolle el árbol de búsqueda que genera el algoritmo  $A^*$ .
  - ¿Se ha obtenido la solución óptima?
16. Tenemos cinco monedas dispuestas de la siguiente forma:

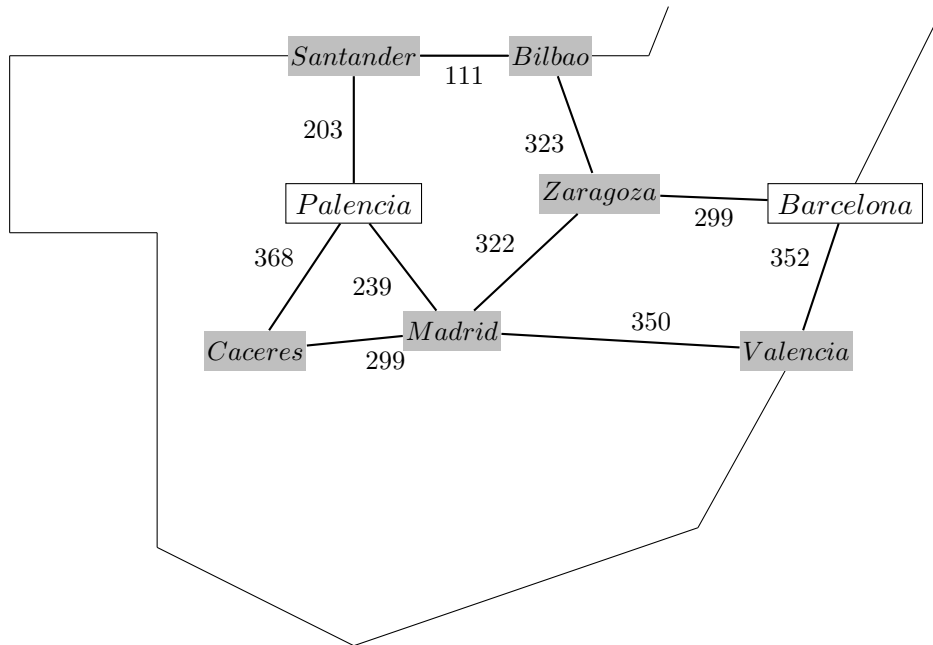
$A R A R A$

El anverso de la moneda está representado por A y el reverso por R. Se considera un movimiento (de coste 1) el dar la vuelta a dos monedas contiguas. Deseamos obtener la situación final siguiente:

$R R R A R$

Dada la función heurística  $h(n) = \text{número de monedas mal colocadas}$ .

- Resolver el problema aplicando  $A^*$ . Indica claramente el orden de expansión de los nodos, el tratamiento de nodos duplicados, los valores de las funciones, el camino obtenido y su coste.
  - ¿La heurística usada es admisible? ¿Por qué?
17. Dado el siguiente mapa de carreteras en el que los caminos entre cada dos ciudades están etiquetados con sus distancias en kilómetros:

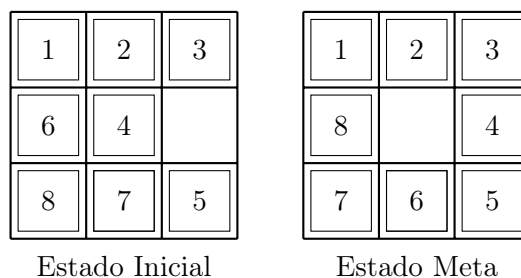


El objetivo es encontrar el camino más corto entre Palencia y Barcelona. Para ello:

- Aplica el algoritmo A\* utilizando como estimación del coste del camino entre la ciudad actual y el objetivo el valor 0 para todos los nodos.
- Aplica el algoritmo A\* utilizando ahora como estimación del coste del camino entre la ciudad actual y el objetivo las distancias siguientes:

	Bilbao	Cáceres	Madrid	Palencia	Santander	Valencia	Zaragoza
Barcelona	502	850	550	580	605	303	275

18. Considere el 8-puzzle cuyo estado inicial y estado meta se muestran en la siguiente figura:

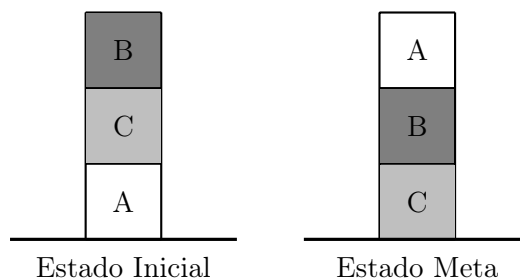


Desarrolle el árbol de búsqueda que expande el algoritmo A\* utilizando las siguientes heurísticas. Evite ciclos generales, indique el orden de expansión de los estados y muestre en cada paso los valores de  $f$ ,  $g$  y  $h$ . Suponga que el coste de cada operador es 1.





- (a) Heurística  $h_1(n)$  = número de piezas mal colocadas.
- (b) Heurística  $h_2(n)$  = suma de distancia Manhattan. La distancia Manhattan de una pieza es la suma de las distancias vertical y horizontal a su posición final.
- (c) ¿Cuál de las heurísticas expande menos nodos y por qué?
- (d) ¿Puede sacar una conclusión general con respecto a la calidad de las funciones heurísticas?
19. Considere el problema de los bloques cuyo estado inicial y estado meta se muestran en la siguiente figura:

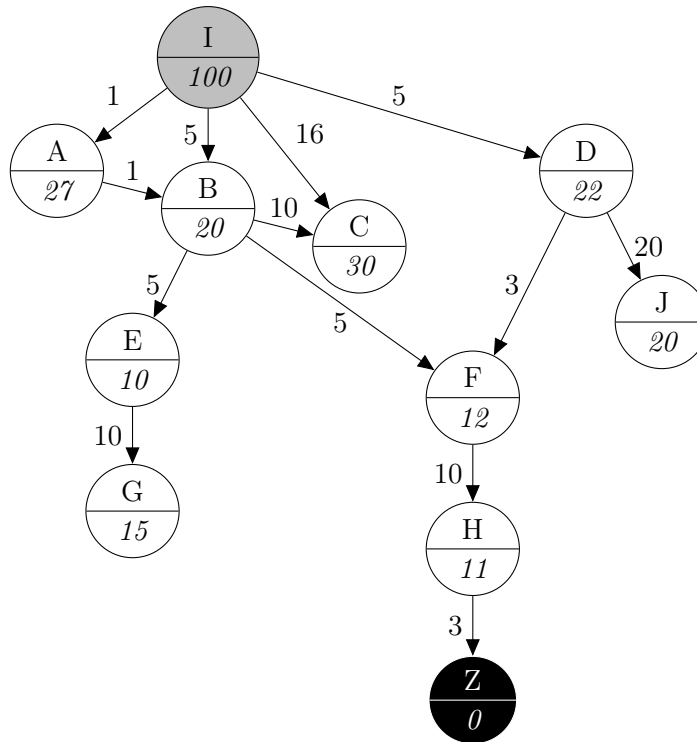


Desarrolle el árbol de búsqueda que expande el algoritmo A\* utilizando la siguiente heurística:

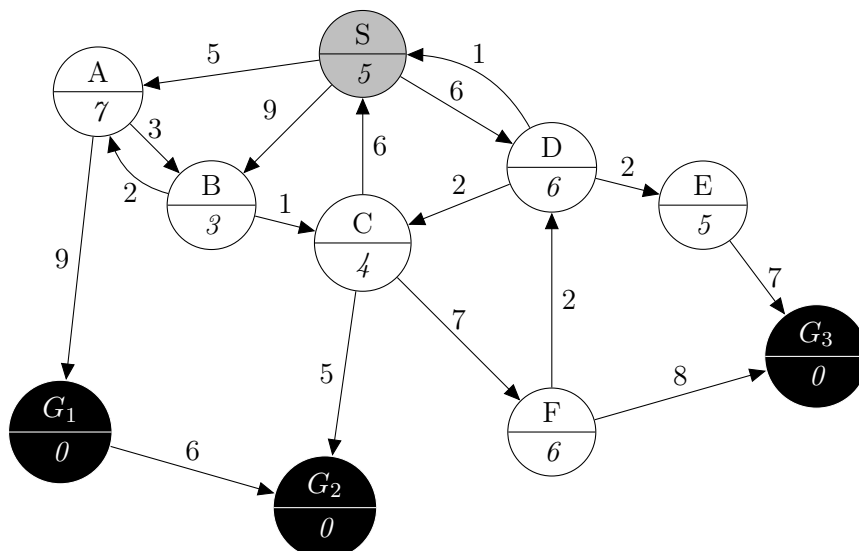
$$h(n) = \text{número de bloques mal colocados}$$

Filtre los ciclos simples, indique el orden de expansión de los estados y muestre en cada paso los valores de  $f$ ,  $g$  y  $h$ . Suponga que el coste de cada operador es 1.

20. Dado el siguiente grado representando un espacio de estados, utilizar el algoritmo A\* para obtener la solución al problema. En dicho grafo considerar como función  $h$  la que se indica dentro de cada nodo, y para el cálculo de la función  $g$  considerar el coste que aparece en el arco. El nodo inicial es  $I$  y hay un solo nodo meta  $Z$ .



- (a) Mostrar el gráfico final con la solución obtenida, los valores  $g$  y  $h$  finales para cada nodo, junto con los enlaces a los hijos y enlace al mejor padre.
- (b) ¿Es la función heurística utilizada en el problema admisible?
21. Supongamos que el siguiente grafo representa un espacio de estados de un problema real. El número dentro de cada nodo representa el valor de la función  $h$  del nodo y el número sobre el arco el coste del operador.





$S$  es el nodo de inicio y  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  son nodos que satisfacen la condición objetivo. En todos los casos ABIERTOS representará el conjunto de nodos que puede ser explorados en la siguiente iteración del algoritmo de búsqueda. Utilizar distintos algoritmos de búsqueda para resolver el problema, para cada algoritmo obtener los siguientes datos:

- El conjunto de nodos expandidos en el orden que salen de ABIERTOS.
- El objetivo alcanzado.
- El camino solución encontrado.

Utilizar los siguientes algoritmos:

- Búsqueda en anchura.
  - Profundizaje iterativo
  - Método de escalada simple (usando solo la función  $h$ ).
  - Método de escalada por la máxima pendiente (usando solo la función  $h$ ).
  - Algoritmo  $A^*$  (usando la función  $f = g + h$ ).
22. Dado el grafo del problema anterior, supongamos que estamos utilizando el algoritmo de enfriamiento simulado (usando solo la función  $h$ ). Nos encontramos en el nodo  $S$ , y el algoritmo tiene que decidir si cambia al nodo  $A$  como siguiente estado. Si suponemos que la temperatura es en ese momento 10:
- ¿Cuál es la probabilidad de aceptar  $A$  como siguiente estado?
  - Repite lo anterior tomando como nodo actual  $A$  y nodo candidato a siguiente estado  $B$  y la misma temperatura.
23. Aplicar el algoritmo  $A^*$  para hallar el camino con menor distancia que una las ciudades 1 y 8. Las distancias por carretera entre las distintas ciudades vienen especificada por la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		200						
2	200		150	250	450			
3		150			400	225		
4		350			300			
5		450	400	300			250	
6			225				450	
7					250	450		125
8							125	

Además se dispone de la distancia aérea en línea recta que existe entre todas las ciudades con la ciudad de destino:



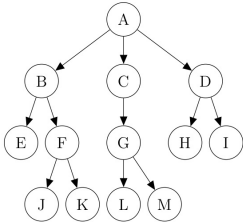
1	2	3	4	5	6	7
800	650	500	650	325	375	125

24. Considérese una modificación del algoritmo  $A^*$  en el que en lugar de usar  $f = g + h$  para ordenar la cola de abiertos se usa  $f_w(n) = (1 - w) * g(n) + w * h(n)$ , siendo  $w$  un número real constante entre 0 y 1.

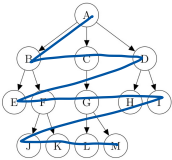
- (a) ¿Qué algoritmo de búsqueda estaríamos aplicando si tomamos  $w = 0$ ?
- (b) ¿Y con  $w = 0.5$ ?
- (c) ¿Y con  $w = 1$ ?

3. Liste el orden en el que son visitados los nodos del árbol para cada una de las siguientes estrategias de búsqueda<sup>[1]</sup>. ¿Cuál es el número máximo de nodos que se ha requerido almacenar simultáneamente en memoria en cada caso?

- (a) Búsqueda primero en anchura.
- (b) Búsqueda en profundidad.
- (c) Búsqueda retroactiva.
- (d) Descenso iterativo.



A) Anchura ⇒ FIFO



Abiertos

~~(A, ∅)~~

~~(B, A)~~

~~(C, A)~~

~~(D, A)~~

⋮

Cerrados

(A, ∅)

(B, A)

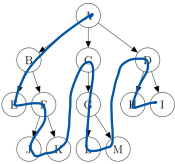
(C, A)

(D, A)

⋮

Se insertan en cerrados en orden, es FIFO.

B) Profundidad ⇒ LIFO



Abiertos

~~(A, ∅)~~

~~(D, A)~~

~~(C, A)~~

~~(B, A)~~

~~(F, B)~~

~~(E, B)~~

~~(K, F)~~

~~(J, F)~~

~~(G, C)~~

~~(M, G)~~

~~(L, G)~~

~~(I, D)~~

~~(H, D)~~

Cerrados

(A, ∅)

(B, A)

(E, B)

(F, B)

(J, F)

(K, F)

(G, C)

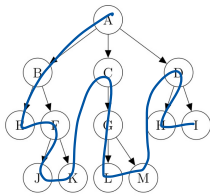
(L, G)

(M, G)

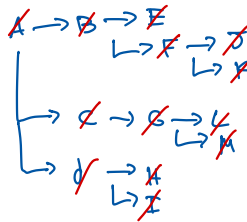
(I, D)

(H, D)

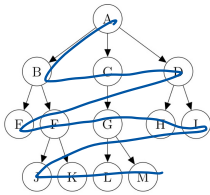
C) Búsqueda retroactiva  $\Rightarrow$  Profundidad recursiva



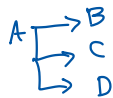
Solo se mantiene en memoria la rama que se está explorando. No hay abiertos ni cerrados, se hace sobre la marcha.



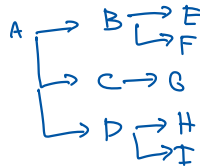
D) Descenso iterativo  $\Rightarrow$  retroactiva para cada nivel



Prob. 1



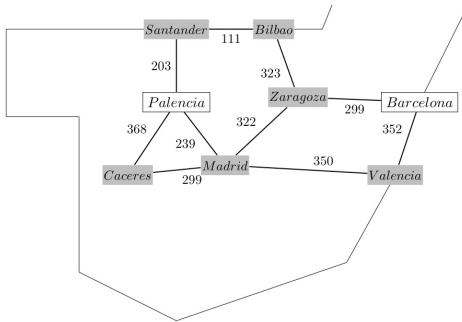
Prob. 2



Prob. 3

C)

17. Dado el siguiente mapa de carreteras en el que los caminos entre cada dos ciudades están etiquetados con sus distancias en kilómetros:



El objetivo es encontrar el camino más corto entre Palencia y Barcelona. Para ello:

- Aplica el algoritmo A\* utilizando como estimación del coste del camino entre la ciudad actual y el objetivo el valor 0 para todos los nodos.
- Aplica el algoritmo A\* utilizando ahora como estimación del coste del camino entre la ciudad actual y el objetivo las distancias siguientes:

	Bilbao	Cáceres	Madrid	Palencia	Santander	Valencia	Zaragoza
Barcelona	502	850	550	580	605	303	275

$$A) f(n) = g(n) + h(n)$$

$h(n) = 0 \forall n \text{ nodo} \Rightarrow f(n) = g(n) \Rightarrow A^*$  coste uniforme, pues los pesos de las aristas son  $\geq 1$ .

**Abiertos**

(Pal, ~~0~~, 0)

(Mad, Pal, 239)

(Cac, Pal, 368)

(San, Pal, 203)

(Bil, San, 314)

(Cac, Mad, 299)

(Zar, Mad, 350)

(Val, Mad, 352)

(Zar, San, 637)

**Cerrados**

(Pal,  $\emptyset$ , 0)

(San, Pal, 203)

(Mad, Pal, 239)

(Bil, San, 314)

(Cac, Pal, 368)

(Zar, Mad, 350)

(Val, Mad, 352)

(Bar, Zar, 850)

**Está en cerrados** - (Mad, Cac, 667)

**Está en cerrados** - (Zar, Zar, 860)

**Está en cerrados** - (Bil, Zar, 884)

**Está en cerrados** - (Bar, Val, 944)

Sol: Bar  $\leftarrow$  Zar  $\leftarrow$  Mad  $\leftarrow$  Pal

Coste: 860

B) Usamos  $A^*$ , con  $g(n) = g(h) + f(n)$

$h(n)$	Bilbao	Cáceres	Madrid	Palencia	Santander	Valencia	Zaragoza
Barcelona	502	850	550	580	605	303	275

Abiertos

~~(Pal, 0, 0, 580, 580)~~  
~~(San, Pal, 203, 605, 808)~~  
~~(Cac, Pal, 368, 850, 1218)~~  
~~(Mad, Pal, 239, 550, 789)~~  
~~(Cac, Mad, 55, 850, 1358)~~  
~~(Zar, Mad, 561, 775, 836)~~  
~~(Val, Mad, 509, 303, 892)~~  
~~(Bil, Pal, 214, 580, 816)~~  
~~(Zar, Bil, 637, 775, 912)~~  
~~(Bil, Zar, 884, 502, 1386)~~  
~~(Bar, Zar, 860, 0, 860)~~

Estos  
en cerrados

Cerrados

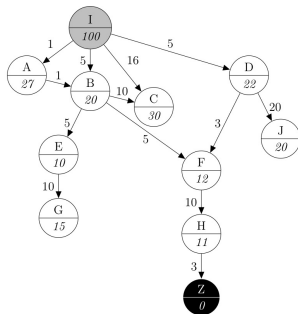
$(Pal, 0, 0, 580, 580)$   
 $(Mad, Pal, 239, 550, 789)$   
 $(San, Pal, 203, 605, 808)$   
 $(Bil, Pal, 214, 580, 816)$   
 $(Zar, Mad, 561, 775, 836)$   
 $(Bar, Zar, 860, 0, 860)$

Sol: Bar  $\leftarrow$  Zar  $\leftarrow$  Mad  $\leftarrow$  Pal

Coste: 860



20. Dado el siguiente grado representando un espacio de estados, utilizar el algoritmo A\* para obtener la solución al problema. En dicho grafo considerar como función  $h$  la que se indica dentro de cada nodo, y para el cálculo de la función  $g$  considerar el coste que aparece en el arco. El nodo inicial es  $I$  y hay un solo nodo meta  $Z$ .



- (a) Mostrar el gráfico final con la solución obtenida, los valores  $g$  y  $h$  finales para cada nodo, junto con los enlaces a los hijos y enlace al mejor padre.  
(b) ¿Es la función heurística utilizada en el problema admisible?

Vamos a realizar búsqueda en anchura: nos olvidamos de los pesos.

Expando	Abiertos	Cerrados
I	$(I, \emptyset)$ $(A, I)$ $(B, I)$ , $(C, F)$	$(F, \emptyset)$
A	$(D, I)$	$(A, I)$
B	$(E, B)$ $(F, B)$	$(\underline{B}, I)$ , $(C, F)$
D	$(J, D)$	$(D, I)$
E	$(G, E)$	$(E, B)$
F	$(H, F)$	$(\underline{F}, B)$ $(J, D)$ , $(G, E)$
H	$(\underline{Z}, H)$	$(\underline{H}, F)$

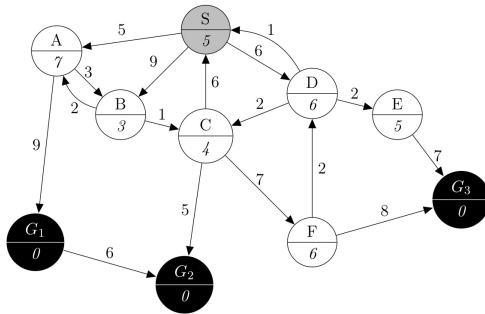
Camino:  $I \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow Z$

Anchura en la práctica para no tener que estar buscando en abiertos:

Expando	Abiertos	Cerrados
I	$(I, \emptyset)$ , $(A, I)$ , $(B, I)$ , $(C, I)$	$(F, \emptyset)$ , $(A, I)$ , $(B, I)$
A	$(D, I)$ , $(B, A)$ , $(C, B)$	
B		
D		
E		
F		
H		

Para ver si se expande un nodo de los abiertos, se recorren los cerrados (que sí es eficiente) y si lo encontramos no se expande.

21. Supongamos que el siguiente grafo representa un espacio de estados de un problema real. El número dentro de cada nodo representa el valor de la función  $h$  del nodo y el número sobre el arco el coste del operador.



$S$  es el nodo de inicio y  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G_3$  son nodos que satisfacen la condición objetivo. En todos los casos ABIERTOS representará el conjunto de nodos que puede ser explorados en la siguiente iteración del algoritmo de búsqueda. Utilizar distintos algoritmos de búsqueda para resolver el problema, para cada algoritmo obtener los siguientes datos:

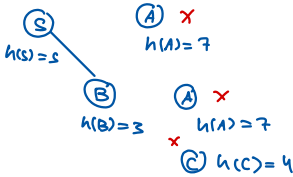
- El conjunto de nodos expandidos en el orden que salen de ABIERTOS.
- El objetivo alcanzado.
- El camino solución encontrado.

Utilizar los siguientes algoritmos:

(b) Profundizaje iterativo

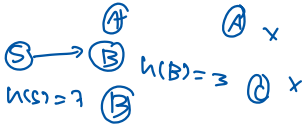
- Profundidad 1:  $SABD$
- Profundidad 2:  $SAB \boxed{B_1}$

(c) Método de escalada simple (usando solo la función  $h$ ).



Si se puede ir al mejor nodo por tener el coste mejor, se hace. Si no, no. Vemos que el algoritmo se queda estancado, pues no hay ningún hijo de B con mejor coste heurístico que el propio B.

(d) Método de escalada por la máxima pendiente (usando solo la función  $h$ ).



$SABDAC$   
Objetivo: 0  
 $S \rightarrow B$

(e) Algoritmo  $A^*$  (usando la función  $f = g + h$ ).

características de las heurísticas:

\* Admisible:  $h(A) \leq h^*(A) \Rightarrow$  Si el  $A^*$  alcanza el objetivo, el camino es óptimo  
 $\downarrow$   
 coste real óptimo a la solución desde A

\* Monotonía/consistencia:  $h(P) - h(H) \leq c(P, H) \forall H \Rightarrow$  No hay que revisar cerrados porque el introducido es el más óptimo, y se actualiza recursivamente.



Monotonía  $\Rightarrow$  admisible

Ambas características suponen encontrar el óptimo, pero cumplir únicamente admisibilidad provoca menor eficiencia, pues supone buscar en cerrados.

Expando	Abiertos	Cerrados
S	$(S, \emptyset, 0 + 5 = 5)$ $(A, S, 5 + 7 = 12)$ $(B, S, 9 + 3 = 12)$ * $\rightarrow$ Descartamos por haber otro de mejor coste $(D, S, 6 + 6 = 12)$	$(S, \emptyset, 0 + 5 = 5)$ ** $(S, D, 7 + 5 = 12)$
A	$(B, A, 9 + 3 = 11)$ * $(G, A, 14 + 0 = 14)$	$(A, S, 5 + 7 = 12)$ * $(A, B, 10 + 7 = 17)$
B *	$(C, B, 9 + 4 = 13)$ *	$(B, A, 8 + 3 = 11)$
D * *	$(C, D, 8 + 4 = 12)$ * $(E, D, 8 + 5 = 13)$	$(\underline{D}, \underline{S}, 6 + 6 = 12)$
C	$(F, C, 15 + 6 = 21)$ $(G, C, 13 + 0 = 13)$	$(\underline{C}, \underline{D}, 8 + 4 = 12)$
E	$(G, E, 15 + 0 = 15)$	$(F, D, 8 + 5 = 13)$
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>G_2</math></span>		$(\underline{G}_2, \underline{C}, 13 + 0 = 13)$

Visitados: S A B D C E  $G_2$

Coste: 13

Camino:  $S \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow G_2$