Normas para la realización del examen: **Duración: 2.5 horas**

- **Para la evaluación única global hay que entregar dos ejercicios adicionales de problemas y se dispone de 1 hora adicional.**

◁ Ejercicio 1 ▷ Problema [2.5 puntos]

Determinar gramáticas independientes del contexto para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$. Procura que sean regulares cuando sea posible (no hace falta demostrar si es posible o no):

1. $\{u0w1 \,:\, u, w \in \{0, 1\}^*.|u| = |w|\}$
2. Palabras en las que el número de 0's es múltiplo de 3.
3. $\{0^m 1^{2n} 0^{3n} 1^k \,:\, k > m \geq 1, n \geq 1\}$

◁ Ejercicio 2 ▷ Problema [2.5 puntos]

Sean los alfabetos $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}$ y el homomorfismo entre las palabras de ambos alfabetos dado por: $f(a) = 011, f(b) = 100, f(c) = 01$. Considera el lenguaje L asociado a la expresón regular sobre B dada por: $\mathbf{10}(\mathbf{01} + \mathbf{0})^*\mathbf{10}$, dar un autómata finito determinista que acepte $f^{-1}(L)$.

◁ Ejercicio 3 ▷ Ejercicio [1.25 puntos]

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. Si un lenguaje L es regular entonces L^* es siempre regular.
2. Si L es finito entonces su lenguaje complementario es independiente del contexto.
3. En un autómata finito no-determinista que acepta el lenguaje L, si intercambio los estados finales y no finales entre sí, paso a un autómata que acepta el lenguaje complementario.

◁ Ejercicio 4 ▷ Teoría [1.25 puntos]

Describe cómo sería un algoritmo que lea dos gramáticas regulares y nos diga si representan el mismo lenguaje. ¿Qué dificultades habría para realizar un algoritmo similar para gramáticas independientes del contexto?

◁ Ejercicio 5 ▷ Ejercicio [1.25 puntos]

Sea la siguiente gramática sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$:

$$S \to aS, \quad S \to aSbS, \quad S \to c$$

1. ¿Es la gramática ambigua?
2. ¿Es el lenguaje generado inherentemente ambiguo?

Justificar las respuestas

◁ Ejercicio 6 ▷ Cuestión Teoría [1.25 puntos]

Define cuando dos estados son indistinguibles en un autómada finito determinista. Si p, q son distinguibles y a es un símbolo del alfabeto de entrada, ¿qué se puede afirmar de los estados $\delta(p, a)$ y $\delta(q, a)$? Justifica la respuesta.

◁ Ejercicio 1 ▷ Problema **[2.5 puntos]**

Determinar gramáticas independientes del contexto para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$. Procura que sean regulares cuando sea posible (no hace falta demostrar si es posible o no):

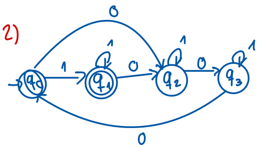
1. $\{u0w1 \,:\, u,w \in \{0,1\}^*.|u| = |w|\}$
2. Palabras en las que el número de 0's es múltiplo de 3.
3. $\{0^m 1^{2n} 0^{3n} 1^k \,:\, k > m \geq 1, n \geq 1\}$

1)

$S \to A1$

$A \to 1A0 \mid 0A1 \mid 0A0 \mid 1A1 \mid 0$

2)



$q_0 \to 1q_1 \mid 0q_2 \mid \varepsilon$

$q_1 \to 1q_1 \mid 0q_2 \mid \varepsilon$

$q_2 \to 1q_2 \mid 0q_3$

$q_3 \to 1q_3 \mid q_0$

3) $L = \{0^m (11)^n (000)^n 1^k \mid k > m \geq 1, n \geq 1\}$

$S \to A1$

$A \to 0A1C \mid 11B000$

$C \to 1C \mid \varepsilon$

$B \to 11B000 \mid \varepsilon$

◁ Ejercicio 2 ▷ Problema **[2.5 puntos]**

Sean los alfabetos $A = \{a,b,c\}, B = \{0,1\}$ y el homomorfismo entre las palabras de ambos alfabetos dado por: $f(a) = 011, f(b) = 100, f(c) = 01$. Considera el lenguaje L asociado a la expresón regular sobre B dada por: $\mathbf{10(01+0)^*10}$, dar un autómata finito determinista que acepte $f^{-1}(L)$.

$f: A^* \to B^* \mid \begin{cases} f(a) = 011 \\ f(b) = 100 \\ f(c) = 01 \end{cases}$

$f^{-1}(L) = \{u \in A^* / f(u) \in L\} = \emptyset$, pues para terminar una palabra necesitamos acabar con 10.

Si $u \in A^*$, $a_i \in \{a,b,c\}\ \forall i = 1 \dots n$

$f(u) = \bullet_{i=1}^{n} f(a_i) \notin L$, pues $f(a_n) \neq 010, 110, 10$, $a_n \in \{a,b,c\} \Longrightarrow$

$f^{-1}(L) = \emptyset \Longrightarrow$ Un autómata será de la forma 

◁ **Ejercicio 3** ▷ **Ejercicio** **[1.25 puntos]**

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

1. Si un lenguaje L es regular entonces L^* es siempre regular.
2. Si L es finito entonces su lenguaje complementario es independiente del contexto.
3. En un autómata finito no-determinista que acepta el lenguaje L, si intercambio los estados finales y no finales entre sí, paso a un autómata que acepta el lenguaje complementario.

1)

Verdadero, pues $\mathcal{L}_3$ es cerrado para la concatenación y unión $\Rightarrow L^* = \bigcup_{i\geq 0} L^i \in \mathcal{L}_3$

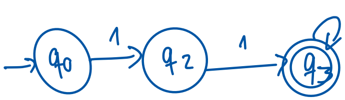
2)

Verdadero, pues $\mathcal{L}_3$ es cerrado para el complementario:

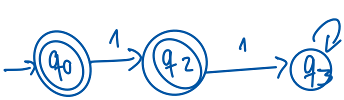
L finito $\Rightarrow L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \bar{L} \in \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \Rightarrow \bar{L}$ es IC.

3)

Falso:



$= M_1$



$= \overline{M_1}$

Vemos que $01 \notin L(M_1), L(\overline{M_1})$. Si $\overline{M_1}$ aceptara el lenguaje complementario, $01 \in L(\overline{M_1}) = \overline{L(M_1)}$. Para ello necesitamos que M_1 se determinista.

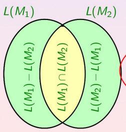
◁ **Ejercicio 4** ▷ **Teoría** **[1.25 puntos]**

Describe cómo sería un algoritmo que lea dos gramáticas regulares y nos diga si representan el mismo lenguaje. ¿Qué dificultades habría para realizar un algoritmo similar para gramáticas independientes del contexto?

Algoritmo

Existe un algoritmo para el problema: **Dados dos autómatas finitos M_1 y M_2 comprobar si aceptan el mismo lenguaje:**

Basta con construir el autómata que acepta el lenguaje
$(L(M_1) \setminus L(M_2)) \cup (L(M_2) \setminus L(M_1)) = (L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}) \cup (L(M_2) \cap \overline{L(M_1)})$
Después se comprueba si el lenguaje aceptado por este autómata es vacío.



La mejor forma de hacer este autómata es con el autómata producto, haciendo finales las parejas de estados en las que un estado es final y el otro no.

Esta es una forma.

El inconveniente para gramáticas IC, es que esa clase de lenguajes no son cerrados para el complementario.

Por tanto, no aseguramos $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$

```
Iguales (G1, G2) {

    M1 = Minimizar(Autómata(G1));
    M2 = Minimizar(Autómata(G2));

    Renombrar_estados(M2);

    boolean iguales = false;

    if( M1 == M2 ) iguales = true;

    return iguales;

}
```

El algoritmo es posible por la unicidad del autómata minimal.

◁ **Ejercicio 5** ▷ **Ejercicio** **[1.25 puntos]**

Sea la siguiente gramática sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$:

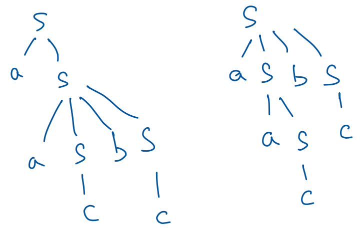
$$S \to aS, \quad S \to aSbS, \quad S \to c$$

1. ¿Es la gramática ambigua?
2. ¿Es el lenguaje generado inherentemente ambiguo?

Justificar las respuestas

1)

Tomamos $u = aacbc \in L(G)$



Por tanto, vemos que tiene 2 árboles de derivación $\Longrightarrow$ es ambigua.

2)

Vemos que $L(G)$ puede ser representado por la e.r.

$(a^+(cb)^*)^*c \Longrightarrow \exists$ AFD que admite el lenguaje $\Longrightarrow$

$\exists$ gramática lineal por la dcha. que lo genera $\Longrightarrow$ no puede ser inherentemente ambigua, al siempre producir por la dcha., dando lugar a un árbol de derivación único $\forall u \in L(G)$

◁ **Ejercicio 6** ▷ **Cuestión Teoría** **[1.25 puntos]**

Define cuando dos estados son indistinguibles en un autómada finito determinista. Si p, q son distinguibles y a es un símbolo del alfabeto de entrada, ¿qué se puede afirmar de los estados $\delta(p, a)$ y $\delta(q, a)$? Justifica la respuesta.

Sea A el alfabeto de entrada.

p, q indistinguibles $\Longleftrightarrow [\forall u \in A^*, \ \delta^*(p, u) \in F \Longleftrightarrow \delta^*(q, u) \in F]$

Sabemos $\delta(p, a), \delta(q, a)$ distinguibles $\forall a \in A^* \Longrightarrow p, q$ distinguibles.

Por tanto, si p, q son distinguibles no podemos afirmar nada acerca de $\delta(p, a), \delta(q, a)$.