Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Métodos Numéricos II (curso 2023/24)

Ejercicio dominios de atracción Newton Raphson

Leandro Jorge Fdez. Vega DGIIM

1 Dada la ecuación

$$x^3 - x = 0$$

se pretende determinar para qué valores de x_0 la iteración de Newton-Raphson converge a cada una de las tres raíces, $+1$, 0, -1, es decir, vamos a encontrar los dominios de atracción de las raíces. Para ello:

a) Realiza una figura con la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, hallando el máximo y el mínimo de f.

b) Comprueba que para $x_0 \in I_1 = (b_1, +\infty)$, con $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay convergencia hacia $+1$. Por simetría, para $x_0 \in J_1 = (-\infty, -b_1)$, hay convergencia hacia -1.

c) Dibuja en la figura $I_2 = (-b_1, -b_2)$ donde $-b_2 < 0$ es el punto que el método de Newton-Raphson lleva a b_1. Prueba que I_2 está en el dominio de atracción de 1. Por simetría $J_2 = (b_2, b_1)$ está en el dominio de atracción de -1

d) Dibuja ahora $I_3 = (b_3, b_2)$ donde b_3 es llevado por el método de Newton-Raphson en $-b_2$ y prueba que está en el dominio de atracción de $+1$.

Observamos entonces que:

(1) El dominio de atracción de $+1$ es la unión de los intervalos abiertos disjuntos $I_1, I_2, \ldots$.

(2) Los extremos de estos intervalos se acumulan a los puntos $\pm\gamma$ tales que el método de Newton-Raphson lleva γ en $-\gamma$ y viceversa.

(3) El dominio de -1 es simétrico del de $+1$.

(4) El dominio de 0 es $(-\gamma, \gamma)$.

(5) Empezando en los puntos $\pm b_n$ sólo se pueden efectuar un número finito de iteraciones.

(6) En cualquier pequeño intervalo que contenga a γ hay:

- puntos del dominio de $+1$,
- puntos del dominio de -1,
- puntos del dominio de 0,
- puntos en los que la iteración acaba tras un número finito de pasos.

Del libro *Diez lecciones de Cálculo Numérico* de J.M. Sanz-Serna.

1 Dada la ecuación

$$x^3 - x = 0$$

se pretende determinar para qué valores de x_0 la iteración de Newton-Raphson converge a cada una de las tres raíces, $+1$, 0, -1, es decir, vamos a encontrar los dominios de atracción de las raíces. Para ello:

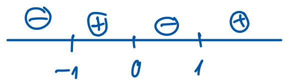
a) Realiza una figura con la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, hallando el máximo y el mínimo de f.

1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) Simetrías: $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ simetría impar

3) Ptos. corte: $f(x) = x^3 - x = x(x^2-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$

4) Signo: $\begin{cases} \text{Ceros: } x = 0, \pm 1 \\ \text{Polos: NO} \end{cases}$



5) Asíntotas verticales: NO

6) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Por tanto, no hay.

7) Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

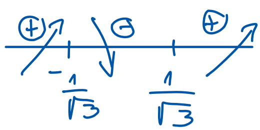
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

Por tanto, no hay.

8) Monotonía:

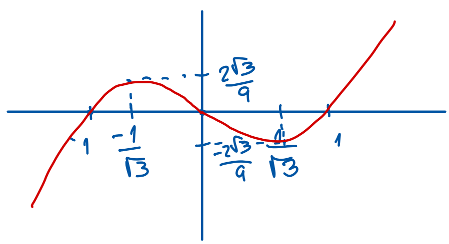
$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Signo $\begin{cases} \text{Ceros: } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{Polos: no} \end{cases}$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$



$\sup f = +\infty$

$\inf f = -\infty$

Vemos además, que $\exists f^{-1}$ por ser bijectiva.

b) Comprueba que para $x_0 \in I_1 = (b_1, +\infty)$, con $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay convergencia hacia $+1$. Por simetría, para $x_0 \in J_1 = (-\infty, -b_1)$, hay convergencia hacia -1.

Por método N-R:

$$x_{n+1} = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}$$

Tomamos $I_m = [0'9 \,, 1+m] = [a_m, b_m]$. $\forall m \in \mathbb{N}$:

1) $f(a_m) f(b_m) < 0$

2) $f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I_m$, pues $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) f'' no cambia de signo en I_m, por la misma razón.

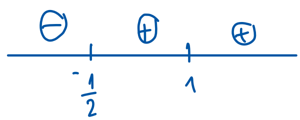
4) $f(x_0) f''(x_0) > 0$. Sin embargo, sólo se verifica $\forall x_0 \in]1, 1+m]$

Pasando al límite, obtenemos convergencia global del método $\forall x_0 \in [1, +\infty[$.

Nos queda probar la convergencia en el intervalo $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$,

Sea $g(x) = \dfrac{2x^3}{3x^2-1} > 1 \Longleftrightarrow 2x^3 > 3x^2 - 1 \Longleftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 > 0$

signo $\begin{cases} \text{Ceros: } x = 1, -\frac{1}{2} \\ \text{Polos: No} \end{cases}$



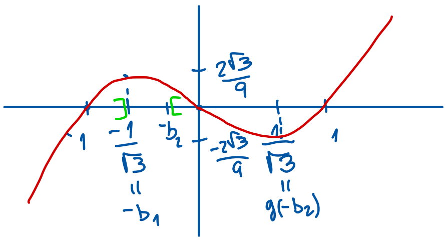
	2	−3	0	1
1		2	−1	−1
	2	−1	−1	$\boxed{0}$

$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

Por tanto, vemos $\forall x_0 \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$, $g(x_0) \in [1, +\infty[\Longrightarrow$ El método converge por lo probado anteriormente.

Así, queda probada la convergencia de N-R $\forall x_0 \in I_1$

c) Dibuja en la figura $I_2 = (-b_1, -b_2)$ donde $-b_2 < 0$ es el punto que el método de Newton-Raphson lleva a b_1. Prueba que I_2 está en el dominio de atracción de 1. Por simetría $J_2 = (b_2, b_1)$ está en el dominio de atracción de -1



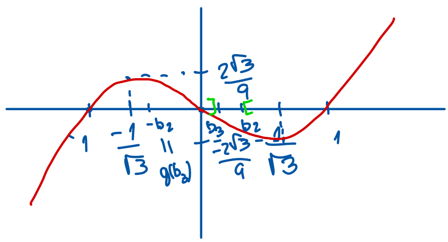
$I_2 =]-b_1, -b_2[=]-\frac{1}{\sqrt{3}}, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)[$

Vemos $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ es estrictamente decreciente en I_2.

$\lim_{x \to -\frac{1}{\sqrt{3}}} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -b_2} g(x) = \lim_{x \to g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto, $\forall x_0 \in I_2$, $g(x_0) \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[\Rightarrow$ N-R converge a $x = 1$ $\forall x_0 \in I_2$. por lo probado anteriormente.

d) Dibuja ahora $I_3 = (b_3, b_2)$ donde b_3 es llevado por el método de Newton-Raphson en $-b_2$ y prueba que está en el dominio de atracción de $+1$.



Vemos $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ es estrictamente decreciente en I_3.

$g(b_3) = -b_2 > g(b_2) \overset{\text{simetría}}{=} g\left(g^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow g(I_3) = I_2$

Por tanto, por lo probado en c) y tras seguir iterando $\Rightarrow$

$\forall x_0 \in I_3$, $g(g(x_0)) \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[\Rightarrow$ N-R converge a $x = 1$ $\forall x_0 \in I_3$