Tema 12

El teorema general de Cauchy

La teoría local de Cauchy, cuyos dos resultados básicos fueron el teorema de Cauchy para dominios estrellados y la fórmula de Cauchy para una circunferencia, nos ha permitido probar numerosas propiedades de las funciones holomorfas. Nuestro próximo objetivo es completar dicha teoría, encontrando la forma más general posible de esos dos resultados iniciales. Con respecto al teorema local de Cauchy, es natural preguntarse cuales son los abiertos del plano en los que toda función holomorfa admite una primitiva. Es fácil dar ejemplos de dominios con esta propiedad que no son estrellados. Con respecto a la fórmula de Cauchy, cabe preguntarse lo que ocurre al sustituir la circunferencia por otros caminos cerrados.

Veremos que ambas preguntas están íntimamente ligadas, en cierto modo son equivalentes, y abordaremos su estudio empezando por la segunda. Un breve análisis de la fórmula de Cauchy motivará la noción clave que marca la transición de la teoría local de Cauchy ya conocida, a la *teoría global* que ahora iniciamos. Se trata del *índice* de un punto con respecto a un camino cerrado, una noción que formaliza rigurosamente la idea intuitiva del número de vueltas que da un camino cerrado alrededor de un punto.

Por otra parte, introducimos un formalismo que nos permitirá liberarnos de la condición que deben cumplir dos caminos para poder considerar su suma. Basta para ello considerar sumas formales de caminos arbitrarios, que reciben el nombre *cadenas*, y en particular sumas formales de caminos cerrados, que llamaremos *ciclos*. Son nociones propias de una teoría muy general, llamada Álgebra Homológica, que nace con el estudio del teorema de Cauchy. Comprobaremos rutinariamente que la integral de una función continua sobre una cadena conserva las mismas propiedades que tenía la integral sobre un camino: linealidad, continuidad y aditividad.

Con los preparativos comentados, podremos probar la *forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy*, los dos resultados equivalentes en los que se resume la teoría global. Haremos la demostración publicada por el matemático canadiense John D. Dixon en 1971, históricamente la primera que puede considerarse bien formalizada, por usar sólo argumentos analíticos, evitando las consideraciones geométricas más o menos intuitivas que aparecían en las demostraciones previamente conocidas.

12.1. Índice de un punto respecto a un camino cerrado

Recordemos una integral que jugó un papel clave en la demostración de la fórmula de Cauchy. Fijados $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, para $z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

así que, el primer miembro de la igualdad anterior *indica* si la circunferencia $C(a,r)^*$ rodea o no al punto z. Cabe preguntarse qué ocurrirá en general si, en vez de una circunferencia, consideramos un camino cerrado arbitrario. Ello motiva la definición que sigue.

Si γ es un camino cerrado y $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, el **índice del punto** z **respecto al camino** γ, que se denota por $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$, viene definido por:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Nos preguntábamos si, como en el caso particular de una circunferencia, $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ nos informa de la posición relativa del punto z con respecto al camino γ. Enseguida observamos, con ejemplos sencillos, que el índice es un concepto más refinado:

- Si $\gamma = C(a,r) + C(a,r)$, recorremos dos veces $C(a,r)^*$ en sentido positivo, y tenemos

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 2 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

- Si $\gamma = -C(a,r)$, recorremos una vez la misma circunferencia en sentido negativo y

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

- Finalmente $\gamma = C(a,r) - C(a,r)$ recorre una vez la circunferencia en cada sentido y

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$$

Estos ejemplos nos hacen sospechar que la información contenida en el índice $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ no es la posición relativa de z respecto de γ^*, sino más bien el *número de vueltas* que da el camino γ alrededor del punto z. De hecho, hay que entender que las vueltas se cuentan positiva o negativamente según el sentido de giro, y que las vueltas en sentidos contrarios se compensan, para obtener lo que podríamos llamar un número *neto* de vueltas. Las propiedades del índice que vamos a ir probando permiten convencerse de que, efectivamente, la definición de índice formaliza la idea intuitiva de número de vueltas que hemos explicado. Para empezar, veremos que el índice es siempre un número entero, cosa que no está nada clara si miramos a su definición. Para probarlo, empezamos considerando el caso de un arco, pero un camino cerrado puede ser suma de arcos no cerrados, luego debemos trabajar con arcos arbitrarios.

■ *Dado un arco* $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$, *con* $a,b \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$, *fijemos un punto* $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$. *Entonces la función* $\tau : [a,b] \to \mathbb{C}^*$, *definida por* $\tau(t) = \sigma(t) - z$ *para todo* $t \in [a,b]$, *admite un logaritmo derivable en* $[a,b]$, *es decir, existe una función* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ *que es derivable en* $[a,b]$ *y verifica que* $\tau(t) = e^{\varphi(t)}$ *para todo* $t \in [a,b]$. *Como consecuencia, se tiene:*

$$\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b)-z}{\sigma(a)-z}\right) \tag{1}$$

La función φ buscada ha de ser una primitiva de $\tau\,'/\tau$, lo que la determina salvo una constante aditiva. Como $\varphi(a)$ debe ser un logaritmo de $\tau(a)$, la forma de definir φ está clara:

$$\varphi(t) = \log \tau(a) + \int_a^t \frac{\tau\,'(s)}{\tau(s)}\, ds \qquad \forall t \in [a,b]$$

Por el teorema fundamental del Cálculo para la integral de Cauchy, φ es derivable en $[a,b]$ con

$$\varphi'(t) = \frac{\tau\,'(t)}{\tau(t)} = \frac{\sigma\,'(t)}{\sigma(t)-z} \qquad \forall t \in [a,b] \tag{2}$$

Para comprobar que φ es el logaritmo buscado, definimos $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ por

$$h(t) = \tau(t)\, e^{-\varphi(t)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

obteniendo una función derivable en $[a,b]$ con

$$h'(t) = \tau'(t)\, e^{-\varphi(t)} - \tau(t)\, \varphi'(t)\, e^{-\varphi(t)} = 0 \qquad \forall t \in [a,b]$$

donde hemos usado (2). Aplicando el teorema del valor medio a la partes real e imaginaria de h obtenemos que h es constante. Como $e^{\varphi(a)} = \tau(a)$, tenemos $h(a) = 1$, luego $h(t) = 1$ para todo $t \in [a,b]$. Usando la definición de h obtenemos que φ es el logaritmo buscado: $\tau(t) = e^{\varphi(t)}$ para todo $t \in [a,b]$.

Finalmente, lo demostrado sobre φ nos lleva directamente a (1):

$$\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)-z}\, dt = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b)-z}{\sigma(a)-z}\right) \qquad \blacksquare$$

Con la misma notación, supongamos que el arco σ es cerrado, con lo que $\tau(a) = \tau(b)$. Entonces $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ son logaritmos del mismo número, luego tienen la misma parte real. En vista de (1), para calcular el índice $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$, sólo nos interesa la parte imaginaria $\theta = \operatorname{Im} \varphi$, que es un argumento continuo de τ, es decir, una función continua $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(t) \in \operatorname{Arg} \tau(t)$ para todo $t \in [a,b]$. A partir de (1) obtenemos

$$\operatorname{Ind}_\sigma(z) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi i} = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \tag{3}$$

Como $\theta(a)$ y $\theta(b)$ son argumentos del mismo número complejo, difieren en un múltiplo entero de 2π, luego $\operatorname{Ind}_\sigma(z) \in \mathbb{Z}$. Probaremos lo mismo para cualquier camino cerrado, pero antes conviene resaltar que el argumento continuo θ aclara la interpretación intuitiva del índice.

Suponiendo que el arco τ describe un movimiento, que no pasa por el origen, $\operatorname{Arg}\tau(t)$ es el ángulo orientado entre el semieje real positivo y el vector de posición del móvil en cada instante $t \in [a,b]$. Intuitivamente, la continuidad de τ hace que este ángulo varíe de manera continua, luego no es de extrañar, aunque tampoco sea matemáticamente evidente, que podamos elegir para cada instante $t \in [a,b]$ un número real $\theta(t)$ que mide dicho ángulo, obteniendo una función continua.

Nuestro argumento continuo aumenta o disminuye según que el vector de posición gire en sentido positivo o negativo. Por tanto, la diferencia $\theta(b)-\theta(a)$, entre los valores final e inicial del argumento, se interpreta como el ángulo neto barrido por el vector de posición en todo el movimiento. Por cada vuelta completa que da el móvil alrededor del origen, en sentido positivo, el ángulo barrido aumenta 2π, mientras que cada vuelta en sentido negativo lo hace disminuir 2π. En vista de (3), al dividir por 2π, vemos que $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$ es el número neto de vueltas que da nuestro móvil, o si se quiere el arco cerrado τ, alrededor del origen. Cuando trasladamos el origen al punto z, el arco τ se convierte en σ, luego el número de vueltas que da σ alrededor del punto z coincide con el número de vueltas que da τ alrededor del origen, que era $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$.

Aunque sólo la hemos explicado en el caso de un arco, la anterior interpretación intuitiva del índice puede hacerse para un camino cerrado, porque sigue existiendo el argumento continuo (aunque ya no derivable) θ, y la igualdad (3) sigue siendo cierta. De hecho (3) sugiere la forma de definir el *índice de un punto respecto a una curva cerrada* arbitraria, para que siga teniendo la misma interpretación, aunque ya no se exprese como una integral curvilínea. De esta forma se generaliza la noción de índice, que aquí sólo usaremos para caminos cerrados, obteniendo de hecho un concepto básico y muy útil en Topología Algebraica.

Probemos ya, para caminos cerrados, las tres propiedades clave del índice:

- *Para todo camino cerrado γ, se tiene:*
  - (i) $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ *para todo* $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$
  - (ii) *La función* $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C}\setminus\gamma^* \to \mathbb{Z}$ *es continua. Equivalentemente, es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$
  - (iii) *Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, se tiene que* $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ *para todo* $z \in U$.

(i). Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ en el que γ esté definido, verificando que, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de γ al intervalo $[t_{k-1},t_k]$ es un arco, que denotaremos por γ_k. Fijado $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$, y $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tenemos $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma_k^*$ y podemos aplicar el resultado probado previamente para arcos, obteniendo que

$$\int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} \in \operatorname{Log}\left(\frac{\gamma(t_k)-z}{\gamma(t_{k-1})-z}\right) \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

La propiedad clave de los logaritmos de un número complejo nos dice que

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} \in \operatorname{Log}\left(\prod_{k=1}^n \frac{\gamma(t_k)-z}{\gamma(t_{k-1})-z}\right) = \operatorname{Log}\left(\frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z}\right) = \operatorname{Log} 1$$

Así pues, la integral anterior es un múltiplo entero de $2\pi i$, luego $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(ii). Para abreviar, escribimos $G = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, que es un conjunto abierto, pues γ^* es compacto. Claramente, la función $\Phi : \gamma^* \times G \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(w,z) = \frac{1}{w-z} \qquad \forall\,(w,z) \in \gamma^* \times G$$

es continua. Por tanto, el lema de continuidad de la integral dependiente de un parámetro nos dice que la función $\operatorname{Ind}_\gamma$, que claramente verifica

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \qquad \forall\, z \in G$$

es continua en G. Su restricción a cada componente conexa de G es una función continua en un conexo con valores enteros, luego es constante. La equivalencia se debe a que las componentes conexas de G son conjuntos abiertos. Toda función, de G en cualquier espacio topológico, que sea constante en cada componente conexa de G, es constante en un entorno de cada punto de G luego, por el carácter local de la continuidad, es continua.

(iii). Veamos previamente que G tiene una única componente conexa no acotada. Como γ^* está acotado, sea $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^* \subset D(0,R)$. Entonces $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ está contenido en G y es conexo, luego $\mathbb{C} \setminus D(0,R) \subset U$ donde U es una componente conexa de G, que no está acotada. Si V es otra componente conexa de G, $V \neq U$, se tiene $V \cap \big(\mathbb{C} \setminus D(0,R)\big) \subset V \cap U = \emptyset$, así que $V \subset D(0,R)$ y V está acotada. Nótese que el mismo razonamiento puede usarse para cualquier conjunto acotado $A \subset \mathbb{C}$, obteniendo que $\mathbb{C} \setminus A$ tiene una única componente conexa no acotada.

Pues bien, usando (ii) sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = m$ para todo $z \in U$. Tomando de nuevo $R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\gamma^* \subset D(0,R)$ tenemos como antes que $\mathbb{C} \setminus D(0,R) \subset U$. Por tanto, para $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ podemos escribir

$$|m| = |\operatorname{Ind}_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \right| \leqslant \frac{l(\gamma)}{2\pi\big(|z| - R\big)}$$

Deducimos claramente que

$$|m| \leqslant \lim_{z\to\infty} \frac{l(\gamma)}{2\pi\big(|z| - R\big)} = 0$$

luego $m = 0$ como queríamos demostrar. ■

Comentemos finalmente que todas las propiedades anteriores eran claramente esperables a la vista de la interpretación intuitiva del índice. El número de vueltas que da un camino cerrado γ alrededor de un punto $z \in G$ debía ser un número entero. Al desplazar ligeramente z, dicho número de vueltas no debía cambiar, luego la función $\operatorname{Ind}_\gamma$ tenía que ser constante en un entorno de cada punto de G, y por tanto continua, es decir, constante en cada componente conexa de G. Por último, la componente conexa no acotada U contiene claramente puntos que no pueden estar rodeados por γ, luego el índice tenía que anularse en U.

12.2. Cadenas y ciclos

Para estudiar la forma general del teorema de Cauchy, pero sobre todo a la hora de deducir de ella algunas consecuencias interesantes, es útil introducir un formalismo que permite manejar cómodamente la suma de las integrales de una función sobre varios caminos, aunque la suma de dichos caminos no tenga sentido.

Llamaremos **cadena** a toda suma formal

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \tag{4}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Resaltamos que dichos caminos son completamente arbitrarios, no es necesario, como ocurría cuando definíamos la suma de caminos, que el extremo de cada camino coincida con el origen del que le sigue. Se verifique o no dicha condición, siempre podemos considerar la suma formal Γ. Por tanto, dos cadenas $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ y $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ sólo son iguales cuando $m = n$ y $\sigma_k = \gamma_k$ para todo $k \in I_n$. Dicho de otra forma, la cadena Γ dada por (4) determina en forma única al número natural n y a los caminos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Esto permite hacer las definiciones que siguen.

La **imagen** de la cadena Γ que aparece en (4) es el subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por

$$\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$$

que como en el caso de una curva, es compacto, pero ahora puede no ser conexo. Usaremos también la **longitud** de la cadena Γ, que se define como la suma de las longitudes de los caminos que la forman:

$$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k)$$

Si ahora $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ es otra cadena cualquiera, definimos la **suma** de las cadenas Γ y Σ como una simple yuxtaposición de sumas formales:

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$$

También usaremos la **cadena opuesta** de Γ, que viene dada por

$$-\Gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \ldots (-\gamma_n) = \sum_{k=1}^{n} (-\gamma_k)$$

Es claro que $(\Gamma + \Sigma)^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$, así como que $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$.

Generalizamos ahora, de forma bastante obvia, la integral sobre un camino. Para la cadena Γ dada por (4), consideramos el espacio de Banach complejo $C(\Gamma^*)$ de las funciones complejas continuas en el compacto Γ^*, con la norma del máximo:

$$\| f \| = \max \{ |f(z)| : z \in \Gamma^* \} \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Para $f \in C(\Gamma^*)$ definimos la **integral** de f sobre la cadena Γ por

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

Las propiedades básicas de la integral sobre un camino se extienden obviamente a esta situación formalmente más general. La integral sobre Γ es una aplicación **lineal y continua** de $C(\Gamma^*)$ en $\mathbb{C}$. Concretamente, es claro que

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant l(\Gamma)\,\|f\| \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Además, la integral es **aditiva**, en el sentido de que, para cualesquiera cadenas Γ y Σ se tiene

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Sigma f(z)\,dz \qquad \forall f \in C(\Gamma^* \cup \Sigma^*)$$

y también es obvio que

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz \qquad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Llamaremos **ciclo** a toda suma formal de caminos cerrados. Se trata obviamente de un tipo particular de cadena, así que todo lo dicho anteriormente sobre cadenas se aplica en particular a los ciclos. Es claro que la suma de dos ciclos es un ciclo, así como que la cadena opuesta de un ciclo también es un ciclo.

También está clara la forma de extender la noción de índice respecto de un camino cerrado, definiéndola para ciclos. Si $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ es un ciclo, y $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, tenemos $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$, luego podemos definir el **índice del punto** z **respecto al ciclo** Γ por

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

Comprobamos fácilmente que el índice respecto a un ciclo tiene la tres propiedades clave que tenía para caminos cerrados:

- *Si Γ es un ciclo, se tiene $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, la función $\operatorname{Ind}_\Gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \to \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y se anula en la componente no acotada.*

Pongamos $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino cerrado para todo $k \in I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, está claro que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ es un número entero, por ser una suma de números enteros. Si V es una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y $k \in I_n$, se tiene que V está contenida en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$, luego la función $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}$ es constante en V. Como esto ocurre para todo $k \in I_n$, concluimos que $\operatorname{Ind}_\Gamma$ también es constante en V. Finalmente observemos que, por ser Γ^* acotado, $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ tiene una sola componente conexa no acotada, digamos U. Entonces, para todo $k \in I_n$, U está contenida en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma_k^*$, así que $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}$ se anula en U. Como esto ocurre para todo $k \in I_n$, vemos que $\operatorname{Ind}_\Gamma$ también se anula en U. ■

12.3. Comentario sobre el teorema de Cauchy

Varios teoremas conocidos, que enseguida revisaremos, siguen un mismo esquema. Dados un abierto Ω del plano, un camino cerrado γ en Ω y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el teorema afirma que la integral de f sobre γ se anula. Asumiendo el formalismo que acabamos de introducir, a partir de ahora sustituimos el camino cerrado γ por un ciclo Γ **en** Ω, es decir, tal que $\Gamma^* \subset \Omega$, con lo que la tesis común a los teoremas en cuestión será:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \tag{5}$$

Como esto no siempre es cierto, cada teorema tiene una hipótesis adicional, que puede referirse a la función f, al ciclo Γ o al abierto Ω, dando lugar a tres tipos de teorema.

Para abordar la forma general del teorema de Cauchy, es natural preguntarse cual es la hipótesis más general posible sobre la función f, sobre el ciclo Γ o sobre el abierto Ω. Ahora bien, la condición suficiente más general para que se verifique una afirmación es siempre la que sea a la vez necesaria y suficiente, luego la forma más general de cada tipo de teorema siempre será una equivalencia, o si se quiere, una caracterización. Tenemos por tanto tres problemas diferentes, que vamos a ir analizando:

- *Dado un abierto Ω del plano, caracterizar las funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que verifican (5) para todo ciclo Γ en Ω.*

Conocemos la respuesta a este problema: es la caracterización de la existencia de primitiva, pues la función f verifica (5) para todo ciclo Γ en Ω, si y sólo si, la verifica para todo camino cerrado en Ω, lo que equivale a que f admita una primitiva en Ω. Así pues, para este primer tipo de teorema de Cauchy tenemos ya la forma más general posible, pero la respuesta no es satisfactoria, pues la existencia de primitiva fue precisamente la motivación para estudiar los teoremas de Cauchy. Pasemos pues al segundo problema:

- *Dado un abierto Ω del plano, caracterizar los ciclos Γ en Ω que verifican (5) para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Sobre este problema tenemos aún poca información. El teorema de Cauchy para el triángulo nos da ciclos muy concretos que verifican la condición requerida: los del tipo $\Gamma = [a,b,c,a]$, siempre que todo el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω. Podríamos mejorar fácilmente el resultado, encontrando otras poligonales con la misma propiedad, pero no merece la pena, ya que vamos a resolver completamente el problema, en la forma que pasamos a explicar.

Partimos de una condición claramente necesaria: si Γ verifica (5) para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, fijado $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, podemos tomar $f(w) = 1/(w-z)$ para todo $w \in \Omega$, y obtenemos que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$. Demos un nombre a los ciclos que verifican esta condición:

Si Ω es un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, se dice que Γ es **nul-homólogo** con respecto a Ω, cuando verifica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Por ejemplo, es claro que todo ciclo es nul-homólogo con respecto a $\mathbb{C}$.

Esta nomenclatura viene del Álgebra Homológica. En realidad, se dice que dos ciclos en Ω son *homólogos* con respecto a Ω cuando todos los puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tienen el mismo índice respecto a ambos. Se trata claramente de una relación de equivalencia en el conjunto de todos los ciclos en Ω y es fácil ver que la operación de suma de ciclos permite convertir el conjunto cociente en un grupo abeliano que es el *grupo de homología* del abierto Ω. Claramente un ciclo es nul-homólogo con respecto a Ω cuando su clase de equivalencia es el elemento neutro (el cero) de dicho grupo.

Pues bien, la forma general del teorema de Cauchy nos dirá que la condición de que un ciclo Γ en Ω sea nul-homólogo con respecto a Ω, que según hemos visto, es necesaria para que se verifique (5) para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, también es suficiente, consiguiendo la caracterización buscada. La diferencia clave con la respuesta dada al primer problema estriba en que, gracias a la interpretación del índice como número de vueltas, prácticamente podemos saber a simple vista si un ciclo en Ω es o no nul-homólogo con respecto a Ω. Así pues, tenemos una respuesta satisfactoria al segundo problema planteado, de la que se deducirá como veremos una respuesta también satisfactoria al tercero. Se comprende por tanto que este resultado se conozca como *forma general* del teorema de Cauchy. Pasemos ya al tercer problema:

- *Caracterizar los abiertos* Ω *del plano que verifican* (5) *para todo ciclo* Γ *en* Ω *y para toda* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Este problema parece el más ambicioso de los tres, pero en realidad se reduce a cualquiera de los otros dos. Por una parte, usando la respuesta al primer problema, vemos que un abierto Ω tiene la propiedad pedida si, y sólo si, toda función holomorfa en Ω admite una primitiva. De nuevo esta respuesta no es satisfactoria, lo que nos gustaría es tener una caracterización más sencilla. Hasta ahora sólo tenemos una respuesta parcial, la que nos da el teorema local de Cauchy: todo dominio estrellado verifica la condición requerida. Usando la solución ya anunciada del segundo problema, obtenemos una respuesta al tercero mucho más prometedora: los abiertos que nos interesan son los que pasamos a definir.

Se dice que un abierto del plano es **homológicamente conexo**, cuando todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω. Esto es tanto como decir que el grupo de homología de Ω es trivial: se reduce al elemento neutro. Nótese también que en realidad basta considerar los ciclos que constan de un sólo camino cerrado. Es obvio que, si todo camino cerrado en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω, todo ciclo en Ω también lo será. Conviene finalmente resaltar que, para un abierto del plano, ser homológicamente conexo no guarda relación con ser conexo. Es claro que existen dominios que no son homológicamente conexos, como $\mathbb{C}^*$ sin ir más lejos, mientras que, por ejemplo la unión de dos discos abiertos disjuntos es un abierto homológicamente conexo que no es conexo. En realidad, es fácil ver que un abierto del plano es homológicamente conexo si, y sólo si, lo son todas sus componentes conexas.

La respuesta a este tercer problema es satisfactoria por la misma razón que la del segundo: prácticamente podemos adivinar a simple vista si un abierto Ω es homológicamente conexo. Si no lo es, existe un camino cerrado γ en Ω y un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tales que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \neq 0$. Intuitivamente, esto significa que el punto z está rodeado por puntos de Ω, los puntos de γ^*, pero no pertenece a Ω, luego Ω tiene un “agujero”. Así pues, hablando intuitivamente, los abiertos homológicamente conexos son los que no tienen “agujeros”.

Pasemos a comentar la forma en que vamos a generalizar la fórmula de Cauchy, empezando por recordar cómo se obtuvo. Fijados $z \in D(a,r) \subset \overline{D}(a,r) \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, el paso clave fue comprobar que

$$\int_{C(a,r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = 0$$

para lo cual se usaba el teorema local de Cauchy, aplicado a la función integrando, que ahora sabemos que es holomorfa en Ω. Si usamos la versión general del teorema de Cauchy que hemos anunciado, podemos sustituir $C(a,r)$ por cualquier ciclo Γ en Ω que sea nul-homólogo con respecto a Ω, obteniendo

$$\int_{\Gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = 0 \qquad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^* \tag{6}$$

Por la linealidad de la integral y la definición de índice, esta igualdad equivale a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} = \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)\, f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* \tag{7}$$

Esta es la forma general de la fórmula de Cauchy. Nótese que la condición $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ equivale precisamente a que la circunferencia $C(a,r)$ sea un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω, luego ahora tenemos una versión mucho más general de la fórmula, al haber sustituido la circunferencia $C(a,r)$ por un ciclo arbitrario que cumpla la misma hipótesis.

Así pues, la versión general del teorema de Cauchy ya anunciada, permitiría generalizar también la fórmula de Cauchy, con análogo razonamiento al usado para las versiones locales. La primera idea de Dixon fue probar ambos resultados en orden inverso, empezando por generalizar la fórmula, pues luego el teorema es una consecuencia inmediata, como veremos. Así pues, en sus versiones generales, ambos resultados son equivalentes. Se trata por tanto de probar directamente (7), o lo que es lo mismo (6), y aquí viene la segunda gran idea de Dixon: observar que el primer miembro de (6) es una función holomorfa, en principio definida para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, y extenderla para obtener una función entera que, gracias al teorema de Liouville, acaba siendo idénticamente nula.

12.4. La demostración de Dixon

Veamos ya con detalle la prueba del siguiente resultado:

Forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy. *Sea Ω un abierto del plano y Γ un ciclo en Ω, nul-homólogo con respecto a Ω. Para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene:*

$$\text{(i)} \quad \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{\Gamma} f(w)\, dw = 0$$

Demostración. (i). Empezamos considerando la función $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida, para cualesquiera $w, z \in \Omega$, por

$$\Phi(w,z) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(w) = f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

Como lema previo al teorema de la función inversa se probó en su momento que Φ es continua, luego también lo es su restricción a $\Gamma^* \times \Omega$. Además, fijado $w \in \Gamma^*$, la función $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_w(z) = \Phi(w,z) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{w\} \quad \text{y} \quad \Phi_w(w) = f'(w)$$

es claramente holomorfa en $\Omega \setminus \{w\}$ y continua en el punto w. Por el teorema de extensión de Riemann, $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $w \in \Gamma^*$. El teorema de holomorfía de la integral dependiente de un parámetro nos dice que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ donde

$$\varphi(z) = \int_\Gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in \Omega$$

A decir verdad, el teorema se refiere a la integral sobre un camino, pero el ciclo Γ es suma formal de caminos, luego φ es una suma de funciones a las que sí se aplica literalmente el teorema. El próximo paso será extender φ para tener una función entera.

Repetimos el razonamiento hecho para Φ, con otra función de dos variables, muy similar pero más sencilla. Concretamente consideramos, el conjunto $U = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}$, que es abierto por ser una unión de abiertos, las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ en las que el índice se anule. Definimos entonces $\Psi : \Gamma^* \times U \to \mathbb{C}$ por

$$\Psi(w,z) = \frac{f(w)}{w - z} \qquad \forall (w,z) \in \Gamma^* \times U$$

y esta vez es obvio que Ψ es continua, así como que, fijado $w \in \Gamma^*$, la función $z \mapsto \Psi(w,z)$ es holomorfa en U, pues se trata de una función racional. Aplicando de nuevo la holomorfía de la integral dependiente de un parámetro, tenemos $\psi \in \mathcal{H}(U)$ donde

$$\psi(z) = \int_\Gamma \Psi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in U$$

Como, por hipótesis, Γ es nul-homólogo con respecto a Ω, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$, luego $z \in U$. Así pues, $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$, es decir, $\Omega \cup U = \mathbb{C}$. Además, para todo $z \in \Omega \cap U$ tenemos

$$\varphi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \psi(z) - 2\pi i f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \psi(z)$$

Tenemos ya la extensión buscada, pues podemos definir $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ escribiendo

$$h(z) = \varphi(z) \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{y} \qquad h(z) = \psi(z) \quad \forall z \in U$$

El carácter local de la holomorfía nos asegura que h es una función entera, pero acabaremos viendo que h es idénticamente nula.

Si $R = \max\{|w| : w \in \Gamma^*\}$, el conjunto $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R)$ está contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, y por tanto en U. Si además $M = \max\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ que verifique $|z| > R$ se tendrá

$$|h(z)| = |\psi(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \right| \leqslant \frac{M\, l(\Gamma)}{|z| - R}$$

Deducimos que $\lim_{z \to \infty} h(z) = 0$ y en particular h está acotada. Por el teorema de Liouville, h es constante, luego es idénticamente nula. Para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ tenemos entonces

$$0 = h(z) = \varphi(z) = \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(z)\, f(z)$$

de donde se deduce claramente la igualdad (i).

(ii). Fijamos $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ arbitrario y definimos

$$g(w) = (w-z)\, f(w) \qquad \forall w \in \Omega$$

Es claro que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, al aplicarle la fórmula de Cauchy recién demostrada, obtenemos

$$0 = \operatorname{Ind}_\Gamma(z)\, g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\, dw$$

como queríamos demostrar. ■

12.5. Abiertos homológicamente conexos

Como habíamos anunciado, deducimos del teorema anterior una útil caracterización de los abiertos en los que toda función holomorfa admite una primitiva. De paso resolvemos otro problema que teníamos planteado, acerca de la existencia de logaritmos holomorfos.

Teorema. *Para un abierto Ω del plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Ω es homológicamente conexo, es decir, $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo ciclo Γ en Ω y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*

(ii) *Para todo ciclo Γ en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$*

(iii) *Toda función holomorfa en Ω admite una primitiva, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$*

(iv) *Toda función holomorfa en Ω, que no se anule, admite un logaritmo holomorfo, es decir, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, se puede encontrar $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$*

Demostración. Las implicaciones $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ son, respectivamente, la forma general del teorema de Cauchy y la caracterización de la existencia de primitiva.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Esta implicación se probó en su momento, en el caso particular de un dominio estrellado, y ahora el razonamiento es el mismo. De (iii) se deduce que la función $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ admite una primitiva, pero sabemos que eso equivale a que f admita un logaritmo holomorfo. De hecho, si $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $F' = f'/f$, sabemos que existe una función $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, constante en cada componente conexa de Ω, tal que $e^{\lambda(z)+F(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Fijado un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, la función $w \mapsto w - z$ es holomorfa en Ω y no se anula, luego (iv) nos da una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$w - z = e^{g(w)} \qquad \forall w \in \Omega$$

Se tiene entonces claramente

$$1 = e^{g(w)} g'(w) = (w-z) g'(w) \quad \forall w \in \Omega, \qquad \text{es decir,} \qquad g'(w) = \frac{1}{w-z} \quad \forall w \in \Omega$$

Así pues, la función $w \mapsto 1/(w-z)$ admite una primitiva en Ω, luego su integral sobre cualquier camino cerrado en Ω es cero. Esto implica claramente que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ para todo ciclo Γ en Ω, como queríamos demostrar. ■

Como ya quedó explicado, las equivalencias del teorema anterior pueden entenderse como respuesta satisfactoria a todos los problemas que en él aparecen, pues en la práctica, es bien fácil saber si un abierto Ω del plano es homológicamente conexo. Intuitivamente, esto significa que Ω no tiene "agujeros", y una manera fácil de formalizar esta idea consiste en definir los "agujeros" de Ω como las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Es fácil entonces probar una implicación:

- *Si Ω es un abierto del plano y $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas, entonces Ω es homológicamente conexo.*

Dados un ciclo Γ en Ω y un punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, deberemos comprobar que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$. Si V es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene al punto z, al ser $V \subset \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, deducimos que $V \subset U$ donde U es una componente conexa $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Por hipótesis, V no está acotada, luego U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. Como $z \in V \subset U$ tenemos $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ como se quería. ■

Aunque no vamos a demostrarlo, conviene saber que el recíproco del enunciado anterior también es cierto. Por tanto, *un abierto Ω del plano es homológicamente conexo si, y sólo si, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.* Se tiene así una caracterización topológica de los abiertos homológicamente conexos del plano, aunque no mediante una propiedad intrínseca al abierto Ω con el que trabajamos, pues se trata de una propiedad topológica de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Se puede argumentar que la acotación no es una propiedad topológica, pero en nuestro caso sí lo es: un conjunto $V \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ está acotado si, y sólo si, su cierre relativo a $\mathbb{C}$ es compacto y, puesto que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es cerrado en $\mathbb{C}$, el cierre de V en $\mathbb{C}$ es el mismo que en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

En Topología Algebraica se maneja otra caracterización de los abiertos homológicamente conexos del plano que sí es una propiedad topológica intrínseca del abierto con el que se trabaja, y de hecho tiene sentido para cualquier espacio topológico: *la conexión simple*. No vamos a explicar la definición de esta propiedad topológica, que se basa en otra noción básica de la Topología Algebraica, la *homotopía*.

12.6. Ejercicios

1. Enunciar con detalle y demostrar que el índice de un punto respecto a un camino cerrado se conserva por giros, homotecias y traslaciones.

2. Sea $\rho : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^+$ una función de clase C^1, con $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$, y sea $\sigma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ el arco definido por
$$\sigma(t) = \rho(t)\, e^{it} \qquad \forall t \in [-\pi,\pi]$$
Calcular $\operatorname{Ind}_\sigma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$.

3. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ caminos cerrados y $z \in \mathbb{C}$ verificando que
$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_1(t) - z| \qquad \forall t \in [a,b]$$
Probar que $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z)$.

4. Sea $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ una función continua, tal que:
$$\alpha(0) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha(t) \to \infty \ \ (t \to +\infty)$$
y sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \alpha(\mathbb{R}_0^+)$. Probar que Ω es abierto y que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{f(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

5. Sea Ω un abierto homológicamente conexo del plano tal que $\mathbb{R}^+ \subset \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que
$$f(x) = x^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$