PROBABILIDAD (Curso 2023/2024)
Modelo de control intermedio
Es un ejemplo, no necesariamente del tipo de ejercicios, sino de lo que espera que el alumnado pueda desarrollar en 2 horas de duración de un control intermedio de la asignatura.

---

1. El vector aleatoio (X,Y) tiene función masa de probabilidad conjunta dada por:

$$P[X=x,Y=y]=k(x+1)(y+1)$$

donde $x,y=0,1,2$.

   (a) Calcular el valor de k.
   (b) Calcular las distribuciones marginales.
   (c) Calcular las distribuciones condicionadas de X a los valores de $Y=y$ para $y=0,1,2$.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=\dfrac{k}{x^2}, k>0$, sobre la región delimitada por $1<x<2, 0<y<x^2$.

   (a) Calcular k y la función de distribución de probabilidad.
   (b) Calcular las densidades de probabilidad marginales.
   (c) Calcular las densidades de probabilidad condicionadas.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y)=k$, sobre la región delimitada por $0<x<\dfrac{1}{2}, 0<y<\dfrac{1}{2}$.

   (a) Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).
   (b) Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Z,T)=(X+Y,X-Y)$.
   (c) Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).

1. El vector aleatoio (X,Y) tiene función masa de probabilidad conjunta dada por:

$$P[X=x,Y=y]=k(x+1)(y+1)$$

donde $x,y=0,1,2$.

(a) Calcular el valor de k.

(b) Calcular las distribuciones marginales.

(c) Calcular las distribuciones condicionadas de X a los valores de $Y=y$ para $y=0,1,2$.

A)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	k	$2k$	$3k$
1	$2k$	$4k$	$6k$
2	$3k$	$6k$	$9k$

$$k(1+2+3+2+4+6+3+6+9)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{36}$$

B)

$$P(x,y)=P[X=x,Y=y]=\frac{1}{36}(x+1)(y+1)$$

$$P_X(x)=\sum_{y=0}^{2}P[X=x,Y=y]=\frac{1}{36}(x+1)(1+2+3)=\frac{x+1}{6} \qquad x=0,1,2$$

$$P_Y(y)=\sum_{x=0}^{2}P[X=x,Y=y]=\frac{y+1}{6} \qquad y=0,1,2$$

C)

$$P_{X/Y=y_0}(x)=\frac{P(x,y_0)}{P_Y(y_0)}=\frac{1}{36}\frac{(x+1)(y_0+1)}{\frac{y_0+1}{6}}=\frac{1}{6}(x+1)$$

$x=0,1,2$

$(y_0=0,1,2)$

$$P_{Y/X=x_0}(y)=\frac{1}{6}(y+1)$$

$y=0,1,2$

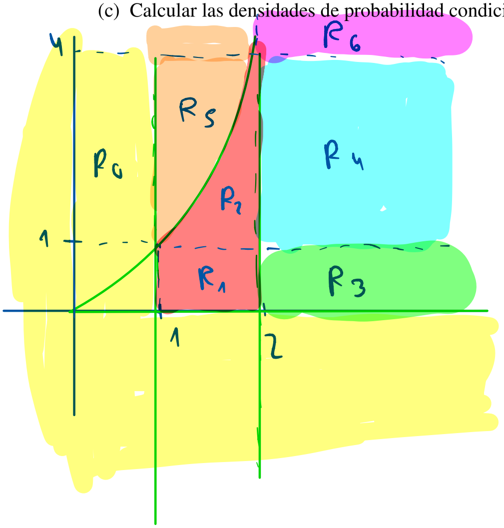
$(x_0=0,1,2)$

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y) = \dfrac{k}{x^2}, k > 0$, sobre la región delimitada por $1 < x < 2, 0 < y < x^2$.

   (a) Calcular k y la función de distribución de probabilidad.

   (b) Calcular las densidades de probabilidad marginales.

   (c) Calcular las densidades de probabilidad condicionadas.



A) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x^2} \frac{k}{x^2}\,dy\,dx = k\int_1^2 \frac{1}{x^2}x^2\,dx = k = 1$

$\boxed{k=1}$

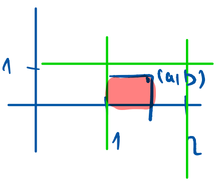
$R_0 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a<1 \vee b<0\}$

$F(a,b) = 0$

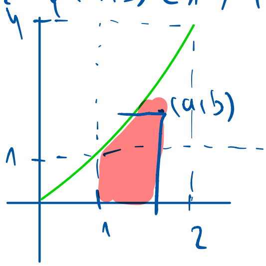
$R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 2<a, 4<b\}$

$F(a,b) = 1$

$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 1<a<2, 0<b<1\}$ $F(a,b) = \displaystyle\int_1^a\int_0^b \frac{1}{x^2}\,dy\,dx$

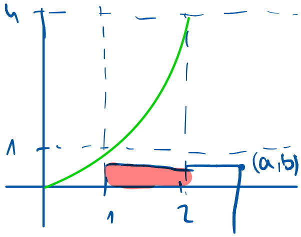


$R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 1<a<2, 0<b<4, b<a^2\}$



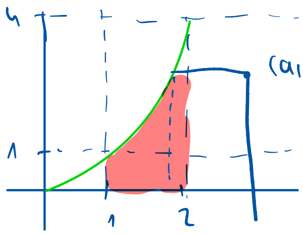
$F(a,b) = \displaystyle\int_0^1\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx\,dy + \int_1^b\int_{\sqrt{y}}^a \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$

$R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 2<a,\ 0<b<1\}$



$$F(a,b) = \int_1^2\int_0^b \frac{2}{x^2}\,dy\,dx$$

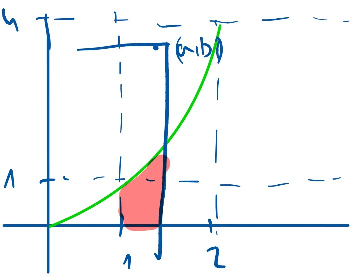
$R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 2<a,\ 1<b<4\}$



$$F(a,b) = \int_0^1\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx\,dy + \int_1^b\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^2}\,dx\,dy =$$

$$\int_1^{\sqrt{b}}\int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx + \int_{\sqrt{b}}^2\int_0^b \frac{1}{x^2}\,dy\,dx$$

$R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 1<a<2,\ 1<b,\ b>a^2\}$



$$F(a,b) = \int_1^a\int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\,dy\,dx$$

B)

$$f_Y(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{x^2}\, dy = 1 \qquad 1 < x < 2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \\ \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{y}}^2 = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2} & 1 < y < 4 \end{cases}$$

C)

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{x^2} & 1 < x < 2 \\ & (0 < y_0 < 1) \\ \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{y_0}} - \frac{1}{2}} & 1 < x < 2 \\ & (1 < y < 4) \end{cases}$$

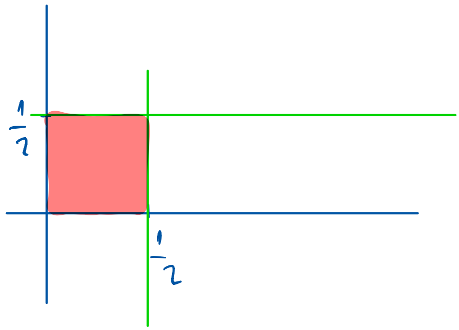
$$f_Y(y)/X=x_0 = \frac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)} = \frac{\frac{1}{x_0^2}}{1} = \frac{1}{x_0^2} \qquad 0 < y < x_0^2 \quad (1 < x_0 < 2)$$

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y) = k$, sobre la región delimitada por $0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}$.

   (a) Calcular k para que f sea función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio continuo (X,Y).

   (b) Calcular la función de densidad de probabilidad conjunta de $(Z,T) = (X+Y, X-Y)$.

   (c) Determinar las funciones de densidad de probabilidad marginales del vector transformado (Z,T).



A) $K\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{K = 4}$

B)

Sea $g: E_{(X,Y)} \to \mathbb{R}^2 \;/\; g(X,Y) = (X+Y, X-Y) = (Z,T)$

1) Claramente $g \in C^1(E_{(X,Y)})$ y es ingectiva por serlo cada componente.

$$\left.\begin{array}{l} Z = X+Y \\ T = X-Y \end{array}\right\} \begin{array}{l} X = Z - Y \Rightarrow X = Z - \frac{Z-T}{2} = \frac{Z+T}{2} \\ T = Z - Y - Y \Rightarrow Y = \frac{Z-T}{2} \end{array}$$

$$g^{-1}(Z,T) = \left(\frac{Z+T}{2}, \frac{Z-T}{2}\right) = (X,Y)$$

2) $$J(g^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial T} \\ \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -1/2 \neq 0$$

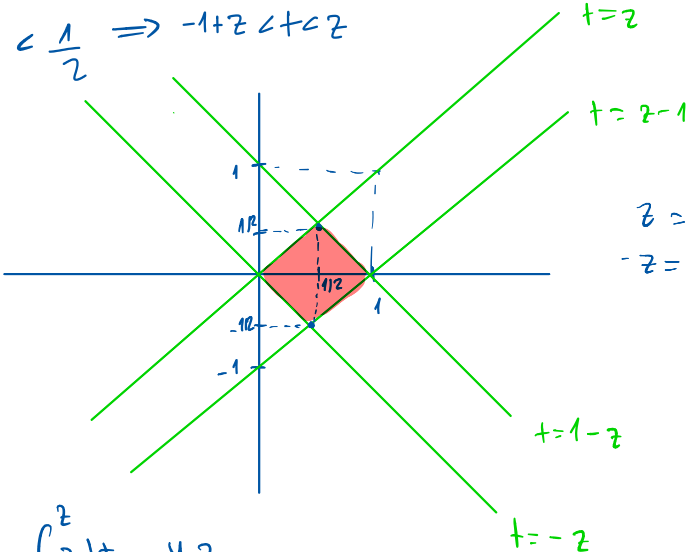
Por T^a Cambio variable,

$$f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) |J(g^{-1})| = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$z = x+y$, $x, y > 0 \Rightarrow z > 0$

$$0 < \frac{z+t}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < z+t \Rightarrow -z < t \\ z+t < 1 \Rightarrow t < 1-z \end{cases} \Big\} -z < t < 1-z$$

$$0 < \frac{z-t}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1+z < t < z$$



$z = 1-z \Rightarrow z = 1/2$

$-z = z-1 \Rightarrow z = 1/2$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-z}^{z} 2\,dt = 4z & 0 < z < 1/2 \\ \int_{z-1}^{1-z} 2\,dt = 4(1-z) & 1/2 < z < 1 \end{cases}$$

$$f_T(t) = \begin{cases} \int_{-t}^{t+1} 2\,dz = 2(2t+1) & -1/2 < t < 0 \\ \int_{t}^{1-t} 2\,dz = 2(1-2t) & 0 < t < 1/2 \end{cases}$$