Trabajo Práctico 2 - Lógica proposicional y Teoría de Conjuntos.

1. Defina por extensión cada uno de los siguientes conjuntos.
   (a) $\{x \in \mathbb{Z} : -1 < x < 0\}$. (b) $\{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 0\}$. (c) $\{x \in \mathbb{N} : -1 < x < 0\}$.
   (d) $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 5\}$. (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\right\}$. (f) $\{x + 1 \in \mathbb{N} : x \text{ es par} \wedge -1 < x < 3\}$
   (g) $\left\{x^2 \in \mathbb{N} : x \text{ es par y } x \leq 144\right\}$. (h) $\left\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par y } x^2 \leq 144\right\}$.

2. Describir por comprensión los siguientes conjuntos:
   (a) $A = \{7, 14, 21, 28, 35\}$. (b) $B = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.
   (c) $C = \{1\}$. (d) $D = \emptyset$.

3. Dado $A = \{1, \{2\}, 3\}$, determine cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
   (a) $\{3\} \subset A$. (b) $\{3\} \in A$. (c) $\{\{3\}\} \subset A$. (d) $\{2\} \subset A$. (e) $\{2\} \in A$.
   (f) $\{\{2\}\} \subset A$ (g) $\{x \in \mathbb{N} : x < 3\} \subset A$. (h) $\emptyset \in A$. (i) $\emptyset \subset A$.

4. Para cada uno de los siguientes pares de conjuntos A y B, decida si $A \subset B$, $B \subset A$ o ninguna de las anteriores. Justifique formalmente la validez de las afirmaciones.
   (a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par y } x^2 < 149\right\}$, $B = \{1, 4, 6, 8, 10\}$.
   (b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x + 1 \text{ es par y } x < 12\}$.
   (c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \text{ es divisor de } x\}$.
   (d) $A = \left\{x^2 \in \mathbb{N} : x \text{ es par y } x \leq 144\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par y } x^2 \leq 144\right\}$.

5. Para cada item sombree los conjuntos dados, en un diagrama de Venn de tres conjuntos genéricos en un universal. Proponga conjuntos A, B y C de un universal $\mathcal{U}$ (según corresponda) que ejemplifiquen cada caso.
   (a) $A \cup B$. (b) $A \cap B$. (c) $(A \cup B) \cap C$. (d) $A \cap B \cap C$.
   (e) $(A \cup C)^c$. (f) $(A - B) \cap C$. (g) $(A \cap B) \cup C^c$.

6. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 7\}$, halle $A \times A$, $A \times B$, $B \times B$, $B \times A$ y $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

7. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas. Sean A, B, C y D subconjuntos de un conjunto universal $\mathcal{U}$.
   (a) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$.
   (b) $A \cap (B \cup A)^c = \emptyset$.
   (c) $B \subset A \Leftrightarrow (A - B) \cup B = A$
   (d) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.
   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
   (f) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
   (g) $A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = C \Leftrightarrow A = C - B$.
   (h) $A \subset B^c \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
   (i) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
   (j) $A \subset B \wedge C \subset D \Leftrightarrow A \times C \subset B \times D$.
   (k) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$.

8. Halle el conjunto $\mathcal{P}(A)$ cuando:
   (a) $A = \emptyset$. (b) $A = \{1\}$.
   (c) $A = \{1, \{1, 2\}\}$. (d) $A = \{1, 3, 5, \emptyset\}$.

9. Exprese las siguientes proposiciones simbólicamente y determine su valor de verdad, justificando la respuesta. Luego niegue las expresiones obtenidas y retradúzcalas al lenguaje coloquial.
   (a) Todos los números naturales son enteros.
   (b) Existen números enteros pares mayores que 90.
   (c) Hay un número natural que divide a todos los otros.
   (d) Todo número natural tiene divisores.
   (e) Hay números enteros tales que uno de ellos es el doble del otro.
   (f) Dados dos números enteros, siempre uno de ellos es el doble del otro.

10. Dada la función proposicional en $\mathbb{Z} : x > y$

    (a) Asigne valores particulares a x e y, de manera que resulten dos proposiciones verdaderas y dos falsas.

    (b) Obtenga a partir de ella todas las proposiciones posibles usando cuantificadores y determine su valor de verdad, justificando la respuesta.

    (c) Niegue simbólicamente las proposiciones obtenidas en (b).

★★★★★★★★★★★★★*Ejercicios Complementarios*★★★★★★★★★★★★★

1. Defina por extensión cada uno de los siguientes conjuntos.

    (a) $\{x \in \mathbb{Q} : -5 < x < 3 \wedge x = 2k \text{ con } k \text{ entero}\}$
    (b) $\left\{x^3 \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 2\right\}$.
    (c) $\left\{x \in \mathbb{Z} : -1 < x^3 < 2\right\}$.
    (d) $\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } -5 \wedge -10 < x < 10\}$.
    (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^3 = 1\right\}$.
    (f) $\{x - 1 \in \mathbb{N}_0 : x \text{ es par} \wedge -3 < x < 3\}$

2. Dado $A = \{*, \{1, 2\}, 3\}$, determine cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

    (a) $\{*\} \subset A$.
    (b) $\{*\} \in A$.
    (c) $\{\{*\}\} \subset A$.
    (d) $\{2\} \subset A$.
    (e) $\{2\} \in A$.
    (f) $\{\{2\}\} \subset A$
    (g) $\{x \in \mathbb{N} : x < 3\} \subset A$.
    (h) $\{*, 1\} \subset A$.
    (i) $\{*, 3\} \subset A$.
    $\{1, 2\} \subset A$.

3. Para cada item sombree los conjuntos dados, en un diagrama de Venn de tres conjuntos genéricos en un universal. Proponga conjuntos A, B y C de un universal $\mathcal{U}$ (según corresponda) que ejemplifiquen cada caso.

    (a) $A \cup B$.
    (b) $A \cap B$.
    (c) $(A \cap B) \cup C$.
    (d) $(A \cap B \cap C)^c$.
    (e) $A \cap B \cap C^c$.
    (f) $(A - B) \cap C$.
    (g) $(A \cap B) \cup C^c$.

4. Sean $A = \{\{*, 1\}, 2, 3\}$ y $B = \{*, 1, 2, 3\}$, halle $A \times A$, $A \times B$, $B \times B$, $B \times A$ y $(A \cup B) \times (A \cap B)$.

5. Halle el conjunto $\mathcal{P}(A)$ en cada caso:

    (a) $A = \{\{1\}\}$.

    (b) $A = \{\emptyset\}$.

    (c) $A = \{2, \{2\}\}$.

6. Dada la función proposicional en $\mathbb{Z} : x$ es múltiplo de 3

    (a) Obtenga a partir de ella todas las proposiciones posibles usando cuantificadores y determine su valor de verdad, justificando la respuesta.

    (b) Niegue simbólicamente las proposiciones obtenidas en el item anterior.