# Unidad 6: Integración

# Situación 1:

La velocidad de crecimiento de una colonia de bacterias es $v(t) = 300 * e^{3t}$ donde el tiempo $t$ se mide en horas

1. ¿ Cuántas bacterias habrá a las 2 horas de iniciado el cultivo?
2. ¿ Cuántas había en el momento inicial?

# Situación 2:

Si una partícula se desplaza con una aceleración $a(t) = 12t^2 + 12t$ donde el tiempo se mide en segundos,

1. ¿ Qué velocidad tiene a los 3 segundos ?
2. ¿ Cuánto ha recorrido en esos 3 segundos?

En esta unidad se presentarán conceptos del *Cálculo Integral* cuyo objetivo es resolver el problema "inverso" al cálculo diferencial:

Dada una función $f(x)$ el objetivo principal es encontrar una función $F(x)$ que satisfaga:
$F'(x) = f(x)$

Es decir, dada una función $f(x)$ nos preguntamos: ¿Es f la derivada de alguna función $F$?, ¿cómo calculamos esa función $F$'

**Función Primitiva**

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Si $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ es tal que $F'(x) = f(x)$ entonces se dice que $F$ es una primitiva de $f$.

**Ejemplo:** Encontrar una primitiva de $f(x) = x^4$.

- $F(x) = \frac{x^5}{5}$ es una primitiva de $f(x) = x^4$, pues $F'(x) = x^4 = f(x)$.
- $G(x) = \frac{x^5}{5} + 9$ también es una primitiva de $f(x) = x^4$, pues $G'(x) = f(x)$
- Observar que cualquier función de la forma $F(x) = \frac{x^5}{5} + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante, es una primitiva de $f(x) = x^4$

## Integral Indefinida

Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, al conjunto de primitivas de $f$ se lo denomina Integral Indefinida de $f$ y se lo denota

$$\int f(x)dx$$

,

Generalmente se escribe $\int f(x)dx = F(x) + c$, donde $c$ es una constante de integración, $F$ una primitiva de $f$ y $\int$ es el símbolo de la integral

**Ejemplo:**

1. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln(x) + c$
3. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$
4. $\int 3dx = 3x + c$

## Propiedades de las integrales

Sean $f$, $g$ funciones, $k$ una constante

1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. La integral de la suma es la suma de las integrales.
2. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$. La integral de la resta es la resta de las integrales.
3. $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$

# Ejemplo

Recordemos que si $x(t)$ representa la posición de un móvil en un instante $t$, entonces su velocidad en ese instante es $v(t) = x'(t)$. Es decir, la posición del móvil $(x(t))$ es una *p*rimitiva de la velocidad del mismo $(v(t))$

Supongamos que la velocidad de un móvil en el instante $t$ es $v(t) = 12t^3 - 40t^2 + 10$, y si se sabe que $x(0) = 10km$, encontrar la posición del móvil para $0 \leq t \leq 100$.

<u>Resolución:</u>
Debemos encontrar la función posición del móvil, $x(t)$, conociendo su derivada $v(t)$ y su posición inicial $x(0)$. Para ello debemos encontrar la integral indefinida de $v(t)$, $x(t) = \int v(t)dt + c = \int \left(12t^3 - 40t^2 + 10\right) dt + c$

Usando propiedades de la integral, el último término es:

$$\begin{aligned}\int \left(12t^3 - 40t^2 + 10\right) dt + c &= \int (12t^3)dt - \int (40t^2)dt + \int 10dt + c \\ &= 3t^4 - \tfrac{40}{3}t^3 + 10t + c\end{aligned}$$

Por lo tanto $x(t) = 3t^4 - \frac{40}{3}t^3 + 10t + c$

Como $x(0) = 10$, reemplazando $t = 0$ en la última expresión, tenemos que $c = 10$ y por lo tanto $x(t) = 3t^4 - \frac{40}{3}t^3 + 10t + 10$

# Formas de resolución

Integrar una función no es tan simple como derivarla. Hay algunos métodos y formas que pueden ayudar:

1. Integración inmediata: Se resuelve la integral simplemente utilizando una tabla de integrales.
2. Integración por sustitución/ Cambio de variable: Se sustituye una variable por otra de modo tal que se simplifique la integral a resolver
3. Integración por partes: Basado en la regla de derivación del producto de funciones.

# 1. Integración inmediata

Utilizando tablas de integrales, y propiedades de la integración, se pueden calcular las primitivas de varias funciones sencillas.

Ejemplo:
Calcular $\int (e^x - \frac{2}{x^2} + x^6) dx =$

$$\int (e^x - \frac{2}{x^2} + x^6) dx = \int e^x dx - 2 \int \frac{1}{x^2} dx + \int x^6 dx = e^x + 2\frac{1}{x} + \frac{x^7}{7} + C$$

## Observaciones y notaciones de la derivada

Denotemos $u = g(x)$. Todas estas expresiones representan la *derivada* de $g$:

$$u' = \frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}g$$

$du$ es el diferencial de $u$, $dx$ es el diferencial de $x$

$\frac{du}{dx}$ se lee:"derivada de $u$ respecto a $x$"

Observación:
Utilizando la notación anterior, $\frac{du}{dx} = g'(x)$.
Tratando los diferenciales $du$ y $dx$ como si fueran variables (esto tiene una justificación matemática), podemos escribir

$$du = g'(x)dx \tag{1}$$

# 2. Integración por sustitución/cambio de variable

El objetivo de este método es elegir como nueva variable una cierta función de la variable actual y *sustituirla* en la integral para así llegar a una integral más simple de calcular.

Ejemplo: Calcular

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx$$

Esa integral, tal cual está, no podemos resolverla usando integración inmediata pues no la encontraríamos en una tabla de integrales. Haremos un *"cambio de variables"* para escribirla como una integral más fácil de calcular.

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx$$

- Elijamos como "nueva variable" a $g(x) = x^2 + 5$,
- Derivando $g(x)$ resulta $g'(x) = 2x$
- Llamemos $u = g(x)$, y usando la notación $\frac{du}{dx} = g'(x)$, podemos escribir $du = g'(x)dx = 2x\ dx$

Reemplazando en la integral original, tenemos que:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}du$$

Donde la última integral puede resolverse usando integración inmediata (tablas), pues si definimos $f(u) = 1/u \Rightarrow$ $\int \frac{1}{u}du = \int f(u)du = F(u) + c$, con $F(u) = \ln(u)$.

Resumiendo,

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}du = \int f(u)du =$$

$$= F(u) + c = \ln(u) + c = \ln(x^2+5) + c$$

donde:

- $f(u) = \frac{1}{u}$
- $F(u) = \ln(u)$ es una primitiva de $f(u) = \frac{1}{u}$
- hemos reemplazado la *variable* $u = g(x) = x^2 + 5$ en la última igualdad.

y por lo tanto,

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \ln(x^2+5) + c$$

## 2. Integración por sustitución/cambio de variable

Para resolver una integral del tipo $\int f(g(x))g'(x)dx$

1. se identifica en la función a integrar quien es $f$, y se hace el cambio de variables $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$,
2. se resuelve $\int f(u)du$, es decir, se busca $F$, una primitiva de $f$
3. La integral es $F(u) + c$.

Por lo tanto,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

# 3. Integración por partes

Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables entonces:

- La derivada del producto es
$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
- Usando propiedades de la integral:
$$\int [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int (u'(x) \cdot v(x)) dx + \int (u(x) \cdot v'(x)) dx$$
- Como $u(x) \cdot v(x)$ es una primitiva de $[u(x) \cdot v(x)]'$ se tiene que
$$u(x) \cdot v(x) = \int (u'(x) \cdot v(x)) dx + \int (u(x) \cdot v'(x)) dx$$
que es equivalente a

$$\int (u(x) \cdot v'(x)) dx = u(x) \cdot v(x) - \int (u'(x) \cdot v(x)) dx$$

Observación: Si se usa la notación $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$, entonces la fórmula anterior puede escribirse como:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

# Ejemplo:

Resolver $\int x \cdot e^x dx$

Si hacemos $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

Si hacemos $v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$
Entonces $u(x) \cdot v'(x) = x \cdot e^x$; $u(x) \cdot v(x) = x \cdot e^x$;
$v(x) \cdot u'(x) = e^x \cdot 1$.

Recordando la fórmula de integración por partes

$$\int (u(x) \cdot v'(x))dx = u(x) \cdot v(x) - \int (v(x) \cdot u'(x))dx$$

y reemplazando tenemos que:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

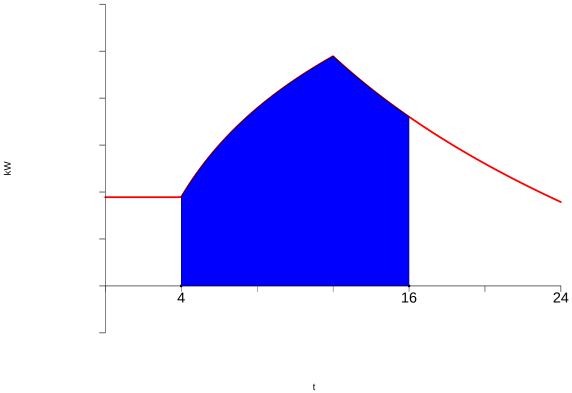
# ¿Cómo calcular una integral?

- Como ya hemos mencionado, calcular una integral NO es simple, a menos que pueda resolverse por integración inmediante.
- Si esto no se puede, se requiere de mucha práctica para decidir cuál método de integración utilizar y aún así no siempre es posible usando los métodos aquí presentados
- Si se va a utilizar cambio de variables, una “receta” que funciona muchas veces es definir como variable a lo que “más molesta en la integral”

# Integrales Definidas

El gráfico representa la potencia, en kW, que se está utilizando en cada instante del día en una fábrica. El área de la región sombreada representa el consumo total de energía entre las 4 de la mañana y las 4 de la tarde (16h).

¿Cómo se puede calcular el área comprendida bajo la curva de una función y el eje de las abcisas?



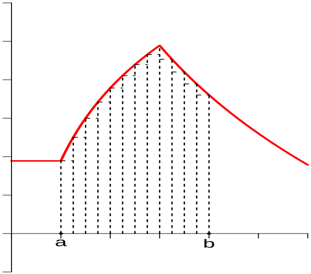
# Integral definida

Supongamos que dividimos el intervalo $[4, 16]$ (al que llamaremos $[a, b]$) en partes iguales de longitud $h$, es decir, tomamos puntos $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, y consideramos:

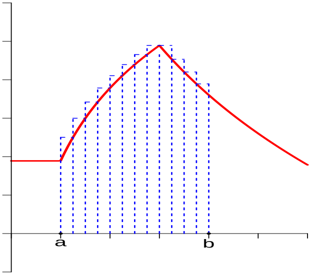
1) La suma de las áreas de todos los rectángulos de base $h$ mostrados en la figura de la izquierda (rectángulos de borde negro), que llamaremos $I_P$ (suma inferior)

2) La suma de las áreas de todos los retángulos de base $h$ mostrados en la figura de la izquierda (rectángulos de borde azul), que llamaremos $S_P$ (suma superior)

Claramente $I_p \leq A \leq S_p$, donde $A$ es el área que queremos calcular.




Ip




Sp

# Integral definida

Si $h \to 0$ (o equivalentemente, la cantidad de puntos en los que se divide el intervalo tiende a infinito), más próximas serán $I_p$ y $S_P$ a $A$.

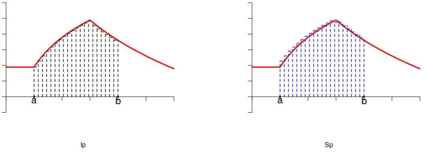



Figura : n=20

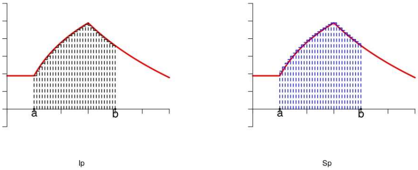



Figura : n=30

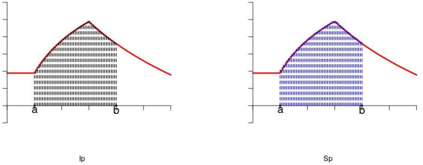



Figura : n=50

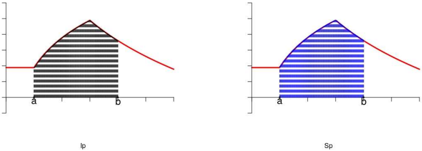



Figura : n=100

# Integral definida

En general, supongamos que $f$ es una función definida sobre un intervalo $[a, b]$ y supongamos que $f$ es acotada en el intervalo $[a, b]$, es decir, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$.
Sean:

- $I_f$ = supremo de todas las sumas inferiores $I_p$ sobre todas las particiones posibles del intervalo $[a, b]$
- $S_f$ = ínfimo de todas las sumas superiores $S_P$ sobre todas las particiones posibles del intervalo $[a, b]$

## Integral definida

Sea $f$ una función definida sobre un intervalo $[a, b]$ tal que $I_f = S_f$. Entonces se dice que $f$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ y se denota

$$\int_a^b f(x)dx$$

( $\int_a^b f(x)dx$ se lee *"la integral de f entre a y b"*)

Observaciones:

- Si $f(x) > 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es el área comprendida entre la curva del gráfico de $f$ (entre los puntos $a$ y $b$), y el eje de las abcisas
- $\int_a^b f(x)dx$ puede calcularse usando la Regla de Barrow.

# Regla de Barrow

## Teorema o Regla de Barrow

Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, $F$ una primitiva de $f$. Entonces la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Notación: Al aplicar la Regla de Barrow, suele escribirse $F(x)\Big|_a^b$ en lugar de $F(b) - F(a)$

# Propiedades de la integral definida

Sean $f$, $g$ funciones, $k$ una constante

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
2. $\int_a^b (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \;\; \forall c \in [a, b]$
4. $\int_a^b f(x)g(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

# Ejemplos

1. Calcular $\int_3^5 (x^3 + 2)dx$

Usaremos propiedades de la integral y la Regla de Barrow:

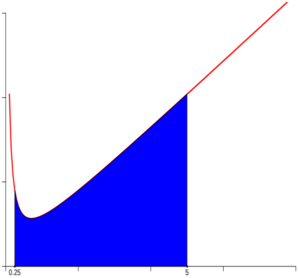
- En primer lugar, debemos encontrar $F(x)$, una primitiva de $f(x) = x^3 + 2$.
- Usando propiedades de la integral e integración inmediata, podemos ver que $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ es una primitiva de $f(x)$
- $\int_3^5 (x^3 + 2)dx = F(x)\Big|_3^5 = F(5) - F(3) = \frac{5^4}{4} + 10 - (\frac{3^4}{4} + 6) = 140$

# Ejemplos

2. Calcular el área comprendida por la curva (gráfico de la función) $f(x) = 1/x + 2x$ y el eje de las abcisas (eje x) entre $x = 0{,}25 y x = 5$ (área azul del gráfico)

Usaremos propiedades de la integral definida y la Regla de Barrow:

- En primer lugar, debemos encontrar $F(x)$, una primitiva de $f(x) = 1/x + 2x$.
- Usando propiedades de la integral e integración inmediata, podemos ver que $F(x) = \ln(x) + x^2$ es una primitiva de $f(x)$
- $\int_{0{,}25}^{5} (1/x + 2x) dx = F(x)\big|_{0{,}25}^{5} = F(5) - F(0{,}25) = \ln(5) + 5^2 - (\ln(0{,}25) + (0{,}25)^2) = 27{,}93$



# Bibliografía


- Ambas et al. *Matemática Teórica*. CBC UBA. Ed. 2010
- Spivak, M. *Calculus*
- Rabuffetti,H.*Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*, Ed. El Ateneo, Bs As, 1981.