Unidad 3:Límites y continuidad

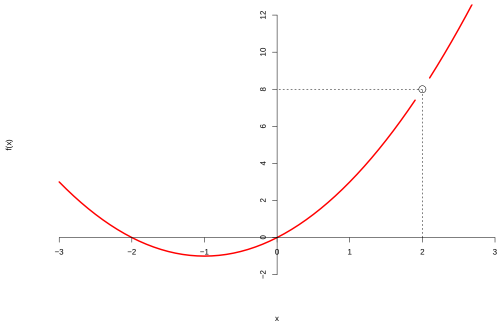
Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat y su crecimiento se amortigua. El crecimiento se describe según la función $f(t) = \frac{c}{1+ke^{-at}}$, donde c, k, a son constantes.

Al final de esta unidad trataremos de responder a preguntas como:

1. ¿Cuál es la población límite?
2. ¿Cómo se comporta la función para distintos valores de t?

Ejemplo

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2}$. Esta función no está definida en $x = 2$, su Dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$



- La gráfica de la función f es una parábola con un hueco en el punto (2,8).
- A pesar de no estar definida en el punto $x = 2$ vemos que los valores de x pueden "acercarse" a 2 tanto como uno quiera, tanto por la derecha (valores de x mayores a 2) como por la izquierda (valores de x menores a 2) .
- Las imágenes de esos puntos, $f(x)$, se "acercan" a 8 de la misma manera

Analizemos con una tabla en comportamiento de $f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2}$ en un entorno de $x = 2$:

Para valores de x muy próximos a 2, pero más pequeños que 2 (valores "a la izquierda de 2"):

x	1.9990	1.9991	1.9992	1.9993	1.9994	1.9995	1.9996	1.9997	1.9998	1.9999
$f(x)$	7.994	7.9946	7.9952	7.9958	7.9964	7.9970	7.9976	7.9982	7.9988	7.9994

Podemos ver que si x se *acerca* a 2 por la izquierda, $f(x)$ se acerca a 8. Esto se denota por
$lim_{x\to 2^-} f(x) = 8$.
Para valores de x muy próximos a 2, pero mayores que 2(valores "a la derecha de 2"):

x	2.0001	2.0002	2.0003	2.0004	2.0005	2.0006	2.0007	2.0008	2.0009	2.0010
$f(x)$	8.0006	8.0012	8.0018	8.0024	8.0030	8.0036	8.0042	8.0048	8.0054	8.0060

Esto es, si x se *acerca* a 2 por la derecha, su imagen $f(x)$ se *acerca a 8. Esto se denota por* $lim_{x\to 2^+} f(x) = 8$

Como $lim_{x \to 2^-} f(x) = 8$ y $lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$ entonces podemos decir que

$$lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

que se lee "el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 8"

Observación: Notar que existe $lim_{x \to 2} f(x)$ si bien la función no estaba definida en $x = 2$.

Noción de Límite

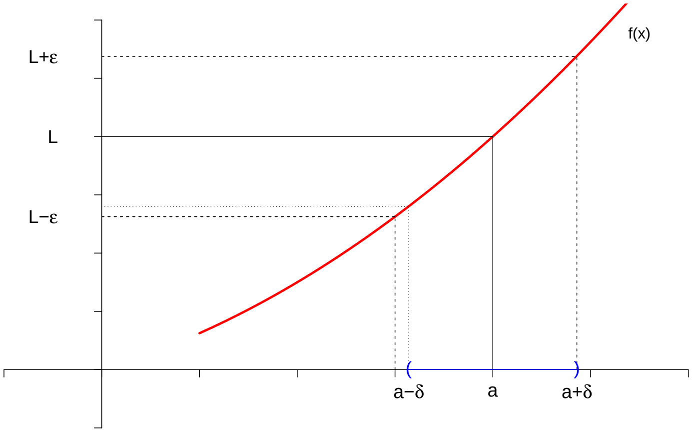
Diremos que *una función $f(x)$ tiene por límite a L cuando x tiende a x_0*, y lo denotaremos $lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si se cumplen las siguientes condiciones:

- Existen los límites laterales $lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $lim_{x \to x_0^+} f(x)$,
- los límites laterales son iguales, e iguales a L.
- Esto es, $lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Noción de Límite

Diremos que *una función* $f(x)$ *tiene por límite a* L *cuando* x *tiende a* x_0 si al considerar cualquier sucesión de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que *tienden* a x_0, los valores $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ se aproximan al valor L

¿ Qué significa que $f(x)$ se aproxime a L cuando x se aproxima a x_0?.
Intuitivamente: si x está "muy cerca" de x_0 entonces $f(x)$ está "muy cerca" de L.


f(x)
L+ε
L
L−ε
a−δ
a
a+δ

Definición formal de Límite

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que L es el límite de f cuando x tiende a x_0 si, y sólo si,

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0/\forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

.

Esto dice que dado un número $\epsilon >0$, podemos encontrar un número $\delta >0$ que satisface que si la distancia entre un elemento x de A (el dominio de la función) y x_0 es menor que ese δ entonces la distancia entre $f(x)$ y L (límite de la función) es tan pequeña como uno quiera.

Observaciones

- El límite $lim_{x \to x_0} f(x)$ puede o no existir. Si el límite existe, diremos que $f(x)$ converge a L. Caso contrario diremos que $f(x)$ diverge cuando x tiende a x_0
- $lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que $f(x)$ puede tomar valores arbitrariamente cercanos a L siempre que x esté suficientemente cerca de x_0. Sin embargo debemos tener en cuenta que puede suceder que x_0 no esté en el dominio de la función.
- Si existe el límite de una función en un punto, entonces este límite es único.

Algebra de Límites

Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ funciones, $a \in A$, donde A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Si existen los límites $lim_{x\to a}f(x)$ y $lim_{x\to a}g(x)$ entonces:

- $lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = lim_{x\to a}f(x) + lim_{x\to a}g(x)$
- Si $k \in \mathbb{R}$, $lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot lim_{x\to a}f(x)$
- $lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = lim_{x\to a}f(x) \cdot lim_{x\to a}g(x)$
- Si $lim_{x\to a}g(x) \neq 0$,
  $lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = lim_{x\to a}f(x)/lim_{x\to a}g(x)$
- $lim_{x\to a}b^{f(x)} = b^{lim_{x\to a}f(x)}$
- $lim_{x\to a}\log_b[f(x)] = \log_b[lim_{x\to a}f(x)]$

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ es una función polinómica, entonces

$$lim_{x\to x_0}p(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$$

Ejemplos

1. $lim_{x \to 1}(x^2 + 3x + 2)$
2. $lim_{x \to 1}\sqrt{3x - 1}$
3. $lim_{x \to 0}\ln(x + 1)$
4. $lim_{x \to 0}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{3x+1}}$

Resolución de ejemplos en video "limites parte 2"

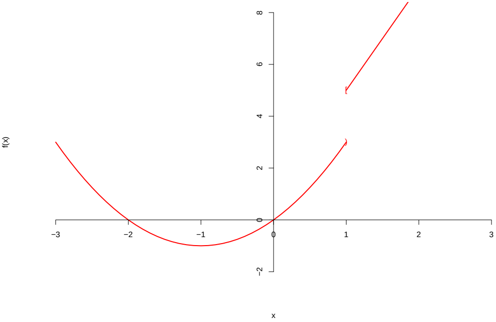
Límites Laterales

(video limites parte 3)

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 1 \\ 4x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

¿ Qué sucede con $lim_{x \to 1^-} f(x)$ y con $lim_{x \to 1^+} f(x)$?



Límites laterales

- $lim_{x \to a^-} f(x)$ indica que estamos calculando el límite de la función f con x que se aproxima a a, con valores menores que a.
- $lim_{x \to a^+} f(x)$ indica que estamos calculando el límite de la función f con x que se aproxima a a, con valores mayores que a.

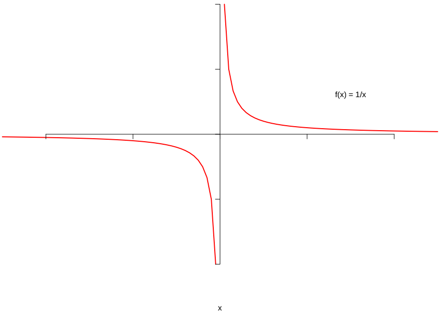
Ejercicios

En los siguientes casos calcular $lim_{x \to a^-} f(x)$, $lim_{x \to a^+} f(x)$. Decidir si existe o no $lim_{x \to a} f(x)$

1. $f(x) = |5x + 2|$, $a = 0$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 1 \\ 4x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$, $a = 1$
3. $f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & x < 1 \\ -3x + 5 & x \geq 1 \end{cases}$, $a = 1$

Límites infinitos - Límites en el infinito

(video límites 4) Analizemos la función $f(x) = \frac{1}{x}$



- $lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- $lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
- $lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Ejemplo

Analizar el comportamiento de las funciones cuando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$

1. $f(x) = 1/x^2$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = \frac{1}{e^x}$

Continuidad

(video límites 5)

Definición

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A$ si existe el límite de la función en el punto a y se satisface $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Recordemos que existe el límite de la función en el punto a si existen los límites laterales y son iguales, esto es, la función f es continua en el punto a si se satisface:
$lim_{x \to a^-} f(x) = lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Calcular límites laterales y ordinarios, y continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

1. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ en $x = 0$
2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ en $x = 1$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ x^3 - 4 & x > 2 \end{cases}$

Indeterminaciones

(video límites 6)
Puede suceder que al calcular un límite nos encontremos con indeterminaciones, que son expresiones del siguente tipo:

$$\infty - \infty;\ \infty/\infty;\ 0/0;\ \infty \cdot 0;\ 1^{\infty};\ 0^{0};\ \infty^{0}$$

.

Existen teoremas y reglas que permiten salvar la indeterminación y calcular el límite. Estas reglas nos dicen como proceder según el tipo de indeterminación:

Indeterminación 0/0

Si se presenta al tratar de calcular $lim_{x \to a}$ de un cociente de polinomios, entonces se dividen ambos polinomios por el binomio $(x - a)$ las veces necesarias para hacer desaparecer la indeterminación.

1. $lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
2. $lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Indeterminación ∞/∞

Si se presenta en un cociente de polinomios: se dividen numerador y denominador por la mayor potencia de la variable, pudiendo obtenerse alguno de los siguientes casos:

1. El numerador tiene mayor grado que el denominador, el límite será ∞.
2. El numerador y el denominador tienen el mismo grado, el límite será el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.
3. El numerador tiene menor grado que el denominador, el límite será 0.

Ejemplos:

1. $lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x-1}$
2. $lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-2}{5x^2+3x}$
3. $lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x}{2x^3+3x}$

Ejercicio 1

(video límites 7)
Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat y su crecimiento se amortigua. El crecimiento se describe según la función $f(t) = \frac{c}{1+ke^{-at}}$, donde c, k, a son constantes y $a > 0$.

1. ¿Cuál es la problación inicial?
2. ¿Cuál es la población límite?

Ejercicio 2

Se introducen 50 ciervos de los pantanos en una determinada reserva ecológica. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo: $P(t) = \frac{10(5+3t)}{1+0{,}04t}$, donde t es el tiempo en años.

1. ¿Cuántos animales habrá luego de 5 y 10 años?
2. La población tiende a estabilizarse, desaparecer, o crecer indefinidamente con el transcurso del tiempo?

Ejercicio 3

Sea f una función cuyo gráfico es el que se observa.

1. Determinar el Dominio de f
2. Calcular límites de f para $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to -4^{+}$,$x \to -4^{-}$
3. ¿Es f continua? Justificar
4. ¿Cuántas soluciones tiene la función $f(x) = 0$