UNIDAD VII:
LA INTEGRAL INDEFINIDA

La función primitiva. Integrales inmediatas. Consecuencias inmediatas de la definición de integral. Propiedades de las integrales indefinidas. Integración de monomios de seno y coseno.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan el concepto de integral indefinida, como operación inversa de la diferenciación y sus propiedades fundamentales.

Un físico o un ingeniero, quien conoce la velocidad de un móvil, a veces necesita conocer o determinar la posición de dicho móvil en un tiempo dado.

Un biólogo quien conoce la razón en la cual una población de bacterias crece (o decrece), puede decucir cuál es el tamaño de la población en cierto instante de tiempo futuro.

En cada caso, el problema es encontrar una función cuya derivada es conocida. En caso de que tal función exista, **¿podemos calcularla?, ¿su determinación será inmediata?, ¿es única esa función?**

Por ejemplo, sea $v(t)=t^2$.

- Pensemos, la velocidad es la derivada del espacio con respecto al tiempo.

- Luego el espacio recorrido es … $s(t)=\frac{1}{3}t^3$, entonces $v(t)=s'(t)=t^2$.

Curiosamente, otro móvil puede tener la misma velocidad, pero desplazarse siguiendo otra ley, por ejemplo, $S(t)=\frac{1}{3}t^3+100$, el cual satisface también $S'(t)=t^2=v(t)$.

¿Existirá alguna relación entre las funciones s(t) y S(t)? Parece que debería existir …

Más general, cualquier móvil que se desplace siguiendo la ley más general $W(t)=\frac{1}{3}t^3+C$, donde C es una constante, su velocidad será también v(t), o sea $W'(t)=t^2$.

La cuestión es ¿existirán más?

Familia de Funciones

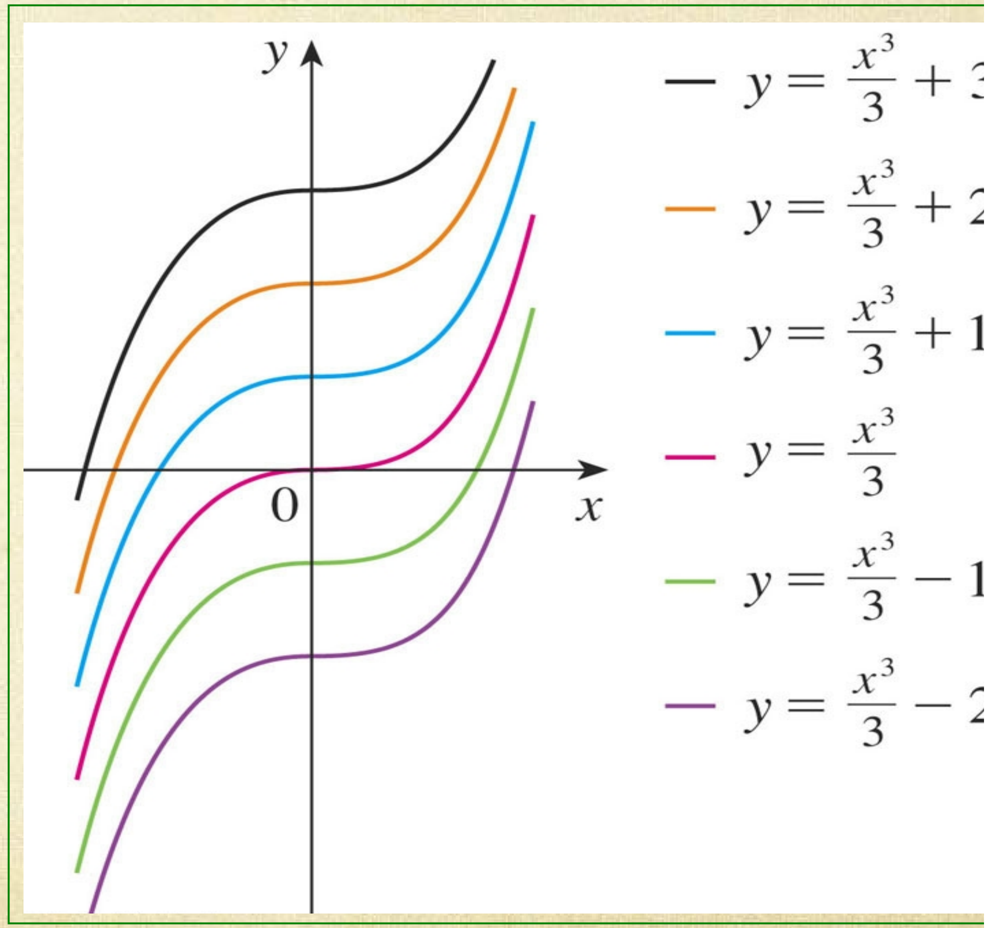
- Revisemos lo anterior...

Hemos dicho que las funciones $x^3/3$, $x^3/3+100$ y la más general $x^3/3+C$, tienen todas la misma derivada x^2.

Asignemos valores específicos a *C*, de esta maner obtendremos una familia de funciones.

Sus gráficos se desplazan
verticalmente de uno al otro
en dependencia del valor de C

Es fácil ver que todas las curvas
tienen la misma pendiente
en cualquier punto



Ejemplo. Sea f(x)=x; ¿Qué función tiene como derivada esta función?

$\boxed{F_1(x)=\frac{1}{2}x^2}$ ¿cumple el requisito $\frac{d(F(x))}{dx}=f(x)$?

$\Rightarrow$

$$\frac{d(F_1(x))}{dx}=2\times\frac{1}{2}\times x=x$$

Luego F_1(x) es derivada de f(x).

¿Qué ocurre con $\boxed{F_2(x)=\frac{1}{2}x^2+2}$?

$$\frac{d(F_2(x))}{dx}=x$$

Luego F_2(x) también es derivada de f(x).

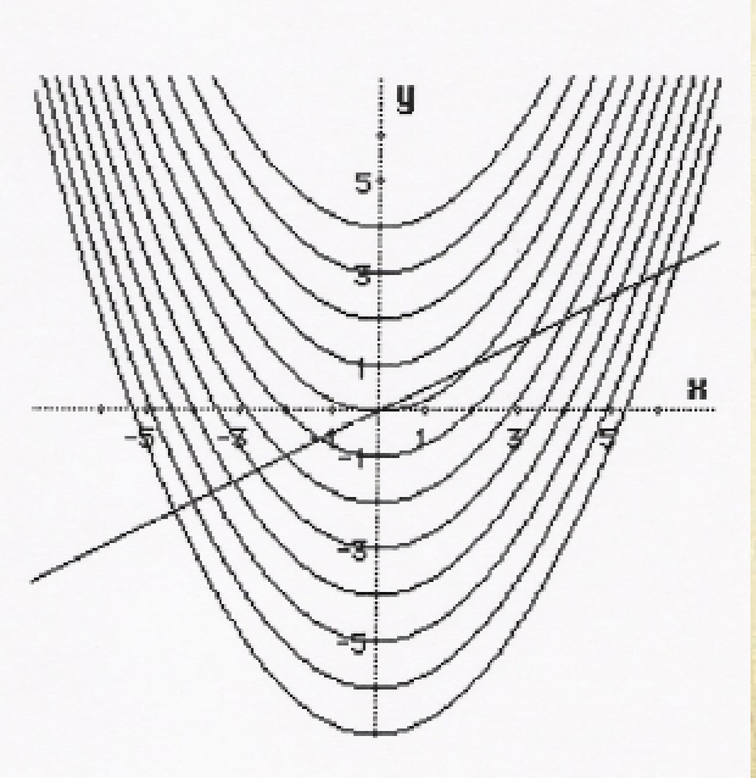
$\boxed{F_3(x)=\frac{1}{2}x^2+55}$

F_3(x) también es derivada de f(x).

Concluimos que una función f(x) continua y derivable puede tener infinitas funciones cuyas derivadas coinciden con ella, su forma es:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Donde C es una constante arbitraria o “constante de mitigación”.



PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

Hallar la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$F(x) = 1/4\ x^4$; $G(x) = 1/4\ x^4 + 7$; $H(x) = 1/4\ x^4 - 5$

Es fácil comprobar que para las tres funciones su derivada es x^3.

Se dice que cada una de las funciones F(x), G(x) y H(x) es una primitiva de f(x).

Sea la función f(x) definida sobre un cierto intervalo I (finito o infinito, cerrado o abierto). La función F(x) definida sobre I se dice *primitiva de la función f(x) en el intervalo I* si

$F'(x)=f(x)$ para cada $x \in I$. (1)

Ejemplo 1. La función $F(x)=\arcsin x$ es una primitiva de $f(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ en el intervalo (-1,1), pues se cumple que $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}$.

Ejemplo 2. La función $F(x)=\ln x$ es una primitiva de $f(x)=x^{-1}$ en el intervalo $(0,+\infty)$, pues se cumple que $(\ln x)'=x^{-1}$.

Observación. Puede ocurrir que el dominio máximo donde tiene sentido la función F(x) sea más amplio que el dominio máximo de f(x), ver Ejemplo 1, o que, al contrario, el dominio máximo de definición de la función f(x) contenga al dominio máximo de F(x), ver Ejemplo 2. En cualquier caso, se considera *primitiva de* f(x), en aquel intervalo donde ambas funciones estén definidas y donde se cumpla (1).

Teorema. Si F(x) es una primitiva de la función f(x) en el intervalo I, entonces, cualquier otra primitiva G(x) para la función f(x) en el intervalo I tiene la forma

$$G(x)=F(x)+C,$$

Donde C es una constante arbitraria

INTEGRAL INDEFINIDA

Recordemos que si la función *F(x)* tiene como derivada la función *f(x)*, entonces *F(x)* es una *primitiva de f(x).*

Resultado que se interpreta en general así: *La derivada de una primitiva de la función f (x) es la propia función f (x).*

Si F(x)* es una primitiva de la función *f(x),* la función *F(x)* + C (suma de la función F(x) y de una constante C) es también una primitiva de *f(x).

El conjunto de todas las primitivas de la función *f(x)* se designa por

$$\int f(x)dx$$

y se **llama *integral indefinida de f (x)***. Es decir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

La expresión

$$\int f(x)dx$$

Se lee *"la integral indefinida de f con respecto a x"*, y es el conjunto de todas las primitivas de *f*.

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} dx$$

Signo Integral

Integrando

x es llamada la variable de integración

La Integración es el proceso "inverso" a la diferenciación.

Integración es el proceso de encontrar una función cuya derivada es conocida.

Función derivada

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Función primitiva

RESUMIENDO…

Al conjunto de todas las primitivas de una función f(x) se le llama integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Las operaciones de integración y derivación son “casi” mutuamente inversas. Así, si se deriva una función y después se integra, se obtiene de nuevo la función original (más una constante). Por ello, es habitual llamar antiderivada a la integral indefinida de una función.

Diferenciar es una ciencia, integrar es un arte

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Aditividad. La integral indefinida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales indefinidas de las funciones sumandos.

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

La integral de la suma es la suma de integrales

Homogeneidad. La integral indefinida del producto de una constante por una función *f(x)* es igual al producto de la constante por la integral indefinida de la función *f(x).*

$$\int C\cdot f(x)\,dx = C\cdot \int f(x)\,dx$$

La integral de C veces la función es C veces la integral

$(\int f(x)dx)' = f(x)$; $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

$\int dF(x) = F(x) + C$

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL

La derivada de la función potencial $f(x)=ax^n$ es $f'(x)=a\ n\ x^{n-1}$

Sea la función $f(x)=7x^4$; su derivada es $f'(x)=7.4.x^3$

¿Cómo llegar de f'(x) a f(x)?

Si $f'(x)=28x^3$ es sencillo, pero si $f'(x)=7x^3$, **¿qué hacer?**

Vemos pues que para llegar a la primitiva de una función potencial, el exponente aumenta en una unidad y el número que lo acompaña (constante) queda multiplicado por la potencia que tenía más una unidad

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Tabla de Integrales

$$\int 0\,dx = k$$

$$\int \cos x\,dx = sen x + k$$

$$\int C\,dx = Cx + k$$

$$\int sen x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k;\forall n \neq -1$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + k$$

Ejercicios

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx = \int \left(2x + 1 - \frac{1}{x} \right) dx = x^2 - x - \ln x + C$$

$$\int \frac{3x^3 + 5x}{x^2 + 1} dx$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x & x^2 + 1 \\ \hline \boxed{2x} & 3x \end{array}$$

$$\int \frac{3x^3 + 5x}{x^2 + 1} dx = \int \left(3x + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{3}{2} x^2 + \ln\left(x^2 + 1\right) + C$$

Con variables distintas

Encuentre la integral indefinida siguiente:

$$\int\left(3e^{u}-\frac{7}{u}+2u^{2}-6\right)du$$

$$=3\int e^{u}du-7\int\frac{1}{u}du+2\int u^{2}du-\int 6du$$

$$=3e^{u}-7\ln|u|+\frac{2}{3}u^{3}-6u+C$$

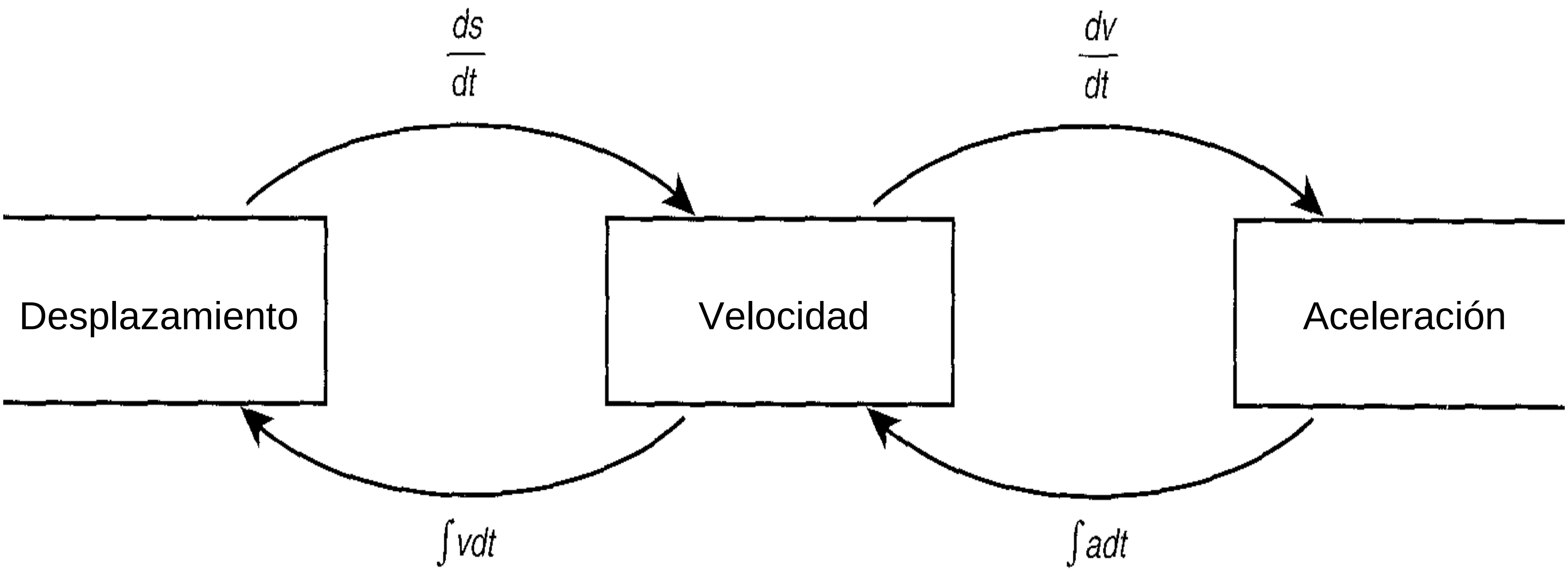
Posición, Velocidad, y Aceleración

Si $s=s(t)$ es la función posición de un objeto en el tiempo t, entonces

Velocidad $v = \dfrac{ds}{dt}$ Aceleración $a = \dfrac{dv}{dt}$

Forma Integral

$$s(t) = \int v(t)dt \qquad v(t) = \int a(t)dt$$



$\frac{ds}{dt}$
$\frac{dv}{dt}$
Desplazamiento
Velocidad
Aceleración
$\int v\,dt$
$\int a\,dt$

Aplicación a la Geometría de curvas

Si la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de la curva $y = f(x)$ es conocida, la ecuación de de la curva puede ser encontrada integrando integration.

e.g. La pendiente de una curva en cualqquier punto (x,y) es $2x$. La curva pasa por el punto (3,1). Encuentre su ecuación.

Puesto que $\dfrac{dy}{dx} = 2x,$

$$y = \int 2x\,dx$$

$$y = x^2 + C$$

Pongamos el punto $(3,1)$ *en la ecuación* $y = x^2 + C$

$$1 = 3^2 + C$$

$$C = -8$$

Por eso la ecuación de la curva es

$$y = x^2 - 8$$