UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE CIENCAS EXACTAS, NATURALES Y AGRIMENSURA

RELACIONES BINARIAS

Algebra (Para Agrimensura)
Ciclo lectivo 2010

Esp. Prof. Liliana N. Caputo
Paula Daniela Bordón

TEMA 3

Pares ordenados y n – uplas

En la teoría de conjuntos se llama **par ordenado (a, b)** al siguiente conjunto: (a,b) = {a, {a,b}}. Esta definición tiene el nombre de par de Kuratowski.

El nombre de par ordenado tiene que ver con la siguiente condición:

Si $a \neq b$, entonces, $(a,b) \neq (b,a)$.

En el par ordenado (a,b), **a** se denomina **primera componente** del par, y **b segunda componente**.

Por último, diremos que: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Así, por ejemplo, (-2, 0), $\left(1,\sqrt{5}\right)$, (0,-2) son 3 pares ordenados de números reales, puesto que (-2, 0) $\neq$ (0,-2).

Con la misma idea, puede definirse **ternas** y, en general, **n - uplas** (donde n es un número natural mayor que 3), como sigue:

Ternas: (a, b, c) = {a, {a,b}, {a,b,c}}. Ejemplos: (-1, 1,1), (2, 0, 5)

n – uplas: Estas definiciones se pueden extender a n > 3.

Ejemplos: (-3, 0, 0, 1) es una 4 – upla, mientras que (1, 2, 3, 1, 6, 7) es una 6 – upla.

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, llamamos **producto cartesiano AxB**, al siguiente conjunto: $A \times B = \left\{(x,y) / x \in A \wedge y \in B\right\}$.

Es decir el producto cartesiano AxB es el conjunto de pares ordenados tales que la primera componente es un elemento de A y la segunda es un elemento de B.

Nótese que en esta definición no hay nada que impida que A = B, con lo cual podemos considerar el producto cartesiano $A \times A = \left\{(x,y) / x,y \in A\right\}$. Este conjunto, en general, se denota con $\mathbf{A^2}$.

Veamos un ejemplo: Consideremos A = {1, 2, 3}, B = {1, 23}; C = {7, 8}.
Entonces: BxC ={(1,7), (1,8), (23,7), (23,8)}
CxB = {(7,1), (7,23), (8,1), (8,23)}

Vemos pues que BxC $\neq$ CxB es decir, que el producto cartesiano no cumple la propiedad conmutativa.

En general, podemos considerar el conjunto:

$$A^n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / x_1, x_2, \cdots, x_n \in A\right\}$$

RELACIONES BINARIAS

Dados dos conjuntos, A y B, se llama **relación de A en B** a todo subconjunto del producto cartesiano AxB.

Entonces, puede decirse que **siempre** una relación de A en B está formada por pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y cuya segunda pertenece a B. También debe tenerse en cuenta que como $\varnothing$ está incluido en todo conjunto, en particular está incluido en cualquier producto cartesiano y es, en consecuencia, una relación: la **relación vacía.**

Si un par $(a,b) \in R \subset A \times B$, decimos que b es una **imagen** de a por R, y que a es una **preimagen** de b por R.

Para denotar una relación de A en B, también suele usarse la notación
R: A →B y, para denotar que b es la imagen de a, se usa R(a) = b.

Veamos un ejemplo:

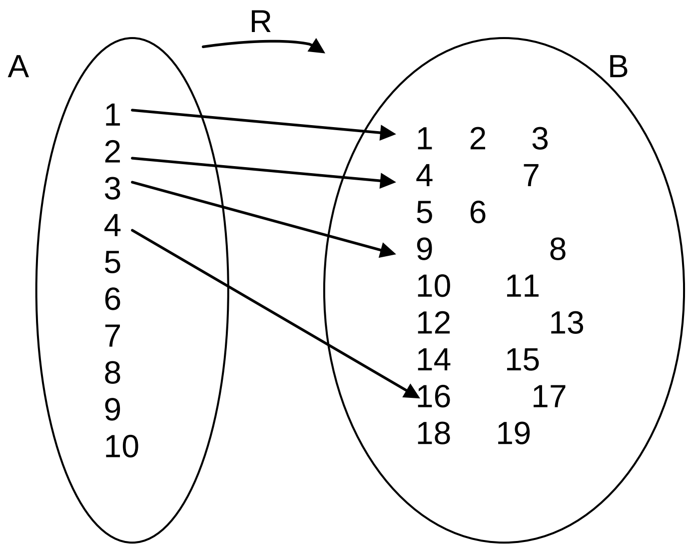
$A = \{ x \in \mathbb{N} / x \leq 10\}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} / x < 20\}$ y $R = \{(x, y) \in AxB / y = x^2\}$

Escribamos R por extensión: $R = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$.

Entonces, 4 es imagen de 2 (por ser $2^2 = 4$ y 3 es preimagen de 9 por ser $3^2 = 9$).

Para representar gráficamente relaciones binarias, se utilizan **diagramas de Venn** o **gráficos cartesianos.**

Representemos gráficamente la relación dada como ejemplo



En diagramas de Venn

Podemos observar que no todos los elementos de A tienen imagen en B, ni que todos los elementos de B tienen preimagen en A. Esto da lugar a definir los siguientes conjuntos:

Sea $R \subset A \times B$ una relación, entonces:

A se denomina **Alcance de R.**

B se llama **Rango de R.**

El subconjunto de A $D(R) = \{a \in A / (a,b) \in R\}$ se denomina **Domínio de R.**

El subconjunto de B $I(R) = \{b \in B / (a,b) \in R\}$ se denomina **Imagen de R.**

Entonces en nuestro ejemplo: A es el Alcance de R y B es su rango.
Pero, D(R) = {1, 2, 3, 4}, mientras que I(R) = {1, 4, 9, 16}

Dada una relación $R \subset A \times B$ siempre es posible determinar su **inversa**, a la que denotaremos con R^{-1}, de la siguiente manera:

$$R^{-1} = \{(x,y) \in BxA / (y,x) \in R\}$$

Para nuestro ejemplo, entonces:

$$R^{-1} = \left\{(x,y) \in BxA / y = \sqrt{x}\right\} = \{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)\}$$

RELACIONES EN UN CONJUNTO

Hasta ahora hemos considerado relaciones binarias con A y B cualesquiera; pero todo lo dicho hasta aquí es válido en el caso particular en que sea A = B.

Dada una relación $R \subset A^2$, R puede cumplir alguna o algunas de las siguientes propiedades:

Propiedad reflexiva: $\forall x \in A : (x,x) \in R$ (es decir, cada elemento de A se relaciona consigo mismo)

Propiedad arreflexiva: $\forall x \in A : (x,x) \notin R$ (esto significa que ningún elemento se relaciona consigo mismo)

Propiedad simétrica: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

Propiedad asimétrica: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$

Propiedad antisimétrica: $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$

Propiedad transitiva: $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Veamos algunos ejemplos:

Sea A = {1, 2, 3}, definimos en A: $R_1 = \left\{(x,y) \in A^2 / x < y\right\}$;

$R_2 = \left\{(x,y) \in A^2 / x = y \vee x + y = 3\right\}; I_A = \left\{(x,y) \in A^2 / x = y\right\}$;

Si las escribimos por extensión tenemos que:
R_1 = {(1,2), (2,3), (1, 3)};
R_2 = {(1,1), (2,2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)};
I_A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Veamos qué propiedades cumplen y cuáles no:

<u>R_1</u>:

Propiedad reflexiva: No se cumple, porque $1 \in A \wedge (1, 1) \notin R_1$.

Propiedad arreflexiva: Se cumple porque como, en general, ningún número es menor que sí mismo $\forall x \in A$: $(x, x) \notin R_1$.

Propiedad simétrica: No se cumple porque $(1,2) \in R_1 \wedge (2, 1) \notin R_1$.

Propiedad asimétrica: Se cumple porque, en general, si x < y, y $\not<$ x entonces

$V[(x, y) \in R_1] = V[(y, x) \notin R_1] = v$, de donde $V[(x, y) \in R_1 \Rightarrow (y, x) \notin R_1] = v$.

Propiedad antisimétrica: Se cumple porque, cualquiera sean x, y $\in$ A, resulta: $V[(x, y) \in R_1 \wedge (y, x) \in R_1] = F$. Entonces, como cualquier implicación de antecedente falso es verdadera, resulta que:

$$V[(x, y) \in R_1 \wedge (y, x) \in R_1 \Rightarrow x = y] = v.$$

Propiedad transitiva: Vemos que la única implicación con antecedente verdadero que puede considerarse a partir de los elementos de R es

$$(1, 2) \in R_1 \wedge (2, 3) \in R_1 \Rightarrow (1, 3) \in R_1$$

que es verdadera porque 1 < 3. Cualquier otra implicación, por tener antecedente falso, es verdadera. De donde puede afirmarse que se cumple la propiedad transitiva.

Luego, R_1 es arreflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva.

R_2:

Propiedad reflexiva: Se cumple, porque:

$1 \in A \wedge (1, 1) \in R_2$.

$2 \in A \wedge (2, 2) \in R_2$.

$3 \in A \wedge (3, 3) \in R_2$.

Es decir, $\forall x \in A$: $(x, x) \in R_2$.

Propiedad arreflexiva: No se cumple pues ya se ha probado que $\forall x \in A$: $(x, x) \in R_2$.

Propiedad simétrica: Si $x, y \in A$ / $(x, y) \in R_2$, $x = y \vee x + y = 3$, se tiene que $y = x \vee y + x = 3$, de donde $(y, x) \in R_2$. Entonces, se cumple la propiedad simétrica.

Propiedad asimétrica: No se cumple, ya que $(1, 2) \in R_2 \wedge (2, 1) \in R_2$.

Propiedad antisimétrica: Como $(1, 2) \in R_2 \wedge (2, 1) \in R_2 \wedge 1 \neq 2$, R_2 no verifica la propiedad antisimétrica.

Propiedad transitiva:: Vemos que las siguientes implicaciones, que son todas las posibles con antecedente verdadero, son verdaderas:

$(1, 1) \in R_2 \wedge (1, 1) \in R_2 \Rightarrow (1, 1) \in R_2$.

$(2, 2) \in R_2 \wedge (2, 2) \in R_2 \Rightarrow (2, 2) \in R_2$.

$(3, 3) \in R_2 \wedge (3, 3) \in R_2 \Rightarrow (3, 3) \in R_2$.

$(1, 2) \in R_2 \wedge (2, 1) \in R_2 \Rightarrow (1, 1) \in R_2$.

$(1, 2) \in R_2 \wedge (2, 2) \in R_2 \Rightarrow (1, 2) \in R_2$.

$(2, 1) \in R_2 \wedge (1, 2) \in R_2 \Rightarrow (2, 2) \in R_2$.

$(2, 1) \in R_2 \wedge (1, 1) \in R_2 \Rightarrow (2, 1) \in R_2$.

Entonces, se verifica la propiedad transitiva.

Luego, R_2 cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

R_3:

Propiedad reflexiva: $\forall x \in A$: $x = x$, es decir, $\forall x \in A$: $(x, x) \in I_A$.

Propiedad simétrica: Si $x, y \in A$ / $(x, y) \in I_A$, se tiene que $x = y$. Entonces, $y = x$ lo cual equivale a que $(y, x) \in I_A$. Luego, I_A verifica la propiedad simétrica.

Propiedad asimétrica: No se verifica porque la relación es simétrica.

Propiedad antisimétrica: Si $x, y \in A$ /$(x, y) \in I_A \wedge (y, x) \in I_A$, resulta, $x = y$. Es decir, I_A cumple la propiedad antisimétrica.

Propiedad transitiva: Si $x, y, z \in A$ /$(x, y) \in I_A \wedge (y, z) \in I_A$, resulta:

$$x = y \ (1) \wedge y = z \ (2)$$

Reemplazando (2) en (1), se tiene: $x = z$ es decir, $(x, z) \in I_A$.

Luego I_A cumple las propiedades **reflexiva**, **simétrica**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Nota: Las demostraciones de las propiedades de R_3 no dependen de cuáles son los elementos de A, con lo cual I_A cumple las propiedades señaladas en negritas, cualquiera sea el conjunto no vacío A.

RELACIONES DE ORDEN:

Sean A un conjunto y $R \subset A^2$. Entonces:

R es **relación de orden amplio** si, y sólo si, R verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos de relaciones de orden amplio son la inclusión de conjuntos que vimos en el Tema 2 y la relación I_A en cualquier conjunto no vacío A.

En cambio, diremos que R es **relación de orden estricto** si, y sólo si, verifica las propiedades arreflexiva, asimétrica y transitiva.

Como ejemplo de orden estricto, podemos mencionar la relación R_1.

Por otra parte, dada una relación de orden (amplio o estricto), dicho orden puede ser total o parcial.

Diremos que R es **relación de orden total** si, y sólo si, se verifica que:

$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

En caso contrario es decir, si $\exists\, x, y \in A/ (x, y) \notin R \wedge (y, x) \notin R$, se dice que R es una **relación de orden parcial**.

Cuando en un conjunto A se ha definido una relación de orden R, puede analizarse si dicho conjunto contiene:

Primer elemento: $a \in A$ se llama primer elemento de A, si $\forall x \in A: (a,x) \in R$.

Ejemplo: 1 es el primer elemento de $\mathbb{N}$, pues $\forall x \in \mathbb{N}: 1 \leq x$.

Ultimo elemento: $b \in A$ se llama último elemento de A, si $\forall x \in A: (x,b) \in R$.

Ejemplo: 0 es el último elemento del conjunto de enteros no negativos ($\{x \in \mathbb{Z}/ x \leq 0\}$).

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Sean A un conjunto y $R \subset A^2$. Entonces:

R es **relación de equivalencia** si, y sólo si, R verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos: R_2 y la relación I_A en cualquier conjunto no vacío A.

Si R es una relación de equivalencia en A, para cada elemento $x \in A$, se define la **clase de equivalencia de x** (K_x) como el conjunto de imágenes de x por R, esto es: $K_x = \{y \in A/ (x, y) \in R\}$.

Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia, se lo denomina **conjunto cociente**. En símbolos: $A/R = \{K_x / x \in A\}$.

Teorema: Dado un conjunto A y $R \subset A^2$ relación de equivalencia en A, R determina una partición de A. Recíprocamente, toda partición de A induce una relación de equivalencia en A.

Demostremos primero que toda relación de equivalencia en A determina una partición de A.

Para ello, consideremos un conjunto A y $R \subset A^2$ relación de equivalencia en A. Veamos que el conjunto cociente A/R es una partición de A es decir, que:

1. $K_x \neq \emptyset, \forall x \in A$.
2. $\forall x, y \in A: K_x \cap K_y \neq \emptyset \Leftrightarrow K_x = K_y$
3. $\forall x \in A, \exists K_y \in A/R / x \in K_y$

1. $\forall x \in A$: $(x,x) \in R$ (porque R es reflexiva). Entonces, $\forall x \in A$: $x \in K_x$ es decir, $K_x \neq \emptyset$, $\forall x \in A$. (I)

2. Supongamos que $K_x \cap K_y \neq \emptyset$. Demostremos entonces que debe ser $K_x = K_y$.

Si $z \in K_x \cap K_y$ debe ser $(z,x) \in R \wedge (z,y) \in R$ y también $(y, z) \in R$ (por propiedad simétrica)

Entonces, si $\mathbf{w \in K_x}$, resulta que $(x,w) \in R$.

Así pues, se tiene que $(z,x) \in R \wedge (x,w) \in R$. Luego, por transitividad, resulta: $(z,w) \in R$.

Como $(y,z) \in R \wedge (z,w) \in R$, por cumplir R la propiedad transitiva, tenemos que $(y, w) \in R$ con lo cual (por propiedad simetrica), $(w, y) \in R$, de donde resulta $\mathbf{w \in K_y}$.

Hemos probado pues, que $K_x \subset K_y$. De la misma manera, se prueba que $K_y \subset K_x$. Así pues quedará probado que $K_x = K_y$. (II)

3. Hemos probado antes que $\forall x \in A$: $x \in K_x$, entonces:

$\forall x \in A, \exists K_x \in A/R / x \in K_x$. (III)

Por I, II y III, resulta que A/R constituye una partición de R.

Recíprocamente, supongamos tener una partición de A, a la cual llamamos P.

Definimos pues una relación en A, como sigue:

$(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists A_i \in P / x, y \in A_i$.

Probaremos que R así definida es relación de equivalencia en A.

Propiedad reflexiva: Sea $x \in A$. Como P es una partición de A, $\exists A_i \in P / x \in A_i$ es decir, $\exists A_i \in P / x, x \in A_i$. Entonces, $(x, x) \in R$, cualquiera sea $x \in A$.

Propiedad simétrica: Sean $x, y \in A / (x, y) \in R$. Luego, $\exists A_i \in P / x, y \in A_i$, es decir $\exists A_i \in P / y, x \in A_i$. Esto equivale a afirmar que $(y, x) \in R$.

Propiedad transitiva: Sean $x, y, z \in A / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$. Luego:

$\exists A_i, A_j \in P / x, y \in A_i \wedge y, z \in A_j$. Entonces, resulta que $y \in A_i \cap A_j$. Como P es partición de A, para que pueda ser $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ debe ser $A_i = A_j$. Luego, se tiene que $\exists A_i \in P / x, z \in A_i$, lo cual equivale a que $(x, z) \in R$.

Así pues, R es relación de equivalencia en A.

Veamos ejemplos de cómo utilizar este teorema:

Dado el conjunto $A = \{ x \in \mathbb{N} / x \leq 4\}$. Es trivial que $P = \{\{2,4\},\{1,3\}\}$ es una partición de A. Entonces, la relación R que se presenta a continuación es de equivalencia en A:

$$R = \{(2,2), (4,4), (2,4), (4,2), (1,1), (3,3), (1,3), (3,1)\}$$

Asimismo, dado un conjunto B, se pueden listar todas las relaciones de equivalencia en B, determinando todas sus particiones. Si B = {0, 2, 3}, sus particiones y relaciones de equivalencia en B, son:

$P_1 = \{\{0\}, \{2\}, \{3\}\} \to R_1 = i_B$
$P_2 = \{\{0\}, \{2,3\}\} \to R_2 = \{(0, 0), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
$P_3 = \{\{2\}, \{0,3\}\} \to R_3 = \{(0, 0), (2, 2), (3, 3), (0, 3), (3, 0)\}$
$P_4 = \{\{3\}, \{0,2\}\} \to R_4 = \{(0, 0), (2, 2), (3, 3), (2, 0), (0, 2)\}$
$P_5 = \{B\} \to R_5 = B^2$

Veamos a continuación que la clasificación dada de relaciones en un conjunto no es **exhaustiva** (existen relaciones que no son de orden ni de equivalencia) ni **excluyente** (existen relaciones que son de ambas clases a la vez).

Ejemplo 1: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$

Vemos que no es reflexiva, puesto que $(2, 2) \notin S$ (pues $2^2 \neq 2$). Luego, S no es relación de equivalencia ni de orden amplio en R.

Tampoco es arreflexiva, ya que $(1, 1) \in S$ (porque $1^2 = 1$). Esto significa que S no es relación de orden estricto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, ya hemos visto que la relación identidad en A, definida como $i_A = \{(x, y) \in A^2 / x = y\}$ es reflexiva, simétrica y transitiva es decir, de equivalencia en A. Además vimos que cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, con lo cual también es relación de orden amplio en A.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ESPINOSA ARMENTA, R. (2010). Matemáticas discretas. 1ª Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.
- JOHNSONBAUGH, R. (2005). Matemáticas Discretas. 6ª Edición. Pearson Educación. MÉXICO.
- ROJO, A. (1996). Algebra I. El Ateneo. Argentina.