Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Relaciones de Recurrencia

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Unidad II. Relaciones de Recurrencia

- Sucesiones y sumatorias.
- Definiciones por recurrencia.
- Relaciones de recurrencia.
- Clasificación de las relaciones de recurrencia.
- Resolución de los diferentes tipos de relaciones lineales – no lineales, homogéneas – no homogéneas, con coeficientes constantes – con coeficientes variables.
- Generación de números (pseudo) aleatorios.

Kurt Gödel (1906-1978) Austria/Hungría (ahora República Checa) - 1978 Princeton, New Jersey.

En la obra de Gödel pueden rastrearse los inicios de la teoría de modelos y la teoría de la recursividad.

El más destacado de sus teoremas es el de la incompletitud

En el año 1933 desarrolló ideas sobre la computabilidad y la función recursiva y sobre el concepto de verdad.

Las funciones recursivas van N_0 -> N_0
son computables en un sentido intuitivo.

En teoría de la computación se demuestra que las funciones recursivas son funciones que pueden ser calculadas con el formalismo de cómputo más general conocido: las máquinas de Turing.

SUCESIONES.

Definición 1. Una *sucesión* es una función que va de Naturales en Reales; si va de Naturales en Enteros se llama *Sucesión entera*

$S: \ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ o $S: \{a_n : n \in N\}$ o $S: \{a_n\}$

Los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son *términos* de la sucesión.

a_1 es el primer término de la sucesión, a_2 es el segundo término de la sucesión y así siguiendo a_n es el término *n-ésimo* de la sucesión.

Si se incluye el cero en el dominio de la sucesión,

a_0 será el primer elemento de la sucesión y

a_n será el término (n+1)-*ésimo* de la sucesión.

Por ejemplo, en la sucesión 2, 4, 6, … la fórmula para determinar el *n-ésimo* término es relativamente simple:

$b_n = 2n$

Si necesitamos calcular b_7 se resolverá $2 \cdot 7 = 14$.

Es claro que para conocer b_7 no ha sido necesario conocer los términos anteriores

Consideremos las siguientes sucesiones:

S_1 *:1, 2, 3, 4, 5, 6, …*

S_2 *: 1, 4, 9, 16, 25, 36, …*

S_3 *:1, 3, 5, 7, 9, 11,…*

Sin embargo no en todas las sucesiones es posible conocer una fórmula explícita para el término n-ésimo, por ejemplo

S_4 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 . . .

Relaciones de Recurrencia

Hay series donde es posible conocer una expresión para el término *n*-ésimo, pero este no es una función explícita de *n*.

La sucesión de Fibonacci

S_5 : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

cada término es la suma de los dos anteriores

$$a_1=1, \quad a_2=1, \qquad a_n= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3$$

No tiene una fórmula explícita para a_n;
para conocer el valor de a_7 es necesario conocer los valores de a_6 y de a_5 ; para conocer el valor de a_6 es necesario conocer los valores de a_5 y de a_4 ; y así siguiendo.

$a_7 = a_6 + a_5$

$a_7 = a_5 + a_4 + a_4 + a_3 = a_5 + 2a_4 + a_3$

$a_7 = a_4 + a_3 + 2(a_3 + a_2) + a_2 + a_1 = a_4 + 3a_3 + 3a_2 + a_1$

$a_7 = a_3 + a_2 + 3a_3 + 3a_2 + a_1 = 4a_3 + 4a_2 + a_1$

$a_7 = 4a_2 + a_1 + 4a_2 + a_1 = 8a_2 + 5a_1$

pero: $a_1 = a_2 = 1$

entonces: $a_7 = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 13$

Para calcular el término *n*-ésimo es necesario conocer los términos anteriores.

Definición 2

Si en una sucesión $S: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

el término a_n puede ser expresado en función de los términos anteriores $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1$;

la expresión **es una *relación de recurrencia*** y se puede expresar:

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$$

En general, para poder calcular los términos de una sucesión, es necesario conocer al menos un término de la misma.

Definición 3.

Sea k el entero menor para el cual tenemos asignados valores de $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$

permite calcular valores únicos para a_n si $n>k$.

Los valores de $a_1, a_2, \ldots, a_k$ se llaman *condiciones iniciales* o *condiciones de frontera* de la relación.

Las condiciones iniciales con la relación de recurrencia generan unívocamente la sucesión.

Generalmente la relación de recurrencia está dada por

$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$ para $n > k$

con condiciones iniciales $a_1, a_2, \ldots, a_k$

En este caso decimos que la sucesión

$S: a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisface la relación de recurrencia
$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_1)$ para $n > k$,

con condiciones iniciales $a_1, a_2, \ldots, a_k$

Definición 4.

La fórmula explícita para a_n que permite calcular la expresión para cada valor de n, sin necesidad de conocer los términos previos, se llama *solución general* de la relación de recurrencia.

Ejemplo 1

Sean las siguientes *sucesiones*, con sus correspondientes *condiciones iniciales*, encuentre la *solución general* de la ecuación de recurrencia que las determinan.

S_6: *4, 7, 10, 13, …* con $n \geq 1 \quad \wedge \quad a_1 = 4$

Rta. $a_n = a_{n-1} + 3$

S_7: *2, 5, 8, 11, …* con $n \geq 1 \quad \wedge \quad a1 = 2$

Rta. $a_n = a_{n-1} + 3$

Clasificación de las Relaciones de Recurrencia

Lineales o *No Lineales*:
Una relación de recurrencia *es lineal cuando cada término aparece elevado a la primera potencia*. Caso contrario es no lineal.

Con *Coeficientes constantes* o con *Coeficientes variables*:
Una ecuación de recurrencia *tiene coeficientes constantes cuando los coeficientes que acompañan cada término en la expresión son constantes*. Caso contrario, cuando al menos uno de los coeficientes es una función de *n*, se considera que la relación de recurrencia tiene coeficientes variables.

Homogéneas o *No homogéneas*: Una relación de recurrencia *es homogénea cuando la sucesión idénticamente nula la satisface*

$a_n = 0$ para todo n satisface la relación. Caso contrario es no homogénea.

De orden *k*, $k \in N$.

Relación de Recurrencia lineal homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes Reales $c_k \neq 0$

Relación de Recurrencia lineal NO homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n, \quad n \geq k$$

Ejemplo 2

a) La relación de recurrencia $a_{n+1} = 5a_n$, $n \geq 0$

es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y homogénea.

Es homogénea porque reemplazando a_j por 0,
es válida la identidad $0 = 5 \cdot 0$ para todo $j \geq 0$.

b) La relación de recurrencia $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, $n \geq 2$

es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y homogénea,
porque $0=0+0$.

c) La relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $n \geq 0$

es lineal, con coeficientes constantes, de primer orden y no homogénea, porque $0 \neq 0 + (n-1)$

d) La relación de recurrencia

$$a_{n+1} - a_n^2 - 2n\, a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 0$$

no es lineal, con coeficientes variables, de tercer orden y homogénea.

Se la puede escribir

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2n\, a_{n-1} - 5a_{n-2} = 0$$

Ejemplo 3

Sea la relación de recurrencia dada por:

$a_n = a_{n-1} + n-1 \qquad n \geq 1, \qquad a_1 = 0$

- Clasifíquela según los criterios vistos.
- Calcule algunos términos en forma directa.
- Halle y verifique la solución general.

Respuesta

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + (n-1) \end{cases}$$

a) Clasificación: Es una relación de recurrencia:

- lineal,
- con coeficientes constantes,
- de primer orden,
- no homogénea.

b) Cálculo de algunos términos

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = a_1 + (n-1) = 0 + (2-1) = 1$$
$$a_3 = a_2 + (n-1) = 1 + (3-1) = 1 + 2 = 3$$
$$a_4 = a_3 + (n-1) = 3 + (4-1) = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$a_5 = a_4 + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$a_n = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$ Solución General

Carl Gauss
(1777-1855)

c) Verificación de la Solución General

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n - a_{n-1} - (n-1) = 0$$

$$a_n - a_{n-1} - (n-1) =$$

$$\frac{(n-1)\cdot n - (n-2)(n-1)}{2} - (n-1) = (n-1)\frac{n-(n-2)}{2} - (n-1) =$$

$$= (n-1)\frac{n-n+2}{2} - (n-1) = (n-1) - (n-1) = 0$$

Ejemplo 4

Sea la relación de recurrencia dada por:

$a_n = a_{n-1} + 3, \qquad n \geq 1, \qquad a_1 = 2$

- Clasifíquela según los criterios vistos.

- Calcule algunos términos en forma directa.

- Halle y verifique la solución general.

a)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Es una relación de recurrencia:

- lineal
- con coeficientes constantes
- de primer orden
- no homogénea.

b) $a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

$$a_n = (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 2 \cdot 3$$

$$a_n = (a_{n-3} + 3) + 2 \cdot 3 = a_{n-3} + 3 \cdot 3$$

.

.

.

$$a_n = \left(a_{n-(n-1)} + 3\right) + (n-2) \cdot 3 = a_1 + (n-1) \cdot 3$$

$$a_n = (a_1 + 3) + (n-1) \cdot 3 = a_1 + 3n$$

$a_n = 2 + 3n \qquad n \geq 0$ Solución General

Verificación

c) $a_n = a_{n-1} + 3$

$a_n - a_{n-1} - 3 = 0$

$a_n - a_{n-1} - 3 = (2 + 3n) - \left(2 + 3(n - 1)\right) - 3 =$

$= (2 + 3n) - (2 + 3n - 3) - 3 = 2 + 3n - 2 - 3n + 3 - 3 = 0$

Un caso de solución mediante sustitución en reversa

Ejemplo 6

Sea la relación de recurrencia dada por:

$a_{n+1} - a_n = 5n$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$

a) Clasifíquela según los criterios vistos.

b) Halle y verifique la solución general.

Respuesta

Resolveremos aplicando una técnica llamada *sumas telescópicas*

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 5n \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

Es una relación de recurrencia:

- lineal,
- con coeficientes constantes,
- de primer orden,
- no homogénea

(puede resolverse aplicando sustitución en reversa)

b) $a_1 - a_0 = 5 \cdot 0$
$a_2 - a_1 = 5 \cdot 1$
$a_3 - a_2 = 5 \cdot 2$
$a_4 - a_3 = 5 \cdot 3$
.
.
.
$a_{n+1} - a_n = 5 \cdot n$

sumando miembro a miembro todas estas igualdades tenemos que:

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) =$$

$$= 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0$$

$$a_{n+1} - a_0 = 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n} 5i$$

$$a_{n+1} - a_0 = 5n + 5(n-1) + \cdots + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = \sum_{i=0}^{n} 5i$$

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 5i + a_0 = 5\sum_{i=0}^{n} i + a_0 = 5\frac{n(n+1)}{2} + 2, \qquad n \geq 0$$

$$a_{n+1} = 5\frac{n(n+1)}{2} + 2 \qquad n \geq 0$$ Solución General

c) Verificación

$$a_{n+1} - a_n = 5n$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = 0$$

$$a_{n+1} - a_n - 5n = \left(5\,\frac{n(n+1)}{2} + 2\right) - \left(5\,\frac{(n-1)n}{2} + 2\right) - 5n$$

$$= 5\,\frac{n(n+1)}{2} + 2 - 5\,\frac{(n-1)n}{2} - 2 - 5n = 5\,\frac{n(n+1)}{2} - 5\,\frac{(n-1)n}{2} - 5n =$$

$$= 5\,\frac{n(n+1)-(n-1)n}{2} - 5n = 5n\,\frac{(n+1)-(n-1)}{2} - 5n =$$

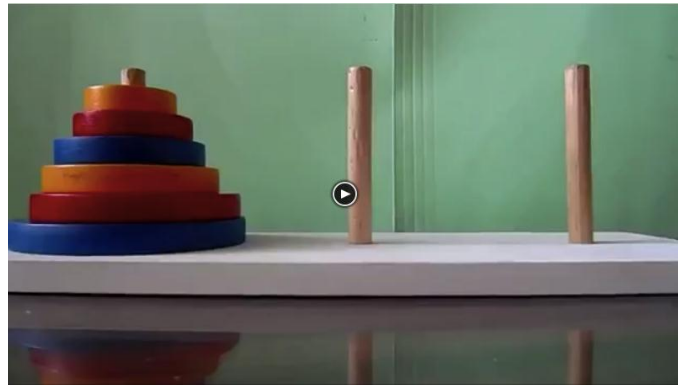
$$= 5n\,\frac{n+1-n+1}{2} - 5n = 5n - 5n = 0$$

Torres de Hanoi

Templo Kashi Vishwanath

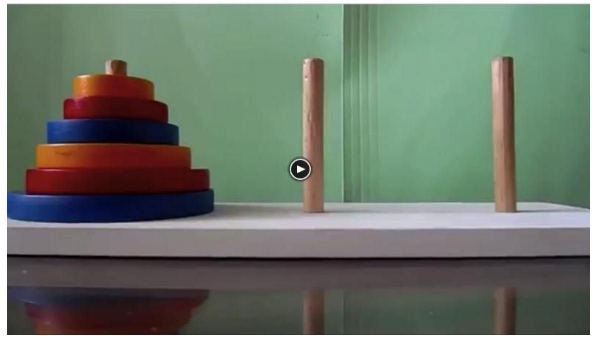
3 palos

64 discos



Para llevar $n + 1$ discos del poste 1 al poste 3

a_n Cantidad de pasos para llevar n discos del poste 1 al poste 2



Pasamos el disco n+1 del poste 1 al poste 3 (un paso mas)

a_n Cantidad de pasos para llevar n discos del poste 2 al poste 3

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 , \qquad n \geq 0 , \qquad a_0 = 0$$

64 discos $1{,}84467 \mathrm{x} 10^{19}$ seg. 584.942 millones de años

Algoritmo Torres de Hanói (Complejidad $\Theta(2^n)$)

Entrada: Tres pilas de números *origen*, *auxiliar*, *destino*, con la pila *origen* ordenada

Salida: La pila *destino*

1. **sí** *origen* $==\{1\}$ **entonces**
    1. **mover** el disco 1 de pila origen a la pila destino (insertarlo arriba de la pila destino)
    2. **terminar**
2. **si no**
    1. *hanoi*($\{1,\ldots,n-1\}$,*origen*,*destino*, *auxiliar*) //mover todas las fichas menos la más grande (*n*) a la varilla auxiliar
3. **mover** disco *n* a *destino* //mover la ficha grande hasta la varilla final
4. *hanoi* (*auxiliar*, *origen*, *destino*) //mover todas las fichas restantes, 1...*n*–1, encima de la ficha grande (*n*)
5. **terminar**

Repaso

Ecuación de recurrencia homogénea

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

polinomio característico de grado k asociado

$$P(r) = r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k$$

ecuación característica

$$r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k = 0$$

Solución General

$$a_n = a_0 r^n \qquad a_0 \neq 0 \;\; \wedge \;\; r \neq 0$$

Continua en la parte B