UNIDAD I: VARIABLES. FUNCIONES.

Coordenadas cartesianas ortogonales y polares. Transformación (proyección). Funciones. Campo de definición de una función. Cotas. Clasificación de las funciones. Composición de funciones. Funciones monótonas. Funciones escalonadas.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- Las diferentes formas de representar un punto en un plano, mediante coordenadas.
- La definición de función.

Coordenadas

Una forma de indicar una dirección, cuando no sabemos la calle y el número exacto es decir, *“debes caminar 5 cuadras al Este y 2 cuadras al Sur”*.

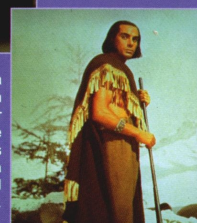
Otra forma de proporcionar una dirección es decir *“Camina medio kilómetro en esa dirección”*

Matemáticamente existen dos formas de dar una dirección, mediante coordenadas cartesianas o mediante coordenadas polares. En la primera, cada punto es determinada por dos números, en la segunda es determinada por una distancia y un ángulo.

¿Por qué no formar dos direcciones básicas, una tomada horizontalmente y la otra vertical (a partir de un punto central O, llamado origen) que se utilizasen como líneas de medición para situar en un plano, cualquier punto P deseado?

A cada punto del plano le corresponde, un par de números reales x e y, inversamente, a cada par de números reales le corresponde un punto y sólo uno. Los dos números escritos "(x,y)" se dicen las coordenadas del punto P, respectivamente la coordenada x y la coordenada y (llamadas abscisa y ordenada).

P
Ecuador
Q
Meridiano de
Greenwich



Mary y Robert, hijos del capitán Grant, reciben un día la visita del profesor Panagel, que ha encontrado en una botella un mensaje del capitán. Pronto organizarán una expedición para intentar rescatar a su padre. Se verán envueltos en una aventura llena de peligros inimaginables en la que tendrán que enfrentarse a crueles indígenas, traficantes de armas, peligros de la naturaleza… Basado en la conocida novela del escritor **Julio Verne**, LOS HIJOS DEL CAPITÁN GRANT, es una película llena de suspense, emoción y aventuras. ¡Que no falte en tu colección de películas de Walt Disney!

WALT DISNEY Presenta **Jules Verne's Fantasy Adventure**
"LOS HIJOS DEL CAPITÁN GRANT" (IN SEARCH OF THE CASTAWAYS)
Con **MAURICE CHEVALIER HAYLEY MILLS GEORGE SANDERS WILFRID HYDE-WHITE**
Productor Asociado **HUGH ATTWOOLL** Guión de **LOWELL S. HAWLEY**
Dirigido por **ROBERT STEVENSON**

CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DISPONIBLES

- **Acceso directo a escenas.**
- **Idiomas en 2.0 Mono:** Inglés y Español.
- **Subtítulos:** Inglés, Francés, Español, Sueco, Noruego, Danés, Finlandés, Portugués y Holandés. Inglés codificado para sordos.

Dolby and the DD symbol are trademarks of Dolby Laboratories Licensing Corporation.

DVD 9 4X3 1.33:1

Color: 109 Min. Aprox.
AUTORIZADA PARA TODOS LOS PÚBLICOS
Distribuida por Buena Vista Home Entertainment (TWDCI, S.L.)

Cert. Calificación ICAA Nº.: 16.277-II
Nº Depósito Legal: M-33906-03
Titular: Buena Vista Home Entertainment (TWDCI, S.L.)
Nacionalidad: Norteamericana

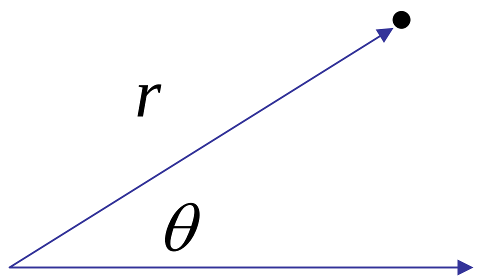
Visita www.disney.es

DVD 40365
8 422397 403653

Los Hijos del CAPITAN GRANT

Z5
40365

Las coordenadas polares



$$\left(r,\theta\right)$$

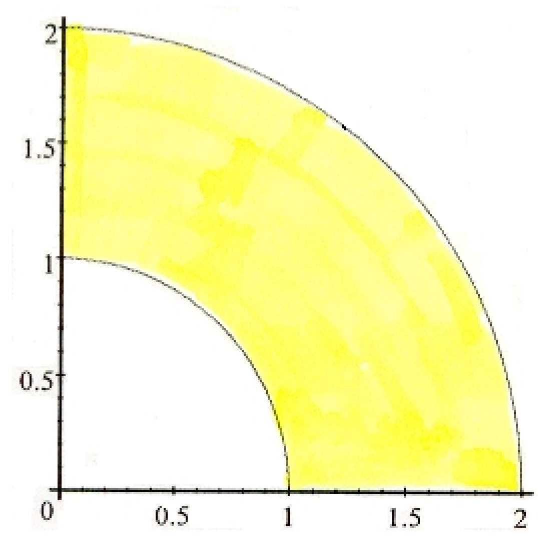
Determinan la posición de un punto.

Ciertas curvas son más fáciles de describir en coordenadas polares.

$r = a$ Circunferencia centrada en el origen

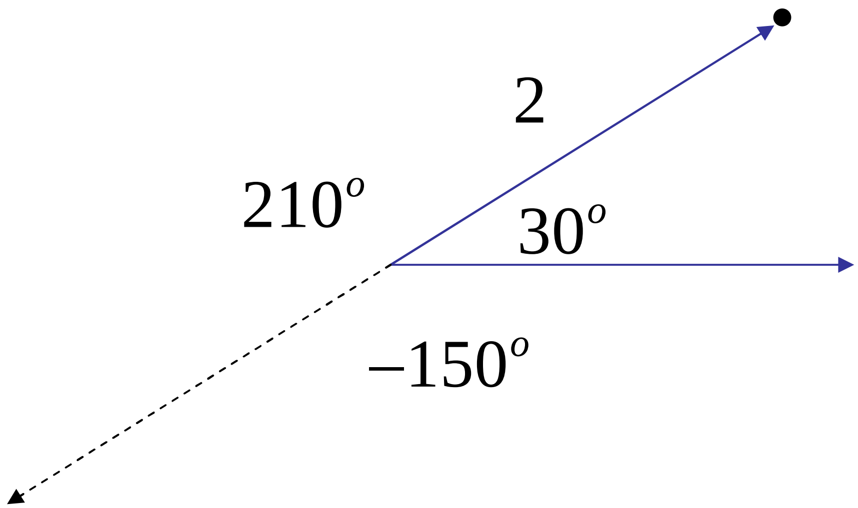
$\theta = \theta_o$ Recta que pasa por el origen

$1 \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



Sector Circular

Más de un par de coordenadas pueden referirse al mismo punto.



$$\left(2, 30^o\right)$$

$$= \left(-2, 210^o\right)$$

$$= \left(-2, -150^o\right)$$

Todas las coordenadas polares del punto son entonces:

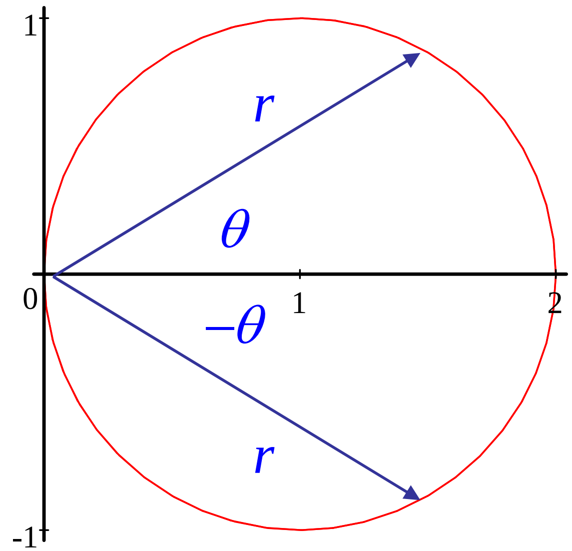
$$\left(2, 30^o + n \cdot 360^o\right)$$

$$\left(-2, -150^o + n \cdot 360^o\right) \qquad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots$$

Prueba para la Simetría:

Eje x: Si (r,θ) está en el gráfico, también lo está $(r,-\theta)$.

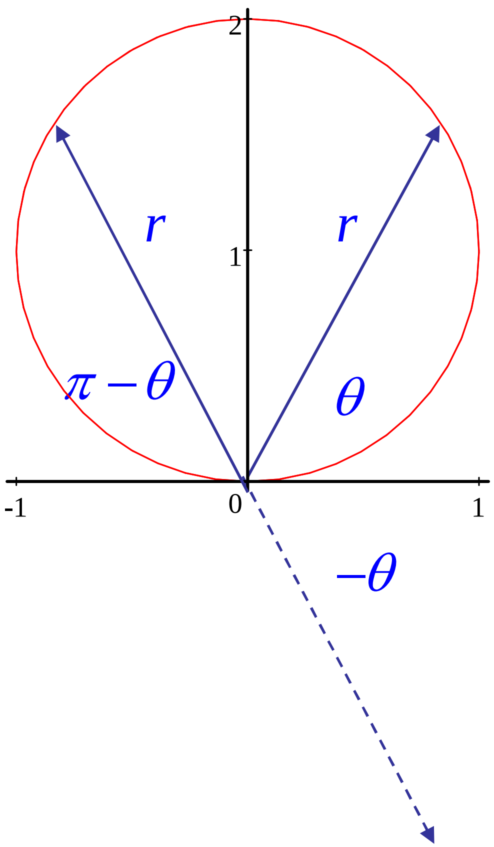
$$r = 2\cos\theta$$



Prueba para la Simetría:

Eje y: Si (r,θ) está en el gráfico, también está $(r,\pi-\theta)$ ó $(-r,-\theta)$.

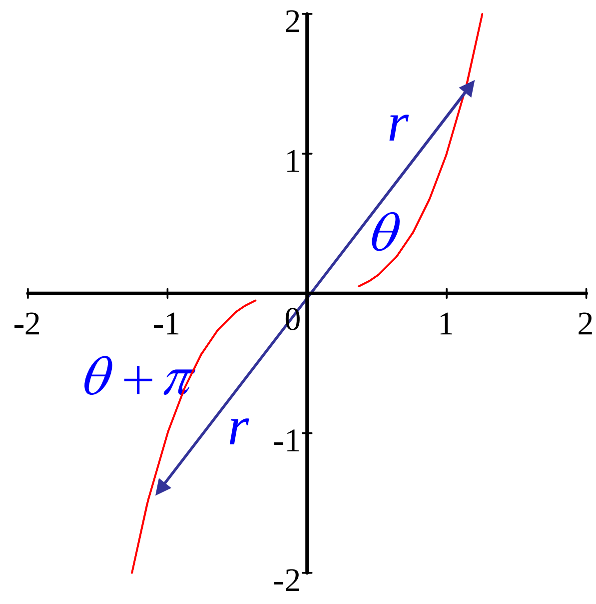
$$r = 2\sin\theta$$



Prueba para la Simetría:

Origen: Si (r,θ) está en el gráfico, entonces está (-r,θ) ó (r,θ+π)

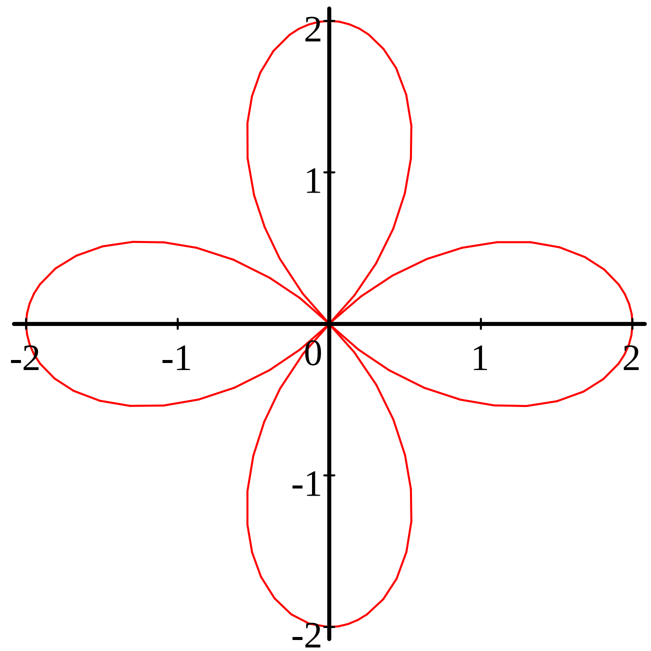
$$r = \pm\frac{\sqrt{\tan\theta}}{\cos\theta}$$



Prueba para la Simetría:

Si un gráfico posee dos simetrías, entonces posee las tres:

$$r = 2\cos(2\theta)$$



Funciones

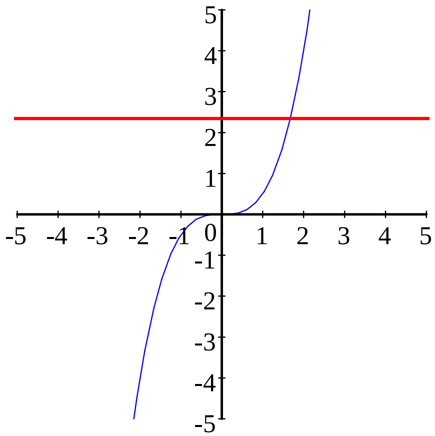
Una relación es una <u>función</u> si: para cada x existe un único valor de y.

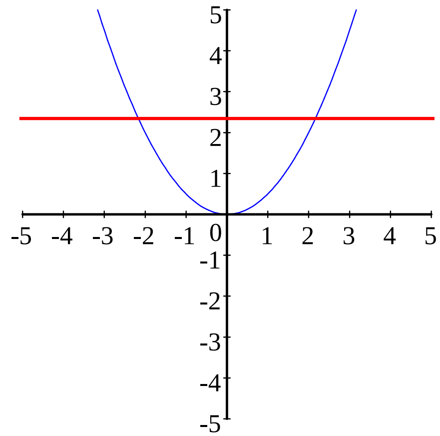
Una relación se dice uno-a-uno si también, para cada y, existe un único valor de x.

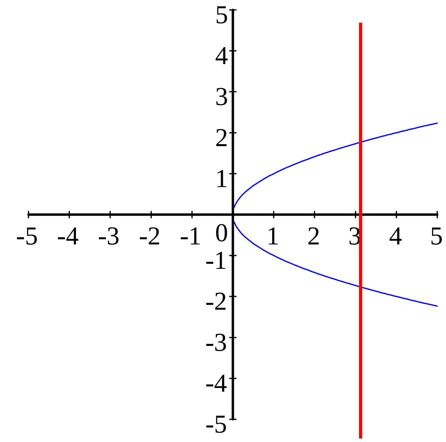
En otras palabras, una función es uno-a-uno sobre un dominio D, si:

$$f\left(a\right) \neq f\left(b\right) \quad \text{siendo} \quad a \neq b$$

Para ser una función uno-a-uno, su gráfico solo debe intersectar una recta horizontal y vertical en un único punto.







$$y = \frac{1}{2}x^3$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x = y^2$$

uno-a-uno

<u>no</u> es uno-a-uno

No es una función

(tampoco es uno-a-uno)

Sean dados dos conjuntos X e Y. Si a cada elemento $x \in X$ se le hace corresponder, por una cierta relación *uno y solamente un* elemento $y \in Y$, el cual denotaremos $y=f(x)$, entonces se dice que sobre el conjunto X está definida la *función* f. Al conjunto X se le llama *dominio* de definición de la función f y al conjunto de todos los $y \in Y$ para los cuales existe un $x \in X$, tal que $f(x)=y$ se le llama imagen de X por la función f o, simplemente, *imagen* de f. A la cantidad variable x se le llama *argumento o variable independiente* y a la cantidad y se le denomina *valor de la función en el punto x, variable dependiente de x o también imagen de x por f*. Al conjunto Y en el cual toma valores la función, se le llama frecuentemente *codominio* de la función f.

Se define como *gráfico* de la función $y=f(x)$ al conjunto de los puntos del plano cartesiando con las coordenadas $(x,f(x))$, donde $x \in Domf$.

Funciones compuestas

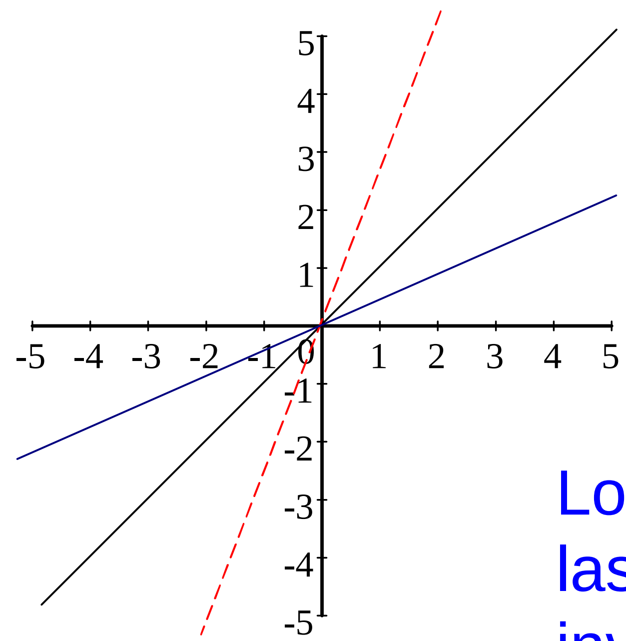
Sean $f:A \rightarrow R$ y $g:B \rightarrow R$ dos funciones reales tales que $Im\ f \subset Dom\ g$ entonces, a cada $x \in Dom\ f$ le hacemos corresponder de manera natural el número z tal que $z=g[y]$, donde $y=f(x)$. La función definida por la relación $z=g[f(x)]$ se le llama *función compuesta* o *superposición* de las funciones f y g, y se denota $z=(gof)(x)$.

Funciones inversas:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Dado un valor de x, podemos encontrar un valor de y.

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$



Despejando x:

$$y - 1 = \frac{1}{2}x$$

$$2y - 2 = x$$

$$x = 2y - 2$$

Los gráficos de las funciones inversas, son simétricos respecto a $y=x$.

Intercambiando x e y: $y = 2x - 2$ ⇒ $f^{-1}(x) = 2x - 2$

(la inversa de f)

Funciones elementales

$y=c$, c constante

$y=x^r$, r real

$y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$,

$y=\log_a x$, $a>0$

$y=\operatorname{sen} x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$

Cuando una función solo toma valores constantes, es decir, cuando toma diferentes valores sobre distintos subconjuntos de su dominio (intervalos), se dice que es una *función escalonada*.

Consideremos $f(x) = a^x$

Esta es una función inyectiva, por tanto, posee inversa.

La inversa es llamada la función logaritmo.

Ejemplo: $16 = 2^4$ $4 = \log_2 16$ O sea, 2 ¿a qué potencia es 16?

Las bases más comunes son 10: $\log_{10} x = \log x$

y e: $\log_e x = \ln x$

$y = \ln x$ es llamada la función logaritmo natural.

$y = \log x$ es llamada la función logaritmo común o decimal.

En el Calculus se usa casi exclusivamente el **logaritmo natural**.

$$y = \ln x.$$

$$y = \log x.$$

Propiedades de los logaritmos

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a a^x = x \qquad \left(a > 0\ ,\ a \neq 1\ , \quad x > 0\right)$$

Puesto que log y la exponenciación son funciones inversas, podemos hacer-deshacer, una a partir de la otra.

Regla del producto $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Regla del cociente $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

Regla de la potencia $\log_a x^y = y \log_a x$

Fórmula de cambio de base $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Ejemplo:

$1000 es invertido al 5.25 % de interés anual compuesto. ¿En qué tiempo tendré $2500?

$$1000(1.0525)^t = 2500$$

$$(1.0525)^t = 2.5$$

Usamos logaritmos cuando tenemos un exponente desconocido.

$$\ln(1.0525)^t = \ln 2.5$$

$$t\ln(1.0525) = \ln 2.5$$

$$t = \frac{\ln 2.5}{\ln(1.0525)} \approx 17.9$$

17.9 años

En la vida real, Ud. tendrá que esperar 18 años.

Ejemplo:

Producción de crudo de Indonesia (millones de barriles por año):

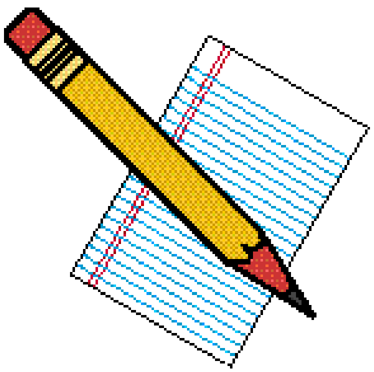
1960	20.56
1970	42.10
1990	70.10

Use el logaritmo natural, para estimar la producción de crudo en 1982 y en el 2000.

¿Como sabemos que una ecuación logarítmica es apropiada?

En la vida real,necesitamos más puntos o más experiencia.

Funciones Exponenciales



Recordemos, a veces los contenidos están en los libros, a veces no, es necesario tomar notas de lo más trascendente.

El Crecimiento de la Población puede ser modelado con una función exponencial:

Población Mundial

1986	4936 millones
1987	5023
1988	5111
1989	5201
1990	5329
1991	5422

Razón:

$$5023 \div 4936 \approx 1.0176$$
$$5111 \div 5023 \approx 1.0175$$
$$1.0176$$
$$1.0246$$
$$1.0175$$

La población mundial en cualquier año, es 1.018 veces (aproximadamente) la del año anterior.

Años desde 1991.

en el 2010: $$P = 5422 \cdot (1.018)^{19} \approx 7609.7$$

Sobre 7.6 billones de personas

El <u>Decrecimiento Radioactivo</u> también puede ser modelado con una función exponencial.

Suponga que comienza a trabajar con 5 gramos de una sustancia radioactiva, que posee una vida media de 20 días. ¿Cuándo tendremos solo un gramo?

Después de 20 días: $$5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

40 días: $$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

t días: $$y = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

Para determinar t, usaremos logaritmo.

$$\ln y = \ln 5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$ por propiedades $$\ln y = \ln 5 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

De donde $$\ln\frac{y}{5} = \frac{t}{20}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$ buscamos t, cuando y=1, luego:

$$\boxed{t = 20\frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 46.4385619}$$

Por lo que a los 46 días, 10 horas, 31 minutos, 31 segundos y 7479 diezmilésimas, tendremos un gramo de la cantidad original.

Crecimiento Exponencial

El número de cabras en una manada, crece en una razón que es proporcional al número de ellas en cada momento.

Así se comporta cualquier población de criaturas vivas. No obstante, las sustancias radioactivas y los depósitos bancarios bajo interés, también crecen o decrecen en una razón proporcional a la cantidad en un tiempo dado.

Si la razón de cambio es proporcional a la cantidad presente, el cambio puede ser modelado por la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Ley de Crecimiento Exponencial $y = y_0 e^{kt}$

y_0 es la población original. Si la constante k es positiva entonces la población crece y si k es negativa entonces la población decrece.

Existen innumerables y excelentes ejemplos en la bibliografía indicada, lo que hace innecesario presentarlos aquí.

Interés Compuesto Continuo

Si un capital es invertido con interés compuesto, donde la capitalización se realiza k veces en el año, el monto obtenido después de t años es:

$$A(t) = A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Si la capitalización se realiza más ffrecuentemente, es claro que se obtendrá un monto mayor.

Lo mejor que puede pasar, es que la capitalización sea continua.

Por supuesto, el banco no emplea esta capitalización, pues el cálculo de intereses debe hacerlo de manera continua y no hay equipamiento capaz de hacerlo.

Se demuestra que $$\lim_{k \to \infty} A_0 \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

es el mayor monto posible y se llama *Monto Máximo.*

El interés es proporcional al capital en un momento dado, lo que transforma la ley en:

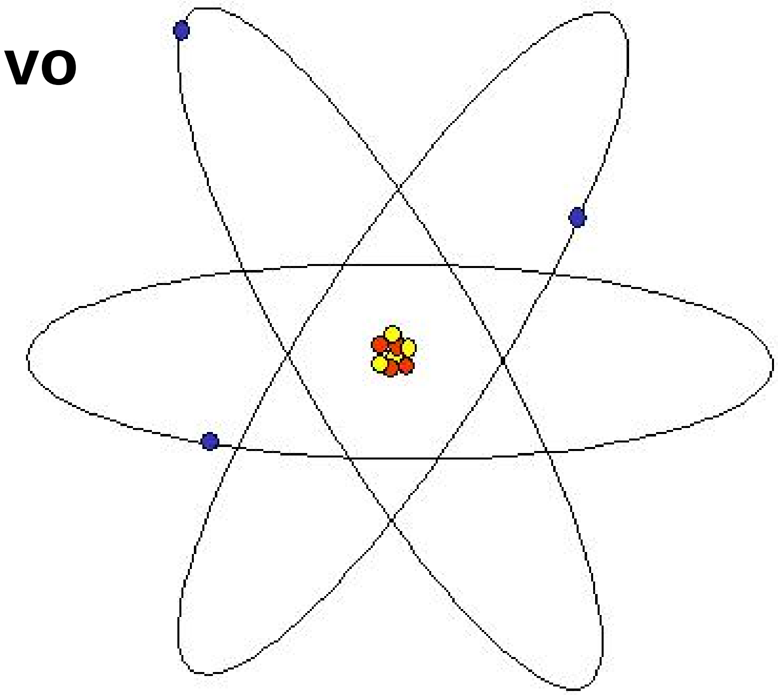
$$\boxed{A = A_0 e^{rt}}$$

También se escribe:

$$M = A_0 e^{rt}$$

que es la misma cosa.

Decrecimiento Radioactivo



La expresión para la cantidad de un elemento radioactivo, después de un tiempo t es:

$$y = y_0 e^{-kt}$$

Para que esto ilustre el decrecimiento, la constante k, debe ser positiva.

Como dijimos, la vida media es el tiempo requerido para que se desintegre la mitad del elemento.

Vida Media

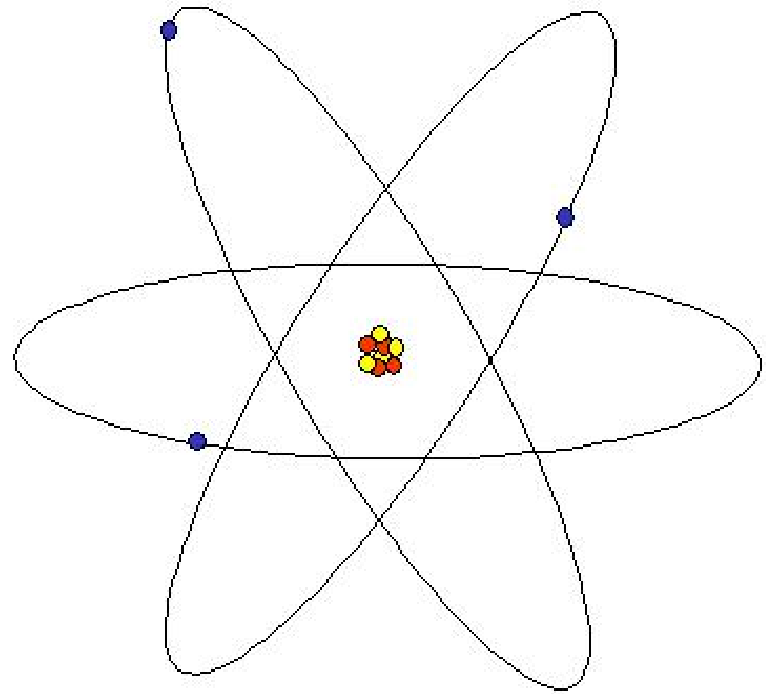
$$\frac{1}{2}\cancel{y_0} = \cancel{y_0}e^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-kt}\right)$$

$$\overbrace{\ln 1}^{0} - \ln 2 = -kt$$

$$\ln 2 = kt$$

$$\frac{\ln 2}{k} = t$$



Vida Media

$$VM = \frac{\ln 2}{k}$$

Ley de Enfriamiento de Newton

Un cortado en una taza, se enfría a la temperatura ambiente. La razón de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura del líquido y el aire.

(asumamos que la temperatura del aire es constante)

Así tenemos la ecuación: $$\frac{dT}{dt} = -k\left[T - T_s\right]$$

Y obtenemos:

Ley de Enfriamiento de Newton

$$T - T_s = \left[T_0 - T_s\right]e^{-kt}$$

donde T_s es la temperatura ambiente, tomada constante.

Funciones Hiperbólicas

Consideremos las siguientes dos funciones:

$$y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad\qquad y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Estas funciones aparecen frecuentemente, por lo que se hizo necesario darles nombres.

El comportamiento de estas funciones tiene similitud con el de las funciones trigonométricas, por lo que ellas han recibido nombres similares.

Seno Hiperbólico: $$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Coseno Hiperbólico: $$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Tangente Hiperbólica: $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente Hiperbólica: $$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Secante Hiperbólica: $$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Cosecante Hiperbólica: $$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Por supuesto, si tenemos funciones semejantes a las trigonométricas, también tendremos identidades semejantes a las trigonométricas.

Primero, una fácil:

$$\sinh(x)+\cosh(x)=e^x$$

$$\sinh(x)+\cosh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}e^x}{\cancel{2}}$$

$$=e^x$$

$$\sinh(x)+\cosh(x)=e^x$$

Debemos destacar, que ésta no tiene ninguna analogía en las identidades trigonométricas.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}}{4} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

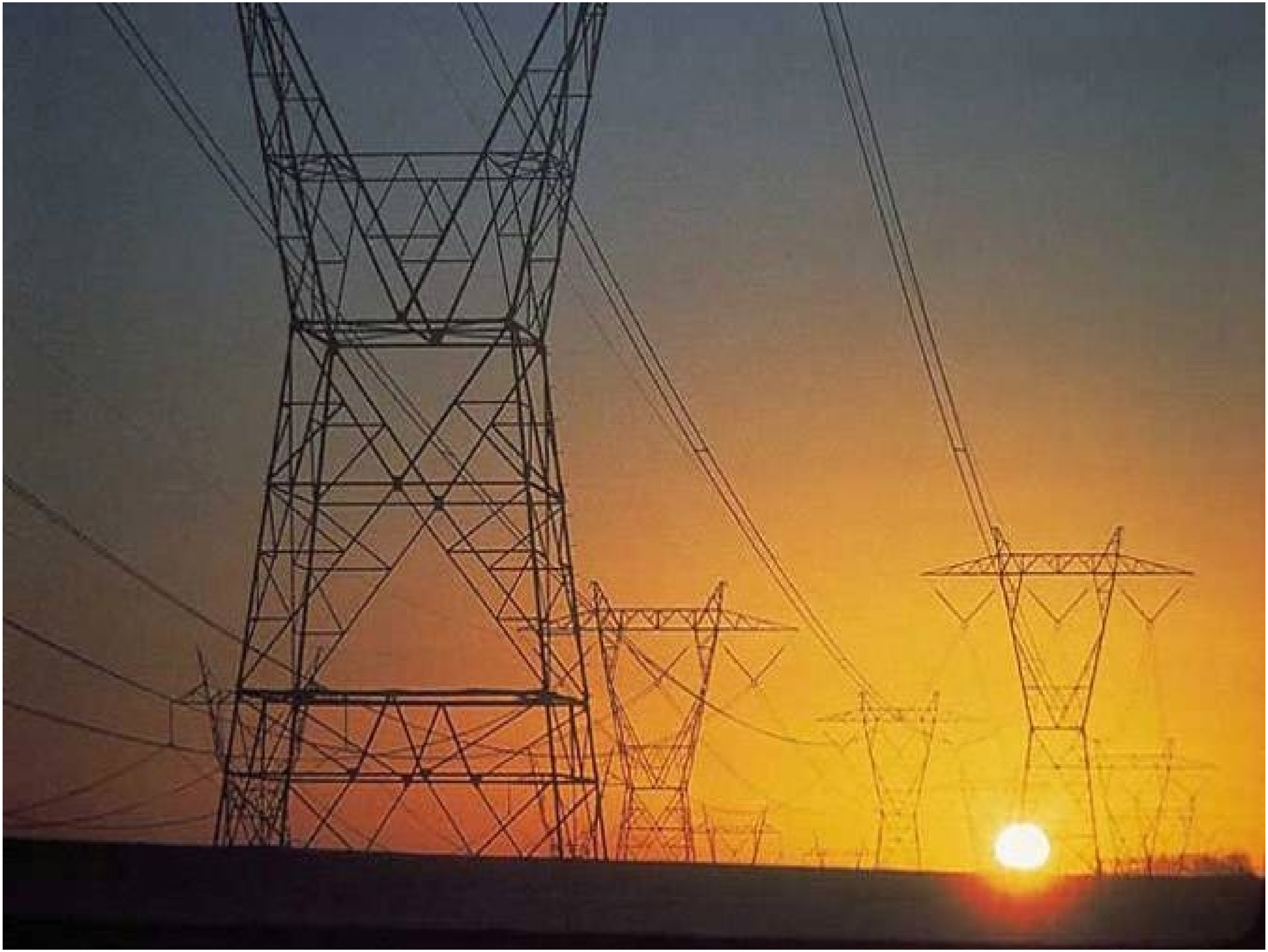
$$1 = 1$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

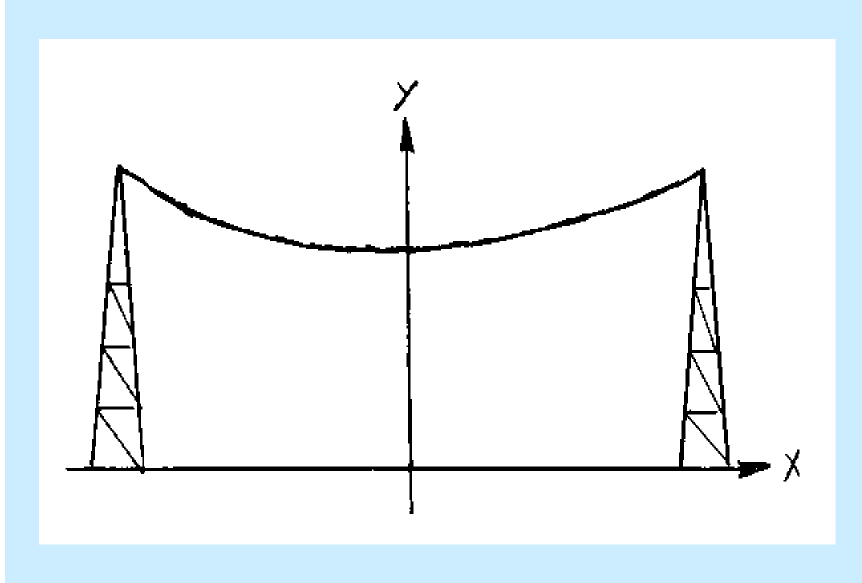
Notemos que es similar, pero no es lo mismo que:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Applicaciones de las Funciones Hiperbólicas



Un cable colgante toma una forma llamada una catenaria.



Parece una parábola, pero no lo es!!!!

$$y = b + a\ \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$ (para cierta constante *a*)

Otro ejemplo de catenaria es el Gateway Arch en St. Louis, Missouri.

$$Y = A\left(\cosh\frac{X}{L}C - 1\right)$$

$$X = \frac{L}{C}\left[\cosh^{-1}\left(1 + \frac{Y}{A}\right)\right]$$

$$Where,\ A = \frac{fc}{\frac{Q_b}{Q_t} - 1} = 68.7672$$

$$C = \cosh^{-1}\frac{Q_b}{Q_t} = 3.0022$$

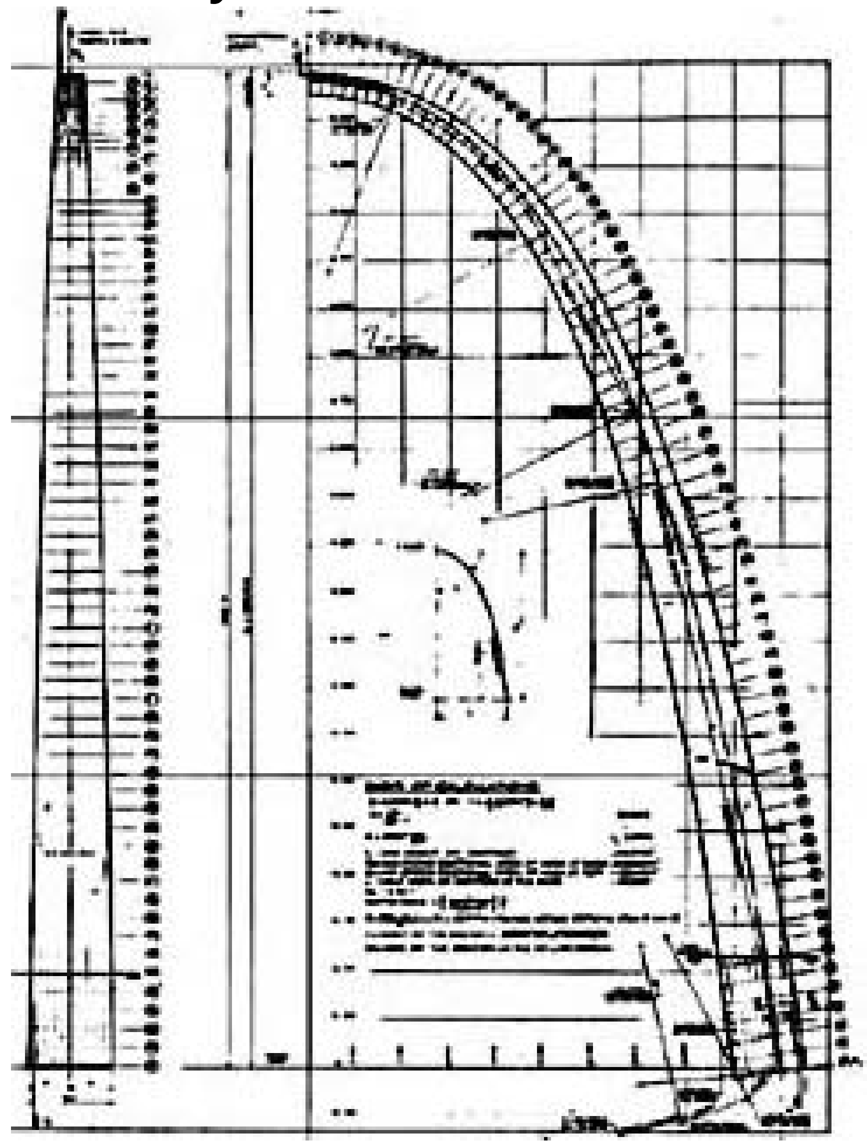
fc = Max. Ht. of Centroid = 625.0925

Q_b = Max. X-Sec. @ Arch Base = 1262.6651

Q_t = Min. X-Sec. @ Arch Top = 125.1406

L = Half of Centroid @ Arch Base = 299.2239

Otro ejemplo de catenaria es el Gateway Arch en St. Louis, Missouri.



$$Y = A\left(\cosh\frac{X}{L}C - 1\right)$$

$$X = \frac{L}{C}\left[\cosh^{-1}\left(1 + \frac{Y}{A}\right)\right]$$

$$Where,\ A = \frac{fc}{\frac{Q_b}{Q_t} - 1} = 68.7672$$

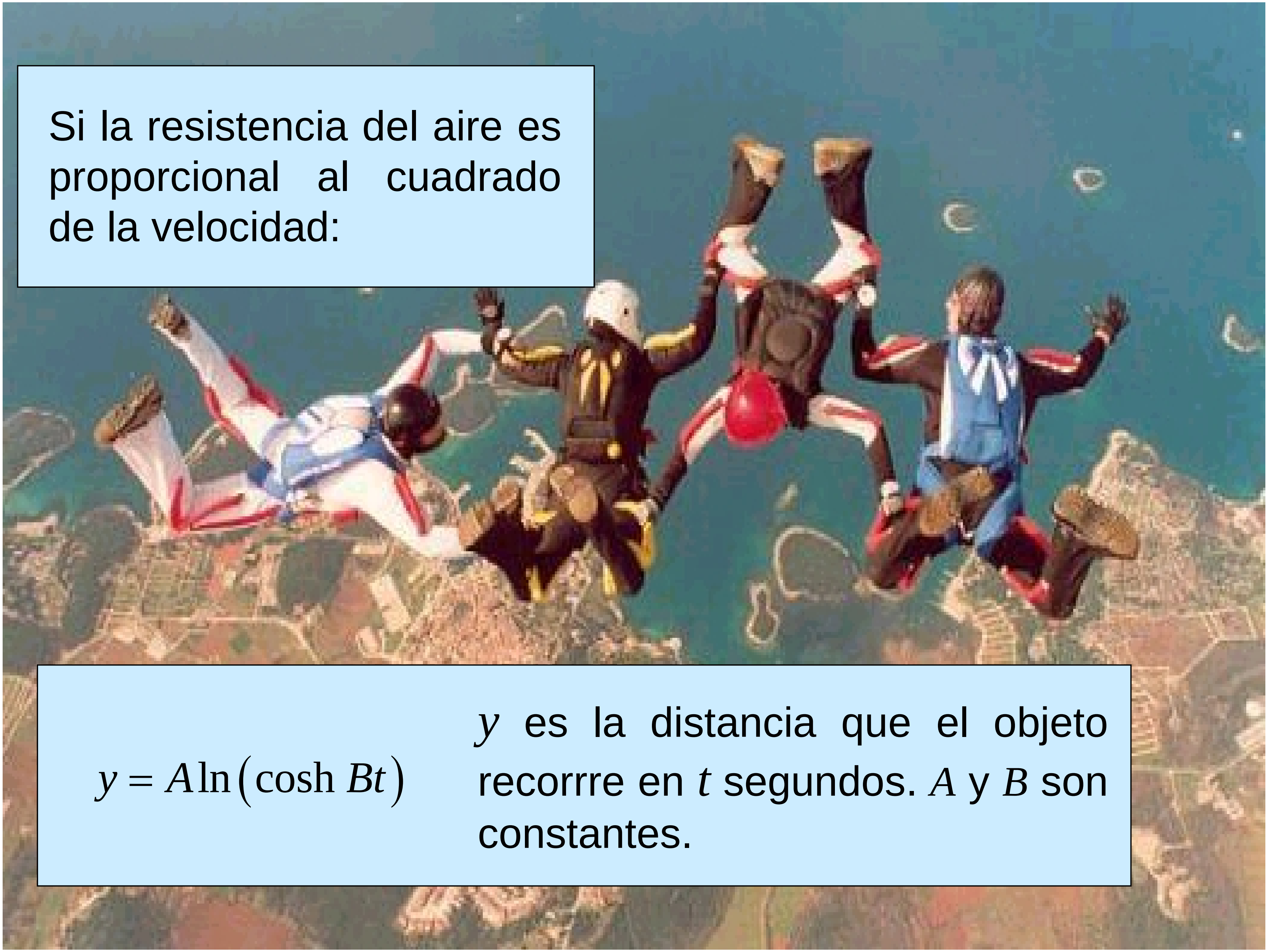
$$C = \cosh^{-1}\frac{Q_b}{Q_t} = 3.0022$$

fc = Max. Ht. of Centroid = 625.0925

Q_b = Max. X-Sec. @ Arch Base = 1262.6651

Q_t = Min. X-Sec. @ Arch Top = 125.1406

L = Half of Centroid @ Arch Base = 299.2239



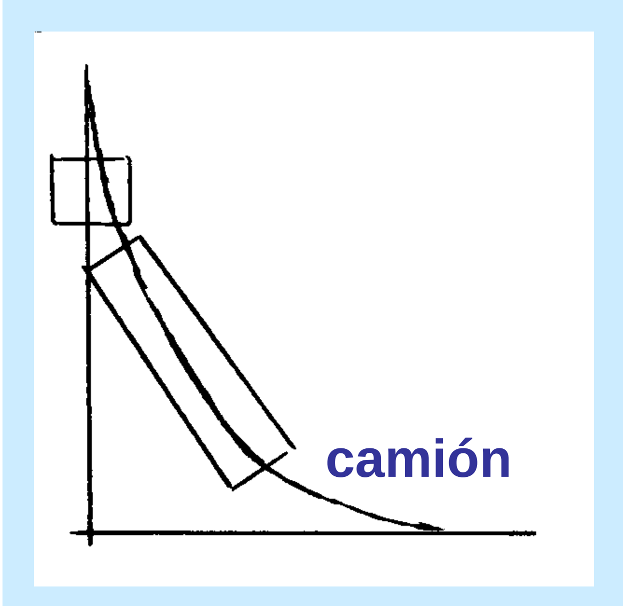
Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad:

$$y = A\ln(\cosh Bt)$$

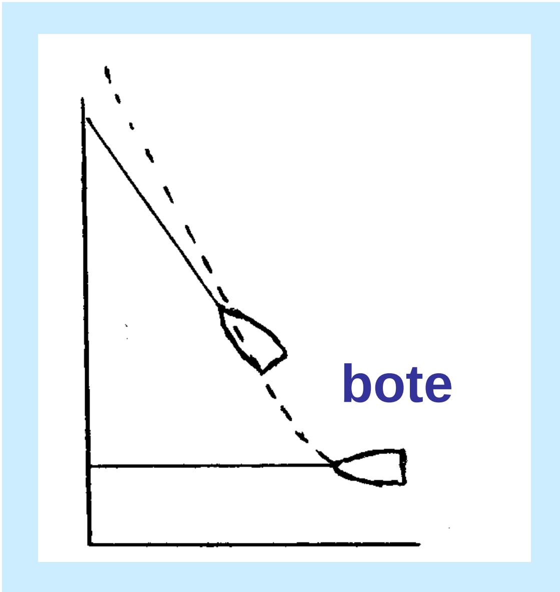
y es la distancia que el objeto recorrre en t segundos. A y B son constantes.

Una tercera aplicación es la <u>tractrix</u> (curva de persecución).

Un ejemplo de la vida real, modelado por una tractrix, es un camión con acoplado al doblar una esquina.



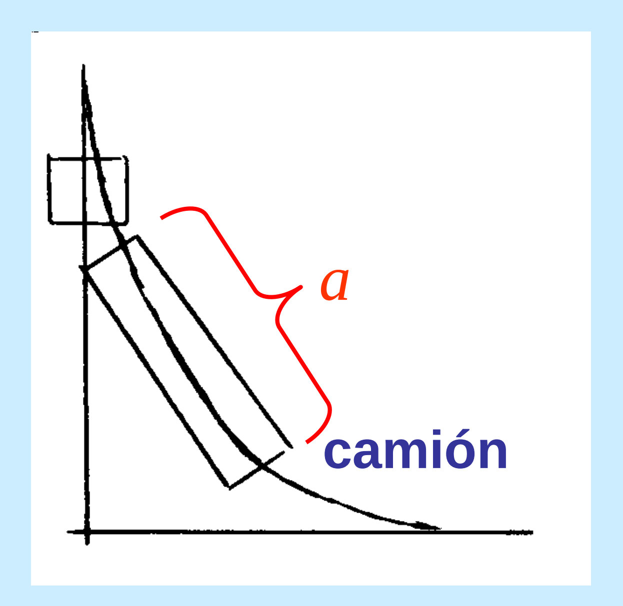
Otro ejemplo es un bote, sostenido con una cuerda, por una persona que se desplaza en la orilla.

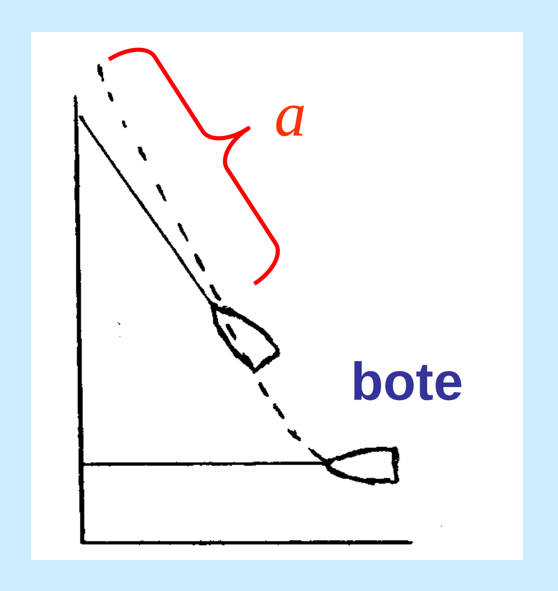


Una tercera aplicación es la tractrix (curva de persecución).

Ambas situaciones (y otras, por supuesto) pueden ser modeladas por:

$$y = a\ \mathrm{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$





El término tractrix viene del latín *tractus*, que significa *“para drenar, tirar o remolcar”*. Nuestro familiar “tractor” viene de la misma raíz.

Otros ejemplos de una curva tractriz, es la trayectoria de un misil que persigue un avión, y la de un corredor que se desplaza por la vereda y debe cambiar su rumbo.

Funciones Monótonas

Si para dos valores $x_1<x_2$ del dominio de la función f, se cumple que $f(x_1)<f(x_2)$, se dice que la función es *monótona creciente en sentido estricto*, si $f(x_1)\leq f(x_2)$ se dice que es *monótona creciente en sentido amplio*. Si la conclusión es $f(x_1)>f(x_2)$ se dice entonces que es *monótona decreciente en sentido estricto*, si se tiene $f(x_1)\geq f(x_2)$ se dirá entonces que es *monótona decreciente en sentido amplio*.

Es claro que si una función es monótona, entonces es uno a uno, o sea, inyectiva.

Una función se dice *acotada superiormente*, si existe una constante K, tal que f(x)<K, para todo valor del dominio, será *acotada inferiormente* si existe una constante k, tal que k<f(x), para todo valor de su dominio. Una función es *acotada* cuando es acotada superior e inferiormente, es decir, cuando existen constantes k y K, tal que k<f(x)<K, para todo elemento del dominio de la función. Los números k y K son llamados *cotas de la función*, *inferior* y *superior*, respectivamente. Es claro que si existe una cota, entonces existen infinitas. A la menor de las cotas superiores se le denomina *supremo* de la función, a la mayor de las cotas inferiores se le llama *ínfimo* de la función. En caso que la función alcance su supremo, este se llamará *máximo*, análogamente, si alcanza su ínfimo, se llamará *mínimo*.