ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 6:
CONCEPTOS BÁSICOS DE ALGEBRA LINEAL

Prof. Itatí Sosa

Espacios Vectoriales: Definición

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ consiste en un conjunto $\mathbb{V}$ (cuyos elementos se denominan "vectores") provisto de dos operaciones, una de ellas interna, que se llamara *suma de vectores* (indicada con $x+y$, para $x \in \mathbb{V}, y \in \mathbb{V}$) y otra externa que es el producto de elementos de $\mathbb{K}$ por elementos de $\mathbb{V}$ (indicado $a.x$ para $a \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{V}$); diremos que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial si y solo si se cumplen los siguientes axiomas:

- Sean $x, y, z \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{K}$, entonces:

V1) $x + y \in \mathbb{V}$
V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
V3) $x + y = y + x$
V4) Existe un elemento $\theta \in \mathbb{V} / \theta + x = x$
V5) $\forall x \in \mathbb{V}$, existe un $x' \in \mathbb{V}$ que verifica $x + x' = \theta$
V6) $a.x \in \mathbb{V}$
V7) $a.(b.x) = (a.b).x$
V8) $(a + b).x = a.x + b.x$
V9) $a.(x + y) = a.x + a.y$
V10) $1.x = x$, con 1 se denota al neutro para el producto en $\mathbb{K}$

- Decimos, entonces, que $(\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, .)$ es un espacio vectorial

Ejemplos:

- Sea $n \geq 1$ e indicamos con $\mathbb{K}^n$ al conjunto de todas las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$. Si defimos:

$+: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n / (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$.: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n / \quad \alpha.x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$(\mathbb{K}^n, +, \mathbb{K}, .)$ es un espacio vectorial.

Veamos que , para $n = 1$, $(\mathbb{K}, +, \mathbb{K}, .)$ es un espacio vectorial.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, con

$+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$.: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \quad \alpha.x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

$(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, .)$ es un espacio vectorial.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$, con la suma usual entre polinomios y el producto por un número real usual

$(\mathbb{R}[x], +, \mathbb{R}, .)$ es un espacio vectorial.

PROPIEDADES

1. El vector θ cuya existencia asegura V3, se denomina **vector nulo.** Este vector *es único*.
2. El vector x' de V4 *es único* y se lo llama el vector opuesto de x, y se lo designa con $-x$.
3. Si 0 es el cero de $\mathbb{K}$, $0.x = \theta, \forall x \in \mathbb{V}$.
4. Análogamente $a.\theta = \theta, \forall a \in \mathbb{K}$.
5. $(-1).x = -x$.
6. Si $a.x = \theta \Leftrightarrow a = 0 \vee x = \theta$.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman los **escalares**.

SUBESPACIOS DE UN ESPACIO VECTORIAL

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un subconjunto $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ se llamará un *subespacio de* $\mathbb{V}$

S'1) $\mathbb{S} \neq \emptyset$

S'2) $\mathbb{S}$ es un espacio vectorial para las operaciones de $\mathbb{V}$ restringidas a $\mathbb{S}$.

Ejemplos:

$\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

El subconjunto $\{\theta\}$ de $\mathbb{V}$, es un subespacio de $\mathbb{V}$.

PROPOSICIÓN

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

b) $\mathbb{S}$ verifica las condiciones:

S1) $\theta \in \mathbb{S}$

S2) $x \in \mathbb{S}, y \in \mathbb{S} \Rightarrow x + y \in \mathbb{S}$

S3) $x \in \mathbb{S}, a \in \mathbb{K} \Rightarrow a.x \in \mathbb{S}$.

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son vectores en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares , el vector

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_n.x_n$$

Se llama combinación lineal de los vectores $x_i (1 \leq i \leq n)$, con coeficientes $a_i (1 \leq i \leq n)$

Consideremos M un subconjunto no vacío de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$, para cada conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ de elementos de M y cada conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ de escalares formamos la combinación lineal:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i.x_i$$

Indicamos con $\overline{M}$ al conjunto de todas esas combinaciones lineales.

Si M es vacío, $\overline{\emptyset} = \{\theta\}$

Propiedad: $M \subset \overline{M}$ y $\overline{M}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$

Definición: Si M es un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el subespacio $\overline{M}$ se denomina la *cápsula lineal* de M, o el *subespacio generado* por M

Si $\boldsymbol{S}$ es un subconjunto de $\mathbb{V}$, diremos que un subconjunto $M \subset \boldsymbol{S}$ **genera a $\boldsymbol{S}$** (o es un conjunto de generadores de $\boldsymbol{S}$) si $\boldsymbol{S} = \overline{M}$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $x_1, x_2, \dots, x_r$ vectores de $\mathbb{V}$; diremos que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es **linealmente dependiente** (o también que los vectores $x_1, x_2, \dots, x_r$ son linealmente dependientes) si existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_r$ *no todos nulos* tales que:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i . x_i = \theta$$

Ejemplos: El conjunto $\{(1,-2), (-1,2), (3,0)\}$

Todo conjunto que tenga como elemento al vector nulo es linealmente dependiente.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $x_1, x_2, \dots, x_r$ vectores de $\mathbb{V}$; diremos que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es **linealmente independiente** (o también que los vectores $x_1, x_2, \dots, x_r$ son linealmente dependientes) si no son linealmente dependientes, o sea si la única forma de expresar θ como combinación lineal de los x_i es que todos los escalares sean *nulos*, es decir:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i . x_i = \theta \Rightarrow a_1 = \dots = a_r = 0$$

Ejemplos: El conjunto $\{(1,1), (3,0)\}$

Observaciones:

- Si el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es linealmente independiente entonces los x_i son todos distintos.
- Si el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es linealmente independiente, cualquier subconjunto también es linealmente independiente.
- Si el conjunto $\{x\}$ de un solo vector es linealmente independiente, ello significa que $x \neq \theta$

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

- Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un conjunto de vectores $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se dirá una base de $\mathbb{V}$ si verifica:

  B1) M genera a $\mathbb{V}$

  B2) M es linealmene independiente

- Ejemplo: Llamando $e_1 = (1{,}0)$, $e_2 = (0{,}1)$, el conjunto $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$

PROPIEDADES

1. $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ si y solo si todo vector x de $\mathbb{V}$ se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de M

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . x_i \,,$$

   los escalares α_i se denominan *componentes* de x en la base M.

2. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ genera $\mathbb{V}$ y $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es linealmente independiente, entonces $r \leq m$.
3. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ y $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ son bases de $\mathbb{V}$, entonces $r = m$

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

- **Definición:** Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial, llamaremos dimensión de $\mathbb{V}$ y lo indicamos $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ al número de elementos de una base de $\mathbb{V}$ (o bien $dim(\mathbb{V})$ si no hay confusión).

Si $\mathbb{V}$ se reduce al subespacio $\overline{\emptyset}$, convendremos que $dim(\overline{\emptyset}) = 0$

Observaciones:

1. $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n.$
2. Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ cualquier conjunto de generadores de $\mathbb{V}$ tiene por lo menos n elementos.
3. Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ cualquier conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$ tiene a lo más n elementos.
4. Si $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$, son equivalentes:
   a) El conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$.
   b) El conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente.
   c) El conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ genera a $\mathbb{V}$.

PRODUCTO INTERNO

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real, y considérese una aplicación que a cada par de vectores, $x, y \in \mathbb{V}$ le asigna un número real, que se denotará $x \cdot y$. Se dice que una tal aplicación

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \to x \cdot y$$

es un producto escalar, o un producto interno, si para cualesquiera sean $x, x', y \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ se verifica que:

1. $x \cdot y = y \cdot x$
2. $(\alpha x + \alpha' x') \cdot y = \alpha x \cdot y + \alpha' x' \cdot y$
3. $x \cdot x \geq 0$ para todo $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

Se llama espacio vectorial euclídeo a todo espacio vectorial real dotado de un producto escalar.

- **Ejemplo:**
- En $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, .)$, la función

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} / x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

es un producto interior, llamado producto interior usual en $\mathbb{R}^n$.

Definición: Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real con producto interior $\cdot$, llamaremos *longitud o norma* del vector $x \in \mathbb{V}$ al escalar $\|x\| = +\sqrt{x \cdot x}$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Definición: Sean x e y dos vectores no nulos de un espacio vectorial real con producto interior .Ángulo entre los vectores x e y es el número real φ que satisface:

1. $0 \leq \varphi \leq \pi$
2. $\cos\varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| . \|y\|}$

De la relación 2., se deduce la siguiente expresión del producto interior en función del ángulo entre los vectores y las normas de estos.

$$x \cdot y = \|x\| . \|y\| \cos\varphi$$

PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO DE VECTORES EN EL ESPACIO

- Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial con producto interior de dimensión 3, llamaremos producto vectorial en $\mathbb{V}$ a la operación asociada a cada par de vectores $x, y \in \mathbb{V}$ el vector $x \times y$, unívocamente determinado por las condiciones:
- PV1) $x \cdot (x \times y) = y \cdot (x \times y) = 0$
- PV2) $\|x \times y\| = \|x\| . \|y\| . \operatorname{sen}\varphi$ (φ el ángulo entre x e y)
- PV3) Si x e y son independientes, la orientación dada por la base $\{x, y, x \times y\}$ es la orientación de $\mathbb{V}$.

OBSERVACIONES:

1. Si x e y son dependientes, es $x \times y = \theta$, pues $\|x \times y\| = 0$, ya que en PV2) será $\|x\| = 0$ o $\|y\| = 0$ o bien $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$.
2. De PV2) resulta $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2.\|y\|^2.(1 - \cos^2 \varphi) = \|x\|^2.\|y\|^2 - (x \cdot y)^2$, de modo que $x \times y = \theta$ equivale a x e y son linealmente dependientes.

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES:

Definición: El producto mixto de tres vectores es un escalar, que se obtiene haciendo el producto escalar de un vector por el producto vectorial de los otros dos vectores, $u \cdot (v \times w)$. Y cumple que:

$|u \cdot (v \times w)| = \|u\|.\|v \times w\|.\cos\alpha = \|u\|.\|v\|.\|w\|.\sin\beta.\cos\alpha$

ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

- Consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si $x \neq \theta$, indicamos con α_i a la medida del ángulo entre x y e_i. Así:

$$\cos\alpha_i = \frac{x \cdot e_i}{\|x\|.\|e_i\|} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

Los coseno: $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$ y $\cos\alpha_3$ son los *cosenos directores* del vector x.

Los ángulos α_1, α_2 y α_3 son los ángulos directores del vector x.

Propiedad: La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector de un espacio vectorial real es 1