UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE CIENCAS EXACTAS, NATURALES Y AGRIMENSURA

LOGICA PROPOSICIONAL

Algebra (Para Agrimensura)
Ciclo lectivo 2010

Esp. Prof. Liliana N. Caputo
Paula Daniela Bordón

TEMA 1

<u>Definición de proposición</u>: Se llama proposición a toda oración declarativa, de la cual se puede determinar inequívocamente su valor de verdad: verdadera o falsa

Para simbolizar **proposiciones simples,** tales como las siguientes:

- La Luna es un planeta.
- La nieve es blanca.
- 12 es un número impar.
- 4 es un cuadrado perfecto.

utilizaremos letras minúsculas. Las letras más usadas para denotar a las proposiciones simples (también llamadas **fórmulas atómicas**) son: **p, q, r, s, ...**
Entonces, para decir que p, q, r y s representan a cada una de las proposiciones dadas arriba, escribimos:

p: La Luna es un planeta.
q: La nieve es blanca.
r: 12 es un número impar.
s: 4 es un cuadrado perfecto.

Las proposiciones simples pueden ser combinadas entre sí mediante los denominados **conectivos lógicos** y que son:

$\wedge$: y; $\vee$**:** o; $\Rightarrow$: Si..., entonces, ...; $\Leftrightarrow$: ... si, y sólo si...; **-**: no; $\underline{\vee}$: ó.

<u>Ejemplos</u>:

- "La Luna es un planeta y la nieve es blanca", se denota: $\mathbf{p \wedge q}$**.**
- "La Luna es un planeta o la nieve es blanca" se simboliza: $\mathbf{p \vee q}$**.**
- "Si 12 es un número impar, entonces, 4 es un cuadrado perfecto", en cambio se denota $\mathbf{r \Rightarrow s}$**.** Aunque también puede leerse de cualquiera de las maneras siguientes: "r implica s", "s, si r", "Si r, s", "r es suficiente para s", "r sólo si s", "s es necesario para r".
- "4 es un cuadrado perfecto si, y sólo si, 12 es un número impar", se representa mediante $\mathbf{s \Leftrightarrow r}$, y también suele decirse: "s es equivalente a r" o "s es condición necesaria y suficiente para r".
- "12 es un número par" o, lo que es lo mismo, "12 no es un número impar" se simbolizan con **–r** y constituye lo que se denomina **la negación de r.**

Al combinar proposiciones simples utilizando conectivos, obtenemos **proposiciones compuestas**.

Muchas veces, al trabajar con proposiciones compuestas, se hace necesario utilizar **paréntesis** y **corchetes** para interpretar correctamente cuál es el orden en que se están utilizando los conectivos lógicos. Por ejemplo, si escribimos: $\mathbf{p \vee q \wedge r}$**,** no queda claro si se pretende relacionar es $p \vee q$ con r ó, por el contrario, p con $q \wedge r$. Para evitar tal ambigüedad, se escribe $\mathbf{(p \vee q) \wedge r}$ ó $\mathbf{p \vee (q \wedge r)}$, respectivamente.

Dada una proposición compuesta, por ejemplo “La Luna es un planeta y la nieve es blanca”, se plantea el interrogante: ¿cuál es su valor de verdad, ya que una es verdadera y la otra es falsa? O lo que es lo mismo ¿es verdadera ó falsa?. Para hallar el **valor de verdad** de una proposición compuesta (esto es, para decidir si es verdadera ó falsa), se usa el hecho de que cada conectivo lógico de los que hemos estudiado define una **operación lógica** y las correspondientes definiciones de dichas operaciones.

Para definir las operaciones lógicas se utilizan las denominadas **tablas de verdad.** En ellas se vuelcan todos los valores de verdad que pueden admitir las proposiciones simples que conforman la proposición compuesta a definir.

Comencemos definiendo la **negación** de una proposición simple p.

La **negación** de una proposición simple p, se simboliza con **–p,** y afirma lo contrario a aquello afirmado por p. En consecuencia, si una proposición es verdadera, su negación es falsa y vicerversa.

Para construir su tabla de verdad, debe tenerse en cuenta que p tiene sólo dos valores de verdad posibles: verdadera ó falsa. Luego, la tabla de verdad de la negación sólo tiene dos filas y dos columnas, y es la siguiente:

p	-p
V	F
F	V

En cambio:

Se llama **conjunción**, a toda proposición compuesta que es verdadera sólo si todas las proposiciones simples que la constituyen son verdaderas, y falsa en cualquier otro caso.

Para construir su tabla de verdad, debemos tener en cuenta que las posibilidades son ahora: que p y q sean verdaderas, que p sea verdadera y q sea falsa, que p sea falsa y q verdadera, o que ambas sean falsas. En consecuencia, la tabla de verdad de la conjunción es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por otra parte, definimos:

La **disyunción lógica** es una proposición compuesta que es falsa sólo cuando todas las proposiciones simples que la forman lo son, y verdadera en todo otro caso.

Su tabla de verdad (se han hecho para construirla las mismas consideraciones que en la tabla de verdad de la conjunción) es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definiremos ahora, la operación lógica **implicación** o **condicional.** Una implicación se simboliza **p ⇒ q**. Esta operación puede interpretarse como que q es una consecuencia de p, de allí que en ella, p se denomina **antecedente** y q **consecuente**. Esta operación se define como sigue:

La **implicación** es una operación compuesta que únicamente es falsa cuando el **antecedente** es verdadero y el **consecuente** es falso. En todo otro caso es verdadera.

En consecuencia, su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observando la tabla, puede verse que cualquier implicación cuyo antecedente es falso resulta verdadera, y que cualquier implicación cuyo consecuente es verdadero es verdadera.

Definamos a continuación la **doble implicación** o **bicondicional**, como sigue:

La doble implicación es una proposición compuesta que se simboliza con **p ⇔ q**, cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Podemos observar, que la doble implicación es verdadera cuando las dos proposiciones simples tienen el mismo valor de verdad (o ambas son verdaderas, o ambas son falsas).

Por último, definiremos una operación lógica que se denomina **disyunción excluyente**, y es la disyunción del lenguaje coloquial. Esta operación puede definirse como sigue:

Se llama **disyunción excluyente** a la proposición compuesta equivalente **p $\underline{v}$ q,** cuya tabla de verdad es:

p	q	p $\underline{v}$ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposiciones equivalentes:

Podríamos decir que dos proposiciones son equivalentes cuando “dicen lo mismo” (ya vimos que las proposiciones “12 no es un número impar” ó “12 es un número par” son equivalentes esto es, expresan lo mismo de manera diferente). De lo dicho hasta aquí, podemos afirmar que si dos proposiciones son equivalentes tendrán el mismo valor de verdad. Cuando se trata de proposiciones compuestas, para ser equivalentes basta con que tengan el mismo valor de verdad es decir, que sus tablas de verdad sean iguales.

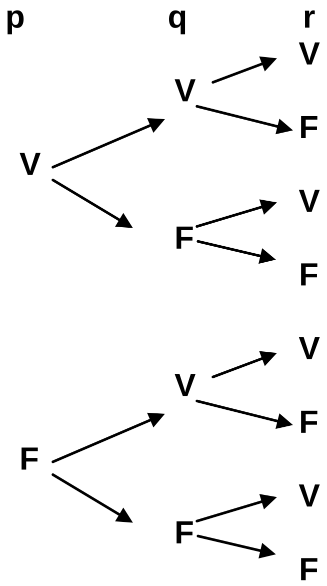
Tablas de verdad:

Veamos a continuación, cómo pueden utilizarse las operaciones lógicas estudiadas para construir la tabla de verdad de otras proposiciones compuestas.

Supongamos que tenemos que construir la tabla de verdad de la proposición **$(p \wedge q) \Rightarrow r$.**

Hemos visto, al definir la negación, que cuando tenemos una sola proposición simple la tabla tiene sólo 2 filas (porque la proposición dada tiene sólo dos posibilidades: ó es verdadera o es falsa).

Cuando teníamos 2 proposiciones simples, en cambio, la tabla tenía 4 filas. Vemos ahora que tenemos las siguientes posibilidades:



Lo cual muestra que, si tenemos 3 proposiciones simples, la tabla tendrá 8 filas.

Luego: 1 proposición: $2^1 =$ 2 filas
2 proposiciones: $2^2 =$ 4 filas
3 proposiciones: $2^3 =$ 8 filas
4 proposiciones: $2^4 =$ 16 filas
....
n proposiciones: 2^n filas

Construyamos, a modo de ejemplo, la tabla de la proposición dada:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Esquemas proposicionales

Releyendo los ejemplos de la página 1, puede observarse, que en realidad, cada una de esas proposiciones tienen un único valor de verdad. Sin embargo, escritas en términos de p, q y r, sin especificar quiénes son dichas proposiciones, actúan como **esquemas proposicionales.**

Tautologías o Leyes Lógicas

Existen proposiciones compuestas que son siempre verdaderas. En ese caso se llaman **tautologías ó leyes lógicas** y se dice que son lógicamente válidas. Al realizar la tabla de verdad de los esquemas proposicionales de esas proposiciones, la tabla de verdad es siempre verdadera.

A su vez, existen proposiciones compuestas que son siempre falsas. Estas se denominan **contradicciones.**

Por último, aquellas proposiciones compuestas que no son tautologías ni contradicciones, se llaman **contingencias.**

Veamos a continuación, algunas de las leyes lógicas más conocidas y más utilizadas.

En todos los casos siguientes, p, q y r son proposiciones cualesquiera (pueden ser verdaderas ó falsas), s es verdadera y t es falsa

Involución	$-(-p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la conjunción	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la disyunción	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
Asociativa de la conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Asociativa de la disyunción	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Conmutativa de la conjunción	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
Conmutativa de la disyunción	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Distributiva de la conjunción respecto a la disyunción	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Distributiva de la disyunción respecto a la conjunción	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
Negación de una conjunción (Ley de De Morgan)	$-(p \wedge q) \Leftrightarrow (-p \vee -q)$
Negación de una disyunción (Ley de De Morgan)	$-(p \vee q) \Leftrightarrow (-p \wedge -q)$
Caracterización de la implicación (1)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$
Caracterización de la implicación (2)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow -(p \wedge -q)$
Negación de una implicación	$-(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge -q)$
Negación de una doble implicación	$-(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} q)$
Simplificación	$(p \wedge q) \Rightarrow p$ ó $(p \wedge q) \Rightarrow q$
Adición	$p \Rightarrow (p \vee q)$ ó $q \Rightarrow (p \vee q)$
Implicación contrarrecíproca	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-q \Rightarrow -p)$
Conjunción con una proposición V	$(p \wedge s) \Leftrightarrow p$
Conjunción con una proposición F	$(p \wedge t) \Leftrightarrow t$
Disyunción con una proposición V	$(p \vee s) \Leftrightarrow s$
Disyunción con una proposición F	$(p \vee t) \Leftrightarrow p$

Para demostrar que, efectivamente, son leyes lógicas deberíamos hacer la tabla de verdad de cada una de ellas y ver que todos los valores de verdad de dichas tablas son verdaderos. Queda dichas construcciones como ejercicio, para practicar construcciones de tablas de verdad (actividad optativa).

Implicaciones asociadas a una dada

Consideremos dos proposiciones simples (p, q) y sus negaciones (-p, -q)

A partir de ellas podemos establecer tres **implicaciones asociadas** a $p \Rightarrow q$ (a la que denominaremos **implicación directa**):

$q \Rightarrow p$: **implicación recíproca**

$-p \Rightarrow -q$: **implicación contraria**

$-q \Rightarrow -p$: **implicación contrarrecíproca** (el nombre proviene de que se trata de la contraria de la recíproca)

Al enunciar las tautologías más utilizadas ya dijimos que toda implicación es equivalente a su contrarrecíproca. Queda como ejercicio al lector probar que también son equivalentes la recíproca y la contraria entre sí.

Condiciones necesarias y suficientes

Cuando una implicación es verdadera, decimos que el antecedente es **condición suficiente** para el consecuente, y que éste es **condición necesaria** para el antecedente.

Analicemos con mayor detalle esta afirmación. Consideremos la siguiente implicación $p \Rightarrow q$, siendo p: Hoy es domingo, q: Hoy es feriado.

Vemos que **es suficiente** que sea domingo, para que, en efecto sea feriado, razón por la cual es suficiente con que p sea verdadera para que también lo sea q. Es decir p es una condición suficiente para q. Esta, en cambio, es una condición necesaria para p, porque para que pueda ser domingo, es **necesario** que sea feriado. Analicemos, en cambio, la recíproca de la implicación dada ($q \Rightarrow p$: Si hoy es feriado, entonces es domingo). Si hoy fuera viernes santo sería feriado (q verdadera) y sin embargo no sería domingo es decir, la implicación sería falsa, en cuyo caso no tiene sentido hablar de condiciones necesaria y suficiente.

Podemos sintetizar lo dicho hasta aquí de la siguiente manera: cuando una implicación $p \Rightarrow q$ es verdadera, pero su recíproca no, p es condición suficiente, pero no necesaria para q y q es condición necesaria pero no suficiente para p.

Veamos en cambio la siguiente proposición: $p \Rightarrow q$, siendo p: (abc) es un triángulo equilátero; q: los lados ab, ac y bc son congruentes. Vemos que es suficiente saber que el triángulo sea equilátero para saber que es verdadero que sus 3 lados son congruentes (es decir p es condición suficiente para q y q es condición necesaria para p). Pero también vemos que es suficiente saber que los 3 lados del triángulo son congruentes para saber que el mismo es equilátero (es decir q es condición suficiente para p y p es condición necesaria para q). Esto sucede porque ambas implicaciones (la directa y su recíproca) son verdaderas es decir, la proposición que en este caso es verdadera es $p \Leftrightarrow q$. En este caso se dice que p es condición suficiente y necesaria para q y que q es condición suficiente y necesaria para p.

Funciones proposicionales. Cuantificadores.

Una función proposicional es toda oración declarativa cuyo sujeto u objeto directo son una o más variables (x, y, z).

En efecto, las oraciones: x es un número natural; x divide a y; 2 a la x es igual a 9, etc., no son proposiciones porque no puede establecerse el valor de verdad de cada una de ellas, por eso decimos que son funciones proposicionales.

Para convertir en proposición a una función proposicional, existen dos procedimientos: a) Dar valores particulares a la(s) variable(s) de modo que resulte verdadera o falsa. Ejemplo: para la primera función antes mencionada puedo usar x = 2, con lo cual la proposición resultante es verdadera (2 es un número natural) o puedo usar x = 0.5 con lo cual resulta falsa.

b) Usando **cuantificadores**. En este caso, las proposiciones resultantes se denominan **proposiciones cuantificadas**. Dichas proposiciones pueden ser cuantificadas **universalmente** o **existencialmente**. Veamos algunos ejemplos:

- Todos los hombres son mortales. (Prop. Cuantificada Universalmente)
- Todo números entero es par. (Prop. Cuantificada Universalmente)
- Existen números primos. (Prop. Cuantificada Existencialmente)
- Algunas aves no tienen plumas. (Prop. Cuantificada Existencialmente)

Hasta aquí hemos utilizado el lenguaje coloquial para expresar las proposiciones simples o compuestas. A partir de este momento, a aquellas proposiciones que se refieran a objetos matemáticos las expresaremos en **lenguaje matemático.**

En efecto, la Matemática utiliza un sistema de símbolos para expresar las proposiciones que brindan información respecto a los objetos que le son propios. Veamos algunos ejemplos: "6 es un número natural" se expresa en símbolos como $6 \in \mathbb{N}$(que también puede leerse "6 pertenece a $\mathbb{N}$; $\mathbb{N}$, a su vez, representa al conjunto de todos los números naturales). En consecuencia, la negación de la proposición dada (que en lenguaje coloquial es "6 no es un número natural"), se denota como: $6 \notin \mathbb{N}$ (si se desea, puede leerse "6 no pertenece a $\mathbb{N}$").

De la misma manera, la proposición "x es mayor que –5 y menor que 4", se denota como " $x > -5 \wedge x < 4$ ". Sin embargo, usualmente, esta conjunción se escribe, de manera abreviada, como sigue: $-5 < x < 4$.

Otros ejemplos:

Lenguaje coloquial	Lenguaje matemático
El doble de un número	2.a
La quinta parte de un número	$\frac{n}{5}$ ó también : $\frac{1}{5}.n$
Un número no nulo	$m \neq 0$
Un número negativo	$b < 0$
El opuesto de un número	-a
El inverso de un número	x^{-1} o también $\frac{1}{x}$
Un número es, a lo sumo, 5	$x \leq 5$

Asimismo, las proposiciones cuantificadas también admiten una expresión en símbolos como sigue:

"El cuadrado de todo número real es un número no negativo", se expresa como "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ " (también se lee: *para todo número real "x" se cumple que "x" al cuadrado es mayor o igual que cero*).

"Algunos números enteros son múltiplos de 3", se expresa en símbolos como "$\exists a \in \mathbb{R} / 3|a$" (se puede leer, también, como: *existe al menos un número entero "a", tal que 3 divide a "a"*).

Es decir, los cuantificadores universal y existencial, a los que ya hiciéramos referencia se denotan con $\forall$ y $\exists$, respectivamente.

Negación de una proposición cuantificada

Consideremos una función proposicional F(x) y las dos proposiciones cuantificadas posibles: $\forall x : F(x)$ y $\exists x / F(x)$. Para obtener sus negaciones, cambiamos el cuantificación y negamos la función proposicional es decir, las respectivas negaciones son: $\exists x / - F(x)$ y $\forall x : - F(x)$. Nótese que negar que algo se cumple para todos no significa que no se cumple para ninguno, sino que algunos no lo cumplen. Para los ejemplos dados antes, las negaciones serían:
El cuadrado de algunos números reales es negativo $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 0$.
Ningún número entero es múltiplo de 3 ($\forall a \in \mathbb{R} /\ 3 \nmid a$).

En cambio si consideramos G(x,y), las proposiciones cuantificadas posibles son:
$\exists x, y / G(x,y); \forall x, y : G(x,y); \exists x / \forall y : G(x,y); \forall x, \exists y / G(x,y); \exists y / \forall x : G(x,y); \forall y, \exists x / G(x,y)$
cuyas negaciones, respectivamente son:
$\forall x, y / - G(x,y); \exists x, y : - G(x,y); \forall x / \exists y : - G(x,y); \exists x, \forall y / - G(x,y); \forall y / \exists x : - G(x,y); \forall y, \exists x / G(x,y)$

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- COPI, I. *Introducción a la Lógica*. E.U.DEB.A. Bs. As., 1987.
- ESPINOSA ARMENTA, R. *Matemáticas discretas.* 1ª Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. México, 2010.
- GONZALEZ, M – MANCILL, J. *Algebra elemental moderna.* Volumen 1. Editorial Kapelusz. Bs. As., 1976.
- PAGINA WEB DE LA UNIVERSIDAD CATOLICA DE SAO PAULO. www.pucsp.br/logica/Proposicional.htm
- SUPPES, P.; HILL, S. *Introducción a la Lógica Matemática.* Reverté Ediciones, S.A. de C.V. México, 2010.