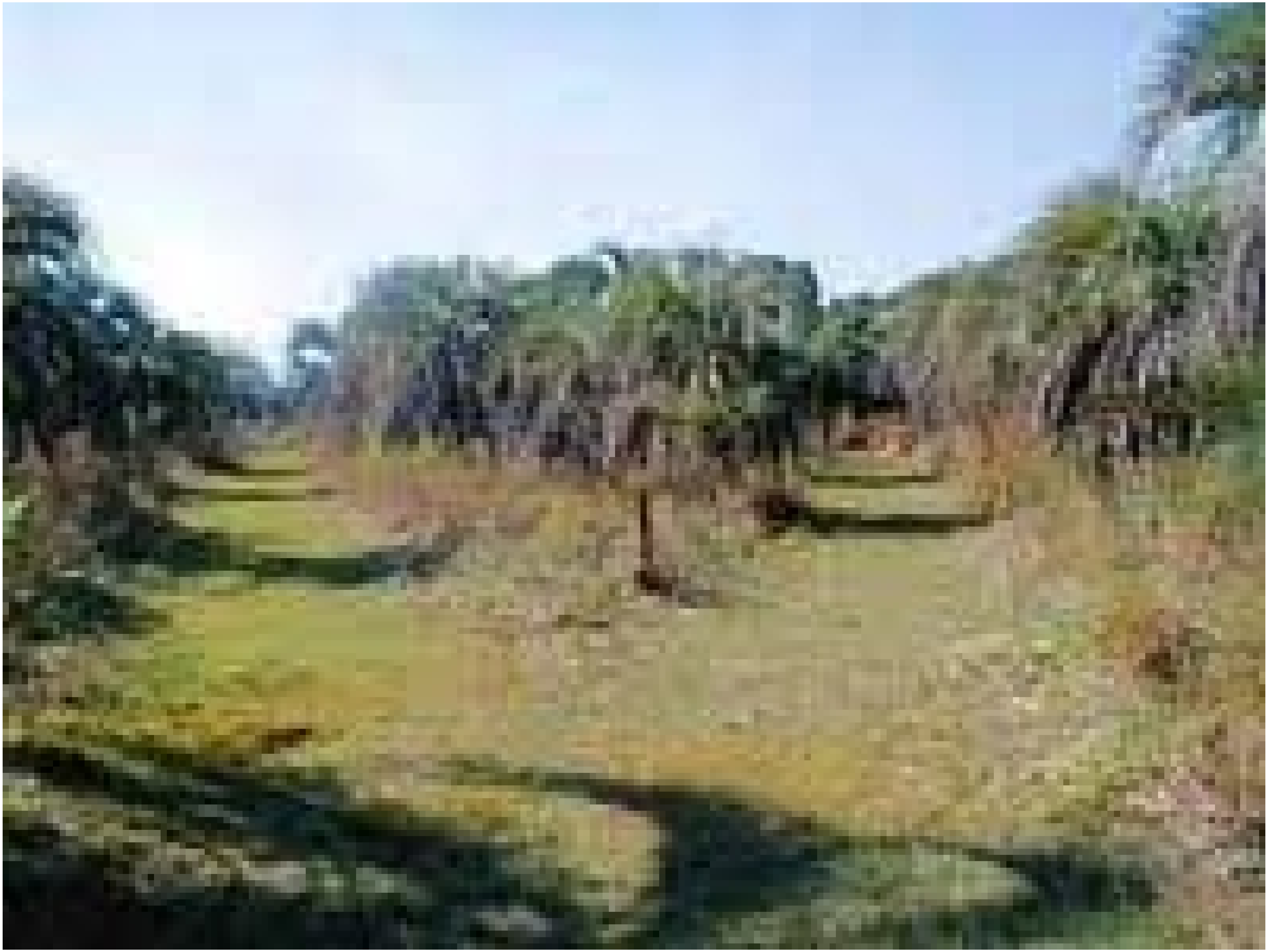
UNIDAD VII:
LA INTEGRAL INDEFINIDA

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Métodos generales de integración. Integración por descomposición. Integración por sustitución. Integración por partes. Métodos particulares de integración.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan diferentes métodos de integración indefinidos.



Analicemos las siguientes integrales

$$\boxed{\int \sqrt{4x-1}\; dx} \qquad \boxed{\int x \cdot \cos x \; dx} \qquad \boxed{\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\; dx}$$

En ninguno de estos casos, puede aplicarse la Tabla de Integrales que vimos en la clase anterior, ¿qué podemos hacer? ¿se podrá encontrar la función primitiva en estos casos? Si es así, ¿cómo hacerlo?

La Regla de la Cadena, utilizada para derivar una amplia gama de funciones, las compuestas, su rango de aplicación es más limitado en el caso de obtención de integrales indefinidas. Sin embargo, en ocasiones podemos usar un cambio de variables para reescribir funciones compuestas en una forma que pueda ser integrada directamente.

Método de Integración por Sustitución

El **método de integración por sustitución o cambio de variable**, se basa en la regla de la cadena.

$$\int f'(u) \cdot u' dx = \int f(z) dz = F(z) + C = F(u) + C$$

El método se basa en identificar una parte de lo que se va a integrar con una nueva **variable z**, de modo que se obtenga una **integral** más sencilla.

Ejemplo 1.

$$\int \left(\underline{x+2}\right)^5 dx \qquad u = x + 2$$

$$du = dx$$

$$\int u^5 du$$

$$\frac{1}{6}u^6 + C$$

$$\frac{\left(x+2\right)^6}{6} + C$$

No olvidemos sustituir el valor u al final del proceso, para obtener la respuesta correcta¡¡¡¡¡¡¡¡

Ejemplo 2.

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot \underline{2x\ dx}$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

El primer paso es encontrar una función compuesta y la derivada de la función interior en el integrando.

La derivada de $1+x^2$ es $\underline{2x\ dx}$.

$$u = 1+x^2$$

$$du = 2x\ dx$$

Note que esto funciona solo porque existe $2x$ en el integrando. Muchas integrales no se puden calcular por sustitución por esto.

Ejemplo 3.

$$\int \sqrt{4x-1}\, dx \qquad u = 4x - 1$$

$$du = 4\, dx$$

$$\int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} du \qquad \frac{1}{4} du = dx$$

Despejando dx.

$$\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} + C$$

$$\frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{1}{6}\left(4x-1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo 4.

$$\int \cos(7x+5)\ dx$$

$$u = 7x+5$$

$$du = 7\ dx$$

$$\int \cos u \cdot \frac{1}{7} du$$

$$\frac{1}{7} du = dx$$

$$\frac{1}{7} \sin u + C$$

$$\frac{1}{7} \sin(7x+5) + C$$

Ejemplo 5.

$$\int x^2 \sin\left(x^3\right)\, dx$$

$$\frac{1}{3}\int \sin u\, du$$

$$-\frac{1}{3}\cos u + C$$

$$-\frac{1}{3}\cos x^3 + C$$

$$u = x^3$$

$$du = 3x^2\, dx$$

$$\frac{1}{3}du = \underbrace{x^2\, dx}$$

Despejamos $x^2\, dx$
Pues el diferencial no
estaba completo.

Ejemplo 6.

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int (\sin x)^4 \cos x \, dx$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x \, dx$$

$$\int u^4 \, du$$

$$\frac{1}{5} u^5 + C$$

$$\frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

RESUMAMOS los pasos del Método de Integración por Sustitución

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx$$

1. Se hace el **cambio de variable** y se diferencia en los dos términos:

$$t = u(x) \qquad dt = u'(x)dx$$

Se despeja **u** y **dx**, sustituyendo en la integral:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt$$

2. Si la **integral** resultante es más sencilla, procedemos a integrar:

$$\int f(t)dt = F(t) + C$$

Donde F'(t)=f(t).

3. Se vuelve a la variable inicial:

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u) + C$$

Ejercicio

$$\int x\sqrt{1+x}\;dx$$

$$1+x=t^2 \qquad\qquad x=t^2-1$$

$$dx=2t\,dt$$

$$\int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^4-2t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$

$$t=\sqrt{1+x}$$

$$\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3+C=$$

$$=\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+C$$

Una aplicación …

Ecuaciones Diferenciales con Variables Separables

Una ecuación diferencial con variables separables, es aquella ecuación en la que la derivada es igual al producto de una función de x y una de y.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

Ejempplo

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

Multiplicando ambos miembros por dx y dividiendo por y^2, hemos separado variables (Asumiendoque y^2 nunca es cero).

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\ dx$$

$$y^{-2}dy = 2x\ dx$$

$$y^{-2}dy = 2x\ dx$$

$$\int y^{-2}dy = \int 2x\ dx$$

$$-y^{-1} + C_1 = x^2 + C_2$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C$$

Constantes de integración combinadas

$$-\frac{1}{x^2 + C} = y$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x^2 + C}}$$

Ejemplo 7.

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(1+y^2\right)e^{x^2}$$ ← E. D. con variables separables

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy = 2x\;e^{x^2}\,dx$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 2x\;e^{x^2}\,dx$$

$$u = x^2$$
$$du = 2x\;dx$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}\,dy = \int e^u\,du$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^u + C_2$$

$$\tan^{-1} y + C_1 = e^{x^2} + C_2$$

$$\tan^{-1} y = e^{x^2} + C$$ ← Constantes de integración combinadas

Ejemplo 8.

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(1+y^2\right)e^{x^2}$$

$$\vdots$$

$$\tan^{-1} y = e^{x^2} + C \longleftarrow$$

Tenemos a y como función <u>implícita</u> de x.

$$\tan\left(\tan^{-1} y\right) = \tan\left(e^{x^2} + C\right)$$

Podemos encontrar a y como función <u>explícita</u> de x, tomando tangente en ambos miembros.

$$\boxed{y = \tan\left(e^{x^2} + C\right)}$$

Note que la constante C no puede aparecer como factor fuera de la función tangente, pues no puede aplicarse la popiedad distributiva.

$$f(x) = xe^x$$

$$F(x) = xe^x - e^x + 3$$

$$\frac{d(F(x))}{dx} = (e^x + xe^x) - e^x + 0$$

$$\frac{d(F(x))}{dx} = xe^x = f(x)$$

¿Cómo integrar en este caso?

Comencemos con la regla de la derivada del producto:

$$\frac{d}{\cancel{dx}}\left(uv\right)=u\frac{dv}{\cancel{dx}}+v\frac{du}{\cancel{dx}}$$

$$d\left(uv\right)=u\ dv+v\ du$$

$$d\left(uv\right)-v\ du=u\ dv$$

$$u\ dv=d\left(uv\right)-v\ du$$

$$\int u\ dv=\int\left(d\left(uv\right)-v\ du\right)$$

$$\int u\ dv=\int\left(d\left(uv\right)\right)-\int v\ du$$

$$\boxed{\int u\ dv=uv-\int v\ du}$$

Esta el la fórmula del Método de Integración por Partes.

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

u es la función sin diferenciar.

dv es fácil de integrar.

La “Integración por Partes es la “Regla del Producto” para la integración.

Escojamos u en este orden: LIPET

Logaritmos, **T**rigonométricas **I**nversas, **P**olinomios, **E**xponenciales, **T**rigonométricas

Ejemplo 1.

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

$$\int x \cdot \cos x\ dx$$

LIPET

Factor <u>polinomial</u>

$$u = x \qquad dv = \cos x\ dx$$

$$du = dx \qquad v = \sin x$$

$$u\ v - \int v\ \ du$$

$$x \cdot \sin x - \int \sin x\ dx$$

$$x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Ejemplo 2.

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

$$\int \ln x\ dx$$

LIPET

Factor logarítmico

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$u\ v - \int v\ \ du$$

$$\ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx$$

$$x \ln x - x + C$$

Ejemplo 3.

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

LIPET

$$\int x^2 e^x\ dx$$

$$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 2x\ dx \qquad v = e^x$$

$$u\ v - \int v\ \ du$$

$$x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\ dx$$

$$x^2 e^x - 2\int x e^x\ \ dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx \right)$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

Ejemplo 4. LIPET

$$\boxed{\int e^x \cos x \; dx}$$

$$u = e^x \qquad dv = \cos x \; dx$$
$$du = e^x \; dx \qquad v = \sin x$$

$$u \; v - \int v \;\; du$$

$$u = e^x \qquad dv = \sin x \; dx$$
$$du = e^x \; dx \qquad v = -\cos x$$

$$e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx$$

$$e^x \sin x - \Big(\underbrace{e^x \cdot -\cos x}_{uv} - \underbrace{\int -\cos x \cdot e^x \;\; dx}_{v\;du} \Big)$$

$$e^x \sin x + e^x \cos x - \boxed{\int e^x \cos x \; dx}$$

Esta es la expresión original!!!!!!!

$$\int e^x \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cdot - \cos x - \int - \cos x \cdot e^x \, dx \right)$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$$

Ejemplo 5.

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

LIPET

$$\int x^2 e^x\ dx$$

$u = x^2$	$dv = e^x dx$
$du = 2x\ dx$	$v = e^x$

$$u\ v - \int v\ \ du$$

$$x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x\ dx$$

$u = x$	$dv = e^x dx$
$du = dx$	$v = e^x$

$$x^2 e^x - 2\int xe^x\ dx$$

$$x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

RESUMAMOS el Método de Integración por partes

El **método de integración por partes** se basa en la derivada de un producto y se utiliza para resolver algunas integrales en las que el integrando puede expresarse como el producto de dos funciones.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

$$u \cdot v = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Analicemos la última integral del comienzo

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\ dx$$

Es claro que ninguno de los métodos anteriores sirve en este caso…..

Método de Integración de Fracciones Racionales

En la **integración de funciones racionales** se trata de hallar la integral

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

siendo P(x) y Q(x) polinomios.

En primer lugar, supondremos el grado de P(x) es menor que el de Q(x), si no fuera así se dividiría.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$C(x)$ es el cociente y $R(x)$ el resto de la división polinómica.

Una vez que sabemos que el denominador tiene mayor grado que numerador, descomponemos el denominador en factores.

Dependiendo de las raíces del denominador nos encontramos con los siguientes casos:

El denominador solo tiene:

I. Raíces reales simples y diferentes $\dfrac{A}{x-a}$.

II. Raíces reales múltiples $\dfrac{A}{(x-a)^k}$.

III. Raíces complejas simples $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

IV. Raíces complejas múltiples $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$.

I. El denominador tiene solo raíces reales simples

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)...$$

La fracción P(x)/Q(x) puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}...$$

A, B y C son números que que se obtienen efectuando la suma e identificando coeficientes o dando valores a x.

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Se efectúa la suma:

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

Como las dos fracciones tienen el mismo denominador, los numeradores han de ser iguales:

$$2x^2+5x-1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

Calculamos los coeficientes de A, B y C dando a la x los valores que anulan al denominador.

$$x = 0 \qquad -1 = A(-1)(2) \qquad A = 1/2$$

$$x = 1 \qquad 6 = B(1)(3) \qquad B = 2$$

$$x = -2 \qquad -3 = C(-2)(3) \qquad C = -1/2$$

Se calculan integrales de las fracciones simples

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x) + 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

Escribámosla como la suma de dos términos.

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Los llamados factores lineales no repetidos.

$$5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$5x-3 = Ax + A + Bx - B \cdot 3$$

$$5x = Ax + Bx \qquad -3 = A - B \cdot 3$$

$$5 = A + B \qquad -3 = A - 3B$$

Cada constante de las fracciones simples, pueden ser determinadas fácilmente.

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$5x-3 = Ax + A + Bx - B\cdot 3$$

$$5x = Ax + Bx \qquad -3 = A - B\cdot 3$$

$$5 = A + B \qquad -3 = A - 3B$$

$$5 = A + B \qquad -3 = A - 3B$$

$$\begin{array}{l} 3 = -A + 3B \\ \hline 8 = 4B \end{array}$$

$$2 = B$$

$$5 = A + 2$$

$$3 = A$$

$$\int \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$\boxed{3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C}$$

Las fracciones simples ya integradas

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

Veamos otro método para obtener A y B.

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

Multiplicando por el común denominador.

$$5x-3 = A(x+1) + B(x-3)$$

Sea $x = -1$

$$-8 = \cancel{A\cdot 0} + B\cdot -4$$

$$2 = B$$

$$12 = A\cdot(4) + \cancel{B\cdot 0}$$

Sea $x = 3$

$$3 = A$$

A y B como antes

II. El denominador tiene solo raíces reales múltiples

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^r (x-c)^s \ldots$$

La fracción P(x)/Q(x) puede escribirse así:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)} + \ldots$$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)^r} + \ldots + \frac{C_1}{(x-c)^s} + \ldots$$

Los coeficientes hay que determinarlos como antes, con algunos cuidados.

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Raíces repetidas, usamos dos términos para las fraacciones simples.

$$6x+7 = A(x+2) + B$$

$$6x+7 = Ax + 2A + B$$

$$6x = Ax \qquad 7 = 2A + B$$

$$6 = A \qquad 7 = 2\cdot 6 + B$$

$$7 = 12 + B$$

$$-5 = B$$

$$\boxed{\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}}$$

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$$

Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero dividimos.

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x-3 & 2x^3-4x^2-x-3 \\ \hline & 2x \\ & \underline{2x^3-4x^2-6x} \\ & \qquad\qquad 5x-3 \end{array}$$

$$2x+\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$$

(primer ejemplo)

$$2x+\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \boxed{2x+\frac{3}{(x-3)}+\frac{2}{(x+1)}}$$

Veamos el siguiente caso:

Numerador de primer grado

$$\frac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2} = \frac{\overbrace{Ax+B}}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{\left(x-1\right)^2}$$

Factor cuadrático irreducible

Raíz repetida

$$-2x+4 = \left(Ax+B\right)\left(x-1\right)^2 + C\left(x^2+1\right)\left(x-1\right) + D\left(x^2+1\right)$$

$$-2x+4 = \left(Ax+B\right)\left(x^2-2x+1\right) + C\left(x^3-x^2+x-1\right) + Dx^2 + D$$

$$-2x+4 = Ax^3 - 2Ax^2 + Ax + Bx^2 - 2Bx + B + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 + D$$

$$-2x+4=Ax^3-2Ax^2+Ax+Bx^2-2Bx+B+Cx^3-Cx^2+Cx-C+Dx^2+D$$

$$0=A+C \quad 0=-2A+B-C+D \quad -2=A-2B+C \quad 4=B-C+D$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +2\cdot \text{ r } 3 \\ -\text{ r } 1 \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +3\cdot \text{ r } 2 \\ -\text{ r } 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \div(-2) \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\text{ r } 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +3\cdot r2 \\ -r2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -r4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ +r3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \div 2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}=\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}$$

$$\int\frac{-2x+4}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx-2\int\frac{dx}{x-1}x+\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+\arctan(x^2+1)$$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x-1}\,x + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \ln(x^2+1) + \arctan(x^2+1) -$$

$$-2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$$