

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, NATURALES Y AGRIMENSURA

TEORIA DE CONJUNTOS

Algebra (Para Agrimensura)
Ciclo lectivo 2010

Esp. Prof. Liliana N. Caputo
Paula Daniela Bordón

TEMA 2

NOCIONES DE CONJUNTO, ELEMENTO Y PERTENENCIA

Los términos conjunto, elemento y pertenencia son **términos primitivos** es decir, no es posible definirlos rigurosamente. Sin embargo, apelando a la idea intuitiva que de estos términos todos tenemos podemos decir que un conjunto es cualquier colección de objetos, que un elemento es cada uno de los objetos que forman un conjunto. En cambio la pertenencia es una relación que vincula elementos con conjuntos. Si un elemento está en un conjunto decimos que pertenece a él y, en caso contrario, que no pertenece a él. Los símbolos usuales son \in (pertenece) y \notin (no pertenece).

Los conjuntos se designan o denotan generalmente con una letra mayúscula. Sus elementos se encierran entre llaves y si son literales, generalmente se usan minúsculas.

Por ejemplo, el conjunto A, formado por los elementos 1, 2 y 3, se denota así:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Ejemplo: Sea $M = \{-5, 7\}$.

- a) $-5 \in M$ es una proposición V (verdadera).
- b) $7 \in M$ es una proposición V.
- c) $2 \notin M$ es una proposición V.
- d) $4,25 \in M$ es una proposición F (falsa).
- e) $-5 \notin M$ es una proposición F.

El formato usual es: **[elemento]** \in **[conjunto]**, o bien **[elemento]** \notin **[conjunto]**, en donde los corchetes se deben interpretar como los lugares que en general han de ocupar las entidades que se comparan.

DETERMINACION DE UN CONJUNTO

Un conjunto está determinado cuando se conocen todos y cada uno de los elementos que lo forman.

Se usan dos maneras para definir un conjunto:

- a) extensión o enumeración
- b) comprensión.

DENOTACION POR EXTENSION O ENUMERACIÓN

Un conjunto está denotado por **extensión o enumeración** cuando para conocer los elementos que lo forman, éstos se nombran o enumeran uno a uno.

Ejemplo: si decimos que el conjunto M está formado por los elementos -5 y 7 , y anotamos $M = \{-5; 7\}$, lo hemos definido por extensión.

DENOTACION POR COMPRESION

Un conjunto está denotado **por comprensión** cuando sus elementos se conocen a través de una propiedad que les es común a todos y a cada uno de ellos.

Esa propiedad suele adquirir la forma de una función proposicional que se transforma en una proposición verdadera (V) sólo cuando a su/s variable/s se le/s asignan como valores los elementos de ese conjunto.

En el caso de conjuntos de interés matemático la función proposicional suele tener forma de una ecuación, o también de una inecuación.

Ejemplo: el mismo conjunto M del caso anterior puede ser definido por comprensión así: $M = \{x / x^2 - 2x - 35 = 0\}$. El símbolo “x/...” se lee: x, tal que...

Equivalencia de ambas denotaciones

Analicemos la equivalencia de las dos formas de definición utilizadas.

En la definición por comprensión, la función proposicional usada es la ecuación de segundo grado en una incógnita, $x^2 - 2x - 35 = 0$, que sólo se satisface como igualdad para sus raíces, que calculamos a continuación, con la fórmula de Baskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-35)}}{2.1} = \frac{2 \pm 12}{2}.$$

De allí, $x_1 = 7$ y $x_2 = -5$

Estos dos números son, precisamente, los elementos de M enumerados en la otra forma usada.

Concluimos entonces que ambas formas definen al mismo conjunto y, por ello, son equivalentes.

Debe entenderse también que la función proposicional $x^2 - 2x - 35 = 0$, permite comprender que el conjunto M está formado por los números -5 y 7, aún cuando éstos no sean nombrados explícitamente, pues ellos son los únicos números que la transforman en una proposición verdadera.

DOS CONJUNTOS ESPECIALES

Es frecuente, en esta teoría, la referencia a dos conjuntos que debemos distinguir como especiales:

- a) **el conjunto vacío** (simbolizado con ϕ)
- b) **el conjunto universal** (simbolizado con U)

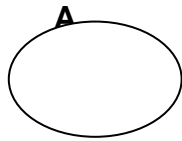
El conjunto vacío es el que no tiene elementos.

El conjunto universal es el que reúne a todos los elementos del tema de que se trata.

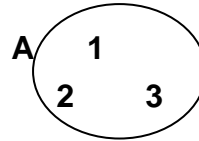
DIAGRAMAS DE VENN-EULER

Los diagramas de Venn-Euler están formados por curvas que encierran a los elementos de un conjunto del cual se necesita proponer un gráfico representativo. La letra mayúscula que lo nombra se coloca afuera de la curva.

Ejemplo:



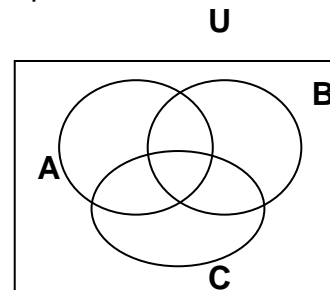
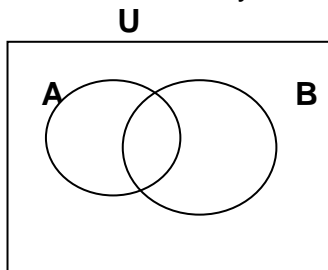
Si $A = \{1, 2, 3\}$, el gráfico será



El único conjunto que se representa gráficamente de un modo distinto es el universal U , pues para él se utiliza un rectángulo:



Es también frecuente el uso de los dos diagramas que siguen, llamados diagramas de distribución, cuya utilidad se apreciará en sus aplicaciones.



INCLUSION E IGUALDAD DE CONJUNTOS

La inclusión es un concepto que permite comparar la ubicación de un conjunto con respecto a otro conjunto.

Definición: Un conjunto A está incluido en otro conjunto B si, y sólo si, todos los elementos de A lo son también de B .

Los símbolos usuales en este caso son:

- \subset (...está incluido en...)
- $\not\subset$ (...no está incluido en...)

Con estos símbolos, podemos enunciar la definición de inclusión así:

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

o, usando el condicional contrarrecíproco (equivalente): $A \subset B \Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A$

Definición: Un conjunto A es igual a otro conjunto B si, y sólo si, tienen exactamente los mismos elementos.

En símbolos: $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

Propiedades de la inclusión:

1º) Propiedad Reflexiva: todo conjunto está incluido en sí mismo: $\forall A : A \subset A$

Demostración:

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A$ (por ser $p \Rightarrow p$ tautología). Luego, por definición de inclusión, $A \subset A$.

2º) Propiedad Transitiva: $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Demostración:

Sea $x \in A \xrightarrow{A \subset B} x \in B \xrightarrow{B \subset C} x \in C$. Luego, por definición de inclusión, $A \subset C$.

3º) Propiedad Antisimétrica: $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$

Demostración: Trivial por definición de igualdad.

4º) El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto. $\forall A : \emptyset \subset A$

Demostración: Sea $x \in \emptyset$. Entonces:

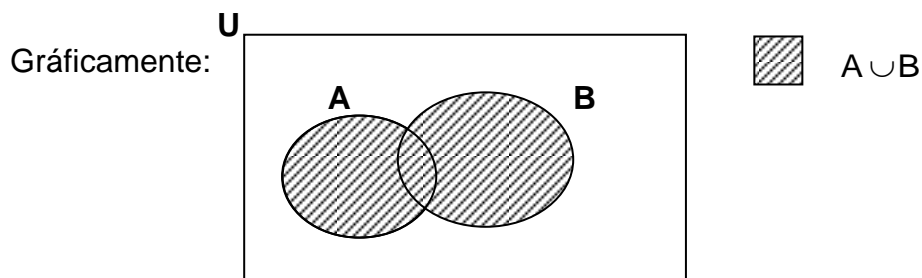
$\underset{F}{x} \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ es una implicación verdadera, por ser falso su antecedente. Por definición de \subset , resulta $\emptyset \subset A$.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

I- UNION DE DOS CONJUNTOS

Definición: La unión de dos conjuntos, A y B, es un nuevo conjunto, $A \cup B$, tal que:

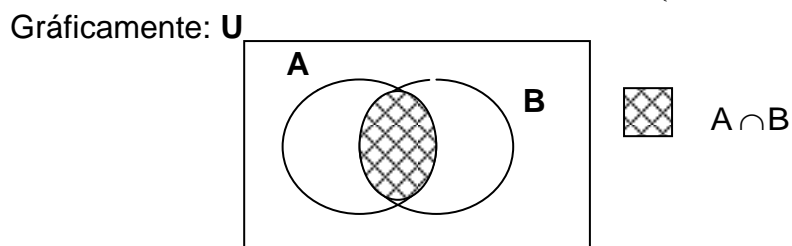
$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$



II- INTERSECCION DE DOS CONJUNTOS

Definición: La intersección de dos conjuntos, A y B, es un nuevo conjunto, $A \cap B$, tal que:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

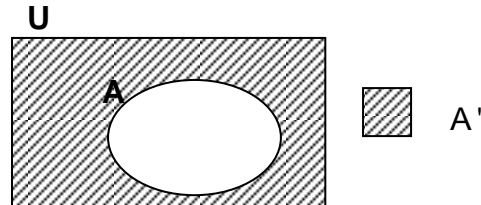


III- COMPLEMENTACION DE CONJUNTOS

Definición: Se llama complemento de A al conjunto formado por todos los elementos de U , que no pertenecen a A .

El **complemento de A** se denota con A' Entonces: $A' = \{x \in U / x \notin A\}$

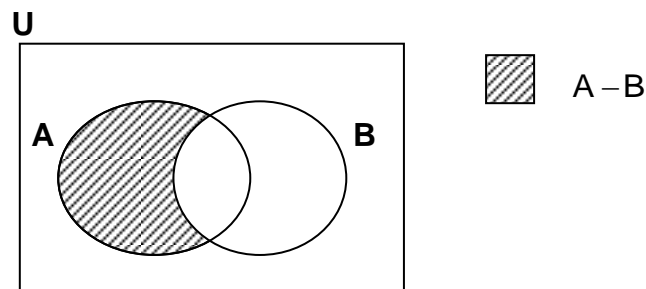
En forma gráfica:



IV- DIFERENCIA DE DOS CONJUNTOS

Definición: La diferencia entre dos conjuntos, A y B, es un nuevo conjunto, $A - B$, tal que: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

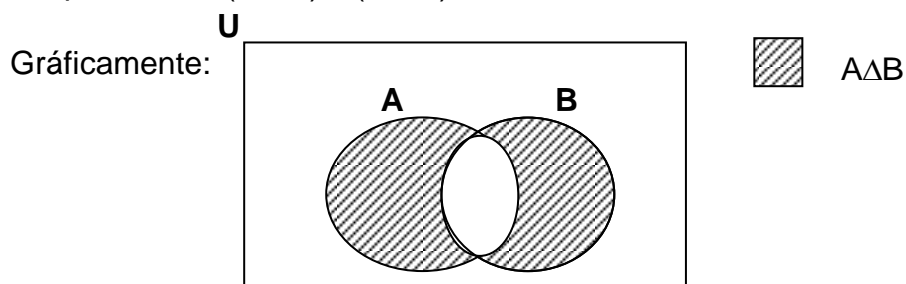
Gráficamente:



Observación: la diferencia de conjuntos no es conmutativa es decir, $A - B \neq B - A$.

V- DIFERENCIA SIMETRICA DE DOS CONJUNTOS

Definición: La diferencia simétrica entre dos conjuntos, A y B, es un nuevo conjunto, $A \Delta B$, tal que: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS:

Sean A, B, C subconjuntos del universal U

1. Propiedad conmutativa:

1.1. De la intersección: $A \cap B = B \cap A$

1.2. De la unión: $A \cup B = B \cup A$

1.3. De la diferencia simétrica: $A \Delta B = B \Delta A$

2. Propiedad asociativa:

2.1. De la intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2.2. De la unión: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2.3. De la diferencia simétrica: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

3. Propiedad distributiva

3.1. De la intersección con respecto a la unión: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3.2. De la unión con respecto a la intersección: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. Leyes de De Morgan

4.1. Complemento de la intersección: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4.2. Complemento de la unión: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

5. Involución de la complementación: $(A')' = A$

6. $A \cap A' = \emptyset \wedge A \cup A' = U \wedge A - A' = A \wedge A' - A = A' \wedge A \Delta A' = U$

7. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B \wedge A - B = \emptyset$

7.1. $A \cap U = A \wedge A \cup U = U \wedge A - U = \emptyset$

7.2. $A \subset B \Rightarrow \emptyset \cap B = \emptyset \wedge \emptyset \cup B = B \wedge \emptyset - B = \emptyset$

8. Idempotencia

8.1. De la intersección: $A \cap A = A$

8.2. De la unión: $A \cup A = A$

9. $A \subset (A \cup B) \wedge B \subset (A \cup B)$

10.. $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

11. $U - A = A'$

12. $A - B = A \cap B'$

13. $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$

14. $A \Delta B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$

15. $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$

16. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

No se demostrarán la totalidad de estas propiedades, sólo algunas a modo de ejemplo. Las demás quedan como ejercicio (optativo) para el lector.

Demostraciones: En todos los casos, A, B y C son subconjuntos del universal U .

$$1.1. x \in (A \cap B) \xLeftrightarrow{\text{Def. } \cap} x \in A \wedge x \in B \xLeftrightarrow{\text{Comm. } \wedge} x \in B \wedge x \in A \xLeftrightarrow{\text{Def. } \cap} x \in (B \cap A)$$

$\therefore A \cap B = B \cap A$, por definición de igualdad de conjuntos.

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad x \in (A \cup B) \cup C &\stackrel{\text{Def } \cup}{\iff} x \in (A \cup B) \vee x \in C \stackrel{\text{Def } \cup}{\iff} (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \stackrel{\text{Asoc. } \vee}{\iff} \\
 &\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \stackrel{\text{Def } \cup}{\iff} x \in A \vee x \in (B \cup C) \stackrel{\text{Def } \cup}{\iff} x \in A \cup (B \cup C)
 \end{aligned}$$

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, por definición de igualdad de conjuntos.

$$5. \quad x \in (A')' \stackrel{\text{Def.com.}}{\iff} x \in A' \stackrel{\text{Def.com.}}{\iff} x \in A. \text{ Luego } (A')' = A, \text{ por definición de igualdad de conjuntos.}$$

$$9. \quad x \in A \stackrel{p \Rightarrow p \vee q}{\implies} x \in A \vee x \in B \stackrel{\text{Def } \cup}{\iff} x \in (A \cup B) \quad \therefore A \subset (A \cup B) \text{ por definición de } \subset.$$

CONJUNTO DE PARTES DE UNO DADO

Sea A un conjunto. Se llama **conjunto de partes de A** , $P(A)$, al conjunto formado por **todos** los subconjuntos de A es decir, $P(A) = \{B / B \subset A\}$.

Propiedades

$$1^{\circ}) \quad \forall A : P(A) \neq \emptyset.$$

$$2^{\circ}) \quad \forall A, B : P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$$

$$3^{\circ}) \quad P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

PARTICIÓN DE UN CONJUNTO NO VACÍO

Sea A un conjunto no vacío y sean A_1, A_2, \dots, A_k subconjuntos de A . Nótese que, en principio, A_1, A_2, \dots, A_k no tienen por qué ser todos los subconjuntos de A . Consideremos ahora el conjunto $P = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ (por lo dicho antes, no necesariamente $P = P(A)$).

Diremos que **P es una partición de A** si, y sólo si, se cumplen las 3 condiciones siguientes:

1. A_1, A_2, \dots, A_k son todos no vacíos.
2. La intersección de cualquier par de estos subconjuntos es vacía es decir, son disjuntos de a dos.
3. La unión de A_1, A_2, \dots, A_k es igual a A .

Veamos algunos ejemplos:

1. Consideremos el conjunto A formado por todas las personas que viven en la Tierra.

Sean $A_1 = \{x \in A / x \text{ tiene menos de 20 años}\}; A_2 = \{x \in A / x \text{ tiene 20 años}\};$

$A_3 = \{x \in A / x \text{ tiene más de 20 años}\}$ y $P = \{A_1, A_2, A_3\}$

2. Sean $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 4\}$, $B_1 = \{x \in B / x > 0\}$, $B_2 = \{x \in B / x < 0\}$; $P_1 = \{B_1, B_2\}$

3. Sean $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 4\}$, $B_1 = \{x \in B / x > 0\}$, $B_2 = \{x \in B / x \leq 0\}$; $P_1 = \{B_1, B_2\}$

4. Sean B como en 2, $B_1 = \{x \in B / x \text{ es primo}\}; B_2 = \{x \in B / x \text{ es par}\}; P_2 = \{B_1, B_2\}.$

5. Sean B como en 2, $B_1 = \{x \in B / x - 4 = 0\}$; $B_2 = \{x \in B / x \text{ es par}\}$;
 $B_3 = \{x \in B / x \text{ es impar}\}$; $P_3 = \{B_1, B_2, B_3\}$

Las condiciones para que un conjunto P sea partición de $A \neq \emptyset$, que las enunciamos en forma coloquial, formalmente se escriben como sigue:

1. $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
2. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\} : A_i \cap A_j \neq \emptyset \Leftrightarrow i = j$
3. $\forall x \in A, \exists i \in \{1, 2, \dots, k\} / x \in A_i$

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ESPINOSA ARMENTA, R. (2010). Matemáticas discretas. 1ª Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.
- JOHNSONBAUGH, R. (2005). Matemáticas Discretas. 6ª Edición. Pearson Educación. MÉXICO.
- ROJO, A. (1996). Algebra I. El Ateneo. Argentina.