UNNE

FaCENA

Guía de Trabajos Prácticos de Cálculo Diferencial e Integral I

- Ingeniería Eléctrica
- Ingeniería en Electrónica
- Ingeniería en Agrimensura
- Lic. en Ciencias Químicas
- Profesorado en Física
- Lic. en Ciencias Físicas

Prof. Titular:

Dr. Juan Nápoles Valdés

Auxiliares de Docencia:

Prof. Agustina Ibarrola

Prof. Daniel Mosqueda

Prof. Celeste Romero

Prof. Gabriela Ferrarini

Prof. Laura Pintos

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES Y AGRIMENSURA

2020

TEORIA: Dr. Juan Nápoles Váldes

Jueves	8:00 a 10:00	Aula Magna
Viernes	14:00 a 16:00	Aula Magna

CLASES PRÁCTICAS

PROFESOR	DIA Y HORA	AULA	CARRERAS
Grupo I Prof. Celeste Romero	Martes 17:00 a 20:00 Jueves 18:30 a 20:30	Aula 1 de Química Aula 1 de Física	Licenciatura en Cs. Químicas (todos). Ing. en Electrónica desde Acevedo, Brisa hasta Gómez, Mauricio. .
Grupo II Prof. Agustina Ibarrola	Martes 8:00 a 10:00 Miércoles 10:00 a 13:00	Salón A de Ing. Salon C Bis Ing.	Prof. y Licenciatura en Física
Grupo III Prof. Gabriela Ferrarini	Lunes 10:00 a 12:00 Miércoles16:30 a 19:30	Salón A. Ingeniería Salón A Ingeniería	Ing. Agrimensura . Ing. en Electrónica desde González Duarte, Lucas hasta Maldonado, Antonio
Grupo IV Prof. Daniel Mosqueda	Martes 17:00 a 20:00 Jueves 17:00 a 19:00	Aula A Ingeniería Aula 1 de Química	. Ing. Eléctrica
Grupo V Prof. Laura Pintos	Lunes 14:00 a 16:30 Miércoles 14:00 a16:30	Aula 2 de Química Aula 2 de Química	Ing. en Electrónica desde Martínez, Ariel hasta Zimerman, Benjamín

Fechas de Parciales:

1º Parcial:	27/04/2020
Recuperatorio:	11/05/2020
2º Parcial:	18/06/2020
Recuperatorio:	25/06/2020
Recuperatorio Extraordinario:	01/07/2020

Contenidos por unidad:

UNIDAD I: VARIABLES. FUNCIONES.

Coordenadas cartesianas ortogonales y polares. Transformación. Proyección. Funciones. Intervalos. Campo de definición de una función. Cotas. Clasificación de las funciones. Composición de funciones. Funciones monótona. Funciones escalonadas. Funciones implícitas. Funciones dadas paramétricamente. Funciones en coordenadas polares. Función homográfica. Asíntotas. Gráficas.

UNIDAD II: LIMITES. CONTINUIDAD

Concepto y definición de límite. Límites finitos e infinitos. Sucesiones. El número e. infinitésimos. Operaciones con infinitésimos. Teoremas sobre el cálculo de límites. Fracciones cuyo denominador tiende a cero. Límites de (senx) / x para x tendiendo a cero. Continuidad de una función. Operaciones con funciones continuas.

UNIDAD III: LA DERIVADA

Variación de las funciones. Incremento y razón incremental. Noción de derivada. Definición. La función derivada. Interpretación geométrica de la derivada. Derivación gráfica. Continuidad de la función derivable. Existencia de la derivada. Derivadas de las funciones algebraicas. Derivadas de las funciones inversas. Derivada de las funciones trascendentes. Derivadas de la función compuesta. Regla de la cadena.

UNIDAD IV: APLICACIONES DE LA DERIVADA

Ecuaciones de la tangente y de la normal. Derivación gráfica. Continuidad de la función derivable. Máximos y mínimos relativos. Determinación de los extremos relativos. Uso de la derivada segunda cuando no se anula. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Aplicaciones físicas de la derivada: velocidad y aceleración.

UNIDAD V: TEOREMAS DEL VALOR MEDIO. LIMITES INDETERMINADOS. MAC LAURIN Y TAYLOR.

Teorema de los incrementos finitos. Lagrange. Teorema de Rolle. Consecuencias. Teorema de Cauchy. Límites indeterminados. Regla de L'Hopital. Forma 0/0. Generalizadores de L'Hopital para otras formas de indeterminación. Generalización del teorema del valor medio. Fórmulas de Mac- Laurin y Taylor. Resto de la fórmula de Taylor y Mac Laurin. Discusión analítica de máximos y mínimos.

UNIDAD VI: LA DIFERENCIAL

Definición y expresión analítica de la diferencial. Interpretaciones geométricas de la diferencial. Su relación con el incremento. Aproximación mediante diferenciales. Errores. Reglas de diferenciación. Diferencial de una función de función. Diferencial de orden superior.

UNIDAD VII: LA INTEGRAL INDEFINIDA

La función primitiva. El teorema fundamental del cálculo integral. Integrales inmediatas. Consecuencias inmediatas de la definición de integral. Propiedades de las integrales indefinidas. Integración de monomios de seno y coseno. Métodos generales de integración. Integración por descomposición. Integración por sustitución. Integración por partes. Métodos particulares de integración.

UNIDAD VIII: LA INTEGRAL DEFINIDA

Definición e interpretación geométrica de la integral definida. Áreas en coordenadas cartesianas. Áreas positivas y negativas. Propiedades de la integral. Teorema del valor medio para el cálculo integral. La derivada de la integral definida. Cálculo de la integral definida mediante la primitiva. Barrow. Integrales generalizadas e impropias. Cambios de variables.

UNIDAD IX: APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Área de un sector en coordenadas polares. Volumen de un sólido de revolución. Longitud de un arco de curva. Diferencia de arco. Área de una superficie de revolución. Curvatura de curvas planas. Integración numérica. Fórmula de los trapecios. Área bajo un arco de parábola. Fórmula de Simpson. Resto de la fórmula de Simpson.

UNIDAD X: SERIES NUMÉRICAS

Series numéricas. Convergencia. Series geométricas. Series de términos no negativos. Criterios de convergencia. Criterios de comparación. Criterio de D'Alembert. Criterio de Raabe. Criterio de la raíz (Cauchy).

Contactos de profesores:

Docente	Correo Electrónico
Dr. Juan Nápoles Valdez	jnapoles@frre.utn.edu.ar
Prof. Gabriela Ferrarini	gabrielaferrarini2@gmail.com
Prof. Agustina Ibarrola	sagusmat@gmail.com
Prof. Daniel Mosqueda	dani.luis13@gmail.com
Prof. Laura Pintos	pintoslaura.LP@gmail.com
Prof. Celeste Romero Zalazar	Celester.romeroz@gmailcom

<u>Trabajo Práctico Nº 1:</u> "Variables. Funciones"

1) Dados los siguientes conjuntos:

$A = \left\{x \in R/0{,}7x - 3 < \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\};$

$B = \left\{x \in Q/\ x < 1 - x\ \vee\ 2x > \frac{2-x}{3}\right\};$

$C = \{x \in N/-x < 6\};$

$D = \left\{x \in R/ -\sqrt{2} < x < \sqrt{3}\ \vee\ x \geq \frac{7}{2}\right\};$

$E = \{x \in R/-x^2 > -9\}$

F= $\{x \in Z/\ x \geq -3\ \wedge\ x < 6\}$

G= $\left\{x \in R/\ \frac{1}{4}(x+2)^2 \geq \frac{1}{4}x^2 + 4\right\}$

a) Escribir, si fuera posible, como intervalo, unión o intersección de intervalos según corresponda.
b) Representar en la recta numérica.

2) Dados los conjuntos:

$A = \{x / x \in R \wedge |x+2| \leq 3\}$

$B = \{x / x \in R \wedge |2x-5| < 1\}$

$C = \{x / x \in R \wedge |2x+5| > 7\}$

$D = \left\{x / x \in R \wedge \left|\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right| < \frac{7}{4}\right\}$

$E = \left\{x / x \in R \wedge \left|-\frac{1}{2}x + 1\right| \geq 3\right\}$

$F = \left\{x / x \in R \wedge |2x-5| \leq \frac{1}{4}\right\}$

a) Expréselos como intervalos.
b) Represéntelos gráficamente en la recta real.
c) Determine la amplitud del intervalo, las cotas, extremos, máximos y mínimos, si los conjuntos están acotados.
d) Analizar y fundamentar si dicho intervalo es o no un entorno y en caso afirmativo hallar el centro y el radio y expresarlo como tal.

3) Dadas las siguientes funciones de $R \to R$:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 3$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

d) $f(x) = -x^2 + 2$

e) $f(x) = (x+1)^2 + 2$

f) $f(x) = 3sen\ x$

g) $f(x) = \log_3(2x+1)$

h) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

i) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

j) $f(x) = \frac{1}{x}$

m) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

n) $f(x) = |x-2|$

o) $f(x)=\begin{cases} 2 & si\, x<0 \\ -2x^2+4x & si\, 0\le x\le 2 \\ 2x-4 & si\ x>2 \end{cases}$ p) $f(x)=\begin{cases} 2^x & si\, x\le 1 \\ -x+1 & si\, -1<x<1 \\ \log_3 x & si\ x\ge 1 \end{cases}$

q) $f(x)=\sqrt{x+2}$

a) Represéntelas gráficamente, determinando previamente el dominio.
b) Determine el dominio y la imagen.

Ejercicios complementarios:

1) Dados los siguientes conjuntos:

$A=\{x \in R/7<x<9\};$

$B=\{x \in R/x\ge 3-2x \ \wedge \ x\le -1\};$

$C=\left\{x \in R/ \ \frac{2x-5}{3}\ge \frac{5}{3}x\right\}$;

$D=\left\{x \in R/ -4x+1<3 \ \vee \ \frac{1}{2}x+2>8\right\};$

1) Escribir, si fuera posible, como intervalo unión o intersección de intervalos según corresponda.
2) Representar en la recta numérica.

2) Dados los conjuntos:

$A=\{x/x\in R\wedge |x-1|\le 2\}$ $B=\left\{x/x\in R\wedge |2x+1|<\frac{7}{2}\right\}$

$C=\{x/x\in R\wedge |x+2|\ge 2\}$ $D=\left\{x/x\in R\wedge \left|\frac{x}{5}-2\right|<\frac{1}{2}\right\}$

a) Expréselos como intervalos.
b) Represéntelos gráficamente en la recta real.
c) Determine la amplitud del intervalo, las cotas, extremos, máximos y mínimos, si los conjuntos están acotados.
d) Analizar y fundamentar si dicho intervalo es o no un entorno y en caso afirmativo hallar el centro y el radio y expresarlo como tal.

3) Dadas las funciones $f_i: R\to R$:

$f_1(x)=(x-2)^2-4$ $f_2(x)=\frac{3x+2}{5-x}$

$f_3(x)=|x-2|$ $f_4(x)=\log_2\sqrt{x-3}$

$f_5(x)=-\sqrt{2-x^2}$ $f_6(x)=\sqrt{2+x-x^2}$

$f_7(x)=-2x^3$ $f_8(x)=\frac{x+\frac{1}{3}}{3x+1}$

$f_9(x)=\frac{2}{x-1}$ $f_{10}(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-3x}$

$f_{11}(x)=\begin{cases} x+3 & si & x<2 \\ -x+7 & si & x\ge 2 \end{cases}$ $f_{12}(x)=\begin{cases} x^2-4 & si & x<0 \\ x-1 & si & x\ge 0 \end{cases}$

$$f_{13}(x)=\begin{cases}2x+3 & si\, x<\dfrac{1}{2}\\ 2 & si\ x=\dfrac{1}{2}\\ 1 & si\ x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\qquad f_{14}(x)=\begin{cases}2-1 & si\, x\le -1\\ 3x+2 & si\ \ |x|<1\\ 7-2x & si\ x\ge 1\end{cases}$$

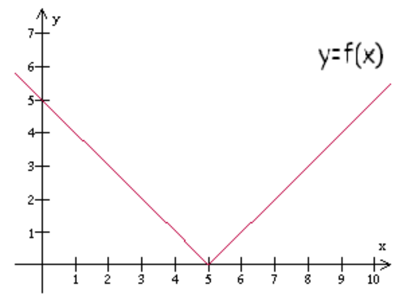
a) Represéntelas gráficamente, determinando previamente el dominio.
b) Determine el conjunto imagen.

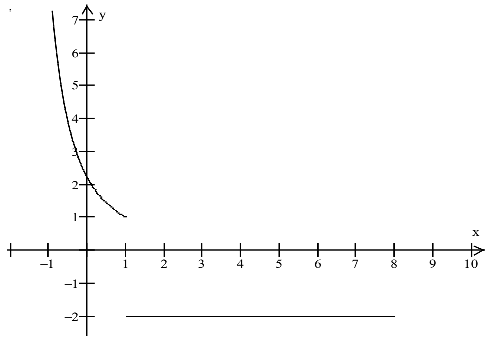
Bibliografía

1. Rabufetti, Hebe T.
2. Sadosky – Guber – Elementos de Cálculo diferencial. Vol I y Vol II
3. Piskunov, N. – Cálculo Diferencial e Integral.
4. Swokowski, Earl. – Cálculo con Geometría Analítica.
5. Larson, R- Hostetler, R – Edwards, B. – Cálculo y Geometría Analítica. Vol. I.

Trabajo Práctico Nº2: “Límites. Continuidad”

1)Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones dadas, estudie los límites solicitados:





a) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) =$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

2) Utilizando las propiedades de límite, calcule los siguientes límites:

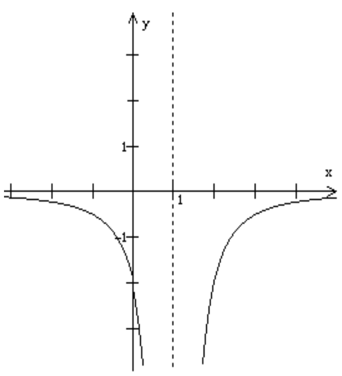
a) $\lim\limits_{x\to \pi}(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -6}\left(x^{-1}\quad \sqrt[3]{x+5}\right) =$

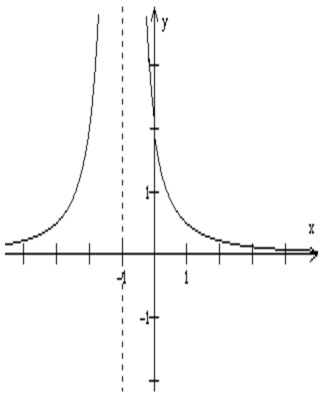
c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 3x + 4) =$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^3+5}{x^2+3x-4}\right) =$

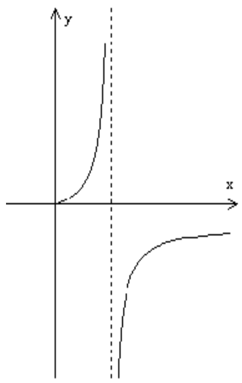
3) Complete



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$



$\lim\limits_{x\to -1} g(x) =$



$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} h(x) =$

4) Calcule los siguientes límites, graficando previamente los ítems a, b, c, d

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5}{x} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{x^2} =$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x}{x-2} =$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} =$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3}{x} =$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-3x^3 + 2x - 1\right) =$

LÍMITES INDETERMINADOS: $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty;0^{\infty};1^{\infty}$

5) **Indeterminaciones del tipo** $\frac{0}{0}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^3-3x^2-4x}=$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5-7x^3+2x^2}{3x^4+6x^2}=$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4+2x^3-x}{x^2-2x}=$ f) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x^2-3x}{2-\sqrt{2x-2}}\right)=$

g) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-7x+10}\right)=$ h) $\lim\limits_{x\to 7}\left(\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\right)=$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{5x}=$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}=$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 4x}{x}=$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{tg}3x}=$

6) **Indeterminaciones del tipo** $\frac{\infty}{\infty}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2}{10x-3}=$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3-5x^2+3}{3x-7x^2}=$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^4+5x+3}{5\left(1-x^4\right)}=$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{x^4-5x}}{x-2+\sqrt[3]{27x^6-2}}=$

7) **Indeterminaciones del tipo** $\infty-\infty$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x^2-8x+15}\right)=$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4}{x^2-5x+4}-\frac{7}{x-1}\right)=$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2}\right)=$

8) **Indeterminaciones del tipo 1^{∞} (tener en cuenta que** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$)

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{3x-2}=$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{1/x}=$

9) Dadas las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+2x+1$ en $x_0=1$ b) $f(x)=\begin{cases}2x & si \quad x>1\\ -x^2 & si \quad x\le 1\end{cases}$ en $x_0=1$

c) $f\ (x)=\begin{cases} x+1 & si\, x\leq 0 \\ x^2+1 & si \quad 0<x\leq 1 \\ 2x+1 & si\ x>1 \end{cases}$ $\quad x_1=0\ y\ x_2=1$

I. Represente gráficamente.
II. Exprese el dominio y la imagen.
III. Analice si cada una de ellas es continua en el punto indicado. Si se produce discontinuidad, especifique el tipo.

10) Determine el o los valores de "c" para los cuales cada función es continua en R

a) $f(x)=\begin{cases} c^2x & si \quad x<1 \\ 3cx-2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases} c-x & si \quad x>-1 \\ cx-2 & si \quad x\leq -1 \end{cases}$

Ejercicios complementarios:

1) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x}{2+\log x}=$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}x^{-2}\right)=$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-11x+4}{x^3}=$

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+1\right)^{\frac{2}{x}}=$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{4x-3}}{x^2-1}=$

h) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x}=$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}=$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+5}=$

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{x}\right)=$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-3}}{x-1}=$

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x}\right)^{x}=$

ñ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}=$

2) Represente gráficamente las siguientes funciones y analice si cada una de ellas es continua en el punto indicado.

a) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ en $x_0=0$

b) $f\left(x\right)=\begin{cases} x+1 & si \quad x\neq 2 \\ -1 & si \quad x=2 \end{cases}$ en $x_0=2$

3) Calcule a y b de modo que la función sea continua en todo su domino.

$$f\,(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & si\, x<0 \\ ax+b & si \quad 0\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & si\ 2<x \end{cases}$$

❖ Bibliografía

1- Rabuffetti, Hebe T. – Introducción al Análisis Matemático: Cálculo 1.
2- Sadosky – Guber – Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Vol I y II.
3- Piskunov, N – Cálculo Diferencial e Integral.
4- Sowkowski, Earl. – Cálculo con Geometría Analítica.
5- Larson, R. – Hoatetler, R – Edwards, B. – Cálculo y Geometría Analítica. Vol I.
6- De Guzmán, M – Colera, J. – Salvador, A – Matemáticas. Bachillerato 2.

Trabajo Práctico Nº 3: "La Derivada"

1) Para las siguientes funciones:

   $f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = x^3$

   a) Halle el incremento Δy, para $x = 1$; si

   i) $x + \Delta x_1 = 2$ ii) $x + \Delta x_2 = 1{,}5$ iii) $x + \Delta x_3 = 0{,}5$

   b) Halle el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para cada uno de los ítems anteriores.

   c) Represente gráficamente, indicando Δx y Δy en cada caso.

2) Aplicando la definición de derivada, calcule:

   a) $g'(1)$ y $g'(2)$ si $g(x) = x^3 + 2$

   b) $h'(5)$ y $h'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ si $h(x) = \sqrt{2x-1}$

3) Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los x_o indicados en cada caso, previa representación gráfica.

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 3 \\ 2x+3 & si \quad x > 3 \end{cases}$ $en\ x_o = 3$

   b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \le -2 \\ -x-3 & si \quad x > -2 \end{cases}$ $en\ x_0 = -2$

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $en\ x_o = 0$

4) Utilizando las fórmulas de derivación, calcule la derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = 5x^3 - 3x^2 + 4$

   b) $y = (x+1)^3$

   c) $y = \sqrt[3]{x^2+3}$

   d) $y = x^{1/2} + 3x^{2/3} - 5x^{4/5} - 6x^{-1/6}$

   e) $y = x^2 \ln x$

   f) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

   g) $y = \operatorname{sen}(2x)$

   h) $y = \operatorname{sen}^5 x$

   i) $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$

   j) $y = \ln(\cos(2x))$

   k) $y = \ln(\operatorname{tg}(x))$

   l) $y = x^2 \operatorname{arc\,sen} x^2 + 3\operatorname{cosec}^2(x+1)$

   m) $y = (3x^2 - 2)^{\cos x}$

   n) $y = 3^{\ln(2x)}$

   ñ) $y = 5\arccos(3x)$

   o) $y = \operatorname{arc\,tg}(3x^2)$

   p) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   q) $y = \dfrac{1+2\operatorname{tg}x}{x^3}$

   r) $y = \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

   s) $y = \ln\left(\dfrac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)$

   t) $y = e^{7x^2 + \operatorname{sen} x}$

   u) $y = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

   v) $y = \sqrt{3^{x^2+1}}$

   w) $y = \sqrt[3]{(5x-3)^2}$

5) Utilizando la derivación logarítmica, calcule la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=(7x+2)^{(x-3)}$ b) $y=(2x+1)^{\left(\frac{x+3}{4}\right)}$ c) $y=(\ln x)^{(x^2+x)}$ d) $y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{x}$

6) Halle las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $y=x^5$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+x$

7) Calcule:

a) $f'(9)$ siendo $f(x)=3x\sqrt[3]{3x}$

b) $f'\left(\dfrac{\pi}{36}\right)$ siendo $f(x)=\left(\cos^2(3x)-\operatorname{sen}^2(3x)\right)\operatorname{sen}(6x)$

8) Responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Para qué valores de "x" se anula la derivada de $f(x)=x^3-2x$?

b) ¿Para qué valores de "x" la derivada de $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ es igual a -4?

c) ¿Para qué valores de "x" se anula la derivada segunda de $f(x)=-x^4+6x^2$?

<u>Ejercicios complementarios:</u>

1) Dada la función $f(x)=x^3+3$

a) Halle el incremento Δy, para $x=1$; si $\Delta x=0{,}5$

$x+\Delta x_3=0,5$

b) Halle el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

c) Represente gráficamente, indicando Δx y Δy en cada caso.

2) Calcule la primera derivada de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación.

a) $f(x)=x^4+3x^2-6$ b) $f(x)=6x^3-x^2$

c) $f(x)=3\sqrt{x}-\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}$ d) $f(x)=x^4+3x^2-6$

e) $f(x)=\sqrt{1+2x-x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{5}$

g) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-3x$ h) $f(x)=(2+3x^3).(\ln x+2x+3)$

i) $f(x)=\dfrac{(x+3)^3}{(x-5)^2}$ j) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-5}{x^2+5}}$

k) $f(x)=2senx+\cos(3x)$ l) $f(x)=sen^3x.\cos x$

m) $f(x)=\ln(2x+3)$ n) $f(x)=e^{x}+x^{e}$

3) Calcule las derivadas de las siguientes funciones utilizando derivación logarítmica:

a) $f(x)=(2x+2)^{x}$ b) $f(x)=\left(\frac{3}{x}\right)^{x}$

c) $f(x)=(2x)^{senx}$ d) $f(x)=(\ln x)^{\cos x}$

4) Halle las derivadas sucesivas de tercer orden de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\cos^{2}(2x^{2}+3x-5)$

b) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

Trabajo Práctico Nº4: “Aplicaciones de la Derivada”

1) Dada la función: $y = x^3 - 2x^2 + 2$, determinar:
   a) La ecuación de la recta tangente a la curva en $x_0 = 2$.
   b) La ecuación de la recta normal a la curva en $x_0 = 2$.
   c) Los puntos donde la recta tangente a la curva es paralela al eje x.
   d) Graficar la curva y ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

2) Responder las siguientes cuestiones:
   a) ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 + 5$ es su tangente paralela a la recta: $12x - y = 17$ y en qué puntos es perpendicular a : $x + 3y = 2$?
   b) ¿Cuál es la pendiente y la inclinación de la recta tangente a la parábola de ecuación $f(x) = -2x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 2$?
   c) ¿Cuál es el punto de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ en el cual la inclinación de la tangente es de 45º?

3) Dadas las siguientes funciones:

   $f(x) = x^2 - 7x + 12$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ $\qquad$ $h(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

   $r(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$ $\qquad$ $s(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2$ $\qquad$ $t(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$

   Determinar:
   a) El o los puntos críticos y su naturaleza.
   b) Intersección con los ejes.
   c) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
   d) Puntos de inflexión.
   e) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
   f) Graficar.

4) Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$, encontrar extremos relativos y clasificarlos, determinar asíntotas verticales y horizontales.

5) Dada la función: $y = -\frac{2}{3}x^3 + ax^2$ y su punto de inflexión $P_I\left(1; \frac{4}{3}\right)$. Hallar:
   a) El valor de “a” en la función.
   b) Los puntos críticos y su naturaleza.
   c) Graficar.

6) Trace la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones dadas en cada caso:
   a) $f(0) = 1;$ $\quad f(2) = 3;$ $\quad f'(0) = f'(2) = 0;$ $\quad f'(x) < 0 \, si \, |x-1| > 1;$ $\quad f'(x) > 0 \, si \, |x-1| < 1;$ $f''(x) > 0 \, si \; x < 1;$ $f''(x) < 0 \, si \; x > 1;$

PROBLEMAS

7) Calcule el número positivo que sumado con su inverso multiplicativo da por resultado una suma mínima.
8) Con 40 dam de alambre se desea delimitar una superficie rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?
9) Halle dos números cuya suma sea 120 de manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.
10) Un rectángulo de perímetro igual a 12 cm gira sobre uno de sus lados para engendrar un cilindro. De todos los rectángulos posibles, ¿cuál genera el cilindro de mayor volumen?

Ejercicios complementarios:

1) Dadas la función: $f(x)=2x-\frac{1}{2}x^2$, determinar:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva en $x_0 = 3$.
b) La ecuación de la recta normal a la curva en $x_0 = 3$.
c) Los puntos donde la recta tangente a la curva es paralela al eje x.
d) Graficar la curva y ambas rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

2) Dada $f(x)=\frac{1}{x+2}$, halle los puntos de su gráfica donde la recta tangente tiene pendiente $-1/9$.

3) Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 3x^3 + 2x$ $\qquad g(x) = x^2 - \frac{1}{3}x$ $\qquad h(x) = \cos x \ en \ \left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$;

Determinar:

g) El o los puntos críticos y su naturaleza.
h) Intersección con los ejes.
i) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
j) Puntos de inflexión.
k) Intervalos de concavidad positiva y negativa.
l) Graficar.

4) Dada la siguiente función: $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$; encuentre puntos de inflexión, los intervalos de concavidad y convexidad. Con la información obtenida esboce una gráfica.
5) Analice el crecimiento de la curva correspondiente a la siguiente función: $y=\frac{x-1}{x+1}$, y halle las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes y las asíntotas. Con la información obtenida esboce una gráfica.
6) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2$ en el punto de inflexión.

Bibliografía

1. Rabuffetti, Hebe T. – Introducción al Análisis Matemático. Vol I
2. Sadosky – Guber – Elementos de Cálculo diferencial. Vol I y II
3. Piskunov, N. – Cálculo Diferencial e Integral.

Trabajo Práctico Nº5: "Teoremas del valor medio. Límites indeterminados. Mc Lauren - Taylor"

***Teorema de Rolle**:* "Sea f continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a;b)$. Si $f(a)=f(b)$ existe al menos un número "c" en $(a;b)$ tal que $f'(c)=0$.

***Teorema del valor medio**:* "Si f continua en el intervalo cerrado $[a;b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a;b)$, existe al menos un número "c" en $(a;b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1) Hallar los valores de "c" en el intervalo en los que $f'(c)=0$, representando gráficamente las situaciones propuestas:
   a) $f(x)=x^2-3x+2$ en el intervalo $(0;3)$
   b) $f(x)=x^4-x^2$ en el intervalo $(-2;2)$
2) Dada $f(x)=5-\dfrac{4}{x}$, en $(1;4)$ hallar:
   a) La pendiente de S, siendo S la recta secante que pasa por $(1;f(1))$ y $(4;f(4))$
   b) La ecuación de T, siendo T la recta tangente a la gráfica de la función paralela a S.
3) Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L´Hopital:

   a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2}$

   e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cdot\sqrt{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$

   i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ k) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen}x)^x$

4) Aproxime las siguientes funciones mediante:
   a) El polinomio de Mc Laurin de grado 4, siendo $f(x)=e^{2x}$
   b) El polinomio de Taylor de grado 3, siendo $f(x)=\ln x$, centrado en $a=22,5$
5) Calcule aproximadamente:
   a) $\ln 1,1$ mediante un polinomio de grado 4.
   b) $\operatorname{sen} 89^{\circ}$ mediante un polinomio de grado 3.

Trabajo Práctico Nº6: "La Diferencial"

1) Sea $y = 3x^2 - 5$. Calcular:
   a) Δy correspondiente a un incremento Δx de x.
   b) Δy, para $x = 2$ y $x + \Delta x = 2{,}1$.
   c) dy.
   d) Representar gráficamente, indicando Δy, Δx y dy.

2) Sea $y = x^3$. Calcular:
   a) Δy correspondiente a un incremento Δx de x.
   b) Δy, para $x = 1$ y $x + \Delta x = 1{,}02$.
   c) dy.
   d) El error que se comete al considerar $dy \approx \Delta y$.
   e) Represente gráficamente, indicando Δy, Δx y dy.

3) Calcule la diferencial dy de las siguientes funciones:
   a) $y = 3x^2 - 4$ b) $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$ c) $y = x\sqrt{1-x^2}$
   d) $y = \dfrac{\sec^2 x}{x^2+1}$ e) $y = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{6\pi x - 1}{2}\right)$

4) Calcule aproximadamente, utilizando diferenciales y luego compare la respuesta con la calculadora.
   a) $\sqrt{99{,}4}$ b) $sen\, 60^{o}30'$ c) $\sqrt[3]{28}$ d) $\sqrt[4]{624}$ e) $(2{,}99)^3$

5) a) Un disco metálico se dilata por acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 cm a 5,06 cm. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

   b) Hallar aproximadamente, la variación experimentada por el volumen de un cubo de arista 2 cm cuando ésta se incrementa en un 1%.

6) Determinar la primera, segunda y tercera diferencial de las siguientes funciones.
   a) $y = \sqrt{3x+1}$ b) $y = \sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}$ c) $y = 3x^4 - 4x^2 + x - 2$

Trabajo Práctico Nº7: "Integrales Indefinidas"

1) Completar utilizando la tabla de primitivas y compruebe los resultados por derivación:

$\int x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\int x^2\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\int \frac{1}{x}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\int 2^x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\int \sec^2 x\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Calcular las siguientes integrales:

- **Integrales por descomposición**:

a) $\int (4x^3 - 7x^2 + 5x + 2)\,dx$ b) $\int \frac{2}{\sqrt[7]{x^5}}\,dx$ c) $\int (x-1)(x^2+x+1)\,dx$

d) $\int (\cos x - 5e^x)\,dx$ e) $\int \frac{3}{x-5}\,dx$ f) $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx$

g) $\int (x - 2tg\,x)\,dx$

- **Integrales por sustitución:**

a) $\int \frac{2}{1+4x^2}\,dx$ b) $\int e^{x+2}\,dx$ c) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ d) $\int (e^x + 3e^{-x})\,dx$ f) $\int sen\,(2x+1)\,dx$

g) $\int \frac{\cos x}{sen\,x}\,dx$ h) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$ i) $\int (sen\,x \cos^4 x)\,dx$

- **Integrales por partes**:

a) $\int x.sen\,x\,dx$ b) $\int x^2 e^x\,dx$ c) $\int x.ln\,x\,dx$

- **Integrales por descomposición en fracciones simples**:

a) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx$ b) $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,dx$ c) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

- **Integrales de funciones trigonométricas**:

a) $\int sen^2 x\,dx$ b) $\int 3cos^3 x\,dx$

3) Resolver las siguientes integrales, aplicando alguno/s de los métodos estudiados:

a) $\int \frac{-3x^3}{1+x^4}\,dx$ b) $\int \frac{x}{(x-3)(x+2)}\,dx$ c) $\int 2x^2 e^x\,dx$ d) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ f) $\int \frac{5x}{(x-1)^2}\,dx$ g) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ h) $\int \sqrt{x}\,ln\,x\,dx$ i) $\int arcsen\,x\,dx$

4) Hallar la primitiva:

a) de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula para $x = 2$.

b) que toma valor 10 para $x = 2$ y cuya pendiente está dada por la función $x^2 - 4x + 25$

Trabajo Práctico Nº8: “Integrales Definidas. Aplicaciones”

1) Calcular:

a) $\int_0^3 \left(x^3 - 7x\right)dx$ b) $\int_2^6 \frac{1}{x}\,dx$ c) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ d) $\int_3^6 \sqrt{x-2}\,dx$

2) Representar gráficamente y calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función:
   a) $y = x^2 + 1$, el eje “x” y las rectas de ecuación x=1 y x=3.
   b) $y = 3x^2 + x + 1$, el eje “x” y las rectas de ecuación x=2 y x=4.

3) Calcular y representar gráficamente el área de la región limitada por las gráficas de las funciones

a) $y = x^2$ e $y = 2x$ b) $y = -x^2 + 6x - 4$ e $y = \dfrac{x^2 + 4}{5}$

c) $y = -x^2 + x$ y la recta $y = -x$ d) $y = x^3$ e $y = x$

e) $y = x^2 - x$ e $y = 2x$

4) Hallar la longitud del arco de curva de:
   a) Una circunferencia
   b) $y = x^{3/2}$ entre x=0 y x=5

5) Hallar el volumen de un cuerpo engendrado por la curva que se indica cuando esta gira alrededor del eje coordenado que se consigna:
   a) $y = \frac{2}{3}x$, alrededor del eje “x”, entre x=2 y x=9.
   b) $y = x^3$, alrededor del eje “y”, entre y=0 e y=8.