Unidad 2:Funciones

Situaciones:

1. Se retira del fuego un recipiente con agua hirviendo. Durante los primeros minutos la temperatura del agua desciende rápidamente hasta llegar a 35^oC a los 3 minutos. Luego se continúa enfriando más lentamente y a los 20 minutos del instante inicial la temperatura del agua se estabiliza a la temperatura ambiente (18^oC).
2. La dosis recomendada para la aplicación de cierto plaguicida es de 10 litros por hectarea.

Preguntas:

1. ¿Será posible encontrar una "relación" que explique, aproximadamente, los fenómenos observados?
2. ¿ Dado un instante de tiempo cualquiera, cuál es la temperatura del agua?
3. ¿ A los cuántos minutos del instante incial la temperatura del agua alcanza los 25^o?.
4. ¿ Cuánto plaguicida hará falta para cubrir 35 hectáreas? ¿ Y 2 hectáreas?

Un modelo matemático es una idealización abstracta de un problema, que brinda una representación de un fenómeno real utilizando expresiones y relaciones matemáticas.

Definición: Dados dos conjuntos A y B se dice que una relación f entre ellos es una **función** si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\forall x \in A \exists y \in B : f(x) = y$
2. a cada elemento $x \in A$ le corresponde un, y sólo un, elemento de B.

El conjunto A es el **dominio** de la función, el conjunto B es el **codominio**
El **rango** o **imagen** de la función f es el conjunto
$Im(f) : \{y \in B / \exists x \in A \text{ y } \mathrm{f(x) = y}\}$

Dominio

Ejemplos

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $f = \{(1; 2), (2; 3), (3; 2)\}$, A es el dominio, f es una relación funcional entre A y $\mathbb{R}$. $Im(f) = \{2, 3\}$
- En el caso del ejemplo 2, el dominio no es un conjunto finito, la función o relación debe indicarse mediante una regla o conjunto de reglas. En tal caso $f(x) = 10x$

En este curso se verán funciones cuyo dominio e imagen son conjuntos de números reales. Se llaman **funciones reales de una variable real**.

Simbólicamente, una función con dominio A y codominio B puede expresarse de las siguientes maneras:

$$f : A \to B : f(x) = y$$

Dado $x_o \in A, y_o = f(x_o)$ es la imagen de x_o por f.

Ejemplos

Decidir cuáles de las siguientes relaciones son funciones.

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$
   1.1 $f = \{(1; 0), (2; 0), (3; 1), (4; 3)\}$
   1.2 $g = \{(1; 0), (2; 0), (3; 1), (4; 3), (5; 3)\}$
   1.3 $g = \{(1; 0), (2; 0), (3; 1), (4; 2), (5; 1), (2; 2)\}$
2. Indicar dominio e Imagen de las siguientes funciones
   2.1 $f(x) = x + 2$
   2.2 $f(x) = \sqrt{x + 2}$
   2.3 $g(t) = 1/t$

Las funciones escalares pueden representarse gráficamente en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas:
El dominio se considera sobre el eje de las **abscisas**
La imagen sobre el eje de las **ordenadas**
El gráfico de la función f está dado por

$$\{(x; y) : y = f(x)\}$$

Ejemplos

Encontrar los gráficos de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x - 1$
2. $g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & x > 2x + 2 \\ \text{si} & x \leq 2 & \end{array} \right.$
3. $h(x) = 1/x$

Observaciones

Dada una función f:

- La intersección con el eje de las ordenadas, si existe, es única y se obtiene para $x = 0$. Esto es, si existe tal punto dicho punto es $(0, f(0))$
- Las intersecciones con el eje de las abscisas, si existen, corresponden a los puntos donde el valor de la función es cero. Los puntos del dominio para los cuales el valor de la función es cero se denominan ceros de la función

Funciones suryectivas

Sea $f : A \to B$.
Si se satisface que $Im(f) = B$ entonces se dice que la función f es sobre o suryectiva y que $f : A \to B$ es una aplicación de A *sobre* B

Ejemplo

- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$ suryectiva?
- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ suryectiva?

Funciones Inyectivas

Sea $f : A \to B$.
Si cada elemento de $Im(f)$ es imagen de un único elemento del dominio de f entonces se dice que la función f es inyectiva ó uno a uno . Es decir,

$f : A \to B$ es inyectiva si, y sólo si,

$$\forall a \in A, b \in A, a \neq b \to f(a) \neq f(b)$$

Ejemplo

- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$ inyectiva?
- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ inyectiva?

Funciones Biyectivas

Sea $f : A \to B$.
Se dice que f es biyectiva si, y sólo si, f es inyectiva y suryectiva, quedando así establecida una correspondencia biunívoca entre A y B.

$$\forall a \in A, b \in A, a \neq b \to f(a) \neq f(b)$$

Ejemplo

- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$ biyectiva?
- ¿ Es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ biyectiva?

Funciones lineales - Ecuación explícita de la recta

Se llaman funciones lineales a aquellas funciones cuya expresión es de la forma

$$f(x) = ax + b$$

o equivalentemente, $y = ax + b$
El gráfico de $y = ax + b$ es una recta, de parámetros a y b donde

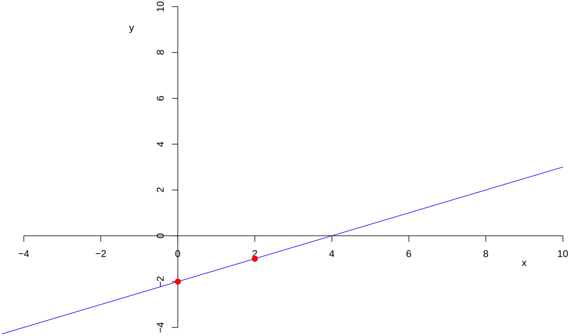
- a es la pendiente de la recta , es un parámetro de dirección,
- b es la ordenada al origen, es un parámetro de posición e indica donde corta la recta al eje de las ordenadas.

Ejemplo

Consideremos la recta $y = \frac{1}{2}x - 2$

Para

- $x = 0$, $y = -2$
- $x = 2$, $y = -1$



Ecuación del haz de rectas

Consideremos la recta $y = ax + b$ y tomemos un punto $p_1 = (x_1, y_1)$ pertenciente a ella.
Como p_1 pertenece a la recta entonces sus coordenadas (x_1, y_1) satisfacen la ecuación de la recta y así $y_1 = ax_1 + b$. Restando ambas expresiones se tiene que

$$y - y_1 = a(x - x_1) + b - b \Rightarrow y - y_1 = a(x - x_1)$$

.
Esta última ecuación es la que, variando los valores de a da las infinitas *rectas que pasan por el punto* $p_1 = (x_1, y_1)$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

La dosis recomendada de cierto medicamento (en mg) es una función lineal del peso del paciente (kg). Se sabe que a un paciente que pesa 40 kg se le debe administrar una dosis diaria de 25 mg, mientras que a un paciente de 60kg debe recibir una dosis diaria de 52 mg.
¿ Como determinar esa función lineal en base a la información suministrada?

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

En general, si queremos que la recta pase por $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$, entonces como ambos puntos pertenecen a esa recta se verifica que $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Restando ambas expresiones se tiene

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) + b - b \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x1}$$

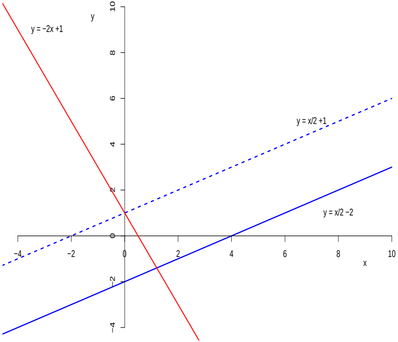
Luego la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x1}(x - x_1)$$

Dos rectas $R_1 : y = a_1 x + b_1$ y $R_2 : y = a_2 x + b_2$ son

Paralelas
si $a_1 = a_2$
(tienen la misma pendiente)

Perpendiculares
si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$
(el producto de las pendientes es -1)



Situación

En Diciembre de 2013 se introdujo cierta cantidad de ejemplares de una especie en una reserva ecológica. La función que permite calcular la cantidad de ejemplares de esa especie que hay en la reserva transcurridos t meses después de diciembre de 2013 es $C(t) = -2t^2 + 20t + 400$.

a ¿Cuál es la máxima cantidad de ejemplares que esa especie?

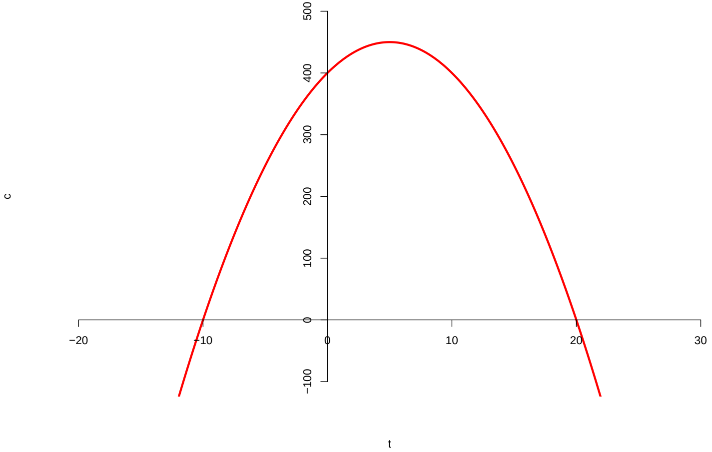
b ¿ Cuándo fue máxima esa ploblación?

c ¿Cuántos ejemplares hubo en febrero de 2014?

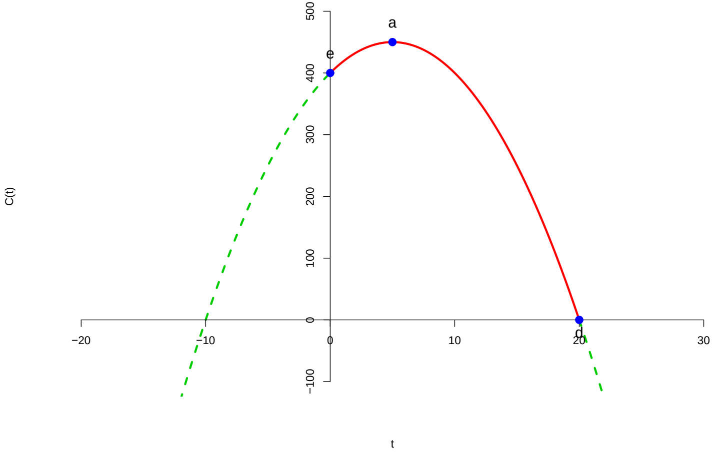
d ¿Se extinguió en algún momento esa especie en la reserva?

e ¿Cuántos ejemplares se introdujeron en diciembre de 2013?

Gráfico de $C(t) = -2t^2 + 20t + 400$



Región que responde a nuestro planteo



Funciones cuadráticas

Se denominan funciones cuadráticas a aquellas funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

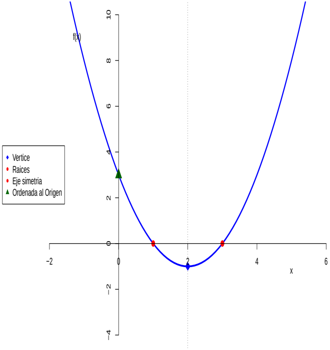
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

- ax^2 es el término cuadrático, a es el coeficiente cuadrático
- bx es el término lineal, b es el coeficiente lineal
- c es el término independiente

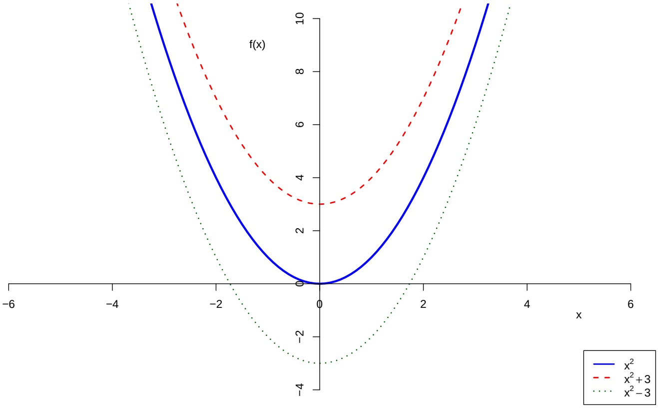
El gráfico de una función cuadrática es una parábola.

Características de una parábola

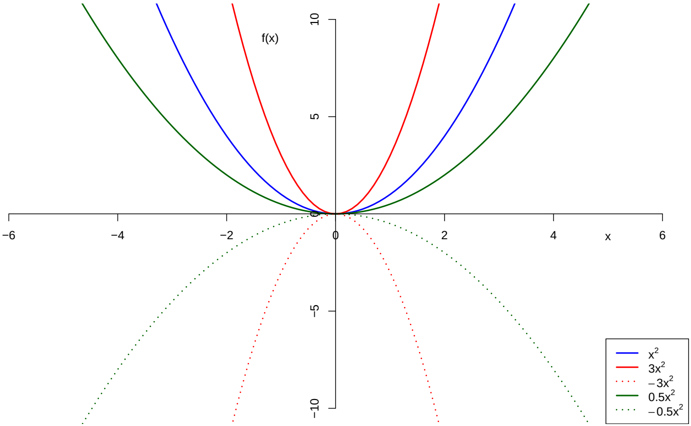
- **Raíces de la parábola**: Son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, los valores de la resolvente $\frac{-b+-\sqrt{b^2-2ac}}{2a}$. Si estas soluciones $\in \mathbb{R}$ entonces son las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x.
- **Término independiente**: Punto de intersección de la gráfica con el eje y, $(f(0) = c)$.
- **Vértice**: Punto máximo o mínimo de la parábola, según sea la dirección de sus ramas. Sus coordenadas son (x_v, y_v), con $x_v = -\frac{a}{2b},\ y_v = f(x_v))$
- **Eje de simetría**:Recta cuya ecuación es $x = x_v$



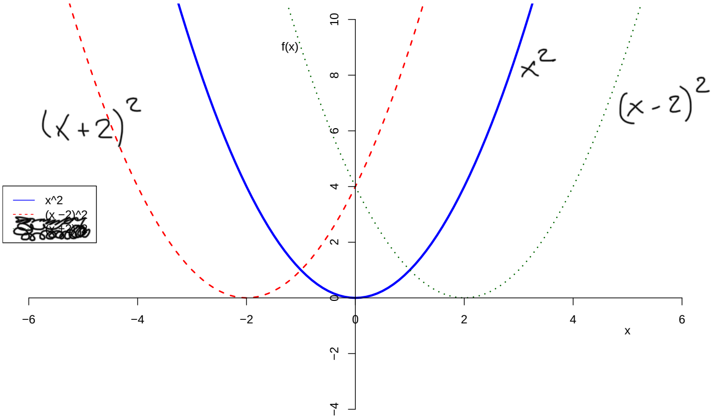
Funciones del tipo $f(x) = x^2 + c$



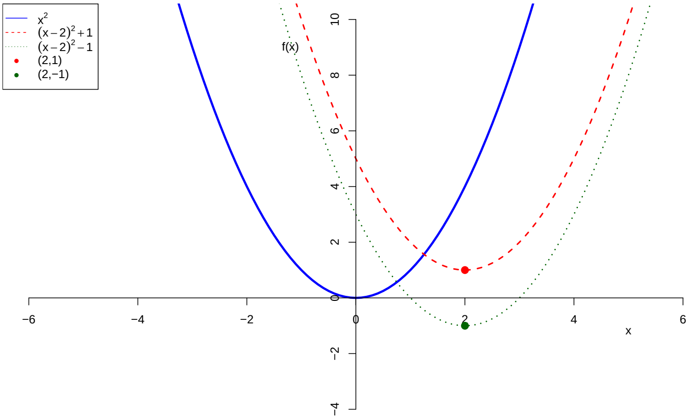
Funciones del tipo $f(x) = ax^2$



Funciones del tipo $f(x) = (x - d)^2$



Funciones del tipo $f(x) = (x-d)^2 + e$

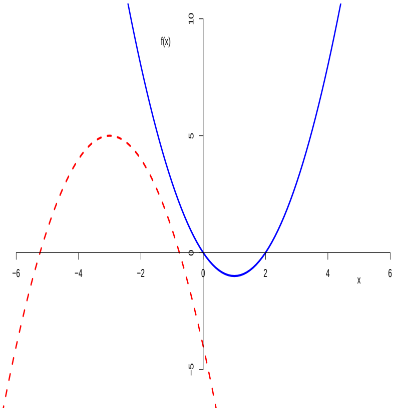


Ejemplos

Graficar las siguientes funciones:

1. $f(x) = (x-5)^2$
2. $f(x) = (x-3)(x-2)$

Dar la expresión de la funciones cuadráticas cuyas gráficas se muestran en la figura



Ejercicios

1. Se dispara un proyectil el suelo hacia arriba con una velocidad inicial de 100m/s. La posición del proyectil a los t segundos del lanzamiento está expresada por $p(t) = -5t^2 + 100t$

   1. ¿Para qué valores de t el proyectil asciende?
   2. ¿ Cuándo alcanza la altura máxima? ¿Cuando llega al suelo?

2. La trayectoria de una partícula está dada por $t_1(t) = -t^2 + 3t - 7$ y la de otra partícula está dada por $t_2(t) = 3t - 5$. ¿ Se encuentran ambas partículas? , ¿cuándo?

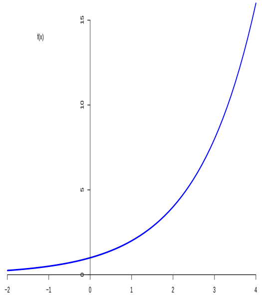
Situación 1:

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Si las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y si en el instante inicial sólo hay una ameba, ¿ cuántas amebas habrá después de t horas de iniciado el proceso?

Si en el instante inicial hubiera habido N_o amebas, ¿cuántas amebas habría al cabo de t horas?

La función que describe la situación planteada en el ejemplo anterior es

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : f(t) = 2^t$$



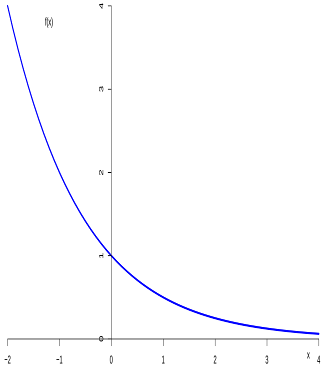
Situación 2:

Un elemento radioactivo tiene la propiedad de desintegrarse con el transcurso del tiempo transformándose en otro elemento mediante un proceso denominado *desintegraciń radioactiva*, que consiste en la emisión por parte del núcleo de partículas alfa y beta (α y β). En un laboratorio se observa una sustancia radioactiva que al desintegrarse, el número de partículas de la sustancia madre se reduce en un 50 % cada año. El año en este caso, se denomina *vida media*. La vida media es el tiempo que debe transcurrir para que el número de partículas se reduzca a la mitad.

Si la masa objeto de estudio en el momento $t = 0$ es de 1 k, que cantidad de sustancia habrá al cabo de t años?

La función que describe la situación anterior es

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}/f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$$



Función Exponencial

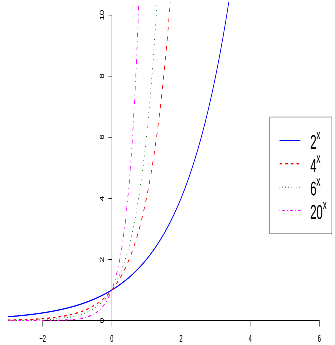
Las situaciones planteadas en los ejemplos anteriores son descriptos por Funciones Exponenciales. Este tipo de funciones es muy utilizado en Biología para modelar fenómenos como crecimiento (decrecimiento) de poblaciones de bacterias, animales y vegetales, desintegración de una sustancia radioactiva, entre otros.

Definición: Dado $a > 0, a \neq 1$ se llama Función exponencial de base a a la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = a^x$$

Comportamiento de la función Exponencial

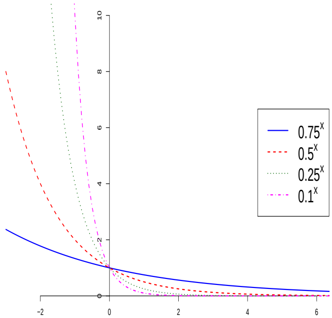
$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$



- Dominio $(f) = \mathbb{R}$, Imagen $(f) = \mathbb{R}^+$
- f es continua.
- Corta al eje de las ordenadas en el punto en $(0, 1)$.
- f es creciente y cuánto mayor es el valor de a más rápido crece.
- Si $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$
- Si $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$ (el semieje negativo de las x es asíntota horizontal de f)

Comportamiento de la función Exponencial

$$f(x) = a^x \text{ con } 0 < a < 1$$

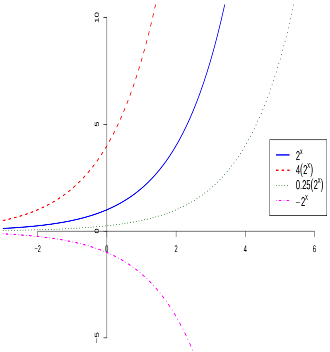


- Dominio $(f) = \mathbb{R}$, Imagen $(f) = \mathbb{R}^+$
- f es continua.
- Corta al eje de las ordenadas en el punto en $(0, 1)$.
- f es decreciente y cuánto menor es el valor de a más rápido decrece.
- Si $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$
- Si $x \to \infty$, $f(x) \to 0$ (el semieje positivo de las x es asíntota horizontal de f)

Comportamiento de la Función Exponencial

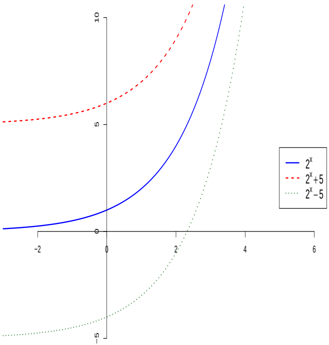
$f(x) = k \cdot a^x, \; k \neq 0$

El gráfico de la función corta al eje de las ordenadas en el punto $(0, k)$.



$f(x) = a^x + c$

El gráfico de la función se traslada c unidades sobre el eje de las ordenadas.



Algunas Aplicaciones de la función Exponencial

Crecimiento Poblacional

Según la ley de crecimiento no inhibido, el proceso de mitosis comienza con un cultivo de N_o células donde cada célula crece durante cierto periodo y después se divide en dos células idénticas. Suponemos que el tiempo necesario para que cada célula se divida en dos es constante y que no cambia al aumentar el número de células. Después, éstas células crecen y se dividen en dos, y así sucesivamente.
Un modelo que proporciona el número de células en el cultivo después de transcurrir un tiempo t (en las primeras etapas del crecimiento) es:

$$N(t) = N_o e^{(0,4 \cdot t)}$$

donde $e = 2,718..$

- ¿ Cuál es el número de bacterias a las 2 horas de comenzado el cultivo? A las tres horas?
- Graficar f.

Algunas Aplicaciones de la función Exponencial

Crecimiento de Poblaciones

Si inicialmente el tamaño de la población es p_0, y si se sabe que el índice de crecimiento anual es i_c, al cabo de t años el tamaño de la población será

$$P(t) = p_o \cdot (1 + i_c)^t$$

Ejemplo: En cierta reserva, una comunidad de carpinchos tenía en el año 2015 45 ejemplares. Si se sabe que la población de carpinchos crece un 2 % anual, cuántos carpinchos habrá en el año 2025?

Desintegración radioactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. Dada una cierta sustancia, la cantidad que va quedando a lo largo del tiempo es :

$$M(t) = M_o \cdot a^t$$

donde

- M_o es la masa inicial,
- $0 < a < 1$ es una constante que depende de la sustancia y de la unidad de tiempo que se tome.

Ejemplo: Un gramo de estroncio-90 se reduce a la mitad en 28 años, según la función $M(t) = 10 \cdot 0,9755^t$, tomando como origen de tiempo el año 2010. ¿cuantos gramos de sustancia habrá en 2020?.

Problema:

Cierta colonia de bacterias crece de manera exponencial. Si en el instante inicial hay 50 bacterias, y luego de 3 horas hay 140 bacterias, ¿cuál es la función que modela este fenómeno?.

La función que describía el número de amebas luego de t horas de iniciado el experimento era

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : f(t) = 2^t$$

Pregunta: ¿Cuánto tiempo habrá que esperar para que haya 1200 amebas?

Respuesta: Debemos encontrar un tiempo t_o tal que $f(t_o) = 1200$, es decir, resolver la ecuación

$$2^{t_o} = 1200$$

Función Logarítmica

Para resolver este problema debemos conocer la *Función Inversa* de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / f(t) = 2^t$

<u>Definición:</u> Dada una función $f(x)$, se llama **función inversa** de $f(x)$ a otra función , $f^{-1}(x)$ que satisface la siguiente condición:

$$\text{Si} \;\; \mathrm{f(a) = b} \Rightarrow \mathrm{f^{-1}(b) = a}$$

f^{-1} es función si f es biyectiva.

Como la función exponencial $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \; / f(t) = a^t$ es biyectiva entonces existe su función inversa, que recibe el nombre de función logarítmica:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \; / f(x) = \log_a(x), \;\; \underline{a > 0, a \neq 1}$$

y verifica que $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$

Así, la función inversa de 2^x es $\log_2(x)$

Entonces, para resolver la ecuación

$$2^{t_o} = 1200$$

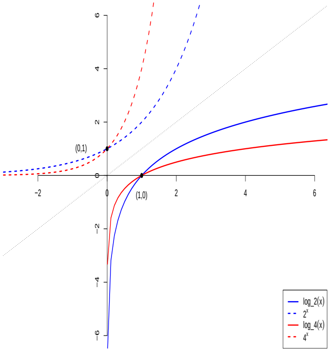
utilizando la función $\log_2(t)$ se tiene que

$$t_o = \log_2(1200) = 7,64$$

Es decir, para obtener 1200 amebas habrá que esperar $7,64$ h.
(aprox. 7h 38')

Características de la función logarítmica

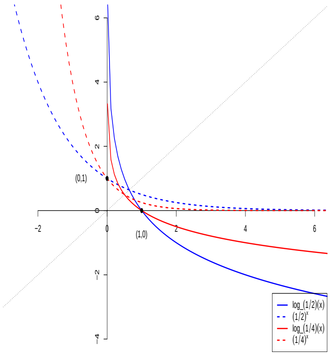
$$f(x) = \log_a(x) \text{ con } a > 1$$



- Dominio $(f) = \mathbb{R}^+$, Imagen $(f) = \mathbb{R}$
- f es continua.
- Corta al eje de las abscisas en el punto en $(0, 1)$.
- f es creciente y cuánto menor es el valor de a más rápido crece.
- Si $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$
- Si $x \to 0$, $f(x) \to -\infty$

Características de la función logarítmica

$$f(x) = \log_a(x) \text{ con } 0 < a < 1$$



- Dominio $(f) = \mathbb{R}^+$, Imagen $(f) = \mathbb{R}$
- f es continua.
- Corta al eje de las abscisas en el punto en $(0, 1)$.
- f es decreciente y cuánto menor es el valor de a más rápido decrece.
- Si $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0$, $f(x) \to \infty$

Los logaritmos

Dados dos números reales positivos,a y b ($a \neq 1$), se llama logaritmo en base a de b al número al que hay que elevar a para obtener b.

Esto es

$$\log_a(b) = c \leftrightarrow a^c = b$$

Ejemplos

- $\log_2(128) = 7 \leftrightarrow 2^7 = 128$
- $\log_{10}(100) = 2 \leftrightarrow 10^2 = 100$
- $\log_{1/2}(8) = -3 \leftrightarrow (1/2)^{-3} = 8$
- $\log_{1/3}(1/9) = 2 \leftrightarrow (1/3)^2 = 1/9$
- $\log_5(1) = 0 \leftrightarrow (5)^0 = 1$

Las funciones logarítmicas más usadas son

- $\log_{10}(x)$, logaritmo base 10 o logaritmo decimal, que se denota por $\log(x)$
- $\log_e(x)$, logaritmo natural o neperiano, que se denota por $\ln(x)$, donde $e = 2,718289$

En la calculadora científica:

1. Las teclas ln y log permiten calcular $\ln(x)$ y $\log(x)$ respectivamente
2. Si queremos resolver, por ejemplo: $\log(x) = 5$ debemos recordad que $\log(x) = 5 \leftrightarrow 10^5 = x$. Con la calculadora 5 + SHIFT + log = 10000.
3. Si queremos resolver, por ejemplo: $\ln(x) = 7$ debemos recordad que $\ln(x) = 7 \leftrightarrow e^7 = x$. Con la calculadora 7 + SHIFT + ln = 1096,633

Recordar:

- El logaritmo de la base es siempre 1: $\log_a(a) = 1$ ya que $a^1 = a$
- Para cualquier base a, $\log_a(1) = 0$ pues $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
- El logaritmo en base a de una potencia de base a es igual al exponente: $\log_a(a^n) = n$ ya que $a^n = a^n$

Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
  Ejemplo: $\log_2(8) = \log_2(2 \cdot 4) = log_2(2) + \log_2(4) = 1 + 2 = 3$
- Logaritmo del cociente: $\log_a(c/b) = \log_a(c) - \log_a(b)$
  Ejemplo:
  $\log_2(8) = \log_2(16/2) = log_2(16) - \log_2(2) = 4 - 1 = 3$
- Logaritmo de una potencia: $\log_a(b^m) = m \cdot \log_a(b)$
  Ejemplo: $\log_2(64) = \log_2(4^3) = 3 \cdot \log_2(4) = 3 * 2 = 6$
- Logaritmo de una raíz: $\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a(b)$
  Ejemplo: $\log_2(4) = \log_2(\sqrt{16}) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(16) = \frac{1}{2} * 4 = 2$

Cambio de base

Se pueden calcular logaritmos en cualquier base empleando logaritmos decimales o logaritmos neperianos mediante un cambio de base: Si $a > 0, a \neq 1, x > 0$

$$log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Aplicando log en la última igualdad y usando propiedades del logaritmo:

$$\log(a^y) = \log(x) \Leftrightarrow y\log(a) = log(x) \Leftrightarrow y = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Luego

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

.

Análogamente puede verse que

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

.

Ejercicio 1

En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al comienzo el cardumen creció rápidamente de después de un tiempo los recursos de la laguna escasearon y la población decreció. Si el número de truchas t años después de la siembra puede modelarse mediante la función

$$N(t) = -12t^2 + 21t + 100$$

1. ¿Para que valores (positivos) de t es $N(t) > 0$?
2. ¿ Se extingue la población de truchas? Si es así, ¿cuándo ocurre eso?

Ejercicio 2

El tamaño de cierto cultivo de bacterias se duplica cada 60 minutos.Si inicialmente tiene 5 millones de bacterias,

1. ¿ dentro de cuántas horas tendrá 320 millones de bacterias?
2. ¿ dentro de cuántas horas tendrá 5000 millones de bacterias?
3. ¿ Que tipo de gráfico conviene realizar para representar la cantidad de bacterias en función del tiempo? Graficar.

Ejercicio 3

El período de desintegración del Carbono 14 es 5370 años.

1. ¿En que cantidad se convierte una muestra de 30gr de C14 al cabo de 1000 años?
2. ¿ Cuántos años habrán de pasar para que una muestra de 30gr de C14 se conviertan en 20,86 gr?
3. Grafique la cantidad de C14 (en gr) en función del tiempo.

Bibliografía

1. Funcion Exponencial y Función Logarítmica - Matemática para Biología - FaCENA-UNNE. Apunte redactado por la Prof. Cristina Beltrametti
2. Rabuffetti,H.*Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*, Ed. El Ateneo, Bs As, 1981.