UNIVERSIDAD NACIONAL DEL NORDESTE
FACULTAD DE CIENCAS EXACTAS, NATURALES Y AGRIMENSURA

FUNCIONES

Algebra (Para Agrimensura)
Ciclo lectivo 2010

Esp. Prof. Liliana N. Caputo
Paula Daniela Bordón

TEMA 4

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Definición 1: Sean A y B dos conjuntos y una relación f, de A en B.

$f: A \to B$ es **función** si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

1) Existencia: Cada elemento de A tiene imagen en B es decir, que el alcance de f coincide con su dominio. En símbolos: $\forall x \in A: f(x) \in B$.

2) Unicidad: Cada elemento de A tiene una única imagen en B. En símbolos: $f(x) = y \wedge f(x) = z \Rightarrow x = y$.

Notaciones:

a) x se llama variable independiente y f(x) denota la imagen de x por la función f.

b) Si $f: A \to B$ es función, denotamos con f(A) al conjunto de imágenes de elementos de A es decir, $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A / y = f(x)$.

c) Si $f: A \to B$ es función y $E \subset B$, denotamos con $f^{-1}(E)$ al conjunto de preimágenes de elementos de E es decir, $x \in f^{-1}(E) \Leftrightarrow \exists y \in E / y = f(x)$.

UN PRIMER EJEMPLO: LA FUNCION IDENTIDAD

Vemos que $i_A: A \to A / i_A(x) = x$, cualquiera sea A, es función. En efecto: $\forall x \in A: i_A(x) = x \in A$.

Además: $i_A(x) = y \wedge i_A(x) = z \Rightarrow x = y \wedge x = z \Rightarrow y = z$.

REPRESENTACION GRAFICA

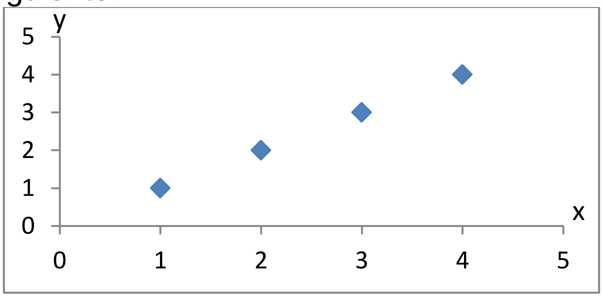
Como las funciones son relaciones, pueden representarse gráficamente de la misma manera que las relaciones binarias: mediante diagramas de Venn o de gráficos cartesianos.

Cuando se trata de funciones con dominio y/o rango en conjuntos infinitos, no pueden utilizarse diagramas de Venn y, necesariamente, debe usarse gráficos cartesianos para poder entender su comportamiento en todo el dominio.

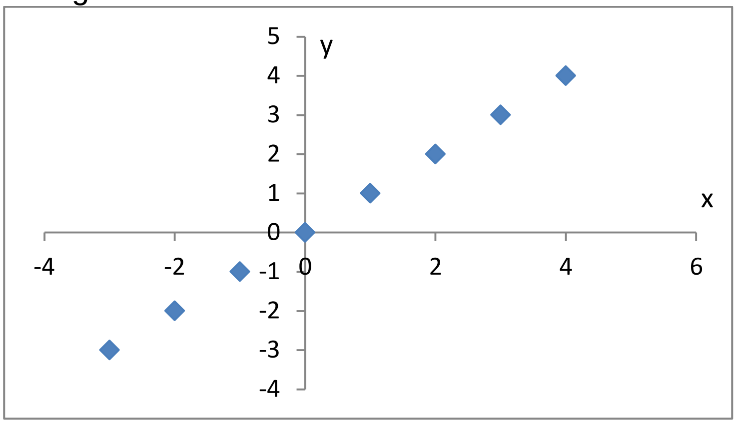
Según el dominio o el rango de una función sean $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, para representarla gráficamente se usan puntos aislados, líneas de puntos o contínuas.

Veamos la gráfica de $i_A: A \to A$, cuando $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Q}$ y $A = \mathbb{R}$:

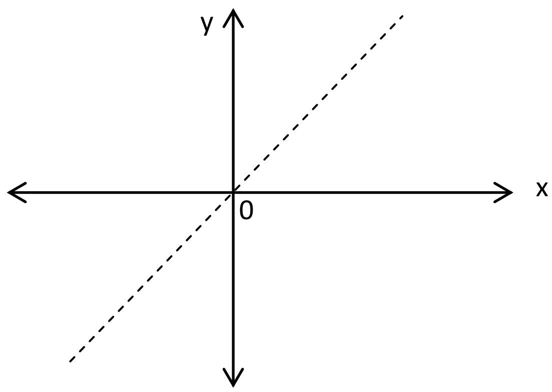
Si $A = \mathbb{N}$: $i_A: A \to A / i_A(x) = x$ queda representada por un conjunto de puntos aislados como el siguiente:



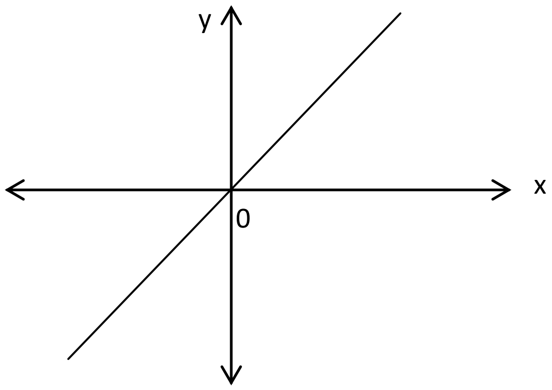
Si A = $\mathbb{Z}$: i_A: A→A/ $i_A(x)$ = x queda representada por un conjunto de puntos aislados como el siguiente:



Si A = $\mathbb{Q}$, la gráfica de i_A: A→A/ $i_A(x)$ = x es:



En cambio, si A = $\mathbb{R}$, la gráfica de i_A: A→A/ $i_A(x)$ = x es:



IGUALDAD DE FUNCIONES: Sean dos funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: D \rightarrow C$.
Diremos que $f = g \Leftrightarrow A = D \wedge \forall x \in A: f(x) = g(x)$.

CLASIFICACION DE FUNCIONES: Sea $f: A \rightarrow B$ una función:

Definición 2: f es inyectiva $\Leftrightarrow (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \Leftrightarrow (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.

Es decir, en una función inyectiva, a elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas.

Definición 3: f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)) \Leftrightarrow Rgo(f) = f(A)$.

Podemos decir pues, que si una función es sobreyectiva, todo elemento del rango tiene, al menos, una preimagen en el dominio.

Definición 4: f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva.

ALGUNAS FUNCIONES PARTICULARES:

Función identidad: Ya hemos definido $i_A: A \rightarrow A / i_A(x) = x$ y probamos que es función. Veamos a continuación, que cualquiera sea A, i_A es biyectiva. Para ello, debemos probar que:

a) i_A es inyectiva: Sean $x, x' \in A / i_A(x) = i_A(x') \Rightarrow x = x'$ (por def.de i_A).
b) i_A es sobreyectiva: Sea $y \in A$. Entonces, $\exists x \in A / x = y \wedge y = x = i_A(x)$.

Por a y b, i_A es biyectiva.

Función constante: Sean A y B conjuntos no vacíos, $b \in B$. Se llama función constante a la siguiente: $c_b: A \rightarrow B / \forall x \in A: c_b(x) = b$.

Si $x, x' \in A / x \neq x'$, resulta que $c_b(x) = b = c_b(x')$, luego la función no es inyectiva. (Probamos que $x = x' \wedge c_b(x) = c_b(x')$ - que es la negación de $x \neq x' \Rightarrow \Rightarrow c_b(x) \neq c_b(x')$ – es verdadera). En cambio, sólo es sobreyectiva, si $B = \{b\}$.

Función factorial: Se define como:

$$!: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N} / x! = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \; \vee x = 1 \\ \prod_{i=1}^{x} x \;\; si \; x > 1 \end{cases}$$

Función signo: Se define como

$$s: \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, 1\} \Big/ s(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Función valor absoluto: Se define como

$$||: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / |x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Función lineal: Se define como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax + b, \; con \; a, b \in \mathbb{R}$ Su gráfica es una línea recta que corta al eje vertical en el punto de coordenadas (0,b) y que forma con el semieje positivo de las x un ángulo cuya tangente es a. Nótese, que la identidad en $\mathbb{R}$ es un caso particular de la función lineal, en la cual a = 1 y b = 0.

Función cuadrática:

Se define como $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} / f(x) = ax^2 + bx + c, con \, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0.$ Su gráfica es una curva llamada **parábola**. En toda parábola puede distinguirse un punto llamado vértice, de coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}) \right)$. Si a > 0, la imagen del vértice es el valor mínimo de la función, mientras que si a < 0, es el máximo.

Funciones a trozos: Son funciones en las cuales para distintos subconjuntos del dominio las imágenes se determinan de distintas maneras. Ejemplos: la función signo, el factorial de un natural o cero, el valor absoluto de un número real, etc. Otro ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; si \; x > \sqrt{2} \\ x^2 \; si \; x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

FUNCION INVERSA DE UNA DADA

Al estudiar relaciones, vimos que dada una relación, siempre puede hallarse su inversa. Como las funciones son relaciones, dada una función de A en B, su relación inversa (de B en A) existe, pero no necesariamente es, a su vez, función.

Recordemos que si f:A→B, su inversa es f^{-1}: B→A, tal que:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ (I)}$$

Teorema 1: Dada una función f:A→B, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Como f está definida de A en B, su inversa, f^{-1}, está definida de B en A y, a su vez, $(f^{-1})^{-1}$:A→B (1)

Sea x ϵ A. Como f es función, ∃ y ϵ B/y = f(x). Luego, por definición de relación inversa, $x = f^{-1}(y)$. Entonces, nuevamente por definición de relación inversa, y = $= (f^{-1})^{-1}(x)$. De donde, $\forall x \in A$: $f(x) = y = (f^{-1})^{-1}(x)$ (2)

Por (1) y (2) y definición de igualdad de funciones, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Teorema 2: Dada una función f:A→B, su inversa f^{-1}:B→A es función si, y sólo si, f es biyectiva.

Probemos primero que si f es biyectiva, f^{-1} es función.

Sea y є B. Entonces, por ser f sobreyectiva, ∃xєA/ y = f(x). Luego, por (I), $f^{-1}(y) = x$ є A. Entonces, cualquiera sea y є B, hemos probado que existe su imagen por f^{-1} en A. (II)

Si y є B y existen x, x’ є A tales que $f^{-1}(y) = x \wedge f^{-1}(y) = x'$, por (I), resulta que f(x) = y = f(x’). Luego, como por hipótesis f es inyectiva, debe ser x = x’(III).

De (II) y (III), f^{-1} es función.

Recíprocamente, si f^{-1} es función, probemos que debe ser f biyectiva:

Sean x, x’ є A/ f (x) = f (x’) = y. Por (I), debe ser $f^{-1}(y) = x \wedge f^{-1}(y) = x'$; como por hipótesis, f^{-1} es función, y debe tener una única imagen, por lo cual debe ser x = x’. Luego, f es inyectiva (IV).

Sea y є B. Como f^{-1} es función, ∃xєA/ $f^{-1}(y) = x$. Luego, por (I), y = f(x). Hemos probado pues, que f es sobreyectiva (V).

De (IV) y (V), f es biyectiva.

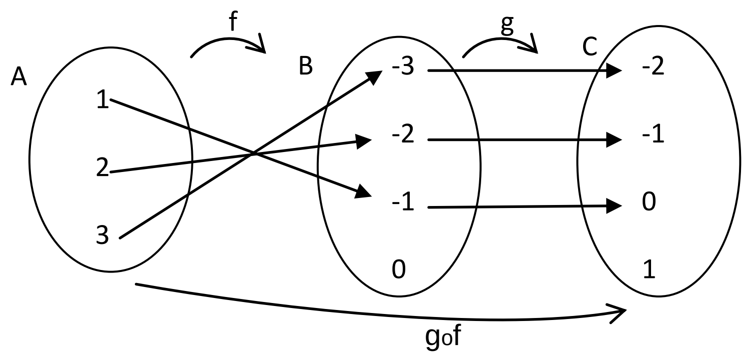
Corolario: f es función biyectiva si, y sólo si, su inversa, f^{-1} también lo es.

Sea f una función biyectiva. Como $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$, tenemos que el hecho de que f^{-1} no sea biyectiva es, por el teorema anterior, equivalente a que f no es función. Como f es función biyectiva, debe ser f^{-1} función biyectiva.

COMPOSICION DE FUNCIONES

Definición 5: Sean dos funciones, f: A → B y g: E → C, tales que f(A) ⊂ E. Definimos la **composición de f y g,** como la función siguiente: $g \circ f : A \to C / (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$.

Veamos a continuación un ejemplo: Sean A = {1, 2, 3}, B = {-3, -2, -1, 0} y C = {-2, -1, 0, 1}, f: A →B/f(x) = -x, g: B →C/g(x) = x + 1. Si representamos en diagramas de Venn, vemos que g∘f = {(1,0), (2,-1),(3,-2)}:



$$\therefore g \circ f : A \to C / (g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(-x) = -x + 1$$

A continuación, usaremos funciones f, g y h tales que Rgo(f) = Dm(g) y Rgo(g)= Dm(h), a fin de simplificar la notación.

Propiedades de la composición de funciones:

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, funciones.

1. La composición de funciones no es conmutativa.

2. La composición de funciones es asociativa. Es decir: $(h_o g) o f = h_o(g_o f)$.
3. Si f y g son biyectivas, también $g_o f$ es biyectiva.
4. Si f es biyectiva, $f^{-1}{}_o f = i_A \wedge f_o f^{-1} = i_B$.
5. Si f y g son biyectivas, $(g_o f)^{-1} = f^{-1}{}_o g^{-1}$.

<u>Demostraciones</u>:

1. Para que realmente podamos ver que $g_o f \neq f_o g$, demos un ejemplo en el cual A = B = C, es decir, que f y g sean funciones de A en A.

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x) = x + 1$ y $g:R\to R$ / $g(x) = x^2$, se tiene que:

$g_o f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $g_o f(x) = g[f(x)] = g(x + 1) = (x + 1)^2$.

$f_o g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f_o g(x) = f[g(x)] = f(x^2) = x^2 + 1$.

Entonces, $g_o f \neq f_o g$, pues $\exists 1 \in \mathbb{R}$ / $(g_o f)(1) = (1 + 1)^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1 = (f_o g)(1)$.

2. Como $f : A \to B$, $g:B \to C$ y $h:C \to D$, $h_o g:B \to D$ y $g_o f:A \to C$. En consecuencia, $(h_o g)_o f: A \to D$ y $h_o(g_o f): A \to D$. (A)

Sea $x \in A$. Entonces, por ser función, existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$ (*). Luego, como $h_o g$ es función de B en D, existe $z \in D$/ $(h_o g)(y) = z = h[g(y)]$. Pero, por (*), resulta: $z = h[g(y)] = h[g(f(x))]$. (**)

Veamos ahora la imagen de x por $(h_o g)_o f$:

$[(h_o g)_o f](x) = (h_o g)[f(x)] = (h_o g)(y) = z$ (Por * y **). (B)

$[h_o(g_o f)](x) = h[(g_o f)(x)] = h[g(f(x))] = z$, por definición de composición de funciones (dos veces) y por (**). (C)

De (A), (B) y (C), resulta $(h_o g) o f = h_o(g_o f)$.

3. Sean f y g biyectivas. Probaremos que:

a) $g_o f$ es inyectiva: Sean $x, x' \in A/(g_o f)(x) = (g_o f)(x')$. Entonces:

$(g_o f)(x) = (g_o f)(x') \Rightarrow g[f(x)] = g[f(x')] \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (por definición de funciones, por ser g inyectiva y por inyectividad de f, respectivamente).

b) $g_o f$ es sobreyectiva: Sea $y \in B$. Como g es sobreyectiva, $\exists z \in B/y = g(z)$.

Pero como también f es sobreyectiva, $\exists x \in A/ z = f(x)$. Luego se tiene que: $y = g(z) = g[f(x)] = (g_o f)(x)$.

4. Si f es biyectiva, su inversa f^{-1} es función de B en A. Luego, $f_o f^{-1}:B \to B$ y $f^{-1}{}_o f:A \to A$.

Sea $x \in A$. Entonces, como f es función, existe $y \in B$, tal que $y = f(x)$. Además, por definición de relación inversa, $x = f^{-1}(y)$. Entonces, resulta que:

$(f^{-1}{}_o f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x = i_A(x)$.

De la misma manera, $(f_o f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y = i_B(y)$.

5. Por lo probado en 3, si f y g son biyectivas, la composición también lo es y, en consecuencia, existen y son funciones $f^{-1}: B \to A$, $g^{-1}: C \to B$, $(g_o f)^{-1}:C \to A$ y $f^{-1}{}_o g^{-1}:C \to A$.

Sea $x \in C$. Como g^{-1} es función, $\exists z \in B$/ $g^{-1}(x) = z$ y $x = g(z)$. Ahora bien, como también f^{-1} es función, $\exists y \in A$/ $f^{-1}(z) = y \wedge$ y $z = f(y)$.

Luego: $(f^{-1}{}_o g^{-1)}(x) = f^{-1}[g^{-1}(x)] = f^{-1}(z) = y$.

De la misma manera, $(g_o f)(y) = g[f(y)] = g(z) = x$. Luego, $(g_o f)^{-1}(x) = y$.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ESPINOSA ARMENTA, R. (2010). Matemáticas discretas. 1ª Edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. México.
- JOHNSONBAUGH, R. (2005). Matemáticas Discretas. 6ª Edición. Pearson Educación. MÉXICO.
- ROJO, A. (1996). Algebra I. El Ateneo. Argentina.