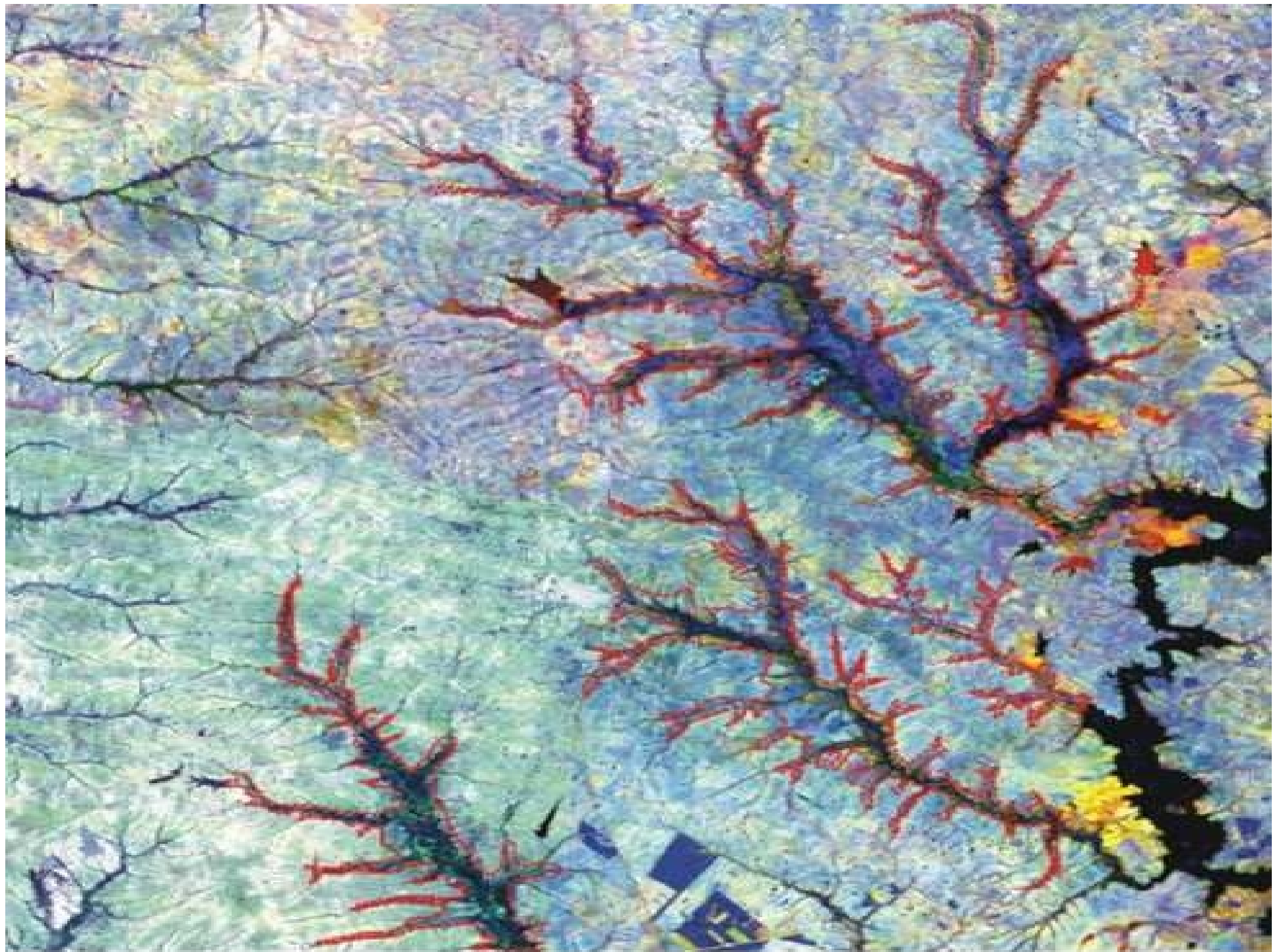


UNIDAD VI: LA DIFERENCIAL.

Definición y expresión analítica de la diferencial. Interpretación geométrica de la diferencial. Su relación con el incremento.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan el diferencial de una función, su interpretación geométrica y cómo calcularlo.

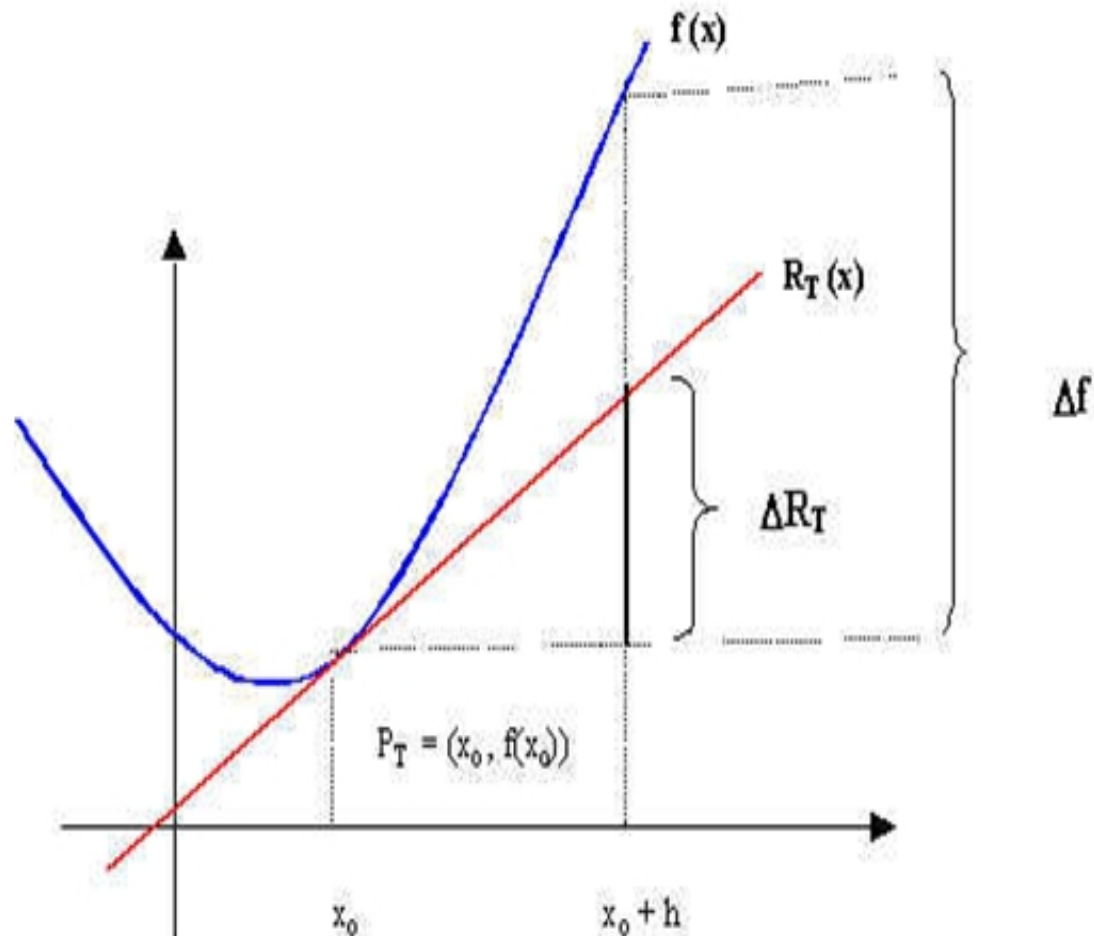
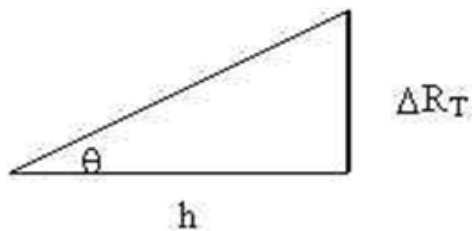


Sir Isaac Newton (1642-1727)



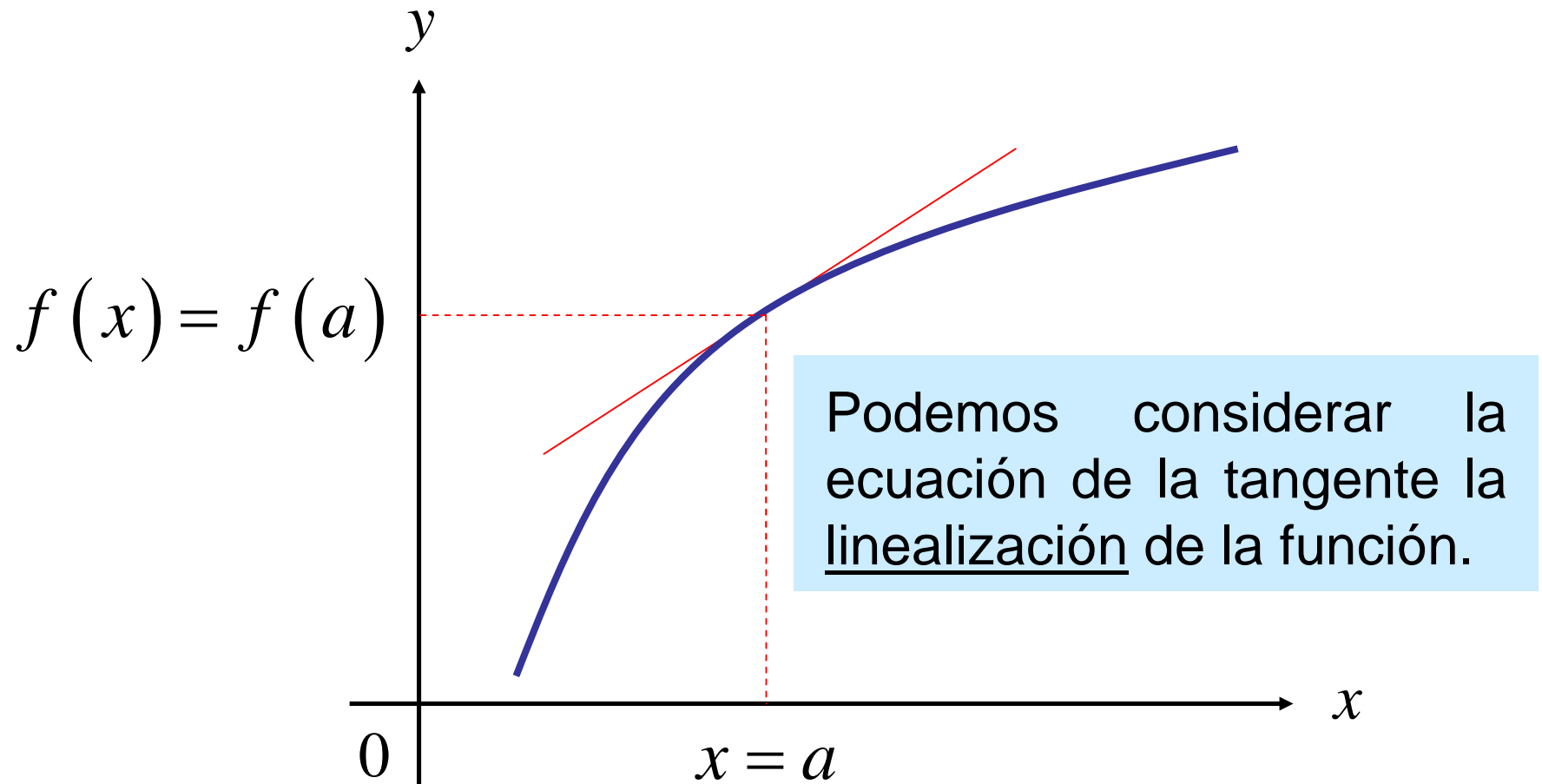
Considerando que la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia P_T , si le llamamos a la variación de f , cuando x varía de x_0 a $x_0 + h$, Δf y a la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en x , ΔR_T podemos afirmar que para valores de h "cercanos" a 0, estas dos variaciones son muy parecidas, es decir, $\Delta f \approx \Delta R_T$. Podemos expresar a ΔR_T en términos de h y el ángulo θ que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. En el triángulo de la figura de abajo, se observa lo siguiente:

$$\Delta R_T = \tan \alpha \Delta x$$



En virtud de que ΔR_T es una aproximación del incremento Δf , juega un papel fundamental en el concepto central de hoy: EL DIFERENCIAL DE f en el punto x_0 , con respecto al incremento h .

Para cualquier función suave $f(x)$, la tangente es una “buena” aproximación de la función en una vecindad del punto de tangencia.



Comencemos con la ecuación de la recta pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad x_1 = a \quad y_1 = f(a) \quad m = f'(a)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linealización de f en a

$f(x) \approx L(x)$ es la aproximación lineal estándar de f en a

La linealización, es la ecuación de la recta tangente y podemos usar las fórmulas de derivada conocidas.

Importantes linealizaciones cerca de cero:

$\frac{f(x)}{}$	$\frac{L(x)}{}$
-----------------	-----------------

$(1+x)^k$	$1+kx$
-----------	--------

$\sin x$	x
----------	-----

$\cos x$	1
----------	-----

$\tan x$	x
----------	-----

¿Les parecen conocidas estas linealizaciones?

¿de donde?

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Diferenciales

Cuando comenzamos hablando de derivadas, dijimos que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se convierte en $\frac{dy}{dx}$ cuando el cambio en x y el cambio en y se tornan muy pequeños (infinitesimales).



dy puede ser considerado un cambio muy pequeño en y

dx puede ser considerado un cambio muy pequeño en x

Precisemos...

Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de x_0 . Se dice que $f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 si el incremento Δy se puede escribir en la forma

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

donde A es una constante (que depende del punto) y $\alpha(\Delta x)$ es un infinitésimo de orden superior con respecto a Δx . A la parte lineal $A\Delta x$ se le denomina *diferencial* de la función $f(x)$ en el punto x_0 y se denota $df(x_0)$ ó $dy(x_0)$.

Como vimos antes, $\Delta R_T = \tan \alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x$.

De los resultados anteriores se tendrá entonces que

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

Teorema. Una función es diferenciables en un punto x_0 si y solo si, es derivable en dicho punto.

Observación 1. Este resultado indica además, la unicidad de la diferencial de una función. Por otra parte, “justifica” el uso de la notación $y' = \frac{dy}{dx}$ como cociente de diferenciales.

Observación 2. La fórmula justificada por el Teorema, nos permite encontrar el diferencial de una función una vez conocida su derivada.

En los siguientes ejemplos estimaremos la variación Δf para x_0 y h dados y la compararemos con el diferencial.

Ejemplo. a) Verifique que para $f(x)=x^2$ se cumple que $\Delta f \approx df$ en $x_0=1$ y $h=0.1$.

Solución.

$$\Delta f = f(1.1) - f(1) = 1.21 - 1 = \underline{\underline{0.21}}$$

$$df = f'(1)dx = (2x|_{x=1})(0.1) = (2)(0.1) = \underline{\underline{0.20}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **una centésima**.

Observación. El punto $x_0 + h$ es un punto cercano a x_0 , que se encuentra a la derecha de éste si h es positivo y a la izquierda si h es negativo. En el siguiente ejemplo consideraremos un incremento negativo.

b) Para la misma función se cumple que $\Delta f \approx df$ en $x_0=1$ y $h=-0.1$.

Solución.

$$\Delta f = f(0.9) - f(1) = 0.81 - 1 = \underline{\underline{-0.19}}$$

$$df = f'(1)dx = (2x|_{x=1})(-0.1) = (2)(-0.1) = \underline{\underline{-0.20}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **una centésima**.

c) Para $f(x) = x^2$ se cumple que $\Delta f \approx df$ en $x_0=2$ y $h=0.006$


Solución.

$$\Delta f = f(2.006) - f(2) = 4.024036 - 4 = \underline{\underline{0.024036}}$$

$$df = f'(2)dx = (2x|_{x=2})(0.006) = (4)(0.006) = \underline{\underline{0.02400}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **tres cienmilésimas**

Ejemplo. Considere un círculo de radio 10. si el radio aumenta en 0.1, ¿cuánto aumentará aproximadamente el área?

$$A = \pi r^2 \qquad \frac{dA}{\cancel{dx}} = 2\pi r \frac{dr}{\cancel{dx}}$$


$$dA = 2\pi r dr$$

Cambios muy pequeños en r



Cambios muy pequeños en A



$$dA = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot (0.1)$$

$$dA = 2\pi \qquad \text{Cambio aproximado en el área}$$

$$dA = 2\pi \quad \text{Cambio aproximado en el área}$$

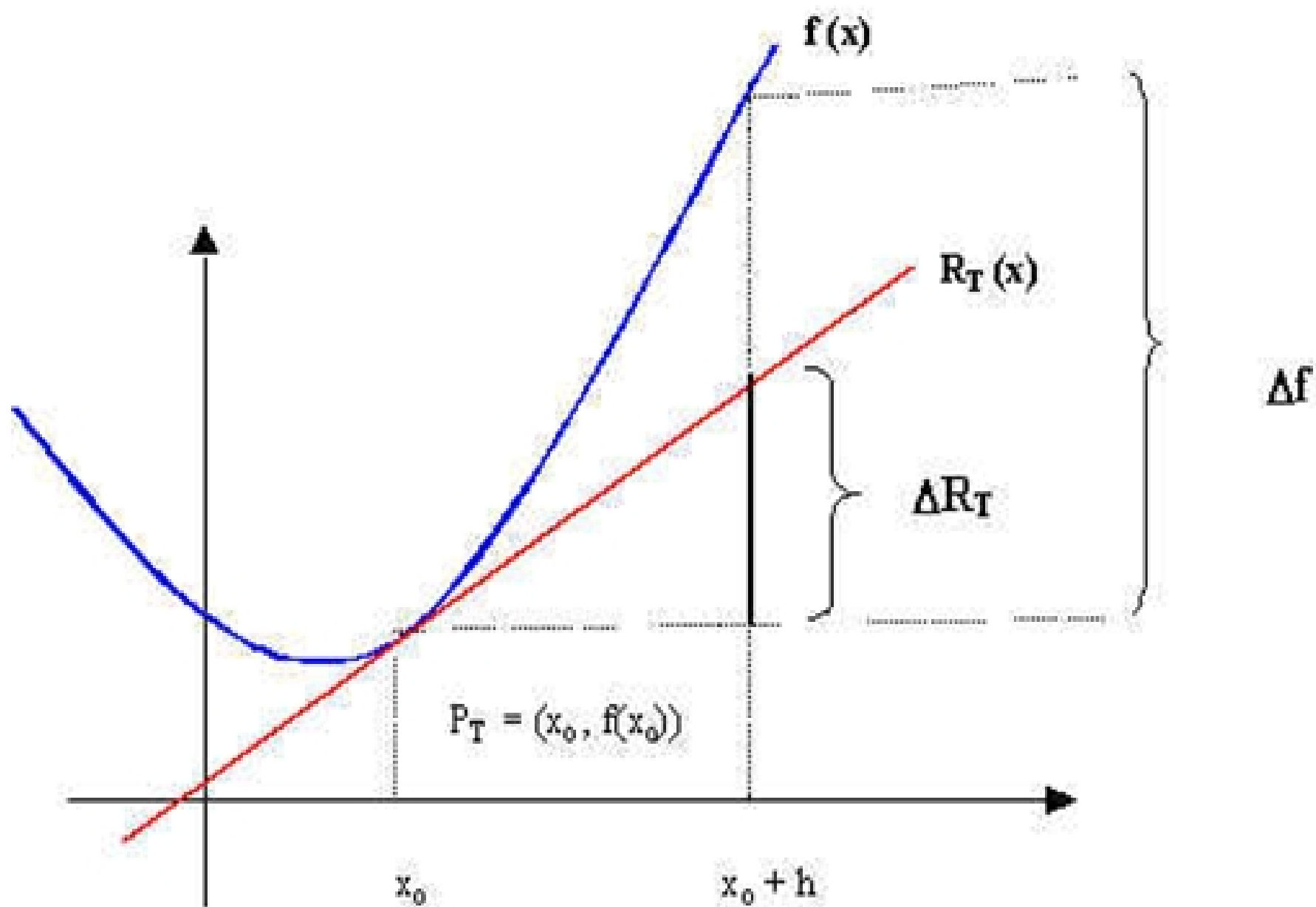
Compare con el cambio actual:

$$\text{Nueva área: } \pi (10.1)^2 = 102.01\pi$$

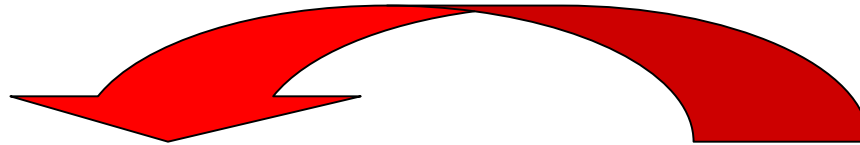
$$\text{Área conocida: } \pi (10)^2 = \frac{100.00\pi}{2.01\pi}$$

$$\frac{\text{Error}}{\text{Respuesta Actual}} = \frac{.01\pi}{2.01\pi} \approx .0049751 \approx 0.5\%$$

$$\frac{\text{Error}}{\text{Area Original}} = \frac{.01\pi}{100\pi} \approx .0001 \approx 0.01\%$$



INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL DIFERENCIAL



$$y - y_0 = \Delta y = f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$$

El infinitésimo $\alpha(\Delta x)$ significa la diferencia entre la ordenada de la curva y la de la tangente en el punto incrementado.

Lo que significa, que el diferencial de la función en el punto, expresa el incremento de la función de la ordenada de la recta tangente en M, al pasar del punto al punto incrementado.

INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL DIFERENCIAL

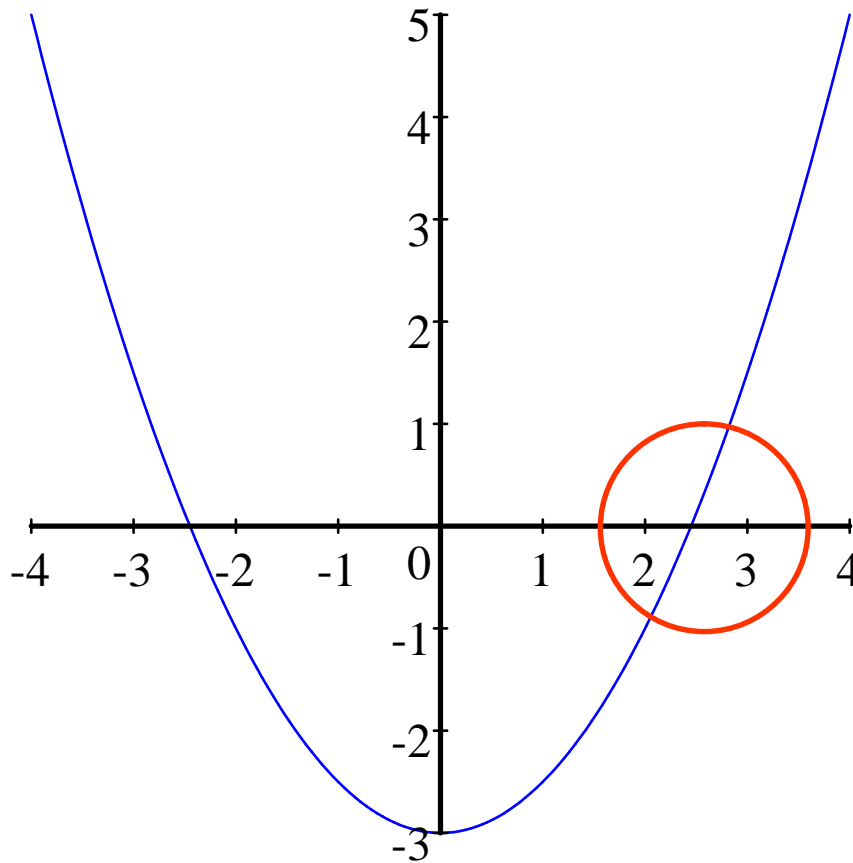
Sea $s=F(t)$ la ley del movimiento rectilíneo de un punto material, s la longitud de la trayectoria recorrida en t unidades de tiempo desde el punto inicial. Entonces $\Delta s=F(t+\Delta t)-F(t)$ expresa el espacio recorrido entre el punto inicial y el incrementado. Siendo la velocidad instantánea

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

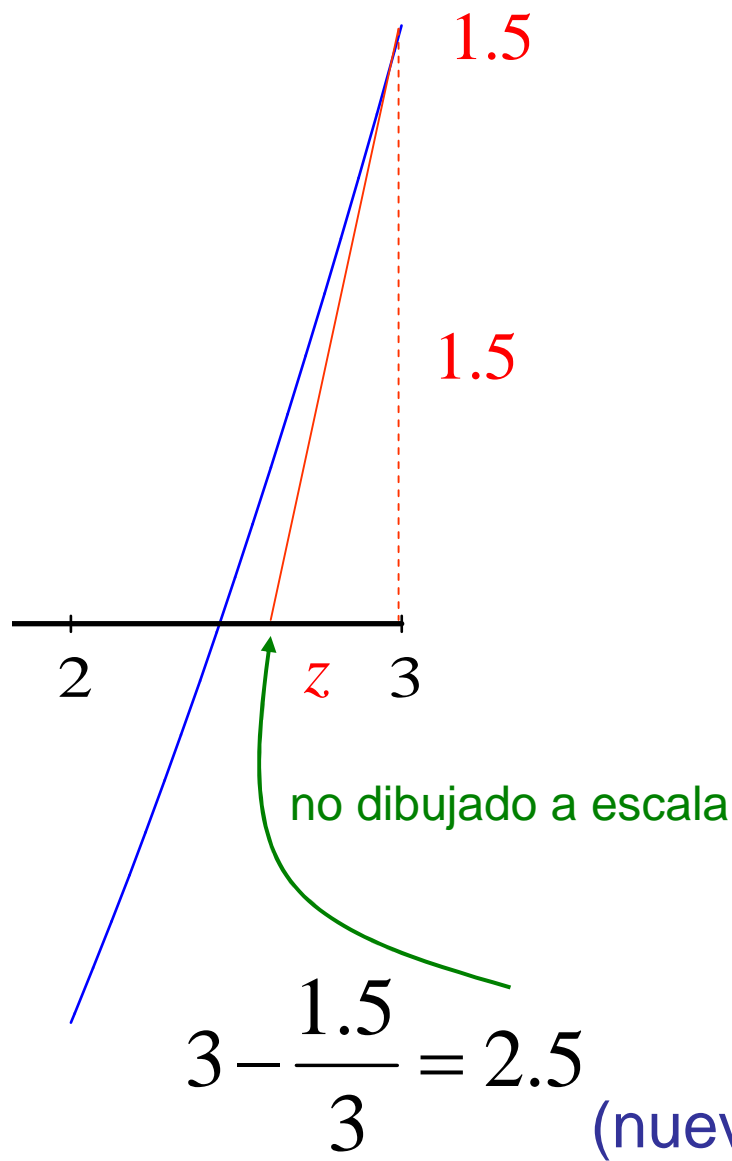
Por tanto, al sustituir Δs por ds significa que se ha considerado el movimiento como uniforme en esa parte de la trayectoria.

Método de Newton

Encuentre una raíz para $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$



Usaremos el Método de Newton para encontrar la raíz entre 2 y 3.



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

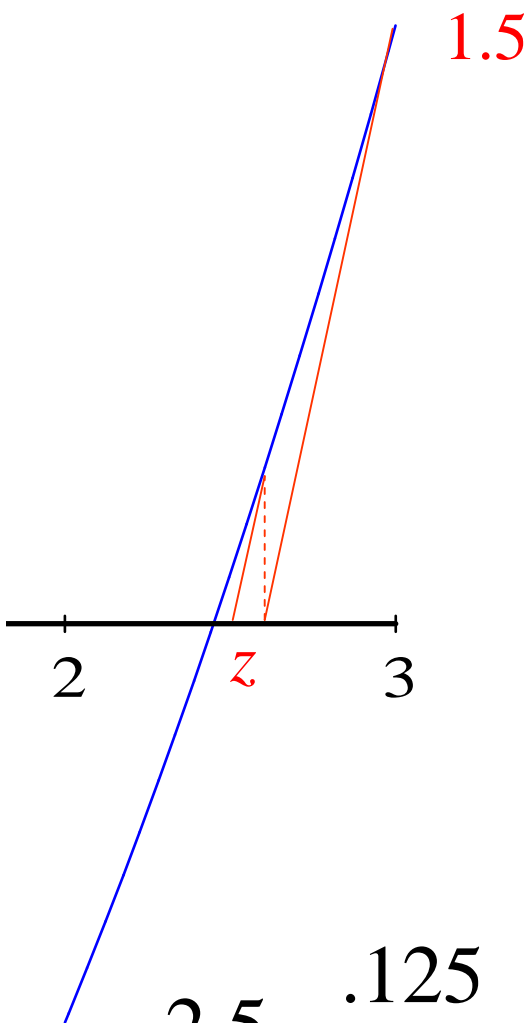
$$f'(x) = x$$

Partida: 3

$$f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 = 1.5$$

$$m_{\text{tangent}} = f'(3) = 3$$

$$3 = \frac{1.5}{z} \quad z = \frac{1.5}{3}$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

$$f'(x) = x$$

Partida: 2.5

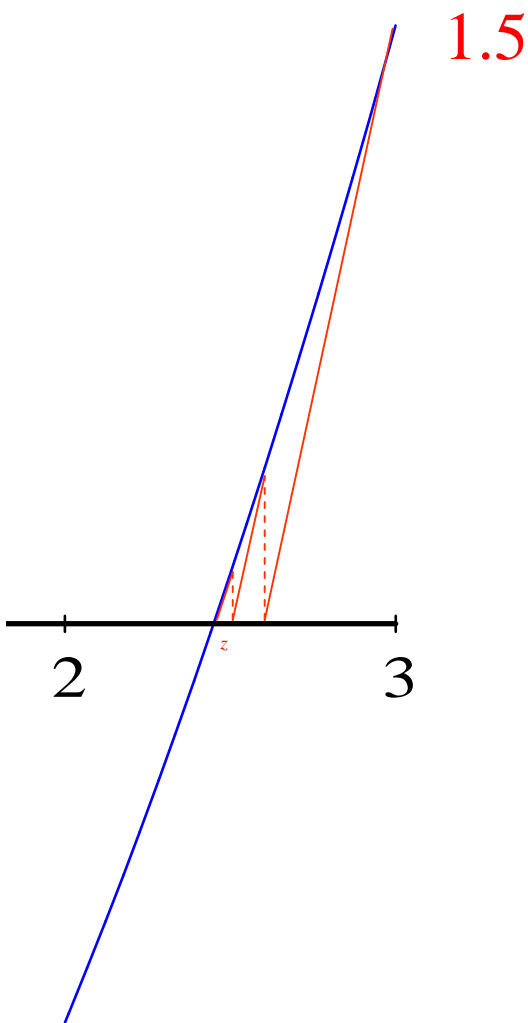
$$f(2.5) = \frac{1}{2}(2.5)^2 - 3 = .125$$

$$m_{\text{tangent}} = f'(2.5) = 2.5$$

$$2.5 - \frac{.125}{2.5} = 2.45$$

(nuevo punto)

$$z = \frac{.125}{2.5}$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$$

$$f'(x) = x$$

Partida: 2.45

$$f(2.45) = .00125$$

$$m_{\text{tangent}} = f'(2.45) = 2.45$$

$$z = \frac{.00125}{2.45}$$

$$2.45 - \frac{.00125}{2.45} = 2.44948979592 \quad (\text{nuevo punto})$$

Partida: 2.44948979592

$$f(2.44948979592) = .00000013016$$



Mágicamente cercano al cero!!

$$\text{Método de Newton} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Este es el Método de Newton para encontrar raíces. Es un ejemplo de un algoritmo (un conjunto específico de pasos).

En ocasiones es llamado el Método de Newton-Raphson.

Esto es un algoritmo recursivo pues un conjunto de pasos son repetidos, con una respuesta previa, tomada como partida de la próxima repetición. Cada repetición es llamada una iteración.

Encontrar donde $y = x^3 - x$ cruza $y = 1$.

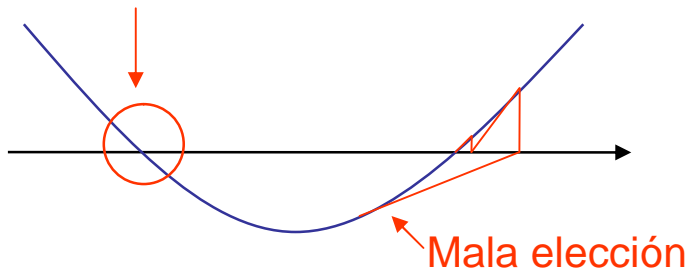
$$1 = x^3 - x \quad 0 = x^3 - x - 1 \quad f(x) = x^3 - x - 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 1$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	$1 - \frac{-1}{2} = 1.5$
1	1.5	.875	5.75	$1.5 - \frac{.875}{5.75} = 1.3478261$
2	1.3478261	.1006822	4.4499055	1.3252004

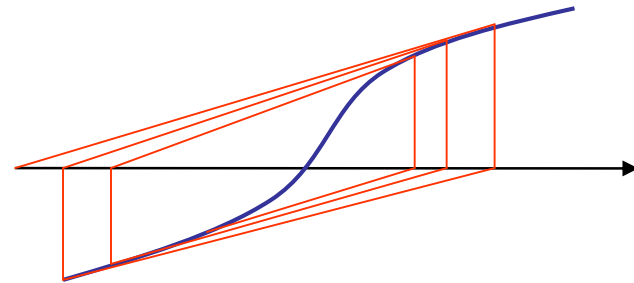
$$(1.3252004)^3 - 1.3252004 = 1.0020584 \approx 1$$

Estas son algunas limitaciones del Método de Newton

Buscando la raíz.



Raíz mal encontrada



Falla la convergencia