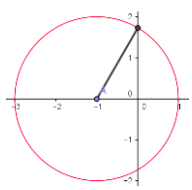
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

TEMA 10:
CÓNICAS Y CUÁDRICAS

Lugar geométrico.

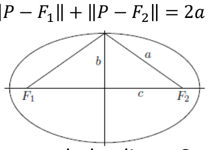
- Un lugar geométrico es el conjunto de puntos de un espacio euclídeo que verifican cierta condición o que gozan de una determinada propiedad.



ELIPSE

Definición: Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante mayor que la distancia entre los focos.

$$\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a$$



$P = (x, y)$ es un punto de la elipse. Suponemos que los focos F_1 y F_2 son puntos del eje de las abscisas y el eje de las ordenadas es la mediatriz del segmento F_1F_2 . De esta manera $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, $a > c$

ELIPSE

- Ecuación de la elipse:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
- Vértices: $(a,0),(-a,0),(0,b)\ y\ (0,-b)$
- Longitud del eje mayor: $2a$.
- Longitud del eje menor: $2b$.
- Distancia entre los focos: $2c$.
- $b^2=a^2-c^2;\quad a>c;\quad a>b$.
- Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$.
- Excentricidad: $0<e<1; e=\frac{c}{a}$.

Ecuaciones de la elipse

- Centrada en el origen:

Eje focal contenido en el eje x: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

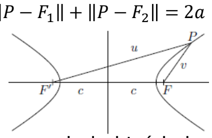
Eje focal contenido en el eje y: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

- Centrada en el (h,k):
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

HIPÉRBOLA.

Definición: Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante menor que la distancia entre los focos.

$$\|P-F_1\|+\|P-F_2\|=2a$$



$P=(x,y)$ es un punto de la hipérbola. Suponemos que los focos F_1 y F_2 son puntos del eje de las abscisas y el eje de las ordenadas es la mediatriz del segmento F_1F_2 . De esta manera $F_1=(-c,0)$ y $F_2=(c,0)$, $a<c$

HIPÉRBOLA

- Ecuación de la Hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Vértices: $(a, 0)\ y\ (-a, 0)$
- Longitud del eje transverso: $2a$.
- Longitud del eje no – transverso: $2b$.
- Distancia entre los focos: $2c$.
- $b^2 = c^2 - a^2; \quad c > a; \quad c > b$.
- Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$.
- Excentricidad: $e > 1$; $e = \frac{c}{a}$.

Ecuaciones de la hipérbola

- Centrada en el origen:

Eje focal contenido en el eje x: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Eje focal contenido en el eje y: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$

- Centrada en el (h, k):

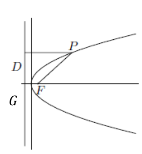
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

PARÁBOLA.

Definición: Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la distancia a una recta fija del plano es igual a su distancia a un punto fijo del plano que no pertenece a la recta. llamado foco.

$d(P, D) = d(P, F)$



$P = (x, y)$ es un punto de la parábola. Suponemos que el eje de las abscisas es perpendicular a la directriz, trazada por el foco F, y el eje de y la mediatriz del segmento FG. Llamado $p = \|F - G\|$, resulta $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $a < c$

PARÁBOLA

- Ecuación de la Parábola:
$$y^2 = 2px$$
- Directriz: $x = -\frac{p}{2}$.
- Eje de simetría o focal: $y = 0$
- Vértice: $(0,0)$
- Longitud del lado recto: $2p$.

Ecuaciones de la Parábola

- Centrada en el origen:

Directriz paralela al eje y: $y^2 = 2px$
Eje de simetría o focal: $y = 0$
Directriz paralela al eje x: $x^2 = 2py$
Eje de simetría o focal: $x = 0$

- Centrada en el (h, k):

Directriz paralela al eje y: $(y-k)^2 = 2p(x-h)$
Eje de simetría o focal: $y = k$

Directriz paralela al eje x: $(x-h)^2 = 2p(y-k)$
Eje de simetría o focal: $x = h$

Ecuación polinómica general de segundo grado y dos incógnitas de las cónicas.

- La ecuación general de segundo grado y dos incógnitas x e y es:
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A, B, C, D, E, $F \in \mathbb{R}$, donde A, B, C no pueden ser simultáneamente 0, es la ecuación de una cónica.

- Existen casos, que reciben el nombre de cónicas degeneradas, donde la representación gráfica de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es un punto, un par de rectas paralelas, o un par de rectas oblicuas o nada.
- Ejemplos: 1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ (un punto) 2) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2 = 0$ (2 rectas paralelas) 3) $x^2 + xy + 2 + 2y = 0$ (par de rectas oblicuas) 4) $x^2 + y^2 + 5 = 0$ (nada).

Si en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ los coeficientes son tales que la gráfica sea una cónica no degenerada.

- Si $B \neq 0$ la ecuación es de una cónica que se obtiene de alguna de las ya estudiadas por medio de una rotación , si $B = 0$ la ecuación es de una de las cónicas ya estudiadas.
- El ángulo de rotación θ es tal que: $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$, si $A \neq C$, o bien $\theta = \frac{\pi}{4}$ si $A = C$.
- Si es una elipse, $B^2 - 4AC < 0$
- Si es un hipérbola, $B^2 - 4AC > 0$
- Si es una parábola, $B^2 - 4AC$=0

Definición de cuádricas

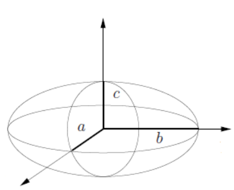
En general, una cuádrica es la superficie formada por todos los puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas (x, y, z) verifican una ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Una ecuación de este tipo puede describir, además de las superficies que veremos más adelante, las llamadas cuádricas degeneradas: una pareja de planos (que se corten en una recta, que sean paralelos o que sean coincidentes), o una recta, o un único punto, o nada.

Elipsoides

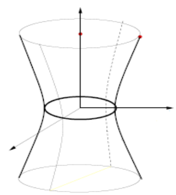
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloides

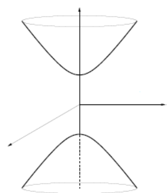
- De una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



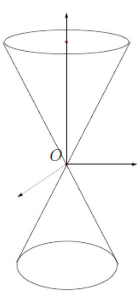
- De dos hojas

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

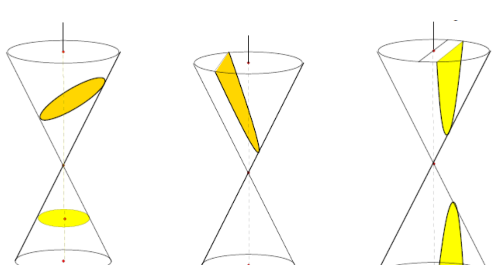


Conos.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

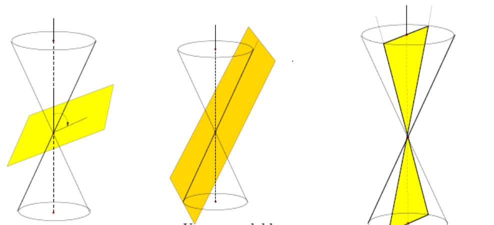


Cónicas



Elipse
Circunferencia
Parábola
Hipérbola

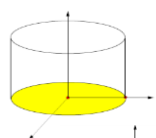
Cónicas degeneradas



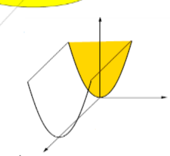
Un punto   Una recta doble   Dos rectas que se cortan

Cilindros

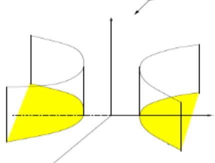
- Elíptico:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



- Parabólico:
$$y^2=2pz$$

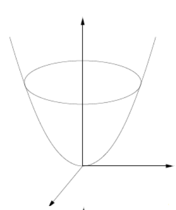


- Hiperbólico:
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Paraboloides.

- Elíptico:
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



- Hiperbólico:
$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$