UNIDAD VI:
LA DIFERENCIAL.

Aproximación mediante diferenciales. Errores. Reglas de diferenciación. Diferencial de una función de función. Diferencial de orden superior.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan las aplicaciones del diferencial de una función, al cálculo aproximado.

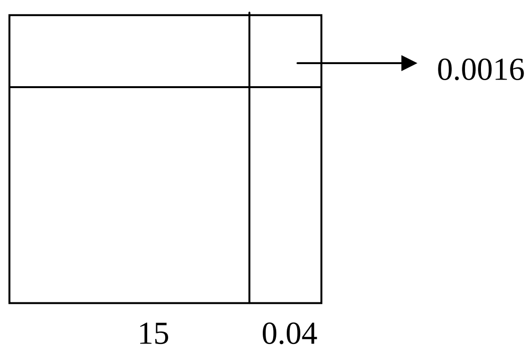
Ejemplo 1. Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?

Solución. Con el fin de ilustrar una situación que se presentará en todos los demás problemas y por la simplicidad de éste en particular, sólo en este caso calcularemos la diferencia de áreas ΔA y la compararemos con dA. Nótese que originalmente teníamos una placa de 15x15, después de calentarla tenemos la placa de 15.04x15.04, como se muestra en la figura. En este caso la función es $A(L)=L^2$ y por lo tanto ΔA en L=15 y h=0.04 es A(15.004)-A(15)=226.2016-225 =1.2016. Si ahora calculamos el diferencial de área para $A(L)=L^2$ en L=15 y dL=0.04, obtenemos:

$$dA = A'(L)dL = (2L)dL = (2L|_{L=15})(0.004) = (30)(0.004) = 1.2$$

En consecuencia, cuando el lado se incrementa en 0.4 cm, el área aumenta aproximadamente 1.2 cm^2 (el valor exacto del incremento es 1.2016).

Generalmente este tipo de variaciones se miden en porcentajes, es decir, como 0.04 es el 0.2666% de 15 y 1.2 es el 0.5333% de 225, que es $(15)^2$, decimos que si el lado de la placa se incrementa en un 0.266%, el área se incrementará aproximadamente en un 0.5333%.



Veamos, un segundo problema.

Consideremos una esfera de radio 10cm.

Si el radio cambia 0.1cm (una cantidad muy pequeña) ¿Cuánto cambiará el volumen?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$dV = 4\pi \left(10\text{cm}\right)^2 \cdot 0.1\text{cm}$$

$$dV = 40\pi \text{cm}^3$$

El volumen cambiará, aproximadamante, $40\pi cm_3$.

Ahora, supongamos que el radio cambia continuamente en una razón de 0.1 cm/s.

(Por ejemplo, una pompa de jabón de un juego infantil).

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi\left(10\text{cm}\right)^2 \cdot \left(0.1\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)$$

$$\frac{dV}{dt} = 40\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$$

La esfera crecerá en una razón de $40\pi \text{cm}^3$/seg.

Nota. Esta es una respuesta exacta, no aproximada como obtuvimos con los problemas anteriores.

EL agua es almacenada en un tanque cilíndrico a razón de 3 litros/seg. ¿Cuán rápido sube la superficie del líquido en el tanque?

$$\frac{dV}{dt} = -3\frac{\text{L}}{\text{sec}} = -3000\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$$

Buscar $\frac{dh}{dt}$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

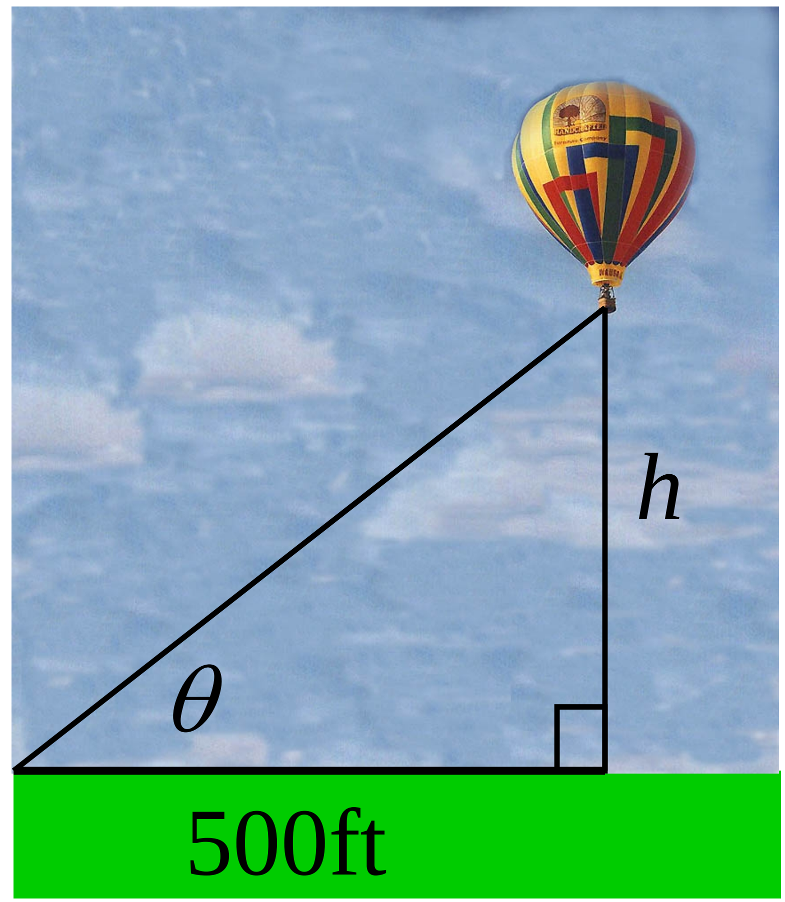
$$-3000\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{3000\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}}{\pi r^2}$$

Pasos recomendados en problemas de razones de cambio:

1. Dibujar un gráfico (esbozar).
2. Escriba toda la información conocida.
3. Escriba lo que Ud está buscando.
4. Escriba una ecuación para relacionar las variables.
5. Diferenciar ambos miembros.
6. Evaluar.

Problema del Globo (de aire caliente).

Dado: $\theta = \dfrac{\pi}{4} \quad \dfrac{d\theta}{dt} = 0.14\,\dfrac{\text{rad}}{\text{min}}$



¿Cuán rápido sube el globo?

Buscar $\dfrac{dh}{dt}$

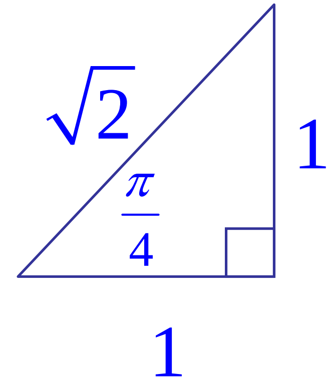
$$\tan\theta = \frac{h}{500}$$

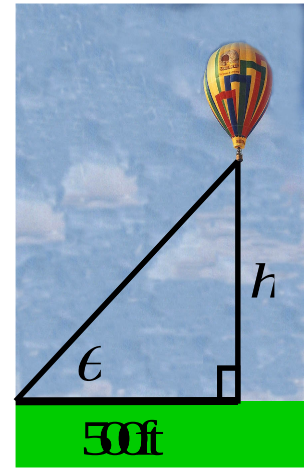
$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500}\frac{dh}{dt}$$

$$\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 (0.14) = \frac{1}{500}\frac{dh}{dt}$$

Problema del Globo (de aire caliente).

Dado: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = 0.14\,\dfrac{\text{rad}}{\text{min}}$





¿Cuán rápido sube el balón?

Buscar $\dfrac{dh}{dt}$

$$\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{h}{500}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500}\,\frac{dh}{dt}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2(0.14)\cdot 500 = \frac{dh}{dt}$$

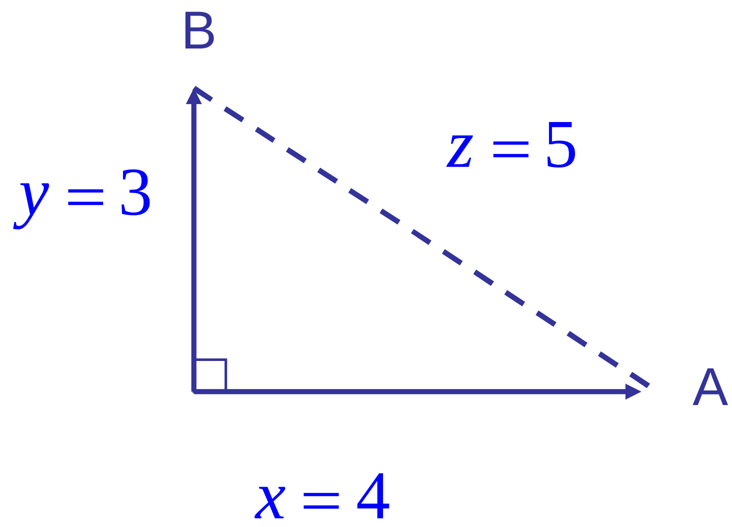
$$\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2(0.14) = \frac{1}{500}\,\frac{dh}{dt}$$

$$\boxed{140\,\frac{\text{ft}}{\text{min}} = \frac{dh}{dt}}$$

Problema del Camión:

El camión A viaja al Este a 40 km/h.
El camión B viaja al Norte a 30 km/h.

¿Cuán rápido cambia la distancia entre ellos, 6 minutos después?



$$r \cdot t = d$$

$$40 \cdot \frac{1}{10} = 4 \qquad 30 \cdot \frac{1}{10} = 3$$

$$3^2 + 4^2 = z^2$$

$$9 + 16 = z^2$$

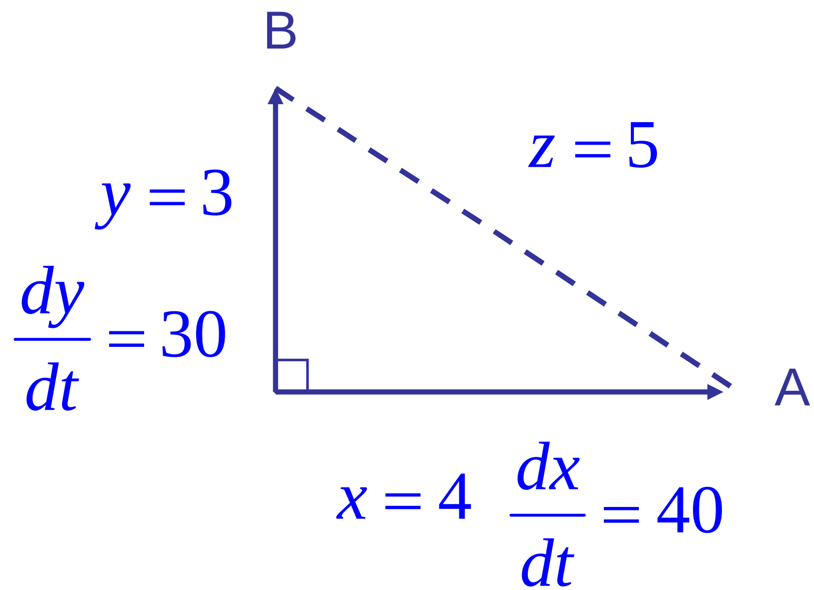
$$25 = z^2$$

$$5 = z$$

Problema del Camión:

El camión A viaja al Este a 40 km/h.
El camión B viaja al Norte a 30 km/h.

¿Cuán rápido cambia la distancia entre ellos, 6 minutos después?



$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\cancel{2}x\frac{dx}{dt} + \cancel{2}y\frac{dy}{dt} = \cancel{2}z\frac{dz}{dt}$$

$$4 \cdot 40 + 3 \cdot 30 = 5\frac{dz}{dt}$$

$$250 = 5\frac{dz}{dt} \qquad 50 = \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{50\frac{\text{miles}}{\text{hour}}}$$

APLICACIÓN DEL DIFERENCIAL A LOS CÁLCULOS APROXIMADOS

Se basa en el hecho que podemos aproximar el incremento de la función Δf por la expresión más simple $dy=f'(x_0)\Delta x$, es decir,

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

El error en esta aproximación viene dado por el infinitésimo de orden superior $\alpha(\Delta x)$. Como

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

Ejemplo. Calculemos sen 1º.

$$\text{sen}(x+\Delta x)\approx \text{sen}x+\Delta x\cos x$$

Tomando $x_0=0$ y $1º=\pi/180$, tendremos

$$sen1^o = sen\frac{\pi}{180} = sen0 + (\cos 0)\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$$

Ejemplo. Calcular $\sqrt{3.98}$

Tomemos x_0=4 y $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$

Luego $\sqrt{3.98} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0.02)$

De aquí que $\sqrt{3.98} \approx 1.995$

Supongamos que $y=f(x)$ es una función diferenciable en todo punto del intervalo (a,b), entonces su diferencial se escribe $dy=f'(x)dx$, como función de dos variables x y dx.

Si consideramos dx constante, entonces dy depende solo de x, si $f'(x)$ es nuevamente diferenciable, entonces tiene sentido considerar el diferencial de dy, es decir, $d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=f''(x)dx^2$.

DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN

$$d^n y=d(d^{(n-1)}y)=f^{(n)}dx^n,\ n=1,2,\ldots$$

$$d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x)$$

$$d^n(f(x).g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^{(n-k)} f(x).d^k g(x)$$

Observación. Si $y=f(x)$, $x=g(t)$, ambas dos veces diferenciables, entonces $d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$. Sin embargo, esta expresión es diferente de $d^2y=f''(x)dx^2$, lo que demuestra que el ***segundo diferencial no es invariante por la composición de funciones*** (y cualquier diferencial de orden superior por tanto).