Unidad 5: Variacion de funciones

Situación 1:

La temperatura (en grados centígrados) de un animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 horas de acuerdo a la función: $T(t) = 30 + 4t - t^2$, donde T es la temperatura y t el tiempo medido en horas.

1. ¿En que momento la temperatura es máxima?
2. ¿ En que período de tiempo la temperatura aumenta?
3. ¿ En que período de tiempo la temperatura disminuye?

Situación 2:

La concentración en sangre de una droga despues de t horas de haber inyectado una determinada dosis es $c(t) = \frac{t}{20t^2+50t+80}$

1. ¿ Cómo varía la concentración de la droga con el paso del tiempo?
2. ¿ Para que intervalos de tiempo aumenta?, ¿cuándo disminuye?
3. Esbozar el gráfico de la función $c(t)$

Migración de Peces

Se ha estudiado que ciertos animales (peces, aves, etc) efectúan sus desplazamientos tratando de minimizar su gasto de energía. Cierto tipo de peces migratorios nada a contracorriente. Si v es la velocidad del pez respecto de la corriente y u es la velocidad de la corriente (u<v) entonces la energía (E) necesaria para nadar una distancia (d) está expresada por la relación:

$$E(v) = \frac{Kv^3 d}{v - u}$$

con K y u constantes.

1. ¿ A que velocidad debe desplazarse el pez para que la energía sea mínima?
2. Bosquejar el gráfico de E para $v > u$

En esta unidad se presentarán conceptos del *Cálculo Diferencial* que, entre otras cosas, permitirán resolver problemas de optimización y estudiar el comportamiento de una función :

- determinar regiones de crecimiento y decrecimiento,
- si tiene máximos o mínimos relativos,
- determinar regiones de concavidad y convexidad.

Algunas definiciones

Funciones crecientes y decrecientes

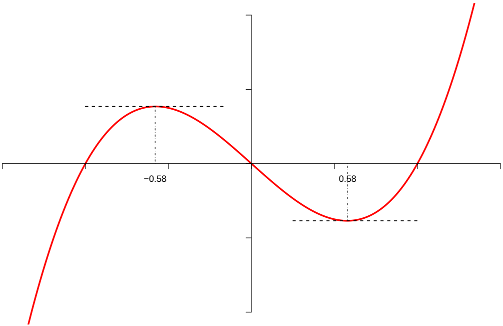
Sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea $I \subset A$ un intervalo. Diremos que:

- f es **creciente** en el intervalo I, si $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall x_1 < x_2 \in I$,
- f es **decreciente** en el intervalo I, si $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\forall x_1 < x_2 \in I$,

Observación:

Una función creciente (o decreciente) en todo su dominio (A), se denomina **monótona**. Por ejemplo, e^x es una función **monótona creciente**, mientras que e^{-x} es una función **monótona decreciente**.

Interpretación Geométrica



Observaciones:

- En los intervalos donde las pendientes de las rectas tangentes al gráfico son positivas, la función "crece". Esto es, si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ crece en (a, b).
- En los intervalos donde las pendientes de las rectas tangentes al gráfico son negativas, la función "decrece". Esto es, si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ decrece en (a, b).

Criterio de crecimiento/decrecimiento

Analizando el signo de la derivada primera, f', podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable f usando el siguiente criterio:

Criterio de crecimiento/decrecimiento

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b).

- Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ f es **creciente** en (a, b)
- Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$, $\Rightarrow$ f es **decreciente** en (a, b)

Concavidad y Convexidad

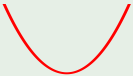
En este curso no daremos una defінción formal de funciones cóncavas o convexas. A los efectos prácticos diremos que:

Funciones cóncavas y convexas

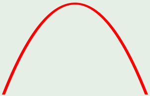
Dada f, una función derivable,

- si $f'(x)$ es **creciente** en el intervalo (a, b), entonces diremos que la función f es convexa (o cóncava hacia arriba/cóncava positiva) en el intervalo (a, b),
- si $f'(x)$ es **decreciente** en el intervalo (a, b), entonces diremos que la función f es cóncava (o cóncava hacia abajo/cóncava negativa) en el intervalo (a, b)

Función convexa



Función cóncava



Concavidad y Convexidad

Supongamos que f es una función dos veces derivable. Vimos que analizando el signo de f' podíamos determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. Haciendo un razonamiento similar con el signo de f'' podemos decir que:

Criterios de convexidad/concavidad

Si f una función dos veces derivable en el intervalo (a, b),

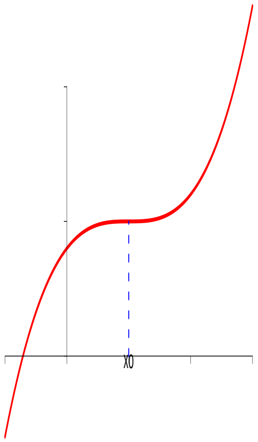
- si $f''(x) > 0 \ \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow \ f(x)$ es convexa en el intervalo (a, b)
- si $f''(x) < 0 \ \forall x \in (a, b) \ \Rightarrow \ f(x)$ es cóncava en el intervalo (a, b)

Puntos de inflexión

Los puntos en los que una función f pasan de cóncava a convexa (o viceversa) se llaman Puntos de Inflexión

Sea f dos veces derivable en el intervalo (a, b), sea $x_o \in (a, b)$

- si $f''(x) > 0\ \forall x \in (a, x_0)$ y $f''(x) < 0\ \forall x \in (x_0, b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = x_o$ (pasa de convexa a cóncava)
- si $f''(x) < 0\ \forall x \in (a, x_0)$ y $f''(x) > 0\ \forall x \in (x_0, b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = x_o$ (pasa de cóncava a convexa)



Valores Extremos de Funciones

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, $x_o \in A$. Sea $I \subset A$. Diremos que :

- $f(x)$ alcanza en $x = x_o$ un máximo absoluto en $A \Leftrightarrow \; f(x_o) \geq f(x), \forall x \in A$
- $f(x)$ alcanza en $x = x_o$ un mínimo absoluto en $A \Leftrightarrow \; f(x_o) \leq f(x), \forall x \in A$
- $f(x)$ alcanza en $x = x_o \in I$ un máximo local/relativo en $I \Leftrightarrow \; f(x_o) \geq f(x), \forall x \in I$
- $f(x)$ alcanza en $x = x_o \in I$ un mínimo local/relativo en $I \Leftrightarrow \; f(x_o) \leq f(x), \forall x \in I$

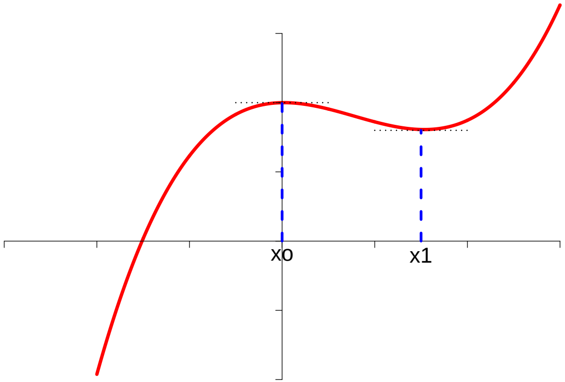


Figura : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo local en $x = x_o$ y un mínimo local en $x = x_1$. NO tiene máximos ni mínimos absolutos en su dominio.

Analizando el gráfico de la página anterior observamos que:

- En $x = x_o$ la función f tiene un máximo local.
  - La derivada $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = x_o$, y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = x_o$. Además $f'(x_o) = 0$.
  - La función f es creciente a la izquierda de $x = x_o$ y decreciente a la derecha de $x = x_o$.
- En $x = x_1$ la función f tiene un mínimo local.
  - La derivada $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = x_1$, y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x = x_1$.Además $f'(x_1) = 0$.
  - La función f es decreciente a la izquierda de $x = x_1$ y creciente a la derecha de $x = x_1$.

Puntos Críticos

Puntos críticos

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, sea $x_o \in A$.

Si $f'(x_0) = 0$ o si NO existe $f'(x_0)$ entonces diremos que x_0 es un punto crítico de la función f.

Si $A = [a, b]$ es un intervalo cerrado, entonces diremos que los puntos críticos de la función f son:

- Los extremos del intervalo, es decir, $x = a$ y $x = b$
- Los puntos $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = 0$ o tales que NO existe $f'(x)$

Observaciones:

- Si f es una función derivable en un intervalo $(a, b) \subset Dom(f)$ y $x_0 \in (a, b)$ tal que x_0 es un punto extremo (máximo o mínimo local o absoluto) de f, $\Rightarrow x_0$ es un punto crítico de f,
- No todo punto crítico es un extremo (Ej $f(x) = x^3, x_0 = 0$)
- Para encontrar los máximos y mínimos locales de una función f se buscan los puntos críticos. Para determinar si ese punto crítico es un extremo, o no, se analiza si la función cambia su crecimiento a la izquierda y a la derecha de dicho punto.

Criterio de máximo/mínimo y primer derivada

Sea f derivable en el intervalo $(a, b) \subset Dom(f)$, y $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

$f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0	$\Rightarrow$	x_0 es mínimo local de f
$f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0	$\Rightarrow$	x_0 es máximo local de f
$f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0	$\Rightarrow$	x_0 no es máximo ni mínimo de f
$f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0	$\Rightarrow$	x_0 no es máximo ni mínimo de f

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo $(a, b) \in Dom(f)$, sea $x_o \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Criterio de la derivada segunda

$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow x_0$ es mínimo local de f
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow x_0$ es máximo local de f
$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$	$\Rightarrow$ no se puede decir nada

Estudio y gráfico de funciones

Para analizar el comportamiento de una función f, o esbozar su gráfico, debemos estudiar todos los aspectos vistos hasta ahora:

- Determinar el dominio de la función , $Dom(f)$.
- intersecciones con ejes de coordenadas.
- Estudio de puntos de continuidad/discontinuidad/asíntotas.
- De ser posible, comportamiento en el infinito.
- Calcular la primer derivada, f' y determinar su dominio.
- Analizar intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (estudio del signo de f')
- Encontrar puntos críticos y extremos de f, clasificarlos.
- Estudio de concavidad, convexidad, puntos de inflexión (estudio del signo de f'')

Ejemplo

Analizar el comportamiento de la función $f(x) = \frac{16}{x^2+4}$ y hacer un bosquejo de su gráfico.

Pasos a seguir:

1) Determinar Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R}$

2) Intersección eje coordenadas: $f(0) = 4 \Rightarrow$, la intersección con el eje de las ordenadas (eje y) se da en el punto de coordenadas $(0, 4)$. La función f nunca se anula (su numerador es siempre distinto de 0), por lo que no hay intersección con el eje de las abcisas.

3)Puntos de discontinuidad/continuidad/asíntotas: La función f es siempre continua, y no tiene asíntotas verticales

4)Comportamiento en ∞:

$$lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

5)Cálculo de primer derivada, f':

$f'(x) = \frac{-32x}{(x^2+4)^2}$, $Dom(f') = \mathbb{R}$.

f' es continua en su dominio, y $f'(x) = 0$ si y sólo si, $x = 0$.

$x_0 = 0$ es un punto crítico de f.

6) Intervalos de crecimiento de f:

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow$ f es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

$f'(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty) \Rightarrow$ f es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
signo f'	+	0	-
conclusión	f creciente	pto. crítico	f decreciente

7) Clasificación puntos críticos de f:

Dijimos en 5) que f tiene un punto crítico en $x_0 = 0$. En este caso podemos usar cualquiera de los dos criterios: criterio de la primer derivada, o criterio de la segunda derivada. Según sea la expresión de la función, se elegirá cual de ellos utilizar.

Usando Criterio primer derivada para máximos y mínimos, como $f' > 0$ a la izquierda de $x_0 = 0$ y $f' < 0$ a la derecha de $x_0 = 0$, entonces en $x_0 = 0$ la función f tiene un máximo (que resultará ser absoluto).

Usando Criterio segunda derivada para máximos y mínimos.

Calculamos $f''(x) = \frac{32(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$.

Como $f''(0) < 0$, entonces decimos que en $x_0 = 0$ hay un máximo.

8) Estudio concavidad, convexidad, puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{32(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$.

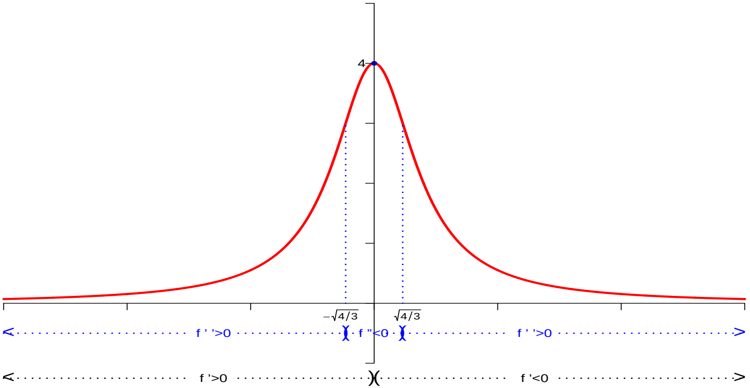
Debemos analizar el signo de f'', como el denominador es siempre > 0, solo debemos analizar el comportamiento del numerador.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{4/3}$ ó $x = \sqrt{4/3}$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{4/3}$ ó $x < -\sqrt{4/3}$
  Es decir, $f''(x) > 0$ (f es convexa) en $(-\infty, -\sqrt{4/3}) \cup (\sqrt{4/3}, +\infty)$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{4/3} < x < \sqrt{4/3}$
  Es decir, $f''(x) < 0$ (f es cóncava) en $(-\sqrt{4/3}, \sqrt{4/3})$

Análisis f''

	$(-\infty, -\sqrt{4/3})$	$-\sqrt{4/3}$	$(-\sqrt{4/3}, \sqrt{4/3})$	$\sqrt{4/3}$	$(\sqrt{4/3}, +\infty)$
signo f''	+	0	-	0	+
conclusión	f convexa	pto. inflexión	f cóncava	pto. inflexión	f convexa

Con información obtenida en los puntos 1) a 8), podemos hacer un bosquejo del gráfico de la función:



Ejercicios

1. Analizar el comportamiento y hacer un bosquejo del gráfico de las siguientes funciones:
   1.1 $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 1$
   1.2 $f(x) = 1 - x^{2/3}$
2. Resolver situaciones 2 y 3 planteadas al inicio de esta unidad.

Regla de L'Hopital

La Regla de L'Hopital nos permite calcular límites indeterminados en los siguientes casos:

Regla de L'Hopital para indeterminaciones del tipo 0/0

Sea x_o un número real, sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en algún intervalo (a, b) tal que $x_o \in (a, b)$ y tales que $lim_{x \to x_o} f(x) = lim_{x \to x_o} g(x) = 0$ (Notar que $lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación).

Entonces se tiene que

$$lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que ese límite exista

Ejemplo

Calcular $lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^2 - 4}$

Tanto el numerador como el denominador de esa función se anulan en $x_o = 2$, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hopital para calcular ese límite.

Se tiene que:

$lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^2 - 4} = lim_{x \to 2} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x} = \frac{9}{4}$

La regla de L'Hopital también es válida para calcular límites indeterminados del tipo ∞/∞

Regla L'Hopital para indeterminaciones del tipo ∞/∞

Sean f, g funciones derivables.

- Si $lim_{x\to x_o}|f(x)| = lim_{x\to x_o}|g(x)| = \infty$ y existe $lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si $lim_{x\to\infty}|f(x)| = lim_{x\to\infty}|g(x)| = \infty$ y existe $lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo

Calcular $lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}$

Es una indeterminación del tipo ∞/∞, aplicaremos la regla de L'Hopital dos veces y:

$$lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x} = lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

Observación

Usando operaciones algebraicas, muchas veces pueden transformase las indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞,∞^0, 0^0 en indeterminaciones del tipo $0/0$ o ∞/∞ y pueden calcularse los límites involucrados utilizando L'Hopital.

Bibliografía

- Ambas et al. *Matemática Teórica*. CBC UBA. Ed. 2010
- Spivak, M. *Calculo Infinitesimal*, Ed. Reverte, 1999
- Rabuffetti,H.*Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*, Ed. El Ateneo, Bs As, 1981.