ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 7:
EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES REALES

El conjunto de las matrices reales.

- Consideremos el conjunto $X = I_n \times I_m$, o sea el producto cartesiano de los dos intervalos naturales iniciales: I_n e I_m.
- <u>Definicion:</u> Llamamos matriz de $n \times m$ con elementos en $\mathbb{R}$ a toda función:
$$f: I_n \times I_m \to \mathbb{R}$$
- La imagen del elemento (i, j) perteneciente al dominio se denota por a_{ij}.

- En la práctica escribiremos los elementos de una matriz $n \times m$ dispuestos en $n$filas y $m$columnas.
- En cada fila o renglón se escriben las imágenesde todos los pares ordenados que tienen la misma primera componente, y en cada columna se anotan todos los pares ordenados que tienen la misma segunda componente.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
- Tanto las filas como las columnas de A se llaman <u>líneas</u> de la matriz.
- Abreviando, puede escribirse: $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

- El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con elementos en $\mathbb{R}$ se denota $\mathbb{R}^{n\times m}$.

- <u>Suma de Matrices:</u> Sean A y B dos matrices de $\mathbb{R}^{n\times m}$, su suma es $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- El <u>Producto</u> de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es otra matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tal que:

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Estructura de $(\mathbb{R}^{n\times m}, +, \mathbb{R}, .)$

- La cuaterna $(\mathbb{R}^{n\times m}, +, \mathbb{R}, .)$ denota el espacio vectorial de las matrices $n \times m$ con elementos en $\mathbb{R}$. En este espacio los vectores son matrices.

<u>Observaciones:</u>

1. En particular $(\mathbb{R}^{n\times n}, +, \mathbb{R}, .)$ es el espacio vectorial de las **matrices cuadradas**, es decir n filas y n columnas.
2. El vector nulo del espacio $\mathbb{R}^{n\times m}$ se llama matriz nula, la denotamos mediante N y está definida por $n_{ij} = 0,\ \forall i, \forall j$.
3. Dos matrices A y Bson iguales si y solo si ambas son matrices $n \times m$y $a_{ij} = b_{ij},\ \forall i, \forall j$.

- Podemos identificar los elementos de $\mathbb{K}^n$con las matrices $1 \times n$, es decir, con las matrices con una sola fila y n columnas. A estas matrices se las llama **matrices fila**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Análogamente, las matrices $m \times 1$, es decir, las matrices que constan de una sola columna, se llaman **matrices columna**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ CLASE n x m:

DEFINICION

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ / $A = (a_{ik})$. Se llama **transpuesta de A**, a la matriz $A^T = (a_{ki}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es decir, a aquella matriz que resulta de permutar las filas de A por sus columnas.

EJEMPLO:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3/4 \\ \pi & -1/3 \end{pmatrix}, \text{se tiene que } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi \\ -2 & 3/4 & -1/3 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, entonces:

1) $(A^T)^T = A$ 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Veamos sus demostraciones.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE LÍNEAS DE UNA MATRIZ

- Permutar dos líneas entre sí.
- Reemplazar una línea de la matriz por la suma de otras dos líneas.
- Reemplazar una línea de una matriz por su producto por un número real no nulo.

Se pueden combinar las 3. Cuando una matriz A es el resultado de aplicar a B un número finito de transformaciones elementales, decimos que A y B son equivalentes. Notación: $A \sim B$.

FORMA ESCALONADA DE UNA MATRIZ

DEFINICION

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $F_1, F_2, \dots, F_n$ denotamos las filas de A. Decimos que A **está en su forma escalonada** si, y sólo si:

1. Si F_k es una fila nula y F_h no, $k > h$.
2. En cada fila no nula, el número de ceros que preceden al primer elemento no nulo de la fila es menor que el de la fila siguiente.

PROPOSICION: Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es posible hallar, mediante transformaciones elementales de fila, su forma escalonada.

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2.F_1 + F_2 \to F_2$

$-3.F_1 + F_2 \to F_2$

$F_2 \leftrightarrow F_3$

OBSERVACION IMPORTANTE

Dada A $\in \mathbb{R}^{nxm}$ tal que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Si i = 1,…, n, la i – ésima fila es una m - upla de números reales es decir, un vector $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{R}^m$. Análogamente, si j = 1,…, m, la j – ésima columna es el vector $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{R}^n$.

De ahí que tenga sentido hablar de líneas (filas o columnas) linealmente independientes.

RANGO DE UNA MATRIZ

DEFINICION: Dada A $\in \mathbb{R}^{nxm}$ se llama **rango de A,** al máximo de líneas linealmente independientes Entonces, R(A) $\leq$ mín {n, m}.

PROPOSICION 1: Si A ~ B, entonces, R(A) = R(B).

PROPOSICION 2: Dada A $\in \mathbb{R}^{nxm}$ el rango de A es el número de filas no nulas de su forma escalonada.

PRODUCTO DE MATRICES

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, la matriz $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times r}$ es tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Propiedad: $(AB)^t = B^t A^t$

EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS

- El conjunto $\mathbb{R}^{n\times n}$ la suma + entre matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y el producto entre matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ cumplen las siguientes propiedades:

1. $A+B\in\mathbb{R}^{n\times n},\ para\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C),\ \ para\ \ A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
3. $A+B=B+A,\ para\ \ A,B,\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
4. $\exists N\in\mathbb{R}^{n\times n}/\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}\colon N+A=A$.
5. $\forall A\in\mathbb{R}^{n\times n}\colon\exists -A\in\mathbb{R}^{n\times n}/A+(-A)=N$.
6. $A.B\in\mathbb{R}^{n\times n},\ para\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
7. $(A.B).C=A.(B.C),\ para\ \ A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
8. $(A+B).C=A.C+B.C$
   $A.(B+C)=A.B+A.C,\ \ para\ \ A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

MATRICES CUADRADAS

Sea A = (a_{ij}) una matriz real de n filas y n columnas es decir una **matriz cuadrada de orden n.** En ese caso, decimos que:

- A es una **matriz diagonal**, si $a_{ij} = 0$, $\forall i\neq j$.
- Si A es diagonal y, $\forall i=j$: $a_{ij} = k \in \mathbb{R}$, A es una **matriz escalar.** La matriz escalar con k = 1 se llama **matriz identidad de orden n.** Notación: I_n.

Como las filas y columnas de In son los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ el máximo número de líneas l.i. es n es decir, $R(I_n) = n$.

MATRICES CUADRADAS

Sea como antes A = (a_{ij}) una matriz real cuadrada de orden n.

Entonces:

- A es una matriz **triangular superior**, si $a_{ij} = 0$, $\forall\ i > j$.

- A es una matriz **triangular inferior**, si $a_{ij} = 0$, $\forall\ i < j$.

- A es una matriz **simétrica**, si $A = A^T$.

MATRICES NO SINGULARES

Dada una matriz A real cuadrada de orden n, diremos que A es **no singular o invertible** si, y sólo si, existe A^{-1} del mismo orden, tal que:

$$A.A^{-1} = A^{-1}. A = I_n$$

En ese caso, A^{-1} se llama **inversa de A** y es única. Veamos la demostración.

PROPOSICION: Una matriz A real cuadrada de orden n, diremos que es **no singular o invertible** si, y sólo si, R(A) = n.

Aceptamos esta proposición sin demostración.

CALCULO DE A^{-1}

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ / R(A) = n = R (I_n).

Supongamos que aplicamos una sucesión finita de transformaciones elementales (te_1, te_2,…, te_k) a la matriz A de modo de obtener I_n. Entonces, al aplicar a I_n la misma secuencia de operaciones elementales, resulta $I_n \sim A^{-1}$. O sea que:

$$A \xrightarrow[te_1]{} A' \xrightarrow[te_2]{} \ldots \xrightarrow[te_k]{} I_n$$

$$I_n \xrightarrow[te_1]{} B \xrightarrow[te_2]{} \ldots \xrightarrow[te_k]{} A^{-1}$$

EJEMPLO: Si es posible, hallemos A^{-1}, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

- En lo que sigue escribiremos $A = (A_1 A_2 \cdots A_n)$, donde A_i con $1 \leq i \leq n$ denota la columna que ocupa el lugar i de la matriz cuadrada A.
- Definición: Determinante de orden n es toda función

$$D: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$$

Que verifica:

1. $D(A_1 \cdots A_{j'} + A_{j''} \cdots A_n) = D(A_1 \cdots A_{j'} \cdots A_n) + D(A_1 \cdots A_{j''} \cdots A_n)$
2. $D(A_1 \cdots \alpha A_j \cdots A_n) = \alpha\, D(A_1 \cdots A_j \cdots A_n)$
3. $D(A_1 \cdots A_j \cdots A_j \cdots A_n) = 0$
4. $D(I_n) = 1$

PROPIEDADES

1. Si Permutamos dos columnas de una matriz, los correspondientes determinantes son opuestos.
2. Si una columna de una matriz es nula, su determinante es 0.
3. El determinante de una matriz no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de otras.
4. El determinante de una matriz es igual a l determinante de su traspuesta.
5. $D(AB) = D(A)D(B)$

- Determinante de segundo orden

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- Determinante de tercer orden. Regla de Sarrus.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{12}a_{33}$$

- Definición: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llamamos menor de a_{ij} a la matriz $(n-1) \times (n-1)$ al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila *i*–ésimay la columna *j*–ésimade A. Lo representaremos por A_{ij}.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA DE A

- Llamaremos **matriz adjunta** de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$a la matriz $\mathrm{Adj}\, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde el elemento de la fila i y la columna está dado por $(-1)^{i+j} A_{ji}$.
- Propiedad:$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathrm{A} . \mathrm{Adj}\, A = \mathrm{Adj}\, A . A = |A| . I_n$
- De donde $\mathrm{A} . \frac{\mathrm{Adj}\, A}{|A|} = \frac{\mathrm{Adj}\, A}{|A|} . A = I_n$, pues A es no singular, con lo cual$\mathrm{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\, A}{|A|}$