La UNNE te acompaña
Tendiendo puentes hacia el estudio universitario

PENSAMIENTO MATEMÁTICO

AUTORIDADES

RECTORA
María Delfina Veiravé

VICERRECTOR
Elvio Eduardo Ríos

SECRETARIA GENERAL ACADÉMICA
María Viviana Godoy Guglielmone

Coordinadora Programa UNNE-Virtual
Beatriz Castro Chans

CRÉDITOS

Autores:
Irma Elena Saiz

Versión 2015
Actualización: Irma Elena Saiz
Edith Noemí Gorostegui
Juan José Sosa

Diseño didáctico y corrección de estilo:
Olga Musimessi

Diseño gráfico y multimedia - diagramación:
Luciana Ramírez Farías

Coordinación
María Elena Vallejos

El material de este módulo está organizado en cuatro Secciones que remiten a trabajos con distintos contenidos matemáticos; su numeración no indica necesariamente el orden de trabajo con ellas pero es recomendable que las trabaje en el orden en que aparecen. En cada una de las secciones se insertaron pistas a las que puede recurrir si no entendió una consigna o tiene dificultades para resolver un problema o ejercicio. Esperamos que en todo momento trate de resolver las actividades recurriendo lo menos posible a ellas y maximizando lo que usted mismo pueda razonar y elaborar.

Al final de cada una de las secciones se encuentra una ejercitación.

A lo largo del texto podrá observar **palabras resaltadas** en azul. Si pasa el cursor sobre ellas visualizará en un cuadro de texto el significado de cada uno de estos conceptos.

Finalmente, encontrará la bibliografía que se ha utilizado para la redacción de este módulo y una recomendada para consulta.

Encontrará los siguientes íconos que indican:

ACTIVIDADES

Que usted deberá realizar y que lo ayudarán a avanzar en la comprensión de las temáticas y en su propio proceso de aprendizaje.

ENLACES A SITIOS EXTERNOS

Para ampliar información relacionada con cada tema.

ENLACES A VIDEOS

Para visualizar de manera dinámica los contenidos propuestos.

RECOMENDACIONES O CONSEJOS

Para tener en cuenta.

EJEMPLOS

Que le servirán para resolver mejor las actividades.

Deberá hacer clic en el ícono para ver el contenido.

Cuando se llega a la Universidad no siempre se cuenta con los conocimientos matemáticos necesarios para encarar con éxito las nuevas demandas que plantea.

Los conocimientos requeridos no son, por supuesto, los mismos para todas las carreras. En algunas como Letras, Abogacía,... no encontrarán en sus programas ninguna materia relacionada con la Matemática; en otras, como Ingeniería, Economía, tendrán varias materias “matemáticas” y seguramente les exigirán un nivel de conocimientos matemáticos más elevado.

Lo que se pretende con este módulo, dirigido a todos los ingresantes sin distinción de cuál será la carrera elegida es plantearles situaciones, que les permita conocer algunos aspectos de la **cultura matemática**, es decir, involucrarse en situaciones donde sea posible entender un modo de pensar y de producir conocimiento y tomar contacto con herramientas y procedimientos específicos de esta ciencia y continuando la formación que seguramente iniciaron en el nivel secundario.

Planteamos así, actividades relacionadas con algunos de los procesos fundamentales de la Matemática, como es la **generalización** y la **simbolización** para representar situaciones y resolverlas, llegando al planteo y resolución de ecuaciones.

También presentamos situaciones relativas a la existencia de triángulos y de triángulos rectángulos, dado que, además de su uso potencial en diversas situaciones remite a una práctica habitual en Matemática, determinar las condiciones bajo las cuales un concepto puede ser definido. El tratamiento de la información con la lectura y elaboración de tablas y gráficos permite trabajar con un aspecto de la matemática, tal vez el más presente en la vida de los ciudadanos, la **Estadística**.

Si bien no hay una sección específica destinada a la **demostración**, está presente en distintas situaciones a lo largo del módulo. En cada una de las secciones y con mucha frecuencia se les solicita la **explicitación** de sus razonamientos, la descripción de ciertas situaciones o resultados, la formulación de estrategias de resolución o de propiedades de elementos de un conjunto. Consideramos que este aspecto fundamental del aprendizaje no solamente de Matemática, que es la **formulación**, está ausente con frecuencia de la escolaridad secundaria. Se incluyen además situaciones donde es necesario determinar la **veracidad** o no de ciertas proposiciones y de entender, aceptar o rechazar razonamientos realizados por otros, situaciones donde es necesario proveer **contraejemplos**, o encontrar el dominio de **validez** de una fórmula o una propiedad.

Para todo esto, planteamos actividades bastante simples en sus inicios, que permitan que todos puedan entrar en el trabajo que proponemos. Es decir, pretendemos que nadie en principio quede afuera de este trabajo por falta de conocimientos previos. Las distintas actividades no contemplan todo el proceso, desde esas situaciones iniciales hasta la mayor formalización matemática, sin embargo, las actividades y ejercicios incluidos se ubican en distintos niveles de complejidad, razonamientos y simbolización.

Por supuesto que las intenciones que se plantean en este módulo estarán limitadas por ciertos condicionantes relativos a la tarea propuesta: escribir un documento para ser usado en situaciones no-presenciales, sin conocer los destinatarios ni poder trabajar “frente a frente”, con una longitud también limitada, para alumnos necesariamente muy diferentes entre sí, por sus conocimientos previos pero también por sus características personales, sus expectativas, sus necesidades, sus experiencias anteriores con la Matemática y sus actitudes frente a ella.

Muchos contenidos y herramientas quedaron fuera, pero esperamos que este material les permita entrever al menos algo del mundo de la Matemática al que, tal vez no tuvieron oportunidad de entrar en su escolaridad previa y más allá de la carrera que elijan, les permita conocer cómo trabaja y de qué se ocupa, una de las ciencias más viejas que ha desarrollado la humanidad a lo largo de los siglos.

Confiamos en que les interese y les sirva y les deseamos suerte en este nuevo desafío.

Entre números, operaciones y juegos

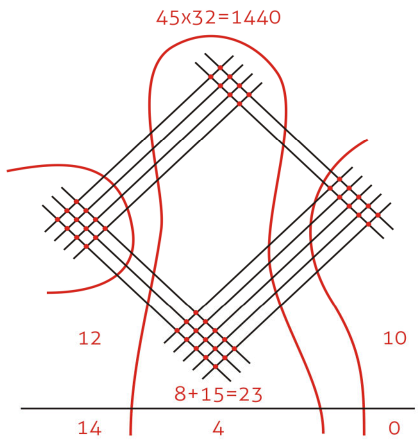
I. Multiplicaciones con historia

Hoy día una computadora de escritorio es capaz de realizar aproximadamente 250 millones de operaciones aritméticas por segundo!!!! El resultado de un producto es casi instantáneo. Pero para llegar a esta enorme facilidad de cálculo, se necesitó un largo camino y un tiempo histórico que pasó bastante más lentamente…

¿Cómo habrán hecho las civilizaciones antiguas y la nuestra para encontrar el producto de dos números de cualquier cantidad de cifras antes de que existieran las calculadoras?

Estos son algunos procedimientos de distintas civilizaciones para obtener el producto de 45 x 32.

Mayas: Gráfico de líneas

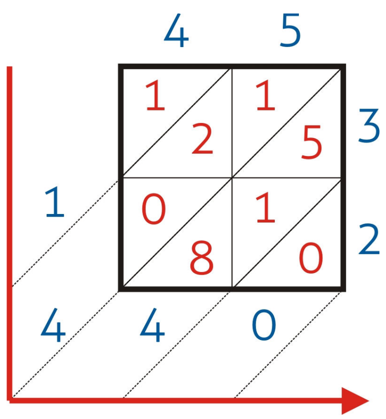


Egipcios: duplicaciones

45 x 32

1	☆	→	32		32
2			64		
4	☆	→	128		128
8	☆	→	256	+	256
16			512		
32	☆	→	1024		1024
					1.440

Árabes: en celosía



Actualmente

$$\begin{array}{rrrr} & & 4 & 5 \\ & \times & 3 & 2 \\ \hline & & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & \\ \hline 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Desde el inicio de la Matemática, los matemáticos han “jugado” con los números a fin de conocerlos mejor y desarrollar procedimientos de cálculo, llamados también algoritmos.

Para lograrlo, recurrieron a distintas descomposiciones de los números y usaron propiedades de las operaciones como la **propiedad distributiva**[1]**.**

Descomposiciones del producto 45 x 32

a) 45 x 32 = 45 x (30 + 2) = (45 x 3)10 + 45 x 2

b) 45 x 32 = (1 + 4 + 8 + 32)x32 = 1x32 + 4x32 + 8x32 + 32x32

c) 45 x 32 = (40 + 5) x (30 + 2) = (4 x 3).100 + ((4 x 2) + (5 x 3))x10 + 5 x 2.

d) 45 x 32 = (4x3) 100 + ((40x2) + (30x5)) + 5x2

En esta sección puede analizar cuál descomposición utilizó cada una de las civilizaciones que le mostramos para poder averiguar el producto de dos números naturales. Empecemos por el algoritmo más conocido, el nuestro.

1. Nuestro algoritmo

Para multiplicar 45 x 32 se ordenan los números de esta manera y luego se obtienen dos resultados intermedios: 90 y 135; el resultado final es 1440.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{\times\ 32} \end{array}$$

- **¿De cuáles productos son resultados los números 90 y 135?**
- **¿Cómo se obtiene el resultado final?**
- **Si se suma 90 + 135 no se obtiene 1.440, ¿cuáles son los números que hay que sumar para obtener 1.440, que es el resultado correcto?** Pista 1
- **Si se quiere multiplicar números de mayor cantidad de cifras, ¿en qué y cómo cambiaría el algoritmo?**
- **Si se conoce el producto del que se quiere calcular el resultado, ¿se puede anticipar cuántos resultados intermedios habrá?**
- **¿En cuál de las descomposiciones anteriores se basa este algoritmo?**

[1] La propiedad distributiva nos afirma que la multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos:

a .(b + c) = a.b + a.c

2. Multiplicación egipcia

En la siguiente tabla se puede ver la forma de escribir la “cuenta” egipcia de multiplicar

45 x 32

1	*	→	**32**		**32**
2			**64**		
4	*	→	**128**		**128**
8	*	→	**256**		**256**
				+	
16			**512**		
32	*	→	**1024**		**1024**
					1.440

- **Explique los pasos que realizaban los egipcios para obtener el producto de dos números naturales.** **Pista 2**

- **¿Por qué algunos números de la primera columna estarán marcados con una * y otros no?** **Pista 3** **ómo se obtiene el resultado del producto?**

- **¿Servirá este método para realizar cualquier producto de números naturales? Pruebe con otros números. ¿Se podrá multiplicar por un número impar, por ejemplo 51?**

Puede verificar si el resultado es correcto, realizando la cuenta o con la calculadora.

- **¿Cómo se decide hasta qué número seguir duplicando en la primera columna?**

- **Compare esa forma egipcia de multiplicar con nuestro algoritmo. ¿Alguna de las dos formas tiene ventajas sobre la otra? ¿Y desventajas? ¿Cuáles son?**

Pista 4

- **¿En cuál de las descomposiciones anteriores se basa nuestro algoritmo?**

Si quiere más información puede consultar los videos de Internet buscando Multiplicación egipcia o en el link: https://www.youtube.com/watch?v=LFqc7NEuGiE

En el ejemplo anterior se puede ver que el factor 45 se obtiene al sumar los números 1, 4, 8 y 32. Estos números son **potencias**[2] **del número** 2:

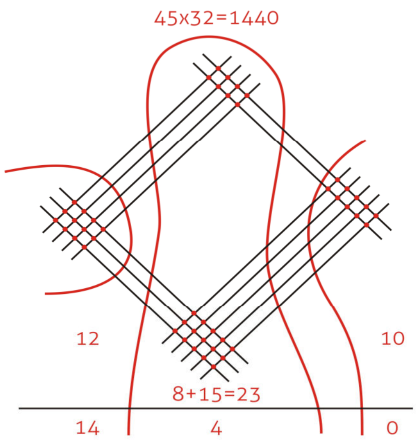
$1 = 2^0$ $4 = 2^2$ $8 = 2^3$ y $32 = 2^5$ y $45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

- **Escriba otros números distintos del 45 como suma de potencias de 2.**

Propiedad: Todos los números naturales se pueden escribir como suma de **potencias de 2**[3]. Esta propiedad asegura que el método egipcio de multiplicación siempre permite obtener el producto de un par de números naturales

3. Multiplicación maya

Otro método para encontrar un producto es el que utilizaban los mayas (siglos I a IX) aunque algunos afirman que es de origen chino:



Lo invitamos a visualizar este video:
https://www.youtube.com/watch?v=ouY1Fxhuh6o

- **¿Por qué se separarán en tres zonas los puntos de intersección de las líneas?**

[2] La potencia de un número natural es una expresión matemática que representa la multiplicación de ***un número varias veces por sí mismo***. El número que se multiplica varias veces se denomina **base** y el número de repeticiones que se escribe en menor tamaño como superíndice, se denomina **exponente**. Otras potencias de 2 son $2^6 = 64$; $2^7 = 128$, $2^0 = 1$, etc.

[3] Para argumentar por qué cualquier número se puede escribir como suma de potencias de 2, se puede recordar o buscar en la WEB cómo se escribe un número natural en **base 2.**

- **¿A cuál o cuáles productos corresponden cada zona?** Pista 5

- **¿Cómo se puede obtener el resultado final?**

- **Compare este método con la cuenta que efectuamos habitualmente.**

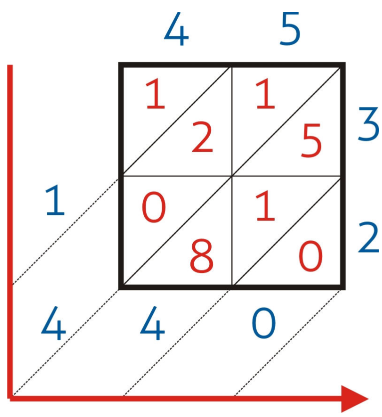
- **¿En cuál de las descomposiciones anteriores se basa este algoritmo?**

Algunas veces las líneas se dibujan horizontalmente

4. Multiplicación árabe

Esta forma de multiplicar se llama también multiplicación por celosía. ¿Por qué se llamará por **celosía**[4]?

En este método que se supone fue creado por los árabes, para encontrar el producto de 45 x 32 se recurre a este cuadro.



- **¿Cómo se realiza el producto? ¿Dónde se puede leer el resultado?**

- **¿Cómo se obtiene el producto si los números tienen más de 2 cifras?**

Si le interesa puede mirar en este video cómo se realiza la cuenta.
https://www.youtube.com/watch?v=_v6npb7Y300

- **¿Cómo se sabe cuáles son las unidades, decenas, centenas,… del resultado final?**

[4] Puede buscar Ventanas con celosías en Imágenes de la WEB

- **Compare este método con nuestro algoritmo de multiplicación. ¿Presenta alguna ventaja con respecto a este algoritmo? ¿Y alguna desventaja?** Pista 6

- **¿Se puede multiplicar un número de 3 cifras por uno de 2 cifras?** Pista 7

- **¿A cuál de las descomposiciones corresponde esta forma de multiplicar?**

5. En los cuatro procedimientos

- **En cada uno de los procedimientos presentados, realice productos por 10, 100,… Escriba formas económicas de obtener el producto por 10, 100,… en cada uno de estos procedimientos.**

- **¿Se modifica alguno de los procedimientos si los números que se multiplican tienen un 0 intermedio? ¿O terminan en 0?**

6. Cálculo mental - INTRIGA MULTIPLICATIVA

En algunos casos obtener el producto de dos números puede ser fácil sin necesidad de hacer la cuenta, usando cálculo mental.

Primera parte

Use el método egipcio para multiplicar 23 x 101, luego el árabe y finalmente la cuenta habitual.

El resultado es 2323, es decir el primer número repetido dos veces.

- **Si se multiplicara 54 x 101 ¿también se obtendría 5454?**

- **¿Sucederá lo mismo cuando se multiplique cualquier número natural por 101?**

- **¿Encontró números con los cuales al multiplicar por 101 no sucede que en el resultado aparece el mismo número repetido dos veces? Escriba algunos de esos números.**

- ¿Cómo se puede **explicar** o **justificar** que al multiplicar un número por dos cifras, el resultado está formado por el mismo número, repetido dos veces? Pista 8

Recuerde probar con distintos números (o números de distinta cantidad de cifras)

Segunda parte

Cuando se multiplica por 101 un número de una, tres o más cifras, el resultado no se obtiene repitiendo el mismo número dos veces.

- **¿Por cuánto habría que multiplicar un número de tres cifras para que en el resultado aparezca el mismo número repetido dos veces?**

- **Y ¿si el número tuviera sólo una cifra? Y ¿para cualquier número de cifras?**

- **Escriba una propiedad general para un número de cualquier cantidad n de cifras:**

  Si se quiere obtener como resultado ese mismo número repetido dos veces hay que multiplicarlo por…

- **Verifique si se cumple para números con distintas cantidades de cifras.**

En Matemática cuando se piensa que una propiedad es verdadera es necesario **demostrarla**. En esta actividad tuvo que justificar por qué al multiplicar un número de dos cifras por 101 en el resultado aparece el mismo número repetido dos veces, usando la propiedad distributiva. En Matemática también interesa encontrar **reglas o propiedades generales**, no sólo reglas que valgan para algunos números, sino que valgan para todos.

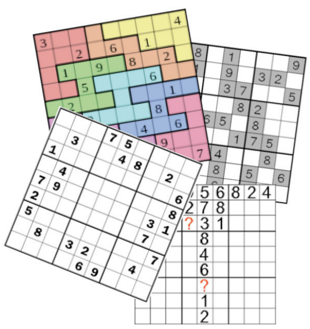
En este caso la propiedad general dice:

Si a un número cualquiera de n cifras se lo quiere multiplicar por otro, para que el resultado se pueda obtener repitiendo dos veces el mismo número, es necesario multiplicarlo por un número formado por un 1, n-1 ceros y luego otro 1.

Por ejemplo *si* el número tiene 2 cifras, n-1 es igual a 1, por lo tanto hay que multiplicar por 101. Verifique que la regla es correcta para otras cantidades de cifras del número natural.

II. Juegos y entretenimientos… matemáticos

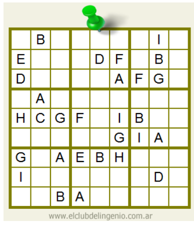
1. Sudoku



¿Conoce el juego del Sudoku? Puede mirar el video: “El sudoku y cómo se juega” en https://www.youtube.com/watch?v=tbFCZRO43hA (recuperado el 10/07/2015).

- **¿Lo asustan tantos números?**

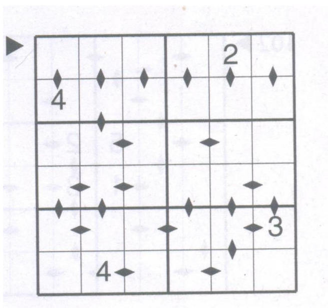
  En realidad para jugar no hay que saber matemática, incluso se podrían usar nueve letras desde la A hasta la I en lugar de números como en el dibujo.



En esta página puede encontrar sudokus para resolver de distintos grados de dificultad: http://www.sudoku10.net/sudokus-sudoku-online-nivel-muy-facil.html
(recuperado el 10/07/15)

2. Sudokón (6x6)

Esta es una variación del Sudoku. Siguen valiendo las reglas del Sudoku pero en este caso en cuadros de 6 números, en lugar de 9. Además de las reglas ya conocidas, las flechas que relacionan dos casillas, indican que en ellas tiene que haber números consecutivos.



- **¿Qué número se puede poner a la izquierda del 3? Solo podrían estar el 2 o el 4. ¿Cómo se puede decidir cuál de esos dos números irá?**

- **En la última fila hay un 4, ¿por qué a su derecha tiene que estar el 3 y no puede ir el 5?**

III. Adivinar los números

Reglas

- Es un juego para dos jugadores.
- El primer jugador dice dos números naturales S y R siendo S>R.
- El segundo tiene que encontrar dos números a y b, también naturales, que al sumarlos den como resultado S y al restarlos den como resultado R. Tiene 5 minutos para contestar.
- Si el segundo jugador encuentra los dos números gana un punto. Si no encuentra los dos números el punto es para el primer jugador.
- Se intercambian los roles.
- Gana el jugador que haya acumulado mayor puntaje en 5 juegos.

Por ejemplo, si el primer jugador dice: 10 y 4, el segundo puede decir 7 y 3, ya que 7 + 3 es igual a 10 y 7 - 3 es igual a 4.

Para jugar se puede utilizar una tabla como la siguiente[5]:

S	R	a	b	Puntaje jugador 1	Puntaje jugador 2

- **Si los números S y R son 20 y 8 ¿Cómo se puede empezar a buscar los números a y b? ¿Pueden ser 19 y 1?** Pista 9

- **En una partida, Juan dijo 21 y 11 y Marta busca los dos números que sumados den 21 y restados den 11 y prueba con distintos números:**

12 y 9	diferencia 3	no
13 y 8	diferencia 5	no
14 y 7	diferencia 7	no
15 y 6	diferencia 9	no
16 y 5	diferencia 11	¡sí!

¿Podría haber encontrado los números más rápidamente? ¿Cómo? ¿Con qué números podría haber probado después de 12 y 9?

- **¿En cuál o cuáles de los tres casos siguientes, resulta más fácil encontrar los números a y b? Explique por qué le parece o parecen más fáciles.**

S= 28 y R=16 **S = 28 y R = 4?** **S= 28 y R = 26**

[5] Si está solo puede probar con distintos números, sin competir con otro jugador.

- **Averiguar los valores de los números a y b en cada uno de los casos siguientes:**

- 21 y 13	a =	y	b =
- 34 y 31	a =	y	b =
- 27 y 14	a =	y	b =
- 10 y 4	a =	y	b =

- **¿Siempre se pueden encontrar los números a y b?**

  Si en algunos casos no se pueden encontrar los dos números, es decir no hay solución, escriba por qué le parece que no los hay.

- **Hallar más pares de números para los cuáles sí se puedan encontrar los números a y b**

- **Enunciar una propiedad general.**

  "Para que existan los números a y b, los números S y R deben ser….

- **La propiedad anterior ¿permite encontrar muchos números S y R para los cuáles se puedan obtener los números a y b y otros para los cuáles no se puedan obtener los números a y b?**

Para encontrar los números a y b se pueden escribir pares de números que sumados den S y luego calcular las restas entre ellos hasta lograr el número R. Sin embargo la Matemática desarrolló un método para resolver este tipo de problemas para cualquier par de números S y R. Con los datos del problema se puede plantear un **sistema de ecuaciones**[6]**:**

$$\begin{cases} a+b=S \\ a-b=R \end{cases}$$

Para resolverlo se puede despejar **a** en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} a=S-b \\ a=R+b \end{cases}$$

Y por lo tanto:

$S-b=R+b$ y $S-R=2b$ o sea: $b=\frac{S-R}{2}$ y $a=\frac{S+R}{2}$

Por ejemplo, $S=41$ y $R=27$ entonces

$b=\frac{41-27}{2}=7$ y $a=\frac{41+27}{2}=34$

[6] Aparecen dos ecuaciones porque tienen que cumplir esas dos condiciones: sumados tienen que ser igual a S y restados a R.

El problema se resolvió y los valores pedidos son 7 y 34.

En cambio:

Si $S = 43$ y $R = 28$, $b = \frac{43-28}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}50$ y $a = \frac{43+28}{2} = \frac{71}{2} = 35{,}50$

En este último caso los valores obtenidos para a y b no son números naturales, entonces el problema no tiene solución.

Cuando hay que dividir un número por 2, para que el resultado sea un número natural, es necesario que ese número sea par.

O sea, S + R y S-R tienen que ser pares. ¿Cómo deberían ser S y R para que tanto la suma como la resta de por resultado un número par? **Pista 10**

Ejercicios

1. Más formas de multiplicar

En este sitio puede encontrar otros métodos para realizar cálculos como la multiplicación rusa o con dedos.

http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas1B.htm

Elija dos de ellas y explique por qué usando esas formas de multiplicar se puede obtener el resultado correcto.

2. Realice el producto 256 x 302 en cada uno de los métodos vistos. Señale cuáles son las ventajas o desventajas de cada uno de ellos.

3. Para seguir razonando:

Efectúe las siguientes multiplicaciones

- 22 x 28= …
- 27 x 23 = …
- 21 x 29 = …

Se trata de lograr escribir el resultado sin necesidad de resolver la cuenta. Si no sabe aún cómo hacer, puede seguir probando con otros cálculos:

- 24 x 26 =….
- 25 x 25 =….

¿Descubrió algo que le pueda ayudar a resolver el cálculo mentalmente?

¿Servirá para otros productos, por ejemplo 31 x 49? ¿Y para 31 x 39?

Escriba sus conclusiones.

4. **Otra variación del Sudoku es el KAKURO**

Puede buscar las reglas de este juego en:
http://www.sudokumania.com.ar/juegos/kakuro

(Recuperado el día 10/07/2015)

Es bastante diferente del Sudoku, ya que la información que existe en el cuadro es la suma de números de una cierta región.

¿Cuál es la suma máxima posible?

Para cada uno de los números que encuentre, escriba las sumas posibles.

5. **Busque en la WEB cómo multiplicar con un ábaco japonés o chino. Aprenda a multiplicar de esa manera y explique por qué de ese modo se puede obtener el resultado correcto. ¿Qué diferencias hay entre un ábaco japonés y un ábaco chino?**

6. **En las páginas de Sudoku puede encontrar distintos niveles de dificultad, resuelva al menos uno de cada nivel.**

Pistas

Pista 1. El número 135 es el producto de 45 x 3 pero en realidad se está multiplicando 45 x 30 = 1.350. El 0 de las unidades de 1.350, generalmente no se coloca.

Pista 2. En lugar de considerar 45 “veces” 32, iniciaban el proceso a partir de 1 “vez” 32.

Pista 3. Los números 1, 4, 8 y 32 suman 45.

Pista 4. Puede comparar los productos que es necesario saber de memoria para realizar la cuenta en una y en otra forma. También puede analizar si hay que modificar el algoritmo si los números tienen mayor o menor cantidad de cifras.

Pista 5. En la zona de la derecha, se obtiene 2x 5 = 10. Con este 10 se puede formar una decena y se deja 0 unidades en el resultado final. En la zona central hay dos productos: 4x2=8 y 5x3=15 que sumados entre sí y con la decena formada en el primer paso se obtiene 24.

Pista 6. En esta forma de multiplicar se realiza sólo producto de dígitos y se escriben directamente, sin tener que adicionarlo a la siguiente columna.

Pista 7. En este caso no se dibuja un cuadrado sino un rectángulo de 3 x 2 cuadraditos.

Pista 8. El número 101 se puede pensar como 100 + 1 entonces multiplicar un número por 101 es lo mismo que multiplicar por 100 y por 1 y luego sumarlos.

Pista 9. Puede pensar en las descomposiciones del número 20 como suma de dos números y analizar si la diferencia es 8.

Pista 10. Puede analizar qué pasa si S y R son pares, o si uno es impar y el otro no, o si los dos son impares.

Entre diagramas, encuestas y estadísticas

La información escrita que aparece en diarios, revistas, Internet y otros medios de comunicación y muchas ciencias, está acompañada generalmente de gráficos u otro tipo de representaciones de manera de hacer más visibles los datos relevantes que se pretende transmitir. Para ello es necesario recopilar datos, analizarlos y extraer conclusiones. La disciplina que se encarga de este tipo de tareas es la Estadística[i].

"Bienvenidos al mundo de las estadísticas",

Walter Sosa Escudero. En TEDxRio de la Plata. Recuperado en junio de 201

https://www.youtube.com/watch?v=hODwSUX0kT4

A continuación le presentamos cuatro situaciones con preguntas y herramientas para explorar, averiguar, comentar con compañeros y sacar conclusiones.

Situación 1: El pasado y el futuro del mundo.

1.1 Información de Argentina.

1.2 Madres Argentinas y cantidad de hijos.

Situación 2: Explorando mi entorno… ¿Hijos? ¿Cuántos?.

Situación 3: ¡Indícame, indicador! ... El derecho a la educación.

3.1 Abandono Escolar a Nivel Mundial y de la Argentina – UNESCO.

Situación 4: Sondeo de notas.

Ejercicios

Situación 1: El pasado y el futuro del mundo

A través de Internet, de la prensa y de la televisión nos llegan noticias, datos y acontecimientos históricos de todo el planeta. Sin embargo, rara vez tenemos una visión global de lo que pasa en un país, de su historia o de sus perspectivas de futuro. En un mundo interconectado como el de hoy, descubrir lo que sucede en las familias chinas o cómo gestionan su dinero los brasileños nos puede ayudar a saber hacia dónde vamos todos.

Le proponemos ver el siguiente video donde **Eduardo Punset**[7] entrevista[ii] a **Hans Rosling**[8], quien nos revela la cara fascinante de los números y las estadísticas, y su inmenso poder para explicar el pasado y el futuro del mundo.

Video 1 - entrevista parte 1 (hasta 10' 31'')

https://www.youtube.com/watch?v=IqANV1W6arw

Si le interesó, puede **descargar**[9] el software llamado "Gapminder", desarrollado por el Dr. Rosling, o utilizando la versión **web**[10].

- El Dr. Rosling ante la pregunta: ¿estamos mejor o estamos empeorando?, justifica su **respuesta**[11] analizando el **gráfico** de burbujas siguiente:

Expresiones en castellano de algunos términos del programa

Population: Población total

Geographic regions: Regiones geográficas

Chart: gráfico

Map: mapa

Size. Tamaño

Select: Seleccionar

Children per woman: Cantidad de hijos por mujer (total)

Life expectancy (years): Esperanza de vida (años).

[7] Abogado, escritor, economista y comunicador científico español http://www.eduardpunset.es/biografia
[8] Médico y estadístico, profesor de la materia "Salud Publica" del Instituto Karolinska, en Suecia.
[9] En: http://www.gapminder.org/downloads/
[10] En: http://www.gapminder.org/world
[11] : *"Yo trabajo en la salud pública, pienso que las cosas van mejor cuando las personas pueden vivir su vida y morir de ancianos y no de niños ni de jóvenes, y si pueden elegir cuantos hijos pueden tener sin necesidad de tener mucha descendencia."*

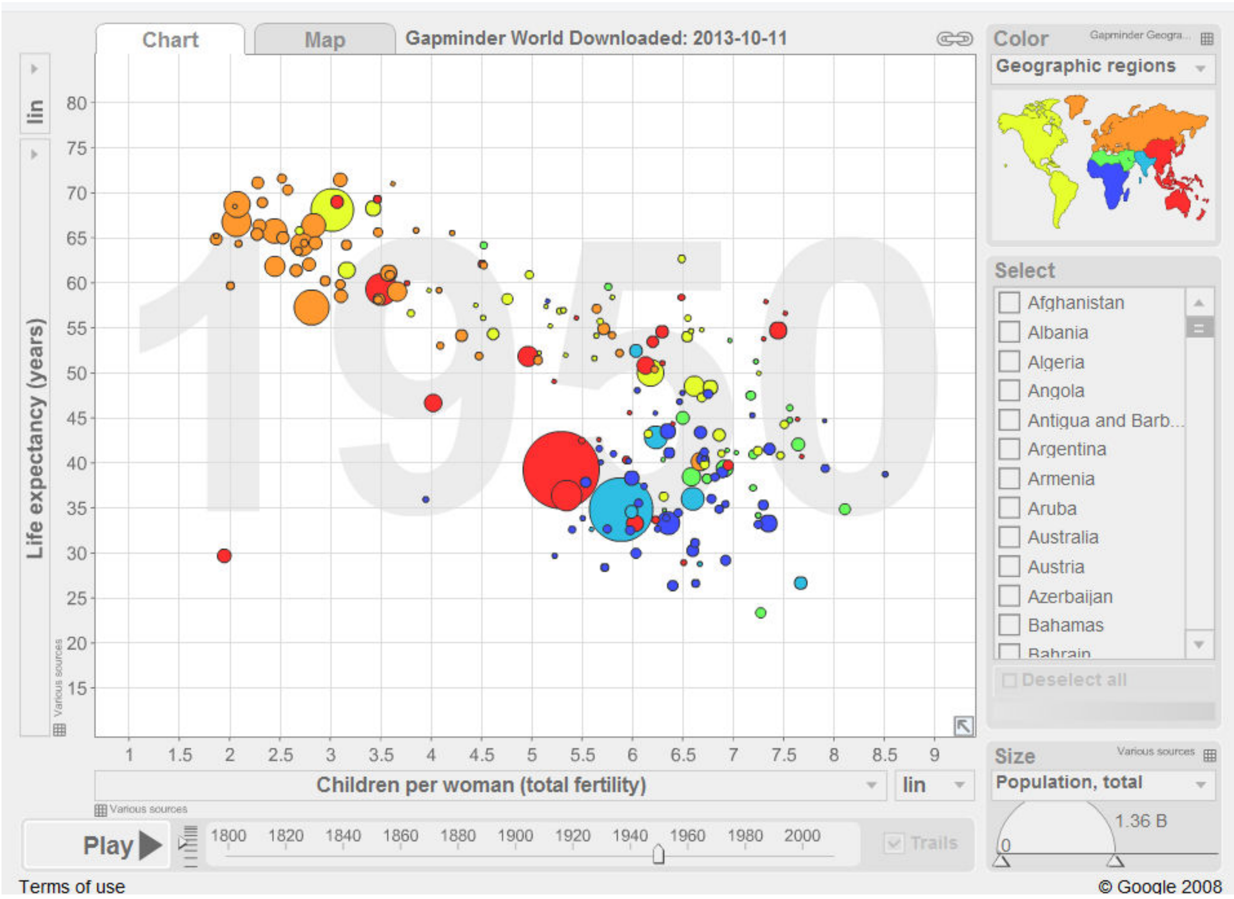


Gráfico elaborado con el programa Gapminder

- **¿Qué significan las burbujas? ¿Qué representa el color de una burbuja?**

- **Explore el mapa que se encuentra en el ángulo superior derecho con el nombre: Geographic regions. ¿Qué relación tiene con las burbujas?**

- **Las burbujas de un mismo color tienen distintos tamaños: ¿a qué corresponde? ¿Dónde se puede leer cuál es la población total de un país, para cada año?**

- **¿Hay información sobre Argentina?**

En el video siguiente le mostramos algunas funciones del Gapminder:

Video 2- explorando software y variables

https://www.youtube.com/watch?v=YwBqHc0I8xc#t=36

1.1 Información de Argentina

Le proponemos analizar la evolución de la Argentina desde 1895 hasta 2012 retomando la información necesaria en el video que se incluye más abajo o trabajando directamente con el software.

+info

De forma similar al análisis del Dr. Rosling en el video, use la variable esperanza de vida (life expentacy); cantidad de hijos por mujer (children per woman); población (population),y claro, la variable tiempo (en años).

Video 3 - capturas 1895 a 2012

https://www.youtube.com/watch?v=6Axm1MQCJw4

- **Rellene la siguiente tabla con la información que falta:**

República Argentina	1895	1914	1950	1994	2002	2012
Esperanza de vida (años)[12]						
Hijos por mujer[13]						
Población (millones de personas)		**7,89**[14]				

- **¿Qué sucede con la cantidad de hijos de las mujeres argentinas desde 1895 hasta 2012? ¿Se puede observar esa evolución en el gráfico? ¿Qué tipo de movimiento de la burbuja de nuestro país indicará esa disminución de la cantidad de hijos por mujer?**

- **¿En cuánto aumentó la cantidad de habitantes de nuestro país, desde el 1914?**

  33.101.000 33.110.010 33.000.110 33.000.101 Otra

- **¿Cómo aparece en el software la población de 4.030.000 habitantes?**

  4,03M 4,30M 4,003M Otra

Pista 1

[12] Life expectancy (years).
[13] Children per woman, en Argentina se la llama Tasa global de fecundidad.
[14] Mirando el gráfico (abajo a la derecha), al hacer clic sobre el país, se muestra la población de la Argentina. En el año 1914 era de 7,89 millones de habitantes.

- **¿En cuántos años aumentó la esperanza[15] de vida en Argentina de 1950 a 2012? ¿Cómo se puede ver este aumento en el gráfico de burbujas?**

- **¿Qué puede decir de la esperanza de vida de sus bisabuelos? ¿Hay o hubo relación con las "grandes estadísticas"?**

Pista 2

- **La siguiente tabla contiene información de la "Tasa global de fecundidad[16] por provincia. Total del país. Años 2001, 2005, 2010 y 2015".**

Provincia	Tasa global de fecundidad			
	2001	2005	2010	2015
Total del país	**2,45**	**2,24**	**2,19**	**2,11**
Ciudad Autónoma de Buenos Aires	1,84	1,68	1,63	1,57
Buenos Aires	2,31	2,11	2,05	1,97
Catamarca	3,18	2,90	2,82	2,71
Chaco	2,85	2,59	2,53	2,42
Chubut	2,53	2,30	2,25	2,15
Córdoba	2,12	1,93	1,88	1,80
Corrientes	2,91	2,65	2,58	2,48
Entre Ríos	2,70	2,46	2,40	2,30
Formosa	3,21	2,93	2,85	2,73
Jujuy	2,95	2,68	2,61	2,51
La Pampa	2,43	2,21	2,16	2,07
La Rioja	2,56	2,33	2,27	2,17
Mendoza	2,58	2,35	2,29	2,20
Misiones	3,42	3,12	3,04	2,91
Neuquén	2,48	2,26	2,20	2,11
Río Negro	2,57	2,34	2,28	2,19
Salta	3,21	2,92	2,85	2,73
San Juan	2,91	2,65	2,58	2,48
San Luis	2,98	2,71	2,64	2,53
Santa Cruz	2,76	2,51	2,45	2,35
Santa Fe	2,23	2,05	1,98	1,90
Santiago del Estero	2,62	2,39	2,33	2,23
Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur	2,75	2,51	2,44	2,34
Tucumán	2,64	2,40	2,34	2,24

Fuente: INDEC, Proyecciones provinciales de población por sexo y grupos de edad 2001-2015.[17]
Disponible en www.indec.gov.ar.

- **De acuerdo a la tabla: ¿Cuál es la cantidad de hijos *promedio* que tuvieron las mujeres en Corrientes en 2001? ¿Observa alguna tendencia en la cantidad de hijos por mujer? ¿Esta tendencia sucede solo en Corrientes?**

[15] Una esperanza de vida alta indica un mejor desarrollo económico y social en la población.
[16] Cantidad de hijos por mujer (Children per woman).
[17] Puede descargar el archivo desde Google, escribiendo *sesd_01c01*

- **¿La tasa de fecundidad tendrá alguna relación con el grado de urbanización de las provincias? ¿La cantidad de hijos de las mujeres de los principales centros urbanos del país es distinta a los de las provincias menos desarrolladas?**

Pista 3

- **¿Cuáles son las diferencias entre la cantidad de hijos por mujer en las provincias del NEA en comparacion con las del NOA? ¿Cuál es el valor de la tasa de fecundidad promedio de las provincias del NEA?**

Pista 4

1.2 Madres argentinas y cantidad de hijos

De acuerdo con los datos del último censo realizado en el año 2010, en la Argentina había 10.975.159 madres.

En este apartado le proponemos pensar en ¿cómo se distribuyen las edades de las madres argentinas? ¿Cuántos hijos tienen? ¿A qué edad prefieren las mujeres argentinas tener más hijos?

La siguiente es la tabla de “Mujeres de 14 años y más por cantidad de hijos e hijas nacidos vivos y promedio de hijos por mujer, según grupo de edad.”

Grupo de edad	Mujeres de 14 años y más	Cantidad de hijos e hijas nacidos vivos																	Promedio de hijos por mujer (1)
		Ninguno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Total	**15.738.019**	**4.762.860**	**2.587.317**	**3.427.995**	**2.272.815**	**1.163.095**	**585.472**	**326.628**	**233.349**	**141.297**	**96.029**	**57.395**	**33.309**	**25.431**	**11.428**	**7.715**	**3.620**	**2.264**	**2,0**
14	358.046	351.960	4.354	1.109	623	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	(2)
15-19	1.749.478	1.520.357	190.765	31.573	4.923	1.227	455	178	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,2
20-24	1.640.551	962.316	424.437	179.898	54.515	13.423	3.136	883	710	363	481	76	188	84	14	11	2	14	0,6
25-29	1.566.267	612.771	420.342	309.968	137.187	53.070	19.844	7.245	3.284	1.029	1.006	92	214	134	58	15	6	2	1,2
30-34	1.565.891	362.805	369.870	418.753	218.819	100.586	47.414	22.204	14.655	5.873	3.263	789	335	263	159	35	38	30	1,8
35-39	1.351.649	187.725	233.088	395.605	251.665	129.305	66.385	35.154	25.741	13.195	7.769	3.246	1.501	730	288	169	56	27	2,4
40-44	1.174.614	124.812	158.387	329.412	246.212	135.091	71.894	40.212	29.532	16.385	10.406	5.763	3.159	1.777	791	411	250	120	2,8
45-49	1.119.149	107.883	134.538	297.253	246.618	142.014	73.447	41.348	29.229	18.206	11.789	7.498	3.924	2.648	1.411	761	378	204	2,9
50-54	1.048.514	99.796	118.027	270.613	237.079	135.202	70.252	40.868	29.006	18.157	12.125	7.556	3.993	2.846	1.535	867	383	209	3,0
55-59	961.603	86.298	102.186	252.349	222.524	128.131	63.036	35.668	26.564	16.382	11.487	6.974	4.024	3.255	1.215	877	395	238	3,0
60-64	855.264	82.406	98.604	236.788	194.615	101.446	51.491	30.133	21.787	13.353	9.653	5.833	3.634	2.944	1.196	762	403	216	2,9
65-69	693.296	71.061	84.702	199.112	151.974	75.243	38.971	23.092	15.990	11.085	8.079	5.379	3.166	2.642	1.225	848	434	293	2,9
70-74	567.664	62.593	76.062	170.307	113.279	56.815	29.368	18.025	12.872	9.234	6.417	4.638	3.056	2.376	1.090	841	413	278	2,8
75-79	465.265	54.122	68.911	143.905	86.380	41.667	22.269	13.744	10.288	7.511	5.691	3.740	2.456	2.201	1.005	831	327	217	2,8
80 y más	620.768	75.955	103.044	191.350	106.402	49.875	27.510	17.874	13.691	10.524	7.863	5.811	3.659	3.531	1.441	1.287	535	416	2,7

Fuente: INDEC. Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2010. Disponible en www.indec.gov.ar.[18]

- **¿Qué cantidad de mujeres de 14 años son madres? ¿Qué porcentaje del total de mujeres de 14 años son madres? ¿Qué porcentaje de mujeres de 14 años tienen dos hijos o más? ¿Qué porcentaje de estas mujeres no tiene hijos?**

[18] Puede descargar el archivo desde Google, escribiendo ***P48-total_país***

- **¿Por qué en la primera y segunda fila cuyos encabezados son 14 y 15-19, en las columnas, no tienen valores a partir del 4 o a partir de 7 (encabezados de las columnas)?**

- **¿Qué cantidad de mujeres argentinas tienen entre 1 y 3 hijos? ¿Qué porcentaje del total de mujeres con hijos representan?**

- **¿Por qué será que entre las mujeres de 30-34 años el promedio de hijos es de 1,8?, ¿cómo se obtuvo este valor?**

- **¿El valor máximo del promedio de hijos por mujer es 3, en qué franjas de edad se encuentra?**

- **¿Cuál es el porcentaje de madres que tienen 4 hijos o más?** **Pista 5**

- **¿Cuántas madres hay en la Argentina con las mismas características que la suya en cuanto a edad y número de hijos que tiene? ¿Cuál es el porcentaje de mujeres respecto al total por edad? ¿y el porcentaje respecto al total por número de hijos?**

- **¿Cuál es el promedio de hijos de una madre de 50 años? ¿Es más probable que tenga muchos hijos?**

- **¿Por qué será que las cantidades de la columna 16 hijos va ascendiendo desde 14 a 416? ¿Podrá observarse alguna idea relacionada con las explicaciones de Hans Rosling?**

Pista 6

En el diario digital **Infobae**[19], puede encontrar información muy variada e interesante sobre la población en la Argentina.

Situación 2: Explorando mi entorno… ¿Hijos? ¿Cuántos?

En las actividades anteriores, apareció con frecuencia que el número de integrantes de cada familia está disminuyendo en muchos países y regiones del mundo.

- **¿Pasará lo mismo en nuestra región NEA[20]?**

Le proponemos —como se puede ver en el título— explorar sobre los hijos de las mujeres de su familia, tratando de analizar si ha variado y cómo la unidad familiar desde sus bisabuelas hasta hoy.

[19] Diario digital Infobae: http://www.infobae.com/2011/12/28/624173-argentina-alcanzo-su-tasa-natalidad-mas-baja-la-historia
[20] NEA significa Noreste argentino.

- **Qué información podría recoger para contestar la pregunta[21]: ¿Se verifica en su familia lo mismo que comunican las estadísticas sobre la cantidad de hijos por mujer?**

También se podría plantear otras preguntas relacionadas con esta cuestión como: ¿Antes, las mujeres, tenían hijos a una edad más temprana que actualmente o no? o alguna otra que considere interesante de analizar.

- **¿Una pregunta o varias preguntas sobre el mismo tema?, ¿objetivos?**

Una vez que tenga definida una idea o una pregunta del tema, podría plantearse otras características o nuevas preguntas relacionadas y cómo va a obtener los datos para responderlas en el estudio.

Es parte del proceso de trabajo del estadístico tomar decisiones y formular de forma clara la pregunta que se quiere responder y la población asociada a la pregunta.

- **¿Cómo conseguir la información necesaria para responder la pregunta?**

Esta es otra decisión que tendrá que tomar: "¿Cómo obtengo los datos? ¿A qué grupo voy a estudiar? ¿Cuál es la población y cuál la muestra[22]?".

Para conseguir los datos, puede preparar su lista de características[23] que quiera incluir, y las diferentes formas como podrían obtenerse.

> Los datos para un estudio pueden obtenerse: (1) *por simple observación*: el sexo, color de pelo y ojos, si usa o no anteojos; (2) *a través de una medición*: como el peso, la altura, el perímetro de la cintura; (3): *preguntando a las personas:* realizando una *encuesta* y preguntando por ejemplo, cantidad de hijos que tenían nuestras madres, abuelas, bisabuelas, etc., si son casadas, o el tiempo que pasa desde que se casan hasta tener el primer hijo, el tiempo que pasa desde el primero hasta el segundo, en qué década tuvieron sus hijos, o si creen que la mortalidad infantil ha bajado y por qué motivos, etc.

- **Ajustando la recolección antes de hacerla: ¿Están bien expresadas las preguntas?, ¿son claras?**

Si ya definió las preguntas podría ponerlas a prueba para ver si las personas a las que va dirigida la encuesta las entienden. Si se elabora una encuesta, es necesario tener claro ¿quién la rellenará? ¿Habrá un encuestador o lo completará cada persona encuestada?, ¿qué se hace si hay alguna pregunta no respondida?, etc.

- **¿Qué hago con esta información recolectada? ¿Cómo lo proceso?**

Se habrá dado cuenta que en el trabajo que le estamos proponiendo, tiene que tomar muchas decisiones que harán que no exista un único resultado, en este punto podría

[21] Este trabajo será más interesante si lo puede hacer con uno o más compañeros.
[22] Muestra es una parte de la población por estudiar, y existen diversos métodos para elegirla.
[23] Estas características pueden ser expresadas con números (edad, número de hijos, peso, etc.), o también como atributos (sexo, si está casada o no, o por qué cree que antes se tenían más hijos que ahora —religiones, anticonceptivos, economía, otros motivos—, etc.).

preguntarse qué es más conveniente[24]: "¿Vuelco esta información en la computadora? ¿Podría usar una planilla de cálculo como Excel? ¿O trabajo con los datos en mi cuaderno?".

- **¿A cuántas madres logré encuestar?, ¿en los resultados de la muestra de madres que tomé, puede observarse alguna idea sobre mi objetivo?**

Después de la recolección de los datos, llega el momento del conteo, y empezar a procesarlos para obtener información de esa muestra que puede darnos una idea de la población: ¿Cómo se pueden mostrar las características que tienen esas madres? ¿Con qué herramientas se puede observar cómo varía la cantidad de hijos? ¿Y las edades de las madres? Estas ideas varían según los datos que haya recolectado.

- **¿Qué porcentaje de mujeres encuestadas tiene 1 hijo?, ¿y 2 hijos?, ¿y 3 hijos? ¿Cómo expongo la información general de esta muestra? ¿Qué porcentaje de madres tiene más de 3 hijos? ¿Cómo presento[25] este resultado?**

Otras preguntas que podría formularse para la etapa de presentación de resultados:

¿Cómo son las familias?, ¿hay más familias numerosas o menos? ¿Qué porcentaje de mujeres tienen menos de 3 hijos? ¿Qué porcentaje del total de mujeres tiene hasta 2 hijos? ¿Cuántas madres tienen menos de 3 hijos? ¿Qué porcentaje del total?

¿Qué información destaca del gráfico de barras, o de torta y otro gráfico que hizo?

Según sus resultados, ¿las familias de su entorno tienden a ser más o menos numerosas?, ¿hay control de la natalidad, tal como se afirmaba en las situaciones anteriores?

- **¿Se verifica en su familia lo mismo que comunican las estadísticas sobre la cantidad de hijos por mujer? ¿Qué respuestas encontró a las preguntas que formuló?**

Dos maneras de hacer estadística:

Solo para describir: Se puede definir como los métodos que implican la recolección, presentación y caracterización de un conjunto de datos a fin de describir en la forma apropiada las diversas características de ese conjunto de datos. Incluye técnicas que se relacionan con el resumen y la descripción de datos numéricos, estos métodos pueden ser gráficos o pueden incluir análisis mediante cálculos.

Para hacer inferencias: Se puede definir como los métodos que posibilitan la estimación de una característica de una población o la toma de decisión concerniente a una población, tan sólo con base en los resultados de un muestreo. Comprende aquellas técnicas por medio de las cuales se toman decisiones sobre una población con base en una muestra o en un juicio de los administradores.

[24] Usar o no software como Excel u otros específicos de estadística, depende de lo familiarizado que esté con estos usos, y de la cantidad de información que tenga para procesar.
[25] Puede armar su propia tabla de resumen de datos, o también gráficos estadísticos, como el de torta, o gráfico de barras, de línea y otros que conozca, pero atención, no vale cualquier gráfico, hay que ver cuál es el más adecuado.

Situacion 3: ¡Indícame, indicador! ... El derecho a la educación

La última edición del **Compendio Mundial de Educación**[26] de la UNESCO destaca la urgente necesidad de abordar el problema que representa el alto número de niños y niñas que repiten grados y dejan la escuela antes de concluir la educación primaria o el primer ciclo de secundaria. Nuevos datos revelados por el Instituto de Estadística de la UNESCO (IEU) revelan que, en 2010, aproximadamente 32,2 millones de estudiantes de educación primaria repitieron el grado en el que se encontraban y 31,2 millones abandonaron la escuela y, probablemente, nunca más regresen a las aulas.

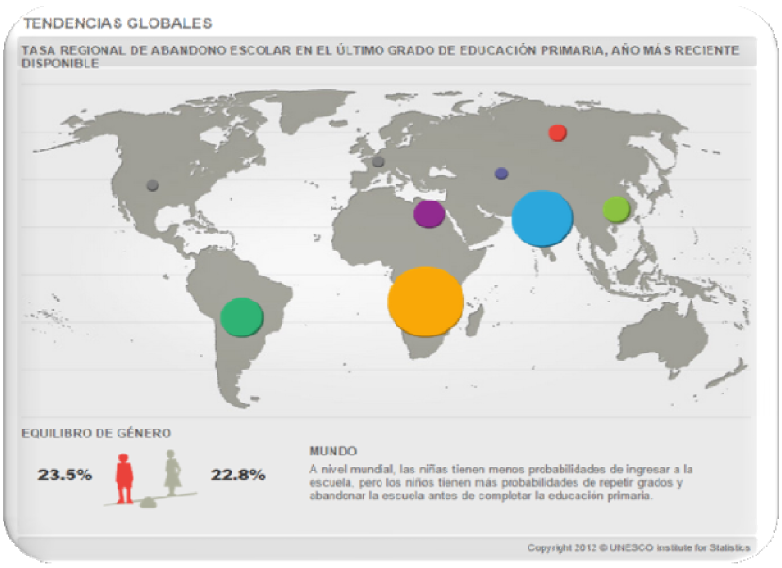
[26] En: http://www.unesco.org/new/es/media-services/single-view/news/stumbling_blocks_to_universal_primary_education_repetition_rates_decline_but_dropout_rates_remain_high/#.VaUG2_lVikp

Como habrá observado en la infografía, en América Latina y el Caribe se estima que aproximadamente 2 de cada 10 niños que comienzan la escuela, la abandonan:

- **¿Qué sucede en Argentina con el abandono escolar?**

3.1 Abandono escolar a nivel mundial y de la Argentina – UNESCO.

Le proponemos explorar la herramienta interactiva desarrollada por la UNESCO, ingresando en el siguiente enlace:
http://www.uis.unesco.org/Education/Pages/ged-2012-visualizationSP.aspx



- **A nivel mundial, ¿quiénes poseen mayor tasa de abandono de la escuela primaria: los niños, las niñas o hay "equilibrio de género"? ¿Por qué se producirá esa situación?**

Pista 7

- **¿Cuál es el valor de ese porcentaje de abandono escolar en las regiones de África Subsahariana, Asia Meridional y Occidental? ¿Cuáles son las regiones geográficas donde la urgencia de abordar este problema es mayor?**

- **¿Qué sucede con el abandono escolar en los países de América Latina y el Caribe?**

- **Si de cada 10 niños 2 abandonan, esto equivale al porcentaje aproximado de:**

2% -20% - 0,2% - otro valor

Pista 8

- **¿Es cierto que en Argentina 2 de cada 10 niños que comienzan la escuela la abandonan?, ¿por qué?**

- **¿Qué ocurre con el abandono escolar en Paraguay, Uruguay, Perú, México y Cuba? De cada 10 niños paraguayos que comienzan la escuela, ¿cuántos la abandonan?**

Pista 9

Tasa de Abandono escolar (%)	Argentina	Paraguay	Perú	Uruguay	México	Cuba
Niños						
Niñas	**5,9**					
Todos los alumnos						**3,8**

- **¿Observa alguna tendencia significativa en cuanto al sexo de los niños y la posibilidad de abandonar la escuela?**

Situación 4: Sondeo de notas

Una profesora quiere tener una idea sobre cómo fueron los resultados en el examen de Matemática que les tomó:

1	3	7	4	4	1	4
2	5	5	2	7	3	2
4	8	1	5	4	1	9
4	10	8	5	9	6	3
8	3	2	4	9	3	2
1	4	6	3	4	1	10

A partir de estas notas:

- **¿Cómo le parece que este grupo está en Matemática?**

Muy malo – Malo – Bueno – Muy bueno

Pero la profesora quiere saber un poco más, no sólo muy bueno o muy malo, ella quiere que al menos el 50% de sus alumnos haya aprobado (se aprueba con 4).

- **¿Lo habrá logrado?**

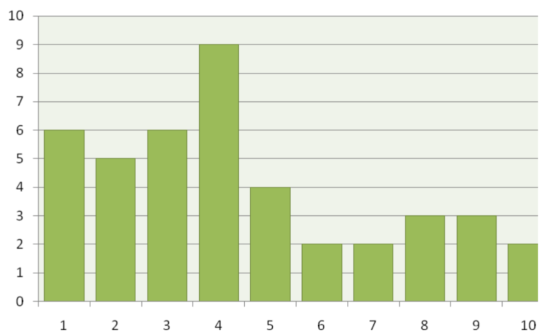
Pista 10

Para facilitar el análisis de los datos puede armar una tabla con las notas posibles de 1 a 10 y la frecuencia de cada una.

Con los datos ordenados en una tabla, ¿pudo obtener mayor información para entregarle a la profesora?

Notas	Frecuencia (cantidad de veces)
1	
2	
3	
4	
5	4
6	
7	2
8	
9	
10	
Total	

Éste es un gráfico de barras de las notas obtenidas en este curso, y su uso es muy habitual en un estudio estadístico, aunque como verá le faltan algunos datos para que se pueda leer la información más fácilmente. Complete la información.

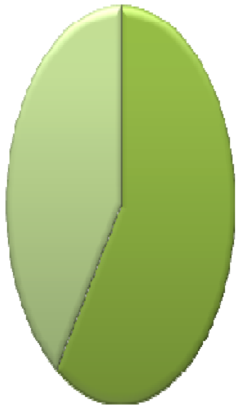


- **¿Qué indica cada eje?**

- **¿Qué indica la barra más alta?**

- **Compare este gráfico con la tabla de valores, ¿permite visualmente tener un idea más acertada sobre cuál es la nota más repetida?, ¿y la nota promedio?**

Ahora bien, esta profesora ahora necesita completar en su planilla del curso la cantidad de alumnos que aprobaron y el porcentaje del total, para luego mostrar en un gráfico de torta.



- **¿Será cierto que el 70,5 % del curso debe recuperar el examen?**

- **¿Qué información necesita el gráfico para que cualquier persona pueda leerlo?**

Después del estudio que hicieron, ¿cuál podría ser el informe que le den a la profesora?

Ejercicios

1. Abandono interanual en provincias argentinas – UNICEF y DINIECE

Le proponemos explorar **InfoArgentina**[27], un sistema web que permite generar mapas, y gráficos estadísticos adaptada por UNICEF Argentina. En:

http://infoargentinadi7.unicef.org.ar/libraries/aspx/Home.aspx

[27] Es un sistema de indicadores que permite conocer la situación de niños, niñas y adolescentes que viven en la Argentina.

El gráfico de línea siguiente muestra la cantidad de alumnos en establecimientos educativos, en el periodo 2000-2013.

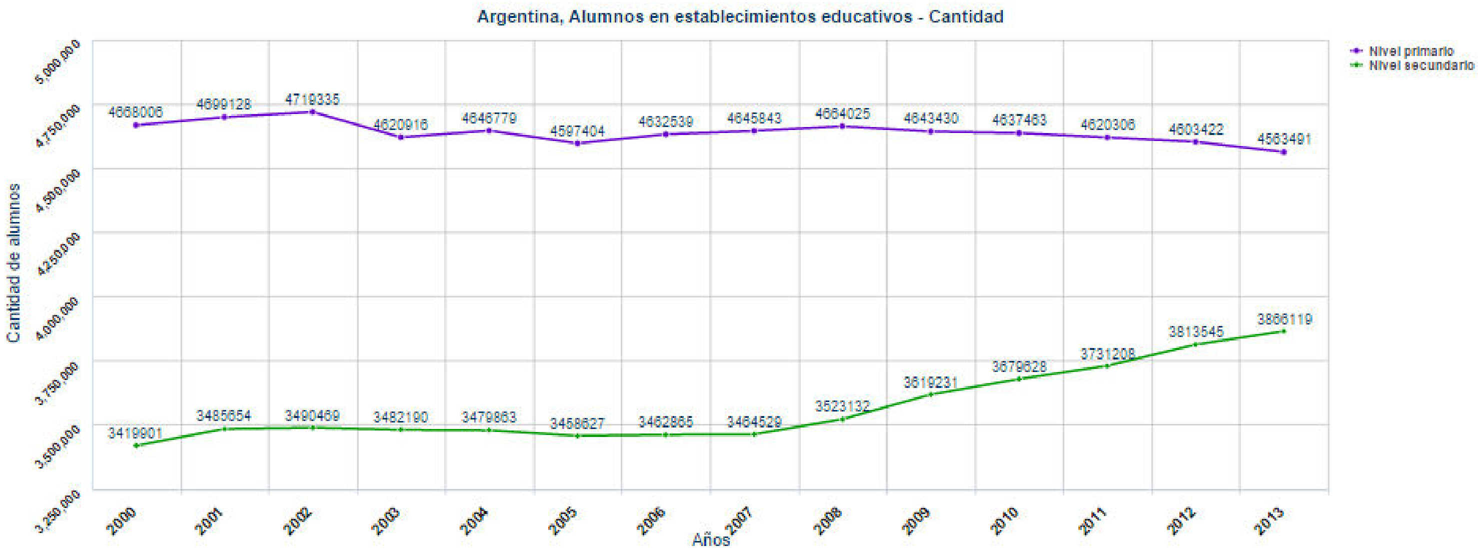


Gráfico elaborado con InfoArgentina, fuente: Ministerio de Educación de la Nación. DINIECE.

- **¿Qué se puede decir de la cantidad de alumnos en primaria después de 13 años?**

- **Si toma como referencia la cantidad de alumnos de nivel primario en el año 2000, ¿en qué porcentaje aumentó o disminuyó la cantidad de alumnos del 2002?, ¿y del año 2013?, ¿a qué cantidad de alumnos se corresponden?**

Pista 11

- **Si ahora en cambio toma como referencia la cantidad de alumnos de nivel primario del año 2013, ¿el porcentaje de alumnos del año 2002 aumenta o disminuye?, ¿y el porcentaje de año 2000?, ¿a qué cantidad de alumnos corresponde?**

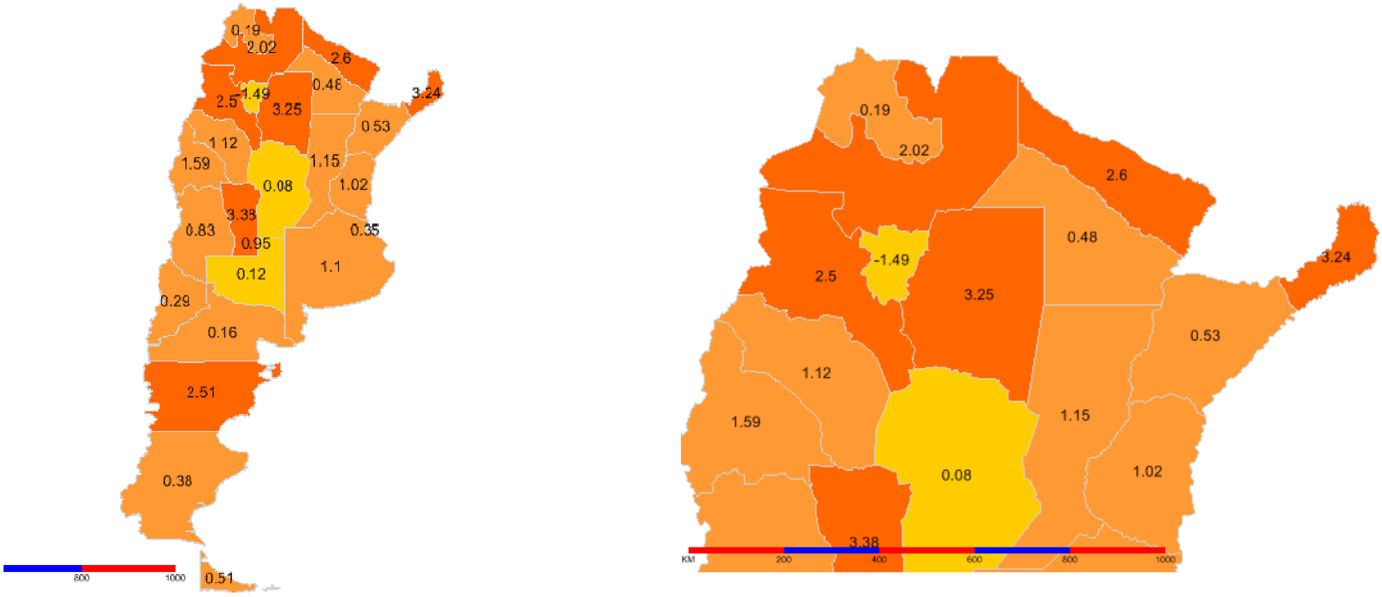
Pista 12

- **¿Qué pasará con los porcentajes de alumnos de secundaria si toma como año de referencia el 2013?, ¿y si fuera otro? ¿Cuál es más conveniente?**

En el siguiente mapa, elaborado con InfoArgentina, se puede observar la tasa de abandono interanual[28] para nivel primario del periodo 2012-2013

[28] Es un porcentaje que indica abandono de un año a otro.

Tasa de abandono interanual, Tasa, Nivel primario (2012-2013)



- **¿Cuáles son las regiones o provincias del país que en ese período necesitan abordar el problema de forma prioritaria?**

- **¿Qué provincias están al mismo nivel que la provincia de Corrientes en cuanto al abandono en este período? ¿Cuáles necesitan profundizar sus políticas educativas en cuanto a esta temática?**

- **Para seguir pensando: ¿Cuál es la evolución de este indicador en otros períodos? ¿Las provincias del NEA estaban mejor o peor?**

  Explore y construya su mapa en InfoArgentina[29].

Pista 13

Tasa de abandono interanual: es el porcentaje de alumnos matriculados en un grado /año de estudio de un nivel de enseñanza que no se vuelve a matricular el año lectivo siguiente como alumno nuevo, repitente o reinscrito.

2. Violencia de género: femicidios, la peor estadística

Con el objetivo de ampliar y profundizar las monitorizaciones en el año 2009 se conforma el "*Observatorio de Femicidios en Argentina Adriana Marisel Zambrano*", dirigido por la Asociación Civil La Casa del Encuentro. De acuerdo a esta fuente, en 2013 la cantidad de femicidios en Argentina ascendió a un total de 295 mujeres.

[29] En: http://infoargentinadi7.unicef.org.ar/libraries/aspx/Home.aspx

Video C5N – Violencia de género
https://www.youtube.com/watch?v=MDq0WqV18Lo

De acuerdo a los datos presentados por el informe:

- **¿De los 255 casos ocurridos en el 2012, cuántos femicidios fueron causados por parejas o exparejas?**

- **¿Cuántos femicidios por semana ocurrieron en el año 2008?, ¿y en los años siguientes?**

- **En 2012: ¿Qué porcentaje de hijos e hijas huérfanos son menores de edad?**

- **¿Cuántas mujeres habían realizado las denuncias correspondientes?**

- **Tomando como año de referencia el 2008, ¿qué porcentaje de aumento de femicidios hubo año a año, hasta el 2013?**

- **En el diario Página 12[30], se afirma que "en 2013 hubo casi 300 femicidios, un 16 % más que en 2012". ¿Es una afirmacion cierta? ¿Por qué?**

3. El caso de un estudio de sanidad vegetal

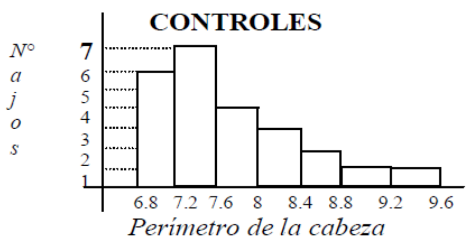
En un ensayo de sanidad vegetal se estudia el efecto de una nueva formulación química para el control de una plaga en ajos blancos. Los datos se resumen en los siguientes gráficos:

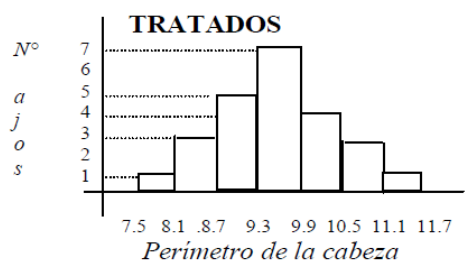
a. **Indique el tamaño de las muestras y la variable bajo estudio.**

b. **¿En qué rango de valores se concentran los datos para ambos casos?**

c. **Indique qué medida de tendencia central elegiría en cada caso. Fundamente su elección.**

d. **Las distribuciones observadas, ¿tienen la misma variabilidad? Fundamente su respuesta.**





[30] En: http://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-241212-2014-03-07.html

e. **¿Podría hacer alguna conjetura sobre el efecto de la nueva formulación química?**

4. La población argentina. Su pirámide

En el diario digital Infobae[31], se afirma que "*Este descenso en los nacimientos, sumado a la extensión de la esperanza de vida, está dando lugar a una pirámide poblacional que presentan una base cada vez más estrecha y una cima más ancha.*".

El siguiente gráfico representa la Pirámide de Población por sexo, de la Argentina (2010):

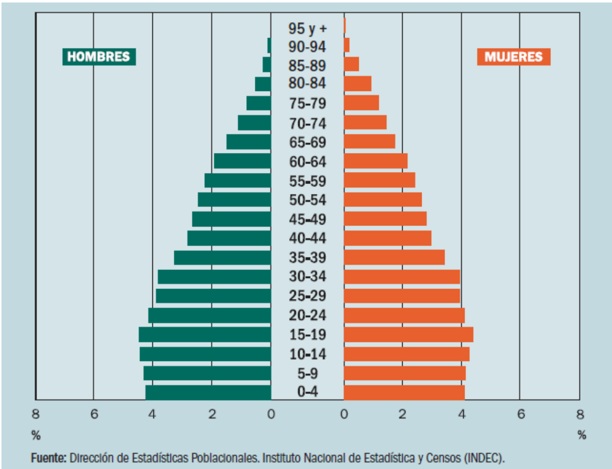


Gráfico extraído de la 18.ª publicación de iindicadores básicos de salud. Ministerio de Salud de la Nación. 2014.

En ella se representa, básicamente, la composición por edad y sexo de la población, pero, además, se puede inferir otro tipo de información, como migraciones, mortalidad infantil, guerras, epidemias, políticas vinculadas a la natalidad, etc. Es decir, analizando una pirámide de población se puede interpretar la dinámica y evolución de una población y, en algunos casos, ciertos factores que modifican su composición por edad y sexo.

- **¿Qué sucede con la poblacion si la base de la pirámide es más ancha?, ¿y si la base es más angosta?**
- **Si hubiera una gran inmigración, ¿cómo cambiaría la forma de la pirámide?**
- **¿Hay equilibrio de género?, ¿cómo se vería la pirámide si no hubiera?**

[31] En: http://www.infobae.com/2011/12/28/624173-argentina-alcanzo-su-tasa-natalidad-mas-baja-la-historia

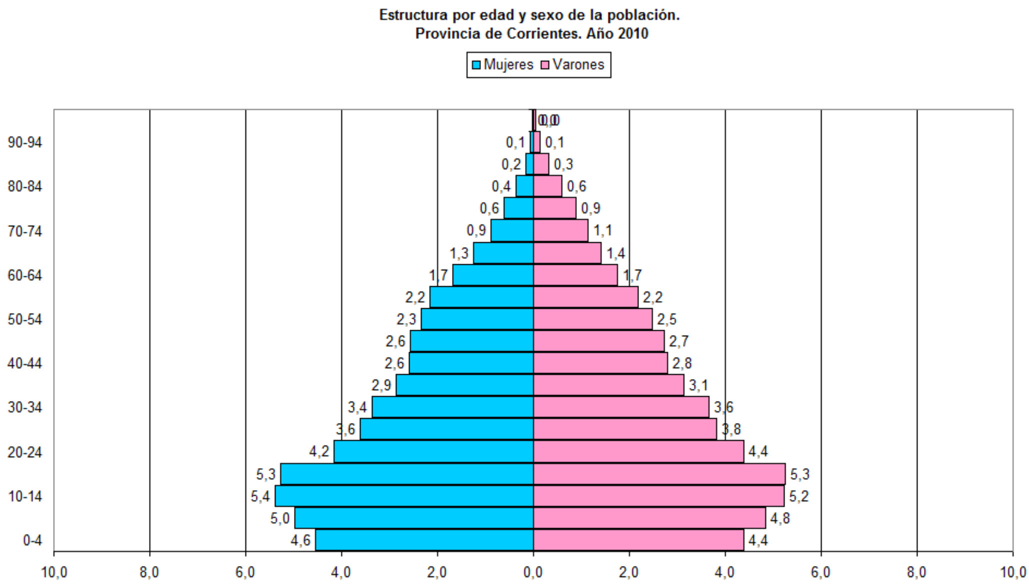
- **¿Qué puede decir de la poblacion argentina en cuanto a sus edades? ¿Qué porcentaje de jóvenes menores a 15 años hay en la Argentina?, ¿y mayores a 65 años?**

- **¿Cómo se vería la pirámide con una natalidad más alta?, ¿y si la mortalidad fuera más baja? ¿Cómo imaginá que será la pirámide en 30 años?**

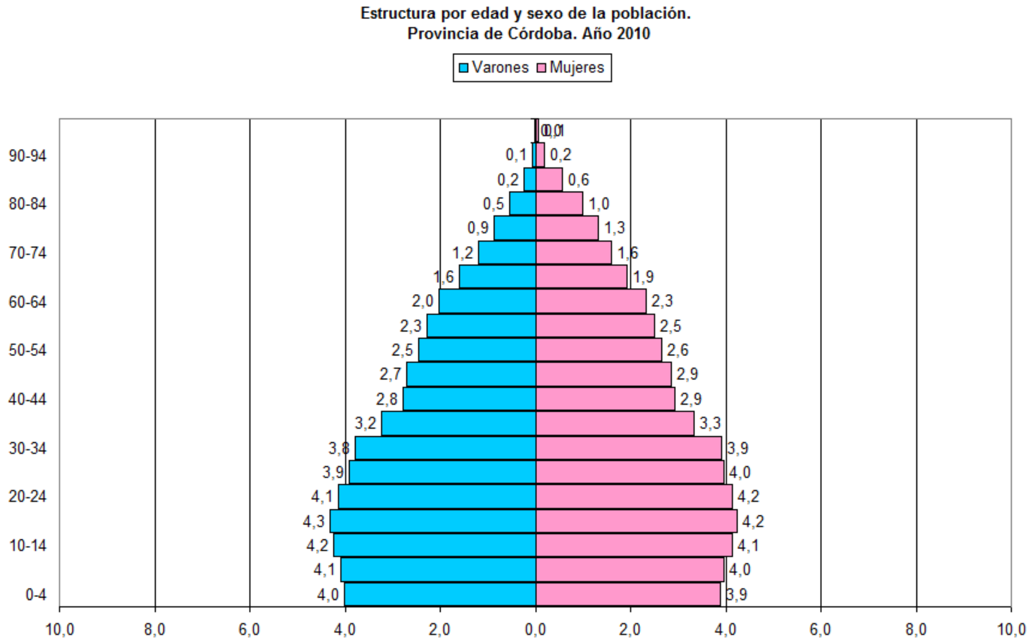
En el siguiente enlace encontrará las pirámides de muchos países del mundo:
http://www.worldlifeexpectancy.com/argentina-population-pyramid

5. Comparación de pirámides poblacionales

A continuación le presentamos las pirámides poblacionales de la provincia de Corrientes y de la provincia de Córdoba, según el Censo 2010.



Fuente: INDEC. Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2010.



Fuente: INDEC. Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2010.

- **¿Qué diferencias encuentra entre una y otra pirámide? ¿Cómo son las poblaciones de ambas provincias en cuanto a la distribucion por sexo y edad?**

Pistas

Pista 1: Saber que 41M es 41.000.000 puede ser útil para encontrar un "método" para pasar de una a otra escritura.

Pista 2: Conociendo el año en que nacieron e investigando en Gapminder, puede conocer la esperanza de vida, que se refiere al número de años que en promedio se espera que viva una persona después de nacer.

Pista 3: Los grandes centros urbanos o aglomerados argentinos son: Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Buenos Aires, Córdoba, Rosario, entre otros.

Pista 4: El promedio es una medida resumen, y se calcula como lo hacía con el "promedio de notas del trimestre" en la escuela.

Pista 5: Puede servirle saber cuántas mujeres tienen 4 hijos, cuantas tienen 5 hijos, y así hasta el total de mujeres que tienen 16 hijos.

Pista 6: La tabla nos dice algo sobre la natalidad en la Argentina en la actualidad y si es probable que las familias tengan más o menos hijos.

Pista 7: Explorando la herramienta interactiva podría analizar la situación a nivel mundial, o regiones geográficas e incluso a nivel de algunos países.

Pista 8: En África Subsahariana el 42,1% de los niños abandonan la escuela antes de terminar la educación primaria.

Pista 9: Podría completar la tabla para comparar, un porcentaje de 60% puede indicar 6 de 10.

Pista 10: El 50% corresponde a la mitad de los datos, entonces se podría dividir a la muestra de notas en dos categorías.

Pista 11: Si el porcentaje de alumnos en establecimientos educativos del 2002 es del 101% respecto de la cantidad de alumnos del año 2000, quiere decir que aumentó en 1%.

Pista 12: Si busca en InfoArgentina el indicador "Alumnos en establecimientos educativos", puede generar la tabla de valores con los datos del gráfico de línea de arriba.

Pista 13: En la sección de descargas puede encontrar los mapas generados, en el archivo con el nombre ***Tasa de abandono interanual, tasa, nivel primario.xls***

Páginas web consultadas

Asociación Civil: La casa del encuentro, Observatorio de Femicidios en Argentina Adriana Marisel Zambrano. Junio de 2015. http://www.lacasadelencuentro.org/

Blog de Eduard Punset. Junio de 2015. http://www.eduardpunset.es/biografia

Fundación sueca Gapminder, cuyo responsable es el profesor Hans Rosling, del International Health, Karolinska Institutet de Estocolmo. Julio de 2015

http://www.gapminder.org/

InfoArgentina, Unicef, es una base de datos que permite conocer, a partir de distintos indicadores, la situación de los niños, niñas y adolescentes que viven en Argentina

http://infoargentina.unicef.org.ar/

http://infoargentinadi7.unicef.org.ar/libraries/aspx/Home.aspx

Infobae. Diario digital argentino. Junio de 2015

http://www.infobae.com/2011/12/28/624173-argentina-alcanzo-su-tasa-natalidad-mas-baja-la-historia

Instituto Nacional de Estadística y Censos. Junio de 2015

http://www.indec.mecon.ar/comunidadeducativa/tipos_de_piramides.pdf

http://www.censo2010.indec.gov.ar/resultadosdefinitivos_totalpaís.asp

http://www.indec.gov.ar/micro_sitios/webcenso/censo2001s2/ampliada_index.asp?mode=01

Pirámide poblacional Corrientes
http://www.censo2010.indec.gov.ar/resultadosdefinitivos_TotalPaís_Piramide.asp?k=1212002CC2F36BEC42A92586976D1AF7C46D3D4C150DC51AB3E3F8AAE3AC81A7597ABBB9408ACD93

Pirámide poblacional Córdoba
http://www.censo2010.indec.gov.ar/resultadosdefinitivos_TotalPaís_Piramide.asp?k=17156A2B25A941849BD72D3D8E8C7A56A9D3FF302DDCDB7D13604C6D9E9F404DD1E07FD161E861DF

Diario Página 12. "Las cifras del horror". Recuperado en Junio de 2015.
http://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-241212-2014-03-07.html

Ministerio de Salud de la Nación. Dirección de Estadísticas e Información en Salud. Junio de 2015.

http://www.deis.msal.gov.ar/indicadores.htm

http://www.deis.msal.gov.ar/publicaciones/archivos/indicadores_2014.pdf

Portal educativo oficial en Internet del Ministerio de Educación de la Nación Argentina. Junio de 2015

http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__4a0dba4d-7a08-11e1-82fa-ed15e3c494af/index.html

UNESCO: Compendio mundial de la educación, titulado Opportunities Lost: The Impact of Grade Repetition and Early School Leaving (Oportunidades perdidas: el impacto de la repetición de grado y de la salida prematura de la escuela), presenta datos e indicadores educativos.

http://www.uis.unesco.org/Education/Pages/global-education-digestSP.aspx

Herramienta interactiva:

http://www.uis.unesco.org/Education/Pages/ged-2012-visualizationSP.aspx

Recuperado de Youtube – Junio de 2015:

“Bienvenidos al mundo de las estadísticas”, Walter Sosa Escudero. En TEDxRio de la Plata. Junio de 2015 https://www.youtube.com/watch?v=hODwSUX0kT4

Redes 62: Desmontando mitos sobre el mundo - estadística social. Junio de 2015. https://www.youtube.com/watch?v=IqANV1W6arw

C5N - Violencia de género: femicidios, la peor estadística.

https://www.youtube.com/watch?v=MDq0WqV18Lo

Worldlife Expectancy, recuperado en junio de 2015. En el siguiente enlace encontrarás simulaciones de las pirámides de muchos países del mundo:

http://www.worldlifeexpectancy.com/argentina-population-pyramid

Entre triángulos y cuadriláteros

I. Triángulos

Triángulos y cabreadas

La mayor parte de los galpones o grandes superficies cubiertas tienen cabreadas en el techo. Las cabreadas son estructuras de madera o metal donde se observan distintos triángulos. Esta forma de colocar los tirantes asegura la solidez de la estructura ya que los triángulos son las únicas figuras indeformables.

Pista 1

En este link puede ver algunas construcciones donde utilizan triángulos:

https://goo.gl/YEXroY

Como habrá observado en las imágenes, los triángulos que se utilizan en las cabreadas son diferentes: isósceles, escalenos, rectángulos y los tirantes con los que los construyen son de distintas medidas.

En la escuela habrá estudiado que para construir triángulos se puede utilizar distintos instrumentos como regla, escuadra, compás, círculo.

En este video puede observar cómo se pueden construir los triángulos a partir de diferentes informaciones: https://www.youtube.com/watch?v=MfVKeHv--vk

Para construir triángulos también se puede usar un programa para computadora muy conocido como es GeoGebra[32]. Se trata de un programa libre que se puede bajar de la web.

En este video muestran cómo se pueden construir triángulos a partir de diferentes informaciones: https://www.youtube.com/watch?v=1eYzYMxGhUc

Los triángulos se pueden clasificar según las características de los lados o los ángulos.

Pista 2

[32] Puede descargar el programa en http://geogebra.softonic.com/

En este video se puede ver en forma dinámica esta clasificación:

https://www.youtube.com/watch?v=7-YGUl8tLeQ

- **¿Se podrá establecer alguna conexión entre estas dos clasificaciones? Por ejemplo, ¿puede un triángulo ser rectángulo e isósceles al mismo tiempo? ¿Y acutángulo e isósceles al mismo tiempo?**

Puede ver el video:

https://www.youtube.com/watch?v=H-V1FWzAwi4.

Construcción de triángulos

Hasta aquí hemos visto dónde se usan los triángulos y por qué los usan en las construcciones. Así también que hay diferentes tipos de triángulos que se pueden construir usando instrumentos o con el programa GeoGebra.

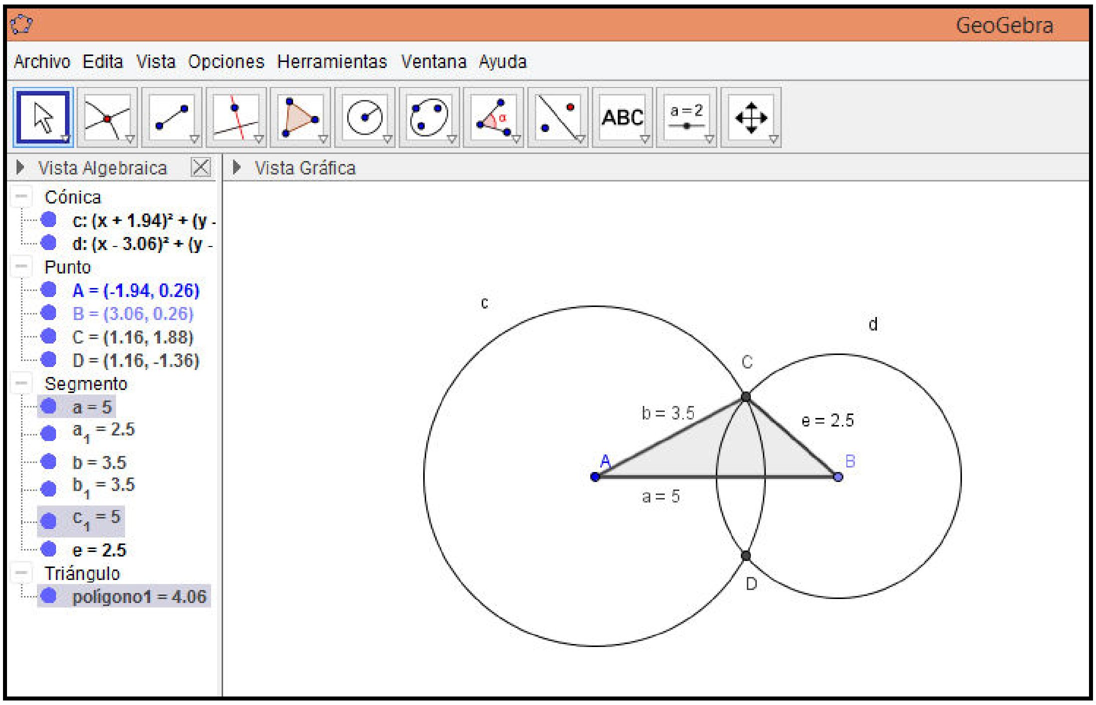
Ahora nos preguntamos:

- ***¿Se podrán elegir tres medidas cualesquiera para construir un triángulo?***

Para responder esta pregunta le proponemos que trate de construir triángulos con distintas medidas de los lados con el programa GeoGebra. Por ejemplo si se quisiera construir un triángulo cuyos lados midan: AB= 5u AC=3,5u y BC= 2,5u se puede seguir las siguientes instrucciones:

Pista 3

- Trazar el lado AB= 5u con el comando: “*Segmento de longitud dada*” (Si no aparecen las letras A y B, usar el comando “Renombra”).
- Trazar una circunferencia con el comando: “*Circunferencia (centro, radio)*” eligiendo como centro el punto A y radio AC=3,5u.
- Trazar una circunferencia con el mismo comando anterior pero ahora con centro en B y radio=2,5u



Las circunferencias se cortan en dos puntos. Cualquiera de los dos, puede ser el tercer vértice del triángulo ABC. Los dos triángulos que se construyen se pueden superponer.

- **Si en lugar de iniciar la construcción por el lado AB, se inicia por alguno de los otros dos lados, el triángulo que se construya ¿será diferente a los anteriores?**

- **Usando las instrucciones anteriores pruebe con distintas medidas.**

- **Si las medidas fueran AB= 6u, AC=1u y BC= 1u, ¿resultará un triángulo isósceles?**

- **Analice si se puede o no construir un triángulo con cada una de las siguientes ternas.**

10	-	37	-	10	....
4	-	4	-	4	....
7	-	5	-	6	....
4,5	-	7	-	3,5	....
2,9	-	3,1	-	6	....

Desigualdad triangular

- **¿Por qué será que con algunas ternas se puede armar un triángulo y con otras no?**

La propiedad que tal vez empezó a "descubrir" al analizar las ternas con las que se podía o no construir un triángulo, se puede formular así:

Para que se pueda construir un triángulo es necesario que cada uno de los lados sea menor que la suma de los otros dos y se llama: ***Desigualdad triangular****.*

En símbolos, las relaciones anteriores pueden representarse:

$a < b + c$; $b < a + c$; $c < a + b$, siendo a, b y c los lados del triángulo.

En este video se puede observar en forma dinámica la propiedad que acabamos de enunciar:

https://www.youtube.com/watch?v=SgmgcKGGwC0

EJERCICIOS

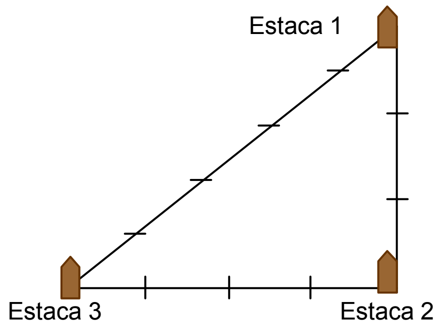
1. ¿Se puede construir un rectángulo que tenga dos lados consecutivos de medidas 2,5 cm y 3,5 cm y la diagonal que une sus extremos, de 6,5 cm? Si no se puede modifique una única medida para que se pueda. **Pista 4**
2. ¿Se puede construir un triángulo que tenga un lado b que mida el doble del lado a y un lado c que tenga 3 cm más que el lado a? ¿Se puede construir más de un triángulo cuyos lados cumplan con esas condiciones? **Pista 5**
3. Si se tienen las siguientes longitudes: 5,7 cm y 10,6 cm ¿de qué medida tiene que ser la tercera para que se pueda construir un triángulo?
4. Si la medida de uno de los lados de un triángulo abc fuera a= 3,7 cm ¿qué medidas podrían tener b y c?
5. ¿Con qué triángulos es posible construir un rectángulo?, ¿y un cuadrado?
6. ¿Por qué no se puede construir un cuadrado con 2 triángulos equiláteros?

II. Teorema de Pitágoras

En la primera actividad vimos que para poder armar un triángulo cualquiera es necesario que las longitudes de sus lados cumplan cierta propiedad llamada Desigualdad triangular.

¿Existirá alguna condición sobre los lados para que un triángulo sea rectángulo?

Los agrimensores egipcios en el siglo X AC, habían descubierto cómo hacer para trazar un ángulo recto. Hacían 12 nudos en una cuerda a intervalos regulares y fijaban la cuerda a tres estacas como en la figura. El ángulo en la estaca 2 resulta recto.



En este video se puede observar cómo construir y utilizar la cuerda con 12 nudos para trazar un triángulo rectángulo:

https://www.youtube.com/watch?v=GEv7mzM3zvk

Uno de los lados del triángulo que se forma mide 3 unidades, otro mide 4 unidades y el tercero 5 unidades. Usaban este descubrimiento para alinear plantaciones, construir casas,... y es el procedimiento que aún hoy usan los albañiles cuando quieren marcar el ángulo recto sobre el cual construir los cimientos de una casa.

Pregunte y observe a los albañiles cuando inician una construcción cómo hacen para lograr que las esquinas formen ángulos rectos.

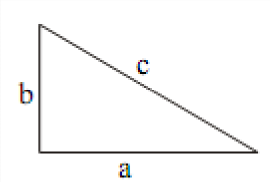
Los egipcios también sabían que podían usar otras ternas de números como: 6, 8 y 10; 5, 12 y 13; 15, 36 y 39 pero no sabían si se trataba de un resultado general, si era válido para otros valores, ni por qué se obtenía un ángulo recto, si bien estos resultados les permitían realizar las tareas que se planteaban.

Bastante tiempo después, alrededor del siglo VI AC, Pitágoras, matemático griego, demostró la validez de este resultado que relacionaba los lados de un triángulo con la clase de triángulo que podían formar esos lados. Este teorema afirma que:

> *Si en un triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, entonces el triángulo es rectángulo.*

Pero también demostró el teorema recíproco, que es el que hoy se conoce como Teorema de Pitágoras y que seguramente recordará de la escuela:

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos (lados a y b) es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa (lado c).

Con frecuencia se elimina la palabra longitud y el teorema se enuncia así: "En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

ACTIVIDAD

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones simbólicas es la que corresponde al enunciado del teorema?

   $(a + b)^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + b^2 = c^2$ $\qquad$ $a^2 + c^2 = b^2$

¿Cómo habría que "leer" las otras dos expresiones? **Pista 6**

Se trata de expresar con palabras las relaciones indicadas entre los catetos y la hipotenusa. Luego señale las diferencias que hay con la expresión que utilizamos más arriba para enunciar el Teorema de Pitágoras.

2. ¿Con cuál de las tres expresiones siguientes se puede calcular la longitud de uno de los catetos cuando se conocen la hipotenusa y el otro cateto? **Pista 7**

   $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\qquad$ $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ $\qquad$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

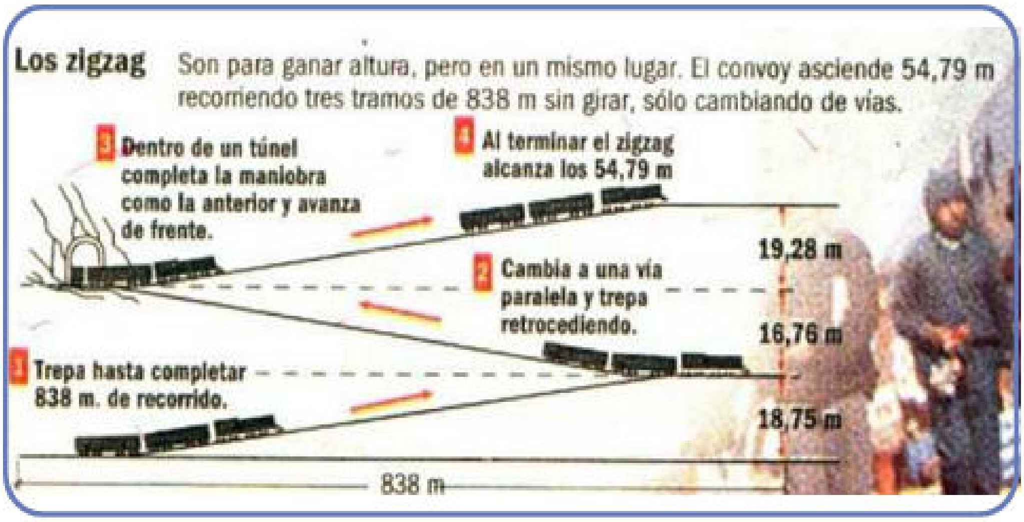
3. Un triángulo rectángulo tiene como medidas a, b y c centímetros. Si se reduce la longitud de cada lado a un cuarto de su medida original, ¿seguirá siendo un triángulo rectángulo?

4. ¿Y si se le suma 1 cm a cada uno de sus lados, seguirá siendo un triángulo rectángulo?

5. Se quiere hacer el techo de una habitación de 4 m de largo y 3 m de ancho, inclinado con una caída (pendiente) de 1,50 m. Si la idea es que no tenga alero ¿le alcanzará comprar 12 m^2 de chapas?

III. Tren a las nubes

El Tren a las Nubes en Salta asciende una gran altura 54,79 metros (casi como la de un edificio de 20 pisos) en un ancho de 838 m (aproximadamente 8 cuadras) utilizando un procedimiento muy ingenioso, como puede verse en la infografía más abajo.



(Clarín 02/09/01)

1. Si el tren pudiera ascender directamente, en línea recta, desde la base (donde está dibujado el primer tren) hasta la cima de la montaña sin realizar los zig-zig que efectúa, ¿recorrerá más de 1000 metros?, ¿o menos?

   Estime aproximadamente la distancia que recorrería.

   Luego calcule esa distancia utilizando el teorema de Pitágoras.

2. Y si se calcula la subida de a tramos, ¿será mayor que el triple de 838 m? **Pista 8**

3. ¿Diría que la infografía[33] es un dibujo a escala[34]? Dibuje a mano alzada respetando aproximadamente la escala el recorrido del Tren a las Nubes.

4. Escriba sus comentarios sobre esta actividad.

Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes ternas de medidas permiten construir triángulos?

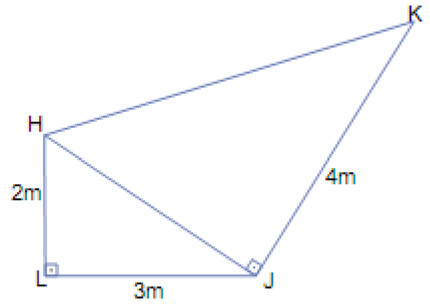
   14 - 7 - 6   4,5 - 6 - 7,5   14 - 26 - 22,5   6 - 7,5 - 15

2. ¿Se puede construir un triángulo isósceles cuyo perímetro **Pista 9** sea de 17 cm y que cada uno de los dos lados iguales mida 4 cm?

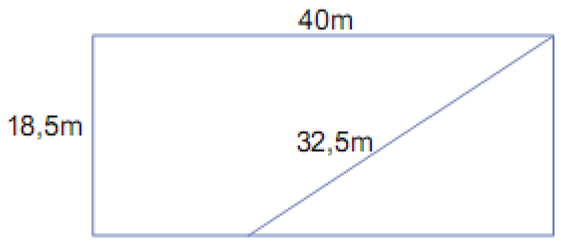
[33] Más información en https://es.wikipedia.org/wiki/Infograf%C3%ADa
[34] Más información en https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_(cartograf%C3%ADa)

3. Alrededor de un terreno rectangular se quiere plantar pinos a 3 m de distancia uno del otro. El terreno tiene un ancho de 12 m y la longitud de la diagonal es de 15 m. ¿Cuántos pinos se tienen que comprar? Pista 10

4. En el **cuadrilátero** siguiente calcule la longitud del lado HK



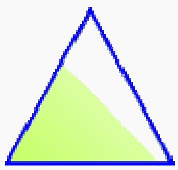
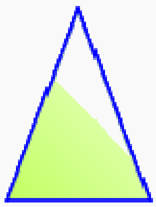
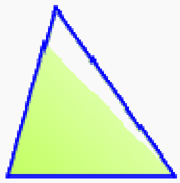
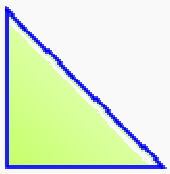
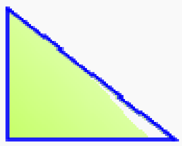
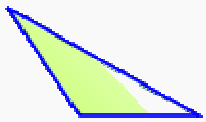
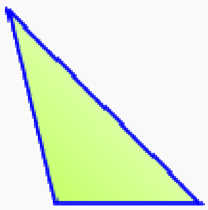
5. En un terreno rectangular como el del dibujo se colocó un alambrado de 32,5m. ¿Cuál es la **superficie** Pista 11 del triángulo que quedó formado?



Pistas

Pista 1: Los triángulos —a diferencia de otras figuras como por ejemplo los cuadriláteros— son indeformables porque, por más que se ejerza una fuerza que tire de cualquiera de sus vértices, no se deformarán. En cambio los cuadriláteros y otros polígonos de más lados pueden modificar su forma.

Pista 2: En el siguiente cuadro se muestra todas las intersecciones posibles entre las clasificaciones según la medida de los lados y de los ángulos de los triángulos:

Triángulo	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

Pista 3: Para indicar medidas decimales en el GG, se utiliza el punto y no la coma, para separar la parte entera de la parte decimal. En el programa GeoGebra no se pueden anotar unidades de medidas, únicamente el número correspondiente. En este texto decidimos indicar la unidad con la letra “u”.

Pista 4: Estos tres segmentos tienen que formar un triángulo.

Pista 5: El triángulo que se busca debería tener como lados: a; 2a y 3+a. Como una de las relaciones 3 + a < a + 2a se puede afirmar que 2a > 3 y por lo tanto a> 3/2.

Pista 6: Para "leer" las expresiones se puede relacionar las letras a y b con los catetos y, la letra c con la hipotenusa. La primera puede leerse: el cuadrado de la suma de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Pista 7: A partir de la relación dada por el teorema de Pitágoras se puede "despejar" el cateto a.

Pista 8: Para calcular la longitud de los lados tenga en cuenta que la medida de uno de los catetos será la suma de las alturas de cada tramo. Será de 53,79 m. La longitud del otro cateto es de 838 m.

Pista 9: El perímetro de una figura poligonal, se calcula sumando las longitudes de sus lados.

Pista 10: Recuerde que un cuadradito en el vértice de un triángulo, indica que el ángulo formado en ese vértice es recto.

Pista 11: Para calcular la superficie de un triángulo se multiplica la base por la altura y luego se divide por 2.

Entre fórmulas y ecuaciones

I. Usar fórmulas

En Matemática, para formular o plantear leyes generales o para hacer referencia a números desconocidos, se recurre al uso de letras.

También en otras ciencias las letras están presentes en las fórmulas; por ejemplo en Física la tan conocida fórmula de la Velocidad: V = e/t donde e es el espacio y t es el tiempo. Dado que el espacio puede ser medido por ejemplo en metros y el tiempo en segundos, la velocidad puede tener una unidad de medida en metros por segundo: m/seg; o bien kilómetros por hora: km/h como sucede con la velocidad de los autos, medida por su velocímetro.

Podemos mencionar también otros usos de las letras en fórmulas como la del índice de masa corporal (IMC), para indicar cuál es el peso adecuado de una persona.

Se calcula de la siguiente manera:

Para que todo el mundo pueda determinar con facilidad cuál es su peso adecuado, se mide simplemente la relación entre peso y altura, que se denomina Índice de Masa Corporal (IMC). Es una útil herramienta a la que recurren por lo común médicos y otros profesionales de la salud, para determinar la prevalencia de peso por debajo de lo normal o exceso de peso y obesidad en adultos.

Se obtiene dividiendo el ***peso (p)*** *en kilogramos de una persona por el cuadrado de su* ***altura***[35] *(h) en metros* (kg/m^2)*:*

$$IMC = \frac{p}{h^2} \; {}^{kg}\!/_{m^2}$$

Por ejemplo, si un adulto pesa 70 kg y su altura es de 1,75 m, para determinar su IMC se efectúa el cálculo $70/1{,}75^2 = 70/3{,}06 = 22{,}87\ kg/m^2$.

Y mirando la tabla siguiente, se puede saber que se encuentra en una categoría *Saludable*.

ÍNDICE DE MASA CORPORAL	CATEGORÍA
Por debajo de 18.5	Por debajo del peso
18.5 a 24.9	Saludable
25.0 a 29.9	Con sobrepeso
30.0 a 39.9	Obeso
Más de 40	Obesidad extrema o de alto riesgo

[35] En esta fórmula es necesario elevar al cuadrado la altura: $h^2 = h x h$

Fórmulas como esa, también permiten hallar nueva información como en los siguientes ejemplos:

- ***Una persona de 1,68 m de altura dice que su índice indica que está obeso, ¿cuál podría ser su peso?*** Pista 1

- ***Si una persona es muy alta, por ejemplo 2,10 m ¿tendrá que ser muy pesada, por lo menos más de 100 kg para ser saludable? , ¿o puede pesar menos de 100 kg[36]? ¿Cuál será el peso mínimo y el peso máximo que puede tener para seguir estando en la categoría de saludable?***

  Pista 2

- ***Si un hombre pesa 50 kg ¿es seguro que está por debajo del peso normal?*** Pista 3

  – Complete con posibles alturas o índices:

Si pesa 50 kg y	
mide:	**su IMC indicaría que está:**
1 m	….
…	Obeso
1,50 m	….
…	Debajo del peso
…	….

  – Escriba sus conclusiones.

II. Elaborar fórmulas

En las próximas actividades vamos a trabajar con la **elaboración de fórmulas** tratando de generalizar algunos resultados o buscando determinar un valor inicialmente desconocido.

1. Contando cuadraditos

[36] Para responder a estas preguntas puede usar números "redondos", por ejemplo tomar 25 como límite superior de la categoría de saludable.

Las figuras de la siguiente serie están armadas a partir del o de los cuadraditos de la base. La figura 1 es la que tiene un cuadradito en su base (remarcado), la figura 2 tiene dos cuadraditos en la base, etc.

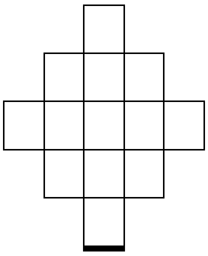


Figura 1

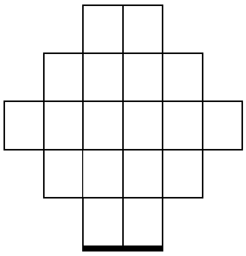


Figura 2

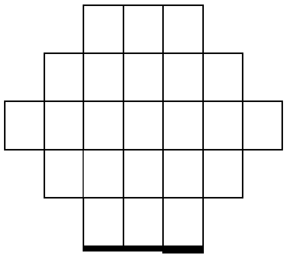


Figura 3

a. Armar más figuras

- ***Dibuje la figura 4. ¿Cuántos cuadraditos tiene?***

- ***Dado que 8 es el doble de 4, ¿la figura 8 tendrá el doble de cuadraditos de la figura 4? Explique la respuesta que dé.*** **Pista 4**

- ***Complete la tabla con los valores que vaya obteniendo.***

Número de cuadraditos de la base	Número de cuadraditos de la figura

- ***¿Cuántos cuadraditos tendrá la figura que se forma con 80 cuadraditos de base?***

- ***Y ¿con 100 cuadraditos de base?***

b. Buscar una fórmula

Se trata de elaborar una fórmula[37] que permita averiguar el número de cuadraditos que tenga una figura, teniendo en su base una cantidad cualquiera de cuadraditos[38], a la que puede llamar “n”. A la **c**antidad total de **c**uadraditos de la figura puede llamarla C_c.

[37] Una **fórmula** está formada por números o letras y operaciones. Por ejemplo, para calcular la superficie de un triángulo se utiliza la fórmula S = b x h /2 donde b es la base y h la altura del triángulo.

[38] Para ver si la fórmula que escribió funciona bien, puede probar con las cantidades que ya averiguó. En Matemática cuando se multiplica un número por otro indicado por una letra, se usa un punto. Por ejemplo 5.n significa “5 por n”.

- ***Averigüe si estas fórmulas permiten o no calcular la cantidad de lugares:***

$C_c = n + n + 2 + n + 4 \qquad C_c = 5.n + 8 \qquad C_c = 4(n+1) + n + 4$

$C_c = 2(n + 2) + n + 4 \qquad C_c = 13 + 5(n-1)$

- ***¿Por qué la fórmula n + n + 2 + n + 4 no es una fórmula correcta para averiguar el número de cuadraditos de una figura con n cuadraditos en su base?***

- ***Usando alguna de las fórmulas correctas, verifique que los datos en la tabla estén bien calculados. En la tabla, los totales de cuadritos de las figuras que encontró terminan en 3 o en 8. ¿Sucederá lo mismo para todas las figuras? Si respondió sí, explique por qué sucede eso.*** Pista 5

- ***Si una figura tiene 83 cuadraditos, ¿cuántos cuadraditos se necesitarán para armar la figura siguiente?***

- ***En la fórmula 5.n + 8, el producto 5.n se puede pensar como el área del rectángulo vertical central, cuya base es n y su altura es 5. De cada lado de ese rectángulo hay 4 cuadraditos. En todas las figuras de este tipo ¿se puede pensar la fórmula de esa manera?***

- ***¿Puede haber una figura que tenga en total 53 cuadraditos?*** Pista 6 ***y ¿con 64? Si puede haber una figura con esas cantidades de cuadritos, explique cuántos cuadraditos de base tendría en cada caso.***

- ***Tanto C_c = 5.n + 8 como C_c = 2(n+n+2) + n + 4 son fórmulas correctas para contar la cantidad de cuadraditos de una figura que tenga n cuadraditos en la base. ¿Es posible que dos fórmulas diferentes puedan contar correctamente la cantidad de cuadraditos?***[39]

- ***La pregunta: ¿Puede haber una figura que tenga 40 cuadraditos? se puede escribir simbólicamente así: 5n + 8 = 40. Esta escritura se llama ecuación y corresponde justamente a ese tipo de preguntas. En general en Matemática se pregunta: ¿existe algún número —en este caso es un número natural— que multiplicado por 5 y sumado 8 dé como resultado 40? O ¿existe un número que cumpla esa relación?***

- ***Para responder a la pregunta planteada se puede resolver esa ecuación. Encuentre si existe el valor de n (es decir del número de cuadraditos de la base)*** Pista 7

[39] Si dos fórmulas cuentan o calculan lo mismo y lo hacen correctamente se las llama fórmulas equivalentes.

2. Cambiaron las figuras[40]

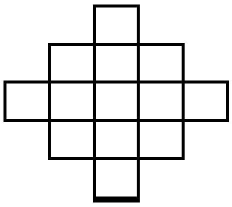


Figura 1

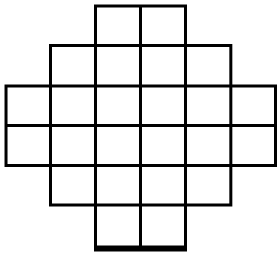


Figura 2

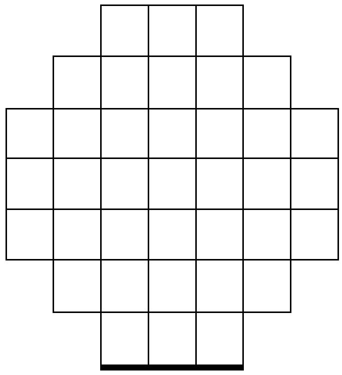


Figura 3

- ***Estas figuras parecen iguales a las anteriores pero no lo son. ¿Qué cambió de las figuras anteriores a éstas?***

- ***Dibuje la Fig. 4 y averigüe el número de cuadraditos que tiene.***

- ***Anote los valores que vaya encontrando en la tabla:***

Número de cuadraditos de la base	Número de cuadraditos de la figura

- ***Averigüe la cantidad de cuadraditos de la figura 8.***

- ***Busque una fórmula que permita calcular la cantidad de cuadraditos de una figura que tenga cualquier cantidad de cuadraditos en la base. A la cantidad de cuadraditos de la base se la puede llamar n.***

- ***En esta serie de figuras, para calcular el número de cuadraditos, ¿se puede también pensar en el rectángulo vertical central y un cierto número de cuadraditos a sus lados como en la serie de figuras anteriores?***

- ***Cada una de las figuras de esta serie está inscripta en un cuadrado. ¿Cuál sería la cantidad de cuadraditos del lado del cuadrado? ¿Se podrá usar que una figura está inscripta en un cuadrado para calcular la cantidad de***

[40] Las actividades relacionadas con el modelo cuadrático fueron extraídas de Illuzi, Alejandra y Sessa, Carmen; dirigido por Gabriela Azar (2014) *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado.* 1.ª edición. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. E-book. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf

cuadraditos que tiene? **Pista 8** ***. Escriba la fórmula que corresponda a pensar cada figura de esa manera, y que permita calcular la cantidad de cuadraditos de la figura según la cantidad de cuadraditos de base.***

- ***¿Habrá alguna figura de esta serie que tenga 168 cuadraditos? La fórmula que permite calcular el número de cuadraditos de cualquier figura es:*** $C_c = n^2 + 8.n + 4$

  Para responder la pregunta hay que resolver la ecuación: $n^2 + 8.n + 4 = 168$.

  Pista 9

3. Entre las dos actividades

- ***En la tabla de la primera serie de figuras se nota que cada nueva figura siempre tiene 5 cuadraditos más que la anterior. ¿Sucede lo mismo con las cantidades en la tabla de la segunda actividad?, es decir, ¿siempre aumenta la misma cantidad de cuadraditos de una figura a otra? Escriba las cantidades de las 5 primeras figuras y analice si siempre se suma el mismo número al pasar de una figura a la siguiente.***

Cuando una fórmula tiene la forma $a.x + b$ se dice que corresponde a un **modelo lineal**. En estas fórmulas, el crecimiento siempre es el mismo. En la primera serie de figuras, la cantidad de cuadraditos crece siempre 5 cuadraditos al pasar de una a otra figura.

En cambio, en la segunda serie de figuras, la fórmula a la que se llega tiene la forma: $a.x^2 + bx + c$ Se dice que es un **modelo cuadrático** porque la incógnita está elevada al cuadrado.

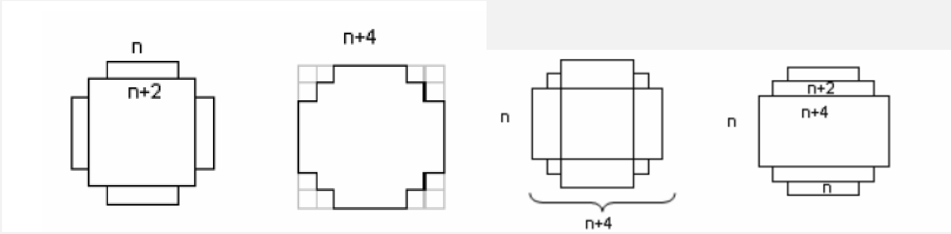
El crecimiento no es siempre el mismo, cuando n va creciendo la cantidad de cuadraditos también crece. Las cantidades de las cinco primeras figuras son: 13, 24, 37, 52, 69. Los crecimientos —diferencias entre las cantidades de cuadraditos de figuras consecutivas— son respectivamente 11, 13, 15, 17…

EJERCICIOS

1. Como se comentó en la actividad 2: **Cambiaron las figuras**, se puede “mirar” una figura de distintas maneras y según cómo se mire la figura saldrá una fórmula diferente. Los siguientes gráficos corresponden a formas diferentes de “mirar” la figura y hay distintas fórmulas que permiten calcular la cantidad de cuadraditos que la componen según la cantidad de cuadraditos de base.

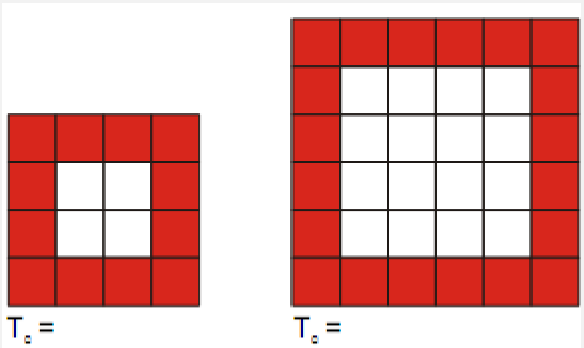
   Por ejemplo la primera figura corresponde a pensar en un cuadrado de lado n+2 y en cada lado del mismo una tira de n cuadraditos. ¿A qué fórmula corresponderá esta manera de mirar la figura?

   Una cada figura con la fórmula correspondiente.



$(n+4).n.2 - n^2 + 4$ $\quad$ $(n+4)^2 - 12$ $\quad$ $(n+4).n + 2(n+2) + 2n$ $\quad$ $(n+2)^2 + 4n$

2. Estos cuadrados tienen todo el borde pintado. ¿Cuántos cuadraditos están pintados en cada figura de este tipo?



Tc indica el total de cuadritos pintados

a. ¿Cuántos cuadraditos pintados tendrá una figura como ésta de 52 cuadraditos de lado?

b. Escriba una fórmula que permita calcular el número de cuadritos pintados en un cuadrado cuyo lado sea **de cualquier tamaño**. Puede llamar x al número de cuadritos de cada lado del cuadrado.

T_c =

c. Escriba cómo se puede haber "pensado" cada una de las fórmulas que se incluyen más abajo. Le damos un ejemplo en la última.

$T_c = 4 (x - 1)$	
$T_c = 2x + 2 (x-2)$	
$T_c = x^2 - (x - 2)^2$	*Se calcula el número total de cuadritos del cuadrado grande: (x^2) y se le resta el número de cuadritos del cuadrado que quedó sin pintar: $(x-2)^2$*

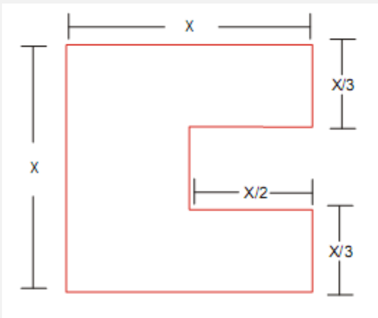
- ¿Habrá un cuadrado que tenga 100 cuadritos pintados? Si hay, escriba el número de cuadritos por lado que tendrá. Si no hay, explique por qué. x =
- ¿Y que tenga 164? x =

- Si se elige un número natural cualquiera ¿siempre es posible encontrar un cuadrado que tenga ese número de cuadritos pintados? ¿Por qué?
- ¿Este es un problema que corresponde a un modelo lineal o cuadrático?
- Resuelva las siguientes ecuaciones[41], es decir averigüe en cada caso si existe un número —en este caso no se pide que el número sea un número natural— que cumple esa condición:

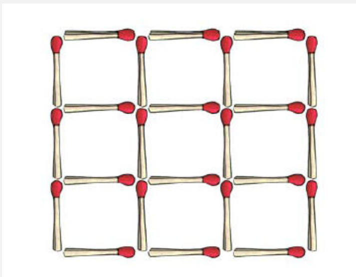
$3x + 1 = 19$ $\qquad$ $6(5-x) -3 = -1$ $\qquad$ $2(x-20) = 29$

3. Una fábrica construye perfiles de metal como el de la figura, de distintos tamaños. Cuál sería la superficie si x = 3,60 cm? y ¿si fuera x = 12 cm?

   Escriba una fórmula que permita calcular la superficie de cualquier perfil , llamando x al lado del perfil, como indica la figura más abajo.



4. Se arma con fósforos un cuadrado cuadriculado de la siguiente forma:



Este cuadrado tiene 3 fósforos de lado:

a. ¿Cuántos fósforos se necesitan para armar esta figura?
b. ¿Cuántos fósforos se necesitan para hacer un cuadrado como el anterior que tenga 56 fósforos de lado?
c. Encuentre una fórmula que permita calcular la cantidad de fósforos que se necesitan para armar un cuadrado de n fósforos de lado.
d. Averigüe si existe un cuadrado de este tipo para el que se necesiten 23 fósforos para armarlo. ¿Y 74? Si existe tal cuadrado, escriba la cantidad de fósforos que tendrá en cada lado.
e. ¿Puede ser un número impar la cantidad de fósforos necesaria para armar una figura?

[41] Para saber si encontró el número correcto, puede verificar si cumple la condición, reemplazando la incógnita x por el número correspondiente.

f. ¿Se trata de un modelo lineal o cuadrático?

5. A partir de una vieja habitación cuadrada, una familia decidió construir una habitación cuadrada más grande agregando 6 m al ancho y al largo de la habitación y tirando las dos paredes internas. Necesitaron comprar 84 m2 de mosaicos para el piso de la parte que agregaron. ¿Qué longitud tenían las paredes de la habitación original?

6. Resuelva las siguientes ecuaciones, siendo n un número natural:

$n(n-1) + 4 = 8$ $\qquad$ $n + (2n + 1)\, n – 5 = 10$

Pistas

Pista 1: Si está obeso significa que su índice está entre 30 y 39, ¿a qué peso máximo y mínimo corresponden esos valores? Recuerde que la altura tiene que estar elevada al cuadrado.

Pista 2: Tiene que averiguar un número que dividido por 4,41 dé como resultado aproximadamente 25; será el límite superior de peso. Y otro que dividido por 4, 41 dé como resultado aproximadamente 18,50. Ese será el peso mínimo.

Pista 3: Para tener una idea aproximada de la respuesta puede probar con distintas alturas como 1 m, 1,50 m, 2 m, etc., aunque no sean realmente alturas de un adulto.

Pista 4: La figura 8 no tendrá el doble de cuadritos que la figura 4, ya que no se duplica cada una de las filas.

Pista 5: Los múltiplos de 5, o sea los números de la forma 5.k terminan en 0 o en 5.

Pista 6: Para saber si hay o no una figura con 53 cuadraditos, puede pensar en que el rectángulo central debería tener 45 (o sea 53 – 8) cuadraditos, ¿puede ser?

Pista 7: Puede pensar que si a 40 cuadraditos le resta los 8 de los lados del rectángulo, quedarán 32 cuadraditos, pero no hay ningún número natural que multiplicado por 5 dé como resultado 32. Por lo tanto ninguna figura tendrá 40 cuadraditos de base.

Pista 8: El cuadrado tiene n + 4 cuadraditos de lado, por lo tanto en todo el cuadrado habrá (n+4)x(n+4) cuadraditos.

Pista 9. La fórmula $n^2 + 8.n + 4$ se puede escribir también como: $n(n+8) + 4$ Y para resolver la ecuación $n(n+8) + 4 = 168$ se puede pensar que $n(n+8)$ debe ser 164 (o sea 168-4). Para averiguar si existe el valor de n puede probar con algunos números: 5, 10, etc.

Bibliografía consultada

BRIAND, Joel y CHERVALIER, Marie C. 1995. Les enjeux didactiques dans l´enseignement des mathématiques. Hatier Editions.

CICLO DE NIVELACIÓN AÑO. 2001. Facultad de Ciencias Económicas- Universidad Nacional de Misiones.

CURSO DE APOYO AL INGRESANTE. 2000. Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales. Universidad Nacional de Misiones.

CURSO DE INGRESO. 2001. Cuadernillo N.º 1. Información General. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste.

CHEVALLARD, Y., BOSCH M. y GASCÓN J. 1997. Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Editorial Horsori. Barcelona, España.

DICKENSTEIN, Alicia. 1994. Mate MAX La matemática en todas partes. Libros del Quirquincho.

ERMEL – HATIER. 1999. Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Institut National de Recherche Pédagogique Francia.

FONCUBERTA, Juan y BARALLOBRES, Gustavo. 1998. Álgebra de las ecuaciones a las transformaciones. Pro-ciencia Conicet. Argentina.

COMBIER, Gerard; GUILLAUME Jean Claude; PRESSIAT, Andre. (s / f). Les debuts de l´algebre au college. Au pied de la lettre. INRP. Didactiques des disciplines. Francia.

GRUPO AZARQUIEL. 1993. Ideas para enseñar álgebra. Editorial Síntesis. España.

GUEDJ, Denis. 2000. El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas. Editorial Anagrama. Panorama de narrativas.

GUÍA DE ESTUDIO PARA TOMAR LA PRUEBA DE ACTITUD ACADÉMICA. 1998. The College Board. Oficina de Puerto Rico.

MANUAL DE INGRESO. 1984. Universidad Nacional de Mar del Plata.

MÓDULO DE MATEMÁTICA PARA EL INGRESANTE. (s/f). Universidad Tecnológica Nacional.

MOORE, Rosalind. 1984. Los mejores problemas lógicos - Martínez Roca. España.

PIMM, David. 1987. El lenguaje matemático en el aula. Morata SA. España.

TAHAN, Malba. 1972. El hombre que calculaba. Editorial Verón. Barcelona. España.

VIVES, P. 1985. Juegos de ingenio. Fontana Práctica. España.

---

[i] La estadística es la disciplina que estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final (Cabriá, 1994)

[ii] Puede ver la entrevista completa en https://www.youtube.com/watch?v=IqANV1W6arw