ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 3:
EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

Esp. Prof. Liliana N. Caputo

DEFINICIONES AXIOMATICAS

- Así como al estudiar conjuntos hablamos de la existencia de términos primitivos (que no se definen), para definir algunos conjuntos, usaremos AXIOMAS es decir, proposiciones que se admiten que son verdaderas, sin tener que demostrarlas.
- A continuación, daremos la definición axiomática del conjunto de números reales, la cual está explicitada en la Introducción del TP N° 3.

DEFINICION

- Sea $\mathbb{R}$ un conjunto en el que se han definido dos operaciones, suma (+) y producto (.), más una relación "<". $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales si, y sólo si, se cumplen los siguientes axiomas:
- S1. Ley de cierre de la suma.
- S2. Propiedad asociativa de la suma.
- S3. Propiedad conmutativa de la suma.
- S4. Existencia de neutro para la suma (0).
- S5. Existencia de opuesto para cada elemento

DEFINICION

- P1. Ley de cierre del producto.
- P2. Propiedad asociativa del producto.
- P3. Ley conmutativa del producto.
- P4. Existencia de neutro para el producto (1).
- P5. Existencia de inverso para todo elemento no nulo de $\mathbb{R}$.
- D. Ley distributiva del producto con respecto a la suma.

Decimos, entonces, que ($\mathbb{R}$, +, .) es un cuerpo.

DEFINICION

- O1. Ley de Tricotomía.
- O2. Propiedad transitiva de < en $\mathbb{R}$
- O3.Consistencia del orden con respecto a la suma.
- O4. Consistencia restringida del orden con respecto al producto.

Como en $\mathbb{R}$ se cumplen los axiomas anteriores, diremos que ($\mathbb{R}$, +, .) es un cuerpo ordenado (la ley de tricotomía nos asegura que el orden definido en $\mathbb{R}$ es total).

OBSERVACIONES

- A la suma de un número real x y el opuesto de otro y $(x + (-y))$ la denotamos con $x - y$.
- Al inverso de un número real $x \neq 0$ lo denotamos con x^{-1} o también con $1/x$.
- Al producto de un número real z y el inverso de un número real $x \neq 0$ $(z.x^{-1})$ lo denotamos con z/x.
- Al producto de un número real x consigo mismo, lo denotamos con x^2.
- Sabemos por P4 que $1 \neq 0$. Aceptamos sin demostración, que $1 > 0$.

PROPIEDADES DERIVADAS

- A partir de los axiomas de cuerpo ordenado que definen $\mathbb{R}$, pueden demostrarse las 17 propiedades que figuran en la Introducción del TP N° 3, bajo el título de "Propiedades derivadas de los axiomas de cuerpo ordenado". Las enunciaremos a continuación, pero las aceptamos sin demostración:

PROPIEDADES DERIVADAS

- Cancelativa de la suma.
- Unicidad del cero.
- $0 = -0$
- Unicidad del opuesto
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $x.0 = 0$
- $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $-(x + y) = -x - y$
- $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1.x = -x$
- Regla de signos (8 y 9)
- Si $x \neq 0$ su inverso es único
- $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$
- $x < y \wedge z < 0 \Leftrightarrow xz > yz$
- $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- $0 < x^{-1} < y^{-1} \Leftrightarrow x > y$
- Cancelativa del producto
- $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$
- Densidad

La última propiedad nos permite afirmar que $(\mathbb{R}, +, .)$ es un **cuerpo ordenado y denso**.

DEFINICION

Hasta el momento vimos que la estructura de $(\mathbb{R}, +, .)$ es de cuerpo ordenado y denso.

Sin embargo existen otros cuerpos que también son ordenados y densos, con lo cual estos 15 axiomas que hemos enunciado hasta aquí, no son suficientes para terminar de caracterizar unívocamente a $\mathbb{R}$ y no confundirlo con otros cuerpos. Es por ello, que enunciaremos un axioma más, llamado **Axioma del Supremo o de Completitud**:

DEFINICION

AS. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, admite supremo en $\mathbb{R}$.

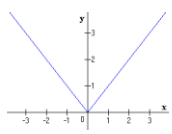
Como en $\mathbb{R}$ se cumple el AS, decimos que $(\mathbb{R},+,\ .)$ es un **cuerpo ordenado, denso y completo**.

Este último axioma permite identificar a $\mathbb{R}$ con una recta es decir, cada número real está representado por un punto de una recta, y cada punto de la recta representa a un único número real.

FUNCION VALOR ABSOLUTO

Sea la relación valor absoluto, definida por

$|\,|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ /\ |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ cuya gráfica es:



Vemos que el valor absoluto es una función no inyectiva, ni sobreyectiva. Sus propiedades se enuncian en la introducción delTP3.

NUMEROS NATURALES

- De los axiomas de definición, nos queda claro que existen al menos 3 números reales: 0, 1 y −1. Entonces, podemos generar el conjunto de números naturales como sigue:
- Como $1 \in \mathbb{R}$, por el axioma S1: $2 = 1 + 1 \in \mathbb{R}$,
- También por S1: $3 = 2 + 1 \in$ R, y así sucesivamente… Resulta que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.
- Como $0 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (el conjunto de los enteros no negativos) también es un subconjunto real.

SUBCONJUNTOS INDUCTIVOS

- Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que A es inductivo si, y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:
  - $1 \in A$
  - $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

Es evidente que el propio $\mathbb{R}$ es inductivo, pues por P4, $1 \in \mathbb{R}$ y, por S1, si $x \in \mathbb{R}$, $x + 1$ también.

Por lo que dijimos antes, $\mathbb{N}$ es inductivo, por lo cual daremos la siguiente definición:

DEFINICION DE $\mathbb{N}$

- Llamamos conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ a aquel subconjunto real inductivo que está incluido en todo subconjunto real inductivo, es decir:

$\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales si, y sólo si, $\mathbb{N} \subset A$, cualquiera sea $A \subset \mathbb{R}$ inductivo.

El carácter inductivo de $\mathbb{N}$ es el que permite que se cumpla el siguiente teorema que enunciaremos a continuación:

PRINCIPIO DE INDUCCION

- <u>Si</u> P es un predicado con dominio en $\mathbb{N}$ tal que:
  - $v[P(1)] = 1$
  - $v[P(h)] = 1 \Rightarrow v[P(h + 1)] = 1$

<u>Entonces</u>: $\forall n \in \mathbb{N}: v[P(n)] = 1$.

Aceptamos la validez de este teorema sin demostración. Este teorema es un método de demostración de la validez de propiedades en el conjunto de números naturales.

Probaremos que $\forall n, m \in \mathbb{N}: n + m \in \mathbb{N}$

FUNCION FACTORIAL

- Consideremos la siguiente relación:

$!: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ / $x! = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \vee x = 1 \\ x.(x-1)! \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Veamos por inducción que $\forall\, x \in \mathbb{N}: x! \in \mathbb{N}$
Asimismo, como el factorial de un número entero no negativo se define como un producto, la unicidad de la imagen está asegurada.
Luego, la relación dada es función.

NUMEROS COMBINATORIOS

- Definición: Sean n, m $\in \mathbb{N}_0$/ $n \leq m$. Se llama número combinatorio de numerador m y denominador n, al siguiente número natural:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

- Propiedades: Si n, m $\in \mathbb{N}_0$/ $n \leq m$, entonces:
  a) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \wedge \binom{m}{1} = m$
  b) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
  c) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

  Veamos como se demuestran

NUMEROS ENTEROS

- Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, por el axioma S5, $\forall n \in \mathbb{N}: -n \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{N}^- = \{-x \,/\, x \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ y también es un subconjunto real el siguiente conjunto, al que llamaremos conjunto de números enteros:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}^-$$

- Puede probarse que en $\mathbb{Z}$ se cumplen los axiomas S1, S2, S3, S4, S5, P1, P2, P3, P4 y D, pero NO el axioma P5, ya que los únicos números enteros que admiten inverso en $\mathbb{Z}$ son 1 y -1. Por ello, decimos que ($\mathbb{Z}$, +, .) es un **anillo conmutativo con elemento unitario**, pero NO un cuerpo.

ALGORITMO DE DIVISION

- Dados dos número enteros a y b, con a ≠ 0, existen y son únicos dos enteros q y r (llamados cociente y resto de la división, respectivamente) tales que b = qa + r, siendo 0 ≤ r <|a|.
- Si el resto de la división de b por a (a ≠ 0) es cero, decimos que **a divide a b**, que **a es un divisor de b** o que **b es un múltiplo de a**. Lo denotamos mediante a|b.
- Si a ≠ 0 es un divisor de b y de c, decimos que a es un **divisor común** de b y c.

ALGUNAS PROPIEDADES

- La relación "a divide a b" verifica la propiedad transitiva en $\mathbb{Z} - \{0\}$.
- Todo número entero no nulo es divisor de sí mismo y de su opuesto.
- Todo número entero no nulo divide a cero.
- 1 y −1 son divisores de todo número entero.
- Si a ≠ 0 es un divisor de b, a es divisor del producto de b por cualquier entero.
- Si a ≠ 0 es un divisor común de b y c, a divide a su suma y a su diferencia.

ENTEROS PRIMOS Y COPRIMOS

- Decimos que un número entero p es **primo**, si tiene exactamente 4 divisores: 1, −1, p y −p. Por tal motivo, 1 y −1 no son primos porque tienen sólo 2 divisores cada uno (1 y −1). 0 tampoco es primo porque tiene infinitos divisores (todos los enteros no nulos).
- Decimos que dos enteros no nulos a y b son **coprimos** o **primos entre sí**, si sus únicos divisores comunes son 1 y −1.

NUMEROS RACIONALES

- Llamaremos conjunto de números racionales al siguiente:
$$\mathbb{Q} = \{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \;/\; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$$
- Veamos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \wedge \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- Dado $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \in \mathbb{Q}$, a se llama **numerador** y b se llama **denominador** de la fracción.
- Si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \in \mathbb{Q}$ con a y b coprimos, la fracción se llama irreducible.

IGUALDAD Y ORDEN

- Sean $\frac{a}{b}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Entonces:
- $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a.q = p.b$. Así definida, la igualdad es una relación de equivalencia en $\mathbb{Q}$
- $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow a.q < p.b$. Así definida la relación "<" es de orden estricto en $\mathbb{Q}$
- Puede demostrarse que $\mathbb{Q}$ es denso en el orden.

ESTRUCTURA DE ($\mathbb{Q}$, +, .)

Dados $\frac{a}{b}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, definimos:

- Suma de números racionales: $\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq + pb}{bq}$
- Multiplicación de números racionales:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq}$$
- Puede probarse que con las operaciones y el orden definidos, $\mathbb{Q}$ tiene estructura de cuerpo ordenado y denso, diferenciándose de $\mathbb{R}$ en que no se cumple el AS es decir, NO es completo.

POTENCIACION

Sean $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos:

- $x^0 = 1$
- $0^n = 0$
- $x^n = x.x^{n-1}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Observación importante: No se define 0^0 es decir, para que un número x elevado a la cero sea 1, debemos asegurarnos que $x \neq 0$.

PROPIEDADES

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$

- $x^1 = x$
- Producto de potencias de igual base:
  $$x^n.x^m = x^{n+m}$$
- Potencia de potencia: $(x^m)^n = x^{m.n}$
- Propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto: $(x.y)^n = x^n.y^n$

BINOMIO DE NEWTON

- **TEOREMA:**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall n\ \mathbb{N}:\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

SE DEMOSTRARÁ POR INDUCCION

RADICACION

- Sean $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} / x \geq 0$. Decimos que y es una raíz n – ésima de x, si $y^n = x$, es decir:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$$

- Si $n = 2$ y $x > 0$, x tiene dos raíces cuadradas reales, puesto que $x^2 = (-x)^2$. El único número real que tiene una única raíz cuadrada es 0 (porque $0 = -0$).
- NO definimos raíces n – ésimas de números reales negativos.

TEOREMA

- $\mathbb{R} - \mathbb{Q} \neq \varnothing$

  Como 2 es un número real no negativo, sus raíces cuadradas son números reales. Se demuestra que $+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

  Idea de la demostración: Para ello se supone que sí pertenece a $\mathbb{Q}$, y se llega a una contradicción, por lo cual se concluye que la proposición $+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ es falsa.

  Entonces, como $+\sqrt{2} \in \mathbb{R} \wedge +\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, resulta que $+\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Este conjunto se llama conjunto de números irracionales.