Trabajo Práctico 6 - Números Enteros.

1. Sea z un número real. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifique formalmente sus respuestas.
   (a) $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \cdot z \in \mathbb{Z}$, siendo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -z^{-1} \in \mathbb{Z}$.
   (c) $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z^2 \in \mathbb{Z}$.
   (d) $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{z}{z} = 1$.
2. Analice las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.
   (a) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$.
   (b) $a \mid b \wedge c \mid b \Rightarrow a \cdot c \mid b$.
   (c) $a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
   (d) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \wedge b \mid c$.
   (e) $7 \mid a \cdot b \Rightarrow 7 \mid a \veebar 7 \mid b$.
   (f) $4 \mid a \cdot b \Rightarrow 4 \mid a \veebar 4 \mid b$.
   (g) $25 \mid a^2 \Leftrightarrow 5 \mid a$.
3. Demuestre los siguientes enunciados:
   (a) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b \cdot x + c \cdot y)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$ arbitrarios.
   (b) La suma de cuatro números consecutivos es par.
   (c) El producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
4. Pruebe que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:
   (a) $3^{2 \cdot n+2} + 2^{6 \cdot n+1}$ es divisible por 11.
   (b) $3 \cdot 5^{2 \cdot n+1} + 2^{3 \cdot n+1}$ es divisible por 17.
   (c) $3^{2 \cdot n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Probar las siguientes afirmaciones:
   (a) $a - b \mid a^n - b^n$.
   (b) Si n es impar, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.
   (c) Si n es par, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.
6. Sea $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \neq 0$, $p \neq 1$ y $p \neq -1$. Pruebe que p es primo si y sólo si $\forall m \in \mathbb{Z}$ ocurre que $p \mid m$ o $(p, m) = 1$.
7. Si p es primo, demostrar que $(p, (p-1)!) = 1$.
8. Sean a y b enteros con $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 15 y resto 7, halle a y b.
9. Sean b y q enteros tales que el resto y cociente de dividir b por 7 son 5 y q respectivamente. Halle los posibles restos de la división por 7 de:
   (a) $2 \cdot b$.
   (b) $-b$.
   (c) $10 \cdot b + 1$.
   (d) $b \cdot (b + 1)$.
10. Halle el máximo común divisor de los siguientes números y la combinación entera correspondiente.
   (a) -84 y 45.
   (b) 234 y 129.

(c) 534 y 128.
(d) 396 y 436.

11. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Determinar los posibles valores de:
    (a) $(a, a+1)$.
    (b) $(a-1, a+1)$.
    (c) $(4 \cdot a, 2 \cdot a + 3)$.
12. Mostrar que si a y b son enteros coprimos, entonces $(a-b, a+b)$ es igual a 1 o a 2.
13. Probar que
    (a) $(7^n + 2^n, 7^n - 2^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    (b) $\left(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n\right)$ es igual a 3 o a 9 para todo $n \in \mathbb{N}_0$.
14. Completar de modo tal que las proposiciones resulten verdaderas y demostrar formalmente su validez:
    (a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $[a, a] = \ldots$
    (b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $[a, b] = b$ si y sólo si ...
    (c) Si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si ...
15. Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a+b, 4) = 4$.
16. Probar que si $n \in \mathbb{Z}$ entonces los números $2 \cdot n + 1$ y $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ son coprimos.
17. Represente los enteros siguientes como producto de primos:
    (a) 210^4.
    (b) 1972^2.
18. Demostrar que si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.
19. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y p un primo positivo. Asumiendo que $(a, b) = p$, hallar los posibles valores para:
    (a) $\left(a^2, b\right)$.
    (b) $\left(a^3, b\right)$.
    (c) $\left(a^2, b^3\right)$.
20. Halle todos los valores del número natural m que hacen verdaderas las congruencias siguientes:
    (a) $5 \equiv 4\,(m)$.
    (b) $5 \equiv -4\,(m)$.
    (c) $1197 \equiv 286\,(m)$.
21. (a) Obtenga el resto de la división de 1599 por 39.
    (b) Obtenga el resto de la división de 914 por 31.
    (c) Obtenga los restos de la división de 3^8, 2^{25} y 8^{25} por 5, 13 y 127 respectivamente.
    (d) Obtenga los restos de la división de 2^{46}, 3^{21}, 7^{126} y 99^{99} por 47, 17, 123 y 13 respectivamente.
22. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ninguno divisible por 3. Probar que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisible por 3.
23. Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ el número $n^2 + 4 \cdot n + 6$ no es múltiplo de 5.
24. Hallar la cifra de las unidades y de las decenas del número 7^{15}.
25. Hallar el resto en la división de x por 5 y por 7 para:
    (a) $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$.
    (b) $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$.
26. Determine todos los enteros t, con $0 \leqslant t \leqslant 16$, tales que $t^2 \underset{2}{\equiv} t\,(16)$.

27. Halle todas las soluciones de las ecuaciones lineales de congruencias siguientes:

    (a) $330 \cdot x \equiv 42\,(273)$.
    (b) $18 \cdot x \equiv 0\,(15)$.
    (c) $8 \cdot x \equiv 0\,(13)$.
    (d) $180 \cdot x \equiv -18 \cdot x\,(30)$.

28. Hallar todos los x que satisfacen:

    (a) $x^2 \equiv 1\,(4)$.
    (b) $x^2 \equiv 0\,(12)$.
    (c) $x^4 \equiv 1\,(5)$.

29. Dado $t \in \mathbb{Z}$, decimos que t es inversible módulo m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $t \cdot h \equiv 1\,(m)$.

    (a) ¿Es 5 inversible módulo 17?
    (b) Probar que t es inversible módulo m si y sólo si $(t, m) = 1$.
    (c) Determinar los inversibles módulo m, para $m = 11, 12, 16$.

30. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales de congruencia.

    (a)
    $$\begin{cases} x & \equiv & 3\,(6) \\ x & \equiv & 9\,(14) \end{cases}$$
    (b)
    $$\begin{cases} x & \equiv & 1\,(7) \\ x & \equiv & 8\,(21) \end{cases}$$

31. Demostrar las siguientes congruencias, aclarando las propiedades que usa en cada caso:

    (a) $4! \equiv 4\,(5)$.
    (b) $36^5 \equiv -1\,(37)$.
    (c) $6^n + 8 \equiv 4\,(5)$, con $n \in \mathbb{N}$.

32. Reemplazando x e y por dígitos, hallar todos los números naturales de cinco cifras $65x1y$ que sean múltiplos de 12.

33. Sea $N = x40y15$ un número entero de seis dígitos (x e y son dígitos, x distinto de 0). Hallar todos los x, y de modo que N sea múltiplo de 33 pero no sea múltiplo de 99.

★★★★★★★★★★★★ *Ejercicios Complementarios* ★★★★★★★★★★★★

1. Analice las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

    (a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$.
    (b) $a \mid b \Rightarrow a \leqslant b$.
    (c) $a \mid b \Rightarrow |a| \leqslant |b|$.
    (d) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$.
    (e) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Demuestre los siguientes enunciados:

    (a) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
    (b) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.
    (c) $(a, b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
    (d) $(a, b) = 1$ y $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.

3. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son pares si $n \in \mathbb{N}$? Justifique sus respuestas.

(a) $3 \cdot n^2 + 1$.
(b) $n \cdot (n+1)$.
(c) $(n-1) \cdot (n+1)$.
(d) $n^3 - n$.

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifique sus respuestas.
   (a) $3^n + 1$ es divisible por n cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $2 \cdot 5^n + 1$ es divisible por 4 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $10^{2 \cdot n} - 1$ es divisible por 11 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Hallar todos los $m, n \in \mathbb{N}_0$ tal que $m + n = 13$ y el resto de dividir cada uno de ellos por 3 es 2.
   (b) Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = 2$ y el cociente de dividir cada uno de ellos por 5 es 42.

6. Calcule $[a, b]$ en las siguientes situaciones.
   (a) $a = 1$, $b = 12$.
   (b) $a = 1$, $b = -1$.
   (c) $a = 12$, $b = 15$.
   (d) $a = 140$, $b = 150$.

7. Pruebe la no existencia de naturales m y n tales que:
   (a) $m^2 = 2 \cdot n^2$.
   (b) $m^3 = 4 \cdot n^3$.
   (c) $m^2 = 12 \cdot n^2$.

8. Determinar los enteros positivos tales que
   (a) $n + 7$ es divisible por $3 \cdot n - 1$.
   (b) $n^2 + 5$ es divisible por $2 \cdot n + 1$.
   (c) $(n-2) \cdot \left(n^2 - n - 2\right)$ es divisible por $2 \cdot n - 1$.
   (d) $n^2 - 7 \cdot n + 10$ es divisible por $n - 3$.

9. Teniendo en cuenta que $abcd$ es un número de cuatro cifras, demostrar que:
   (a) $9 \mid abcd \Leftrightarrow 9 \mid a + b + c + d$.
   (b) $4 \mid abcd$ si y sólo si la mitad de cd es par.
   (c) $11 \mid aabb$.

10. Halle todos los valores del número natural m que hacen verdaderas las congruencias siguientes:
    (a) $1 \equiv 0\,(m)$.
    (b) $3 \equiv -3\,(m)$.
    (c) $1197 \equiv -286\,(m)$.

11. Halle todas las soluciones de las ecuaciones lineales de congruencias siguientes:
    (a) $35 \cdot x \equiv 14\,(182)$.
    (b) $7 \cdot x \equiv 1\,(11)$.
    (c) $10 \cdot x \equiv 2\,(22)$.

12. Hallar todos los x que satisfacen:
    (a) $x^2 \equiv x\,(12)$.
    (b) $x^2 \equiv 2\,(5)$.
    (c) $x^3 \equiv 1\,(7)$.

13. Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando las respuestas:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \mid n^2 + n$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \mid 5^n$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, 4 \mid 2 \cdot 5^n - 1$.

14. Hallar todos los números de cuatro cifras $1a7b$ que son múltiplos de 15 (a y b son dígitos no necesariamente distintos).

15. Sea A el conjunto de todos los números enteros desde el 1 al 300 inclusive. Consideremos los tríos que se pueden formar utilizando tres números distintos de A, y para cada trío, calculamos su suma. Determinar para cuántos de estos tríos la suma es múltiplo de 3.