El cuerpo de los números complejos

Algebra y Geometría Analítica

Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Esp. Prof. Liliana Noemí Caputo

Año Lectivo 2017

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Introducción

Es fácil comprobar que, si a es un número real tal que a > 0, para todo $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + a \neq 0$. En efecto, por consistencia de la suma con relación al orden, como si $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, se tiene que $x^2 + a \geq 0 + a = a > 0$. Así pues, a continuación vamos a definir un nuevo conjunto, en el cual dado $a \in \mathbb{R}$ / a > 0, existe al menos un elemento x de dicho conjunto tal que $x^2 + a = 0$.

Definición axiomática:

Sea $\oplus$ un símbolo e i un elemento tal que $i \notin \mathbb{R}$. Entonces, $\mathbb{C}$ es el **conjunto de los números complejos** si, y sólo si, sus elementos están determinados por los siguientes …

<u>Axiomas de construcción</u>

C1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

C2) $i \in \mathbb{C}$

C3) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \oplus ib \in \mathbb{C}$

C4) Los únicos elementos de $\mathbb{C}$ son los determinados por C1, C2 y C3.

A partir del axioma C3 podemos afirmar que los siguientes, son números complejos: $1 \oplus i(-2)$; $1 \oplus i0$; $-3 \oplus i1$; $0 \oplus i1$; $\sqrt{2} \oplus i0$; $0 \oplus i0$; $0 \oplus i(-\frac{2}{7})$; $\sqrt{2} \oplus i\frac{\pi}{2}$.

Relación de igualdad en $\mathbb{C}$:

Dados $a \oplus ib,\ c \oplus id \in \mathbb{C}$, diremos que:

$$a \oplus ib = c \oplus id \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ahora, que ya sabemos cuándo dos números complejos son iguales, enunciamos nuevos axiomas que nos permitirán explorar mejor qué forma tienen sus elementos:

<u>Axiomas de operatividad</u>

O1) $i0 = 0$

O2) $i1 = i$

O3) $a \oplus i0 = a$

O4) $0 \oplus ib = ib$

O5) $i(-b) = -ib$

Entonces, para los ejemplos obtenidos a partir de C3, resulta:

1 ⊕ i(-2) =[1] 1 ⊕ (-i2)   1⊕i0 =[2] 1   - 3⊕i1 =[3] - 3⊕i

0⊕i1 =[4] i1 =[3] i $\sqrt{2}$ ⊕i0 =[2] $\sqrt{2}$ 0⊕i0 =[4] i0 =[5] 0

0⊕i($-\frac{2}{7}$) =[1] 0 ⊕i $\left(-\frac{2}{7}\right)$ =[3] i$\frac{2}{7}$ $\sqrt{2}$ ⊕ i $\frac{\pi}{2}$ = $\sqrt{2}$ ⊕ i $\frac{\pi}{2}$[6]

Primeras Observaciones:

1) El número complejo i se denomina **unidad imaginaria**.

2) Dado el número complejo z = a ⊕ ib, el número real a es la **parte real del número z** y el número real b es su **parte imaginaria**. En símbolos, escribimos: a = Re(z) ∧ b = Im(z).

3) A un número complejo z tal que Re(z) = 0 lo llamamos **imaginario puro**.

4) El axioma O3 nos asegura que ∀a ∈ ℝ: Im(a) = 0.

5) Dado z = a ⊕ ib ∈ ℂ, se llama conjugado de z al número complejo $\overline{z}$ tal que Re(z) = Re($\overline{z}$) ∧ Im(z) = - Im($\overline{z}$) es decir, $\overline{z}$ = a ⊕ i(-b) = a ⊕ (-ib), por O5.

6) Dado z = a ⊕ ib ∈ ℂ, se llama <u>módulo o norma de z</u> al número real no negativo siguiente: $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$ (como a y b son números reales, sus cuadrados son números reales no negativos; en consecuencia la suma de sus cuadrados es un número real no negativo y, entonces, existe en ℝ su raíz cuadrada positiva).

Vamos ahora a dotar a este nuevo conjunto numérico de operaciones que nos permitan solucionar el problema que hemos planteado en la introducción.

Suma y producto en ℂ:

Dados a ⊕ ib, c ⊕ id ∈ ℂ, definimos:

$$(a \oplus ib) \boxplus (c \oplus id) = (a + c) \oplus i(b + d)$$

$$(a \oplus ib) \otimes (c \oplus id) = (a.c - b.d) \oplus i(a.d + b.c)$$

Donde + y . representan a la suma y al producto usuales de números reales, respectivamente.

[1] Por O5.
[2] Por O3
[3] Por O2
[4] Por O4
[5] Por O1
[6] No le es aplicable ningún axioma de operatividad

Dados a, b $\in \mathbb{R}$, veamos que:

1) $ib = i \otimes b$.

$i\otimes b =^{7} i1 \otimes (b \oplus i0) =^{8} (0 \oplus i1) \otimes (b \oplus i0) =^{9} (0.b - 1.0) \oplus i(0.0 + 1.b) =^{10} 0 \oplus ib =$
$=^{8} ib$.

2) $a \boxplus ib = a \oplus ib$.

$$a \boxplus ib =^{11} (a \oplus i0) \boxplus (0 \oplus ib) =^{12} (a + 0) \oplus i(0 + b) =^{13} a \oplus ib.$$

3) $a \boxplus b = a + b \wedge a \otimes b = a.b$.

Por O3: $a = a \oplus i0 \wedge b = b \oplus i0$, de donde:

$$a \boxplus b = (a \oplus i0) \boxplus (b \oplus i0) =^{12} (a + b) \oplus i(0 + 0) =^{13} (a + b) \oplus i0 =^{14} a + b$$

Además:

$$a \otimes b =^{14} (a \oplus i0)\otimes(b \oplus i0) =^{9} (a.b - 0.0) \oplus i(a.0 + 0.b) =^{10} a.b \oplus i0 =^{14} a.b$$

Como restringidos a $\mathbb{R}$, $\boxplus$ y $\otimes$ coinciden con + y ., respectivamente, ya no hay ambigüedad si usamos estos dos símbolos para la suma y el producto de números complejos. Tampoco habrá ambigüedad si reemplazamos el símbolo $\oplus$ por +, en la construcción de números complejos.

Estructura de ($\mathbb{C}$, +, .)

Veamos que con las operaciones que hemos definido, ($\mathbb{C}$, +, .) tiene estructura de cuerpo es decir, que se cumplen las siguientes propiedades:

1) Ley de Cierre: i) de la suma: $\forall z, w \in \mathbb{C}: z + w \in \mathbb{C}$
   ii) del producto: $\forall z, w \in \mathbb{C}: z.w \in \mathbb{C}$
2) Propiedad Asociativa:
   i) de la suma: $\forall z, w, u \in \mathbb{C}: (z + w) + u = z + (w + u)$
   ii) del producto: $\forall z, w, u \in \mathbb{C}: (z . w).u = z.(w.u)$

3) Propiedad Conmutativa: i) de la suma: $\forall z, w \in \mathbb{C}: z + w = w + z$
   ii) del producto: $\forall z, w \in \mathbb{C}: z.w = w.z$
4) Existencia de elemento neutro: i) de la suma: $\exists 0 \in \mathbb{C} / \forall z \in \mathbb{C}: z + 0 = z$

[7] Axiomas O2 y O3
[8] Axioma O4
[9] Definición de producto en $\mathbb{C}$
[10] Operando en $\mathbb{R}$
[11] Axiomas O3 y O4
[12] Definición de suma en $\mathbb{C}$
[13] Por ser 0 el neutro de la suma en $\mathbb{R}$
[14] Axioma O3

ii) del producto: $\exists 1 \in \mathbb{C} \,/\, \forall z \in \mathbb{C}: z.1 = z$

5) i) Existencia de opuesto para cada elemento:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C} \,/\, z + (-z) = 0$$

ii) Existencia de inverso para cada elemento no nulo:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \,/\, z.z^{-1} = 1$$

6) Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:

i) $\forall z, w, u \in \mathbb{C}: (z + w).u = z.u + w.u$

Demostraciones:

Sean $z = a + ib$, $w = c + id$, $u = g + if$, entonces, se tiene que $a, b, c, d, g, f \in \mathbb{R}$ y también sus opuestos.

1) Como la suma cumple con la ley de cierre en $\mathbb{R}$, $a + c$ y $b + d \in \mathbb{R}$, de donde, $z + w =^{15} (a + c) + i(b + d) \in \mathbb{C}$.

De la misma manera, por ley de cierre de la suma y el producto en $\mathbb{R}$, ac, ad, bc, bd, ac – bd, ad + bc son números reales, de donde, por definición de producto de números complejos, $z.w = (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{C}$.

2) i) $(z + w) + u = [(a + ib)+(c + id)] + (g + if) =^{15} [(a + c) + i(b + d)] + (e + if) = \\ =^{15}[(a + c) + e]+ i[(b + d) + f] =^{16} [a + (c + e)] + i[b + (d + f)] =^{15}(a + ib)+ [(c + e) + \\ + i(d + f)] =^{15} (a + ib) + [(c + id) + (e + if)] = z + (w + u)$

ii) $(z.w).u = [(a + ib).(c + id)].(g + if) =^{17}[(ac- bd)+ i(ad + bc)].(g + if) = \\ =^{17} [(ac- bd)g - (ad + bc)f] + i[(ac- bd)f + (ad + bc)g] =^{18}(acg - bdg - adf - bcf + \\ + i(acf - bdf + adg + bcg) =^{18}[a(cg -df) - b(dg + cf)]+ i[a(cf + dg) - b(df - cg)] = \\ =^{17}(a + ib).[(cg - df) + i(dg - df)] =^{17}(a + ib).[(c + id).(g + if)] = z.(w.u)$

3) i) $z + w =^{15}(a + c) + i(b + d) =^{19}(c + a)+ i(d + b) =^{15}(c +id)+(a + ib) = w + z$

ii) $z.w = (a + ib).(c + id) =^{20} (ac - bd)+ i(ad + bc) =^{21} (ca - db)+ i(da + \\ + cb) =^{20}(c + di).(a + ib) = w.z$

4) i) Como $0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (por axioma C1), es evidente que $0 \in \mathbb{C}$. Además:
$z + 0 =^{22} (a + ib) + (0 + i0) =^{23} (a + 0) + i(b + 0) =^{24} a + ib = z$.

[15] Definición de suma en $\mathbb{C}$
[16] Ley asociativa de la suma en $\mathbb{R}$
[17] Definición de producto en $\mathbb{C}$
[18] Propiedad distributiva de la suma con respecto al producto en $\mathbb{R}$
[19] Ley conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$
[20] Definición de producto en $\mathbb{C}$
[21] Ley conmutativa del producto en $\mathbb{R}$
[22] Axioma O3
[23] Definición de suma en $\mathbb{C}$
[24] Por ser 0 el neutro de la suma en $\mathbb{R}$

iii) Como $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (por axioma C1), es trivial que $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$. Luego:

$$z.1 = (a + ib).(1 + i0) =^{25} (a.1 - b.0) + i(a.0 + b.1) =^{26} a + ib = z.$$

5) i) Como $a, b \in \mathbb{R}$ ya hemos dicho que $-a, -b \in \mathbb{R}$. En consecuencia:

$$-z = -a + i(-b) \in^{27} \mathbb{C}$$

y es tal que $z + (-z) =^{28} -z + z = [-a + i(-b)] + (a + ib) =^{23} (-a + a) + i(-b + b) = =^{26} 0 + i0 =^{22} 0$. <u>Ejercicio</u>: Probar que $\forall \omega \in \mathbb{C}$: $-\omega = -1.\ \omega$.

ii) Si fuera $z \neq 0$, por definición de igualdad en $\mathbb{C}$, debe ser $a \neq 0 \vee b \neq 0$. En consecuencia, a^2 y b^2 no pueden ser simultáneamente nulos, de donde podemos afirmar que $a^2 + b^2 \neq 0$. Como se trata de un número real no nulo, existe en $\mathbb{R}$ su inverso multiplicativo.

Además, a y el opuesto de b son números reales, de donde (por ley de cierre del producto en $\mathbb{R}$): $\frac{a}{a^2+b^2}$, $\frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$. En consecuencia:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}.$$ Además:

$$z^{-1}z =^{29} z.z^{-1} = (a + ib).\left[\frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right] =^{25} \left[\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{(-b^2)}{a^2+b^2}\right] + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right) =$$

$$=^{26} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) =^{26} 1 + i0 =^{22} 1.$$

6) $$\begin{aligned}(z + w).u &= [(a + ib) + (c + id)](g + if) =^{23} [(a + c) + i(b + d)].(g + if) =^{25} \\ &= [(a + c)g - (b + d)f] + i[(a + c)f + (b + d)g] =^{30} \\ &= (ag + cg - bf - df) + i(af + cf + bg + dg) =^{31} \\ &= [(ag - bf) + (cg - df)] + i[(bg + af) + (cf + dg)] =^{23} \\ &= [(ag - bf) + i(bg + af)] + [(cg - df) + i(cf + dg)] =^{25} \\ &= (a + ib).(g + if) + (c + id).(g + if) = z.u + w.u\end{aligned}$$

$\therefore$ $(\mathbb{C}, +, .)$ tiene estructura de cuerpo

Otras observaciones:

1) Al igual que en el cuerpo de los números reales, la suma de un número complejo z y el opuesto de otro número w, lo denotaremos con $z - w$.

2) De forma análoga, si $w \neq 0$, al producto de z por w^{-1} lo denotaremos con z/w.
3) Por último, si $z = a + ib$, acordamos escribir a $\bar{z} = a - bi$.

---

[25] Definición de producto en $\mathbb{C}$
[26] Operando en $\mathbb{R}$
[27] Axioma C3
[28] Ley conmutativa de la suma en $\mathbb{C}$ (Propiedad 3i)
[29] Ley conmutativa del producto en $\mathbb{C}$ (Propiedad 3ii)
[30] Ley distributiva del producto con respecto a la suma en $\mathbb{R}$
[31] Ley asociativa de la suma en $\mathbb{R}$

Propiedades derivadas de la estructura de cuerpo:

Vemos que como ($\mathbb{C}$, +, .) tiene estructura de cuerpo, valen todas y cada una de las propiedades derivadas de cuerpo en que se habían enunciado y aceptado sin demostración al estudiar el cuerpo de los números reales, a saber:

Sean x, y, z $\in \mathbb{C}$, entonces:

1) Propiedad cancelativa de la suma: $x + y = x + z \Rightarrow y = z$
2) Unicidad del cero: Si $0' \in \mathbb{C}$ / $a + 0' = a$, entonces, $0' = 0$.
3) $0 = - 0$.
4) $1 = 1^{-1}$.
5) Unicidad del opuesto: Si $x' \in \mathbb{C}$ / $x + x' = 0$, entonces, $x' = -x$. En consecuencia, $-(-x) = x$.
5) $x.0 = 0$
6) $-(x + y) = -x - y$
7) $-1.x = -x$
8) $(-x).y = x.(-y) = - x.y$
9) $(-x).(-y) = x.y$. En consecuencia: $x^2 = x.x = (-x).(-x) = (-x)^2$ (donde x^2 denota al producto x.x.
10) Unicidad del inverso de cada elemento no nulo: Si $x \neq 0$ y $x.x' = 1$, para algún $x' \in \mathbb{C}$ /entonces, $x' = x^{-1}$. En consecuencia, $(x^{-1})^{-1} = x$.
11) Propiedad cancelativa del producto: $xy = xz \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = z$.
12) $\mathbb{C}$ carece de divisores de cero: $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

También en este caso, se aceptan sin demostración.

Complejos conjugados:

Ya hemos dicho que dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definimos el conjugado de z, como el siguiente número complejo: $\overline{z} = a - ib$.

Propiedades:

Sean z, u $\in \mathbb{C}$ y $u \neq 0$, entonces:

a) $\overline{\overline{z}} = z$
b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
c) $\overline{z + u} = \overline{z} + \overline{u}$
d) $\overline{z.u} = \overline{z} \, . \, \overline{u}$
e) $\overline{\left(\frac{z}{u}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{u}}$
f) $z + \overline{z} = 2 \, Re(z)$
g) $z - \overline{z} = 2.i.Im(z)$
h) $z. \overline{z} = |z|^2$
i) $\frac{z}{u} = \frac{z.\overline{u}}{|u|^2}$

Las demostraciones han sido incluidas como ejercicios en el trabajo práctico Nº 4 de la asignatura, por lo cual se omiten aquí, pero serán evaluadas en el examen final.

Potencia entera de un número complejo

Sean $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos:

i) $0^n = 0$
ii) $z^0 = 1$
iii) $z^n = z.z^{n-1}$
iv) $z^{-n} = (z^{-1})^n$

Observaciones importantes:

1) Nótese que la definición es análoga a la de la potenciación de números reales. Entonces, dado que las propiedades de la potenciación fueron demostradas por inducción sobre el exponente – y no usando a qué conjunto pertenecen las bases – las mismas demostraciones sirven para probar que esas propiedades valen también en $\mathbb{C}$ es decir, dados $z, w \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$, se cumple:

a) Producto de potencias de igual base: $z^n.z^m = z^{n+m}$
b) Potencia de potencia: $(z^n)^m = z^{nm}$
c) Prop. distributiva de la potenciación con respecto al producto:$(zw)^n = z^n w^n$
d) Potencia natural del conjugado: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Como no vale una demostración similar en $\mathbb{R}$ (puesto que no se habló de conjugado de un número real), probémosla por inducción sobre n.

Si n = 1, por definición de potenciación, $z^1 = z$. Luego, $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$

<u>HI</u>: Supongamos que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Luego, $\overline{z^{n+1}} =$ [32] $\overline{z^n z^1} =$ [33] $\overline{z^n}\,\overline{z^1} =$ [34] $(\overline{z})^n(\overline{z})^1 =$ [32] $(\overline{z})^{n+1}$

2) A partir de la definición dada, puede calcularse i^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. En efecto:

a) Como $i \notin \mathbb{R}$, $i \neq 0$, de donde resulta, $i^0 = 1$ (ii de la definición).
b) $i^1 =$[32] $i.i^0 =$[35] $i.1 =$[36] i.
c) $i^2 =$[32] $i.i^1 =$[37] $i.i =$[38]$(0+ i1).(0+ i1) =$[39] $(0.0 - 1.1)+ i(1.0 +1.0) =$[40]$-1+ i0 =$ =[41]-1.
d) $i^3 = i.i^2 =$[42]$i(-1) =$[43] $- i1 =$[44]$-i$.
e) $i^4 = i^{2.2} =$[45] $(i^2)^2 =$[46] $(-1)^2 = 1 =$[47] i^0

---

[32] iii de la definición de potencia entera de un número complejo
[33] Propiedad c de complejos conjugados
[34] Por HI y lo demostrado para n = 1
[35] Observación 2) a)
[36] Por ser 1 el neutro del producto en $\mathbb{C}$
[37] Observación 2) b)
[38] Axiomas O2 y O4
[39] Definición de producto en $\mathbb{C}$
[40] Operando en $\mathbb{R}$
[41] Axioma O3
[42] Por observación 2) c)
[43] Axioma O5
[44] Axioma O2
[45] Observación 1) b)
[46] Por ser $i.i = i^2 = -1$
[47] Observación 2) a)

f) Si n > 4, por algoritmo de división en $\mathbb{Z}$ y regla de signos, existen y son únicos $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ tales que $n = 4q + r$, con $0 \leq r < 4$. Luego:

$\forall n \in \mathbb{N}$: $i^n = i^{4q+r} =^{48} i^{4q}.i^r =^{45} (i^4)^q.i^r =^{49} 1^q.\ i^r = 1.i^r =^{50} i^r$.

Nota: De las observaciones 2 e) y f) se puede concluir que si $n \geq 4$, $i^n = i^r$, siendo r el resto de la división de n por 4.

3) Veamos que: i) $i(-i) =^{51} -(i.i) = -i^2 = -(-1) = 1$ es decir, $i^{-1} = -i$.
ii) Si $z = i =^{52} 0 + i$, entonces, $\overline{z} =^{53} 0 - i =^{54} - i$.

De i y ii, podemos observar que –i es el inverso y el conjugado de i.

4) Sea $z = a + ib$ tal que $a \neq 0 \neq b$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces en forma análoga a lo dicho en la observación 1), como al demostrar el teorema del binomio de Newton hicimos inducción sobre n, sin considerar qué clase de números eran las bases de las potencias que allí se usaron, podemos asegurar que:

$$z^n = (a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(ib)^k =^{55} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} i^k b^k$$

5) Habiendo demostrado las propiedades asociativas, conmutativas de suma y producto de números complejos, así como también la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, conociendo las 4 primeras potencias de i, puede hallarse un método de cálculo del producto de dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$, que resulta mucho más sencillo de usar que la definición.

En efecto:

$z.w = (a + ib).(c + id) =^{56} a.(c + id) + ib.(c + id) =^{56} ac + aid + ibc + ibid =^{57} ac + iibd + iad + icd =^{46} ac + (-1)bd + i(ad + cd) =^{58} (ac - bd) + i\ (ad + cd)$.

Radicación en $\mathbb{C}$. Raíces n – ésimas de un número complejo

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos, $\sqrt[n]{z} = w \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = w^n$.

Ejemplos: a) $i^2 = (-i)^2 = -1$, -i e i son dos raíces cuadradas de -1.
b) $1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4 = [(-i)^2]^2 = (-1)^2 = 1$. Entonces, 1, -1, -i e i son cuatro raíces cuartas de 1 (se las llama “raíces cuartas de la unidad”)

[48] Observación 1) a)
[49] Observación 2) e)
[50] Por ser 1 el neutro del producto en $\mathbb{C}$
[51] Propiedad derivada 8 de la estructura de cuerpo de $\mathbb{C}$
[52] Por ser 0 el neutro de la suma en $\mathbb{C}$
[53] Definición de conjugado de un número complejo
[54] Axioma O4
[55] Observación 1) c)
[56] Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en $\mathbb{C}$
[57] Propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{C}$ y de la suma en $\mathbb{C}$
[58] Propiedad derivada 8 de la estructura de cuerpo de $\mathbb{C}$ y observación importante 1

Más Observaciones

1) Si z, w $\in \mathbb{C}$ y n $\in \mathbb{N}$, entonces, $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$. En efecto, supongamos que $\sqrt[n]{z}$ = u y $\sqrt[n]{w}$ = v. Entonces, por la definición anterior, $u^n.v^n$ = zw.

Como hemos probado que la potenciación es distributiva con respecto al producto en $\mathbb{C}$, resulta que $(uv)^n$ = z.w, con lo cual por definición de radicación, resulta que: $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z}\,\sqrt[n]{w}$

2) Nótese que con esta definición (similar a la dada en el conjunto de números reales) ha quedado resuelto el problema de calcular raíces n - ésimas de números reales negativos., puesto que, si a $\in \mathbb{R}$ tal que a < 0 y n $\in \mathbb{N}$, resulta -a > 0 y, en consecuencia, $\sqrt[n]{-a} \in \mathbb{R}$.

En particular, calculemos las raíces cuadradas de a.

En principio, como $i^2 = (-i)^2 = -1$, podemos afirmar que i y – i son dos raíces cuadradas de -1. Además:

$$\sqrt{a} = \sqrt{-1(-a)} = {}^{59}\sqrt{-1}\,\sqrt{-a}$$

Luego, $i\sqrt{-a}$ y $-i\sqrt{-a}$ son dos raíces cuadradas de a.

De esta manera, en $\mathbb{C}$ se ha superado el problema planteado al inicio de este texto (que ningún número real x verifica la igualdad $x^2 + a = 0$, si a > 0), ya que si a > 0, -a < 0 y, si x = $\sqrt{-a} \vee$ x = $-i\sqrt{-a}$, $x^2 = -a$ (queda como ejercicio verificar que esto es así), resulta que $x^2 + a = -a + a = 0$.

Representación gráfica de números complejos

Así como al conjunto de números reales (vía el axioma de completitud) lo identificamos con una recta, al conjunto de números complejos lo podemos identificar con el plano es decir, con el producto cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Entonces, todo número complejo z, se puede representar como un punto del plano, de coordenadas (Re(z), Im(z)) y viceversa (es decir, que todo punto del plano p de coordenadas (x, y) representa al número complejo x + iy) lo cual puede corroborarse demostrando que la función f: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ / f(z) = (Re(z), Im(z)) es biyectiva.

Al representar un número complejo en un sistema de ejes cartesianos, es usual llamar al eje horizontal eje real (porque sobre él se proyecta su parte real) y al eje vertical eje imaginario (porque sobre él se representan su parte imaginaria). A dichos ejes se los denota, respectivamente, con R(z) e Im(z).

Así pues, el complejo z = a + ib $\neq$ 0 (a > 0 y b > 0) se representa como sigue:

[59] Observación 1) de radicación en $\mathbb{C}$

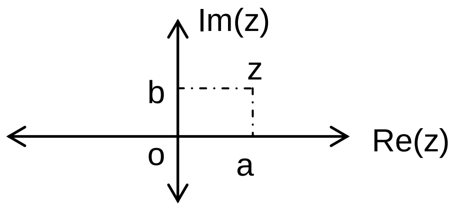

Figura 1: Representación gráfica de z = a + ib $\in \mathbb{C}$ - {0}

Es evidente que 0 está representado por el punto o, de coordenadas (0,0).

Sobre la Figura 1, tracemos con líneas de puntos el segmento (oz):

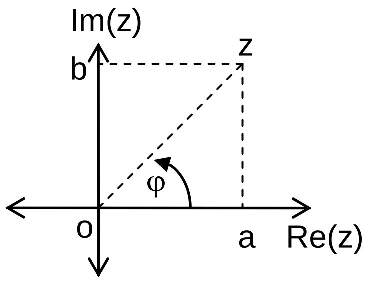

Figura 2: Representación en el plano de z = a + ib y del segmento (oz)

De esta manera queda determinado un triángulo rectángulo (opz), siendo o el punto de coordenadas (0, 0) y p = (a, 0).

Entonces, la distancia de o a z es la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo, con lo cual, por el teorema de Pitágoras podemos afirmar que $d^2(o, z) = a^2 + b^2$.

En consecuencia, resulta que $d(o, z) = +\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ (Ver 6, en Primeras Observaciones).

Por otra parte, si en la Figura 2 llamamos φ a la amplitud del ángulo (poz), diremos que dicha amplitud es el **argumento de z**. Notación: $\arg(z) = \varphi$.

Si $\varphi \in \mathbb{R} / 0 \le \varphi < 2\pi$, diremos que φ es el **argumento principal de z**, y lo denotamos con Arg(z). De donde $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Coordenadas polares de un complejo no nulo z

Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, definimos $|z|$ y arg(z) como las **coordenadas polares** de z. Notación: $z = \langle |z|, \arg(z) \rangle$.

En efecto, conocidos $|z| = \rho \wedge \arg(z) = \varphi$, es posible ubicar z en el plano, siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Se traza una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con el semieje real positivo un ángulo de amplitud φ es decir, la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = mx$, con $m = \tan \varphi$.

2. Sobre la recta trazada en 1, se marca el punto z, tal que $d(o, z) = \rho$.

De esta manera (ejecutando los pasos 1 y 2), z queda representado unívocamente por un punto del plano.

Veamos a continuación cómo determinar, dado $z = a + ib \neq 0$, sus coordenadas polares:

Ya hemos visto en las Primeras Observaciones (ítem 6), cómo calcular $|z|$.

Si $Re(z) = 0$, se observa en las Figuras 3a y 3b que $Arg(z) = \frac{\pi}{2} \vee Arg(z) = \frac{3\pi}{2}$, de donde, $arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee arg(z) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

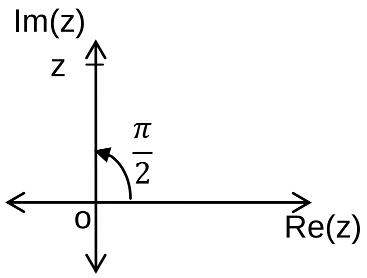

Figura 3a: Arg(z) si Im(z) > 0 = Re(z)

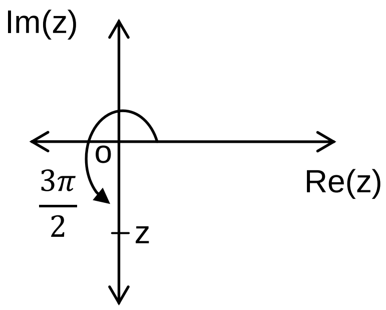

Figura 3a: Arg(z) si Im(z) > 0 = Re(z)

Si $Re(z) \neq 0$, en la Figura 2, vemos que $\tan \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

En cambio, si $z = <\rho, \varphi>$ (donde $|z| = \rho \wedge arg(z) = \varphi$), las partes real e imaginaria de z pueden determinarse como sigue:

Observando el triángulo (opz) de la Figura 2: $\text{sen}\, \varphi = \frac{Im(z)}{\rho} \wedge \cos \varphi = \frac{Re(z)}{\rho}$.

De donde resulta: $Im(z) = \rho\, \text{sen}\, \varphi \wedge Re(z) = \rho \cos \varphi$

Luego, como $z = Re(z) + i\, Im(z)$, se tiene que $z = \rho\, \text{sen}\, \varphi + i\, \rho \cos \varphi$ lo cual es consistente con los axiomas de construcción C3 y C4 por ser seno y coseno funciones reales de una variable real y $\rho \in \mathbb{R}$.

Si z es como antes ($z = \rho\, \text{sen}\, \varphi + i\, \rho \cos \varphi$), por propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en $\mathbb{C}$, finalmente obtenemos la **forma trigonométrica** de $z \neq 0$: $z = \rho(\text{sen}\, \varphi + i \cos \varphi)$.

Ahora, utilizando la llamada fórmula de Euler ($\cos \varphi + i\, \text{sen}\, \varphi = e^{i\varphi}$), obtenemos la **forma exponencial de un complejo no nulo**, que es $z = |z|.e^{i\varphi}$, donde φ es un argumento de z.

Igualdad de números complejos en coordenadas polares

Si z, w $\in \mathbb{C}$ - {0}, definimos:

$$z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \wedge \arg(z) = \arg(w) + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Es decir, dos complejos no nulos son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en un número entero de giros.

Ejemplo: Si $z = <3, -2\pi/3>$ y $w = <3, 10\pi/3>$, vemos que z = w porque:

$$|z| = 3 = |w| \wedge \arg(z) + 2.2\pi = -2\pi/3 + 4\pi = 10\pi/3 = \arg(w)$$

Interpretación geométrica de algunos suconjuntos complejos

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha \geq 0$ y C(o, α) el subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos los números complejos de norma o módulo α. Dijimos que d(o, z) = |z|, $\forall z \in \mathbb{C}$, entonces, C(o, α) es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo (o); como todas esas distancias son iguales a α, C(o, α) es por definición la circunferencia con centro en (0, 0) y radio α.

En consecuencia, se tiene que:

$$z = x + iy \in C(o, \alpha) \Leftrightarrow |z| = \alpha \Leftrightarrow |z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \alpha^2$$

(ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio α).

Nótese que si $\alpha = 0$, la circunferencia se reduce al punto o = (0, 0) es decir, que C(o, 0) = {0}.

De igual manera, dado $z_o = x_o + i\, y_o \in \mathbb{C}$, como en el plano la distancia entre los puntos z = (x, y) y $z_o = (x_o, y_o)$ está dada por:

$$d(z, z_o) = +\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

(Definición de distancia entre dos puntos en el plano)

podemos afirmar que todos los números complejos z = x + iy tales que su distancia a z_o es α constituyen el conjunto C(z_o, α).

En efecto, $z - z_o = (x - x_o) + i(y - y_o)$ y $|z - z_o| = +\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$, de donde, por transitividad de la igualdad en $\mathbb{C}$, $d(z, z_o) = |z - z_o|$. Entonces, resulta que $C(z_o, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_o| = \alpha\}$.

Así pues, C(z_o, α) es el conjunto de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo (z_o) es constante (α) es decir, que es la circunferencia con centro en z_o y radio α. Entonces:

$$z = x + i\,y \in C(z_o, \alpha) \Leftrightarrow |z - z_o| = \alpha \Leftrightarrow |z - z_o|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \alpha^2$$

(ecuación de la circunferencia con centro en z_o y radio α).

Por último, el subconjunto complejo $M(z_o, z_1) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_o| = |z - z_1|\}$, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de z_o y de z_1 que es, por definición, **la mediatriz del segmento ($z_o z_1$)**, Luego:

$$z \in M(z_o, z_1) \Leftrightarrow |z - z_o| = |z - z_1|$$

Fórmula de De Moivre

Ya hemos visto que dado un número complejo z, utilizando el teorema del binomio de Newton, podemos hallar cualquier potencia natural de z. Sin embargo, si conocemos sus coordenadas polares, no es necesario hallar sus partes real e imaginaria para hallarla.

Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ / $z = <\rho, \varphi>$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces, $z^n = <\rho^n, n\varphi>$.

Demostración: Sean $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ / $z = <\rho, \varphi>$ y $n \in \mathbb{N}$ Probemos la fórmula de De Moivre por inducción:

Si n = 1: $z^1 = z =^{60} <\rho, \varphi> =^{61} <\rho^1, 1.\varphi>$.

HI: Supongamos que $z^n = <\rho^n, n\varphi> = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$.

Luego: $z^{n+1} =^{62} z.z^n =^{63} <\rho^1, 1.\varphi> <\rho^n, n\varphi> =^{64}$

$$= [\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)].[\rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)] =^{65}$$
$$= (\rho.\rho^n). [(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)].(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)] =^{66}$$
$$= (\rho.\rho^n). [(\cos \varphi \cos n\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} n\varphi) + i \operatorname{sen} n\varphi \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \cos n\varphi) =^{62}$$
$$= \rho^{n+1} [(\cos \varphi \cos n\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} n\varphi) + i (\operatorname{sen} n\varphi \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos n\varphi)] =^{67}$$
$$= \rho^{n+1} [(\cos (n\varphi + \varphi) + i \operatorname{sen} (n\varphi + \varphi)] =^{68} \rho^{n+1}[(\cos (n+1) \varphi + i \operatorname{sen} (n+1) \varphi]$$

$$\therefore \forall z \in \mathbb{C} - \{0\} / z = <\rho, \varphi>, \forall n \in \mathbb{N}: z^n = <\rho^n, n\varphi>$$

Raíces naturales de un número complejo no nulo en coordenadas polares

Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $z = <\rho, \varphi>$ y $w = \sqrt[n]{z}$. Entonces, por definición de radicación en $\mathbb{C}$, debe ser $w^n = z$.

Supongamos que $w = <\alpha, \theta>$ entonces, por fórmula de De Moivre y definición de igualdad de números complejos debe ser: $\rho = \alpha^n \wedge \varphi = n\theta + 2h\pi$, para algún $h \in \mathbb{Z}$.

Luego resulta que $\alpha = \sqrt[n]{\rho} \wedge \theta = \frac{\varphi - 2h\pi}{n}$, con lo cual, en forma general, se puede decir que $|w| = \sqrt[n]{|z|} \wedge \arg(w) = \arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, con $h \in \mathbb{Z}$ y $k = -h$.

Así pues, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $w_k = <\sqrt[n]{|z|}, \frac{\varphi + 2k\pi}{n}>$ es **una raíz n – ésima** de z.

Cómo $\forall k \in \mathbb{Z}$: $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$, todas las raíces n – ésimas de z pertenecen a la circunferencia con centro en (0, 0) y radio $\alpha = \sqrt[n]{|z|}$ (a la cual denotamos con C(o, α).

---

[60] Por hipótesis
[61] $\forall x \in \mathbb{R}: x^1 = x \wedge 1.x = x$
[62] Definición de potenciación
[63] Por lo probado para n = 1 y la HI
[64] Expresando ambos números en forma trigonométrica
[65] Propiedades asociativa y conmutativa del producto en $\mathbb{C}$
[66] Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en $\mathbb{C}$
[67] Por ser $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$ y $\cos (\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
[68] "Sacando factor común" φ

Si bien hay tantas raíces n – ésimas de z como números enteros, veamos que existen exactamente n raíces n – ésimas distintas de z.

En efecto, si $k \geq n \vee k < 0$, se tiene que por algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $k = qn + r$, con $0 \leq r < n$ es decir, $0 \leq r \leq n - 1$.

Luego:

$$\arg(w_k) = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2qn\pi + 2r\pi}{n} = \frac{(\varphi + 2r\pi) + 2qn\pi}{n} =$$

$$= \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + \frac{2qn\pi}{n} = \arg(w_r) + 2q\pi$$

Entonces, como $|w_k| = \sqrt[n]{|z|} = |w_r| \wedge \arg(w_k) = \arg(w_r) + 2q\pi$, con $q \in \mathbb{Z}$, resulta que $w_k = w_r$, para algún $0 \leq r \leq n - 1$.

Además, si $0 \leq k < n - 1$, vemos que:

$$\arg(w_{k+1}) - \arg(w_k) = \frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi + 2\pi - \varphi - 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

En consecuencia, puede interpretarse que las n raíces n – ésimas de un complejo no nulo z, están representadas por los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia con centro en (0, 0) y radio $\sqrt[n]{|z|}$, donde $2\pi / n$ es el ángulo central de dicho polígono.

Algunas consideraciones finales

Ya hemos dicho que en $\mathbb{C}$, se pueden calcular las raíces n – ésimas de números reales negativos, lo cual no era posible mientras nuestro campo numérico de trabajo se reducía al de los números reales.

Así pues, al analizar la radicación en $\mathbb{C}$, vimos cómo solucionar el problema introductorio de resolver la ecuación $x^2 + a = 0$, con $a > 0$.

Sin embargo, no todo ha sido ganancia: recordemos que $(\mathbb{R}, +, .)$ es un cuerpo ordenado, denso y completo, pero $(\mathbb{C}, +, .)$ ya no lo es. Si bien es un cuerpo, en él no se puede definir un orden total y consistente con la suma y producto que le dan dicha estructura.

Para probar esta afirmación, razonaremos por el **absurdo**, suponiendo que existe un orden total y consistente con la suma y el producto en $\mathbb{C}$ es decir, que se cumplen los axiomas:

O1. Ley de tricotomía.

O2. Propiedad transitiva.

O3. Consistencia del orden con respecto a la suma: $z < w \Rightarrow z + v < w + v$

O4 Consistencia restringida del orden con respecto al producto:

$$z < w \wedge v \neq 0 \Rightarrow z\,v < w\,v$$

Entonces, como $0 \in \mathbb{R} \wedge i \notin \mathbb{R}$, debe ser $i \neq 0$. Luego, por O1, se debe cumplir que $0 < i$ ó $i < 0$.

Si fuera $i > 0$, por O4, $i.i > 0$ es decir, $i^2 > 0$ lo que equivale a que $-1 > 0$ **absurdo**, pues -1 es un número real negativo y, en consecuencia, $-1 < 0$.

Entonces, resulta que i < 0, con lo cual por O3, sumando a ambos miembros –i, 0 < –i y, nuevamente, por O4, se tiene que -i.i < 0. Como –i.i = $-i^2$ = -(-1) = 1, hemos probado que 1 < 0 lo cual es **absurdo** pues 1 es un número real positivo.

Estas contradicciones provienen de haber supuesto que es posible definir en $\mathbb{C}$ un orden total y consistente con la suma y producto que le dan estructura de cuerpo, lo cual significa que no es posible establecer dicha definición.

Así pues, ($\mathbb{C}$, +, .) es un cuerpo no ordenado (en consecuencia no es denso, ni arquimediano, ni completo), pero veremos en el capítulo siguiente que cuenta con una propiedad de la cual $\mathbb{R}$ carecía: $\mathbb{C}$ es un **cuerpo algebraicamente cerrado** atributo que está fuertemente vinculado al hecho de que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{C}$.

Bibliografía

- Figallo, A.V. (1993). Notas del curso El cuerpo de los números complejos. Actas del 5º Seminario Nacional de Matemática – Nivel Medio. Universidad Nacional de San Juan (Argentina).

- Rojo, A. (1996). Algebra I. 18ª Edición. Editorial El Ateneo. Buenos Aires Capital Federal de Argentina.

- Kolman, B.; Hill, D. (2006). Algebra lineal. 8ª Edición. Pearson Educación. México D.F.

- Swokowski, E.; Cole, J. (2009). Algebra y Trigonometría. 12ª Edición. CENGACE Learning. México D.F.

- Mira Ríos, J.; Cascales Salidas, B.; Pedreño Guillén, S. (2008). Material de clase de Análisis Matemático I, Tema 2, Facultad de Matemática de la Universidad de Murcia (España). Disponible en: http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i/Material%20de%20clase/AMIcap2.pdf