Trabajo Práctico 3 - Relaciones y Funciones.

1. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ y $C = \{1, 8\}$. Se define $\mathcal{R} \subset A \times B$ mediante
$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x = y + 1.$$
   (a) Defina $\mathcal{R}$ por extensión.
   (b) Defina el dominio y la imagen de $\mathcal{R}$.
   (c) Represente graficamente $A \times B$ y $\mathcal{R}$.
   (d) Determine $\mathcal{R}^{-1}$.

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea la relación $\mathcal{R}$ en A dada por:
$$\begin{aligned} i)\,(x, y) \in \mathcal{R} \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \mid (x - y) \\ ii)\,(x, y) \in \mathcal{R} \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq y \end{aligned}$$
   (a) Defina $\mathcal{R}$ por extensión.
   (b) Clasifique $\mathcal{R}$.

3. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ definida por
$$\begin{aligned} i)\,\mathcal{R} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (3,4), (4,3)\} \\ ii)\,\mathcal{R} &= \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1), (4,4), (2,4), (5,5), (4,2)\}. \end{aligned}$$
   (a) Analice si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Justifique la validez de sus afirmaciones formalmente.
   (b) Para los casos en que $\mathcal{R}$ sea una relación de equivalencia, escriba las clases de equivalencia determinadas por $\mathcal{R}$.

4. Dados los conjuntos $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{a, b\}$ obtenga, si fuera posible en cada caso, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ y luego conteste la pregunta que se propone justificando su respuesta.
   (a) $\mathcal{R} \subset B \times C$ definida por $\mathcal{R} = \{(1,a), (1,b), (2,b), (3,a), (3,b)\}$ y $\mathcal{S} \subset C \times B$ definida por $\mathcal{S} = \{(a,2), (a,4), (a,5), (b,3)\}$.
   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A : x \leq y\}$ y $\mathcal{S} = \{(x, y) \in A \times B : x = y\}$.
   (c) ¿Es cierto que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ son siempre relaciones inversas?

5. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones sobre X. Explore la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. Argumente a favor o en contra. Demuestre formalmente la validez de sus argumentaciones.
   (a) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son transitivas, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es transitiva.
   (b) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son transitivas, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es transitiva.
   (c) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es reflexiva.
   (d) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ y $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ son reflexivas.

6. Determine en qué casos $g \circ f$, $f \circ g$, o ambas, son funciones.
   (a) Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$ y $C = \{0, 2, 4\}$.
$$\begin{aligned} f : A \to B, &\quad f = \{(-2,0), (0,1), (-1,0)\}, \\ g : B \to C, &\quad g = \{(0,0), (1,4)\}. \end{aligned}$$
   (b) Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{m, s, p\}$, $C = \{b, a\}$.
$$\begin{aligned} f : A \to B, &\quad f = \{(a,p), (b,s), (c,m)\}, \\ g : B \to C, &\quad g = \{(p,b), (m,a), (s,a)\}. \end{aligned}$$

7. A partir de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x-3, \\ f_2(x) &= x^2+3, \\ f_3(x) &= 8, \\ f_4(x) &= \frac{1}{x-2}, \\ f_5(x) &= \sqrt{3x-3} \\ f_6(x) &= \frac{3}{\sqrt{3x-3}}. \end{aligned}$$

(a) Determine el conjunto $D \subset \mathbb{R}$ más amplio para que $f_i : D \to \mathbb{R}$ sea función cuando i toma valores entre 1 y 6.

(b) Clasifique las funciones obtenidas en el ítem anterior.

(c) Halle las funciones inversas en los casos que sea posible. Si no fuera posible justifique su respuesta.

(d) Considere las funciones f_1 y f_4. Realice las composiciones e indique sus conjuntos dominio e imagen.

8. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Demuestre:

(a) Si f es inyectiva y g es inyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(b) Si f es biyectiva y g es biyectiva entonces $g \circ f$ es biyectiva.

(c) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

9. Halle, si fuera posible, el valor de a de manera que:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x+1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 \cdot x$ y $(g \circ f)(a) = 5$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x+3$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $g(x) = x^2$ y $(g \circ f)(a) = -0.5$.

10. Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ una función cuyo gráfico es el que se muestra en la Figura 1:

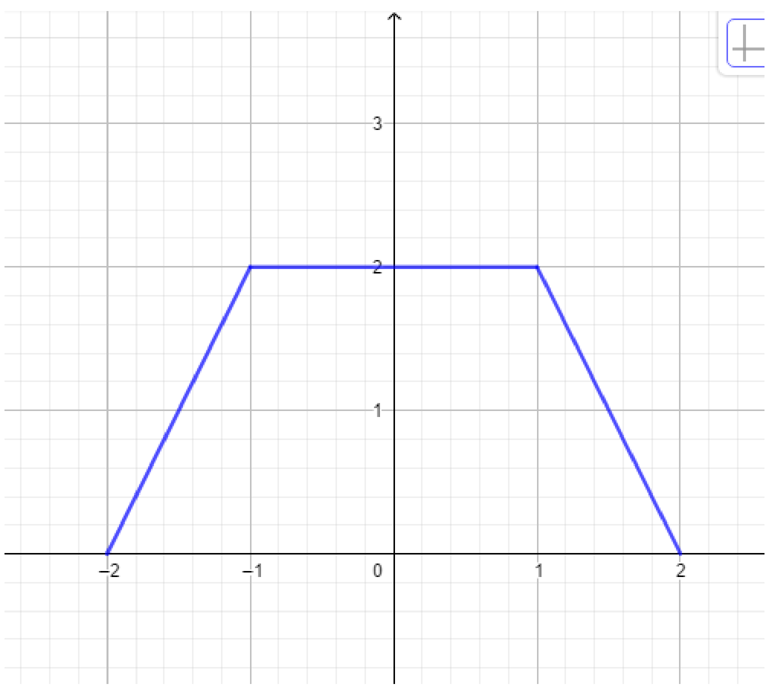

Fig. 1: Gráfico de f.

(a) Representar gráficamente las siguientes funciones:

- $g_1(x) = f(x) + 1$.

- $g_2(x) = f(x) - 1$.
- $g_3(x) = f(x+1)$.
- $g_4(x) = f(x-1)$.
- $g_5(x) = -f(x)$.

(b) Indicar dominio e imagen de cada una de las funciones del ítem anterior.

★★★★★★★★★★★★★*Ejercicios Complementarios*★★★★★★★★★★★★★

1. En $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 3\}$ se definen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \left\{(x,y) \in A^2 : 3 \mid (x-y)\right\} \\ \mathcal{S} &= \left\{(x,y) \in A^2 : x < y\right\}. \end{aligned}$$

   (a) Determine $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ por extensión.
   (b) Analice qué propiedades verifica o no la relación $\mathcal{R}$ y luego clasifíquela.
   (c) Analice si $\mathcal{S}$ es de orden (amplio o estricto).

2. Sobre los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x < 6\}$ y $D = \{-3,-2,-1\}$ se definen las relaciones:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1 \subset A \times B \text{ tal que } \mathcal{R}_1 = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}, \\ &\mathcal{R}_2 \subset A \times B \text{ tal que } \mathcal{R}_2 = \{(1,b),(2,b),(4,b),(3,b)\}, \\ &\mathcal{R}_3 \subset A \times B \text{ tal que } \mathcal{R}_3 = \{(3,a),(4,b),(2,c)\}, \\ &\mathcal{R}_4 \subset B \times D \text{ tal que } \mathcal{R}_4 = \{(b,-2),(c,-1),(a,-3)\}, \\ &\mathcal{R}_5 \subset A \times C \text{ tal que } \mathcal{R}_5 = \{(x,y) : y = -x\}, \\ &\mathcal{R}_6 \subset B \times C \text{ tal que } \mathcal{R}_6 = \{(b,0),(a,1),(c,2)\}. \end{aligned}$$

   (a) Defina el dominio y la imagen de cada una.
   (b) Identifique cuáles de ellas son funciones y justifique su respuesta.
   (c) Clasifique las que son funciones y justifique su respuesta.
   (d) Calcule la relación $\mathcal{R}_6 \circ \mathcal{R}_2$ y verifique que se trata de una función.
   (e) Halle las relaciones inversas de las identificadas en (b) y determine cuáles son funciones.

3. A partir de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{-x}, \\ f_2(x) &= -x^2, \\ f_3(x) &= \log(x), \\ f_4(x) &= \log(x-1), \\ f_5(x) &= \frac{1}{\sqrt{-x}}. \end{aligned}$$

   (a) Determine el conjunto $D \subset \mathbb{R}$ más amplio para que $f_i : D \to \mathbb{R}$ sea función cuando i toma valores entre 1 y 5.
   (b) Clasifique las funciones obtenidas en el ítem anterior (con dominio D hallado).
   (c) Considere las funciones f_2 y f_3. Realice las composiciones e indique sus conjuntos dominio e imagen.

4. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones sobre X. Explore la validez de cada una de las siguientes afirmaciones. Argumente a favor o en contra. Demuestre formalmente la validez de sus argumentaciones.

   (a) Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es simétrica.
   (b) Si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ es simétrica.
   (c) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son simétricas, entonces $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es simérica.

5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. ¿Sabiendo que $g \circ f$ es sobreyectiva, podemos afirmar que entonces f lo es? ¿Lo será g?

6. En el conjunto $\mathbb{Z}$, sea la siguente relación: dos números están relacionados si terminan en el mismo dígito. Verificar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar el representante más simple posible para cada clase.