El cuerpo de los números reales

Algebra y Geometría Analítica

Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Esp. Prof. Liliana Noemí Caputo

Año Lectivo 2016

EL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

Definición:

Sea $\mathbb{R}$ un conjunto en el cual se han definido dos operaciones: suma (+) y producto (.) y una relación de orden "<" (menor que). En dicho conjunto se verifican los siguientes **axiomas**:

S1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R}$ (Ley de cierre de la suma)

S2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (Ley asociativa de la suma)

S3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (Ley conmutativa de la suma)

S4. $\exists\ 0 \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ (Existencia de elemento neutro para la suma)

S5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} / x + (-x) = 0$ (Existencia de opuesto para cada elemento)

P1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x.\ y \in \mathbb{R}$ (Ley de cierre del producto)

P2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x.y).z = x.\ (y.z)$ (Ley asociativa de la multiplicación)

P3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x.y = y.x$ (Ley conmutativa de la multiplicación)

P4. $\exists\ 1 \in \mathbb{R}\ (1 \neq 0) / \forall x \in \mathbb{R}: x.1 = x$ (Existencia de elemento neutro para el producto)

P5. $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} / \exists\ x^{-1} \in \mathbb{R} / x.x^{-1} = 0$ (Existencia de inverso para cada elemento no nulo de $\mathbb{R}$)

D. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y).\ z = x.z + y.z$ (Ley distributiva del producto con respecto a la suma)

Por cumplirse estos once axiomas, diremos que ($\mathbb{R}$, + , .) tiene estructura de **cuerpo.**

Podemos observar que, si bien no podemos precisar qué elementos contiene el conjunto de números reales, sí podemos afirmar que $\mathbb{R}$ es no vacío, puesto que los axiomas S4 y P4 afirman que, al menos, existen dos números reales: cero y uno, respectivamente. Asimismo, los axiomas S5 y P5 aseguran que existen también, -0, -1 y 1^{-1}.

Notación:

Dados dos números reales x e y, denotamos con $x – y$ a la suma de x y el opuesto de y es decir, $x – y = x + (-y)$.

Dados dos números reales x e y, con $y \neq 0$, denotamos con $\frac{x}{y}$ o con x/y al producto siguiente: $x.y^{-1}$.

Hemos dicho que en $\mathbb{R}$ se ha definido una relación de orden. Entonces, dados dos números reales x e y, $x < y$ se lee "x menor que y" ó, lo que es lo mismo, "y mayor que x".

Cuando un número real x es menor que cero ($x < 0$), decimos que dicho número es **negativo.** Cuando un número real y es mayor que cero ($y > 0$), diremos que y es un número real **positivo.**

En $\mathbb{R}$, se cumplen también los siguientes axiomas:

O1) Dados dos números reales, x e y, se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones: $x < y$; $x = y$; $y < x$ (Ley de tricotomía)

O2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x + z < y + z$ (Consistencia del orden respecto a la suma)

03) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : z > 0 \wedge x < y \Rightarrow x.z < y.z$ (Consistencia restringida del orden respecto al producto)

Podemos observar que cuando un número x no es menor que y, por O1 resulta: x = y o x > y, en ese caso, decimos que “x es mayor o igual que y”, lo cual se denota con: $x \geq y$. Análogamente, “y es menor o igual que x” (lo cual denotamos con: $y \leq x$), si y no es mayor que x.

Cuando un número real x es tal que $x \leq 0$, diremos que x es un número **no positivo**. Análogamente, si $y \in \mathbb{R}$ / $y \geq 0$, diremos que y es un número **no negativo.**

Dado que ($\mathbb{R}$, + , .) es un cuerpo en el cual se cumplen los axiomas O1, O2, y O3, diremos que es un **cuerpo ordenado.**

Propiedades derivadas de los axiomas de cuerpo ordenado:

Veamos a continuación, algunas propiedades que se verifican en $\mathbb{R}$ y que pueden demostrarse a partir de los axiomas enunciados: Sean x, y, z $\in \mathbb{R}$

1) Propiedad cancelativa de la suma: $x + y = x + z \Rightarrow y = z$
2) Unicidad del cero: Si $0' \in \mathbb{R}$ / $a + 0' = a$, entonces, $0' = 0$.
3) $0 = -0$.
4) $1 = 1^{-1}$.
5) Unicidad del opuesto: Si $x' \in \mathbb{R}$ / $x + x' = 0$, entonces, $x' = -x$. En consecuencia, $-(-x) = x$.
5) $x.0 = 0$
6) $-(x + y) = -x - y$
7) $-1.x = -x$
8) $(-x).y = x.(-y) = -x.y$
9) $(-x).(-y) = x.y$. En consecuencia: $x^2 = x.x = (-x).(-x) = (-x)^2$
10) Unicidad del inverso de cada elemento no nulo: Si $x \neq 0$ y existe $x' \in \mathbb{R}$ / $x.x' = 1$, entonces, $x' = x^{-1}$. En consecuencia, $(x^{-1})^{-1} = x$.
11) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$
12) $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x.z > y.z$
13) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
14) $0 < x^{-1} < y^{-1} \Leftrightarrow x > y$
15) Propiedad cancelativa del producto: $a.b = a.c \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow b = c$
16) $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.
17) Densidad: Sean x, y $\in \mathbb{R}$ / $x < y$, entonces, $\exists\, z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$.

Aceptamos estas propiedades, sin demostración.

Hasta aquí, hemos dicho que ($\mathbb{R}$, + , .) es un cuerpo ordenado, como se cumple 17, es un **cuerpo ordenado y denso**. Como existen otros cuerpos que son ordenados y densos, para caracterizar a $\mathbb{R}$ y no confundirlo con ningún otro cuerpo, vamos a enunciar un último axioma:

AS. Axioma del supremo o de completitud: Todo subconjunto real no vacío y acotado superiormente, admite supremo en $\mathbb{R}$.

(Recordar los conceptos dados en Cálculo Diferencial e Integral I de cota superior, subconjunto real acotado superiormente, supremo e ínfimo de un subconjunto real).

Este último axioma es el que nos permite identificar a $\mathbb{R}$ con una recta es decir, a cada punto de la recta se le puede asignar un número real y a cada número real se le puede hacer corresponder un punto de la recta. En síntesis, existe una función biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de una recta. Por cumplirse el AS diremos que es un **cuerpo ordenado, denso y completo.**

ALGUNOS SUBCONJUNTOS DEL CUERPO DE LOS REALES

El conjunto de números naturales:

Hasta este momento, conocemos sólo tres elementos de $\mathbb{R}$: 0, 1 y –1.

Ahora bien, como 1 es un número real (por P4), por el axioma S1, resulta que: $1 + 1 \in \mathbb{R}$. Llamemos $2 = 1 + 1$. Como 1 y 2 son números reales, nuevamente por S1, $2 + 1 \in \mathbb{R}$,... Iterando este procedimiento, podemos obtener un subconjunto de $\mathbb{R}$ al que llamaremos **conjunto de números naturales**. Este conjunto se denota, generalmente, con $\mathbb{N}$.

Diremos que $\mathbb{N}$ es un **conjunto inductivo**, puesto que cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in \mathbb{N}$.
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$.(*)

Para distinguir a $\mathbb{N}$ de cualquier otro subconjunto real inductivo, diremos que se cumple que si $H \subset \mathbb{R}$ es inductivo, $\mathbb{N} \subset H$.

Se puede demostrar que en $\mathbb{N}$ se cumple el llamado **principio de inducción completa** (PIC) que permite demostrar propiedades de los números naturales. Su enunciado es:

Sea P un predicado de una variable con dominio en $\mathbb{N}$. **Si** $v(P(1)) = 1$ y la implicación $(P(n) \Rightarrow P(n + 1))$ es verdadera, **entonces**, $\forall x \in \mathbb{N}: v(P(x)) = 1$.

Veamos cómo usar el PIC para demostrar que la suma de dos números naturales es, también, un número natural.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, queremos probar que $n + m \in \mathbb{N}$.

Entonces, el predicado del que habláramos antes es $P(m) = n + m \in \mathbb{N}$ (en este caso, la variable es m y n se mantiene constante).

Veamos, primero, que $v(P(1)) = 1$. En efecto, como $n \in \mathbb{N}$, por ser $\mathbb{N}$ inductivo, (*) nos asegura que $n + 1 \in \mathbb{N}$ Es decir, que $v(P(1)) = 1$.(**)

Supongamos que $v(P(m)) = 1$ es decir, que $n + m \in \mathbb{N}$ (esto es lo que se denomina **hipótesis inductiva**, a la que haremos referencia mediante **HI**).

Entonces, por (*), resulta que $(n + m) + 1 \in \mathbb{N}$. Pero como los números naturales son, en general, números reales, podemos utilizar la propiedad asociativa de la suma y decir que: $n + (m + 1) = (n + m) + 1 \in \mathbb{N}$. Como el primer miembro de la igualdad es $P(m + 1)$, hemos justificado que si $v(P(m)) = 1$ (HI), resulta $v(P(m + 1) = 1$(***).

En consecuencia, por (**) y (***), $\forall n, m \in \mathbb{N}: n + m \in \mathbb{N}$.

Ahora que hemos hecho una presentación un poco más formal de los números naturales, vamos a enunciar una propiedad (que aceptaremos sin demostración) que se denomina **principio de Arquímedes:** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N} / n \geq x$.

Es decir, dado un número real, siempre es posible hallar un número natural que lo supere. Como se cumple el principio de Arquímedes, diremos que $(\mathbb{R}, +, .)$ es un **cuerpo ordenado, denso, arquimediano y completo**.

Ahora bien, como $0 \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, definimos el **conjunto de los números enteros no negativos** como $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.

Veamos ahora, una función, con dominio en $\mathbb{N}_0$ y rango en $\mathbb{N}$: la función factorial. Esta función es tal que se define por recurrencia, es decir:

$x!: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ / $x! = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \ \vee x = 1 \\ x.(x-1)! \text{ si } x > 1 \end{cases}$

A partir de esta función, definimos los llamados números combinatorios como sigue: Si m, n $\in \mathbb{N}_0$ / n $\leq$ m, el número combinatorio de numerador m y denominador n es: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

El lector puede verificar que se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\binom{m}{0} = 1 \wedge \binom{m}{1} = m$
b) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ (se dicen de orden complementario)
c) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$ (Fórmula de Stieffel)

El conjunto de los números enteros:

Además, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, por axioma S5, se cumple que: $\forall n \in \mathbb{N}$: $-n \in \mathbb{R}$. Es decir que el conjunto $\mathbb{N}^- = \{-n \,/\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

Definamos, a continuación, el **conjunto de los números enteros** como sigue: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}^-$. Es evidente que $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{R}$.

Se puede demostrar que la suma y multiplicación de números enteros verifican los axiomas S1, S2, S3, S4, S5, P1, P2, P3, P4 y D. Como en $\mathbb{Z}$ no se verifica el axioma P5 (porque los únicos enteros cuyos inversos son enteros son 1 y -1), ($\mathbb{Z}$, +, .) no tiene estructura de cuerpo, sino de **anillo conmutativo con elemento unitario** (el elemento unitario es1, por ser el neutro del producto).

En el conjunto de números enteros vale un teorema llamado **algoritmo de división** que dice:

Dados dos enteros a y b, con b $\neq$ 0, existen y son únicos dos enteros q y r tales que a = bq + r, con $0 \leq r < |b|$. Estos enteros se llaman cociente (q) y resto (r) de la división. Denotamos con r(a, b) al resto de la división de a por b.

Cuando el resto de dividir a por b es cero, se dice que **b divide a "a", b es un divisor de a**, que **a es divisible por b** o que **a es un múltiplo de b**. En ese caso a = b.q y denotamos que b es un divisor de a como: b|a.

Así pues, si un número entero **p** es divisible por 2 diremos que ese número **es par** y que, por el algoritmo de división, **p = 2.q, para algún q $\in \mathbb{Z}$.** En cambio, si **t es un número impar**, no es par es decir, el resto de dividir t por 2 no es cero; como los únicos restos posibles en la división por 2 son 0 y 1, debe ser **t = 2k + 1**, para algún k $\in \mathbb{Z}$.

Un número entero p $\neq$ 0 es **primo** si, y sólo si, tiene, exactamente, cuatro divisores a saber: 1, -1, p y –p.

Entonces, 1 no es primo, porque sólo tiene 2 divisores: 1 y -1 (por la misma razón tampoco lo es -1). Si un número es primo, su opuesto también lo es. Puede probarse que existen infinitos primos, pero no hay una "fórmula" que permita calcular cualquiera de ellos.

En este curso daremos por conocido el hecho de que 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y sus opuestos son primos.

Diremos que $d \neq 0$ es **un divisor común de dos enteros** a y b si $d|a \wedge d|b$. De la misma forma, diremos que a y b son **coprimos**, si sus únicos divisores comunes son 1 y -1.

El conjunto de los números racionales:

Si consideramos $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$, como $b \neq 0$, por axioma P5, $b^{-1} \in \mathbb{R}$. Entonces, por axioma P1, podemos asegurar que $a.b^{-1} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, podemos definir el **conjunto de números racionales** como sigue:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \,/\, a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$$

Dado un número racional $\frac{a}{b}$, a se llama numerador y b denominador.

Diremos que dos números racionales $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow a.q = p.b$.

Hasta aquí no nos fue necesario definir la igualdad entre número reales, naturales o enteros, sin embargo sí nos hace falta en $\mathbb{Q}$ porque en este conjunto existen lo que se denominan “fracciones equivalentes”.

Por ejemplo, a simple vista, $\frac{3}{2}$ y $\frac{24}{16}$ son diferentes, sin embargo, $\frac{3}{2} = \frac{24}{16}$ porque $3.16 = 48 = 24.2$. Observamos que dado $\frac{3}{2}$, para obtener $\frac{24}{16}$ es suficiente multiplicar numerador y denominador por 8, mientras que para obtener $\frac{3}{2}$ a partir de $\frac{24}{16}$ se deben dividir numerador y denominador por 8 o, lo que es lo mismo, podemos “simplificar por 8”. Vemos que, por ejemplo, en $\frac{3}{2}$ no puede simplificarse por ningún número entero, ya que 2 y 3 son coprimos es decir, los únicos divisores comunes de 2 y 3 son 1 y -1.

Dado $\frac{a}{b}$, donde a y b son coprimos, diremos que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible.

Puede probarse que ($\mathbb{Q}$, +, .) es un cuerpo ordenado denso y arquimediano (la suma y producto en $\mathbb{Q}$ son las que tradicionalmente se denominan “suma y multiplicación de fracciones”), con las siguientes definiciones: Dados $\frac{a}{b}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq+pb}{bq} \qquad \frac{a}{b} . \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq} \qquad \frac{a}{b} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow a.q < p.b$$

Sabemos que un número racional admite un desarrollo decimal que se suele escribir como un número entero (que es su parte entera o su parte entera más uno) seguido de una coma y una sucesión de dígitos que se llaman cifras decimales. En realidad todo número racional admite una cantidad infinita de cifras decimales, por ejemplo: i) 2 = 2,000000…….. (parte entera: 2)

ii) -3,5 = -3,5000……. (parte entera: -4)

iii) 10,44444….. (parte entera 10)

iv) -0,25252525….. (parte entera: -1)
v) 14, 6781111….. (parte entera 14)

En el caso i, como 2 es entero, sus cifras decimales son todas cero y podríamos pensar que tiene infinitas cifras decimales ceros. El caso ii es similar: tiene una cifra decimal 5 e infinitas cifras decimales ceros.

En el caso iii vemos que también el número tiene infinitas cifras decimales pero ahora no son infinitas cifras nulas, sino que son iguales a 4. Esto se denota como: $10,\hat{4}$. De modo similar, en iv, el número que "se repite" una cantidad infinita de veces es 25, con lo cual a ese número lo escribimos como $-0,\widehat{25}$.

Finalmente, el ejemplo v tiene cifras que aparecen una cantidad finita de veces, seguidas de una cifra que se repite infinitas veces, entonces, al número en cuestión lo denotamos con $14{,}678\hat{1}$.

De los números de los ejemplos iii, iv y v decimos que admiten un desarrollo decimal con cifras periódicas.

Ahora bien, hemos dicho que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos ordenados, densos y arquimedianos, por lo cual podría pensarse que son iguales.

Vamos a demostrar, a continuación, que existen números reales que no son racionales y que, precisamente, se denominan **irracionales**, porque no pueden expresarse como "razón" o cociente de números enteros. Se caracterizan por admitir un desarrollo decimal con infinitas cifras decimales no periódicas (es decir, que la secuencia de sus cifras no guardan ninguna regularidad).

El primer número irracional que se conoció fue el número pi (π), que expresa la relación entre la longitud y el diámetro de una circunferencia, y se conoció varios siglos antes de Cristo (ya en la Biblia se lo menciona como igual a 3 y actualmente se conocen muchos millones de sus cifras decimales, siendo su aproximación más conocida la de 3,1416, por redondeo de 3,14159…..)

Para demostrar la existencia de números irracionales, debemos definir dos operaciones en $\mathbb{R}$:

Potenciación: Sean $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ / $x \neq 0$. Definimos:

i) $x^0 = 1$
ii) $x^n = x.\,x^{n-1}$
iii) $0^n = 0$
iv) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Observación importante: No se define 0^0 es decir, para que un número x elevado a la cero sea 1, debemos asegurarnos que $x \neq 0$.

Pueden probarse por inducción las siguientes propiedades:

En todos los casos, $n, m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$

a) $x^1 = x$
b) Producto de potencias de igual base: $x^n.x^m = x^{n+m}$
c) Potencia de potencia: $(x^m)^n = x^{m.n}$
d) Propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto:

$$(x.y)^n = x^n.y^n$$

e) Teorema del Binomio de Newton: Dados a, b$\in \mathbb{R}$ - {0}, n $\in \mathbb{N}$, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

<u>Demostraciones</u>: Sean n, m $\in \mathbb{N}$, x, y, z $\in \mathbb{R}$ / / x $\neq$ 0 Entonces:

a) $x^1 =^{1} x.x^{1-1} = x.x^0 =^{1} x.1 =^{2} x$ (A). Además, $0^1 =^{1} 0$. Luego: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^1 = x$.

b) En el producto de potencias de igual base, consideramos que m es un número natural cualquiera fijo y que el predicado es P(n) = $x^n.x^m = x^{n+m}$. Debemos ver que v(P(1)) = 1 (a) y que, si suponemos que v(P(n)) = 1, v(P(n + 1)) = 1 (b). Una vez que hayamos visto que se cumplen (a) y (b) podremos afirmar que la proposición $\forall$ n, m $\in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^n.x^m = x^{n+m}$, es verdadera. Entonces:

a) Si n = 1: Vemos que $x^1 =^{3} x.x^{1-1} = x.x^0 =^{1} x.1 =^{4} x$ (A) , entonces: $x^1.\, x^m =^{5} = x.x^m =^{1} x^{m+1}$. Es decir, v(P(1)) = 1.

HI: Suponemos que $x^n.x^m = x^{n+m}$.

Luego: $x^{n+1}.x^m =^{1} (x.x^n).x^m =^{6} x.(x^n.x^m) =^{7} x.\, x^{n+m} =^{1} x^{(n+m)+1} =^{8} x^{1+(n+m)} =^{9} = x^{(1+n)+m} =^{6} x^{(n+1)+m}$.

Como n, m y m + n son números naturales, entonces, n $\neq$ 0, m $\neq$ 0 y también m + n $\neq$ 0, entonces: $0^n.0^m = 0$, por definición de potenciación. Pero, precisamente por dicha definición, $0 = 0^{n+m}$.

$$\therefore\ \forall\, n, m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: x^n.x^m = x^{n+m}$$

c) Si n = 1, tenemos que $(x^m)^1 =^{3} x^m =^{2} x^{m.1}$.

HI: Suponemos que $(x^m)^n = x^{m.n}$.

Entonces: $(x^m)^{n+1} =^{1} x^m.\, (x^m)^n =^{5} x^m.\, x^{m.n} =^{10} x^{m+m.n} =^{11} x^{m(1+n)} =^{6} x^{m(n+1)}$.

Como n, m y m + n son números naturales, n $\neq$ 0, m $\neq$ 0 y m.n $\neq$ 0, entonces: $(0^m)^n =^{1} 0^n =^{1} 0 =^{1} 0^{m.n}$

$$\therefore\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}: (x^m)^n = x^{m.n}$$

d) Si n = 1, se observa que $(x.y)^1 =^{3} x.y =^{3} x^1.y^1$

HI: Suponemos que $(x.y)^n = x^n.y^n$, entonces:

$(x.y)^{n+1} =^{1} (xy).(x.y)^n =^{5} (x.y).(x^n.y^n) =^{4} x(yx^n).y^n =^{12} x.(x^n.y).y^n =^{4} (x.x^n).(y.y^n) =^{1} = x^{n+1}.\, y^{n+1}$

Nótese que como n $\neq$ 0 y 0.y = 0, $(0.y)^n = 0^n =^{1} 0 = 0.y^n = 0^n.\, y^n$ es decir, que lo que hemos probado vale aún cuando x = 0 $\vee$ y = 0.

$$\therefore\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{R}: (x.y)^n = x^n.y^n$$

e) Sean a, b$\in$ - {0}, n $\in \mathbb{N}$.

Si n = 1: $(a+b)^1 = a + b = 1.a.1 + 1.1.b = 1.a^{1-0}.b^0 + 1.a^{1-1}.b^1 =$

---

[1] Definición de potenciación
[2] 1 es el neutro del producto en $\mathbb{R}$
[3] Definición de potenciación
[4] 1 es el neutro del producto en $\mathbb{R}$
[5] Por (A)
[6] Propiedad asociativa del producto en $\mathbb{R}$
[7] HI
[8] Propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$
[9] Propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{R}$
[10] Producto de potencias de igual base (propiedad a)
[11] Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma en $\mathbb{R}$
[12] Propiedad conmutativa del producto en $\mathbb{R}$

$= \binom{1}{0}\ a^{1-0}.b^0 + \binom{1}{1}\ a^{1-1}\ .b^1 = \sum_{k=0}^{1} a^{n-k}b^k$

HI: Si suponemos que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, entonces:

$(a + b)^{n+1} =^{13} (a + b) . (a + b)^n =^{14} (a + b)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b^k =^{15} a \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b^k +$
$+\ b. \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b^k =^{15}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a.\,a^{n-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b.\,b^k =^{13} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k+1}b^k +$
$+ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^{n-k}b^{k+1}$(❉)

Vemos que si k = 0, en (❉), el primer sumando es:

$\binom{n}{0}\ a^{n+1}\ b^0\ = 1.a^{n+1}.\ 1 = \binom{n+1}{0}\ a^{n+1}\ b^0$

Si $1 \leq k \leq n$, en (❉) observemos los siguientes términos:

$\binom{n}{k}\ a^{n-k+1}\, b^k$ (el k + 1 – ésimo de la 1ª sumatoria)

y

$\binom{n}{k-1}\ a^{n-(k-1)}\ b^{k-1} = \binom{n}{k+1}\ a^{n-k+1}\ b^k$ (el k – ésimo de la 2ª sumatoria)

Entonces, asociando dichos términos, consideremos la suma:

$$\binom{n}{k}\ a^{n-k+1}\, b^k + \binom{n}{k-1}\ a^{n-k+1}\ b^k$$

De donde, por axioma D, se tiene:

$$[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}]\ a^{n-k+1}\ b^k$$

Pero, por fórmula de Stieffel, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, de donde:

$$[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}]\ a^{n-k+1}\ b^k = \binom{n+1}{k}\ a^{n-k+1}\ b^k$$

Como esto vale para todo $1 \leq i \leq n - 1$, reemplazando en (❉), se tiene:

$(a + b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}\ a^{n+1}\ b^0\ + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\ a^{n-k+1}b^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\ a^{n+1-k}b^k$

Luego, hemos probado por inducción sobre n, que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall n\ \mathbb{N}:\ \ (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Radicación:

Sean $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ **/** $x \geq 0$. Definimos: $\sqrt[n]{x} = y\ \Leftrightarrow\ y^n = x.$

Puede demostrarse que la radicación, así definida, es cerrada en $\mathbb{R}$ es decir, que la raíz n – ésima de un número real no negativo es un número real y distributiva con respecto al producto. Es usual, si $x \geq 0$, denotar $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Recordemos que $x^2 = (-x)^2$ (propiedad derivada número 9). Entonces, cada número real no negativo tendrá dos raíces cuadradas (un número real y su opuesto). Por ejemplo, como $3^2 = (-3)^2 = 9$, 9 admite dos raíces cuadradas: 3 y -3. El único número real cuyas raíces cuadradas coinciden es cero.

[13] Definición de potenciación en $\mathbb{R}$
[14] HI
[15] Propiedad distributiva del producto en $\mathbb{R}$

Vemos que $+\sqrt{(-3)^2}$ = 3 con lo cual no sirve “simplificar” el índice de la raíz y el exponente, porque nos quedaría que – 3 = 3 lo cual, evidentemente, no es cierto.

Ahora sí, demostraremos que existen números irracionales.

Sea el número real x = $\sqrt{2}$. Por definición de radicación, este número es tal que $x^2 = 2$. Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces, existen p $\in \mathbb{Z}$ y q $\in \mathbb{N}$ coprimos, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.(suponemos que es una fracción irreducible)

Elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 .$$

Es decir, p^2 es un número par y esto significa que p también lo es (puede probarse que el hecho de que un número entero sea par es equivalente a que su cuadrado también lo es). Luego, p puede escribirse como p = 2k, con k $\in \mathbb{Z}$. Entonces, $p^2 = 4k^2$, de donde tenemos que: $2q^2 = 4k^2$. Entonces, $q^2 = 2k^2$ es decir, q^2 también es par y (razonando en forma similar a como lo hicimos con p), resulta q = 2h, con h $\in \mathbb{Z}$. Pero entonces, $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2h}$, lo cual contradice la elección que habíamos hecho de $\frac{p}{q}$ (la habíamos elegido irreducible, y ahora resulta que se puede simplificar por 2).

Esta contradicción proviene de haber supuesto que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Luego, debe ser $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero como sí es un número real, debe ser $\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Pero $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no se diferencian sólo en sus elementos, además, en $\mathbb{Q}$ no se verifica el axioma del supremo (AS), con lo cual si bien es un cuerpo ordenado, denso y arquimediano, no es completo. Así pues, no podemos identificar a $\mathbb{Q}$ con una recta, pues habrá puntos que representen a los números irracionales que sabemos que no pertenecen a $\mathbb{Q}$. Sí podemos pensar en representar al conjunto $\mathbb{Q}$ como una recta de líneas de puntos, donde los espacios entre los puntos son, precisamente, los números irracionales que no pertenecen a él.

Intervalos reales:

Sean a, b $\in \mathbb{R}$ / a $\leq$ b. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

<u>Intervalo real cerrado y acotado:</u> [a, b] = {x $\mathbb{R}$ / a $\leq$ x $\leq$ b}

<u>Intervalo real cerrado a izquierda y acotado:</u> [a, b) = {x $\mathbb{R}$ / a $\leq$ x < b}

<u>Intervalo real cerrado a derecha y acotado:</u> (a, b] = {x $\mathbb{R}$ / a < x $\leq$ b}

<u>Intervalo real abierto a derecha y acotado:</u> (a, b) = {x $\mathbb{R}$ / a < x < b}

<u>Intervalo real cerrado a derecha y no acotado:</u> [a, +∞) = {x $\mathbb{R}$ / x $\geq$ a}

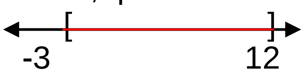
<u>Intervalo real abierto a derecha y no acotado:</u> $(a, +\infty) = \{x\ \mathbb{R} / x > a\}$

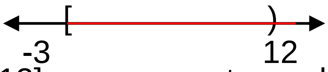
<u>Intervalo real cerrado a derecha y no acotado:</u> $(-\infty, b] = \{x\ \mathbb{R} / x \leq b\}$

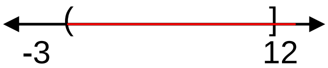
<u>Intervalo real abierto a derecha y no acotado:</u> $(-\infty, b) = \{x\ \mathbb{R} / x \leq b\}$

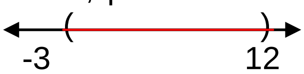
Representaremos en la recta un ejemplo de cada uno de ellos:

Sean a = -3 y b = 12, entonces:

[-3, 12] se representa mediante el segmento rojo. Se usan corchetes en ambos extremos, para indicar que los extremos del segmento pertenecen al conjunto: 

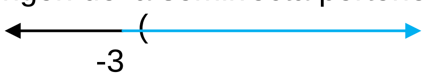
[-3, 12) se representa mediante el segmento rojo. Se usa paréntesis en el extremo derecho, para indicar que ese extremo del segmento no pertenece al conjunto: 

(-3, 12] se representa mediante el segmento rojo. Se usa paréntesis en el extremo izquierdo, para indicar que ese extremo del segmento no pertenece al conjunto: 

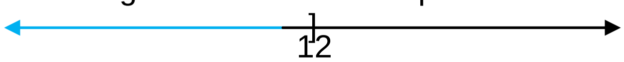
(-3, 12) se representa mediante el segmento rojo. Se usan paréntesis en ambos extremos, para indicar que los extremos del segmento no pertenecen al conjunto: 

[-3, +∞) se representa mediante la semirrecta azul. Se usa corchete para indicar que el punto de origen de la semirrecta pertenece al conjunto:

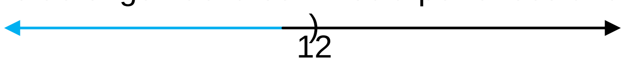
(-3, +∞) se representa mediante la semirrecta azul. Se usa paréntesis para indicar que el punto de origen de la semirrecta pertenece al conjunto:



(-∞, 12] se representa mediante la semirrecta azul. Se usa corchete para indicar que el punto de origen de la semirrecta pertenece al conjunto:



(-∞, 12] se representa mediante la semirrecta azul. Se usa paréntesis para indicar que el punto de origen de la semirrecta pertenece al conjunto:



FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La siguiente relación | |: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / |x| = $\begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ es una función y cumple las siguientes propiedades: Sean x, y $\in \mathbb{R}$, entonces:

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x| = |-x| = ||x||$
4) $|x - y| = |y - x|$
5) $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: $+\sqrt{x^2} = |x|$.
6) $|x.y| = |x|.|y|$
7) $\forall n \in \mathbb{N}$: $|x^n| = |x|^n$
8) Si $y \neq 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
9) $-|x| \leq x \leq |x|$
10) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\alpha > 0$, entonces:

i. $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$ (forma abreviada de escribir $x \geq -\alpha \wedge x \leq \alpha$)

ii. $|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha \vee x > \alpha$

iii. $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha \vee x = \alpha$

iv. $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha \vee x \geq \alpha$

v. $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$

11) Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$

<u>Demostraciones</u>: Sean x, y, z, $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $z \neq 0$ y $\alpha > 0$.
1) Si $x \geq 0$, |x| =[16] $x \geq 0$ $\therefore |x| \geq 0$
Si $x < 0$, por propiedad derivada 11, $-x > 0$. De donde |x| =[14] $-x > 0$. $\therefore |x| \geq 0$

$\therefore \forall \in x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$

2) Recordemos que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$, entonces debemos probar que la conjunción de la derecha es verdadera lo que, a su vez, equivale a demostrar que las dos implicaciones son verdaderas.

Demostremos primero que si $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$, para ello demostremos que es verdadera su implicación contrarrecíproca es decir, que si $x \neq 0$, $|x| \neq 0$.

Entonces, si $x \neq 0$, por ley de tricotomía, debería ser $x > 0$ ó $x < 0$.

Pero si $x > 0$, |x| =[14] $x > 0$ es decir, $|x| \neq 0$.

[16] Definición de valor absoluto

Por el contrario, si $x < 0$, $|x| =^{14} -x > 0$ con lo cual, nuevamente, $|x| \neq 0$.
Recíprocamente, si $x = 0$, $|x| = |0| = 0$, por definición de valor absoluto.
Hemos probado pues, que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3) Si $x \geq 0$, por propiedad derivada 9, $-x < 0$, entonces, $|x| =^{14} x \wedge |-x| =^{14} = -(-x) =^{17} x$. Luego, por propiedad transitiva de la igualdad en $\mathbb{R}$, resulta $|x| = |-x|$.

En cambio, si $x < 0$, $-x > 0$ de donde: $|x| =^{14} -x \wedge |-x| =^{14} -x$ con lo cual, nuevamente por propiedad transitiva de la igualdad en $\mathbb{R}$, resulta $|x| = |-x|$.

Además, por la propiedad 1, $|x| \geq 0$, con lo cual $||x|| =^{14} |x|$.

4) Como $(x - y) + (- x + y) = x – y – x + y =^{18} 0$ y el opuesto de cada elemento es único, debe ser $–(x – y) = - x + y$.

Ahora bien, en 3, probamos que el valor absoluto de un número real es igual al de su opuesto es decir, $|x – y| = |-(x + y)| = |y - x|$ (por propiedades derivadas 6 y 4).

5) Por definición de radicación, $\sqrt{x^2} = y$ si, y sólo $y^2 = x^2$. Entonces, debe ser $y = x$ ó $y = -x$ (pues son los únicos casos en que $y^2 = x^2$).

Si fuera $x = y \geq 0$, sería $|x| = y \geq 0$. Con lo cual se tiene que $\sqrt{x^2} = y \geq 0$, de donde debe ser $y = +\sqrt{x^2}$. Entonces, por propiedad transitiva de la igualdad de números reales, resulta $|x| =+\sqrt{x^2}$.

Si fuera $x = y < 0$, entonces, $|x| = -x = - y > 0$. Luego, debe ser $–y =+\sqrt{x^2} > 0$ es decir, nuevamente, $+\sqrt{x^2} = |x|$.

Si fuera $y = -x \geq 0$, $y = |x| = -x \geq 0$, de donde resulta que $y =+\sqrt{x^2}$. Luego por la transitividad de la igualdad de números reales, se obtiene que $|x| =+\sqrt{x^2}$.

Si fuera $y = -x < 0$, $- y = x > 0$, con lo cual, como $x = |x|$, $|x| = y > 0$. Luego debe ser $y =+\sqrt{x^2}$ es decir, $|x| =+\sqrt{x^2}$.

$$\therefore\ \forall x \in \mathbb{R}: |x| =+\sqrt{x^2}.$$

6) $|x.y| = +\sqrt{(xy)^2} =+\sqrt{x^2y^2}$ (por distributividad de la potenciación con respecto al producto). Como también la radicación es distributiva con respecto al producto, se tiene que: $+\sqrt{x^2y^2} =+\sqrt{x^2}\left(+\sqrt{y^2}\right)$. Entonces:

$$x.y| = +\sqrt{(xy)^2} =+\sqrt{x^2y^2} =+\sqrt{x^2}\left(+\sqrt{y^2}\right) = |x|.|y| \text{ (por propiedad 5)}$$

7) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 1$: $|x^1| = |x| = |x|^1$, puesto que todo número real es igual a su primera potencia.

HI: Supongamos que se cumple la igualdad $|x^n| = |x|^n$. Luego:
$|x^{n+1}| =^{19} |x.\, x^n| =^{20} |x|.|x^n| =^{21} |x|.|x|^n =^{17} |x|^{n+1}$

[17] Propiedad derivada 4
[18] Propiedad cancelativa de la suma en $\mathbb{R}$
[19] Definición de potenciación en $\mathbb{R}$
[20] Propiedad 6 de valor absoluto
[21] HI

8) Como $z \neq 0$. Entonces, $z^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$. Luego: $1 = z.z^{-1}$, de donde, $1 = |1| = |z.z^{-1}| =^{18} |z|.|z^{-1}| = |z|.\left|\frac{1}{z}\right|$. Luego: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(\bullet)$

Análogamente, $\left|\frac{x}{z}\right| = |xz^{-1}| =^{18} |x|.|z^{-1}| = |x|.\left|\frac{1}{z}\right| =^{(\bullet)} |x|.\frac{1}{|z|} = \frac{|x|}{z}$

9) Si $x \geq 0$, entonces, $-x \leq 0 \leq x = |x|$, con lo cual: $-|x| = -x \leq x = |x|$. En cambio, si $x < 0$, $-|x| =^{22} -(-x) =^{23} x < 0 \leq^{24} |x|$.

$\therefore \forall \in x \in \mathbb{R}$: $-|x| \leq x \leq |x|$

10) i) Supongamos, que $|x| \leq \alpha$ $(\bullet\bullet)$, entonces, por propiedad derivada 12, resulta: $-\alpha \leq -|x| \leq^{25} x \leq^{23} |x| \leq^{(\bullet\bullet)} \alpha$.

Recíprocamente, si : $-\alpha \leq x \leq \alpha$, se presentan dos posibilidades:

Si $x \geq 0$, $|x|\ 0\ x \leq \alpha$.

Si $x < 0$, como $x \geq -\alpha$, resulta que $-x \leq \alpha$ es decir, $|x| \leq \alpha$.

ii) Como $\neg(|x| \leq \alpha) \Leftrightarrow (|x| > \alpha) \wedge \neg(x \geq -\alpha \wedge x \leq \alpha) \Leftrightarrow (x < -\alpha \vee x > \alpha)$, de la validez de 10i resulta que: $|x| > \alpha \Leftrightarrow (x < -\alpha \vee x > \alpha)$.

iii) $|x| = \alpha \Leftrightarrow^{26} x = \alpha \vee -x = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \vee x = -\alpha$.

iv) $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow (|x| > \alpha \vee |x| = \alpha) \Leftrightarrow^{27} (x < -\alpha \vee x > \alpha) \vee$
$\vee (x = \alpha \vee x = -\alpha) \Leftrightarrow^{28} (x < -\alpha \vee x = -\alpha) \vee (x > \alpha \vee x = \alpha) \Leftrightarrow (x \leq -\alpha \vee x \geq \alpha)$.

11) Es trivial que si $x = y = 0$, $|x + y| = 0 = 0 + 0 = |x| + |y|$. Por ello, supongamos que $x \neq 0$, luego por propiedades 1 y 2 de valor absoluto, se tiene que $|x| + |y| \geq |x| > 0$. Llamemos $\alpha = |x| + |y| > 0$.

Por propiedad 9:

$-|x| \leq x \leq |x|$ y también

$-|y| \leq y \leq |y|$ sumando miembro a miembro, por consistencia de la suma con respecto al orden, resulta que:

$-|x| -|y| = -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ es decir, $-\alpha \leq x + y \leq \alpha$ de donde, por la propiedad 10, $|x + y| \leq \alpha = |x| + |y|$.

---

[22] Definición de valor absoluto
[23] Propiedad derivada 4
[24] Propiedad 1 de valor absoluto
[25] Propiedad 9 de valor absoluto
[26] Definición de valor absoluto, según sea $x \geq 0$ o $x < 0$
[27] Propiedades 10 ii y 10iii de valor absoluto
[28] Propiedades asociativa y conmutativa de la disyunción lógica

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Carpeta Pedagógica (2012). Algebra. Axiomas de números reales. Accedido el 24/11/15. Disponible en:
http://matematica.carpetapedagogica.com/2012/03/axiomas-de-numeros-reales.html.

Gentile, E. (1981). Notas de Algebra I. EUDEBA. Argentina.

Noriega, R. (1999). Cálculo Diferencial e Integral. Editorial Docencia. Argentina.

Pérez González, F. (2008). Calculo Diferencial e Integral de funciones de una variable. Capítulo 1. Accedido el 12/02/2016. Disponible en:
http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf.

Podestá,R.; Tirao P. (2013). “Algebra. Una introducción a la Aritmética y a la Matemática Discreta” (Versión Preliminar). FAMAF. Universidad Nacional de Córdoba. Accedido el 12/03/16. Disponible en:
http://www2.famaf.unc.edu.ar/~meinardi/algebraI2014/LibroAlgebra.pdf

Rojo, A. (1996). Algebra I. El Ateneo. Argentina.