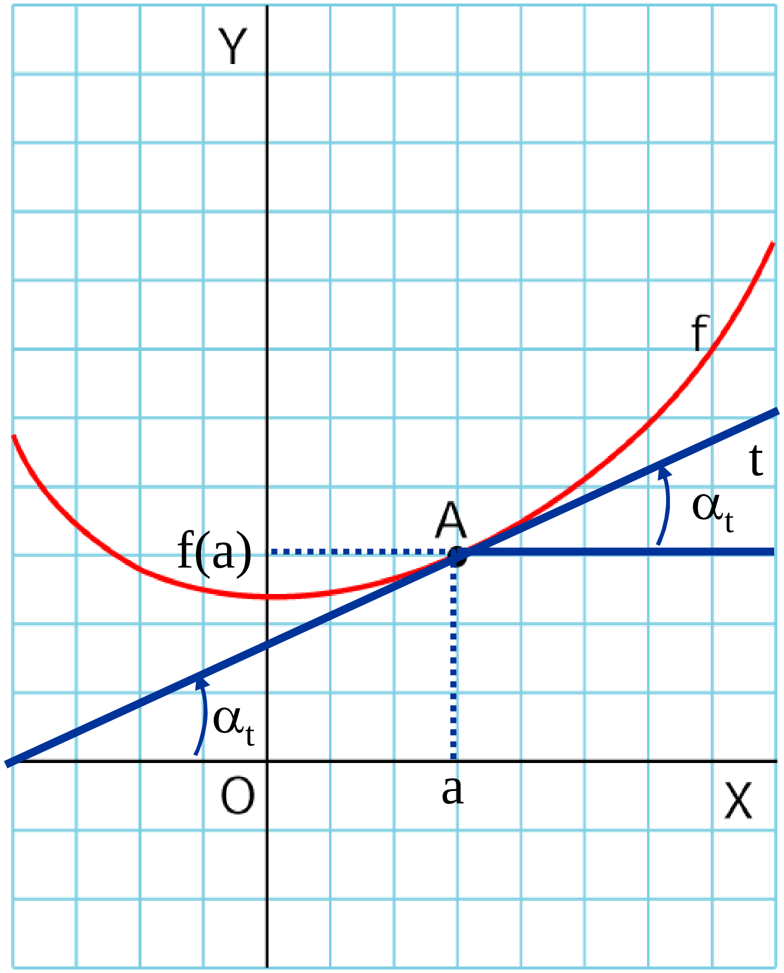
UNIDAD IV:
APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Ecuaciones de la tangente y la normal.
Máximos y mínimos relativos.
Determinación de los extremos relativos.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- Aplicaciones de la derivada para determinar las variaciones de un fenómeno o proceso.
- Los métodos para determinar los extremos relativos de una función.

Ecuación de la recta tangente



Ecuación de la recta que pasa por un punto A(a, b) y de pendiente *m*:

$$y - b = m\,(x - a)$$

Entonces:

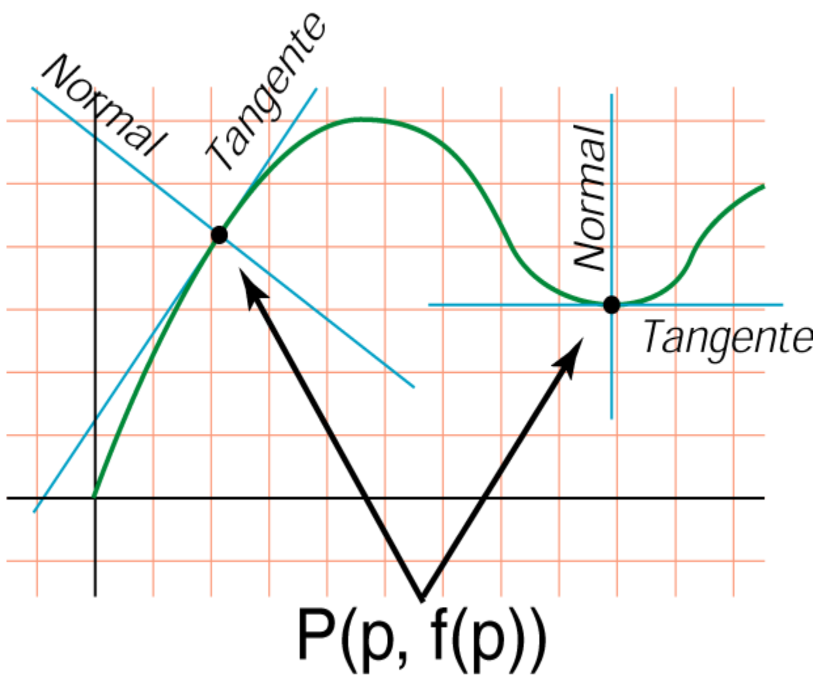
- Pendiente de la tangente $m_t = f\,'(a)$
- Ecuación de la recta tangente t

$$y - f(a) = f\,'(a)\,(x - a)$$

Ecuación de la recta normal

Ecuación de una recta que pasa por un punto P(p,f(p)) y de pendiente *m*:

$y - f(p) = m\,(x - p)$



Entonces:

Pendiente de la tangente: $m_t = f\,'(p)$

Ecuación de la recta tangente:

$y - f(p) = f\,'(p)\,(x - a)$

Pendiente de la normal:

$m_n = -1/f\,'(p)$

Ecuación de la normal:

$y - f(p) = [-1/f\,'(p)]\,(x - a)$


PRECAUCION
A 1000 MTS.
CALZADA DE RIPIO
80
MAXIMA

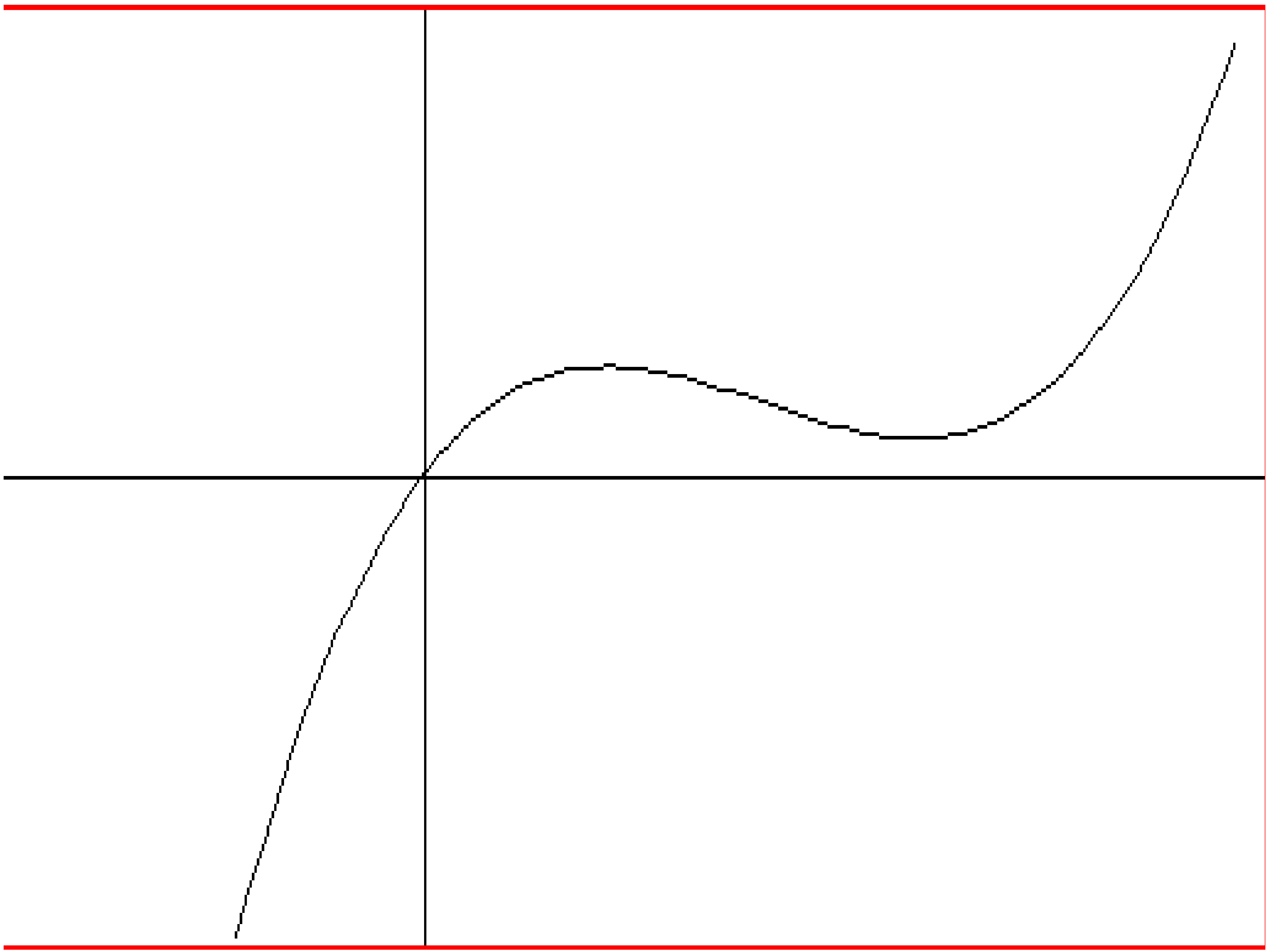

20
MAXIMA

El kilometraje de un auto, puede ser aproximado por:

$$m(v) = 0.00015v^3 - 0.032v^2 + 1.8v + 1.7$$

¿A qué velocidad debe conducirse para obtener el mayor rendimiento del combustible?

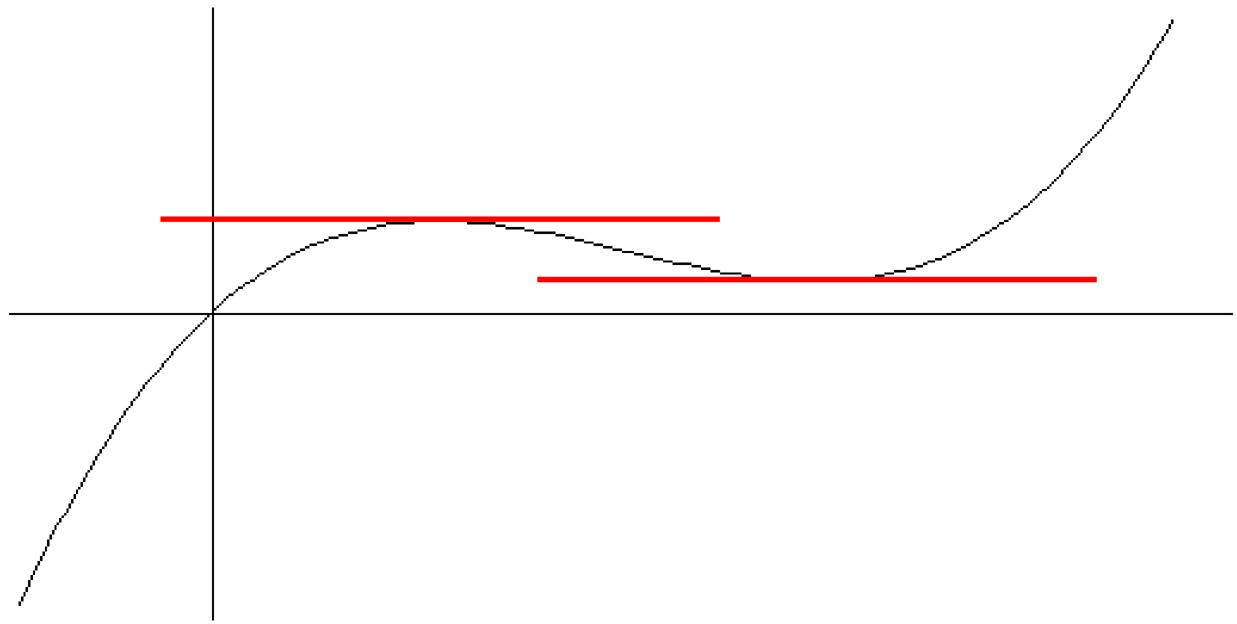
Por supuesto, este problema no es enteramente real, puesto que no es probable que Ud. necesite una ecuación de este tipo, para conducir su auto.



Con cualquiera de los graficadores disponibles, es posible buscar los valores máximos y mínimos de esta función.

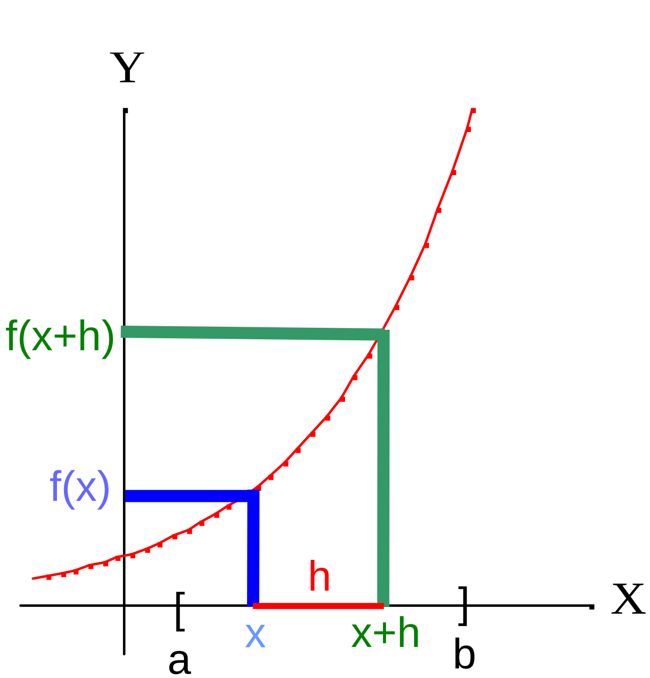
Así, el auto podrá recorrer aproximadamente 32 millas por galón, cuando conduce a 38.6 millas por hora.

Noten que en el mayor valor obtenido, la tangente a la curva es horizontal, o sea, posee pendiente cero.



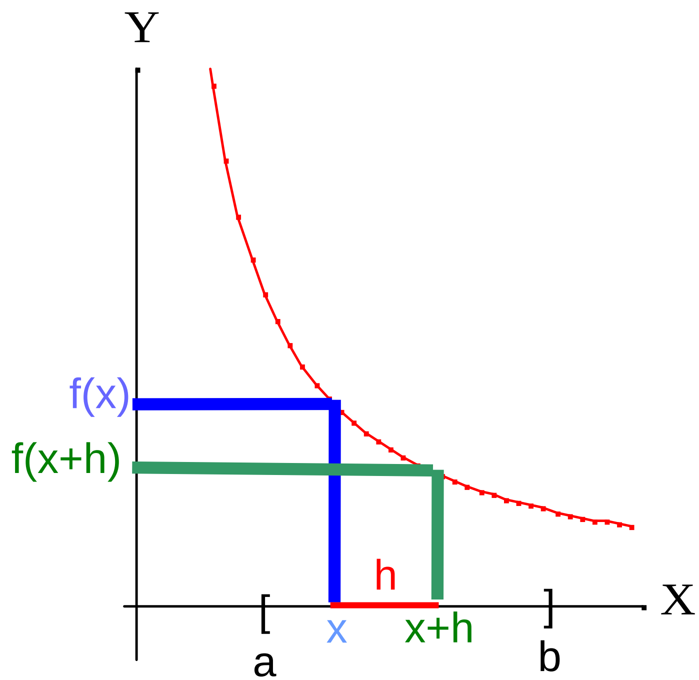
Tradicionalmente, este hecho ha sido usado tanto en la obtención del gráfico de una función, y como método para obtener los valores máximos (y mínimos) de una función.

Monotonía. Crecimiento y decrecimiento en un intervalo.



Función creciente en [a, b]

f(x) < f(x+h), en (x,x+h) y h >0



Función decreciente en [a, b]

f(x) < f(x+h), en (x,x+h) y h >0

Funciones Crecientes, Decrecientes y Constantes

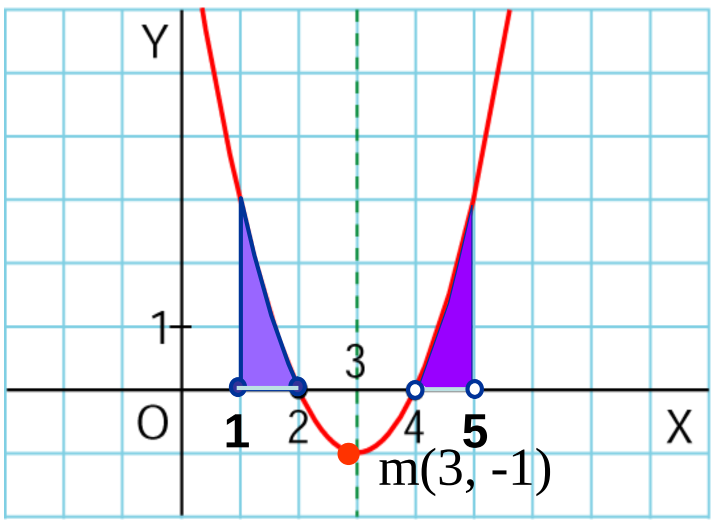
Si $f'(x) > 0$ para todo valor de x en el intervalo (a, b), entonces f es creciente sobre (a, b).

Si $f'(x) < 0$ para todo valor de x en el intervalo (a, b), entonces f es decreciente sobre (a, b).

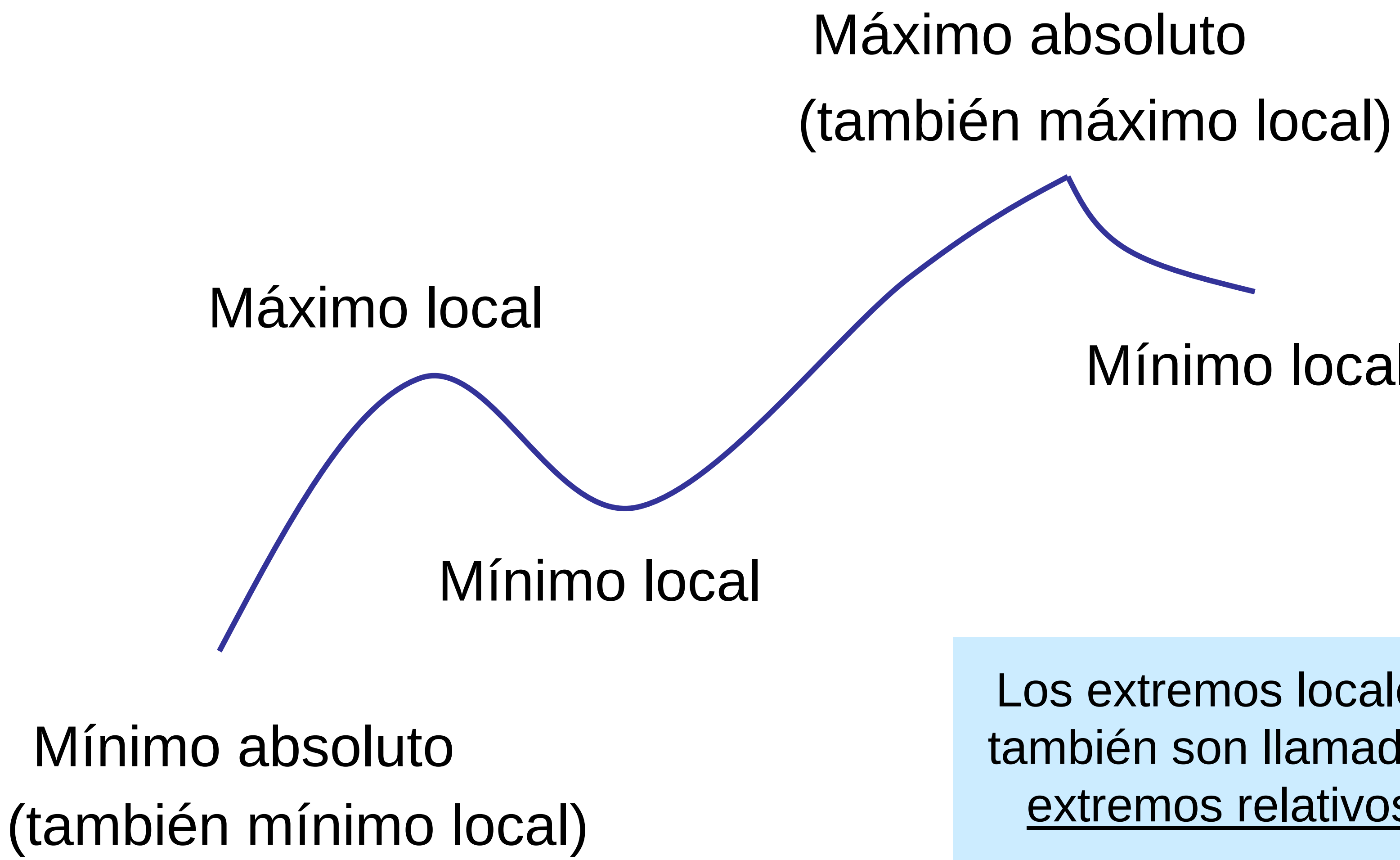
Si $f'(x) = 0$ para todo valor de x en el intervalo (a, b), entonces f es constante sobre (a, b).

Máximos y Mínimos Relativos

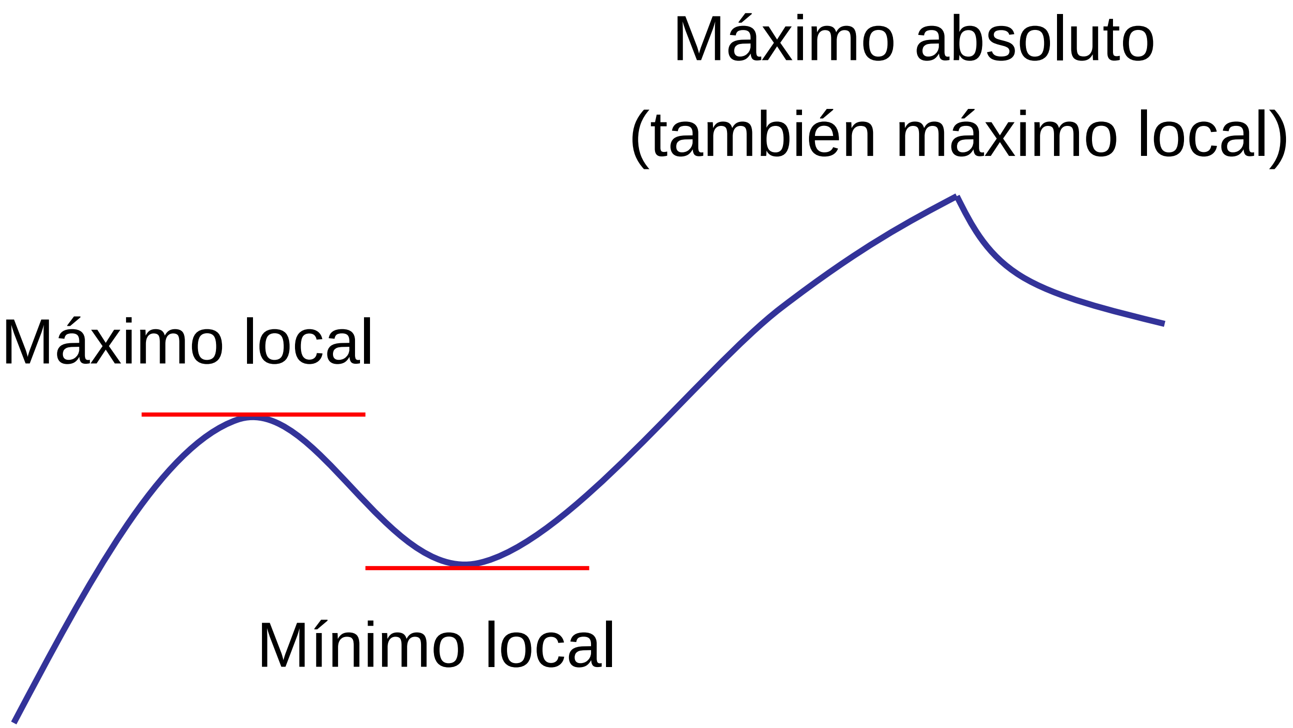
Una función f(x) tiene un máximo (mínimo) relativo en x=a si existe un intervalo abierto (a–h,a+h), h>0, en el que f(x)>f(a) (f(x)<f(a)) para todo x perteneciente al intervalo.



- La función $y = x^2 - 6x + 8$ tiene un mínimo relativo en el punto m(3,-1). No tiene máximos relativos.
- La función $y = x^2 - 6x + 8$ tiene un mínimo absoluto en su dominio, **R**, en el punto m(3,-1). No tiene máximo absoluto en su dominio.
- La función $y = x^2 - 6x + 8$ tiene un mínimo absoluto en el intervalo [1,2], en el punto (2,0). En ese mismo intervalo tiene un máximo absoluto en el punto (1,3).
- La función $y = x^2 - 6x + 8$ no tiene máximos ni mínimos locales en el intervalo (4,5).



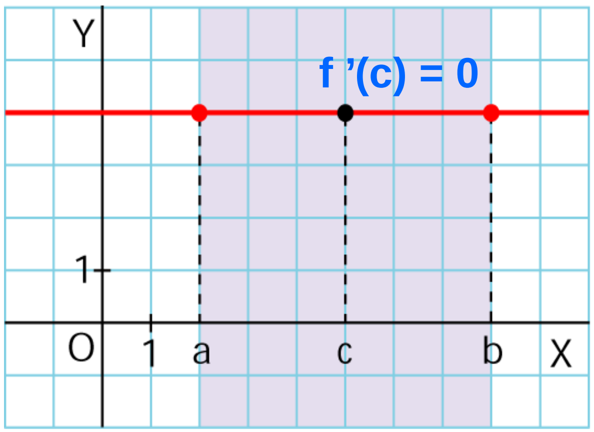
Los extremos locales, también son llamados, extremos relativos.

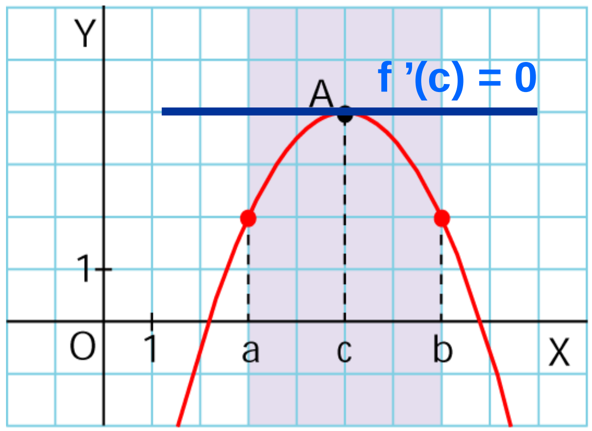


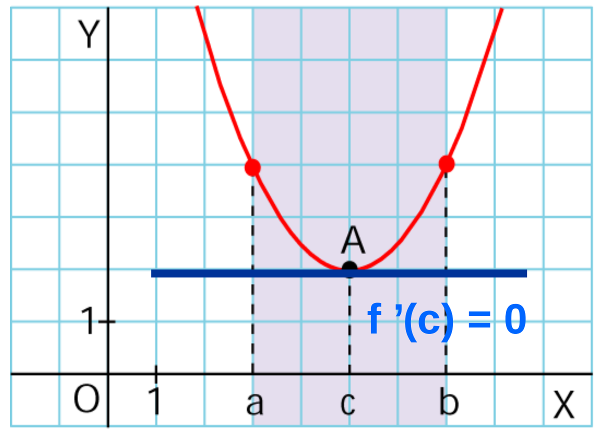
Noten que los extremos locales en el interior del intervalo donde está definida la función, ocurre donde la derivada es cero o no existe.

Derivada en un punto de máximo o de mínimo.
(Interpretación geométrica)

Sea la función f(x) definida en el intervalo (a,b). Analicemos el valor de la derivada f'(c) en el punto $c \in (a,b)$. A la izquierda y derecha del punto, ¿puedo afirmar algo?







Si la función es constante entonces f '(c)=0.

Si A es máximo, la tangente en x=c es horizontal. Su pendiente es 0.

Si A es mínimo, la tangente en x = c es horizontal. Su pendiente es 0.

Teorema de Fermat.

Sea la función f(x) definida en un intervalo (a,b) y tal que en un cierto punto $c \in (a,b)$ alcanza su valor máximo o mínimo en ese intervalo. Si la derivada $f'(c)$ existe, entonces $f'(c)=0$.

Geométricamente, este teorema significa que en un punto interior a un intervalo y que sea extremo relativo (máximo o mínimo) la tangente (si existe),es horizontal.

Demostración. Supongamos, que en el punto c la función alcanza su valor máximo en el intervalo (a,b), entonces se cumple

$$f(c) \geq f(x),\ x \in (a,b)$$

Esto significa que, si $x<c$, que el cociente incremental, será no negativo

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Pero, si $x>c$, entonces este cociente será no positivo

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Pasando al límite cuando x$\rightarrow$c se obtendrá que

$$f_{-}^{'}(c) \geq 0 \qquad\qquad f_{+}^{'}(c) \leq 0$$

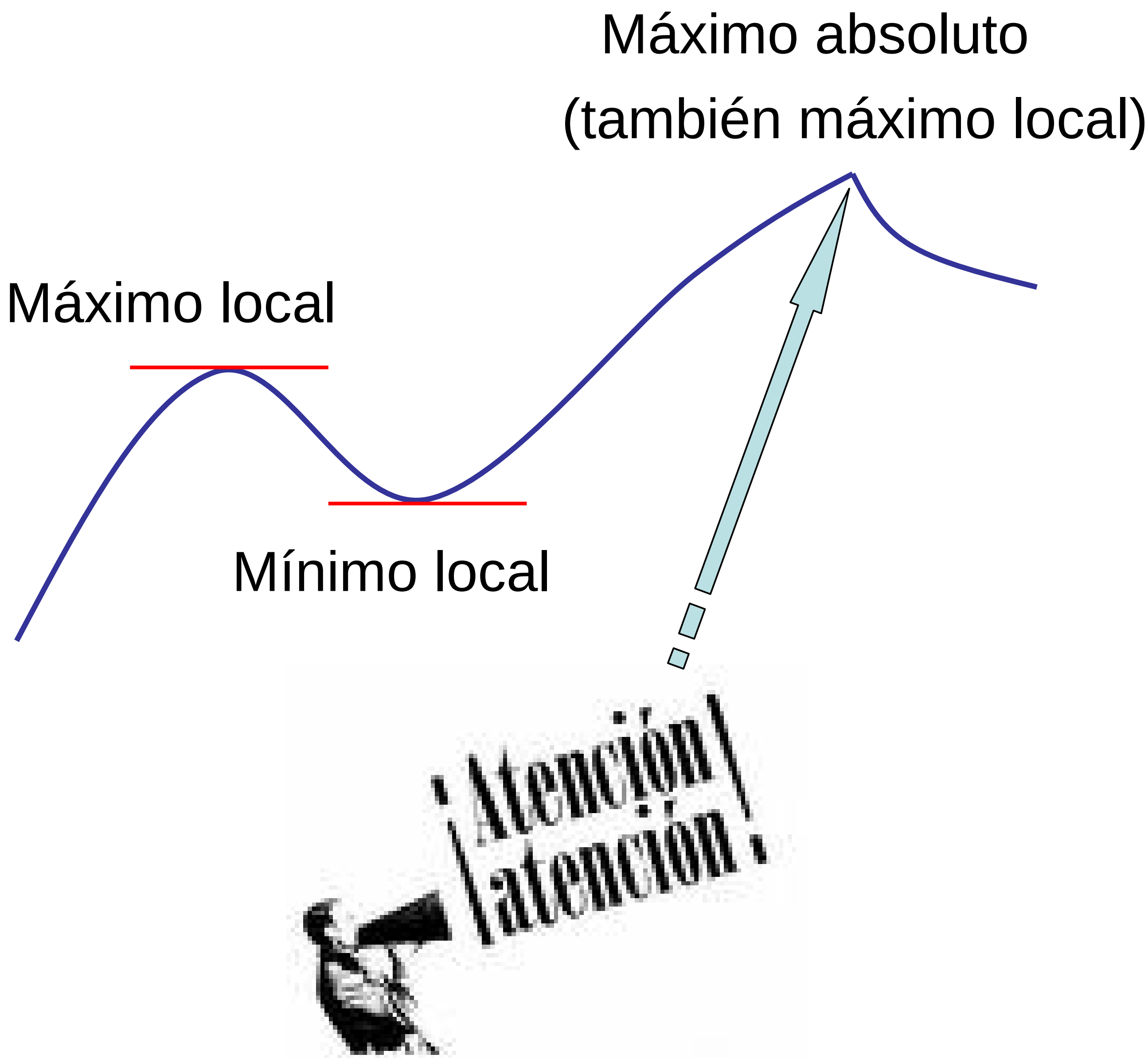
Pero f'(c) existe, ¿cómo tienen que ser las derivadas laterales en el punto?

$$f_{-}^{'}(c) = f_{+}^{'}(c) = f'(c) = 0$$

Observaciones.

1) Si suprimimos la hipótesis que el punto c sea interior al intervalo, el Teorema deja de ser cierto. Tomemos el caso de la función $f(x)=x$ sobre $(0,1]$, que toma su valor máximo en $x=1$ y en dicho punto la derivada lateral no se anula.

2) Puede darse un ejemplo sencillo de una función que alcanza su valor máximo en un intervalo, en un punto interior, y no tiene tangente en dicho punto. Así la función $y=1-|x|$ en $[-1,1]$ alcanza su valor máximo en dicho intervalo en $x=0$ y en ese punto no existe la derivada, por tanto, no hay recta tangente. Y para mínimo, ¿qué ejemplo pueden poner?


Máximo absoluto
(también máximo local)
Máximo local
Mínimo local
¡Atención
¡atención!

Puntos Críticos.

Un punto del dominio de una función en el cual f’=0 ó f’ no existe, se denomina **punto crítico** de la función.

Nota.

Los extremos relativos de una función siempre ocurren en puntos críticos, pero **los puntos críticos no son siempre valores de máximo o de mínimo**.

Ejemplo.

Encuentre los valores máximos y mínimo de la función $f(x) = x^{2/3}$ sobre el intervalo $[-2, 3]$.

$$f(x) = x^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

No existen valores de x, que anulen la primera derivada.

La primera derivada está indefinida en x=0, así (0,0) es un punto crítico.

Como la función está definida sobre un intervalo cerrado y acotado, también debemos chequear el valor de la función en los extremos.

$$f(x) = x^{2/3} \qquad D = [-2, 3]$$

En $x = 0$ $\quad f(0) = 0$

Para determinar si este punto crítico es un máximo o un mínimo, analicemos en una vecindad sin “pasar” otro punto crítico.

$$f(-1) = 1 \qquad f(1) = 1$$

Puesto que 0<1, este será un mínimo local y, posiblemente, un mínimo global.

En $x = -2$ $\quad f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} \approx 1.5874$

En $x = 3$ $\quad f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08008$

$$f(x) = x^{2/3} \qquad D = [-2, 3]$$

En $x = 0$ $\quad f(0) = 0$

Mínimo Absoluto	$(0, 0)$
Máximo Absoluto	$(3, 2.08)$

$$f(-1) = 1 \qquad f(1) = 1$$

En $x = -2$ $\quad f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} \approx 1.5874$

En $x = 3$ $\quad f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08008$


JUSTICE LEAGUE HEADQUARTERS
REST ROOMS

Determinación de Máximos y Mínimos Analíticamente.

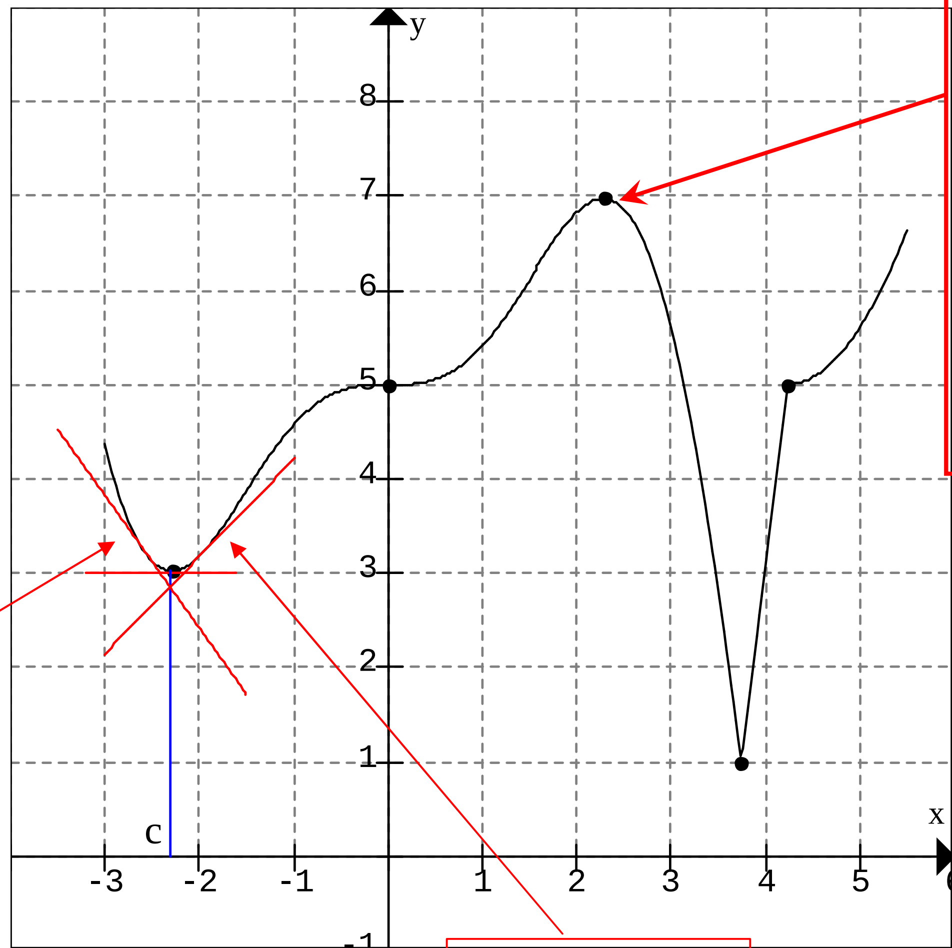
1. Encuentre la derivada de la función y determine donde la derivada es cero o está indefinida. Estos son los **puntos críticos**.

2. Encuentre, si es posible, el valor de la función en cada punto crítico.

3. Encuentre valores de la pendiente entre puntos críticos para determinar si el punto crítico es máximo o mínimo.

4. Para intervalos cerrados, chequee también, los extremos del intervalo.

Ampliación



Una observación similar es válida para el máximo local.

$$f'_{-} \leq 0$$

$$f'_{+} \geq 0$$

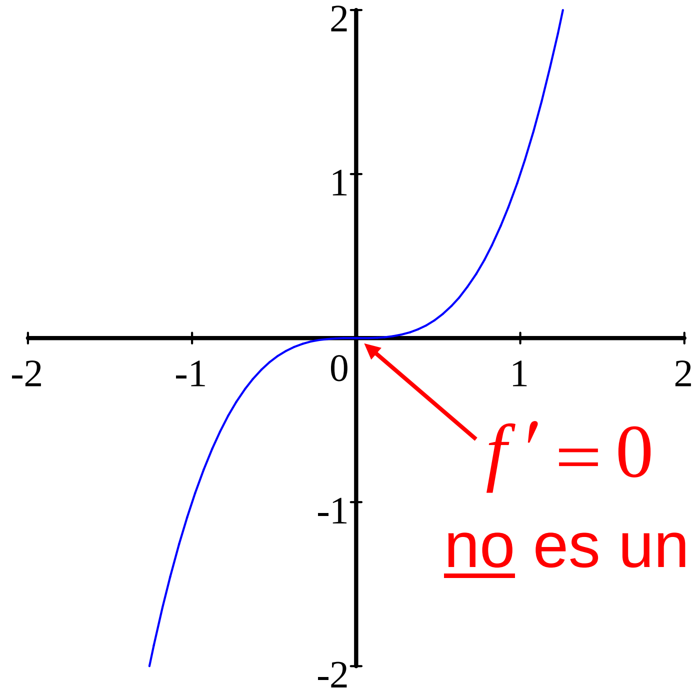
Criterio del signo de la Primera Derivada

Determine el signo de la derivada de la función a la izquierda y a la derecha del punto crítico.

izquierda	**derecha**	**conclusión**
$+$	$-$	$f(c)$ es un máximo local
$-$	$+$	$f(c)$ es un mínimo local
No cambia		No hay extremo local

Puntos críticos que no son extremos¡¡¡¡¡¡¡

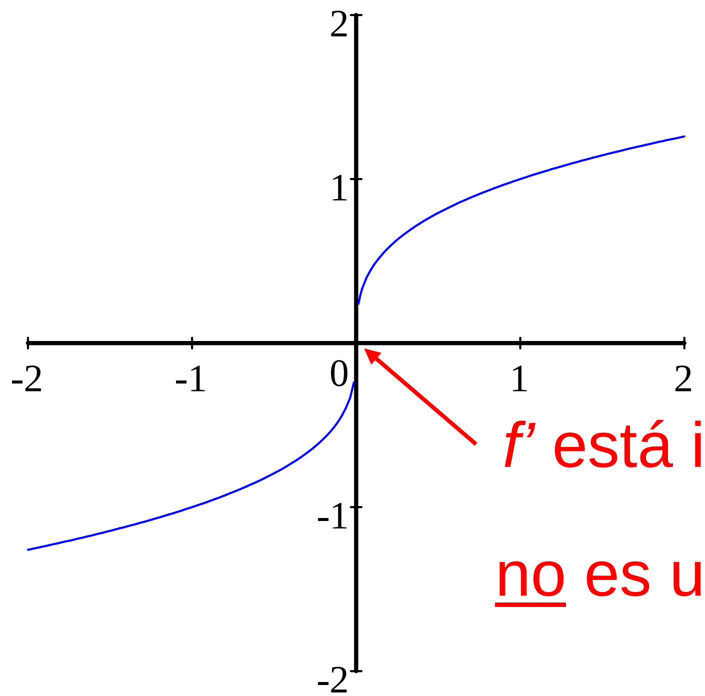
$$y = x^3$$



$f' = 0$

no es un extremo

$$y = x^{1/3}$$



f' está indefinida

<u>no</u> es un extremo