

Cálculo Algebraico

Patricia Kisbye
David Merlo



2 | CÁLCULO ALGEBRAICO

Este capítulo busca ofrecer herramientas elementales del Cálculo algebraico y abarca los siguientes temas: Los distintos campos numéricos, operaciones y propiedades; el uso de las letras en el álgebra y el planteo de problemas con lenguaje simbólico; ecuaciones lineales y cuadráticas, y resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cada sección contiene un desarrollo teórico del tema considerado, variedad de ejemplos y una completa lista de ejercicios de aplicación. Esperamos que los estudiantes lo encuentren accesible y útil para el propósito de revisión de contenidos aprendidos y de introducción a los estudios universitarios tal como fueron pensadas.

SECCIÓN 2.1

Los conjuntos numéricos y sus operaciones

§ Introducción

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que cambia en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna piedrita sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra "cálculo" significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos *sistemas de numeración*. A través de la historia se han usado distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como un combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición *aditiva*.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman *posicionales*.

Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente usamos tiene base 10, y por eso se llama *decimal*. Eso significa que podemos escribir números arbitrariamente grandes con tan sólo diez símbolos: 0, 1, 2, ..., 9. Así es como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, "dieciséis" está compuesto por las palabras "diez" y "seis", "treinta" hace alusión a "tres" veces 10.

Los números que se usan para contar se llaman números naturales: 1, 2, 3, ... Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de la Matemática. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que *no* hay, los números negativos para poder resolver todas las restas, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera quedaron definidos distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos.

Haremos en este capítulo un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

§ Números naturales

Los números que se usan para contar se llaman *números naturales*. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra \mathbb{N} . Para contar *un* elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación de *sumar*. Sumar 1 es nombrar al siguiente número natural. Por ejemplo, el siguiente del 5 es el 6, y por eso $6 = 5 + 1$. De esta manera y según este orden, los primeros naturales son:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

La operación de suma se extiende a todos los naturales. Así por ejemplo, como $2 = 1 + 1$, entonces $5 + 2$ es el "siguiente del siguiente de 5", es decir que $5 + 2 = 7$.

Para indicar que un número está *antes* que otro se usa el signo $<$, y se lee "menor que". Así por ejemplo, $2 < 5$ se lee "2 es menor que 5", e indica que 2 está antes que el 5. Del mismo modo, el símbolo $>$ se utiliza para indicar que un número está *después* que otro y se lee "mayor que".

La suma repetida de un mismo número se llama *multiplicación*, o también usaremos el término *producto*. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es

$$\begin{aligned} 8 + 8 + 8 + 8 + 8 &= 5 \cdot 8 \quad \text{y además} \\ \underbrace{8 + 8 + 8 + 8 + 8}_{5 \text{ veces}} &= \underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{8 \text{ veces}}. \end{aligned}$$

Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4.$$

En este caso, 8 se llama la *base* y 4 el *exponente*. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma.

Notemos por ejemplo que:

$$5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6, \quad \text{puesto que}$$

$$\underbrace{(5 \cdot 5)}_2 \cdot \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_4 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_6.$$

La multiplicación de dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

La *resta* entre dos números, por ejemplo, 10 y 2, es el número que hay que sumarle a 2 para obtener 10. Se denota con el signo $-$. Decimos entonces que

$$10 - 2 = 8 \quad \text{porque} \quad 8 + 2 = 10.$$

§ Números enteros

Ahora consideremos el siguiente problema:

Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3.

Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural *mayor* que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3 - 5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales.

La introducción de los *números enteros negativos* y el *cero* sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, el 0 es el número que sumado a cualquier natural da el mismo natural:

$$3 + 0 = 3, \quad 125 + 0 = 125.$$

Así queda definida la suma de un natural con el 0 y la resta entre dos naturales iguales:

$$3 - 3 = 0, \quad 125 - 125 = 0.$$

Además, para cada natural consideramos el *opuesto* como el número que sumado a él da 0. Así por ejemplo, el número que sumado a 1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el *opuesto* al número natural 1. El opuesto de 2 es -2 , el de 3 es -3 y así sucesivamente. Todos los opuestos de los números naturales se denominan *enteros negativos*, y a los naturales se los denomina *enteros positivos*. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los *Números Enteros*.

Además, así como -3 es el opuesto de 3, también decimos que 3 es el opuesto de -3 , y que el 0 es el opuesto de sí mismo. Las operaciones de suma y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto, y la resta queda bien definida entre cualquier par de números enteros. En efecto, la resta entre dos números enteros se define como la suma de un número y el opuesto del otro:

$$1 - 4 = 1 + (-4) = -3, \quad -7 - 15 = -7 + (-15) = -22.$$

Si bien la resta es una operación cerrada en el conjunto de los enteros, en el sentido que la resta de dos enteros es nuevamente un entero, *no* cumple con las propiedades asociativa ni conmutativa. Estas propiedades se van a presentar con detalle en la sección de números reales.

Al conjunto de los *números enteros* se lo representa con la letra \mathbb{Z} . Así como en los naturales existe un orden natural: $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, etc, en los enteros también hay un orden compatible con el de los naturales o desde una perspectiva más amplia para los números reales, que serán presentados más adelante. Los enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando 1 al número, y un *antecesor*, que se obtiene restándole 1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6-1 = -7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+1 = -5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots.$$

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de suma y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen para los números naturales. También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas para los enteros, excepto para 1 y -1 . En el conjunto de los números enteros, destacamos dos elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el 0 y el 1.

Propiedades del número 0

- *Elemento neutro para la suma:* Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7 + 0 = 7$, $-4 + 0 = -4$.
- *Multiplicación por 0:* La multiplicación por cero siempre da como resultado cero. Por ejemplo: $6 \cdot 0 = 0$, $(-3) \cdot 0 = 0$.
- *Potencia con exponente 0:* Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Por ejemplo: $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

Propiedades del número 1

- *Elemento neutro para la multiplicación:* Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número; por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$, $(-9) \cdot 1 = -9$ y $0 \cdot 1 = 0$.

Más adelante, en las clases de álgebra del primer año, se verá que esto implica la siguiente regla general:

Regla de los signos: La multiplicación entre dos enteros negativos o dos enteros positivos es un entero positivo. La multiplicación entre un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Los números enteros suelen representarse como puntos de una recta. Esto es, se eligen dos puntos distintos, uno representa el 0 y el otro el 1. Así se tiene un segmento unidad. Transportando este segmento hacia un lado de la recta se representan todos los enteros positivos, y hacia el otro todos los enteros negativos. Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún entero. La Figura 2.1 es una representación de algunos números enteros:

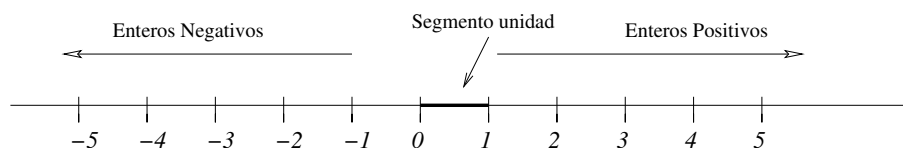


Figura 2.1: Representación de los números enteros en una recta

Valor absoluto

El valor absoluto de un entero positivo o cero es el mismo número, y el valor absoluto de un entero negativo es su opuesto. Se denota encerrando el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

La división entera

Hemos dicho que si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones de números enteros se obtienen números enteros, por lo que se dice que este conjunto es *cerrado* respecto a estas operaciones. Existe otra operación en el conjunto de los números enteros llamada la *división entera*. La *división entera* es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros y también en el de los naturales si le agregamos el 0. La división entera entre dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, permite hallar otros dos números enteros, llamados *cociente* y *resto*. El resto es un entero no negativo y menor que el *valor absoluto* del divisor, y tal que si se le suma el producto entre el divisor y el cociente se obtiene el dividendo.

Por ejemplo, la división entre 27 y 6 tiene como cociente 4 y como resto 3 pues

$$27 = 6 \cdot 4 + 3.$$

También, si dividimos -124 por -50 , entonces el cociente es 3 y el resto es 26 dado que

$$-124 = (-50) \cdot 3 + 26,$$

o si dividimos 1500 por 125 el cociente es 12 y el resto es 0 puesto que $1500 = 125 \cdot 12 + 0$.

Si el resto de la división es 0 se dice que el divisor *divide* al dividendo, o que el dividendo es *divisible* por el divisor o que el dividendo es *múltiplo* del divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien, 4 es divisor de 8, u 8 es múltiplo de 4 puesto que $8 = 4 \cdot 2 + 0$.

Ahora bien, notemos que si bien el cociente entre 27 y 6 es 4, no es cierto que $4 \cdot 6$ sea igual a 27. Por lo tanto la *división entera* no es la *operación inversa a la multiplicación*. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 dé como resultado 3, en el conjunto de los números enteros no es posible resolver problemas tal como *hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 27*. Para solucionar este problema se introduce un nuevo conjunto numérico en la siguiente sección.

§ Números racionales

Siempre que medimos algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., utilizamos una *unidad de medida*. Así es que *medimos* cuántas veces cabe nuestra unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos *fraccionarla*. Es así como surgieron históricamente las *fracciones*. Siglos más tarde, a estas *fracciones* se les dio una categoría de *números*, ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo:

Hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2.

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos enteros, llamados *numerador* y *denominador* respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{-2}{8}, \quad \frac{0}{-5}, \quad \frac{3}{3}.$$

Toda fracción multiplicada por su denominador es igual al numerador. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{5}$ multiplicada por 5 es igual a 2:

$$5 \cdot \frac{2}{5} = 2. \quad (2.1)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.1) en ambos miembros por 2, obtenemos

$$10 \cdot \frac{2}{5} = 4.$$

Pero la fracción $\frac{4}{10}$ cumple la misma propiedad:

$$10 \cdot \frac{4}{10} = 4.$$

Notemos entonces que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ representan ambas al número que multiplicado por 10 es igual a 4. Esto sugiere que las fracciones

$$\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{4}{10}$$

resuelven ambas un mismo problema. Es por ello que se dice que estas fracciones son *equivalentes*.

Las *fracciones irreducibles* son aquellas cuyo numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo entero, excepto 1 y -1 . Estas fracciones tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo. Por ejemplo, $\frac{-10}{9}$ es una fracción irreducible, y algunas de sus fracciones equivalentes son:

$$\frac{10}{-9}, \quad \frac{-20}{18}, \quad \frac{-30}{27}, \quad \dots$$

Los *números racionales* se construyen a partir de los números fraccionarios, considerando a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Al conjunto de los *números racionales* se lo denota con la letra \mathbb{Q} e incluye al conjunto de números enteros, y por lo tanto a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, o cualquiera de sus equivalentes.

Los números racionales suelen expresarse en notación *decimal*, por ejemplo,

$$\frac{5}{10} = 0,5.$$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal *finita*, y se denominan *fracciones decimales*. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como 0,28. Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como 0,333..., y su período es 3. Para denotar el período se lo suele marcar con un arco \frown sobre él.

Así tenemos los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0,06; \quad \frac{6}{9} = 0,6666\dots = 0,6\widehat{6}; \quad \frac{3549}{990} = 3,58484\dots = 3,58\widehat{4}.$$

Una observación es que todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Por ejemplo, $1 = 0,9\widehat{9}$ ya que

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,3\widehat{3} = 0,9\widehat{9}.$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación decimal finita, o infinita periódica. Así por ejemplo,

$$\frac{7}{4}, \quad \frac{14}{8}, \quad \frac{35}{20}, \quad \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal finita 1,75. También,

$$\frac{14}{6}, \quad \frac{21}{9}, \quad \frac{35}{15},$$

se representan en notación decimal con $2,3\widehat{3}$.

Operaciones entre racionales

La suma y la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (la resta respectivamente) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}.$$

En particular, tenemos que

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

por ello decimos que $\frac{-2}{3}$ es el racional opuesto a $\frac{2}{3}$, y escribimos

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Si los denominadores son distintos el problema de sumar y restar fracciones se reduce a buscar dos fracciones del mismo denominador equivalentes a las dos fracciones dadas, por lo que la metodología se reduce a transformar las fracciones a común denominador. Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, buscamos un denominador que

sea múltiplo de 2 y de 3, como puede ser el 6:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

Entonces

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6} = \frac{7}{6}.$$

En este caso el denominador se obtuvo como la multiplicación de los denominadores, pero es suficiente encontrar un denominador que sea múltiplo común de los denominadores. Así, para restar $\frac{7}{12}$ y $\frac{8}{15}$, observamos que 60 es múltiplo de 12 y 15. Entonces

$$\frac{7}{12} - \frac{8}{15} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} - \frac{8 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 5 - 8 \cdot 4}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

La multiplicación entre dos racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo,

$$\frac{2}{7} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2 \cdot (-4)}{7 \cdot 3} = -\frac{8}{21}.$$

Observemos que las siguientes multiplicaciones tienen como resultado el número 1:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{6} = 1, \quad \frac{-5}{2} \cdot \frac{-2}{5} = \frac{10}{10} = 1.$$

Un número racional es el *inverso* de otro si la multiplicación entre ambos es igual a 1.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como igual a la potencia del inverso con el exponente cambiado de signo. Por ejemplo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

La *división* de un número racional por otro debe entenderse como la multiplicación del primero por el inverso del segundo. Por ejemplo, la división del número racional 3 por la fracción $\frac{5}{4}$ consiste en multiplicar 3 por $\frac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con dos puntos : o también con la línea de fracción:

$$3 : \frac{5}{4} = \frac{12}{5}; \quad \text{o también} \quad \frac{3}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{12}{5}.$$

La representación de los números racionales en notación decimal simplifica notablemente el cálculo en las operaciones, ya que se opera de manera similar a las operaciones entre enteros, teniendo siempre en cuenta la posición de la coma decimal. Por otro lado, también simplifica la comparación entre dos números racionales.

Por ejemplo, no es obvio a simple vista cuál de los siguientes racionales es mayor: $\frac{15}{8}$ o $\frac{17}{10}$. Sin embargo, si los escribimos en notación decimal es sencillo notar que 1,675 (igual a quince octavos) es menor que 1,7.

Representación de los números racionales en la recta

Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta.



Figura 2.2: Representación de números racionales en una recta

Entre dos números enteros existe sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y -4 hay sólo 8 números enteros; pero cuántos números racionales hay? La respuesta es: ¡infinitos! Lo mismo ocurre para cualquier par de números racionales distintos que tomemos.

Para ver esto basta tomar el promedio entre ambos y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, tomemos el 0 y el 2. Ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2} = 1$. El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Calculemos ahora el promedio entre 1 y 0: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Nuevamente obtenemos un número racional; y repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32} \dots$$

Significa esto que si representamos todos los números racionales en una recta, habremos "llenado" toda la recta? Veremos que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que usemos, siempre quedarán puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

§ Números irracionales

Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales.

Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad entren un número entero de veces en la diagonal. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales son menores y cuáles mayores que él.¹

¹La demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional no será tema de este Curso, y se estudiará en las asignaturas de Álgebra

La Figura 2.3 muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta: el arco de circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con el número $\sqrt{2}$:

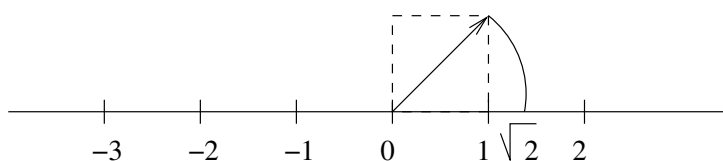


Figura 2.3: Ubicación en la recta numérica de $\sqrt{2}$

Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es *infinita no periódica*. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

$$235,10110111011110111110111111011111110111111011\dots$$

representa un número irracional porque no puede identificarse un "período" en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como dijimos, un conjunto infinito. Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son π : razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro, e : número de Neper y base del logaritmo natural y M : logaritmo en base 10 del número e . Los primeros 15 dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

$$\pi = 3,141592653589793\dots$$

$$e = 2,718281828459045\dots$$

$$M = \log_{10}(e) = 0,434294481903252\dots$$

§ Números reales

El conjunto de los números reales se simboliza con \mathbb{R} y está formado por todos los números racionales e irracionales. Este conjunto está en biyección con los puntos de una recta. Esto significa que si consideramos una recta, entonces es posible hacer corresponder a cada número real un punto de la recta, y a cada punto de la recta un único número real. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en los reales. Además todo número real distinto de cero tiene un inverso. El inverso de un número racional distinto de 0 es un número racional, y el inverso de un número irracional es un número irracional.

Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Notemos que las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \quad (-2)^4 = 16, \quad 3^4 = 81.$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y -4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4, \quad \text{y} \quad -\sqrt{16} = -4.$$

En general, para cualquier número positivo a , definiremos la raíz cuadrada positiva de a como el número positivo b tal que $b^2 = a$, y lo denotaremos $b = \sqrt{a}$.

$$b = \sqrt{a} \quad \text{si } b \text{ es positivo y } b^2 = a.$$

De manera análoga definimos la raíz cuarta positiva, raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad -\sqrt[6]{64} = -2, \quad \sqrt{100} = 10.$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Para denotar la radicación con índice natural también se utiliza la notación con exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}},$$

y de esta manera se puede extender la definición de potenciación de un número real positivo con cualquier exponente racional:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}, \quad 12^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}.$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de este curso. La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos. Conjunto numérico el cual será introducido más adelante.

Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la suma y la resta. Por ejemplo $(3+5)^2 = 64$ y $3^2 + 5^2 = 34$ por lo cual $(3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2$. Asimismo $(3-5)^2 = 4$ y $3^2 - 5^2 = -16$ por lo que $(3-5)^2 \neq 3^2 - 5^2$.

La siguiente propiedad es conocida como **diferencia de cuadrados**: La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos.

Así por ejemplo,

$$(3^2 - 5^2) = (3 - 5)(3 + 5).$$

Para estos números no hay mayor dificultad entre resolver la diferencia de los cuadrados ($3^2 - 5^2 = 9 - 25$) o la multiplicación entre la diferencia y la suma de los números ($(3 - 5)(3 + 5) = (-2) \cdot 8$).

Pero si se desea calcular

$$821^2 - 820^2$$

entonces es más sencillo resolver $(821 - 820)(821 + 820) = 1641$ que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 820.

Listamos a continuación algunas propiedades de las operaciones en los números reales:

Propiedad conmutativa. Intercambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación no afecta el resultado.

$$5 + 6 = 6 + 5 = 11 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Propiedad asociativa. El orden en que se agrupan los términos de una suma o los factores en una multiplicación no altera el resultado.

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9, \quad 2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24.$$

Propiedad distributiva. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, en tanto que la potencia es distributiva con respecto al producto y la división.

$$\begin{aligned} (2 + 1) \cdot 3 &= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 & (2 - 1) \cdot 3 &= 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3, \\ (3 \cdot 4)^2 &= 3^2 \cdot 4^2, & (6 : 2)^3 &= 6^3 : 2^3. \end{aligned}$$

Propiedad de las potencias. El producto y el cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, siendo los exponentes iguales a la suma y a la diferencia de los exponentes, respectivamente.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7, \quad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Propiedad de las raíces. La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente.

$$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}, \quad \sqrt[4]{81 : 16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}.$$

Recalcamos que cada propiedad se satisface además en los otros conjuntos numéricos, siempre que tengan sentido en el mismo. Por ejemplo:

$$\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18},$$

es cierta en el conjunto de los números reales, pero no lo es en el conjunto de los racionales, puesto que ni $\sqrt{2}$ ni $\sqrt{18}$ son racionales.

Valor absoluto

Al igual que lo definimos para los números enteros, el valor absoluto de un número real positivo o cero se define como el mismo número, y el de un número negativo es su opuesto. En cualquier caso se denota encerrando entre barras al número. Así por ejemplo,

$$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}, \quad |\pi| = \pi.$$

Podemos además calcular el valor absoluto del resultado de una operación aritmética:

$$|2 - 5 \cdot 3| = |-13| = 13, \quad |\sqrt[3]{-8} + 3| = |-2 + 3| = 1, \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}.$$

El valor absoluto no es distributivo con respecto a la suma, pero sí lo es con respecto al producto y a la potenciación. Entonces por ejemplo se cumple que:

$$|3 \cdot (-5)| = |3| \cdot |-5|, \quad |(-2)^5| = |-2|^5.$$

§ Números complejos

Es importante notar que en el conjunto de los números reales no está definida la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de -1 debería ser un número real que al cuadrado sea igual a -1 , pero esto no es posible porque el cuadrado de **cualquier número real** es positivo o es 0. Lo mismo ocurre si quisiéramos encontrar un número que al cuadrado sea igual a -2 , o -100 .

Para superar este problema se define la *unidad imaginaria*, denotada con la letra i , como el número con la propiedad que $i^2 = -1$. A partir de este número *imaginario* se construye el conjunto de números *complejos* como el formado por todas las expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Son ejemplos de números complejos los siguientes:

$$2 + 3i, \quad 4 - 4i, \quad -8 + 0i, \quad 0 + 7i.$$

Al conjunto de los números complejos se lo denota con la letra \mathbb{C} .

En un número complejo de la forma $a + bi$, se llama *parte real* al número a y *parte imaginaria* al número b . Así por ejemplo, $5 - \sqrt{2}i$ tiene parte real 5 y parte imaginaria $-\sqrt{2}$. En particular, los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Por ejemplo $7 = 7 + 0i$. Los números complejos cuya parte real es 0 se denominan *números imaginarios puros*, por ejemplo: $2i$. Los números imaginarios puros resuelven el problema de hallar las raíces cuadradas de números reales negativos. Por ejemplo, $2i$ y $-2i$ son las raíces cuadradas de -4 , puesto que $(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = -4$ y $(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = -4$.

Para cada número complejo $a + bi$, se define su *conjugado* como el número $a - bi$, y se lo denota $\overline{a + bi}$. Así por ejemplo:

$$\overline{2 - 3i} = 2 + 3i, \quad \overline{1 + 7i} = 1 - 7i, \quad \overline{-5 + 8i} = -5 - 8i.$$

Es decir, el conjugado de un número complejo tiene la misma parte real, y la parte imaginaria cambiada de signo. De esta definición se deduce que el complejo conjugado de cualquier número real es el mismo número real; por ejemplo: $\overline{-8} = -8$, mientras que el complejo conjugado de un número imaginario puro es el opuesto; por ejemplo: $\overline{-8i} = 8i$. En el conjunto de los números complejos están definidas las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La suma y la resta de dos complejos se realiza sumando (restando) las partes real e imaginaria, respectivamente. Por ejemplo,

$$(3 + 5i) + (2 - i) = (3 + 2) + (5 - 1)i = 5 + 4i,$$

$$(3 + 5i) - (2 - i) = (3 - 2) + (5 - (-1))i = 1 + 6i.$$

En el caso de la multiplicación, se aplica la propiedad distributiva teniendo en cuenta la propiedad del número i :

$$(3 + 5i) \cdot (2 - i) = 3 \cdot 2 - 3i + 10i - 5i^2 = 6 + 7i + 5 = 11 + 7i.$$

Todo número complejo distinto de cero tiene un *inverso*. El inverso del número complejo $a + bi$ es $\frac{a - bi}{a^2 + b^2}$. En efecto,

$$(a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Así, el inverso de $3 - 4i$ es $\frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2}$, o más precisamente $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$.

De esta manera, al igual que para los números reales, se define la división por un número complejo no nulo

como la multiplicación por su inverso. Así por ejemplo:

$$\frac{2-3i}{3-4i} = (2-3i) \cdot \frac{3+4i}{25} = \frac{(6+12) + (8-9)i}{25} = \frac{18-i}{25} = \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i.$$

Volveremos sobre los números complejos cuando tratemos la resolución de ecuaciones de segundo grado. Allí nos será útil aplicar las siguientes propiedades:

- La suma de un número complejo y su conjugado siempre es un número real.

$$a + bi + (a - bi) = 2a.$$

- La multiplicación entre un número complejo y su conjugado siempre es un número real, no negativo:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Ejercicios

1. Realizar los siguientes cálculos.

a) $3 - (-4 + \frac{5}{2}) =$

b) $\frac{-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{5} \right)}{-3} =$

c) $\frac{-\frac{2}{3} + \frac{5}{2}}{-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} =$

d) $-\frac{4}{5} \left(\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{2}} \right) =$

e) $\frac{\frac{2}{7} + \frac{1}{13} \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{2} \right)}{(-2)\frac{1}{5} + \frac{3}{5}} =$

f) $\frac{-2}{\frac{2}{3} - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(-3 + \frac{4}{3} \right)}{-\frac{1}{6}} =$

2. Resolver las siguientes operaciones:

a) $(5 + 2 \cdot (-4))^2 : (-3) - (5 \cdot (-4) + (-6)) - (-1)^2 =$

b) $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} \right) \right) =$

c) $\left(2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} \right) \cdot \frac{1}{18} - 2 \cdot \frac{1}{6} =$

d) $-\frac{1}{6} + \frac{20}{7} \cdot \left(-\frac{14}{5} \right) - \frac{\frac{16}{15}}{-\frac{2}{5}} =$

e) $-\frac{4}{\frac{1}{5} + 6} - \frac{-\frac{1}{31} + 1}{-\frac{1}{2}} =$

f) $(3^{-2} + 2^{-1}) =$

g) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} =$

$$h) \left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} + 1}{1 - \frac{2}{3 - \frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{3}} =$$

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlos en una recta numérica:

$$\frac{9}{4}; \quad -\frac{2}{3}; \quad -\frac{6}{5}; \quad \frac{7}{3}; \quad -\frac{7}{4}$$

4. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales y ubicarlos en la recta numérica:

$$\sqrt{\frac{4}{5}} \quad \sqrt{12} \quad \pi \quad \sqrt{3} \quad 4,\widehat{3}$$

5. Representar gráficamente en la recta numérica:

- a) los números enteros entre $-5,3$ y $10,5$,
 - b) los números naturales entre $-5,3$ y $10,5$,
 - c) los números racionales entre $-5,3$ y $10,5$,
 - d) los números reales entre $-5,3$ y $10,5$.
6. Determinar, sin hacer la división de numerador por denominador, cuáles de los siguientes números racionales tienen una representación decimal finita y cuáles no.

$$\frac{37}{5}, \quad \frac{19}{3}, \quad \frac{57}{6}, \quad \frac{270}{75}, \quad \frac{28}{700}, \quad \frac{521}{124}.$$

7. Realizar los siguientes cálculos.

$$a) 12121212125^2 - 12121212124^2, \quad b) (25299999 - 25300001)^2.$$

8. Escribir al menos 10 números racionales que estén comprendidos:

$$a) \text{ entre } 0 \text{ y } 1, \quad b) \text{ entre } \frac{1}{2} \text{ y } \frac{3}{5}, \quad c) \text{ entre } \sqrt{2} \text{ y } \sqrt{5}.$$

9. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes:

$$\begin{aligned} a) & (\sqrt{2} - 3)^2 + (\sqrt{2} + 3)^2 \text{ es un número irracional.} \\ b) & (\sqrt{2} - 3)^2 \cdot (\sqrt{2} + 3)^2 \text{ es un número entero.} \\ c) & (\sqrt[3]{9})^2 - (\sqrt[3]{8})^2 = ((\sqrt[3]{9}) - (\sqrt[3]{8}))((\sqrt[3]{9}) + (\sqrt[3]{8})) \\ d) & (\sqrt[3]{7} + 5)^2 = \sqrt[3]{49} + 25. \end{aligned}$$

10. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:

$$1^2 = (-1)^2, \text{ entonces vale que } \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2}. \text{ Simplificando, queda } 1 = -1.$$

11. Indicar si las siguientes igualdades son correctas. Para las incorrectas escribir a qué número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.

$$a) \sqrt{25+4} = \sqrt{25} + \sqrt{4} \quad c) \sqrt{(-4)^2} = -4 \quad e) \sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$$

$$b) (3+8)^2 = 3^2 + 8^2 \quad d) \frac{3}{4} + \frac{6}{9} = \frac{3+6}{4+9} \quad f) \sqrt[5]{(-8)^5} = -8$$

g) $\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}$

j) $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$

l) $(-8)^0 = -1$

h) $\frac{8}{6} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{9}$

m) $\pi^0 = 1$

i) $\left(-\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{(-6)^3}$

k) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$

n) $2^3 = 3^2$

12. Calcular el valor absoluto de los siguientes números:

$$3, \quad -3,5, \quad 4,32 \quad 0 \quad -0,4.$$

13. La distancia entre dos números reales se define como el valor absoluto de su diferencia. Así por ejemplo, la distancia entre -5 y $2,3$ es

$$d(-5; 2,3) = |-5 - 2,3| = 7,3.$$

Usando esta definición, determinar la distancia entre los siguientes pares de números:

a) $-3,5$ y 3 ,

b) 2 y $9,1$,

c) $-3,5$ y $-5,3$,

14. Calcular

a) $(5^{-2} + 12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

b) $(5^{-2})^{\frac{1}{2}} + (12^{-2})^{\frac{1}{2}} =$

15. Resolver sin utilizar calculadora:

a) $27^{\frac{2}{3}} =$

c) $8^{\frac{2}{3}} =$

e) $32^{0,4} =$

b) $49^{\frac{3}{2}} =$

d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} =$

f) $32^{-\frac{3}{5}} =$

16. Resolver las siguientes operaciones de números complejos:

a) $(2 + 3i) + (4 - 2i) =$

d) $(2 + 5i) - \overline{(2 + 5i)} =$

g) $i^4 =$

b) $(2 + 3i) - (4 - 2i) =$

e) $(1 + i) \cdot (1 - i) =$

h) $(-i) \cdot (2i) =$

c) $\overline{-3 + 2i} + 3 =$

f) $(1 + i) \cdot (2 - i) =$

i) $(1 + i)^6 =$

SECCIÓN 2.2

Expresiones algebraicas

§ Introducción

La importancia relevante del Álgebra es poder, a través de ella, escribir simbólicamente una determinada situación problemática mediante ecuaciones, desigualdades u otras expresiones matemáticas. También permite la generalización de un determinado tipo de problemas o situaciones haciendo uso de “letras” que representan números.

En este punto es conveniente diferenciar desde el principio que existen distintos usos de las letras en el álgebra. En algunos casos representan un número desconocido o *incógnita* que se desea averiguar. En otros casos

representan *constantes del problema*, las cuales no cambian en la situación planteada. También están las llamadas *variables* o *indeterminadas*, que como su nombre lo indica, adoptan distintos valores. En general en una misma situación aparecen dos o más variables y éstas están vinculadas por alguna relación. En otros casos las letras se utilizan para *generalizar* números, representando entonces a todo un rango numérico.

En este capítulo presentaremos algunos ejemplos a modo de ilustrar el uso de las letras en el álgebra. En particular nos referiremos a su uso para la generalización de fórmulas y propiedades numéricas, como representación de incógnitas en ecuaciones, y en polinomios en una variable.

Estos no son los únicos usos que se dan a las letras en el álgebra, también pueden representar parámetros, nombres de funciones, vectores, puntos, y muchos más. Más aún, algunos números particulares tienen una representación acordada de manera universal una letra reservada para ellos, como es el caso de algunos números irracionales: π y e . En este capítulo analizaremos algunas situaciones problemáticas y para cada una de ellas plantearemos una expresión algebraica que la represente.

Una *expresión algebraica* es aquella en la que aparecen letras y números ligados con las operaciones numéricas usuales. Algunos ejemplos son:

$$\begin{aligned} a^3 - 5x = 2, \quad \Delta = b^2 - 4ac, \quad a + b, \quad x^2 \leq y, \\ 3\sqrt{x} - 2, \quad x^3 + 30, \quad 81(\sqrt[3]{x})^4 + x. \end{aligned}$$

Usualmente, para representar constantes o datos se utilizan las primeras letras del abecedario o del alfabeto griego (a, b, c, \dots , o $\alpha, \beta, \gamma, \dots$), mientras que para representar variables o incógnitas suelen usarse las últimas letras (x, y, z, w, \dots). No obstante recalamos que la elección de las letras no siempre es esa.

§ Generalización de fórmulas y propiedades numéricas

Para expresar simbólicamente la suma entre los números 5 y 3, escribimos la fórmula $5 + 3$. Para representar que esta suma es conmutativa, escribimos $5 + 3 = 3 + 5$. Ahora bien, para indicar que la suma es conmutativa cualquiera sean los números que intervengan en la operación, resulta materialmente imposible explicitarlo para cada par de números en particular. Entonces podemos utilizar letras, a y b por ejemplo, para simbolizar los números y escribir:

$$a + b = b + a, \quad \text{para cualquier par de números } a, b.$$

En esta expresión algebraica a y b representan números, no necesariamente distintos aunque las letras sean distintas. No son incógnitas, puesto que no nos interesa conocer el valor de a ni de b , simplemente nos sirven para *generalizar* una fórmula, $a + b$, y una cierta propiedad numérica que se cumple para los números reales.

Otros ejemplos similares sirven para indicar la **propiedad asociativa del producto**:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a, b, c \text{ números reales,}$$

o la **propiedad distributiva del producto con respecto a la suma**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a, b, c \text{ números reales.}$$

Otros enunciados pueden involucrar letras y números en particular. Por ejemplo, decimos que 5 es el siguiente o sucesor de 4 porque $5 = 4 + 1$, y para enunciarlo de una forma general decimos que si n es un número natural entonces $n + 1$ es su **sucesor**. A su vez, para indicar la suma de un número con su sucesor escribimos $n + (n + 1)$.

Observemos que si utilizamos una letra a para representar cualquier número real, entonces a podría asumir

un valor positivo, negativo o 0. Así por ejemplo, $2a + 1$ puede representar $2 \cdot 100 + 1$ o $2 \cdot (-32) + 1$. Por otra parte, la expresión $-a$ simboliza al opuesto de a . Entonces si damos a a el valor -3 , entonces $-a$ representa al número 3.

§ Incógnitas y ecuaciones

Las incógnitas de un problema son aquellos valores que interesan ser conocidos y no están explícitamente dados en el problema.

Ejemplo 1. Hallar el número que elevado al cubo es igual a 27.

En este problema existe una única incógnita, y tiene la propiedad de que su cubo es 27. Aún cuando es inmediato darse cuenta que se trata del número 3, este número no está dado en el problema explícitamente y por ello es una incógnita. Para plantear algebraicamente el problema simbolizamos con una letra a la incógnita, por ejemplo, x . Entonces x tiene la siguiente propiedad:

$$x^3 = 27. \quad (2.2)$$

No nos interesará en este capítulo resolver estas ecuaciones, sino comprender el uso de las letras para representar incógnitas. Veamos el siguiente caso.

Ejemplo 2. El área de un cuadrado menos el doble de lo que mide el lado es igual a 3. ¿Cuánto mide el lado?

Este problema aparenta tener dos incógnitas: el área del cuadrado y la longitud del lado. Pero debemos recordar de la geometría que el área de un cuadrado es igual a la longitud del lado elevada al cuadrado. Así, si denotamos con x a la longitud del lado nuestro problema se plantea algebraicamente de la siguiente manera:

$$x^2 - 2 \cdot x = 3. \quad (2.3)$$

Las expresiones (2.2) y (2.3) que hemos obtenido en los ejemplos anteriores: $x^3 = 27$, y $x^2 - 2x = 3$, no son identidades que se cumplen para todo valor de x sino que sólo son ciertas para algunos valores de x , o quizás para ninguno. La presencia del signo $=$ no indica que las expresiones a cada lado sean iguales. Por el contrario, se pretende hallar los valores de las incógnitas que hagan cierta dicha identidad, y este tipo de igualdades se denominan ecuaciones.

Una *ecuación* es una igualdad entre expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas. Los valores de las incógnitas que verifican la igualdad son las *soluciones* de la ecuación.

Así tenemos que 3 es una solución de la ecuación (2.2), mientras que 3 y -1 son soluciones de la ecuación (2.3)². Pero ¡atención!, sólo 3 es solución del segundo problema, porque -1 es negativo y no puede ser la medida del lado de un cuadrado. Esto es importante, al resolver la expresión algebraica, debemos asegurarnos que estas soluciones tengan sentido en nuestro problema.

En algunos casos la ecuación puede involucrar letras que no son incógnitas sino que generalizan números. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - ax = 0, \quad a \text{ un número real cualquiera,}$$

²La resolución de ecuaciones de segundo grado es tema de un capítulo posterior.

representa en realidad una familia de ecuaciones, una para cada valor de a . Vemos en este caso que a y 0 son soluciones de la ecuación. Esto significa que si tomamos un valor de a específico, por ejemplo $a = 5$, entonces

$$x^2 - 5x = 0$$

tiene dos soluciones: 5 y 0 . Pero para un valor diferente de a , por ejemplo $a = -2$, las soluciones de $x^2 + 2x = 0$ son -2 y 0 .

Ejemplo 3. Dar el área de un rectángulo conocida la longitud de un lado y una diagonal.

Si bien no hay datos numéricos en el problema, lo que se busca es hallar una relación entre el área del rectángulo A y la medida de un lado l y una diagonal d . En principio sabemos que el área A es igual al producto de las longitudes de dos lados consecutivos del rectángulo, digamos

$$A = L \cdot l.$$

A uno de estos lados (cualquiera de ellos) se lo denomina *base* y al otro *altura*.

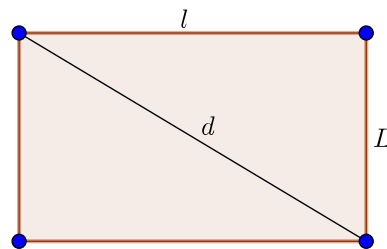


Figura 2.4: Ejemplo 4

Por el Teorema de Pitágoras sabemos que $L^2 + l^2 = d^2$, y por lo tanto $L = \sqrt{d^2 - l^2}$. Así, la fórmula $A = l \cdot \sqrt{d^2 - l^2}$ nos permite determinar el área A de un rectángulo en términos de un lado y una diagonal, cualquiera sea el rectángulo.

Ejemplo 4. En la compra de un libro de Física y uno de Álgebra se gastaron \$4.000, pero el de Física costó \$1.000 más que el de Álgebra. ¿Cuál fue el precio de cada libro?.

Aquí aparecen dos incógnitas a resolver, el precio de libro de Álgebra y el precio del libro de Física. Convengamos en representar la primera incógnita con la letra a y la segunda con la letra f .

Dado que los dos libros cuestan \$4.000, significa que la suma de sus precios es 4000. Esto lo simbolizamos: $f + a = 4000$.

Asimismo, como el precio del libro de Física es \$1.000 más que el de Álgebra, lo simbolizamos $f = a + 1000$, o también $f - a = 1000$.

El planteo del problema exige que ambas ecuaciones sean satisfechas, y por lo tanto algebraicamente debemos plantear un sistema de ecuaciones, que aprenderemos a resolver más adelante:

$$\begin{cases} f + a = 4000 \\ f - a = 1000 \end{cases}$$

En las ecuaciones las incógnitas pueden estar afectadas por potencias, radicaciones, o presentarse en un cociente, como en los siguientes casos:

$$3\sqrt{x} - 2 = 10, \quad \frac{1}{x^3 + 30} = 3, \quad 81(\sqrt[3]{x})^4 + 2 = 18.$$

Ejemplos similares a estos serán retomados cuando tratemos la resolución de expresiones algebraicas fraccionarias.

Despejar incógnitas

Con cierta frecuencia nos encontramos con el problema de tener que obtener el valor de una determinada incógnita, la cual se encuentra combinada con números y/o constantes en una misma ecuación. Por ejemplo, queremos determinar la incógnita x en la ecuación

$$2n + x = \sqrt[5]{x-7}, \quad (2.4)$$

siendo n una constante del problema.

No siempre es sencillo determinar la incógnita, en particular (2.4) es una fórmula un tanto complicada. De hecho, no existe ninguna receta o procedimiento estándar que permita despejar la incógnita en cualquier ecuación. Los pasos a seguir dependerán de la estructura y de las operaciones algebraicas involucradas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{1}{x+2} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x} + 2 = 3$$

involucran los mismos números, letras y operaciones, pero la estructura en la que aparecen son distintas, y por lo tanto el procedimiento para despejar la incógnita será diferente.

En todos los casos, la manera de determinar el valor de la incógnita es realizar distintas operaciones en ambos miembros de la ecuación respetando la *propiedad uniforme de la igualdad*, hasta obtener una ecuación en la que la incógnita aparezca "sola" en uno de los miembros y no aparezca en el otro miembro. En este punto diremos que hemos *despejado* la incógnita.

Propiedad uniforme: Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o se los multiplica por un mismo número, la igualdad se mantiene.

Al aplicar la propiedad uniforme es frecuente decir que *llevamos o pasamos* un término de un miembro al otro. Debemos recordar siempre que la acción de *pasar de miembro* en una ecuación es un resultado de aplicar la propiedad uniforme de la igualdad.

Por ejemplo, es frecuente cometer errores como el siguiente. En la ecuación

$$\frac{1}{x+2} = 3 \quad (2.5)$$

x "está sumando", y por lo tanto "pasa restando", resultando la ecuación

$$\frac{1}{2} = 3 - x.$$

Eso no es correcto, ya que si restamos x en el segundo miembro debimos restar x en el primero. Pero:

$$\frac{1}{x+2} - x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto no se trata de tener en cuenta la operación en la que está directamente involucrada la incógnita, sino de la estructura y las prioridades de las operaciones que aparecen en el miembro de la ecuación correspondiente.

Una forma de no equivocarse en el procedimiento de despejar la incógnita es analizar la expresión de afuera hacia dentro, como en "cáscaras de cebollas". Así, en el miembro izquierdo de la ecuación (2.5) la operación principal es una división, y la incógnita aparece en el divisor. Entonces es conveniente multiplicar por el divisor en ambos miembros:

$$\frac{1}{x+2} \cdot (x+2) = 3 \cdot (x+2).$$

De este modo resulta la ecuación $1 = 3 \cdot (x+2)$, o bien $1 = 3x+6$. Ahora x está afectada a una multiplicación. Sin embargo la operación fundamental en el miembro en que figura x es la suma. Restamos en ambos miembros el término 6 y obtenemos $-5 = 3x$, y dividiendo ambos miembros por 3 llegamos a la solución $x = -\frac{5}{3}$.

Ejemplo 5. Despejar a de la siguiente expresión: $y = -25 + 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1} \right)$.

Notemos que la letra a despejar, a , se encuentra en el segundo miembro de la ecuación. Miramos entonces a este miembro como un todo, y notamos que es una suma de dos términos:

$$y = \left(-25 + 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1} \right) \right)$$

Luego restamos a ambos miembros el término que no contiene a la incógnita, y así este término dejará de aparecer en el segundo miembro: $y - (-25) = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1} \right)$

Ahora en el segundo miembro tenemos una multiplicación entre el número 8 y una expresión fraccionaria que involucra a la incógnita a despejar. Por lo tanto dividimos ambos miembros de la ecuación por 8, o lo que es lo mismo, multiplicamos por su inverso: $\frac{y+25}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}}{a^3+1} \right)$

Si estas dos expresiones a ambos lados del signo "=" son iguales, entonces también son iguales sus inversos. Entonces: $\frac{8}{y+25} = \frac{a^3+1}{\sqrt{2}}$

Ahora corresponde multiplicar ambos miembros por $\sqrt{2}$, de modo que resulta: $\frac{8\sqrt{2}}{y+25} = a^3 + 1$.

Ya lo que resta por hacer es muy simple. Restamos 1 en ambos miembros y extraemos la raíz cúbica a ambos miembros. Queda entonces la incógnita despejada de la siguiente manera:

$$a = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2}}{y+25}} - 1.$$

§ Polinomios

Las expresiones algebraicas formadas por el producto entre un número real y una potencia de una letra x con exponente natural o cero se denominan *monomios* en x . El número real que multiplica a la potencia de x es el *coeficiente* del monomio y la letra es la *indeterminada*. Por ejemplo, $3x^5$, $-x^7$ son monomios en x , mientras que $3z^5$, z^7 son monomios en z . Para simplificar la notación en esta sección trabajaremos sólo con monomios en la indeterminada x .

Un número real es un monomio en el cual la indeterminada x tiene exponente 0:

$$3 = 3x^0,$$

en particular, si el coeficiente es 0 el monomio resulta 0:

$$0x^2 = 0, \quad 0x^7 = 0.$$

Las potencias de x también son monomios, con coeficiente 1:

$$x^7 = 1x^7.$$

Llamaremos *grado* de un monomio al exponente de x , a excepción del monomio 0 al cual no le asignaremos grado.

- $3x^7$ es un monomio de grado 7.
- 8 tiene grado 0.
- $2x$ tiene grado 1.
- 0 no tiene grado.

La multiplicación o producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados. Por ejemplo,

$$3x^7 \cdot 4x^3 = (3 \cdot 4)x^{7+3} = 12x^{10}.$$

El cociente entre dos monomios es otro monomio siempre que el grado del monomio divisor sea menor o igual al grado del otro monomio. En ese caso, el cociente es un monomio cuyo coeficiente es el cociente entre los coeficientes, y el grado es la diferencia entre los grados. Por ejemplo:

$$\frac{7x^5}{4x^3} = \frac{7}{4}x^{5-3} = \frac{7}{4}x^2, \quad \frac{12x^5}{3x^5} = \frac{12}{3}x^{5-5} = 4.$$

Si sumamos dos monomios del *mismo* grado cuyos coeficientes no son opuestos, obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes:

$$3x^7 + 5x^7 = (3 + 5)x^7 = 8x^7,$$

mientras que

$$3x^7 + (-3)x^7 = 0.$$

Del mismo modo, si restamos dos monomios distintos del *mismo* grado obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la resta de los coeficientes:

$$4x^4 - 5x^4 = (4 - 5)x^4 = -x^4.$$

Pero si sumamos o restamos dos monomios de distinto grado, el resultado no es un monomio. Por ejemplo

$$x^2 + 5x$$

no puede ser expresado como un monomio en x . A este tipo de expresiones se las denomina *polinomios*.

Un polinomio es una expresión algebraica que resulta de la suma de uno o más monomios de distinto grado.

Las siguientes expresiones son ejemplos de polinomios en la indeterminada x :

$$x^5 - 2x^3 + 8, \quad 3 + 7x^2, \quad 5x^6.$$

Para denotar a los polinomios en la indeterminada x usaremos notaciones como $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, etc. Llamaremos *grado* de un polinomio $P(x)$ al mayor de los grados de los monomios que lo componen, y lo denotaremos $\text{gr}(P(x))$. Por ejemplo,

- Si $P(x) = 2x^5 - 2x^3 + 8$, entonces $\text{gr}(P(x)) = 5$ porque el monomio de mayor grado es $2x^5$.
- Si $Q(x) = 7 - 3x^{15} + 12x^2$, entonces $\text{gr}(Q(x)) = 15$ porque el monomio de mayor grado es $-3x^{15}$.

Igual que para los monomios, no le asignaremos grado al polinomio 0.

En un polinomio no nulo, se denomina *coeficiente principal* al coeficiente del término de mayor grado. Por ejemplo, -3 es el coeficiente principal del polinomio $Q(x) = 7 - 3x^{15} + 12x^2$.

En el conjunto de los polinomios sí es posible definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en el sentido que el resultado de estas operaciones entre polinomios es también un polinomio.

Operaciones entre polinomios

La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios del mismo grado.

Por ejemplo, para sumar

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x \quad \text{y} \quad Q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$$

sumamos agrupando los monomios del mismo grado:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^4 + 3x^4) + (-2x^3 + x^3) + (0x^2 - 3x^2) + (8x + x) + (0 + 2) = \\ &= 4x^4 - x^3 - 3x^2 + 9x + 2 \end{aligned}$$

La resta de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene restando los monomios del mismo grado.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son como antes, entonces

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (x^4 - 3x^4) + (-2x^3 - x^3) + (0x^2 - (-3x^2)) + (8x - x) + (0 - 2) \\ &= -2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 7x - 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Dar la suma entre los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3 - 2x + 7x^2 + 9x^3, \quad Q(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3.$$

Notemos que en este caso, como los coeficientes principales de sendos polinomios son 9 y -9 respectivamente, esto hace que los monomios correspondientes se cancelen en la suma, y que el polinomio resultante tenga grado menor que 3. Entonces:

$$P(x) + Q(x) = (3 + 3) + (-2x - 2x) + (7x^2 + 7x^2) + (9x^3 - 9x^3) = 6 - 4x + 14x^2.$$

La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los monomios de uno por todos los monomios del otro.

Esto no es una regla arbitraria sino que resulta de aplicar la propiedad de distributividad de la multiplicación respecto de la suma. Por ejemplo, tomemos $P(x) = 2 + x^2$ y $Q(x) = 3 + x + x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2 + x^2) \cdot (3 + x + x^3) \\ &= 2 \cdot (3 + x + x^3) + x^2 \cdot (3 + x + x^3) \\ &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^3 + x^2 \cdot 3 + x^2 \cdot x + x^2 \cdot x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo las multiplicaciones entre monomios y sumando los del mismo grado resulta

$$P(x) \cdot Q(x) = 6 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + x^5.$$

Notemos que el grado de la multiplicación de dos polinomios es siempre la suma de los grados de los dos polinomios, a menos que uno de los dos sea el polinomio nulo.

La operación de *división* entre polinomios es análoga en cierto modo a la división de números naturales. Esto es, cuando dividimos dos naturales, por ejemplo 26 y 3, decimos que el cociente entre ambos es 8 y el resto es 2. Esto significa que

$$26 = 3 \cdot 8 + 2.$$

El resto tiene la propiedad de ser un número natural o cero y menor que el divisor.

Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, siempre existen dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ llamados cociente y resto respectivamente, con la propiedad que

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

y tales que, el polinomio resto $R(x)$ es el polinomio nulo ó es un polinomio de grado menor que el grado del polinomio divisor $D(x)$.

Para calcular el cociente y el resto de la división entre dos polinomios existe un algoritmo muy similar al usado en la división entera. Si el polinomio divisor tiene grado mayor que el dividendo, entonces el cociente es el polinomio 0 y el resto es igual al dividendo. Por ejemplo, si

$$P(x) = x^2 - 3, \quad \text{y} \quad D(x) = x^3 + x - 4,$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(x) &= 0 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 - 3. \\ \underbrace{x^2 - 3}_{P(x)} &= \underbrace{(x^3 + x - 4)}_{D(x)} \cdot \underbrace{0}_{Q(x)} + \underbrace{(x^2 - 3)}_{R(x)}. \end{aligned}$$

Recordemos que algo similar ocurre con el cociente entre números naturales. Si el dividendo es menor que el divisor, por ejemplo, 3 dividido 8, entonces el cociente es 0 y el resto es 3.

Ahora, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el del divisor $D(x)$, entonces el cociente no será el polinomio

nulo. Tomemos como ejemplo

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2, \quad D(x) = 2x^2 - x + 1.$$

En primer lugar se dividen los monomios de mayor grado de ambos polinomios. En este caso, $2x^4$ y $2x^2$. Como

$$2x^4 = x^2 \cdot 2x^2,$$

escribimos x^2 en el cociente. Multiplicamos $D(x)$ por x^2 , y restamos el polinomio resultante a $P(x)$.

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 \quad \bigg| \quad 2x^2 - x + 1 \\ \underline{2x^4 - x^3 + x^2} \quad \quad \quad x^2 \\ 6x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

Como el polinomio $6x^2 - 2x - 2$ es de grado 2 y 2 no es menor que el grado del polinomio $D(x)$, seguimos dividiendo. Ahora los monomios de mayor grado son $6x^2$ y $2x^2$. Como $6x^2 = 2x^2 \cdot 3$, sumamos 3 al cociente, multiplicamos por 3 al divisor y restamos el polinomio resultante a $6x^2 - 2x - 2$:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 \quad \bigg| \quad 2x^2 - x + 1 \\ \underline{2x^4 - x^3 + x^2} \quad \quad \quad \boxed{x^2 + 3} \leftarrow \text{Cociente} \\ 6x^2 - 2x - 2 \\ \underline{6x^2 - 3x + 3} \\ \boxed{x - 5} \leftarrow \text{Resto} \end{array}$$

Ahora $x - 5$ es de grado menor que $D(x)$, y por lo tanto $Q(x) = x^2 + 3$ es el cociente de la división y $R(x) = x - 5$ es el resto. Esto significa que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

es decir

$$\underbrace{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2}_{P(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 1)}_{D(x)} \underbrace{(x^2 + 3)}_{Q(x)} + \underbrace{x - 5}_{R(x)}.$$

Si en una división entre polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ el resto de la división es 0 entonces resulta

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x),$$

es decir, $P(x)$ se escribe como producto de dos polinomios. En ese caso decimos que hemos *factorizado* al polinomio $P(x)$. Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^4 - x^2$ por $D(x) = x^2 - 1$, el resto de la división es 0 y concluimos que $P(x)$ se puede factorizar como producto de dos polinomios

$$x^4 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 1).$$

Podemos aún factorizar x^2 y $x^2 - 1$ y escribir entonces a $P(x)$ como $x^4 - x^2 = x \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$.

Valor numérico de un polinomio

En un polinomio, la letra x representa una variable o indeterminada. Si a esa variable la reemplazamos por un número real, por ejemplo 5, decimos que hemos *evaluado* o *determinado el valor numérico del polinomio* en 5.

Ejemplo 7. Calcular el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - x + 2$, en $a = 5$ y en $a = 3$.

$$P(5) = 5^3 - 5 + 2 = 125 - 5 + 2 = 122.$$

$$P(3) = 3^3 - 3 + 2 = 27 - 3 + 2 = 26.$$

Por otro lado, si hacemos las cuentas correspondientes, veremos que al dividir $P(x)$ por $x - 5$ obtenemos como resto 122, y si dividimos $P(x)$ por $x - 3$ el resto es 26, que justamente son los números $P(5)$ y $P(3)$ respectivamente o lo que es equivalente, el valor numérico de P en $x = 5$ y el valor numérico de P en $x = 3$. Esto se debe a que

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 5) + R(x),$$

luego

$$P(5) = Q(5) \cdot (5 - 5) + R(5) = R(5).$$

Esto nos dice que $P(5) = R(5)$, y como $R(x)$ es un número entonces no depende de x , y por lo tanto $R(x) = R(5) = 122$.

Este último resultado se llama *Teorema del Resto* y se enuncia así:

Teorema del Resto: Sea a un número y $P(x)$ un polinomio.
La evaluación o valor numérico de $P(x)$ en $x = a$,
es igual al resto de dividir a $P(x)$ por el polinomio $D(x) = x - a$

Si $P(a) = 0$, o equivalentemente, si el resto de la división del polinomio $P(x)$ por $x - a$ es 0, decimos que a es una *raíz* del polinomio $P(x)$.

Ejemplo 8. Si consideramos el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, vemos que

$$P(1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$$

Por lo tanto 1 es raíz del polinomio $P(x)$. Significa que podemos escribir $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

Para hallar $Q(x)$ dividimos $P(x)$ por $x - 1$, y así obtenemos la factorización

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Nuevamente, podemos ver ahora que $P(-2) = 0$, ya que -2 anula el polinomio $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Significa que podemos escribir $P(x) = (x - 1)(x + 2)S(x)$, donde $S(x)$ se obtiene de la división de $Q(x)$ por $x + 2$. Así llegamos a

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1).$$

Ejercicios

1. Escribir algebraicamente los siguientes enunciados.
 - a) El doble de un número.
 - b) El opuesto de un número.
 - c) La suma de un número y su inverso.
 - d) El producto de tres números.
 - e) El cuadrado de la suma de dos números.
 - f) La diferencia entre el triplo de un número y su doble.
2. Escribir un enunciado que se traduzca en la expresión algebraica dada:
 - a) $a - a^2$,
 - b) $a - b^2$,
 - c) $|x|$,
3. Suponiendo que en todos los casos se trata de números enteros, escribir algebraicamente los siguientes enunciados:
 - a) La suma de dos números enteros consecutivos.
 - b) El producto de tres números enteros consecutivos.
 - c) Un número par.
 - d) La suma de un número par y uno impar.
 - e) La suma de un número par y el impar siguiente.
 - f) El doble de un número impar.
4. Escribir una expresión algebraica que represente a los siguientes enunciados:
 - a) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado de uno de ellos, más el cuadrado del otro más el doble producto de ambos.
 - b) El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
 - c) La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de los mismos.
 - d) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
5. Escribir una ecuación que represente a los siguientes problemas. Identifique cuál o cuáles son las incógnitas en el problema. Finalmente, encontrar el conjunto solución.
 - a) Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en términos de su cateto menor, sabiendo que un cateto mide el doble que el otro.
 - b) El cuadrado de un número es igual al triple del mismo número.
 - c) ¿Existen tres enteros consecutivos cuya suma sea 121?
6. Despejar y en las siguientes ecuaciones:
 - a) $y = 3x + 2y + 1$
 - b) $xy = 5$
 - c) $x^2 + 2xy = y - 5$

7. Despejar la incógnita que se muestra encerrada entre $\{\}$ en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\{n\}$ $I = \frac{nE}{R + nr}$

c) $\{R\}$ $I = E\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

b) $\{S\}$ $T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$

d) $\{M\}$ $B = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + T})$

8. Para cada uno de los siguientes polinomios, indicar el grado y el coeficiente principal.

a) $-7x^3 + 8x^2 + 20x^5 + x$

b) $1 + x^2 - x^6 + 3$

c) 8

9. Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $Q(x) = x^3 - 3x + 3$, resolver las siguientes operaciones y dar el grado del polinomio resultante.

a) $P(x) + Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

e) $P^2(x) - Q^2(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

d) $Q(x) \cdot (x - 1)$

f) $3 \cdot Q(x) - x \cdot P(x)$

10. Calcular el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$.

a) $P(x) = x^4 + x^2 + x + 1$, $D(x) = x^2 + x + 1$.

b) $P(x) = 2x^4 - 2$, $D(x) = x - 1$.

11. Sin hacer la división, decir cuál es el resto de dividir el polinomio $P(x)$ por $x - a$:

a) $P(x) = x^3 - x + 1$, $a = 2$.

b) $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 3$, $a = -3$.

12. Los siguientes polinomios son divisibles por $x - a$. Calcular el valor de b en cada caso:

a) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + bx^2 - 7$, $a = 1$.

b) $P(x) = x^6 - bx^5 + 3x^2 - 4x + 1$, $a = -1/2$.

13. Determinar el valor de b para el cual el polinomio $M(x) = x^6 + bx^3 - 5x^2 - 7$ tiene resto 3 en la división por $x + 2$.

14. Escribir un polinomio de grado 5 que sea divisible por $x^2 - 2$.

15. Escribir uno o más polinomios de grado 6 cuyo resto en la división por x^5 sea $x + 8$.

SECCIÓN 2.3

Ecuaciones lineales

§ Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra una igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o más letras son las llamadas incógnitas. Esto significa que la ecuación no es una identidad cierta para todos los valores de la incógnita sino para algunos, o quizás para ninguno. Por ejemplo, si escribimos:

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

esto no es propiamente una ecuación pues la identidad se cumple cualquiera sea el valor de a . En cambio, si escribimos

$$(a+1)^2 = 9,$$

esta igualdad se cumple sólo si $a = 2$ o si $a = -4$. Es una ecuación con una incógnita.

Las ecuaciones

$$2x - y = 3, \quad 3x + y = 2z, \quad t = 2u,$$

tienen la propiedad de que las incógnitas x , y , z y u aparecen sin estar afectadas por una potencia, radicación, ni multiplicadas unas con otras, ni en un denominador. Se dice que estas ecuaciones son **lineales** en cada una de esas incógnitas. Por ejemplo, $2x - y = 3$ es lineal en x y en y , y $t = 2u$ es lineal en t y en u .

En algunas ecuaciones podría estar involucrada una letra que no es una incógnita sino que representa una constante. Por ejemplo, la ecuación

$$ax + 3 = 5,$$

donde a representa un número real cualquiera y x es la incógnita. También en este caso diremos que la ecuación es lineal en x . En cambio, las siguientes no son ecuaciones lineales en las incógnitas x , y y z :

$$2\sqrt{x} + 3x = 8, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad 3xy + 2 = z.$$

Esto es porque en el primer caso, la incógnita x aparece afectada por una raíz. En el segundo caso, las variables están elevadas al cuadrado, y en el tercer caso las incógnitas x e y aparecen multiplicadas entre sí. En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales en una y dos incógnitas.

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquéllas que pueden escribirse de la forma

$$ax + b = c,$$

donde a , b y c son números reales, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

Resolver una ecuación lineal $ax + b = c$ significa encontrar la solución de la ecuación, es decir, el valor de x para el cual la ecuación es cierta. Por ejemplo, 4 no es solución de $3x + 2 = 20$, pues

$$3 \cdot 4 + 2 = 14 \neq 20.$$

En cambio 6 sí es solución pues

$$3 \cdot 6 + 2 = 20.$$

Dos ecuaciones lineales con una incógnita son equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$3x + 2 = 20, \quad 7x - 4 = 38$$

son ecuaciones equivalentes pues ambas tienen solución $x = 6$.

Las siguientes operaciones transforman una ecuación en otra equivalente:

- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero,

- sumar o restar a ambos miembros de la ecuación un número cualquiera.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$2x + 3 = 7,$$

y multiplicamos por 3 ambos miembros, obtenemos

$$6x + 9 = 21,$$

y si le restamos 7 a cada miembro resulta

$$2x - 4 = 0.$$

Notemos que las tres ecuaciones tienen la misma solución $x = 2$, por lo que son equivalentes.

Para resolver una ecuación lineal, lo que debemos hacer es aplicar a ambos miembros de la ecuación distintas operaciones que la transformen en una ecuación equivalente donde de un lado de la igualdad aparezca la incógnita y del otro un número que será la solución buscada. De ese modo habremos *despejado* la incógnita.

Ejemplo 1. Despejar la incógnita y resolver la ecuación lineal

$$5x + 4 = 19.$$

Restamos a ambos miembros 4 y obtenemos la ecuación equivalente

$$5x = 15.$$

Ahora dividimos ambas por 5 y obtenemos la solución:

$$x = 3.$$

En efecto,

$$5 \cdot 3 + 4 = 19.$$

También podríamos haber dividido primero por 5 y luego haber restado $\frac{4}{5}$ en ambos miembros. La solución es la misma:

$$x + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \quad x = \frac{19 - 4}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

§ Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos ahora las ecuaciones lineales con dos incógnitas. Por ejemplo:

$$2x - y = 3.$$

Encontrar una solución es dar un par de números que satisfagan la ecuación. La diferencia con las ecuaciones lineales con una incógnita es que ahora tendremos infinitas soluciones. Notemos que si despejamos la incógnita

y en la ecuación, obtenemos

$$y = 2x - 3.$$

Entonces para cada valor de x que demos, tendremos un valor de y y este par de números será una solución. Por ejemplo los siguientes pares de números son solución de la ecuación $2x - y = 3$:

$$x = 0, \quad y = -3,$$

$$x = 1, \quad y = -1,$$

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = 2.$$

En efecto, si reemplazamos estos valores en la ecuación $y = 2x - 3$ veremos que se satisface la igualdad:

$$2 \cdot 0 - (-3) = 3, \quad 2 \cdot 1 - (-1) = 3, \quad 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 3.$$

Un *sistema de ecuaciones* es un conjunto formado por una o más ecuaciones. Lo que caracteriza al *sistema* es que se busca una o más soluciones que sean soluciones de *todas* las ecuaciones planteadas en el sistema. En esta sección estudiaremos sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas.

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x = 7 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

son dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

No es necesario que las incógnitas aparezcan todas en todas las ecuaciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x = 3 \\ 4y = 8 \end{cases}$$

también es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de números que son solución de *ambas* ecuaciones.

Por ejemplo,

$$x = 3, \quad y = 5,$$

es una solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{ya que} \quad \begin{cases} 3 + 5 = 8 \\ 5 - 3 = 2. \end{cases}$$

En cambio $x = 2, y = 6$ no es solución porque $2 + 6 = 8$ pero $6 - 2 \neq 2$.

Puede ocurrir que un sistema no tenga solución, por ejemplo

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + y = 1. \end{cases}$$

ya que es imposible que exista un par de números x e y para los cuales $3x + y$ sea igual a 3 y a 1 simultáneamente.

Dos sistemas de ecuaciones se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y = 13 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

son equivalentes porque ambos tienen la solución (única) $x = 3, y = -2$. Notemos que no es necesario que las ecuaciones de uno y otro sistema sean equivalentes.

Por otro lado, los sistemas

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ x + 3y = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 5y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

no son equivalentes, puesto que si bien $x = 3, y = -2$ es solución en ambos sistemas, el segundo sistema tiene otras soluciones que no lo son del primero. Por ejemplo, $x = 0, y = 1$

§ Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se realizan distintas transformaciones que lo hagan más simple y faciliten su resolución. Estas transformaciones deben conservar las soluciones del sistema, es decir, deben transformar un sistema a otro equivalente. Las siguientes transformaciones son válidas:

- Cambiar una ecuación por otra equivalente.
- Reemplazar una de las ecuaciones por la que se obtiene sumando o restando las dos ecuaciones.

Para determinar la solución de un sistema pueden usarse varios métodos. En esta sección veremos los siguientes: el método de sustitución, el de igualación y el de reducción.

Método de sustitución. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones, y se reemplaza la expresión resultante en la segunda ecuación y se despeja la segunda incógnita.

Método de igualación. Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones. Se igualan las expresiones resultantes y se despeja la otra incógnita.

Método de reducción. Se consigue que una de las incógnitas tenga el mismo (u opuesto) coeficiente en las 2 ecuaciones, luego se restan (o suman) para eliminar dicha incógnita y reducir a una sola ecuación lineal.

Ahora, resolveremos el siguientes sistema de ecuaciones usando cada uno de estos métodos

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

Método de sustitución: Si despejamos y en la primera ecuación, obtenemos $y = 3x - 7$. Ahora reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación:

$$2x + 3(3x - 7) = 1, \quad \text{es decir} \quad 11x - 21 = 1.$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$. Reemplazamos este valor de x en la ecuación $y = 3x - 7$ y obtenemos $y = 3 \cdot 2 - 7 = -1$. Luego

$$x = 2, \quad y = -1$$

es una solución del sistema. En efecto, si reemplazamos estos valores en el sistema vemos que se verifican ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - (-1) = 7 \\ 2 \cdot 2 + 3(-1) = 1. \end{cases}$$

Método de igualación: Si despejamos y en cada una de las dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = \frac{1-2x}{3} \end{cases}$$

Notemos que hemos obtenido un sistema equivalente ya que reemplazamos cada ecuación por otra equivalente. Ahora notemos que si x e y son soluciones entonces debe ser

$$y = 3x - 7, \quad \text{e} \quad y = \frac{1-2x}{3},$$

es decir

$$3x - 7 = \frac{1-2x}{3}.$$

Esta es una ecuación lineal que sabemos resolver y que tiene solución $x = 2$. Reemplazamos ahora este valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, por ejemplo en la primera, y obtenemos el valor de y :

$$3 \cdot (2) - y = 7,$$

que tiene solución $y = -1$. Por lo tanto el sistema tiene la solución

$$x = 2, \quad y = -1.$$

Método de reducción: Si a la primera de las ecuaciones la multiplicamos por 3, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 9x - 3y = 21 \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

De esta manera, la incógnita y tiene los coeficientes -3 y 3 respectivamente. Así, si sumamos las dos ecuaciones llegamos a la ecuación lineal

$$11x = 22$$

que tiene como solución $x = 2$. Ahora reemplazamos este valor de x en una de las ecuaciones lineales, y obtenemos el valor para la otra incógnita: $y = -1$.

Debemos dejar en claro que no siempre pueden aplicarse cualquiera de estos métodos, como por ejemplo los casos en los que el coeficiente de una de las incógnitas es 0. Afortunadamente, estos casos son aún más fáciles de resolver. Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} 3x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

podemos despejar x en una ecuación pero no en la otra, y lo mismo ocurre con la incógnita y . Tampoco podemos igualar los coeficientes de las incógnitas porque ninguna de ellas aparece en ambas ecuaciones. Sin embargo la solución se obtiene resolviendo separadamente cada una de las dos ecuaciones. En la primera obtenemos $x = \frac{2}{3}$ e y puede tomar cualquier valor, mientras que en la segunda debe ser $y = \frac{3}{2}$ y x puede ser cualquiera. Como la solución del sistema debe satisfacer ambas ecuaciones, esta debe ser $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{3}{2}$.

§ Sistemas compatibles e incompatibles

No todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única. Puede ocurrir que un sistema tenga infinitas soluciones, o también que no tenga ninguna. Si el sistema tiene alguna solución se dice que es un sistema *compatible*, de lo contrario se dice *incompatible*. En el caso de ser compatible, puede ocurrir que tenga una única solución o que tenga infinitas soluciones. Si sólo tiene una se dice que es un sistema *determinado*, y si tiene más de una, es decir, infinitas, se dice *indeterminado*.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

Si despejamos x en cada una de las ecuaciones obtenemos $x = 3 - y$ en cualquiera de las dos. Es decir que debemos igualar

$$3 - y = 3 - y$$

que es claramente cierto cualquiera sea el valor de y . Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 0.$$

Hemos llegado a algo cierto, pero no hemos encontrado una solución. Esto en realidad significa que el sistema tiene infinitas soluciones. Estas soluciones se obtienen dándole valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y . Para nuestro ejemplo, las soluciones serán todos los pares de números cuya suma es 3:

$$x = 1, y = 2, \quad x = 2, y = 1, \quad x = 4, y = -1, \quad x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2}, \dots$$

Un sistema de ecuaciones se dice *compatible* si tiene solución e *incompatible* si no tiene solución. Un sistema compatible se dice *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 1. \end{cases}$$

Si despejamos la variable y en cada una de las ecuaciones obtenemos $y = 3 - 2x$ e $y = \frac{1}{3} - 2x$. Igualando resulta

$$3 - 2x = \frac{1}{3} - 2x,$$

es decir

$$3 = \frac{1}{3}$$

Si despejamos y en la primera ecuación obtenemos $y = 3 - 2x$. Reemplazamos esta expresión en la segunda ecuación y resulta $6x + 3(3 - 2x) = 1$, es decir

$$9 = 1$$

Si aplicamos el método de reducción multiplicando la primera ecuación por 3 y restándosela a la segunda obtenemos

$$0 = 8$$

Estas expresiones inconsistentes o absurdas nos indican que el sistema no tiene solución posible, es un sistema incompatible.

Resumiendo, al resolver un sistema de ecuaciones por medio de uno de los métodos que hemos presentado, pueden ocurrir una de las siguientes situaciones:

1. Llegar a una contradicción, por ejemplo $0 = 9$, $1 = 3$, lo cual significa que el sistema es incompatible, no existen soluciones.
2. Llegar a una igualdad obvia, por ejemplo $0 = 0$, $-5 = -5$, lo cual significa que el sistema es compatible, pero indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones. Éstas se obtienen dando valores a una de las incógnitas y calculando el valor de la otra.
3. Llegar a una solución única del sistema; es un sistema compatible y determinado.

Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales en x y cuáles no:

a) $x^2 + x - 5y + 2 = 0$,

c) $x - y + z = 1$

e) $\sqrt{3}x - 2y = 4$

b) $x^2 + y^2 + 2xy = 10$

d) $\sqrt{3}x - 2y = 4$

f) $x + 3zy - y = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a) $2x + 5 = 0$

c) $\frac{3x - 2}{7} = 4$

e) $\pi + \sqrt{3}x = 2\pi$

b) $\frac{3x}{7} - 2 = 4$

d) $\sqrt{2}x + 3 = 1$

f) $\frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, reemplazando el valor de x en la ecuación:

a) $x = 3$ es solución de $x^2 - 3 = 6$

b) $x = \sqrt{2}$ es solución de $x^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

c) $x = \sqrt{2} + 1$ es solución de $(x - 1)\sqrt{2} = 2$

4. Los sistemas de ecuaciones dados en a), b) y c) son equivalentes al sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Explicar cuál es la transformación que los hace equivalentes.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \\ 2x = 7 + y \end{cases}$

5. Decidir cuáles de las siguientes transformaciones conducen a un sistema de ecuaciones equivalente.

a) Sustituir el sistema de ecuaciones por la suma de las dos ecuaciones.

b) Reemplazar cada una de las dos ecuaciones por la suma de las dos.

c) Reemplazar una de las ecuaciones por la suma de las dos.

d) Reemplazar una de las ecuaciones por la resta entre las dos.

e) Multiplicar los dos miembros por 0.

f) Sumarle $2x + 5$ al primer miembro de cada ecuación.

6. Resuelve los siguientes problemas e indica en cuáles de ellos debiste plantear una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales:

a) El área de un cuadrado es $125m^2$. ¿Cuál es la medida del lado?

b) Hallar dos números sabiendo que su suma es 62 y su diferencia es 4.

c) Determinar el perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor es 1 cm más largo que el menor, y el lado menor es la mitad del mayor.

d) El triple del cuadrado de un número es 75, ¿Cuál es dicho número?

e) En una parcela, la piscina ocupa 25 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad del jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan la casa, piscina y jardín juntos?

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y también los del ejercicio 4) que no hayas resuelto. Indica para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indica si es determinado o indeterminado.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y - 3 = -x \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + \frac{1}{2}y = 13 \\ -\frac{1}{3}x - 3y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 6y + 4x = 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ x - 7 = -3y \end{cases}$

8. Un grupo de personas va a un restaurante a cenar. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas en cada mesa, queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y cuántas mesas hay?

9. En una granja hay varios conejos y varias jaulas, de forma que si se coloca un conejo en cada jaula, queda un conejo sin jaula y si se colocan dos conejos en cada jaula, queda una jaula vacía. Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?
10. La suma de dos números es 123 y uno es el doble del otro. ¿De qué números se trata?
11. En un bolso hay 40 monedas, todas de 25 y 50 centavos. Si en total hay \$16,50, ¿Cuántas monedas de cada valor hay?
12. Un grupo de estudiantes tiene varios libros y mochilas, de modo que si colocan seis libros en cada mochila, queda una mochila vacía y si colocan cinco libros en cada mochila, quedan dos libros sin guardar. ¿Cuántos libros y cuántas mochilas hay?
13. Las entradas para una fiesta de estudiantes costaron \$80 por persona sola y \$150 por pareja. Si a la fiesta asistieron en total 144 personas y se recaudaron \$10.980 por venta de entradas, ¿Cuántas parejas y cuántas personas solas asistieron a la fiesta?
14. Encontrar todos los números naturales de dos cifras, que al sumarle 27 se obtiene el mismo número pero con las cifras invertidas.

SECCIÓN 2.4

Resolución de ecuaciones de segundo grado

§ Introducción

Hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales, que son aquellas que podemos escribir de la forma

$$ax + b = 0.$$

Si el coeficiente a es distinto de 0, entonces este tipo de ecuaciones tiene una única solución, $x = -\frac{b}{a}$.

En los casos en que una ecuación involucre hasta potencias de orden 2 de la incógnita, se dice que es una ecuación de segundo grado. Por ejemplo,

$$2x^2 - 3 = x, \quad \text{o} \quad x^2 - 4x = -4$$

Recordemos que un número x_0 es solución de la ecuación si al reemplazar a la incógnita por el número obtenemos una igualdad. A diferencia de las ecuaciones lineales, no todas las ecuaciones de segundo grado tienen una solución real pero sí es posible resolverla en el conjunto de los números complejos. A su vez, puede ocurrir que tengan una única solución o que tengan dos soluciones diferentes.

Una *ecuación de segundo grado* es una ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

siendo x la incógnita, y a , b y c números reales, $a \neq 0$.

Damos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación $2x^2 - 5 = 0$.

Aquí se trata simplemente de despejar x^2 ,

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

y determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad y \quad x = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Observemos que si extraemos el factor común 2, resulta ser el cuadrado de un binomio:

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2,$$

por lo que debemos resolver la ecuación

$$2(x + 1)^2 = 0.$$

Esa ecuación tiene como única solución el valor $x = -1$.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

En este caso no se trata de extraer una raíz cuadrada como en el Ejemplo 1, ni tampoco consiste en el cuadrado de un binomio como en el Ejemplo 2. Sin embargo, podemos operar algebraicamente para obtener el cuadrado de un binomio.

Para ello, dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2 , en este caso es 2:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Notemos que $\frac{5}{2}x = 2 \cdot \frac{5}{4}x$, así que si en el miembro izquierdo tuviéramos el término $(\frac{5}{4})^2$, entonces podríamos *armar* el cuadrado del binomio $(x + \frac{5}{4})$:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Pero como este término no aparece explícitamente, entonces lo sumamos y lo restamos en la expresión del miembro izquierdo:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2},$$

y de esta manera hemos *completado* la expresión de modo que aparezca el cuadrado de un binomio:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0.$$

Esta ecuación se resuelve de manera mucho más simple. En efecto, queremos hallar los valores de x tales que

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

y estos valores son

$$x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -3.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación (3) son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -3$.

§ El discriminante

Consideremos ahora la forma general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.6)$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios y a es distinto de cero. Nuestro objetivo es determinar cuáles son las soluciones de esta ecuación.

Si dividimos ambos miembros por a obtenemos la siguiente expresión de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \quad (2.7)$$

Un artificio matemático muy utilizado, y que será de uso habitual en nuestra iniciación matemática universitaria, es la suma y resta de una misma expresión numérica o algebraica conveniente. Algo similar a lo que efectuamos en el Ejemplo 3 al sumar y restar el término $(\frac{5}{4})^2$.

Así, si sumamos y restamos la expresión $\frac{b^2}{4a^2}$ en el miembro izquierdo de la ecuación (2.7), habremos completado el desarrollo del cuadrado de un binomio. Veamos esto.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \quad (2.8)$$

$$= x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \quad (2.9)$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2.10)$$

Así, la ecuación (2.7) puede escribirse como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \quad (2.11)$$

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante*, y se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (2.12)$$

Entonces, para hallar las soluciones o raíces de la ecuación de segundo grado (2.6) debemos resolver la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad (2.13)$$

o equivalentemente

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \quad (2.14)$$

Para resolver la ecuación (2.14) tendremos en cuenta tres casos: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ y $\Delta < 0$.

Si $\Delta > 0$, entonces existen dos soluciones reales. En efecto, si x es una solución, entonces x satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{o} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Finalmente, despejando x obtenemos que en este caso las raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Estas soluciones suelen resumirse en la fórmula siguiente, conocida también como la *fórmula de Baskhara*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.15)$$

El símbolo \pm indica que hay dos soluciones, una con el signo $+$ y la otra con el signo $-$.

Si $\Delta = 0$, entonces la única solución es

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

En el caso en que $\Delta < 0$, la ecuación (2.14) tiene soluciones en el campo de los números complejos. No es posible hallar raíces reales ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Recordemos que el número imaginario i es tal que $i^2 = -1$. Así, una solución x_0 de la ecuación (2.14) para el caso $\Delta < 0$ satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{o} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

§ Clasificación de las raíces

Resumimos entonces qué tipo de raíces se obtienen en una ecuación de segundo grado según sea el signo del discriminante.

Si $b^2 - 4ac = \Delta > 0$, entonces hay **dos raíces reales y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.16)$$

Si $b^2 - 4ac = \Delta = 0$, entonces hay **una única raíz real doble**, dada por

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad (2.17)$$

Se dice que esta raíz es *doble*, o que la ecuación posee dos raíces iguales, pues en este caso la ecuación original (2.6) puede escribirse de la forma

$$a(x - x_0)^2 = 0.$$

Si $b^2 - 4ac = \Delta < 0$, entonces hay **dos raíces complejas conjugadas y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (2.18)$$

Ejemplo 4. Analicemos las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 - x - 6 = 0, \quad b) 3x^2 - 6x + 3 = 0, \quad c) x^2 + 1 = 0.$$

Los discriminantes respectivos son:

$$a) \Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25, \quad b) \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0, \quad c) \Delta = 0 - 4 = -4.$$

Esto nos dice que la ecuación dada en (a) tiene dos raíces reales distintas:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2,$$

la ecuación dada en (b) tiene una única raíz doble:

$$x_0 = \frac{6 - \sqrt{0}}{6} = 1,$$

y la ecuación dada en (c) tiene dos raíces complejas conjugadas:

$$x_1 = \frac{0 + i\sqrt{4}}{2} = i, \quad x_2 = \frac{0 - i\sqrt{4}}{2} = -i.$$

Ejemplo 5. La ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 10 = 0$ tiene una raíz compleja igual a $1 - 3i$. ¿Existe otra solución de la ecuación?

La respuesta es sí, porque la raíz dada es un número complejo con parte imaginaria no nula. La otra solución de la ecuación es el conjugado de $1 - 3i$, es decir, $1 + 3i$.

§ Propiedades de las raíces

A partir de las expresiones dadas en (2.16), (2.17) y (2.18), calcularemos la suma y la multiplicación de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Sea $\Delta \geq 0$, al sumamos las raíces x_1 y x_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} \end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad (2.19)$$

Ahora, si multiplicamos las raíces x_1 y x_2 obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= \frac{(-b)(-b) + (-b)(-\sqrt{\Delta}) + (-b)\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}(-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2} \\ &= \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

lo que conduce a la siguiente relación:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \quad (2.20)$$

Por otra parte, si $\Delta < 0$ se obtiene la mismas relación (2.19) para la suma de raíces. En efecto, porque

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left(\frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) + \left(\frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) \\ &= \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2} - b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Similarmente, se obtiene la relación (2.20) para la multiplicación de las raíces. En efecto, porque el producto de una de ellas con su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria respectivamente:

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) \\
 &= \frac{(-b)^2 + (4ac - b^2)}{(2a)^2} = \frac{c}{a}
 \end{aligned}$$

Una vez conocidas estas relaciones entre las raíces de una ecuación de segundo grado podemos reescribir ésta en una forma más simple, y en muchos casos conveniente. En efecto, notemos que reescribiendo la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de la forma

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0,$$

aparecen como coeficiente de x y como término independiente las expresiones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$, que hemos visto que son iguales a

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$$

Por lo tanto, podemos reemplazar dichos coeficientes por sus expresiones equivalentes:

$$\begin{aligned}
 a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= a \left(x^2 - (-\frac{b}{a})x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a (x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2)) \\
 &= a (x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 \cdot x_2) \\
 &= a (x(x - x_1) - x_2(x - x_1))
 \end{aligned}$$

y como $(x - x_1)$ es un factor común, esto resulta:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Ejemplo 6. La ecuación $2x^2 - 2x - 12 = 0$ tiene raíces $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, siendo $a = 2$, $b = -2$ y $c = -12$.

Podemos verificar las relaciones anteriores:

$$3 + (-2) = -\frac{-2}{2}, \quad 3 \cdot (-2) = \frac{-12}{2}, \quad 2x^2 - 2x - 12 = 2(x - 3)(x + 2).$$

§ Resolución de ecuaciones de grado 4 con exponentes pares

Otro conjunto particular de ecuaciones, a las cuales se les puede aplicar la teoría desarrollada en este capítulo, son las ecuaciones polinomiales de grado 4 con exponentes pares. En las mismas, un adecuado cambio de variable permite reducir el cálculo a la resolución de una ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, Consideremos la siguiente ecuación de cuarto grado:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \tag{2.21}$$

Notemos que esta ecuación puede escribirse de la forma

$$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0,$$

es decir, es una ecuación de segundo grado con incógnita x^2 . Denotemos provisoriamente a x^2 con la letra u . Entonces, la ecuación (2.21) se escribe en términos de u como:

$$u^2 - 5u + 4 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $u_1 = 4$ y $u_2 = 1$, y por lo tanto las soluciones de (2.21) deben satisfacer $x^2 = 4$ o $x^2 = 1$. Los valores posibles de x son entonces $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

Ejercicios

- Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,
 - calcular el discriminante Δ ,
 - determinar si tiene 2 raíces reales distintas, una única raíz doble o dos raíces complejas,
 - calcular las raíces x_1 y x_2 , y escribir cada ecuación de la forma $a(x - x_1)(x - x_2)$.

1) $x^2 - 5x - 5 = 0$	4) $32x^2 - 20x + 3 = 0$	7) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
2) $x^2 + x - 1 = 0$	5) $x^2 - 28x + 192 = 0$	8) $9x^2 - 8x + 1 = 0$
3) $4x^2 + 4 = 5x$	6) $x^2 + 7x - 9 = 0$	9) $2x^2 + 3x = 7x + 4$
- Escribir una ecuación de segundo grado de la forma $2x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que la suma de sus raíces es 2 y su producto también. Calcular dichas raíces.
- Escribir 3 o más ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean de igual valor absoluto pero de distinto signo, (por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$). ¿Qué forma tienen estas ecuaciones?
- Una ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene una raíz igual a $2 + 3i$. ¿Cuál es la otra raíz?
- Considerar la ecuación de segundo grado $cx^2 + 12x + c = 0$.
 - Calcular el valor de c si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y positivas.
 - Calcular las raíces de la ecuación para el valor de c obtenido en el inciso anterior.
- La ecuación de segundo grado $ax^2 + 10x + a = 0$ tiene dos raíces iguales.
 - Indique cuál es el valor de a sabiendo que las raíces son negativas.
 - Calcule las raíces de la ecuación para el valor de a calculado en el inciso anterior.
- Considerar la ecuación de segundo grado $18x^2 + bx + 2 = 0$.
 - Calcular el valor de b si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y negativas.
 - Calcular las raíces de la ecuación para el valor de b obtenido en a).
- La ecuación de segundo grado $x^2 - 3bx + 9b = 0$ tiene dos raíces iguales.

- a) Indique cuál es el valor de b sabiendo que las raíces son positivas.
- b) Calcule las raíces de la ecuación para el valor de b calculado en el inciso anterior.
9. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados. Verifica la respuesta.
- a) $x^2 + 4x - 4 = 0$ b) $x^2 - 8x - 20 = 0$ c) $9x^2 + 36x + 20 = 0$
10. La suma de las raíces de una ecuación de segundo grado es -1 y su producto es -6 . Si la ecuación es de la forma $x^2 + bx + c = 0$, encuentra el valor de b y c .
11. Escribe una ecuación de segundo grado sabiendo que sus raíces son -1 y 3 . ¿Es la única ecuación de segundo grado posible con esa propiedad? ¿Por qué?
12. Para cada una de las ecuaciones siguientes se da el valor de una raíz. Determinar el valor de la constante y el valor de la otra raíz:
- a) $x^2 - Kx + 6 = 0$ $x_1 = 3$ c) $w^2 + Kw + 4 = 0$ $w_1 = -2$
 b) $y^2 + 6y + K = 0$ $y_1 = 3$ d) $K\beta^2 - 3\beta + 4 = 0$ $\beta_1 = 1$
13. Resolver las siguientes ecuaciones. Verifica que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.
- a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$
 b) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ d) $x^2(x + 4) = 5x$

SECCIÓN 2.5

Expresiones algebraicas fraccionarias

§ Expresiones fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria es un cociente entre expresiones algebraicas. Por ejemplo,

$$\frac{x}{2x+3}, \quad \frac{1-ab+b^2}{a+b}, \quad \frac{\sqrt{3-z}}{z^3}.$$

En este capítulo estudiaremos ecuaciones en las cuales la incógnita aparece en una expresión algebraica fraccionaria. Usualmente la forma de resolverlas es transformando esta ecuación en una expresión sin fracciones, de modo que se trate de resolver una ecuación lineal, o de segundo grado, o de un grado mayor.

Por otro lado, en muchos casos es conveniente simplificar estas expresiones algebraicas para facilitar la resolución de la ecuación en cuestión. Analizaremos varios ejemplos con distintos grados de complejidad a la vez que mostraremos la forma de resolver estas ecuaciones, pero previamente nos referiremos a la simplificación de expresiones.

§ Simplificación de expresiones fraccionarias

Si en una expresión algebraica fraccionaria aparece un factor común en el numerador y en el denominador, entonces podemos *simplificarla*. Por ejemplo en la siguiente expresión:

$$\frac{x^2 + x}{3x - 5x^3} \quad (2.22)$$

x es un factor común en el numerador y en el denominador. Esto es, $x^2 + x = x(x + 1)$ y $3x - 5x^3 = x(3 - 5x^2)$. Luego (2.22) puede escribirse como:

$$\frac{x(x + 1)}{x(3 - 5x^2)}.$$

Si dividimos numerador y denominador por x , la expresión se *simplifica*:

$$\frac{\cancel{x}(x + 1)}{\cancel{x}(3 - 5x^2)} = \frac{x + 1}{3 - 5x^2}. \quad (2.23)$$

En otros casos la expresión por la que se divide es un polinomio de grado mayor que 1, y para ello hay que detectar que se trata de un *factor común* del numerador y del denominador. Por ejemplo, en la siguiente expresión

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2} \quad (2.24)$$

$x^2 + 2$ divide al numerador y al denominador, pues $x^3 + 2x = (x^2 + 2)x$, y $x^2 + 2 = (x^2 + 2) \cdot 1$. Es decir:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2} = \frac{(x^2 + 2)x}{(x^2 + 2)1}.$$

Luego podemos simplificar la expresión (2.24) dividiendo numerador y denominador por $x^2 + 2$:

$$\frac{(\cancel{x^2 + 2})x}{(\cancel{x^2 + 2})1} = x$$

Simplificar una expresión fraccionaria es dividir numerador y denominador por un mismo polinomio no nulo.

Ahora bien, es importante tener en cuenta lo siguiente. Al simplificar una expresión no obtenemos una expresión equivalente. Es decir, si reemplazamos las letras por números no siempre es igual la expresión antes que después de haber simplificado. Por ejemplo, para (2.23),

$$\frac{x(x + 1)}{x(3 - 5x^2)} = \frac{x + 1}{3 - 5x^2}.$$

el primer miembro no está definido en $x = 0$, y el segundo sí. Esto ocurre porque hemos dividido numerador y denominador por el polinomio x , que justamente se anula en $x = 0$. Por lo tanto, la igualdad entre expresiones es válida sólo para los valores de x distintos de 0.

Si simplificamos una expresión dividiendo por un polinomio $P(x)$ obtenemos otra expresión equivalente *excepto* para los valores de x en los que se anula el polinomio.

En la expresión (2.22) simplificamos dividiendo por el polinomio x , ya que éste aparece en cada sumando del numerador y del denominador. En (2.24) fue fácil ver que $x^2 + 2$ es un factor común al numerador y denominador. Pero no siempre es tan evidente darse cuenta cuál es el polinomio por el que habría que dividir para simplificar la expresión.

Para reconocerlo, es útil recordar algunas identidades algebraicas tales como la diferencia de cuadrados, las potencias de un binomio, etc. Repasaremos algunos casos mediante ejemplos.

Ejemplo 1. Simplificar la expresión

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}. \quad (2.25)$$

En este caso podemos observar que en el numerador aparece una *diferencia de cuadrados*:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Asimismo, el denominador puede escribirse como $x(x + 2)$, y así la expresión (2.25) se puede simplificar:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{x - 2}{x},$$

obteniendo una expresión equivalente *excepto* para $x = -2$.

Las sucesivas *potencias de un binomio* están dadas por

$$\begin{aligned} (x + a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ (x + a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\ (x + a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 \\ (x + a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

Como puede verse, hay una cierta simetría en cada uno de los polinomios resultantes. Por lo tanto, si en una expresión algebraica aparece un polinomio de grado n , podemos analizar si se trata o no de una potencia de un binomio.

Ejemplo 2. Simplificar la expresión

$$\frac{2x^3 - 4x^2}{3x^5 - 30x^4 + 120x^3 - 240x^2 + 240x - 96}. \quad (2.26)$$

En el denominador de esta expresión tenemos un polinomio de grado 5, y el numerador es fácilmente factorizable como $2x^2(x - 2)$. Podríamos analizar entonces si en el denominador aparece una potencia de $x - 2$. En primer lugar, es conveniente extraer como factor común el coeficiente de x^5 , es decir 3, de modo que la expresión resulte

$$\frac{2x^2(x - 2)}{3(x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32)}.$$

En efecto, si calculamos la potencia quinta de $x - 2$ obtenemos la expresión entre paréntesis, y por lo tanto podremos simplificar la expresión (2.26):

$$\frac{2x^2(x-2)}{3(x-2)^5} = \frac{2x^2}{3(x-2)^4}.$$

¡Atención! Ninguna de las dos expresiones está definida para $x = 2$.

En expresiones tales como

$$2x + x^3, \quad 100x^5 - 300x^3 + 50, \quad 5a^2 + 17ax$$

se puede detectar fácilmente un factor común en cada término de la expresión:

$$\begin{aligned} 2x + x^3 &= x(2 + x), \\ 100x^5 - 300x^3 + 50 &= 50(2x^5 - 60x^3 + 1), \\ 5a^2 + 17ax + a &= a(5a + 17x + 1). \end{aligned}$$

Pero en algunos casos una suma algebraica puede tener *grupos de términos* en los cuales puede extraerse un factor común diferente, y tal que todas las expresiones resultantes sean iguales. Para clarificar ideas, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Simplificar la expresión

$$\frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x - 1}{6x^2 + 12x - 18}. \quad (2.27)$$

En el numerador podríamos agrupar los términos de a dos, y extraer el factor común x^5 , x^3 y 1 en cada grupo:

$$(x^6 - x^5) + (x^4 - x^3) + (x - 1) = x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + 1 \cdot (x - 1).$$

Podemos ver que resulta una suma de tres términos, y en cada uno aparece el factor $(x - 1)$. Luego la expresión (2.27) puede escribirse como

$$\frac{(x - 1)(x^5 + x^3 + 1)}{6x^2 + 12x - 18}.$$

En el denominador tenemos un polinomio de grado 2, con raíces 1 y -3 , y por lo tanto podemos factorizarlo y simplificar la expresión:

$$\frac{(x - 1)(x^5 + x^3 + 1)}{6(x - 1)(x + 3)} = \frac{x^5 + x^3 + 1}{6(x + 3)}.$$

¡Atención! Las dos expresiones son equivalentes excepto para $x = 1$.

Estos son sólo algunos ejemplos en los cuales hemos mostrado cómo simplificar una expresión algebraica fraccionaria. Sin embargo el lector debe saber que pueden presentarse muchos otros casos, y que sólo la práctica en la resolución de este tipo de ejercicios ayudará a conocerlos. En la siguiente sección nos referimos a la resolución de ecuaciones con una incógnita, en las cuales la misma aparece involucrada en una expresión algebraica fraccionaria.

§ Ecuaciones con expresiones fraccionarias

En el caso de la resolución de ecuaciones en las que la incógnita aparece involucrada en una expresión fraccionaria, es conveniente llevar a la misma a una expresión sin fracciones. Para ello aplicamos la propiedad uniforme multiplicando ambos miembros por las expresiones que aparezcan en un denominador o también simplificando las expresiones. Presentamos algunos ejemplos de resolución de este tipo de ecuaciones. El lector debiera prestar especial atención a las consideraciones realizadas en cada ejemplo.

Ejemplo 4. Hallar el valor de x que satisface la ecuación

$$\frac{x^2 + x}{x + 1} = 3x - 2 \quad (2.28)$$

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $(x + 1)$ resulta

$$x^2 + x = (3x - 2)(x + 1). \quad (2.29)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos las soluciones $x = 1$ y $x = -1$. Pero notemos que $x = -1$ no es solución de (2.28) puesto que resulta una indeterminación en el primer miembro. Es decir, (2.29) y (2.28) no son ecuaciones equivalentes pues no tienen las mismas soluciones. Esto ocurre justamente porque hemos multiplicado por $x + 1$ que es una expresión que se anula en $x = -1$. Por lo tanto el procedimiento es válido excepto para $x = -1$.

Así, la única solución de (2.28) es $x = 1$.

Si multiplicamos ambos miembros de una ecuación por un polinomio, obtenemos una ecuación con las mismas soluciones a excepción de los valores de x que anulan ese polinomio.

En el Ejemplo 4 vemos además que $x = -1$ anula el numerador y el denominador; eso significa que ambos son divisibles³ por $x + 1$. Entonces también podríamos simplificar la expresión dividiendo por $x + 1$ al numerador y al denominador:

$$\frac{x(x + 1)}{x + 1} = 3x - 2, \quad (2.30)$$

y resolver la ecuación

$$x = 3x - 2. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) se ha obtenido a partir de una simplificación en (2.28), y por lo tanto es equivalente a esta última. Su única solución es $x = 1$.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación

$$\frac{1}{2x + 3} = 8. \quad (2.32)$$

En este caso no hay posibilidad de simplificar la expresión, y el denominador se anula sólo en $x = -\frac{3}{2}$. Puesto que este valor de x no resuelve la ecuación, entonces podemos multiplicar ambos miembros por $2x + 3$, llevando a la ecuación

$$1 = 8(2x + 3),$$

³Repasar el Teorema del Resto.

que es equivalente excepto para $x = -\frac{3}{2}$. Esta es una ecuación lineal y su solución es $x = -\frac{23}{16}$. Efectivamente es una solución de (2.32), ya que

$$\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{23}{16}\right) + 3} = 8.$$

Con un razonamiento similar podremos resolver ecuaciones como las siguientes:

$$\frac{x}{3x-1} = 10, \quad \frac{2x+3}{x-5} = 0, \quad 2x+3 = \frac{3}{x}.$$

Estas ecuaciones pueden ser transformadas en ecuaciones lineales o de segundo grado equivalentes multiplicando por la expresión del denominador, y teniendo en cuenta siempre que el valor de x que anula el denominador no es una solución de la ecuación.

En algunas situaciones la incógnita aparece afectada por una potencia o en un radicando. En algunos casos estas ecuaciones no son mucho más difíciles que resolver que una sencilla ecuación lineal. Mostraremos algunos ejemplos y la forma de resolverlos.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 2 = 10 \quad (2.33)$$

Nuestra primera preocupación será hallar el valor de \sqrt{x} , y a partir de este valor podremos conocer la incógnita. Consideremos la ecuación

$$3y - 2 = 10. \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) es similar a (2.33), donde hemos reemplazado a $\frac{1}{\sqrt{x}}$ por y . Se suele decir que se hace un *cambio de variable*:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Por lo tanto hallaremos el valor de y que resuelve la ecuación (2.34) y luego despejaremos x en la ecuación $\frac{1}{\sqrt{x}} = y$. Como $y = 4$ es la solución de $3y - 2 = 10$, resta hallar los valores de x para los cuales

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 4,$$

y así llegamos a que $\frac{1}{x} = 16$, y por lo tanto $x = \frac{1}{16}$ es la solución de (2.33).

Ejemplo 7. Hallar las soluciones de la ecuación

$$\frac{x^3}{x^3 + 18} = 3. \quad (2.35)$$

En este caso la incógnita x aparece con un exponente 3. Denotamos con y a x^3 y resolvemos la ecuación

$$\frac{y}{y+18} = 3,$$

que es equivalente a

$$y = 3y + 54.$$

Esta ecuación tiene solución $y = -27$. Para hallar la solución de (2.35) despejamos x de la ecuación $x^3 = -27$ y concluimos que $x = -3$ es la solución de (2.35).

Ejemplo 8. Hallar las soluciones de

$$\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} = 5. \quad (2.36)$$

Si denotamos con y a $\sqrt[3]{x^2}$, se trata de resolver la ecuación $y + \frac{4}{y} = 5$. Multiplicando ambos miembros por y se obtienen las soluciones como las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Las soluciones son $y = 1$ e $y = 4$. Reemplazando estos valores de y en la relación $y = \sqrt[3]{x^2}$, obtenemos las siguientes soluciones de (2.36).

$$x = 8, \quad x = -8, \quad x = 1, \quad x = -1.$$

Cancelación de factores

En algunos casos una misma expresión algebraica aparece en ambos miembros de una ecuación. Por ejemplo

$$(x+5)x^2 = \frac{x^3}{x-5}, \quad \frac{(3x+2)^2}{4x-5} - (3x+2) = \frac{3x+2}{x}.$$

Resulta tentador simplificar los factores comunes a ambos miembros, o lo que usualmente decimos *cancelar*, y resolver la ecuación resultante:

$$x+5 = \frac{x}{x-5}, \quad \frac{3x+2}{4x-5} - 1 = \frac{1}{x}.$$

Sin embargo, al cancelar estos factores no llegamos a una ecuación equivalente. Veamos en un ejemplo por qué.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación

$$\frac{(3x+2)^2}{4x-5} - (3x+2) = \frac{3x+2}{x}. \quad (2.37)$$

Resolver la ecuación (2.37) es hallar aquellos valores de x que hacen cierta la igualdad. Si cancelamos dividiendo por el polinomio $3x+2$ en ambos miembros, obtenemos la ecuación

$$\frac{3x+2}{4x-5} - 1 = \frac{1}{x}.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

cuyas únicas soluciones son

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}.$$

Sin embargo, estas no son las únicas soluciones de la ecuación (2.37). La otra solución es la que corresponde a $3x+2 = 0$, ya que en ese caso ambos miembros de la ecuación se anulan. Por lo tanto $x = -2/3$ es también solución de la ecuación (2.37).

Ejemplo 10. Resolver las siguientes ecuaciones

$$\frac{x}{x^2 - \frac{x}{2}} = 2x \quad (2.38)$$

$$\frac{x}{3x-5} = 7x. \quad (2.39)$$

En las dos ecuaciones el factor x aparece en ambos miembros, pero esto no significa que $x = 0$ sea solución de ambas ecuaciones.

Notemos que en la ecuación (2.38) aparece el factor x en el denominador y por lo tanto no es posible evaluar la expresión del miembro izquierdo en $x = 0$. Simplificamos entonces dividiendo por el polinomio x

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x - \frac{1}{2})} = 2x, \quad (2.40)$$

y resolvemos

$$\frac{1}{x - \frac{1}{2}} = 2x. \quad (2.41)$$

Así, las soluciones de (2.38) son las soluciones de (2.41). Ésta se resuelve multiplicando ambos miembros por $x - \frac{1}{2}$, teniendo presente que $x = \frac{1}{2}$ no es una solución. Las soluciones de la ecuación son

$$x = 1 \quad \text{y} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

En cambio, en la ecuación (2.39) vemos $x = 0$ anula ambos miembros de la ecuación, no hay indeterminación en ninguno de los dos miembros. Luego $x = 0$ es una solución y las otras soluciones se obtienen dividiendo ambos miembros por x , y multiplicar ambos miembros por $3x - 5$. Luego, concluimos que las soluciones de (2.39) son

$$x = \frac{12}{7} \quad \text{y} \quad x = 0.$$

Ejemplo 11. Resolver la ecuación

$$54 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - 12 = 2\sqrt[3]{x-2}. \quad (2.42)$$

En este caso no es la incógnita x quién está afectada por la radicación sino una expresión en x . Por lo tanto podemos sustituir

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

y resolver la ecuación

$$54 \frac{1}{y} - 12 = 2y.$$

Como $y = 0$ no es solución, entonces multiplicamos ambos miembros por y y nos quedará resolver la ecuación cuadrática

$$54 - 12y = 2y^2, \quad \text{o bien} \quad 2y^2 + 12y - 54 = 0.$$

Esta ecuación tiene las soluciones

$$y = 3 \quad \text{e} \quad y = -9.$$

Para hallar los valores de x que satisfacen la ecuación (2.42) resolvemos:

$$\sqrt[3]{x-2} = 3 \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{x-2} = -9.$$

Las soluciones son respectivamente:

$$x = 29 \quad \text{y} \quad x = -727.$$

Queda como ejercicio verificar que efectivamente estos dos valores son solución de la ecuación (2.42).

Ejercicios

1. Simplificar las siguientes expresiones:

$$a) \frac{x^2 - x}{2x - 2}$$

$$b) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

$$c) \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 + 4x - 5}$$

$$d) \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{1}{x - 3} = 8$$

$$d) \frac{2x - 4}{x - 2} = -7x$$

$$g) \frac{x^2 - 1}{3x + 2} = 4(x - 1)$$

$$b) \frac{4}{x - 3} = x$$

$$e) \frac{1}{x - 5} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$$

$$h) \frac{(x + 1)^2}{3x + 2} = \frac{4(x + 1)}{7x - 3}$$

$$c) \frac{2x - 4}{x - 2} = -7$$

$$f) -3x + 1 = -\frac{1}{3x - 1}$$

3. Efectuar un cambio de variable adecuado para resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) x = 13\sqrt{x} - 36$$

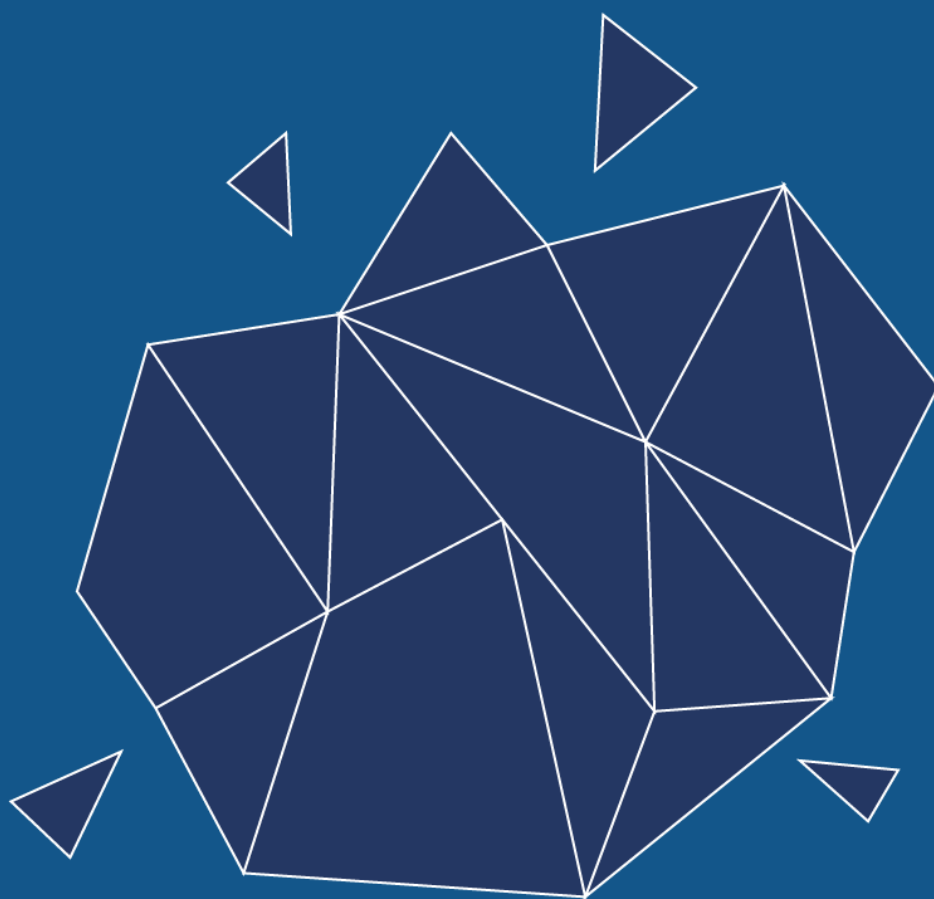
$$c) \frac{1}{x} = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$b) (\sqrt{y} - 1)^2 = 5 - \sqrt{y}$$

$$d) \sqrt{x^3} - 9 = \frac{-8}{\sqrt{x^3}}$$

Trigonometría

Mónica Oddone
Patricia Kisbye



5

TRIGONOMETRÍA

Etimológicamente, la palabra trigonometría significa *medición de triángulos*. En términos generales, la Trigonometría es un área de la matemática que surge del estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y de las cuerdas y arcos de una circunferencia. Actualmente la trigonometría y las funciones trigonométricas han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos. En particular, se extiende a geometrías no euclidianas, como son la geometría esférica y la geometría hiperbólica, en las que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor o menor a 180° , respectivamente.

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en Física, Astronomía, Náutica, Cartografía, Telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos y muchas otras aplicaciones.

La historia de la Trigonometría y de las funciones trigonométrica se remonta a las matemáticas producidas por las culturas egipcias y babilónicas, quienes conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Los egipcios fueron los primeros en usar la división en grados, minutos y segundos para la medida de ángulos. Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Entre las numerosas aplicaciones se encuentran las técnicas de triangulación que son usadas en Astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en los sistemas globales de navegación por satélites.

El Occidente se familiarizó con la Trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía árabigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. A principios del siglo XVII, se desarrolló el concepto de logaritmo y, gracias a esto, los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje. A mediados del siglo XVII, *Newton* y *Leibniz* desarrollaron el cálculo diferencial e integral. Y en el siglo XVIII, el matemático suizo *Euler* demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y, además, definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

En este capítulo se presenta una introducción a las funciones trigonométricas, con una discusión detallada de sus definiciones y de las principales propiedades. El texto se acompaña con una variedad de figuras y ejemplos con la intención de aportar mayor claridad al contenido matemático.

En este capítulo se introduce al estudio de la Trigonometría a partir del análisis de las funciones trigonométricas y de los elementos necesarios para definir las y caracterizarlas. A partir de estos elementos básicos se aproxima con detalles a las definiciones de tales funciones y sus principales propiedades. Las ideas presentadas se acompañan con una variedad de figuras y ejemplos con la intención de aportar mayor claridad al contenido matemático. Finalmente se presentan algunas aplicaciones para la resolución de triángulos rectángulos. Cabe mencionar que los contenidos presentados en este capítulo serán de gran utilidad en los cursos de Análisis Matemático e Introducción a la Física de primer año.

SECCIÓN 5.1

Funciones trigonométricas

§ Introducción

A continuación estudiaremos una cierta clase de funciones, llamadas funciones trigonométricas. Estas funciones se caracterizan por tener un comportamiento periódico, es decir, su gráfico se repite de a intervalos constantes.

Las funciones trigonométricas reciben este nombre porque generalizan algunas relaciones existentes entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Veremos esta particularidad hacia el final del capítulo. Sin embargo la importancia de estas funciones excede ampliamente las propiedades geométricas de los triángulos, y son fundamentales para la modelización matemática de fenómenos físicos y de la naturaleza, y para la resolución de problemas matemáticos avanzados.

Antes de definir estas funciones, necesitaremos introducir el concepto de distancia en el plano y posteriormente la definición de circunferencia.

§ Distancia en el plano y circunferencia

La distancia entre dos puntos en la recta real, a y b , se define como el valor absoluto de la diferencia entre ellos.

$$d(a, b) = |a - b|$$

En el caso de dos puntos en el plano, $A = (x_A, y_A)$, y $B = (x_B, y_B)$, la distancia $d(A, B)$ se define como la longitud del segmento que une los puntos A y B . Esto es:

$$d(A, B) = |\overline{AB}|$$

donde las barras $|*|$ simbolizan longitud.

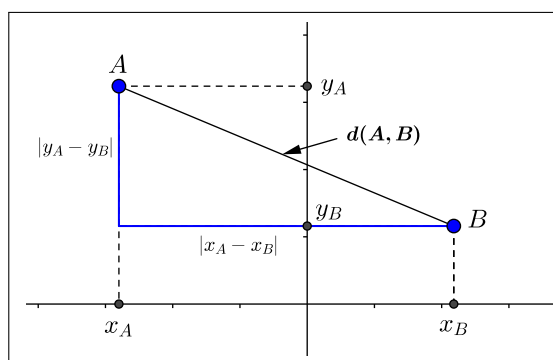


Figura 5.1: Distancia entre puntos en el plano

En el caso en que los puntos A y B tengan distinta ordenada y distinta abscisa, como en la Figura 5.1, la distancia se calcula a partir del Teorema de Pitágoras, como la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que se observa en la figura. Notemos que la longitud de uno de los catetos es igual a la distancia entre las abscisas de ambos puntos: $|x_A - x_B|$, y el del otro cateto es la distancia entre las ordenadas: $|y_A - y_B|$. La expresión para la distancia entre los puntos A y B viene dada entonces por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Si las ordenadas de ambos puntos son iguales, ($y_A = y_B$), entonces la distancia entre los puntos es igual a la distancia en la recta entre sus abscisas:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|,$$

mientras que si sus abscisas coinciden ($x_A = x_B$), entonces la distancia entre A y B es la distancia en la recta entre sus ordenadas:

$$d(A, B) = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|.$$

En cualquiera de los casos se cumple que:

La distancia entre dos puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ del plano está dada por la ecuación

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad (5.1)$$

Ejemplo 1. La distancia entre los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (-2, 4)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Ejemplo 2. La distancia entre los puntos $B = (-2, 4)$ y $C = (3, 4)$ es

$$d(B, C) = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{25 + 0} = 5$$

Una circunferencia en el plano es un conjunto de puntos que equidistan, o están una misma distancia, de otro, llamado centro.

La circunferencia de centro A y radio r , $r > 0$, es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al punto A es r .

Dados dos puntos $P = (x, y)$ y $A = (a, b)$, y $r \geq 0$, es equivalente decir que la distancia entre ellos es r :

$$d(P, A) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r,$$

a enunciar que su distancia al cuadrado es r^2 :

$$(d(P, A))^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Así, la circunferencia de radio r , y centro en el punto $A = (a, b)$, se define como

$$C(A, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Ilustramos esta definición en la Figura 5.2.

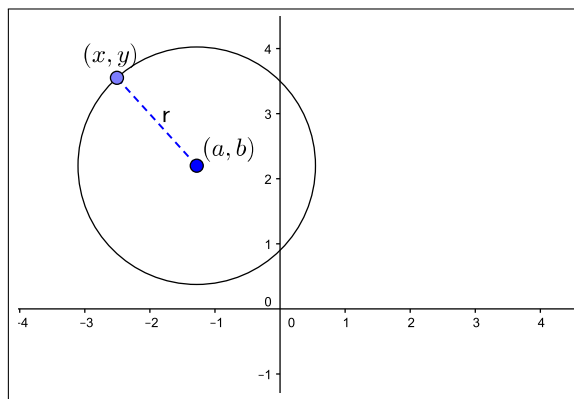


Figura 5.2: Circunferencia de centro $A = (a, b)$ y radio r

Si el centro de la circunferencia es el origen de coordenadas $O = (0, 0)$, su representación es

$$C(O, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

La longitud L de una circunferencia es proporcional a su diámetro d , y esta constante de proporcionalidad es el número π :

$$\frac{L}{d} = \pi.$$

Esto significa que para cualquier circunferencia de diámetro d , su longitud será $L = \pi \cdot d$. Como el diámetro de una circunferencia es dos veces el radio r , entonces se cumple que:

La longitud de una circunferencia de radio r es $L = 2\pi \cdot r$.

Arcos y ángulos

Consideremos dos circunferencias centradas en A , de distinto radio, $s < r$. Dos semirrectas con origen en A determinan sendos arcos sobre las circunferencias, uno con extremos P y Q y otro con extremos C y D . (Ver Figura 5.3).

La longitud de estos arcos es proporcional al radio de la circunferencia. Es decir,

$$\frac{|\widehat{PQ}|}{r} = \frac{|\widehat{CD}|}{s}.$$

Ahora bien, ambos arcos abarcan un mismo ángulo θ . Entonces tiene sentido definir la medida del ángulo θ como:

$$|\theta| = \frac{|\widehat{PQ}|}{r}.$$

Decimos que *tiene sentido* la definición, porque es independiente de la circunferencia que tomemos, siempre que esté centrada en el punto A . Es decir, también vale que

$$|\theta| = \frac{|\widehat{CD}|}{s},$$

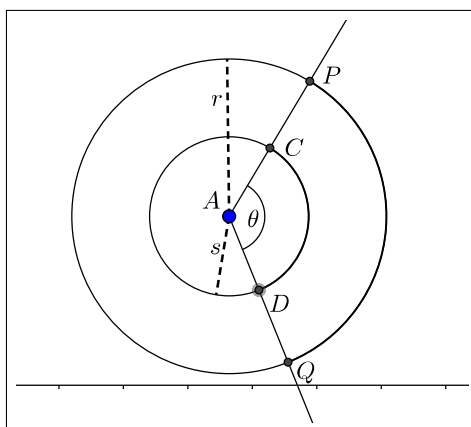


Figura 5.3: Arcos y ángulos

En particular, si la longitud del arco \widehat{PQ} es igual al radio de la circunferencia, entonces la medida de θ es 1. Llamamos a esta unidad *un radián*. (Ver Figura 5.4).

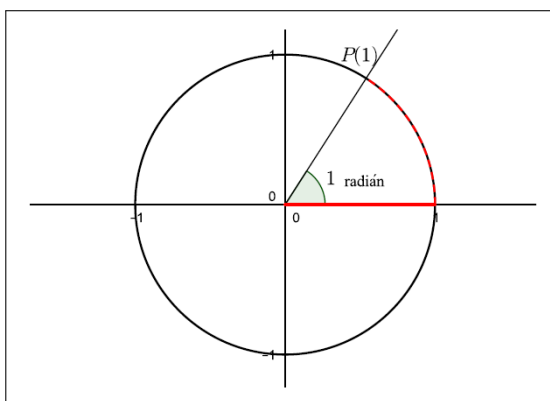


Figura 5.4: El radián

Así, el ángulo llano se corresponde con un arco que mide la mitad que la circunferencia: $\pi \cdot r$, y por lo tanto el ángulo llano mide

$$\frac{\pi \cdot r}{r} = \pi \text{ radianes.}$$

Un ángulo recto se corresponde con un arco que mide un cuarto de circunferencia, es decir, $\frac{\pi \cdot r}{2}$, y por lo tanto el ángulo recto mide:

$$\frac{\frac{\pi \cdot r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes.}$$

Existe otro sistema de medición de ángulos, que es el *sistema sexagesimal* y cuya unidad de medida es el *grado sexagesimal*. En este sistema, el ángulo llano mide 180° y el ángulo recto 90° . En general, se tiene la siguiente relación entre radianes y grados sexagesimales:

Dado un ángulo θ , si su medida en grados es g y su medida en radianes es h , entonces se cumple que $\pi \cdot g = 180 \cdot h$.

Ejemplo 3. Consideremos un ángulo de 45° , esto es, $g = 45$. Entonces su medida en radianes es:

$$h = \frac{\pi \cdot 45}{180} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 4. Un ángulo que mide $\frac{2\pi}{3}$ radianes, mide 120° , pues

$$h = \frac{2\pi}{3}, \quad g = \frac{180 \cdot h}{\pi} = 120.$$

Para definir las funciones trigonométricas trabajaremos con una circunferencia con centro en $O = (0,0)$ y de radio 1. En este caso, la medida de un ángulo en radianes será igual a la medida del arco abarcado, ya que

$$|\theta| = \frac{|\widehat{PQ}|}{1} = |\widehat{PQ}|.$$

§ La circunferencia unitaria o trigonométrica

Se denomina circunferencia unidad, unitaria o *trigonométrica*, a la circunferencia de radio 1, con centro en el origen de coordenadas $O = (0,0)$, es decir, $C(O,1)$. A partir de ahora trabajaremos con esta circunferencia, y la denotaremos con C_1 . Notemos que la condición $x^2 + y^2 = 1^2$ es equivalente $x^2 + y^2 = 1$, por lo que C_1 está definida por:

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

En la Figura 5.5 se ha representado a la circunferencia C_1 y a un punto genérico (x,y) .

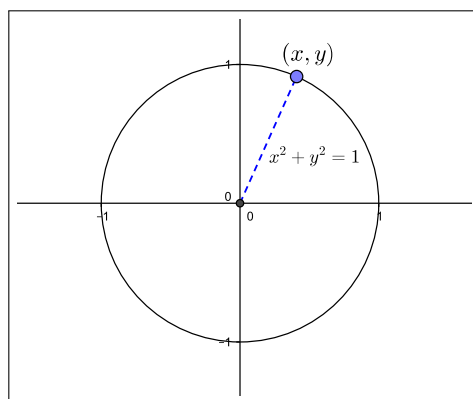


Figura 5.5: Circunferencia unitaria o trigonométrica

Consideremos ahora un punto P en la circunferencia C_1 . Por un lado, este punto queda determinado por sus coordenadas cartesianas (x,y) . Por otra parte, si consideramos el arco de circunferencia entre el punto $(1,0)$ y (x,y) , tomado en sentido antihorario, entonces P también queda determinado por la longitud t de dicho arco. (Ver Figura 5.6). Para señalar la dependencia del punto P con la longitud del arco t , escribimos

$$P = P(t) = (x(t), y(t)).$$

Dado que la longitud de una circunferencia de radio r es $2\pi \cdot r$, en el caso de la circunferencia unitaria la longitud es 2π . Luego la longitud t de un arco es un número entre 0 y 2π .

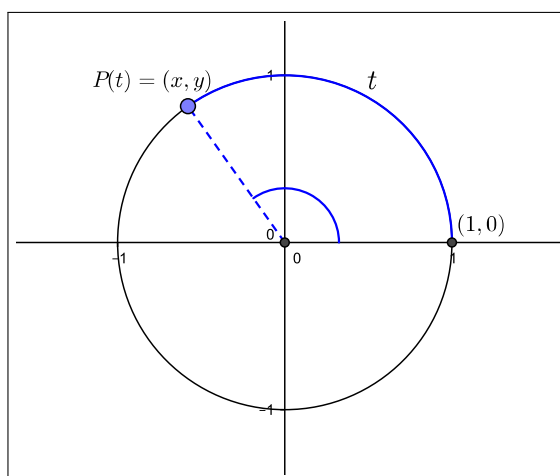


Figura 5.6: Circunferencia unitaria.

Así, para cada t tal que $0 \leq t < 2\pi$, queda determinado un único punto $P(t)$ en C_1 . Recíprocamente, todo punto de C_1 se corresponde con un arco de longitud t , y por lo tanto $P = P(t)$ para algún t , $0 \leq t < 2\pi$.

Ahora bien, podemos extender la definición de un punto $P(t)$ para cualquier número real t . Veamos esto. Dado un valor de t positivo, podemos imaginar un recorrido en sentido antihorario sobre la circunferencia de longitud t . Así, para $t = 2\pi$, tendremos que $P(2\pi)$ es el punto $(1, 0)$, y para t con $2\pi \leq t < 4\pi$, volvemos a recorrer toda la circunferencia. Así sucesivamente, cada valor de t de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, $P(2k\pi)$ corresponde al punto $(1, 0)$, y se vuelve a recorrer la circunferencia en sentido antihorario y da una vuelta completa cuando t recorre el intervalo $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

Por otro lado, para los valores de t negativos ($t < 0$), definimos $P(t)$ como el punto en C_1 cuyo arco tiene longitud $|t|$, medido desde $(1, 0)$ en sentido horario. (Ver Figura 5.7).

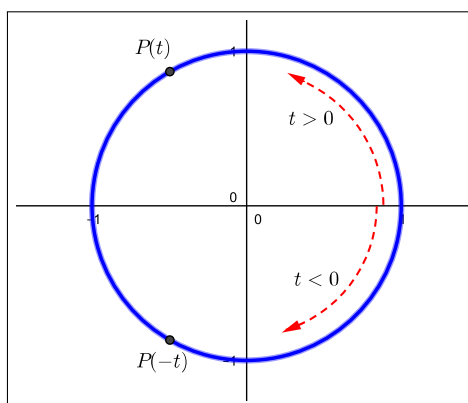


Figura 5.7: Recorrido en la circunferencia.

Los siguientes ejemplos ilustran la relación entre las coordenadas (x, y) de un punto $P(t)$, para algunos valores de t . Antes de presentarlos, hacemos la siguiente observación:

Ejemplo 5. Para $t = \frac{\pi}{2}$, corresponde a un arco equivalente a un cuarto de circunferencia. Las coordenadas cartesianas de $P(t)$ son:

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1).$$

Ejemplo 6. Si $t = \pi$, el arco equivale a media circunferencia, o a un ángulo de π radianes. Luego,

$$P(\pi) = (-1, 0).$$

Ejemplo 7. Si $t = \frac{3\pi}{4}$, el punto $P(t)$ se ubica en el punto medio del arco de circunferencia que pertenece al segundo cuadrante. Luego su distancia a los ejes x e y es la misma, y por lo tanto la abscisa x y la ordenada y del punto $P(t)$ satisfacen $y = -x$. Como la distancia del punto $P(t)$ al origen es 1, y $P(t) = (x, y)$ con $y = -x$, por Pitágoras se cumple que:

$$1^2 = |x|^2 + y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2.$$

Por lo tanto $x^2 = \frac{1}{2}$. Como $P(t)$ está en el segundo cuadrante y $x = -y$, entonces debe ser

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Ver Figura 5.8).

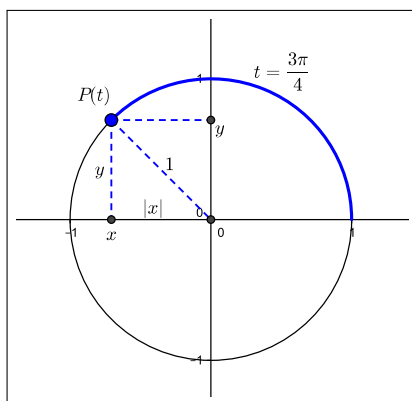


Figura 5.8: El punto $P(\frac{3\pi}{4})$

Ejemplo 8. Consideremos $t = \frac{\pi}{3}$. Para encontrar las coordenadas de $P(t)$ notemos que $\frac{\pi}{3}$ es un sexto de la longitud total de la circunferencia. Los puntos $(1, 0)$, $P(t)$ y el origen $(0, 0)$ forman un triángulo isósceles, ya que los dos lados con vértice en $(0, 0)$ miden 1. Esto implica que los ángulos opuestos a estos lados son iguales entre sí. Por otro lado, la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es un ángulo llano, y por lo tanto igual a π radianes o 180° . Luego los dos ángulos iguales suman $\frac{2\pi}{3}$, o 120° , y por lo tanto igual a π radianes o 180° . Luego los dos ángulos iguales suman $\frac{2\pi}{3}$, o 120° , y por lo tanto todos los ángulos del triángulo miden $\frac{\pi}{3}$ (o 60°), y el triángulo resulta equilátero. (Ver Figura 5.9). De tal manera, la coordenada x de $P(\frac{\pi}{3})$ es el pie de la altura del triángulo por el vértice $P(t)$, y por ser un triángulo equilátero es el punto medio del lado opuesto. Es decir, $x = \frac{1}{2}$. Como $x^2 + y^2 = 1$ e $y > 0$, resulta

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

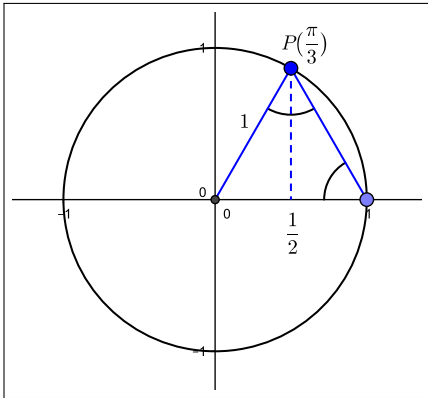


Figura 5.9: Coordenadas de $P(\frac{\pi}{3})$

En la Tabla 5.10 se dan algunos ejemplos de la medida del arco t y las correspondientes coordenadas (x,y) del punto $P(t)$.

t	$P(t) = (x,y)$
0	$(1,0)$
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$
π	$(-1,0)$
$\frac{4\pi}{3}$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
2π	$(1,0)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
$-\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
$-\frac{\pi}{2}$	$(0,-1)$

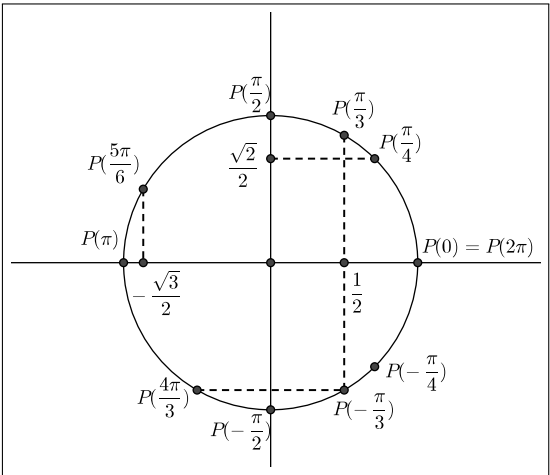


Figura 5.10: Coord. (x,y) para algunos valores de t

SECCIÓN 5.2

Las funciones seno y coseno

§ Definición y propiedades

Hemos definido para cada número real t un punto $P(t)$ en la circunferencia unitaria. Estamos en condiciones de definir las funciones trigonométricas seno y coseno.

Recordemos que para cada $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ es un punto en la circunferencia unitaria con coordenadas (x, y) . Dado que estas coordenadas dependen del valor de t , escribimos

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

Estas coordenadas, vistas como funciones de t , reciben el nombre de *coseno* y *seno*, respectivamente, y se denotan

$$x(t) = \cos(t)$$

$$y(t) = \text{sen}(t)$$

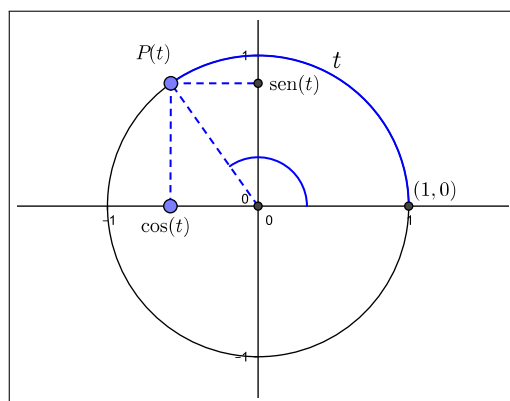


Figura 5.11: Representación del seno y el coseno de t .

A partir de la Tabla 5.10 podemos calcular el coseno y el seno para algunos valores particulares de t , como por ejemplo:

$\cos(0) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
$\text{sen}(0) = 0$	$\text{sen}(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$

Veamos algunas propiedades importantes de estas funciones, que podemos deducir de los conceptos ya trabajados:

1. El dominio de las funciones \cos y sen es el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , ya que hemos definido $P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$ para cada t real.
2. La abscisa de un punto de la circunferencia unitaria puede ser cualquier número entre -1 y 1 , y lo mismo ocurre con la ordenada. Por lo tanto la imagen de ambas funciones es el intervalo $[-1, 1]$. Simbolizamos estos dos resultados así:
$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \quad \text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$
3. Recordemos que $P(t)$ recorre la circunferencia unitaria en sentido antihorario, y que este recorrido se repite en intervalos de longitud 2π . Es decir,

$$P(t + 2k\pi) = P(t),$$

para cualquier número entero k . En consecuencia lo mismo ocurre con las coordenadas $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$.

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$$

$$\text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}(t)$$

Decimos que \cos y sen son funciones periódicas, con período 2π .

Las funciones coseno y seno son funciones periódicas, de período 2π , definidas para todos los reales y su imagen es el intervalo $[-1, 1]$.

4. Los puntos $P(t)$ y $P(-t)$ tienen igual abscisa, pero sus ordenadas tienen distinto signo (o son ambas iguales a 0). Es decir que:

$$\cos(t) = \cos(-t), \quad \text{y} \quad \sin(t) = -\sin(-t).$$

Esto en particular significa que la función cos es par, y la función sen es impar.

5. La función coseno toma valores decrecientes en el intervalo $[0, \pi]$, comenzando en 1 (la abscisa del punto $P(0)$), hasta -1 (la abscisa del punto $P(\pi)$). En el intervalo $[\pi, 0]$ el coseno toma valores crecientes, entre -1 y 1.
6. La función seno toma valores crecientes en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, comenzando en 0 (la ordenada de $P(0)$) hasta 1 (la ordenada de $P(\frac{\pi}{2})$). Luego decrece en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, y vuelve a crecer en $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

§ Gráficos e identidades trigonométricas

En las Figuras 5.12 y 5.13 se muestran los gráficos de las funciones cos y sen, resaltando la traza sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

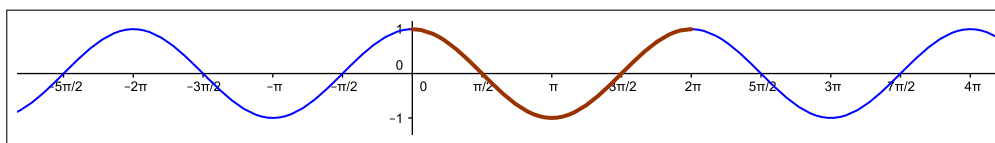


Figura 5.12: La función cos

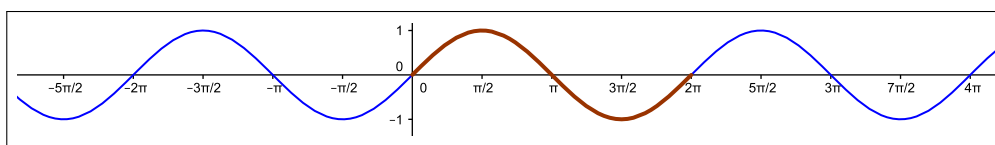


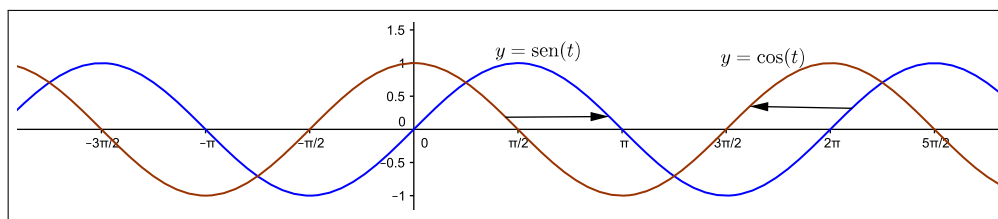
Figura 5.13: La función sen

De los puntos que hemos analizado y de los gráficos de las funciones sen y cos, podemos deducir otras identidades trigonométricas.

1. La relación quizás más simple, es observar que $\cos(t)$ y $\sin(t)$ son las coordenadas de un punto $P(t)$ sobre la circunferencia unitaria. Por lo tanto:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

2. La Figura 5.14 permite ver que una traslación del gráfico del cos en $\frac{\pi}{2}$ unidades, en el sentido positivo de las x , se superpone con el gráfico del seno.

Figura 5.14: Traslaciones del seno y del coseno en π unidades

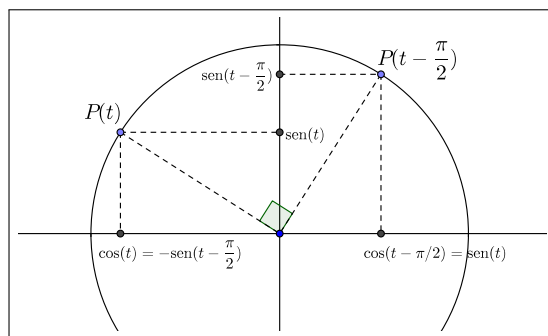
Equivalentemente, una traslación del gráfico del seno en $\frac{\pi}{2}$ unidades, pero en el sentido negativo de las x , se superpone con el gráfico de cos. Esto se traduce en fórmulas como:

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(t)$$

$$\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t)$$

Esta propiedad también puede analizarse a partir de la circunferencia unitaria y la representación de los puntos $P(t)$ y $P(t - \frac{\pi}{2})$. Si $P(t)$ está sobre uno de los ejes cartesianos, el resultado es simple.

Si $P(t)$ pertenece a uno de los cuadrantes, observamos que $P(t)$ y $P(t - \frac{\pi}{2})$ forman un ángulo recto con el origen de coordenadas (ver Figura 5.15). Los triángulos rectángulos que se observan en la figura son todos congruentes entre sí, pues tienen sus tres ángulos congruentes y la hipotenusa mide 1 en todos los casos. En la Figura 5.15 se ilustra el caso en que $P(t)$ pertenece al segundo cuadrante. Invitamos al lector a considerar otros casos a fin de convencerse de la relación entre los signos de $\cos(t)$, $\text{sen}(t - \frac{\pi}{2})$ y $\cos(t)$ y $\text{sen}(t - \frac{\pi}{2})$.

Figura 5.15: Puntos $P(t)$ y $P(t - \frac{\pi}{2})$

3. A partir de la circunferencia trigonométrica puede notarse que los puntos $P(t)$ y $P(t + \pi)$ (o $P(t)$ y $P(t - \pi)$), pertenecen a cuadrantes opuestos con respecto al origen O . Es decir, sus abscisas y ordenadas tienen signos opuestos. (Ver Figura 5.16). Luego, como

$$P(t) = (\cos(t), \text{sen}(t)) \quad \text{y} \quad P(t + \pi) = (\cos(t + \pi), \text{sen}(t + \pi)),$$

obtenemos las siguientes identidades:

$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

$$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}(t)$$

4. En general, para cualquier par s y t en \mathbb{R} se cumplen las siguientes identidades para el coseno de la suma y de la diferencia:

$$\cos(t - s) = \cos(t) \cos(s) + \text{sen}(t) \text{sen}(s)$$

$$\cos(t + s) = \cos(t) \cos(s) - \text{sen}(t) \text{sen}(s)$$

Si $t = s$, entonces

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t)$$

De estas dos fórmulas, y de la relación $\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t)$ se deducen las siguientes fórmulas para el seno de la suma y la diferencia de sus argumentos:

$$\sin(t + s) = \sin(t) \cos(s) + \sin(s) \cos(t)$$

$$\sin(t - s) = \sin(t) \cos(s) - \sin(s) \cos(t)$$

Si $t = s$, entonces

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

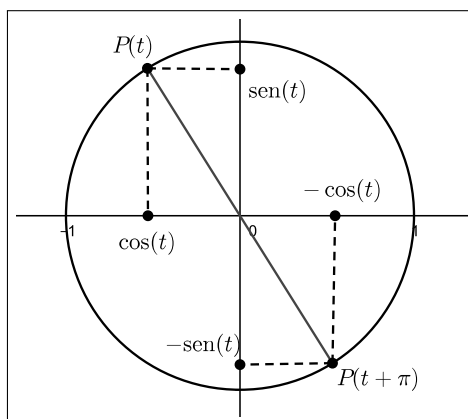


Figura 5.16: Puntos $P(t)$ y $P(t + \pi)$

En la sección 5.5 de este capítulo se ha desarrollado la demostración de estas identidades trigonométricas.

§ Amplitud y período del seno y del coseno

Ya hemos analizado los desplazamientos de una función f en el sentido horizontal o vertical, sumando o restando una constante al argumento de la función o al valor de la función: $f(x \pm c)$, $f(x) \pm c$. También analizamos los gráficos de las funciones $y = -f(x)$ e $y = f(-x)$, que resultan una reflexión con respecto al eje x y al eje y , respectivamente.

En el caso de las funciones trigonométricas, y especialmente para el seno y el coseno, resulta interesante analizar además la transformación del gráfico cuando multiplicamos a la función o a su argumento por una constante. Esto es, estudiar el comportamiento de funciones como:

$$h(t) = a \cos(t), \quad k(t) = a \sin(t), \quad a \neq 0.$$

$$f(t) = \cos(bt), \quad g(t) = \sin(bt), \quad a \neq 0,$$

Las constantes a y b están relacionadas con estiramientos o contracciones del gráfico en el sentido vertical u horizontal, respectivamente.

Consideremos en primer lugar el caso en que las constantes a o b son positivas. La Figura 5.17 muestra el efecto de multiplicar a la función \cos por una constante ($3 \cos(t)$ y $\frac{1}{2} \cos(t)$). La función $y = \cos(t)$ está graficada en línea discontinua. Como podemos ver, la periodicidad de la función no cambia, los valores donde se anula son los mismos, pero se modifica su *amplitud*. Cuanto mayor es el valor de a , mayor es la amplitud de la función.

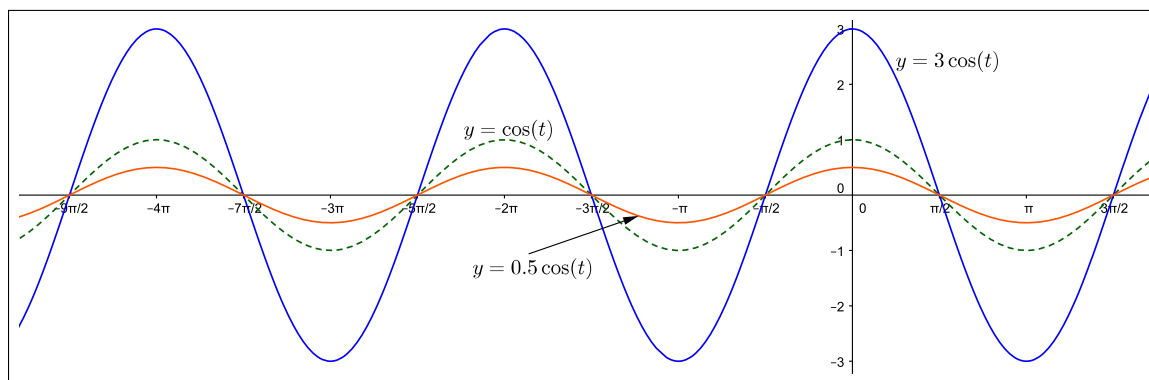


Figura 5.17: Gráficos de $y = 3 \cos(t)$, $y = \frac{1}{2} \cos(t)$

Por otra parte, si multiplicamos el argumento de la función por una constante b positiva, lo que se modifica es la periodicidad de la función (Ver Figura 5.18). Por ejemplo, la función $c(t) = \cos(2t)$ tiene periodicidad π , y la función $h(t) = \cos(\frac{1}{2}t)$ tiene periodicidad 4π . En general, la función $y = \cos(bt)$ tiene un período $\frac{2\pi}{b}$.

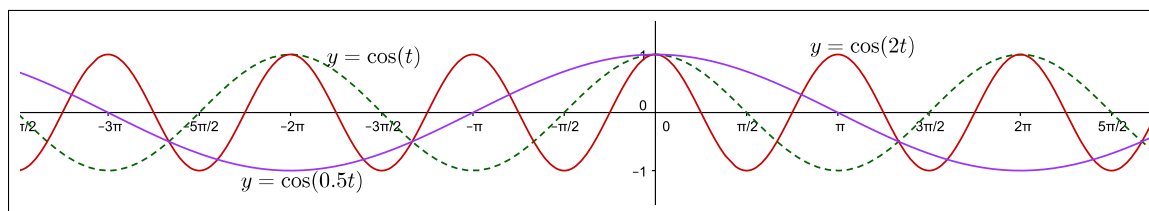


Figura 5.18: Las funciones $y = \cos(2t)$, $y = \cos(\frac{1}{2}t)$

Un comportamiento análogo ocurre modificando la función seno. Por otra parte, si consideramos los valores de a o b negativos, los correspondientes gráficos también muestran cambios de amplitud o de período, pero además existe una reflexión con respecto a uno de los ejes coordenados. En particular el período de la función resulta igual a $\frac{2\pi}{|b|}$.

SECCIÓN 5.3

La función tangente

§ Definición y propiedades

La función tangente se define como el cociente entre las funciones seno y coseno, en los puntos en que este cociente es posible. Esto es:

$$\tan(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

donde k es cualquier número entero.

Ejemplo 1. Calculamos los valores de $\tan(t)$ para $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\tan(0) &= \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \\ \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\sin(\frac{2\pi}{3})}{\cos(\frac{2\pi}{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Una interpretación geométrica de $\tan(t)$ es la siguiente, consideremos la recta paralela al eje y que pasa por el punto $(1, 0)$. Esta recta es *tangente* a la circunferencia unitaria ya que sólo la interseca en este punto. (Ver Figura 5.19). Dado un punto $P = P(t)$ sobre C_1 , y que no esté sobre el eje y , consideramos la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $P(t)$. Esta recta interseca a la recta *tangente* en un único punto Q , cuyas coordenadas cartesianas son $(1, \tan(t))$. Para esto basta observar que \overline{OP} y \overline{OQ} son hipotenusas de dos triángulos rectángulos semejantes, y por lo tanto sus lados son proporcionales. En particular, si llamamos $U = (1, 0)$, entonces:

$$\frac{|\sin(t)|}{|\overline{UQ}|} = \frac{|\cos(t)|}{1},$$

de donde resulta $|\overline{UQ}| = |\tan(t)|$. Hemos tomado el valor absoluto para tener en cuenta los signos de $\sin(t)$ y $\cos(t)$ en cada cuadrante. Observando que $\tan(t)$ y $\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ tienen siempre el mismo signo, concluimos que:

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

El dominio de la función \tan es $\mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, esto es, para definir el dominio de la función \tan , basta que a \mathbb{R} le quitamos todos aquellos valores de t que anulan a la función coseno.

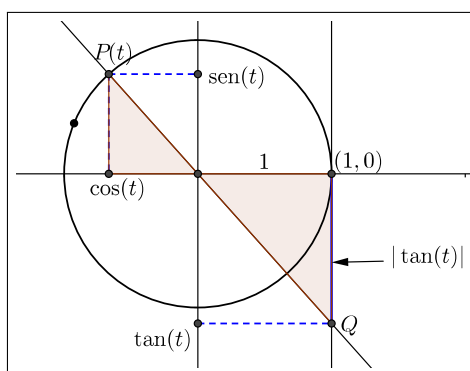


Figura 5.19: Interpretación geométrica de la tangente

La interpretación geométrica de la tangente es interesante no sólo por el sentido geométrico propiamente dicho sino para poner en evidencia la vinculación entre seno, coseno y tangente, por lo tanto ofrece pistas para definir el dominio de la función tangente como se indica a continuación.

La imagen de esta función es el conjunto \mathbb{R} . Aunque no es tan evidente deducirlo a partir de su fórmula, la interpretación geométrica (Figura 5.19) ayuda a comprenderlo. La Figura 5.20 ilustra el gráfico de esta función. Las líneas de puntos no corresponden al gráfico, e indican que el gráfico se aproxima a estas rectas pero en ningún caso las interseca.

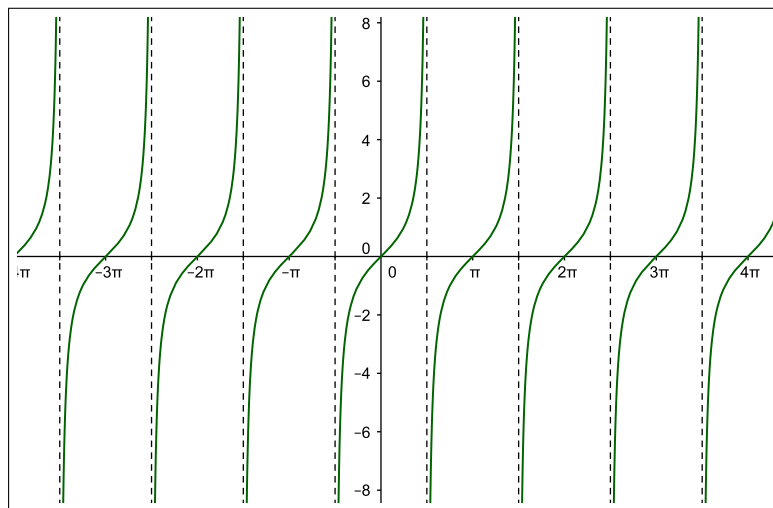


Figura 5.20: La función tangente

De las propiedades $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ y $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$ observamos que

$$\tan(t + \pi) = \tan(t)$$

por lo cual la tangente es una función periódica, con período π . Notemos que para valores de t próximos a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, el coseno se aproxima a 0, ya sea con valores positivos o negativos, mientras que el seno se acerca a 1 o a -1 . Esto trae como consecuencia que la función tangente toma valores muy grandes en valor absoluto cerca de los puntos $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Decimos que la tangente *tiende asintóticamente* a más o menos infinito en estos puntos. La Figura 5.21 muestra los gráficos de las funciones cos y tan, donde puede observarse esta situación.

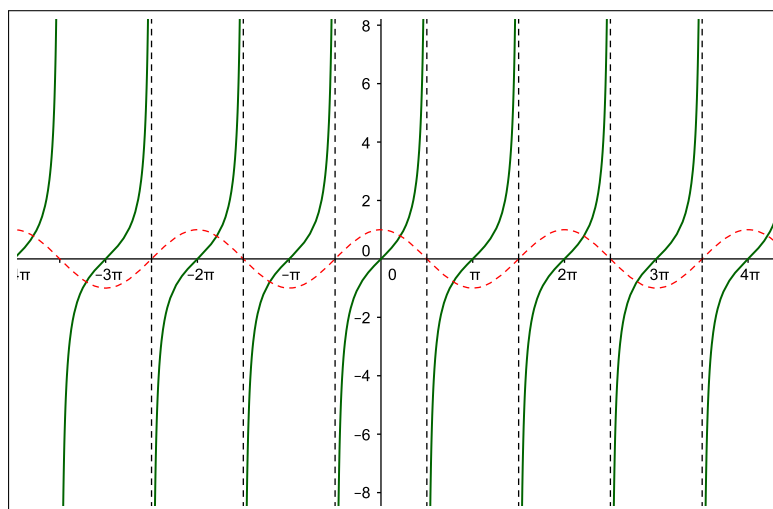


Figura 5.21: Comportamiento asintótico de la función tangente

También observamos que como sen es una función impar y cos es par, entonces

$$\tan(-t) = \frac{\text{sen}(-t)}{\text{cos}(-t)} = \frac{-\text{sen}(t)}{\text{cos}(t)} = -\tan(t)$$

es decir, la función tangente es impar.

Relación entre la tangente y la pendiente de una recta

Consideremos la ecuación de una recta en el plano, $y = ax + b$, con a un número real. Esta recta es paralela a la recta $y = ax$ que pasa por el origen de coordenadas. La recta $y = ax$ corta a la circunferencia unitaria en dos puntos $P(t)$ y $P(t + \pi)$. La Figura 5.22 ilustra esta situación. El punto $P(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$ pertenece a la recta y por lo tanto se cumple que

$$\text{sen}(t) = a \text{cos}(t).$$

Por otra parte, de la definición de función tangente tenemos que $\tan(t) = \frac{\text{sen}(t)}{\text{cos}(t)}$. De estas ecuaciones deducimos que

$$a = \tan(t).$$

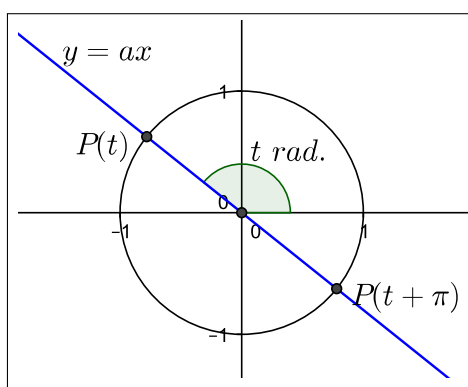


Figura 5.22: Recta $y = ax$

Recordemos que t también es la medida en radianes del ángulo que forma la recta $y = ax$ con el semieje positivo de las x . Así podemos afirmar que:

La pendiente de la recta $y = ax + b$
es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x
 $a = \tan(t)$

§ Funciones secante, cosecante y cotangente

Las funciones trigonométricas *secante* (\sec), *cosecante* (\csc) y *cotangente* (\cot) están definidas por:

$$\sec(t) = \frac{1}{\text{cos}(t)}, \quad \csc(t) = \frac{1}{\text{sen}(t)}, \quad \cot(t) = \frac{\text{cos}(t)}{\text{sen}(t)}$$

siempre sobre el dominio en que estén definidos estos cocientes. Las Figuras 5.23 a, 5.23 b y 5.24 muestran

los gráficos de las tres funciones trigonométricas *coseno*, *seno* y *tangente* en línea de puntos, y de la *secante*, *cosecante* y *cotangente* respectivamente, en línea continua.

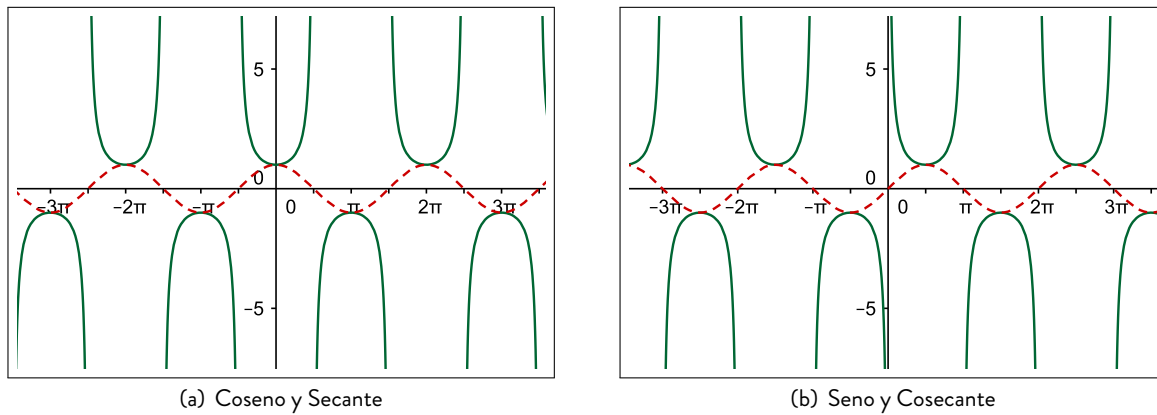


Figura 5.23: Gráficos de Secante y Cosecante

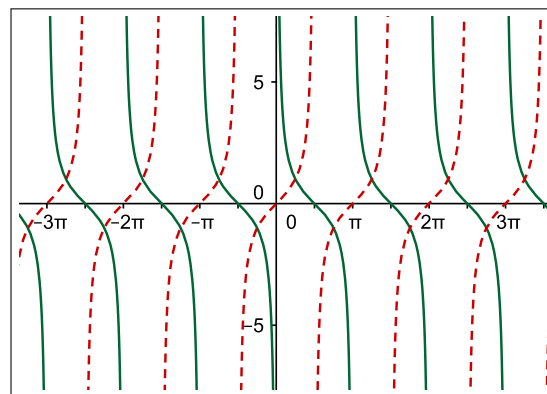
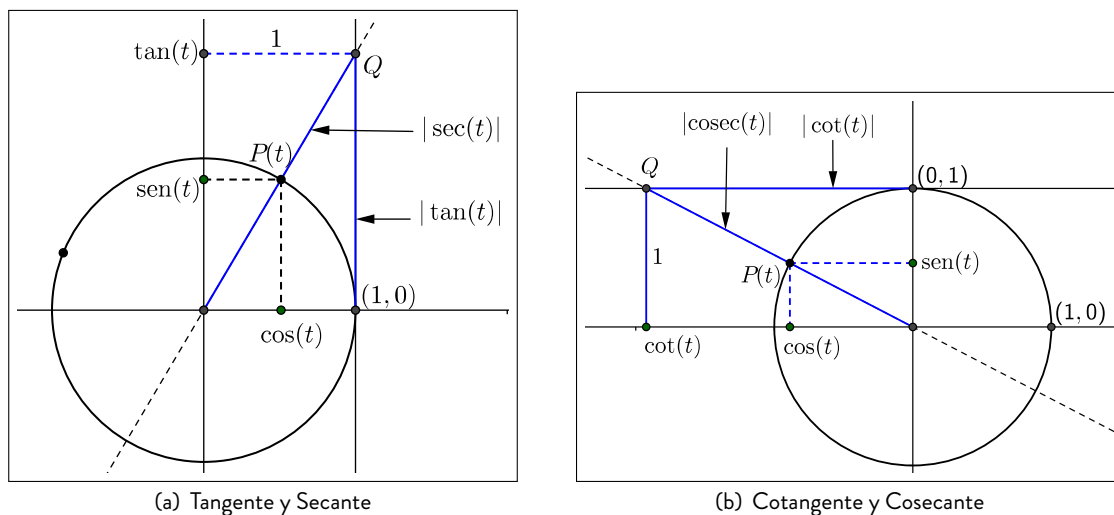


Figura 5.24: La función cotangente y la tangente

La Figura 5.25 muestra la representación geométrica de las funciones trigonométricas en relación a la circunferencia unitaria.

Figura 5.25: Funciones trigonométricas en C_1

Notemos que, al igual que la tangente, la función cotangente tiene período π . Está definida para todos los números reales excepto en aquellos donde el seno se anula: $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La función cotangente es una función periódica, de período π , cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto \mathbb{R} .

Notemos que las funciones sen y cos son periódicas con período 2π y toman valores entre -1 y 1 . Por lo tanto las funciones sec y cosec también son periódicas con período 2π y toman valores mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1 , en su dominio. Esto es:

$$|\sec(t)| = \left| \frac{1}{\cos(t)} \right| \geq 1, \quad |\csc(t)| = \left| \frac{1}{\sin(t)} \right| \geq 1.$$

La función cosecante es una función periódica, de período 2π , cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto $\{t \mid |t| \geq 1\}$.

La función secante es una función periódica, de período 2π , cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Su imagen es el conjunto $\{t \mid |t| \geq 1\}$.

SECCIÓN 5.4

Aplicación sobre triángulos rectángulos

§ Triángulos rectángulos y razones trigonométricas

Recordemos que en la circunferencia unitaria, la medida de un ángulo en radianes es igual a la longitud del arco de circunferencia que lo abarca. Por lo tanto tiene sentido definir las funciones trigonométricas para ángulos

entre 0 y 2π (radianes), o equivalentemente, entre 0° y 360° . En particular, si tenemos un triángulo $\triangle ABC$ con ángulos α , β y γ , tiene sentido calcular $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, y demás funciones trigonométricas en α , y lo mismo para los demás ángulos.

Ahora bien, en el caso que el triángulo sea rectángulo, estos valores trigonométricos pueden calcularse a partir de la medida de sus lados, y reciben el nombre de *razones trigonométricas*. Para ver esto, consideremos

el triángulo $\triangle ABC$ recto en B , y una circunferencia centrada en A (vértice de α), de radio 1. Si la hipotenusa \overline{AC} mide 1 (ver Figura 5.26), entonces $\cos(\alpha)$ es la abscisa del punto C y $\sin(\alpha)$ es la ordenada de C . Ahora bien, la abscisa de C es igual a la longitud del cateto \overline{AB} , y la ordenada de C es la longitud de \overline{BC} . Esto es:

$$\cos(\alpha) = |\overline{AB}| \quad \text{y} \quad \sin(\alpha) = |\overline{BC}|.$$

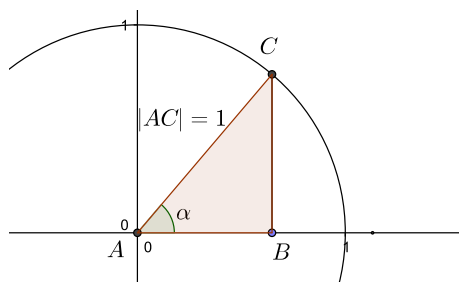
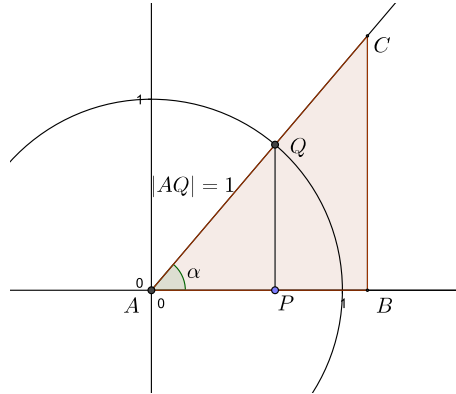


Figura 5.26: Triángulo $\triangle ABC$, recto en B

Si en cambio la hipotenusa \overline{AC} no mide 1, entonces consideramos las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} . Estas semirrectas intersecan a la circunferencia unitaria en sendos puntos P y Q respectivamente, y entonces tenemos que:

$$\sin(\alpha) = |\overline{PQ}|, \quad \cos(\alpha) = |\overline{AP}|. \quad (5.2)$$

Pero el Teorema de Tales nos dice que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$ son semejantes, y por lo tanto sus lados son proporcionales. (Ver Figura 5.27).

Figura 5.27: Triángulos semejantes: $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$

Esto es:

$$\frac{|BC|}{|PQ|} = \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AC|}{|AQ|}.$$

De estas relaciones, obtenemos también las siguientes:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AQ|}, \quad \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|PQ|}{|AQ|}. \quad (5.3)$$

Ahora bien, el triángulo $\triangle APQ$ tiene su hipotenusa igual a 1 ($|AQ| = 1$), por lo que combinando las ecuaciones (5.2) y (5.3) obtenemos:

$$\cos(\alpha) = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

De esta manera podemos ver que $\text{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ pueden calcularse como el cociente o razón entre las longitudes de dos lados del triángulo, y lo mismo ocurre con $\tan(\alpha)$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{|BC|}{|AC|}}{\frac{|AB|}{|AC|}} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

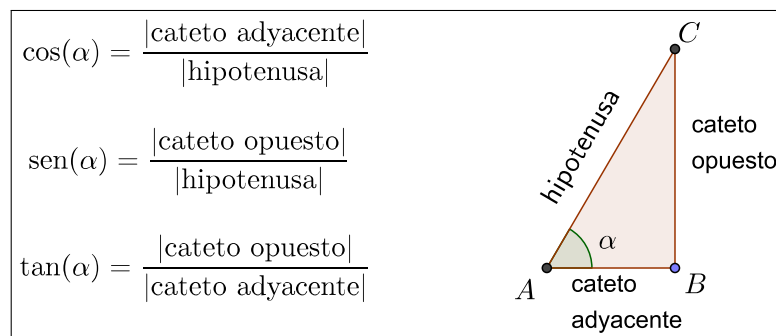


Figura 5.28: Razones trigonométricas

Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, entonces

- $\cos(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto adyacente a α y de la hipotenusa:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}.$$

- $\text{sen}(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto a α y de la hipotenusa:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

- $\tan(\alpha)$ es el cociente entre las longitudes del cateto opuesto y el cateto adyacente:

$$\tan(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|}.$$

Ejemplo 1. En el triángulo de la Figura 5.29, el lado \overline{BC} mide 5 cm, el lado \overline{AC} mide 3 cm y el lado \overline{AB} mide 4 cm. Calcular el seno y el coseno de los ángulos β y γ .

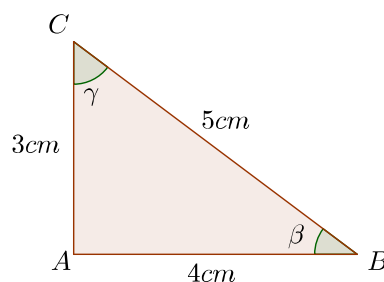


Figura 5.29: Triángulo del Ejemplo 1

Primero identificamos cuál es el cateto adyacente y cuál el cateto opuesto para cada ángulo. En el caso del ángulo β , el cateto adyacente es el lado \overline{AB} y el cateto opuesto es el lado \overline{AC} ; mientras que para el ángulo γ el cateto adyacente es el lado \overline{AC} y el cateto opuesto es el lado \overline{AB} . La hipotenusa es el lado \overline{BC} . Entonces :

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta) &= \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} & \text{sen}(\gamma) &= \frac{|\text{cateto opuesto}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} \\ \cos(\beta) &= \frac{|\text{cateto adyacente}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{BC}|} & \cos(\gamma) &= \frac{|\text{cateto adyacente}|}{|\text{hipotenusa}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} \end{aligned}$$

Por lo que resulta:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta) &= \frac{3}{5} = 0,6 & \text{sen}(\gamma) &= \frac{4}{5} = 0,8 \\ \cos(\beta) &= \frac{4}{5} = 0,8 & \cos(\gamma) &= \frac{3}{5} = 0,6 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta) &= 0,6 & \cos(\beta) &= 0,8 \\ \text{sen}(\gamma) &= 0,8 & \cos(\gamma) &= 0,6 \end{aligned}$$

Notemos que en este ejemplo se cumple que $\text{sen}(\beta) = \cos(\gamma)$ y $\cos(\beta) = \text{sen}(\gamma)$. Esto no es casual, sino que se debe a que $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Luego,

$$\text{sen}(\beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos(\gamma), \quad \cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \text{sen}(\gamma).$$

En analogía a las funciones trigonométricas, para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es posible definir también su *cotangente*, *secante* y *cosecante*. La Tabla 5.1 resume estas definiciones:

Razón trigonométrica	Razón inversa
$\text{sen}(\alpha) = \frac{ \text{cateto opuesto} }{ \text{hipotenusa} }$	$\text{cosec}(\alpha) = \frac{ \text{hipotenusa} }{ \text{cateto opuesto} }$
$\cos(\alpha) = \frac{ \text{cateto adyacente} }{ \text{hipotenusa} }$	$\sec(\alpha) = \frac{ \text{hipotenusa} }{ \text{cateto adyacente} }$
$\tan(\alpha) = \frac{ \text{cateto opuesto} }{ \text{cateto adyacente} }$	$\cot(\alpha) = \frac{ \text{cateto adyacente} }{ \text{cateto opuesto} }$

Tabla 5.1: Razones trigonométricas

En la Tabla 5.2 se dan los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos notables.

Rad.	Grados	cos	sen	tan	sec	cosec	cot
0	0°	1	0	0	1	—	—
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	0	1	—	—	1	0

Tabla 5.2: Razones trigonométricas para ángulos notables

§ Problemas de aplicación

Ejemplo 2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de sus ángulos mide 30°. ¿Cuánto miden los otros lados?

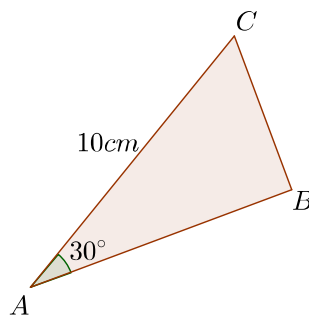


Figura 5.30: Triángulo del Ejemplo 2

Para resolver este problema, denotamos A , B y C a los vértices del triángulo, y donde B es el vértice del ángulo recto y A es el vértice del ángulo de 30°, que llamamos α . (Ver Figura 5.30). Entonces tenemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}, \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

Como $|\overline{AC}| = 10$, $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$, tenemos que los otros lados del triángulo miden:

$$|\overline{AB}| = 5\sqrt{3}, \quad |\overline{BC}| = 5.$$

Dado que la unidad de medida es el centímetro, tenemos que el cateto adyacente mide $5\sqrt{3}$ cm y el cateto opuesto mide 5 cm.

Es importante que todas las longitudes se expresen en una misma unidad de medida. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. En el triángulo isósceles de la figura, los lados iguales miden 1 m, y la altura con respecto al lado restante mide 50 cm. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

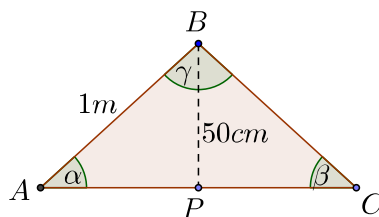


Figura 5.31: Triángulo del Ejemplo 3

Si denominamos α y β a los ángulos iguales, y P es el pie de la altura con respecto al lado \overline{AC} , entonces

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{AB}|}.$$

Ahora bien, la longitud de \overline{BP} está expresada en centímetros y la longitud de \overline{AB} en metros. Para calcular $\text{sen}(\alpha)$ debemos expresar estas longitudes en una misma unidad de medida, cualquiera sea. Si consideramos centímetros, obtenemos:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

e idéntico resultado si consideramos metros:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}.$$

A partir de la Tabla 5.2 concluimos que $\alpha = \beta = 30^\circ$, y el ángulo restante es de 120° .

Ejemplo 4. Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas la parte superior de una torre, bajo ángulos de 45° y 60° con respecto al suelo. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas y sobre la línea que las une. Hallar $|\overline{CH}|$, la altura de la torre.¹

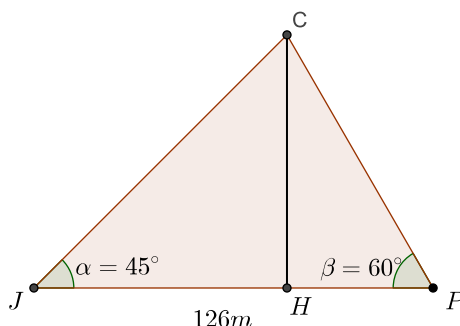


Figura 5.32: Triángulo del Ejemplo 4

La Figura 5.32 ilustra gráficamente este problema. El vértice J del triángulo representa la casa de Juan, P la de Pedro, y C es la parte superior de la torre. La altura con respecto al lado \overline{JP} , es decir, \overline{HC} , determina dos triángulos rectángulos: $\triangle JHC$ y $\triangle PHC$. Entonces tenemos que

$$\tan(45^\circ) = \frac{|\overline{HC}|}{|\overline{JH}|}, \quad \tan(60^\circ) = \frac{|\overline{HC}|}{|\overline{HP}|}$$

es decir

$$|\overline{HC}| = |\overline{JH}| \tan(45^\circ), \quad |\overline{HC}| = |\overline{HP}| \tan(60^\circ).$$

¹Extraído de <http://www.vadenumeros.es/cuarto/trigonometria-distancias.htm>

Pero además tenemos que

$$|\overline{JH}| + |\overline{HP}| = |\overline{JP}| = 126.$$

Para simplificar la escritura, llamamos $x = |\overline{JH}|$ y $h = |\overline{HP}|$. Entonces $|\overline{HP}| = 126 - x$, y resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = x \cdot \tan(45^\circ) \\ h = (126 - x) \cdot \tan(60^\circ). \end{cases}$$

De la Tabla 5.2 vemos que $\tan(45^\circ) = 1$ y $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, por lo cual $h = x$ y entonces

$$h = (126 - h) \cdot \sqrt{3}.$$

Luego

$$h = \frac{126\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \sim 79,9$$

Luego la altura de la torre es aproximadamente 79,9 m.

SECCIÓN 5.5

Apéndice de fórmulas

§ Fórmula para $\cos(t - s)$

Si consideramos dos puntos $P(t)$ y $P(s)$ sobre la circunferencia unitaria, entonces la longitud del arco entre estos puntos es igual a la longitud del arco entre $P(0)$ y $P(t - s)$. (Ver Figura 5.33). Esto implica que las correspondientes cuerdas $\overline{P(0)P(t - s)}$ y $\overline{P(t)P(s)}$ tienen la misma longitud.

Ahora bien, la longitud de estas cuerdas es igual a la distancia entre los extremos, por lo tanto tenemos que:

$$d(P(t), P(s)) = d(P(t - s), P(0)). \quad (5.4)$$

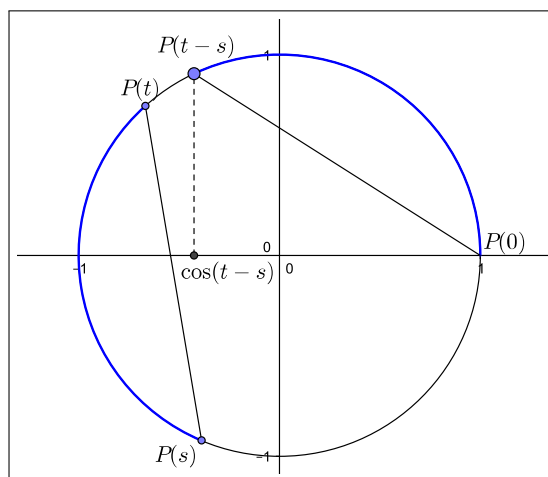


Figura 5.33: $\cos(t - s)$

Las coordenadas x e y de estos puntos son:

$$\begin{aligned} P(t) &= (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) & P(s) &= (\cos(s), \operatorname{sen}(s)) \\ P(t-s) &= (\cos(t-s), \operatorname{sen}(t-s)) & P(0) &= (1, 0). \end{aligned}$$

Recordando la expresión (5.1) para el cálculo de la distancia entre puntos, la igualdad (5.4) puede escribirse como:

$$(\cos(t) - \cos(s))^2 + (\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(s))^2 = (\cos(t-s) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(t-s) - 0)^2. \quad (5.5)$$

El miembro izquierdo de (5.5) es igual a:

$$\cos^2(t) - 2\cos(t)\cos(s) + \cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(t) - 2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s) + \operatorname{sen}^2(s)$$

El miembro derecho de (5.5) es igual a:

$$\cos^2(t-s) + 1 - 2\cos(t-s) + \operatorname{sen}^2(t-s).$$

Ahora bien, dado que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, la ecuación (5.5) resulta:

$$2 - 2\cos(t)\cos(s) - 2\operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s) = 2 - 2\cos(t-s).$$

Así concluimos que:

$$\cos(t-s) = \cos(t)\cos(s) + \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s).$$

Para el cálculo del coseno de la suma, $\cos(t+s)$, observamos que

$$\cos(t+s) = \cos(t - (-s)).$$

Usando que $\cos(-s) = \cos(s)$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen}(s)$ concluimos:

$$\begin{aligned} \cos(t+s) &= \cos(t)\cos(-s) + \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(-s) \\ &= \cos(t)\cos(s) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s) \end{aligned}$$

$$\cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s)$$

§ Fórmula para $\operatorname{sen}(t+s)$

Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t+s) &= \cos(t+s - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(t)\cos(s - \frac{\pi}{2}) - \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s - \frac{\pi}{2}) \\ &= \cos(t)\operatorname{sen}(s) + \operatorname{sen}(t)\cos(s). \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}(t+s) = \operatorname{sen}(t)\cos(s) + \cos(t)\operatorname{sen}(s)$$

Para la fórmula de $\operatorname{sen}(t-s) = \operatorname{sen}(t+(-s))$ usamos que $\cos(-s) = \cos(s)$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen}(s)$, de donde

resulta

$$\boxed{\operatorname{sen}(t-s) = \operatorname{sen}(t)\cos(s) - \cos(t)\operatorname{sen}(s)}$$

Ejercicios

1. Calcular la distancia entre P y Q :

a) $P = (-2, 3)$, $Q = (-2, 5)$ b) $P = (0, 0)$, $Q = (3, -3)$ c) $P = (1, 2)$, $Q = (2, -3)$

2. Escribir la ecuación de la circunferencia centrada en A y con radio r en cada uno de los siguientes casos. Representarla gráficamente.

a) $A = (1, 1)$, $r = 1$ b) $A = (2, 0)$, $r = 2$ c) $A = (0, 0)$, $r = 3$

3. Convertir de radianes a grados sexagesimales, o de grados sexagesimales a radianes, según corresponda:

a) 150° b) $\frac{\pi}{5}$ rad. c) 72° d) $\frac{3}{2}\pi$ rad.

4. Determinar las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos de la circunferencia unidad:

a) $P(3\pi)$ b) $P(\frac{11\pi}{2})$ c) $P(\frac{-7\pi}{4})$ d) $P(\frac{\pi}{6})$

5. Dar los valores de:

a) $\cos(\frac{5\pi}{4})$ c) $\cos(-\pi)$ e) $\cos(-\frac{5\pi}{6})$
 b) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})$ d) $\operatorname{sen}(\frac{21}{3}\pi)$ f) $\operatorname{sen}(-\frac{8\pi}{3})$

6. Sabemos que $\cos(t) = -1$ para todo t en el conjunto $\{t = (2k+1)\pi, | k \in \mathbb{Z}\}$.

Describir de manera análoga las soluciones de:

a) $\operatorname{sen}(t) = 0$ c) $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $\operatorname{sen}(t) = -1$ d) $\cos(t) = \operatorname{sen}(t)$

7. a) Si $\operatorname{sen}(t) = \frac{2}{5}$, ¿qué valores puede tener $\cos(t)$?

b) Sabiendo que $P(t)$ está en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, ¿qué valor tiene $\cos(t)$?

8. Sabiendo que $\operatorname{sen}(t) = -\frac{1}{3}$ y $\cos(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$:

a) Indicar en qué cuadrante se encuentra $P(t)$. b) Calcular $\operatorname{sen}(-t)$ y $\cos(\pi - t)$.

9. a) Calcular $\cos(\frac{\pi}{12})$. (Ayuda: calcular $(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$)

b) Calcular $\operatorname{sen}(\frac{7}{12}\pi)$.

10. Dibujar los gráficos de las siguientes funciones.

a) $f(t) = \sin(2t)$

c) $h(t) = \cos(\pi - t)$

e) $n(t) = \sin(-t)$

b) $g(t) = 3\sin(t)$

d) $m(t) = \sin(\pi + t)$

f) $k(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$

11. Utilice la fórmula para $\cos(t+s)$ y el hecho que $\cos(2t) = \cos(t+t)$ para deducir que:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1.$$

12. Determinar la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con B el vértice del ángulo recto, en cada uno de los siguientes casos. El ángulo α tiene vértice en A .

a) Los catetos son iguales y la hipotenusa mide $\sqrt{20}$ cm.

b) $\alpha = 60^\circ$ y el cateto adyacente mide 10 cm.

c) $\alpha = 45^\circ$ y el cateto opuesto mide 2 cm.

d) La hipotenusa mide 30 cm y $\alpha = 30^\circ$.

13. Sabiendo que $\cos(42^\circ) = 0,74$. Calcular:

a) $\sin(222^\circ) =$

c) $\cos(48^\circ) =$

e) $\sin(132^\circ) =$

b) $\tan(138^\circ) =$

d) $\sin(318^\circ) =$

14. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento el avión se encuentra a una altura de 1200 m y el ángulo de observación desde la torre es de 30° . ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si ésta mide 40 m de altura? La Figura 5.34 ilustra la situación.

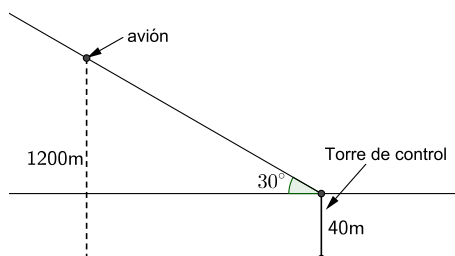


Figura 5.34: Esquema del ejercicio 14