ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 2:
RELACIONES Y FUNCIONES

Esp. Prof. Liliana N. Caputo

RELACIONES BINARIAS

- Sean A y B dos conjuntos. Llamamos relación de A en B, a cualquier subconjunto del producto cartesiano AxB. Es decir, si $R \subset AxB$, R es una relación de A en B. En este caso, A se llama **ALCANCE** de la relación R y B se llama **RANGO** de R.
- Si R es una relación de A en B y $(x, y) \in R$ decimos que y es una **imagen** de x, así como también que x es una **preimagen** de y.

EJEMPLOS

- Como $\varnothing$ es un subconjunto de cualquier otro, en particular $\varnothing \subset AxB$, cualesquiera sean A y B. Se llama, "relación vacía".
- Como todo conjunto está incluido en sí mismo, en particular el producto cartesiano AxB es una relación de A en B.
- Como una relación de A en B es un subconjunto de AxB, se puede escribir por extensión o por comprensión.

EJEMPLOS

- Sean los conjuntos: $A=\{0,1,2,3\}$; $B=\{1,3,4, 9\}$ y las siguientes relaciones de A en B:

R $=\{(0, 3), (2, 9)\}$ (por extensión)

S $=\{(x, y) \in A\text{x}B \ / \ y = x + 1\}$ (por comprensión)

Otras maneras de presentar una relación de A en B:

$(x, y) \in T \Leftrightarrow y = x - 3$;

$x \text{ M } y \Leftrightarrow y = 2x$

$f: A \to B \ / \ f(x) = x^2$

EJEMPLOS

- Sean los conjuntos $A=\{0,1,2,3\}$ y $B=\{1,3,4, 9\}$ como en el ejemplo anterior, la relación

S $=\{(0, 1), (2, 3), (3,4)\}$ ya vista se puede presentar, también mediante una matriz booleana, como sigue:

	1	3	4	9
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0

Donde se consigna 1 en la celda xy, siempre que sea $v[(x,y) \in S] = 1$, y 0 en caso contrario.

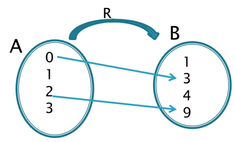
CONJUNTOS DE DEFINICION

- Ya hemos dicho que si R es una relación de un conjunto A en otro conjunto B, A se llama alcance y B rango de la relación R.
- El siguiente subconjunto de A se denomina **DOMINIO** de R: $D(R) = \{x \in A \ /(x, y) \in R\}$. Para el ejemplo de la relación $R = \{(0, 3), (2, 9)\}$, $D(R)= \{0, 2\}$.
- El siguiente subconjunto de B se denomina **IMAGEN** de R: $R(A) = \{y \in B \ /(x, y) \in R\}$. Para el ejemplo de la relación $R = \{(0, 3), (2, 9)\}$, $R(A)= \{3, 9\}$.

REPRESENTACION GRAFICA

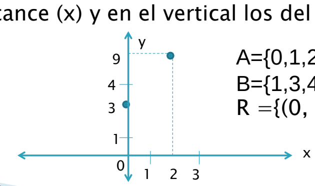
- Una relación se puede representar gráficamente mediante diagramas de Venn. Para la relación R del ejemplo, la gráfica es:

A={0,1,2,3}
B={1,3,4, 9}
R ={(0, 3), (2, 9)}



REPRESENTACION GRAFICA

- También se pueden representar en gráficos cartesianos, donde cada punto del plano representa a un par ordenado. En el eje horizontal se representan los elementos del alcance (x) y en el vertical los del rango (y).



A={0,1,2,3}
B={1,3,4, 9}
R ={(0, 3), (2, 9)}

RELACION INVERSA

- Dada una relación R de A en B, existe su **inversa**, R^{-1}, de B en A, tal que:

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$$

O lo que es lo mismo:

$$R^{-1}(x) = y \Leftrightarrow R(y) = x$$

Para el ejemplo dado, R ={(0, 3), (2, 9)} $\subset$ AxB, resulta R^{-1} = {(3, 0), (9, 2)} $\subset$ BxA

Probaremos a continuación que $(R^{-1})^{-1} = R$

RELACIONES EN UN CONJUNTO

- Sea A un conjunto no vacío. Diremos que R es una relación en A, si R es un subconjunto del producto cartesiano AxA es decir, si $R \subset A^2$.
- EJEMPLOS: Si A={1,2,3} las siguientes son relaciones en A:
- R = {(1,2), (2,1)}
- S = {((1,1), (1, 3), (3, 1)}
- $T = \{(x, y) \in A^2 / x > y\}$
- M = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)}

CLASIFICACION

Sea A un conjunto no vacío cualquiera y sea R una relación en A. Diremos que:

- R es una **relación de orden amplio en A**, si se cumplen las siguientes propiedades:

a) Propiedad reflexiva: $\forall x \in A: (x, x) \in R$.

b) Propiedad antisimétrica: Es verdadera la siguiente implicación:

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y.$$

c) Propiedad transitiva: Es verdadera la siguiente implicación:

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$$

CLASIFICACION

Sea A un conjunto no vacío cualquiera y sea R una relación en A. Diremos que:

- R es una **relación de orden estricto en A**, si se cumplen las siguientes propiedades:

a) Propiedad asimétrica: Es verdadera la siguiente implicación:

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R.$$

b) Propiedad transitiva.

ORDEN TOTAL O PARCIAL

- Sea $R \subset A^2$ una relación de orden (amplio ó estricto) en A:
- R es un **orden total** en A si, y sólo si,

  $\forall x, y \in A: (x, y) \in R \vee (y, x) \in R.$

- Si R no es un orden total en A, diremos que es un **orden parcial**. Entonces:

  $\exists x, y \in A / (x, y) \notin R \wedge (y, x) \notin R.$

CLASIFICACION

Sea A un conjunto no vacío cualquiera y sea R una relación en A. Diremos que:

- R es una **relación de equivalencia en A**, si se cumplen las siguientes propiedades:

a) <u>Propiedad reflexiva.</u>

b) <u>Propiedad simétrica</u>: Es verdadera la siguiente implicación: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

c) <u>Propiedad transitiva</u>.

CONJUNTO COCIENTE

- Sea R una relación de equivalencia en $A \neq \varnothing$ y $a \in A$. Llamamos **clase de equivalencia de a**, al conjunto de todos los elementos de A que se relacionan con "a". Es decir, al conjunto:

  $\overline{a} = \{ x \in A \ / \ (x, a) \in R \}$

- El conjunto formado por <u>**todas**</u> las clases de equivalencia de elementos de A se denomina **conjunto cociente**. Notación: A/R.

CLASIFICACION

- Puede notarse que existen relaciones que no son de orden ni de equivalencia es decir, que la clasificación dada **no es exhaustiva**. En efecto, la relación $R = \{(1,2), (2,1)\}$ en el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ no es clasificable porque no cumple la propiedad transitiva, pues $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \wedge (1,1) \notin R$.
- Además **no es excluyente**, puesto que existen relaciones que son de orden amplio y de equivalencia, como la identidad en cualquier conjunto $A \neq \emptyset$.

IDENTIDAD

- Sea un conjunto $A \neq \emptyset$. Definimos la identidad en A, como la siguiente relación en A: $i_A: A \to A \ / \ i_A(x) = x$

lo cual equivale a que $(x, y) \in i_A \Leftrightarrow y = x$

Probaremos que

i_A es **relación de equivalencia y de orden amplio** en $A \neq \emptyset$, cualquiera.

CLASIFICACION

- Veamos una serie de relaciones en un conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y veamos cuáles son clasificables y cuáles no.
- $R = i_A \cup \{(4,2), (2,3)\}$
- $S = \{((1,1), (1, 3), (3, 1)\}$
- $T = \{(x,y) \in A^2 / \ x > y\}$
- $M = i_A \cup \{(1, 5), (1, 2), (4, 2)\}$
- La relación del ejercicio 2 i del T.P. 2.

TEOREMA (Se acepta sin demostración)

- Si R es una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A, A/R es una partición de A.
- Recíprocamente, si P es una partición de un conjunto no vacío A, P induce una relación de equivalencia en A.

Ejemplos:

- Hallaremos el conjunto cociente del ejercicio 2 ii del T.P. 2. que es una partición de A.
- Veamos cuál es la relación de equivalencia en el ejercicio 5 a del T.P. 2.

FUNCIONES

DEFINICION

- Un relación f de A en B es una función si, y sólo si, a cada elemento de A f le hace corresponder una única imagen en B.
- Nótese que la definición dada nos asegura que los conjuntos alcance y dominio de f son iguales, con lo cual la siguiente proposición es verdadera: $\forall x \in A: f(x) \in B$.
- Además, como cada elemento de A tiene una única imagen en B, también es verdadera:

$$f(x) = y \wedge f(x) = z \Rightarrow y = z$$

EJEMPLOS

- Si $A=\{0,1,2,3\}$; $B=\{1,3,4, 9\}$ y $R =\{(0, 3), (2, 9)\}$, R no es función porque $D(R) = \{0, 2\} \neq A$.
- La relación ya analizada del ejercicio 5 a del TP 2, no es función de A en A, ya que $1 \in A$ y admite dos imágenes distintas: 1 y 2.
- Veamos que i_A, cualquiera sea el conjunto no vacío A, es una función de A en A.

IGUALDAD

- Dadas dos funciones $f: A \to B$ y $g: C \to D$, definimos la igualdad como sigue:
  $f = g \Leftrightarrow A = C \wedge \forall x \in A: f(x) = g(x)$
- Ejemplo: Sean $A =\{1, 2, 3\}$, $B =\{x \in \mathbb{N} / x \leq 20\}$ $C = \{x \in \mathbb{N} / x < 30\}$ y las funciones:
  $f:A \to B \,/\, f(x) = (1 + x)^2$,
  $g:A \to C / g(x) = x^2 + 2x + 1$,
  $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \,/\, h(x) = (1 + x)^2$,
  Veamos que $f = g$, pero $f \neq h$.

CLASIFICACION

- Sea $f: A \to B$ una función. Entonces:
- f es inyectiva si, y sólo si, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, con $x, y \in A$.
- f es sobreyectiva si, y sólo si, $f(A) = B$.
- f es biyectiva si, y sólo si, f es inyectiva y sobreyectiva.
- Veamos a continuación que i_A es una función biyectiva, cualquiera sea el conjunto A, no vacío.

FUNCION INVERSA

- Sea f: A $\rightarrow$ B una función. Como f es una relación de A en B, ya sabemos que existe su inversa f^{-1}: B $\rightarrow$ A. Veamos en qué casos dicha relación inversa es función:
- **TEOREMA:**

f^{-1}: B $\rightarrow$ A es función si, y sólo si, f es biyectiva

Admitimos que esta proposición es verdadera, sin demostración.

COMPOSICION DE FUNCIONES

- Sean f: A $\rightarrow$ B y g: C $\rightarrow$ D funciones, tales que f(A) $\subset$ C. La composición de f y g, en ese orden, es la función siguiente:

  $g_\circ f: A \rightarrow D \;/\; (g_\circ f)(x) = g[f(x)]$
- Ejemplo: Sean A ={1, 2, 3}, B ={x $\in \mathbb{N}/x \leq 10$} C = {x $\in \mathbb{N}/ x < 15$} y D = {x $\in \mathbb{N} / x \leq 20$}, siendo además:

  f: A $\rightarrow$ B / $f(x) = x^2$ y g: C $\rightarrow$ D / $g(x) = x + 1$

Como f(A) = {1, 4, 9} $\subset$ C, $g_\circ f$ es la función:

$g_\circ f: A \rightarrow D / (g_\circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1.$

PROPIEDADES

Sean f:A$\rightarrow$ B y g: C$\rightarrow$ D funciones, con f(A) $\subset$ C. Entonces:

- $g_\circ f \neq f_\circ g$
- Si f y g son inyectivas, $g_\circ f$ es inyectiva.
- Si B = C, f y g son sobreyectivas, entonces, $g_\circ f$ es sobreyectiva.
- Si B = C, f y g son biyectivas, $g_\circ f$ es biyectiva.
- $f_\circ f^{-1} = i_A \wedge f^{-1}{}_\circ f = i_B$

Veamos sus demostraciones