ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 4:
NUMEROS COMPLEJOS
Esp. Prof. Liliana Caputo

DEFINICION

- Sean $\mathbb{C}$ un conjunto, un elemento i $\notin \mathbb{R}$, $\oplus$ un símbolo. Entonces, $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos si, y sólo si, se cumplen los siguientes axiomas de construcción:
- C1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- C2. $i \in \mathbb{C}$.
- C3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a \oplus ib \in \mathbb{C}$.
- C4. Los únicos elementos de $\mathbb{C}$ son los determinados por C1, C2 y C3.

IGUALDAD

- Dados dos números complejos

$a \oplus ib$ y $c \oplus id$

Decimos que $a \oplus ib = c \oplus id \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

- <u>Axiomas de operatividad</u>:

O1. $i0 = 0$
O2. $i1 = i$
O3. $a \oplus i0 = a$
O4. $0 \oplus ib = ib$
O5. $i(-b) = -ib$

OBSERVACIONES

- El número i se llama **unidad imaginaria**.
- Dado z = a ⊕ ib, el número real a se llama **parte real de z** (a = Re(z)) y el número real b es su **parte imaginaria** (b = Im(z)).
- Si z ∈ $\mathbb{C}$ / Re(z) = 0, diremos que z es un **imaginario puro**.
- Por axioma O3, ∀a∈$\mathbb{R}$: Im(a) = 0.

OBSERVACIONES

- Dado z = a ⊕ ib, se llama **conjugado de z**, al número complejo $\overline{z}$ tal que:

  Re(z) = Re($\overline{z}$) ∧ Im(z) = −Im($\overline{z}$)

  Es decir, $\overline{z}$= a ⊕ i(−b) = a ⊕ (−ib) (por axioma O5).

- Dado z = a ⊕ ib, se llama **módulo o norma de z**, al número real no negativo:

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

OPERACIONES EN $\mathbb{C}$

- Sean a ⊕ ib y c ⊕ id ∈ $\mathbb{C}$, definimos:
- (a ⊕ ib) $\underline{+}$ (c ⊕ id) = (a + c) ⊕ i(b + d), donde + es la suma de números reales.
- (a ⊕ ib) X (c ⊕ id) = (a.c – b.d) ⊕ i(a.d + b.c), donde . es el producto de números reales. Veamos que:
- i X b = ib.
- a $\underline{+}$ ib= a ⊕ ib
- ∀a, b ∈ $\mathbb{R}$: a $\underline{+}$ b = a + b ∧ a X b = a.b

A partir de ahora, escribimos simplemente:

z = a + ib, z + w y z.w

puesto que ya no hay ambigüedad respecto a qué operación es la que se indica con + y con .

PROPIEDADES DE LA SUMA

- LEY DE CIERRE:
  $\forall z, w \in \mathbb{C}: z + w \in \mathbb{C}$
- LEY ASOCIATIVA:
  $\forall z, w, v \in \mathbb{C}: z + (v + w) = (z + v) + w$
- LEY CONMUTATIVA:
  $\forall z, w \in \mathbb{C}: z + w = w + z$
- EXISTENCIA DE NEUTRO:
  $\exists\, 0 \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}: z + 0 = z$
- EXISTENCIA DE OPUESTO:
  $\forall\, z \in \mathbb{C}, \exists -z \in \mathbb{C} \ / -z + z = 0$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO

- LEY DE CIERRE:
  $\forall z, w \in \mathbb{C}: z.w \in \mathbb{C}$
- LEY ASOCIATIVA:
  $\forall z, w, v \in \mathbb{C}: z.(v.w) = (z.v).w$
- LEY CONMUTATIVA:
  $\forall z, w \in \mathbb{C}: z.w = w.z$
- EXISTENCIA DE NEUTRO:
  $\exists\, 1 \in \mathbb{C}\ (1 \neq 0), \forall z \in \mathbb{C}: z.1 = z$
- EXISTENCIA DE INVERSO DE C/ELEMENTO NO NULO:
  $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists\, z^{-1} \in \mathbb{C} / z.z^{-1} = 1$
- LEY DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESP. A LA SUMA
  $\forall z, w, v \in \mathbb{C}: z.(v + w) = z.v + z.w$

ESTRUCTURA DE ($\mathbb{C}$, +, .)

Vemos que las propiedades de suma y producto en $\mathbb{C}$, son las mismas que cumplían la suma y la multiplicación en $\mathbb{R}$.

En consecuencia, la estructura de ($\mathbb{C}$, +, .) es de **cuerpo**.

Sin embargo, si quisiéramos definir una relación de orden en $\mathbb{C}$, veríamos que dicha relación no será consistente con la suma y el producto que hemos definido. En consecuencia, ($\mathbb{C}$, +, .) es cuerpo NO ordenado.

OBSERVACIONES

- A la suma de un número complejo z y del opuesto de otro, w, la denotamos con z – w.
- Al producto de z y del inverso de $w \neq 0$ lo denotamos con z / w.
- Al conjugado de un complejo a + ib, lo escribimos como a – ib.

POTENCIACION

Sean $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos:

- $z^0 = 1$
- $0^n = 0$
- $z^n = z.z^{n-1}$
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

OBSERVACION 1

- Como la definición es análoga a la de la potenciación de números reales y dado que las propiedades de la potenciación fueron demostradas por inducción sobre el exponente (y no usando a qué conjunto pertenecen las bases) las mismas demostraciones sirven para probar que esas propiedades valen también en $\mathbb{C}$: $z^1 = z$.

Potencia de potencia.

Producto de potencias de igual base.

Propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto.

Teorema del binomio de Newton.

OBSERVACION 2

- Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el Teorema de Newton:

$$z^n = (a+ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(ib)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} i^k b^k$$

OBSERVACION 3

- Veamos como calcular i^n, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
- Como $i \notin \mathbb{R}$, $i \neq 0$. Luego: $i^0 = 1$.
- Ya vimos que vale que $i^1 = i$.
- $i^2 = i.i^1 = i.i = -1$.
- $i^3 = i.i^2 = -i$.
- Si $n \geq 4$, $i^n = i^r$, con $r = r(n, 4)$.

Por lo tanto, existen sólo 4 potencias distintas de i: 1, i, −1 y −i.

RADICACION

- Sean $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Decimos que w es una raíz n – ésima de z, si $w^n = z$ es decir,

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$$

Nótese que con esta definición (similar a la dada en el conjunto de números reales) ha quedado resuelto el problema de calcular raíces n – ésimas de números reales negativos.

Probemos que si $z, w \in \mathbb{C}$, $\sqrt[n]{zw} = \sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$

Si a es un número real positivo, $\pm\sqrt{a}$ son 2 números reales y, como $-a = -1.a$, se tiene:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1.a} = \sqrt{-1}.\sqrt{a} = i.\sqrt{a}, \text{por ser } i^2 = -1$$

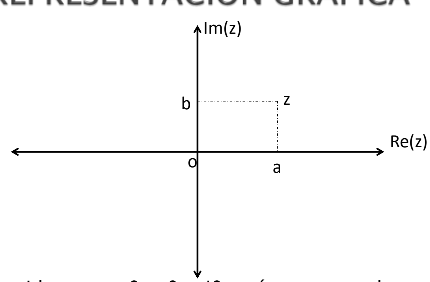
REPRESENTACION GRAFICA

- Así como al conjunto de números reales (vía el axioma de completitud) lo identificamos con una recta, al conjunto de números complejos lo podemos identificar con el plano es decir, con el producto cartesiano $\mathbb{R}^2$. Así pues, todo número complejo z, se puede representar como un punto del plano, de coordenadas (Re(z), Im(z)) y viceversa (es decir, que todo punto del plano p de coordenadas (x, y) representa al número complejo x + iy).

REPRESENTACION GRAFICA

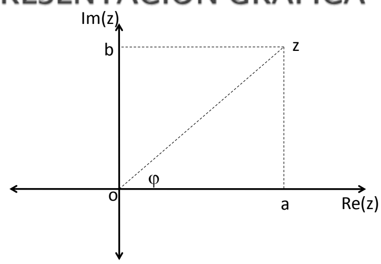
- Al representar un número complejo en un sistema de ejes cartesianos, es usual llamar al eje horizontal eje real (porque sobre él se proyecta la parte real del complejo) y al eje vertical eje imaginario (porque sobre él se representan las partes imaginarias de dichos números).
- Así pues, el complejo $z = a + ib \neq 0$ se representa como sigue:

REPRESENTACION GRAFICA



Es evidente que $0 = 0 + i0$ está representado por el punto de coordenadas (0,0).

REPRESENTACION GRAFICA



De esta manera queda determinado un triángulo rectángulo (opz), siendo o el punto de coordenadas (0, 0) y p = (a, 0).

REPRESENTACION GRAFICA

- Entonces, la distancia de o a z es la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo, con lo cual, por el teorema de Pitágoras podemos afirmar que:

$$d^2(o, z) = a^2 + b^2.$$

- En consecuencia, resulta que

$$d(o, z) = +\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

- Llamando φ a la amplitud del ángulo (poz), diremos que dicha amplitud es el **argumento de z**. Notación: $\arg(z) = \varphi$.
- Si $\varphi \in \mathbb{R}$ $/ 0 \leq \varphi < 2\pi$, diremos que φ es el argumento principal de z, y lo denotamos con Arg(z). De donde $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

COORDENADAS POLARES

- Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Llamamos coordenadas polares de z a su módulo y argumento.
- Notación: $z = <|z|, \arg(z)>$.
- Procediendo como sigue, podemos representar a z en el plano con sólo conocer sus coordenadas polares:

1. Se traza una recta que pasa por el origen de coordenadas que forma con el semieje real positivo un ángulo de amplitud Arg(z).
2. Sobre la recta trazada en 1, se marca el punto z, tal que $d(o, z) = |z|$.

IGUALDAD

- Sean z, w $\in$ $\mathbb{C}$– {0}, tales z = <|z|, arg(z)> y w = <|w|, arg(w)> .

Entonces:

$z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \wedge \arg(z) = \arg(w) + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

Es decir, dos complejos no nulos son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en un número entero de giros.

BINOMICA → POLAR

- Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ / $z = a + ib$.
- Ya vimos que $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$
- Si a = 0, es evidente que:

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ o que $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2}$ es decir, $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \arg(z) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

- Si $a \neq 0$, en el triángulo rectángulo (opz)se tiene que $\text{tg}(\text{Arg}(z)) = \frac{b}{a}$. De donde resulta:

$$\text{Arg}(z) = \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

POLAR → BINOMICA

- Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ / $z = <|z| = \rho, \arg(z) = \varphi>$
- En el triángulo rectángulo (opz) se tiene:
- $\text{sen } \varphi = \frac{\text{Im}(z)}{\rho} \Rightarrow \text{Im}(z) = \rho.\text{ sen } \varphi$
- $\cos \varphi = \frac{\text{Re}(z)}{\rho} \Rightarrow \text{Re}(z) = \rho.\cos \varphi$

Luego: $z = \text{Re}(z) + i.\text{Im}(z) = \rho.\cos \varphi + i.\ \rho.\text{sen } \varphi$

FORMAS TRIGON. Y EXP.

- Hemos dicho que $z = \rho.\cos\varphi + i.\rho.\text{sen}\,\varphi$

Entonces, usando propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, se tiene:

$$z = \rho.(\cos\varphi + i.\text{sen}\,\varphi)$$

FORMA TRIGONOMETRICA DE $z \neq 0$

- A partir de la forma trigonométrica de $z \neq 0$ y usando la fórmula de Euler: $\cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi = e^{i\varphi}$, obtenemos la **FORMA EXPONENCIAL DE $z \neq 0$:**

$$z = \rho.e^{i\varphi}$$

SUBCONJUNTOS DEL PLANO

- Hemos dicho que dado $z \in \mathbb{C}$, $d(0,z) = |z|$.
- Si $z, w \in \mathbb{C}$, definimos, la **distancia de z a w** como $|z - w|$.
- Si r es un número real positivo, el conjunto

$$C(w, r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - w| = r\}$$

es la circunferencia con centro en w y radio r, cuya ecuación es, si $w = (a, b)$, la siguiente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ya que por definición, dicha circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (w).

SUBCONJUNTOS DEL PLANO

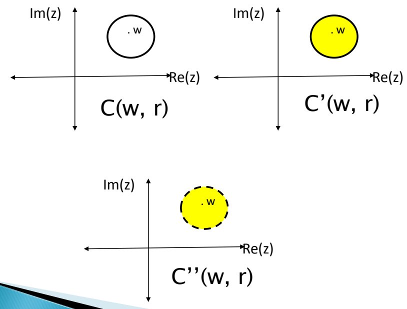
- Si $r = 0$: $C(w, 0) = \{w\}$.

- En cambio, $C'(w, r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - w| \leq r\}$ es el círculo con centro en w y radio r, unión la circunferencia $C(w, r)$.

- Por último, $C''(w, r) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - w| < r\}$ es el círculo con centro en w r radio r. Entonces:

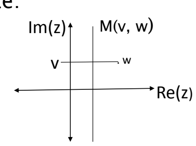
$$C''(w, r) = C'(w, r) - C(w, r)$$

CIRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS



SUBCONJUNTOS DEL PLANO

- Sean los complejos v y w. El siguiente conjunto $M(v, w) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - v| = |z - w|\}$ está formado por todos los puntos del plano que equidistan de v y de w que es, por definición, la mediatriz del segmento (vw).
- Gráficamente:



FORMULA DE DE MOIVRE

- Sea $z = <\rho, \varphi>$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:
- $z^n = < \rho^n, n.\varphi>$
- $z^n = \rho^n (\cos n.\varphi + i.\operatorname{sen} n.\varphi)$
- $z^n = \rho^n e^{i.n.\varphi}$

SE DEMOSTRARA POR INDUCCION SOBRE n

RADICACION

- Ya hemos definido la radicación en $\mathbb{C}$. Sea w una raíz n – ésima de z = $<\rho, \varphi>$ es decir, que $w^n = z$. Si $w = <\alpha, \theta>$, por fórmula de De Moivre, resulta que $w^n = <\alpha^n, n.\theta>$, de donde, por igualdad de números complejos en forma polar, resulta:

$$\rho = \alpha^n \wedge n.\theta = \varphi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

De donde:

$$\alpha = \sqrt[n]{\rho} \wedge \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

RADICACION

- Si bien hay tantas raíces n – ésimas de z como números enteros, veamos que existen sólo n raíces n-ésimas distintas de z.
- En efecto, si $k \geq n \vee k < 0$, se tiene que, por algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$, existen q, r enteros, tales que $k = qn + r$, con $0 \leq r < n$.

Luego:

$$\arg(w_k) = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(qn+r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2qn\pi + 2r\pi}{n} = \frac{(\varphi + 2r\pi) + 2qn\pi}{n} =$$
$$= \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + \frac{2qn\pi}{n} = \arg(w_r) + 2q\pi$$

Además, $|w_k| = \sqrt[n]{\rho} = |w_r|$, de donde $w_k = w_r$.

RADICACION

- En consecuencia, puede interpretarse que las n raíces n – ésimas de un complejo no nulo z, están representadas por los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia con centro en (0,0) y radio $\sqrt[n]{|z|}$.
- Ejemplo: $z = 1 - i$. $|z| = +\sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(z) = \frac{7}{4}\pi$. Sus raíces cúbicas son:

$$w_0 = <+\sqrt[6]{2}, \frac{7}{12}\pi> \qquad w_1 = <+\sqrt[6]{2}, \frac{15}{12}\pi>$$

$$w_2 = <+\sqrt[6]{2}, \frac{23}{12}\pi>$$