UNIDAD V:
TEOREMA DEL VALOR MEDIO. LÍMITES INDETERMINADOS. MAC LAURIN. TAYLOR.

Fórmulas de Mac Laurin y Taylor. Resto de las fórmulas de Mac Laurin y Taylor.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan cómo obtener las fórmulas de Mac Laurin y Taylor de una función derivable, así como las diferentes expresiones para el resto.

Sabemos que si una función y=f(x) es derivable en el punto x_0, entonces el incremento Δy puede escribirse en ese punto de la forma:

$$\Delta y = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) = a + b(x - x_0) + r(x - x_0)$$

¿Se podrá generalizar este hecho a derivadas de orden superior?

Suponga que queremos encontrar un polinomio de 4to grado de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Que aproxime la función $f(x) = \ln(x+1)$ en $x = 0$

Si hacemos P(0)=f(0), y con la primera, segunda, tercera y cuarta derivada hacemos lo mismo, entonces tendremos una buena aproximación.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$f(0) = \ln(1) = 0 \qquad P(0) = a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$$

$$f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \qquad P'(0) = a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad P''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2$$

$$f''(0) = -\frac{1}{1} = -1 \qquad P''(0) = 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2$$

$$P''(0) = 2a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$f'''(0) = 2$$

$$P'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x$$

$$P'''(0) = 6a_3 \rightarrow \boxed{a_3 = \frac{2}{6}}$$

$$f^{(4)}(x) = -6\frac{1}{(1+x)^4}$$

$$f^{(4)}(0) = -6$$

$$P^{(4)}(x) = 24a_4$$

$$P^{(4)}(0) = 24a_4 \rightarrow \boxed{a_4 = -\frac{6}{24}}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

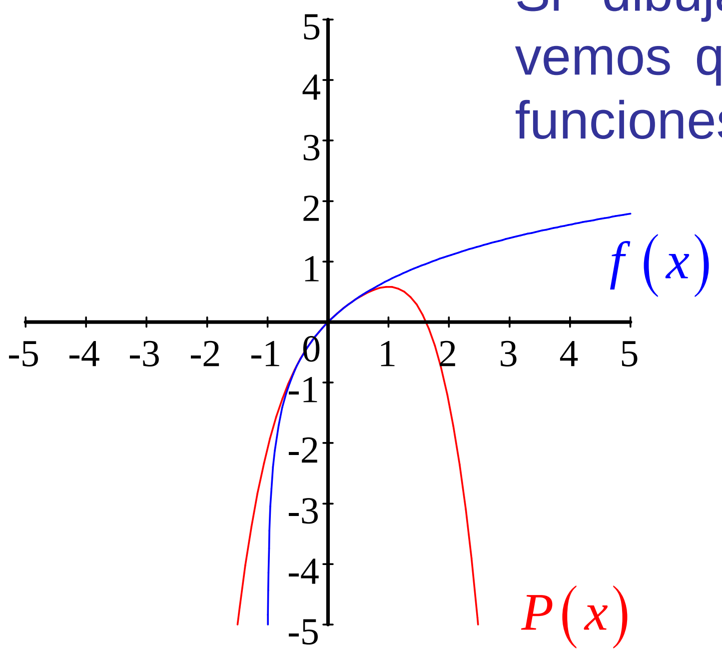
$$f(x) = \ln(x+1)$$

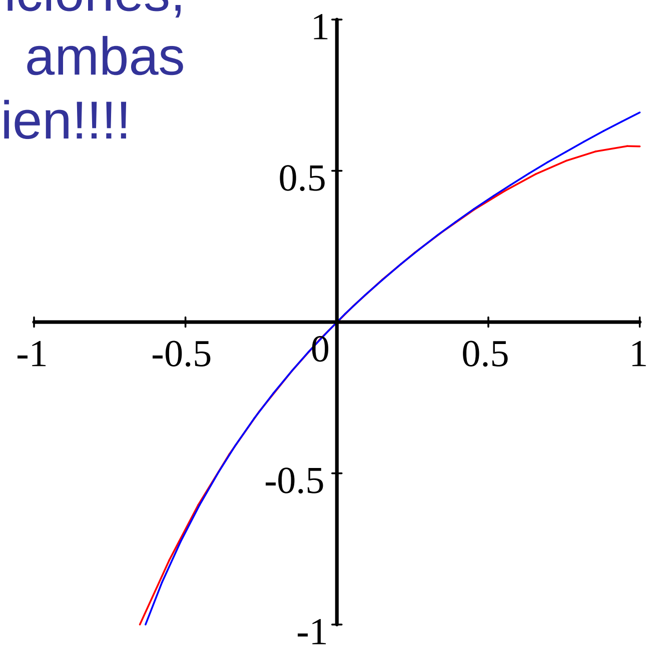
$$P(x) = 0 + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4$$

$$P(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$f(x) = \ln(x+1)$$

Si dibujamos ambas funciones, vemos que cerca de x=0, ambas funciones coinciden muy bien!!!!





Nuestro polinomio: $0+1x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{6}x^3-\frac{6}{24}x^4$

Posee la forma: $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4$

O sea : $\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

Este patrón aparece no importa cuál sea la función original!!!!

Series de Taylor

Brook Taylor
1685 - 1731

Brook Taylor también fue una destacado músico y pintor. Investigó en una gran variedad de áreas, pero su contribución más famosa es el desarrollo de las ideas concernientes a las series infinitas.

Serie de Maclaurin

(generada para f en $x = 0$)

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Si queremos centrar la serie (y su gráfico) en cierto punto distinto de cero, obtenemos la Serie de Taylor:

Serie de Taylor:

(generada para f en $x = a$)

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Teorema. Sea f(x) definida en una vecindad de x_0 y supongamos que f(x) sea derivable hasta el orden n en el punto x_0, entonces, para x perteneciente a una vecindad del punto x_0 se cumple:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o\left[(x-x_0)^n\right]$$

o de forma más breve:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left[(x-x_0)^n\right]$$

Fórmula de Taylor con resto en la forma de Peano

Observación 1. El Polinomio de Taylor es único.

Observación 2. La forma de Peano para el resto, es muy útil cuando sólo es necesario conocer su orden como infinitesimal, sin embargo, a veces es conveniente expresarlo en otras formas.

$$R_n(x) = \left(\frac{x - x_0}{x - c} \right)^p \frac{(x-c)^{n+1}}{pn!} f^{(n+1)}(c)$$

p número positivo cualquiera

Forma General del Resto

a) p=n+1

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Forma de Lagrange

b) p=1

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0)}{n!}$$

Forma de Cauchy

Cuando nos referimos a un Polinomio de Taylor, podemos hablar de **número de términos, orden o grado.**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Este es un polinomio de **3 términos**.

Es un Polinomio de Taylor de **4to orden**, puesto que la derivada de mayor orden es la 4ta derivada**.**

Es también un polinomio de **4to grado**, puesto que x aparece a la 4ta potencia.

El polinomio de **3er orden** para $\cos x$ es $1 - \frac{x^2}{2!}$, pero es de **grado 2**.

Es muy importante que conozcan las diferencias entre *orden* y *grado*.

Ejemplo. $y = \cos x$

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1 \qquad f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0 \qquad f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

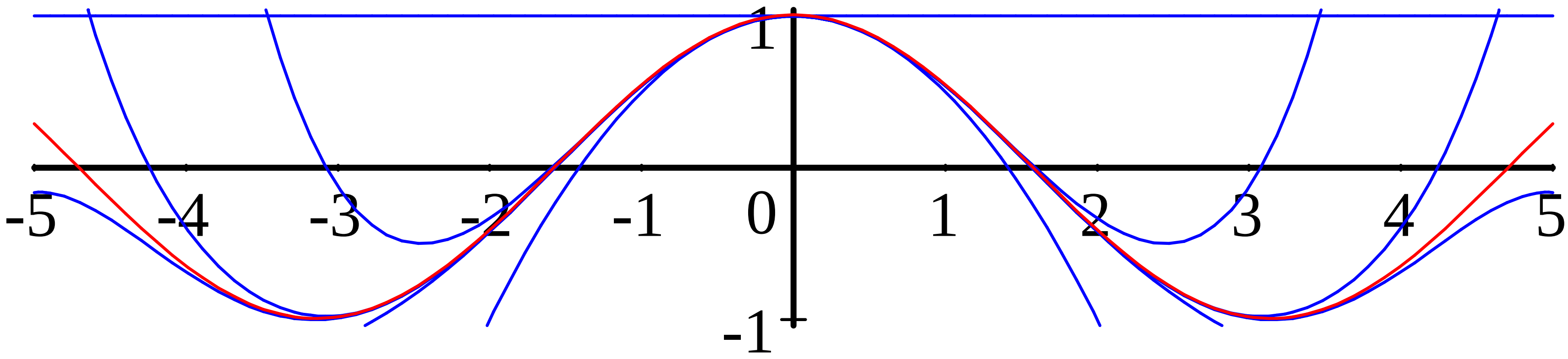
$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$

$$P(x) = 1 + 0x - \frac{1x^2}{2!} + \frac{0x^3}{3!} + \frac{1x^4}{4!} + \frac{0x^5}{5!} - \frac{1x^6}{6!} + \cdots$$

$$\boxed{P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \cdots}$$

$y = \cos x$

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \cdots$$



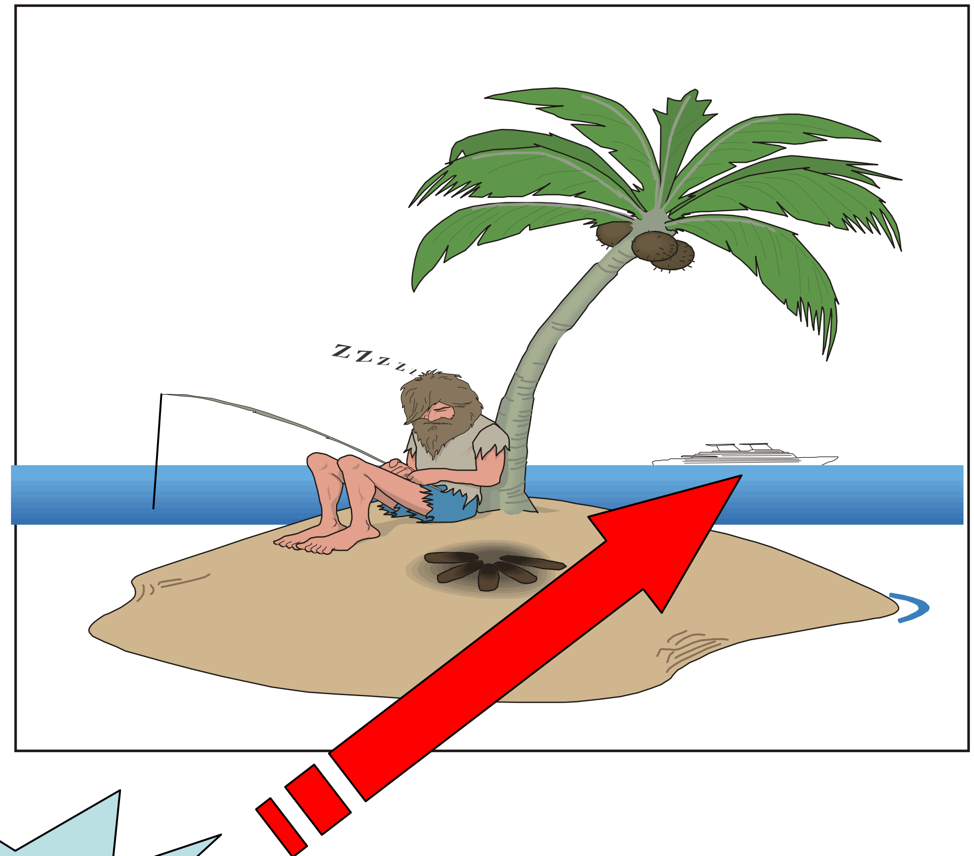
Mientras más términos agregamos, mejor es la aproximación.

Ejemplo. $y = \cos(2x)$

Ahorremos trabajo, podemos usar la función que ya conocemos, cosx, por tanto:

$$P(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \frac{(2x)^{10}}{10!} \quad \cdots$$

Cuidado, no se duerman…



Se va el barco!!!

Volvamos atrás…

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f^{(n)}(x)$$

$$(1-x)^{-1}$$

Listemos la función y sus derivadas.

$$(1-x)^{-2}$$

$$2(1-x)^{-3}$$

$$6(1-x)^{-4}$$

$$24(1-x)^{-5}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$P(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

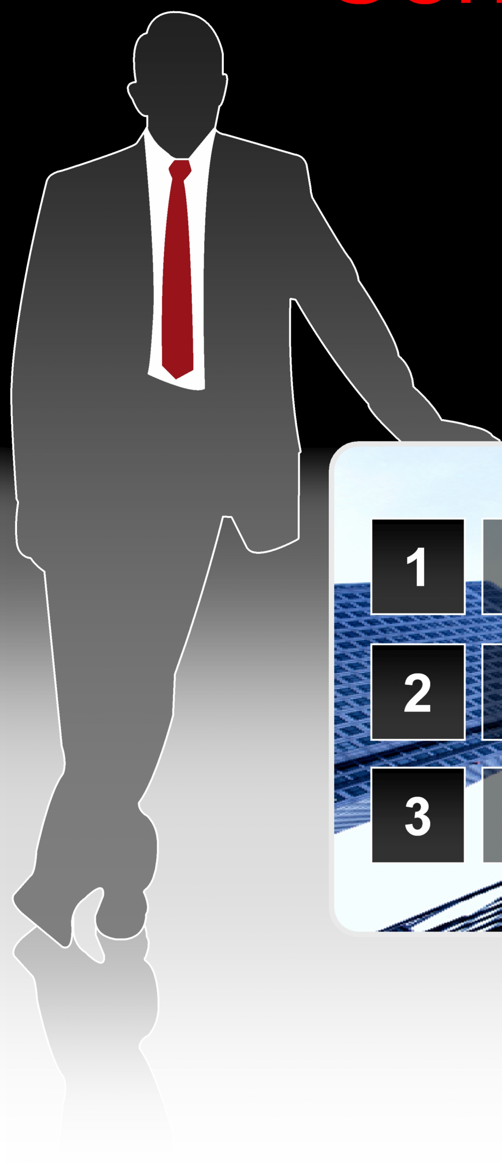
$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$(1-x)^{-1}$	1
$(1-x)^{-2}$	1
$2(1-x)^{-3}$	2
$6(1-x)^{-4}$	$6 = 3!$
$24(1-x)^{-5}$	$24 = 4!$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \frac{4!}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Esta es una serie geométrica con primer término $a=1$ y razón $r=x$.

¿Es la única forma de generar la Serie de Taylor?



1. Analicemos la función…
2. Es una función racional…
3. Un cociente¡¡¡¡

Podemos generar esta misma serie para $\frac{1}{1-x}$ con la conocida división que en este caso será infinita:

$$
\begin{array}{r l}
 & 1+x+x^2+x^3+\cdots \\
\cline{2-2}
(1-x)\big) & 1 \\
 & \underline{1-x} \\
 & \quad x \\
 & \quad \underline{x-x^2} \\
 & \qquad x^2 \\
 & \qquad \underline{x^2-x^3} \\
 & \qquad\qquad x^3
\end{array}
$$

Debemos entender que no es necesario, en este caso, usar las dos series obtenidas previamente para evaluar la función, pues podemos evaluar directamente en ella.

Sin embargo, este resultado nos permite obtener la suma de una serie geométrica (con infinitos términos).

Encontraremos otros usos para estas series.

Sin embargo, donde se revela la importancia de las Series de Taylor es en la evaluación de las **Funciones Trascendentes**.

$\cos(x)$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$\cos(x)$	1
$-\sin(x)$	0
$-\cos(x)$	-1
$\sin(x)$	0
$\cos(x)$	1

$$\cos(x) = 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\cdots$$

Ambos miembros son funciones pares.

Cos (0) = 1 como es fácil de ver.

$\sin(x)$

$$P(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$\sin(x)$	0
$\cos(x)$	1
$-\sin(x)$	0
$-\cos(x)$	-1
$\sin(x)$	0

$$\sin(x) = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\cdots$$

Ambos miembros son funciones impares.

Sin (0) = 0, algo trivial.

Ejemplo. $y=\cos(x)$ en $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$f(x)=\cos x \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f'(x)=-\sin x \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$f''(x)=-\cos x \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f'''(x)=\sin x \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f^{(4)}(x)=\cos x \quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$P(x)=0-1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{0}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\ \cdots$$

$$\boxed{P(x)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3!}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}+\ \cdots}$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Pensemos….
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots$$

Si sustituímos x^2 por x, tenemos:
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots$$

Esta es una serie geométrica, con a=1 y r=-x^2.

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots\, dx$$

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \cdots$$

Muy parecida a la serie del senx, pero sin los factoriales.

$\ln(1+x)$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$\ln(1+x)$	0
$(1+x)^{-1}$	1
$-(1+x)^{-2}$	-1
$2(1+x)^{-3}$	2
$-6(1-x)^{-4}$	$-6=-3!$

$$\ln(1+x) = 0 + 1x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{-3!}{4!}x^4 + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Hemos dejado lo mejor para el final!!!!

$$e^x$$

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
e^x	1
e^x	1
e^x	1
e^x	1
e^x	1

$$e^x = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Reglas de derivación conocidas:

$\boxed{(e^{x})'=(e^{x})}$

$\boxed{(\cos x)'=-\operatorname{sen} x}$

$\boxed{(\operatorname{sen} x)'=\cos x}$

$$\boxed{\left(\ln(1+x)\right)'=\frac{1}{1+x}}$$

Cálculo de límites (funciones equivalentes):

$$\boxed{\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}}$$

De aquí es fácil obtener:

$$\boxed{1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}}$$

Utilizando el desarrollo en Serie de Taylor del coseno

$$\boxed{\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360} - \ldots}$$

Cuando x$\rightarrow$0, se obtiene la equivalencia asintótica de dichas funciones.

Existen algunas Series de Maclaurin y Taylor, que se usan frecuentemente, por lo que deben ser memorizadas, así no se verán como ellos:

Recuerde, la Serie de Taylor es una aproximación de la función

La Serie de Maclaurin, lo es para $x=0$

En ambos casos, calcule las derivadas y el resto, con cuidado¡