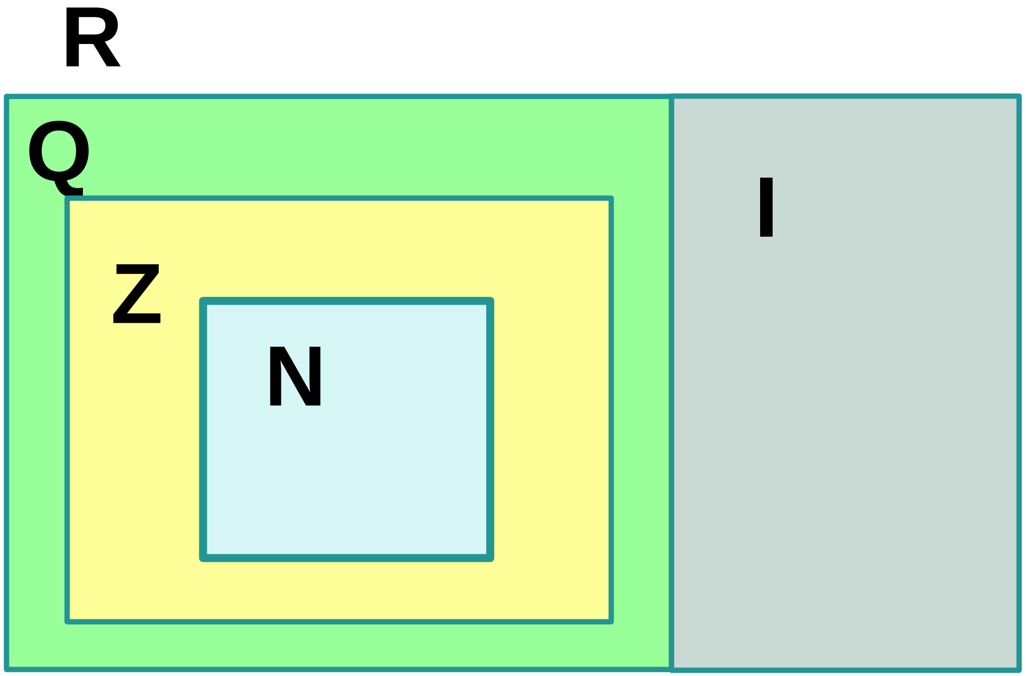
Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 4: Conjuntos Numéricos

CONJUNTOS NUMÉRICOS



N***: Conjunto de los números naturales.***

Z***: Conjunto de los números enteros.***

Q***: Conjunto de los números racionales.***

R***: Conjunto de los números reales.***

NUMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales lo representamos con el símbolo N y sirven para contar u ordenar. $N = \{1,2,3,........\}$

PROPIEDADES DE N

- El conjunto de los números naturales es infinito.
- Tiene primer elemento. No tiene último elemento.

PROPIEDADES DE N

- Todo número natural tiene un sucesor o siguiente. Un número natural y su sucesor se dicen consecutivos.
- Todo número natural, excepto el uno, tiene un antecesor.
- Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales.

PROPIEDADES DE (N,+)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in N$: $a + b \in N$
2. Propiedad asociativa:

   $$\forall a,b,c \in N: (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Propiedad conmutativa:

   $$\forall a,b \in N: a + b = b + a$$

PROPIEDADES DE (N, $\cdot$)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in N: a.b \in N$
2. Propiedad asociativa:

$$\forall a,b,c \in N: (a.b).c = a.(b.c)$$

3. Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in N: a.b = b.a$$

4. Existencia de elemento neutro:

$$\forall a \in N: a.1 = 1.a = a$$

Además de las propiedades vistas verifica:

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall a,b,c \in N: (a + b).c = a.c + b.c$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Sea P(n) una función proposicional en N, tal que:

1. P(1) es verdadera.
2. Si P(h) es verdadera, P(h + 1) también lo es.

Entonces, $\forall n \in N$: P(n) es verdadera.

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

Ejemplo:

Probar que para todo n $\in$ N se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Sea la siguiente función proposicional definida en N:

$$P(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$$

1. Observemos que P(1) es verdadera.

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1.(1+1)}{2}$$

PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

2. Asumamos ahora que P(h) es verdadera, y veamos que P(h + 1) también lo es.

Entonces, $\forall n \in N$: P(n) es verdadera.

$$P(h): \quad \sum_{i=1}^{h} i = \frac{h.(h+1)}{2}$$

$$P(h+1): \quad \sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1).[(h+1)+1]}{2}$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \sum_{i=1}^{h} i + (h+1) = \frac{h.(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h.(h+1)+2(h+1)}{2} = \frac{(h+1).(h+2)}{2}$$

NÚMEROS ENTEROS

Llamamos conjunto de números enteros, Z, a la unión del conjunto de los números naturales, el cero y el conjunto de los opuestos de los números naturales.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{c} N=\{1,2,3,......\} \\ 0 \\ N^{-}=\{-n/n\in N\} \end{array}\right\} Z=N\cup\{0\}\cup N^{-}$$

PROPIEDADES DE Z

- El conjunto de los números enteros es infinito.
- No tiene primero ni último elemento.
- Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
- Todo número entero tiene un antecesor.
- Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros.

PROPIEDADES DE (Z,+)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in Z$: $a + b \in Z$
2. Propiedad asociativa:

$$\forall a,b,c \in Z: (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. Propiedad conmutativa:

$$\forall a, b \in Z: a + b = b + a$$

4. Existencia de elemento neutro:

$$\forall a \in Z: a + 0 = 0 + a = a$$

5. Existencia de opuesto para cada elemento:

$$\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z \ / \ -a + a = a + (-a) = 0$$

PROPIEDADES DE (Z, ·)

1. Ley de cierre: $\forall a, b \in Z$: $a.b \in Z$
2. Propiedad asociativa:

   $$\forall a,b,c \in Z: (a.b).c = a.(b.c)$$

3. Propiedad conmutativa:

   $$\forall a, b \in Z: a.b = b.a$$

4. Existencia de elemento neutro:

   $$\forall a \in Z: a.1 = 1.a = a$$

Además de las propiedades vistas verifica:

Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall a,b,c \in Z: (a + b).c = a.c + b.c$

ALGORITMO DE DIVISION

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Existen y son únicos q, r $\in$ Z tal que:

$$a = b.q + r, \quad \text{donde } 0 \leq r < |b|.$$

Donde a es el "dividendo", b es el "divisor", q es el "cociente" y r es el "resto" de dividir a por b.

ALGORITMO DE DIVISION

Tarea: Encontrar el cociente y el resto de la división entera entre a y b (b $\neq$ 0) si:

1. a = 236 y b = 27
2. a = -236 y b = 27
3. a = 236 y b = -27
4. a = -236 y b = -27

$$1. \quad 236 = 27.8 + 20$$

$$2. \quad -236 = 27.(-8) + (-20)$$ Error?

$$2. \quad -236 = 27.(-9) + 7$$

$$3. \quad 236 = -27.(-8) + 20$$

$$4. \quad -236 = -27.9 + 7$$

DIVISIBILIDAD

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Si el resto de dividir a por b es cero, se dice que: " a es múltiplo de b", o

" b es divisor de a" o que

" b divide a "a" ".

En símbolos:

$$b|a \Leftrightarrow \exists\ q \in Z\ /\ a = q.b$$

PROPIEDADES BÁSICAS DE DIVISIBILIDAD

Sean a, b y c números enteros donde $a \neq 0$. Entonces

(a) $a \mid a$, $a \mid a \cdot c$, $a \mid -a$, $-a \mid a$, $a \mid |a|$ y $|a| \mid a$.

(b) $1 \mid c$ y $-1 \mid c$.

(c) Sea $b \neq 0$: $a \mid b$ y $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

(d) Sea $b \neq 0$: $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow a = b$ o $a = -b$.

(e) $a \mid 1 \Rightarrow a = 1$ o $a = -1$.

(f) $a \mid b$ y $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$ y $a \mid b - c$.

(g) $a \mid b + c$ y $a \mid b \Rightarrow a \mid c$.

(h) $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c$.

(i) $a \mid b \Leftrightarrow a \mid |b|$.

(j) $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid b$.

(k) $a \mid b \Leftrightarrow |a| \mid |b|$.

EJERCICIO:

Usando propiedades de divisibilidad probar que

$$9 \mid 10^{n} - 1 \quad , \forall n \in N$$

1. Observemos que verifica para n = 1

   $$9 \mid 10^{1} - 1 \quad \Rightarrow 9 \mid 9$$

2. Suponemos que verifica para n = h

   $$9 \mid 10^{h} - 1$$

3. Probemos que verifica para n = h+1

   $$9 \mid 10^{h+1} - 1$$

Demostración:

Como $9 \mid 9$ y por hipótesis inductiva $9 \mid 10^{h} - 1$

Se tiene:

$$9 \mid 10.(10^{h} - 1) + 9 \;\Rightarrow 9 \mid 10.10^{h} - 10 + 9 \;\Rightarrow 9 \mid 10^{h+1} - 1$$

NUMEROS PARES E IMPARES

- $x \in Z$ es par $\Leftrightarrow \exists\, k \in Z \,/\, x = 2.k$

Es decir:

$x \in Z$ es par $\Leftrightarrow 2|x$

- $x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow x \in Z$ no es par

$x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow \exists\, h \in Z \,/\, x = 2.h + 1$

Es decir:

$x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow x = 2.h + 1$, para algún $h \in Z$.

NÚMEROS PRIMOS

Sea $p \in Z$. Decimos que p es primo si, y sólo sí, p tiene exactamente 4 divisores:

$$1, -1, p \text{ y } -p$$

Los números enteros que no son primos, se llaman compuestos.

Ejemplos: Son primos 2, 3, 5, 7, 11,…

Son compuestos 0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12,…

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA

Todo número natural, mayor que 1, se puede descomponer como el producto de un número finito de factores primos. Esta factorización es única, salvo por el orden de los factores.

Ejemplos: $1092 = 2^2.3.7.13$

$1224 = 2^3.3^2.17$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

1) Un número es divisible por 2 si y sólo si termina en una cifra par.
2) Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible 3.
3) Un número es divisible por 4 si y sólo si el doble de las decenas más las unidades es divisible por 4.
4) Un número es divisible por 5 si y sólo si la cifra de las unidades es 0 ó 5.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

5) Un número es divisible por 7, si y sólo si, al tomar el número que resulta de eliminar las unidades y restarle el doble de las unidades es divisible por 7.
6) Un número es divisible por 9, si y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 9.
7) Un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan un lugar impar es divisible por 11.

EJEMPLOS

¿Es 43755 divisible por 7? ¿y 43757?

Aplicando el criterio de divisibilidad se tiene:

Veamos con **43755**

$$4375 – 2.5 = 4365$$

$$436 – 2.5 = 426$$

$$42 – 2.6 = 30$$

Como 7 no es divisible por 30, tampoco lo es por 43755.

EJEMPLOS

¿Es 713014 divisible por 11? ¿y 713020?

Aplicando el criterio de divisibilidad se tiene:

Veamos con 713014

$$(1+3+7)-(4+0+1)=7$$

Como 7 no es divisible por 11, tampoco lo es por 713014.

MAXIMO COMUN DIVISOR

Sean $a, b \in Z$

$d \in N$ es el máximo común divisor (mcd) de a y b, si, y sólo sí, se cumple:

$$\begin{cases} d|a \quad \wedge \quad d|b \\ p|a \quad \wedge \quad p|b \quad \Rightarrow p|d \end{cases}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Se usa para calcular el mcd de dos números.

Si r_0 y $r_1 \in Z$ / $r_1 \neq 0$. Entonces:

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2, \text{ con } 0 < r_2 < |r_1|$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \text{ con } 0 < r_3 < |r_2|$$

$$r_2 = q_3 r_3 + r_4, \text{ con } 0 < r_4 < |r_3|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \text{ con } 0 < r_n < |r_{n-1}|$$

$$r_{n-1} = q_n r_n \qquad \text{con } r_{n+1} = 0$$

$mcd(r_o, r_1) = r_n$ que es el último resto no nulo.

EJEMPLO

Hallar el mcd(441,725)

725=441.1+284

441=284.1+157

284=157.1+127

157=127.1+30

127=30.4+7

30=7.4+2

7=2.3+1 mcd(441,725)=1

2=1.2+0

ENTEROS COPRIMOS

Dados dos enteros no nulos a y b, diremos que a y b son coprimos ó primos entre sí, si su máximo común divisor es 1.

Por ejemplo 441 y 725 son coprimos.

MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO

Sean $a, b \in Z$

$m \in N$ es mínimo común múltiplo (mcm) de $a \ y \ b$, si, y sólo sí, se cumple:

$$\begin{cases} a|m \quad \wedge \quad b|m \\ a|n \quad \wedge \quad b|n \quad \Rightarrow m|n \end{cases}$$

EJERCICIO:

Probar que $4^n - 1$ es múltiplo de 3, para todo $n \in N$

1. Observemos que verifica para n = 1

$$4^1 - 1 = 3$$

2. Suponemos que verifica para n = h

$$4^h - 1 = 3k \quad \Rightarrow 4^h = 3k + 1$$

3. Probemos que verifica para n = h+1

$$4^{h+1} - 1 = 3k´$$

Demostración:

$$4^{h+1} - 1 = 4^h.4 - 1 = (3k+1).4 - 1 =$$
$$12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$$

NÚMEROS RACIONALES

En muchas ocasiones, para medir es necesario fraccionar la unidad y es así que surge la idea de número fraccionario.

Las fracciones son las expresiones numéricas de los números fraccionarios y están dadas por el cociente entre dos números enteros.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \, / \, a, b \in Z \wedge b \neq 0 \right\}$$

PROPIEDADES DE Q

- El conjunto de los números racionales es infinito
- No tiene primero ni último elemento.
- Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de números racionales.

NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales.

$$\mathrm{Q} \cup I = \mathrm{R}$$

Los números Irracionales son aquellos que no son racionales, es decir aquellos que no pueden escribirse como un cociente de dos números enteros.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Sea R el conjunto de los números reales y las operaciones suma (+) y producto (.) definidas en él y una relación de orden estricto “<”.

En R se verifican los siguientes axiomas:

(R,+)

1) Ley de Cierre: $\forall x, y \in R : x + y \in R$

2) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z)$

3) Propiedad conmutativa: $\forall x, y \in R : x + y = y + x$

4) Existencia de neutro: $\exists 0 \in R / \forall x \in R : x + 0 = x$

5) Existencia de opuesto: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R / x + (-x) = 0$

(R, .)

6) Ley de Cierre: $\forall x, y \in R : x.y \in R$

7) Propiedad asociativa: $\forall x, y, z \in R : (x.y).z = x.(y.z)$

8) Propiedad conmutativa: $\forall x, y \in R : x.y = y.x$

9) Existencia de neutro: $\exists 1 \in R, (1 \neq 0) / \forall x \in R : x.1 = x$

10) Existencia de inverso para cada elemento no nulo: $\forall x \in R, x \neq 0, \exists a \in R / x.a = 1$

Denotaremos a «a» como: $a = x^{-1}$

11) Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall x, y, z \in R : (x + y).z = x.z + y.z$

AXIOMAS DE ORDEN

12) Ley de Tricotomía: Dados x,y ϵ R, se verifica una, y sólo una, de las siguientes posibilidades:

$$x = y, \quad x < y, \quad y < x$$

13) Propiedad Transitiva: $\forall x, y, z \in R : x < y \quad \wedge \quad y < z \Rightarrow x < z$

14) Consistencia con respecto a la suma:

$$\forall x, y, z \in R : x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

15) Consistencia restringida con respecto al producto:

$$\forall x, y, z \in R : x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x.z < y.z$$

16) AXIOMA DEL SUPREMO: “Todo subconjunto real no vacío y acotado superiormente, admite supremo en R”.

Este axioma, contempla un corolario referido al ínfimo: “Todo subconjunto real no vacío y acotado inferiormente, admite ínfimo en R”.

Además de los 16 axiomas, R verifica dos propiedades:

17) "Entre dos números reales distintos existe otro número real".

En símbolos: $x, y \in R / x < y \Rightarrow \exists z \in R / x < z < y$

18) **PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES:** "Dado un número real, siempre es posible encontrar un número natural que lo supera." Es decir, R no es acotado superiormente.

En símbolos: $\forall x \in R, \exists n \in N / n \geq x$

INTERVALOS REALES

Sean a y b $\in$ R/ a < b

1) Intervalo abierto de extremos a y b:

$$(a,b) = \{x/x \in R \wedge a < x < b\}$$

Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, excluidos ambos.

2) Intervalo cerrado de extremos a y b:

$$[a,b] = \{x/x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$$

Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluidos ambos.

3) Intervalo cerrado a izquierda y abierto a la derecha:

$$[a,b) = \{x/x \in R \wedge a \leq x < b\}$$

Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluido a.

4) Intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha:

$$(a,b] = \{x/x \in R \wedge a < x \leq b\}$$

Está formado por los números reales x comprendidos entre a y b, incluido b.

5) Intervalo infinito abierto de extremo a:

$$(-\infty,a) = \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x < a\}$$

Está formado por los números reales x menores que a, excluido a.

6) Intervalo infinito cerrado de extremo a:

$$(-\infty,a] = \{x/x \in \mathbf{R} \wedge x \leq a\}$$

Está formado por los números reales x menores que a, incluido a.

7) Intervalo infinito cerrado de origen a:

$$[a,+\infty) = \{x/x \in R \wedge x \geq a\}$$

Está formado por los números reales x mayores que a, incluido a.

8) Intervalo infinito abierto de origen a:

$$(a,+\infty) = \{x/x \in R \wedge x > a\}$$

Está formado por los números reales x mayores que a, excluido a.

Valor Absoluto

Valor Absoluto de un número real:

Es una función que se define:

$$| \ | : R \to R_{\geq 0} \ / \quad |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

La función valor absoluto verifica las siguientes propiedades:

Sean x,y,w,∝, x_1, x_2,……. x_n números reales con w ≠ 0, ∝ > 0 y n ϵ N.

1) $|x| \geq 0$ (El valor absoluto no es función sobreyectiva por no ser negativa)

2) $|x| = |-x|$ (Función no inyectiva)

3) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4) $||x|| = |x|$

Valor Absoluto

5) $|x - y| = |y - x|$

6) $|x.y| = |x|.|y|$

7) $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$

8) $|x^n| = |x|^n$

9) $\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$

10) $\left|\frac{x}{w}\right| = \frac{|x|}{|w|}$

Valor Absoluto

11) $-|x| \leq x \leq |x|$

12) $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$

13) $|x| > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha \quad \vee \quad x < -\alpha$

14) $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$

15) $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha \quad \vee \quad x \leq -a$

16) $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha \quad \vee \quad x = -\alpha$

17) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad Triangular)

18) $|x-y| \geq \left||x|-|y|\right|$

POTENCIACIÓN

Definición: $Sea\ a \in R\ ,\ n \in Z$

Se llama potencia n-ésima de "a", al número definido de la siguiente forma:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.........a}_{n\ veces} \quad , si\ n \in N$$

$$a^0 = 1,\ si\ n = 0\ y\ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,\ si - n \in Z^-\ y\ a \neq 0$$

Observar que no está definido 0^0, ni las potencias negativas de cero.

PROPIEDADES

Para todas las potencias de exponente natural, se dan las siguientes igualdades:

1) Toda potencia de base cero, es igual a cero:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \mathbf{0^n=0}$$

2) Toda potencia de base uno, es igual a la base:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \mathbf{1^n=1}$$

3) Toda potencia de exponente uno es igual a la base:

$$\forall\, a \in \mathbf{R}: \mathbf{a^1=a}$$

4) Producto de potencias de igual base:

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \forall\, a \in \mathbf{R}: : a^n . a^m = a^{n+m}$$

PROPIEDADES

5) Cociente de potencias de igual base:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}, \forall\ a \in R, a \neq 0 : a^n / a^m = a^{n-m}$$

6) Potencia de otra potencia:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}, \forall\ a \in R : (a^n)^m = a^{n.m}$$

7) La potencia es distributiva respecto al producto y al cociente

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ a, b \in R : (a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ a, b \in R, b \neq 0 : (a/b)^n = a^n/b^n$$

PROPIEDADES

- Cuadrado de la suma de dos números

  $$\forall\ \mathbf{a, b} \in \mathbf{R} : \mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}$$

- Cubo de la suma de dos números:

  $$\forall\ \mathbf{a, b} \in \mathbf{R} : \mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3.\ a^2.b + 3.a.\ b^2 + b^3}$$

- Diferencia de cuadrados:

  $$\forall\ \mathbf{a, b} \in \mathbf{R} : \mathbf{a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)}$$

Como es posible observar, la potenciación **no es** distributiva con respecto a la suma ni a la resta.

RADICACIÓN

Definición: $Sea\ a \in R\,,\ n \in N$

Se denomina raíz n-ésima de un número real "a", al número definido de la siguiente forma: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

1) $Si\ a = 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 0$

2) $Si\ a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

3)a) $Si\ a < 0\ y\ n\ es\ impar \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ y\ b\ es\ negativo$

b) $Si\ a < 0\ y\ n\ es\ par \Rightarrow \sqrt[n]{a} \notin R$

PROPIEDADES

$$Sea\ a \in R\,,\ n \in N$$

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a\ si\ \sqrt[n]{a}\ es\ un\ número\ real$

2) $\sqrt[n]{a^n} = a\ si\ a \geq 0$

3) $\sqrt[n]{a^n} = a\ si\ a < 0\ y\ n\ es\ impar$

4) $\sqrt[n]{a^n} = |a|\ si\ a < 0\ y\ n\ es\ par$

PROPIEDADES

$Sea\ a, b \in R\ ,\ n, m \in N$

1) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} =: a^{\frac{m}{n}}$

NÚMEROS COMPLEJOS

Intentemos resolver la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

Nos interesa hallar cuáles son los números reales x que verifican que $x^2 + 1 = 0$, es decir que $x^2 = -1$.

Pero vemos que no existe en R ningún número tal que su cuadrado sea negativo.

Se hace necesaria la ampliación de R, a un conjunto en el que puedan resolverse situaciones de este tipo.

NÚMEROS COMPLEJOS

$$x^2 + 1 = 0$$

Para resolver este tipo de situaciones se han introducido nuevos números, los números complejos.

Llamaremos unidad imaginaria i a un número, (que no es real) cuyo cuadrado sea igual a -1.

$$i^2 = -1$$

Observemos que si pensamos en el opuesto de este número (-i), su cuadrado también resulta ser -1, porque: $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$

NÚMEROS COMPLEJOS

De este modo la ecuación $x^2 + 1 = 0$, admite las soluciones **"i"** y **"-i"**.

Si la ecuación es $x^2 + 4 = 0$; podemos observar que admite las soluciones **2i** y **–2i,** porque:

$$x_1 = \sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}.\sqrt{-1} = 2i$$

$$x_2 = -\sqrt{-4} = -\sqrt{4.(-1)} = -\sqrt{4}.\sqrt{-1} = -2i$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Si la ecuación es por ejemplo:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

Podemos ver que admite dos soluciones:

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{-36}}{2} = \frac{4+\sqrt{36.(-1)}}{2} = \frac{4+\sqrt{36}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{-36}}{2} = \frac{4-\sqrt{36.(-1)}}{2} = \frac{4-\sqrt{36}.\sqrt{-1}}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$$

Así surgen los números complejos de la forma **a + bi**, con a y b pertenecientes a los números reales.

NÚMEROS COMPLEJOS

Definición: Se llama número complejo a todo par ordenado de números reales. Es decir, un número complejo tiene la forma: $(a,b)\ con\ a,b \in R$

Al conjunto de números complejos se lo designa con la letra **C.**

Simbólicamente: $C = \{(a,b) / a \in R \wedge b \in R\}$

La expresión "par ordenado" hace referencia al hecho de que se tienen dos números reales, dados en un cierto orden; (a,b) $\neq$ (b,a)

NÚMEROS COMPLEJOS

La primera componente de cada par se llama componente o parte real del número complejo y la segunda, la componente imaginaria del mismo.

Dado un número complejo $z=(a,b)$, se definen:

- Componente real de z : $\operatorname{Re}(z)=a$
- Componente imaginaria de z: $\operatorname{Im}(z)=b$

Entre los números complejos, a diferencia de lo que pasa con los números reales, no existe un orden, es decir, no se puede decir que un número complejo sea mayor o menor que otro.

REPRESENTACIÓN EN EL PLANO

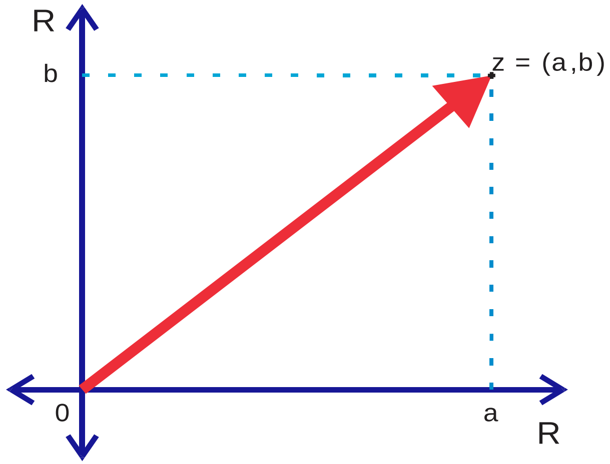
Los números complejos se representan en el plano a partir de un sistema de ejes cartesianos, de tal manera que a cada número complejo le corresponde un punto en el plano y además, a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

Dado el complejo: $z=(a,b)$

- La componente real se representa en el eje horizontal, que por eso se llama **eje real.** $\operatorname{Re}(z)$
- La componente imaginaria se representa en el eje vertical, y lo llamamos **eje imaginario.** $\operatorname{Im}(z)$

REPRESENTACIÓN EN EL PLANO

Por otra parte, a cada número complejo le está asociado un vector con origen en el origen del sistema y cuyo extremo es el punto determinado por el par ordenado correspondiente.



Definición:

- Un complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es cero. $z=(a,0)$
- Un complejo es imaginario si y sólo si su parte real es cero. $z=(0,b)$

OPERACIONES EN $\mathbb{C}$

En el conjunto de los números complejos se definen la suma y el producto mediante:

1) $(a,b)+(c,d)=(a+c\ ,\ b+d)$

2) $(a,b).(c,d)=(a.c-b.d\ ,\ a.d+b.c)$

Ejemplo:

Sean $z_1=(4,-3)\ \wedge\ z_2=(1,2)$

Suma: $z_1+z_2=(4+1\,,-3+2)=(5,-1)$

Producto:

$$z_1.z_2=\ (4.1-(-3).2\ \ ,4.2+(-3).1\ \ )=(10,5)$$

SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS

- $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \ , \ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d})$$

- El elemento neutro para la suma en C es el par ordenado (0,0).

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a} + \mathbf{0} \ , \boldsymbol{b} + \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

- Elemento simétrico para la suma en C:

Si $z = (a,b)$, su opuesto $-z = (-a,-b)$ es el número complejo que sumado a él da por resultado el neutro de la suma, es decir (0,0)

$$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$

PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS

- $$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}.\boldsymbol{d}\,,\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})$$

- El elemento neutro para el producto en C es el par ordenado (1,0).

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).(\mathbf{1},\mathbf{0}) = (\boldsymbol{a}.\mathbf{1} - \boldsymbol{b}.\mathbf{0}\,,\boldsymbol{a}.\mathbf{0} + \boldsymbol{b}.\mathbf{1}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

- Elemento simétrico para el producto en C:

Si $z=(a,b)$, su inverso $z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ es el número complejo que multiplicado por él da por resultado el neutro del producto, es decir (1,0).

$$(a,b).\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS

Definición: Dos números complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

$$z = (a, b) \Rightarrow \overline{z} = (a, -b)$$

Ejemplo:

$$z = (2, -1) \Rightarrow \overline{z} = (2, 1)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

1) El conjugado del conjugado de cualquier número complejo es el mismo número complejo.

$$\forall z \in C : \overline{\overline{z}} = z$$

2) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

4) El conjugado de una potencia es igual a la potencia del conjugado.

$$\forall z \in C : \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad n \in N$$

5) Un número complejo es igual a su conjugado si y sólo si es un complejo real.

$$\forall z \in C : z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$$

$$z = (a,0) \Rightarrow \overline{z} = (a,0)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

6) La suma de un número complejo y su conjugado es el doble de la parte real.

$$\forall z \in C : z + \overline{z} = 2a$$

$$z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (a + a, b - b) = (2a,0)$$

7) El producto de un número complejo y su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de las dos componentes.

$$\forall z \in C : z.\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$z.\overline{z} = (a,b).(a,-b) = (a^2 + b^2, -ab + ba) = (a^2 + b^2, 0)$$

LA UNIDAD IMAGINARIA. POTENCIAS.

Se llama **unidad imaginaria**, al número complejo imaginario, que tiene la parte real nula y de segunda componente igual a 1. $i = (0,1)$

Potencias de la unidad imaginaria

i^0 = **1**

i^1 = **i** = (0 , 1)

i^2 = i . i = (0 , 1) . (0 , 1) = (0.0 - 1.1 , 0.1 + 1.0) = (-1 , 0) = **-1**

i^3 = i^2 . i = (-1 , 0) . (0 , 1) = (-1.0 – 0.1 , -1.1 + 0.0) = (0 , -1) = **- i**

i^4 = i^2 . i^2 = (-1 , 0) . (-1 , 0) = [-1 .(-1) – 0 . 0 , -1 . 0 + 0 . (-1)] = (1 , 0) = **1**

Si el exponente es de la forma $\boldsymbol{4k}$ con $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$, se tiene: $\boldsymbol{i^{4k}} = \boldsymbol{(i^4)^k} = \boldsymbol{1^k} = \boldsymbol{1}$.

En general, si el exponente de la unidad imaginaria es $a \in \mathbb{N}$, al efectuar la división del exponente por 4, se tiene: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{4q} + \boldsymbol{r}$, donde $0 \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{4}$.

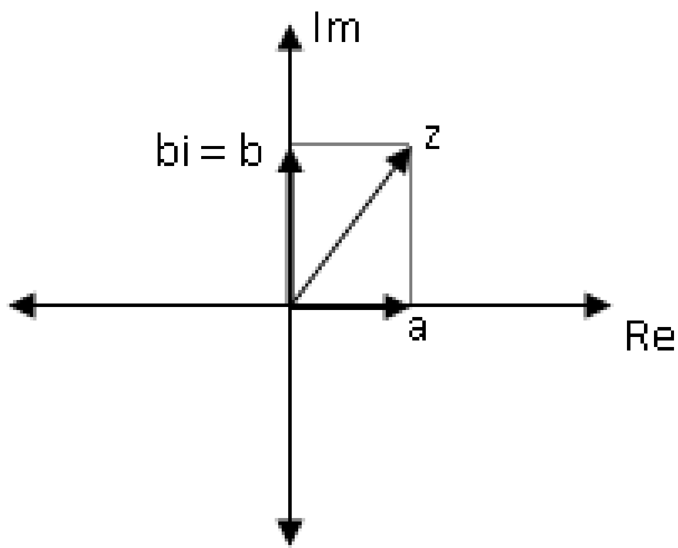
En consecuencia:

$$\boxed{\boldsymbol{i}^{a} = \boldsymbol{i}^{4q+r} = \boldsymbol{i}^{4q}.\boldsymbol{i}^{r} = 1.\boldsymbol{i}^{r}}$$

Por ejemplo: $\boldsymbol{i^{39}} = \boldsymbol{i^3} = -\boldsymbol{i}$

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS MEDIANTE VECTORES

Podemos representar un número complejo como un vector con origen en el origen del sistema y cuyo extremo es el punto determinado por el par ordenado correspondiente.



DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

Hasta ahora definimos a los números complejos en forma de par ordenado:

$$z = (a, b) \quad con\ a, b \in R$$

El mismo número complejo puede expresarse en forma binómica:

$$z = a + bi$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dado los complejos: $z_1 = a + bi \quad , \quad z_2 = c + di$

Para dividir dos números complejos, siendo el divisor distinto de cero, se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{z_2 . \overline{z_2}} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2} i$$

POR EJEMPLO:

- Dados: $\boldsymbol{z_1 = -2 + 3i \quad \wedge \quad z_2 = 1 - 2i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{-2-4i+3i+6i^2}{1^2+2^2}$$

$$= \frac{(-2-6)+(-4+3)i}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

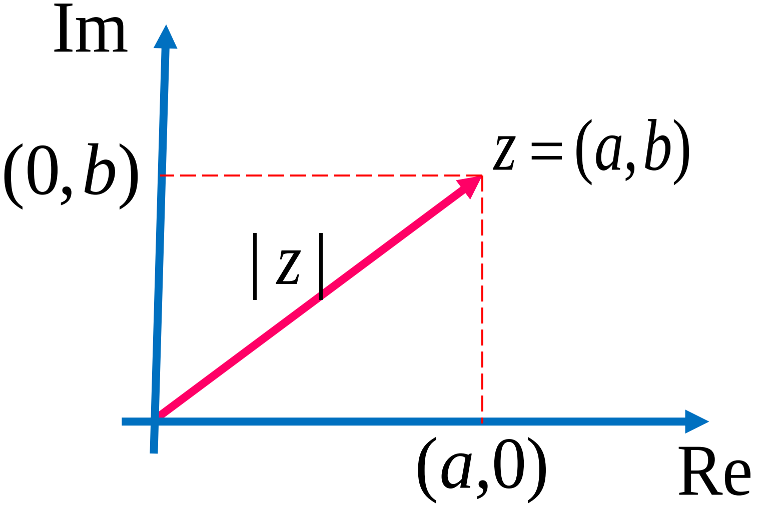
FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Módulo de un número complejo

Dado un número complejo $z = a + bi$

Se define el módulo de un número complejo como el valor positivo de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes.

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

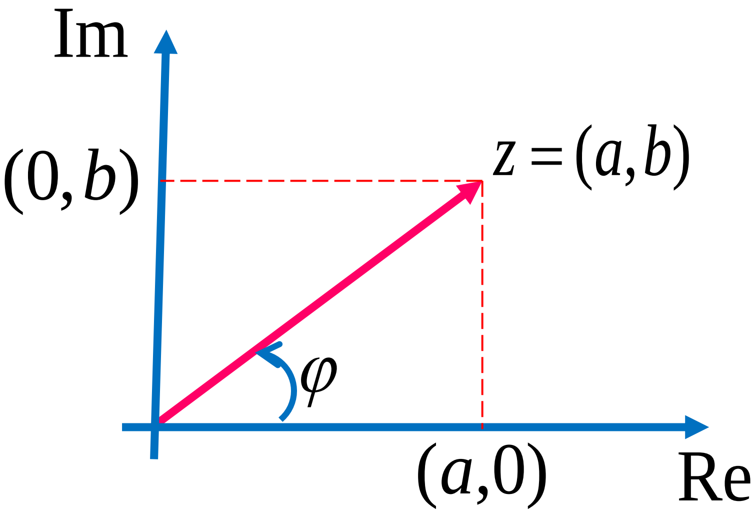


FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Argumento de un número complejo

Se llama argumento de un número complejo $z = a + bi$ al ángulo positivo menor que un giro que forma el vector que representa al complejo con el semieje real positivo; se lo simboliza con la letra griega φ.

$$tg\ \varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



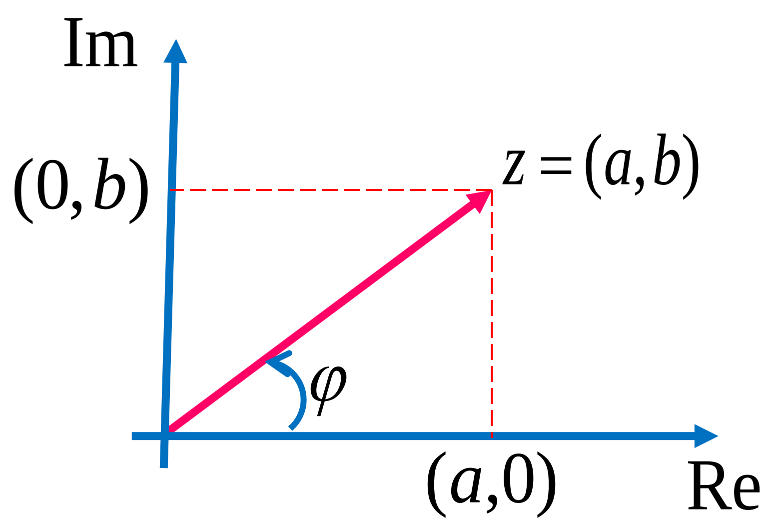
FORMA TRIGONOMÉTRICA O POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z = a + bi$ un número complejo no nulo.

Las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesiana a y b son: el módulo $\rho = |z|$ y el ángulo φ .

$$sen\ \varphi = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|.sen\ \varphi$$

$$\cos\ \varphi = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|.\cos\ \varphi$$



$$z = a + bi = |z|.\cos\varphi + |z|.i.sen\varphi$$

$$z = |z|.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$$

POR EJEMPLO

Sea el número complejo $z = 2 + 2i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$z \in IC$$

$$tg\ \varphi = \frac{2}{2} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}(1) = 45°$$

$$z = \sqrt{8}.\left(\cos\frac{1}{4}\pi + i.sen\frac{1}{4}\pi\right)$$