Unidad 4: Derivadas

Situación 1:

<u>Población de Bacterias</u>

La población P de una colonia de bacterias con espacio y alimentos ilimitados varía con el tiempo de acuerdo a la expresión $P(t) = 100e^{3t}$, donde t se mide en horas.

¿ Cuál es la velocidad de crecimiento de la población a las 2 horas?.

¿ Con qué rapidez crece la población en función del tiempo?

Situación 2:

Contaminación Ambiental

Estudios realizados han permitido determinar que en cierta ciudad el nivel medio diario C de monóxido de carbono CO_2 en el aire, en partes por millón (ppm) , está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes por la función

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

El aumento de población en esa ciudad en t años se estima que está dado por la relación $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$ en miles de habitantes.
¿ Con qué rapidez estará variando la concentración de CO2 en esa ciudad dentro de 3 años?

En esta unidad se presentarán conceptos del *Cálculo Diferencial* que permitirán:

- estudiar el comportamiento de una función (cómo varía) Ej: cómo varía el tamaño de una población en función del tiempo: cuándo y cuán rapido crece o decrece, etc.
- medir la variación de una función (o magnitud) f que cambia al cambiar otra magnitud x.

Ejemplo

(video Derivadas parte 1)

La familia Pérez sale de Corrientes con destino a Puerto Iguazú a las 12 de la noche (0 horas). Llegan a destino a las 7 de la mañana. Uno de los miembros de la familia registró los siguientes datos:

Hora	1:00	1:15	1:30	1:45	2:00	2:15	2:30	2:45	3:00
Distancia recorrida	100 km	125 km	150 km	170 km	210km	240 km	260 km	280km	300 k

Pregunta: ¿ A que velocidad iba el auto a las 2 de la mañana?

Consideremos $f(t) =$ distancia recorrida en el instante t.

Supongamos que Pto. Iguazú queda a 600 km de Corrientes. Como la flia. Peréz tardó 7 horas en llegar, podemos decir que la velocidad promedio del viaje fue:

$$v_p = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}} = \frac{600km}{7h} = 85{,}7km/h$$

Sin embargo esto no es una indicación precisa de la velocidad a la que iba el auto a las 12 hrs, ya que en ese "instante" la velocidad puede haber sido mayor o menor que $85{,}7km/h$, o incluso haber estado el auto detenido.

Vel. promedio entre 2 y 3 hrs	$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{300-210}{1} = 90km/h$
Vel. promedio entre 2 y 2:45 hrs	$\frac{f(2{,}75)-f(2)}{2{,}75-2} = \frac{280-210}{0{,}75} = 93km/h$
Vel. promedio entre 2 y 2:30 hrs	$\frac{f(2{,}5)-f(2)}{2{,}5-2} = \frac{260-210}{0{,}5} = 100km/h$
Vel. promedio entre 2 y 2:15 hrs	$\frac{f(2{,}25)-f(2)}{2{,}25-2} = \frac{240-210}{0{,}25} = 125km/h$
Vel. promedio entre 1:45 y 2 hrs	$\frac{f(1{,}75)-f(2)}{1{,}75-2} = \frac{170-210}{-0{,}25} = 160km/h$
Vel. promedio entre 1:30 y 2 hrs	$\frac{f(1{,}5)-f(2)}{1{,}5-2} = \frac{150-210}{-0{,}5} = 120km/h$

Estos cálculos no dicen a que velocidad iba exactamente el auto a las 2 de la mañana, pero dan una idea más aproximada que la velocidad promedio.

Si hubiera habido un registro que permitieran calcular promedios en intervalos cada vez mas pequeños (ej. registros a las 2 y 30 segundos, 2 y 15 segundos, etc) la aproximación sería mas exacta y el “límite” de esos promedios daría la velocidad buscada.

Defınción de Derivada

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto cualquiera en (a, b). Se dice que la función f tiene derivada en el punto x_0 si y sólo si existe el límite del *"cociente incremental"* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ cuando $x \to x_0$. El valor de este límite es la derivada de la función f en $x = x_0$, que se denota por $f'(x_0)$. Esto es,

$$f'(x_0) = lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esto es equivalente a

$$f'(x_0) = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo

(video Derivadas parte 2)

Calcular, usando conciente incremental, la derivada de las funciones:

1. $f(x) = k \cdot x$ en $a = 2$
2. $f(x) = x^2$ en $a = 3$
3. $f(x) = x^2$ en $a = x$ un punto genérico

Función Derivada

(video Derivadas parte 3)

Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, se define la función derivada de f a la función que a cada punto del dominio de f le asigna el valor de la derivada de f en ese punto. Se la denota por $f'(x)$.

Algunas Derivadas

Secretaria de Apuntes e Impresión - C.E.C.E.N.A. - [redacted]

1) $y=c$	$y'=0$	25) $y=c.u$	$y'=c.u'$
2) $y=x$	$y'=1$	26) $y=u.v$	$y'=u'.v+u.v'$
3) $y=c.x$	$y'=c$	27) $y=\frac{c}{u}$	$y'=\frac{-c}{u^2}u'$
4) $y=x^m$	$y'=m.x^{m-1}$	28) $y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
5) $y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	29) $y=u^m$	$y'=m.u^{m-1}u'$
6) $y=\sqrt[m]{x}$	$y'=\frac{1}{m.\sqrt[m]{x^{m-1}}}$	30) $y=u^v$	$y'=u^v v'.\ln u+u^{v-1}.u'.v$
7) $y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	31) $y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
8) $y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e$	32) $y=\sqrt[m]{u}$	$y'=\frac{1}{m.\sqrt[m]{u^{m-1}}}.u'$
9) $y=a^x$	$y'=a^x.\ln a$	33) $y=\ln u$	$y'=\frac{u'}{u}$
10) $y=e^x$	$y'=e^x$	34) $y=\log_a u$	$y'=\frac{u'}{u}\log_a e$
11) $y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	35) $y=a^u$	$y'=a^u.\ln a.u'$
12) $y=\cos x$	$y'=-\operatorname{sen} x$	36) $y=e^u$	$y'=e^u.u'$
13) $y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$	37) $y=\operatorname{sen} u$	$y'=\cos u.u'$
14) $y=\operatorname{cosec} x$	$y'=-\operatorname{cotg} x.\operatorname{cosec} x$	38) $y=\cos u$	$y'=-\operatorname{sen} u.u'$
15) $y=\sec x$	$y'=\operatorname{tg} x.\sec x$	39) $y=\operatorname{tg} u$	$y'=\frac{1}{\cos^2 u}.u'=\sec^2 u.u'$

TABLA DE

Propiedades algebraicas de la derivada

Sean f y g dos funciones derivables en algún intervalo (a, b), sean $x_0 \in (a, b)$ y $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

- Derivada de la suma: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- Derivada de la resta: $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- Derivada del producto: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Derivada del cociente: Si $g(x_0) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Ejemplos

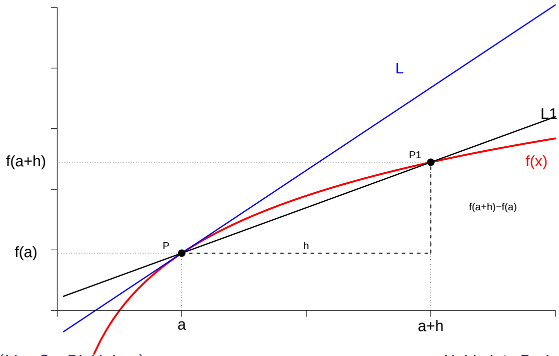
Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 + \ln(x)$
2. $f(x) = xe^x$
3. $f(x) = \frac{xe^x}{8x^2}$

Interpretación Geométrica

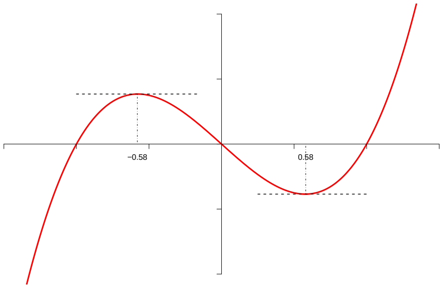
(video Derivadas parte 4)

Queremos encontrar la ecuación de la recta $''L''$, tangente al gráfico de la función f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$



- Necesitamos calcular la pendiente de L
- Podemos considerar otro punto $P' = (a+h, f(a+h))$ sobre el gráfico de $f(x)$ y calcular la pendiente de la recta secante L' que pasa por P y P'.
- La pendiente de L' es $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Si h es suficientemente pequeño, P' estará próximo a P
- Considerando una sucesión de puntos P_i sobre el gráfico de f que se aproximen a P se tendrá una sucesión de rectas secantes L_i cuyas pendientes esperamos se "aproximen" a la pendiente de L, esto es, se necesita que exista $lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
- $f'(a)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$
- La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Interpretación Geométrica



Observaciones:

- En los puntos de abscisa $x = -0{,}58$ y $x = 0{,}58$ las rectas tangentes son horizontales $\Rightarrow$ sus pendientes son cero. Esto es, $f'(-0{,}58) = 0$ y $f'(0{,}58) = 0$.
- En $x = -0{,}58$ la función alcanza un máximo relativo.
- En $x = 0{,}58$ la función alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en el punto $x = 1$

Esta recta tendrá ecuación

$$y = f(1) + f'(1)(x - a) \tag{1}$$

Sabiendo que:

- $f(x) = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f(1) = 3$
- $f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(1) = 2$

y reemplazando en la ecuación (1), se tiene que la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en el punto $x = 2$ es

$$y = 3 + 2(x - 2)$$

Ejercicios:

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados:

- $g(t) = log_2(t) + 3t$ en t $= 3$
- $h(s) = s^3 + 2s^2 + 8$ en s $= 1$

Derivadas de Orden Superior

(Video Derivadas parte 5)

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b).

- $f'(x)$ es una función y como tal, se podría derivar.
- Se obtiene una nueva función definida en los puntos donde exista la derivada de $f'(x)$.
- A esta nueva función se la llama Derivada Segunda de f y se la denota por $f''(x)$
- De la misma manera que se definió derivada segunda se puede definir la derivada tercera (derivando la derivada segunda), derivada cuarta, quinta, etc.

Derivadas de Orden Superior

- La velocidad es la “razón instantánea de cambio” de la función posición respecto al tiempo, esto es, es la derivada de la función posición respecto al tiempo.
- La aceleración es la “razón instantánea de cambio” de la función velocidad con respecto al tiempo, esto es, la derivada de la función velocidad respecto al tiempo, esto es, la derivada segunda de la función posición respecto al tiempo.
- Resumiendo: Si $f(t)$ es la posición respecto al tiempo, $f'(t)$ es la velocidad respecto al tiempo, $f''(t)$ es la aceleración respecto al tiempo.

Ejemplo

La ecuación de movimiento de una partícula es
$x(t) = 2t^2 - 4t + 2$, donde t se mide en segundos.

1. Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.
2. Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula a los 5 segundos de iniciado el movimiento.

Ejercicios Integradores

(video Derivadas parte 6)

Resolver situaciones 1 y 2 del inicio de esta unidad.

Situación 1:

<u>Población de Bacterias</u>

La población P de una colonia de bacterias con espacio y alimentos ilimitados varía con el tiempo de acuerdo a la expresión $P(t) = 100e^{3t}$, donde t se mide en horas.

¿ Cuál es la velocidad de crecimiento de la población a las 2 horas?.

¿ Con qué rapidez crece la población en función del tiempo?

Situación 1

$$P(t) = 100e^{3t}$$

Situación 2:

<u>Contaminación Ambiental</u>

Estudios realizados han permitido determinar que en cierta ciudad el nivel medio diario C de monóxido de carbono CO_2 en el aire, en partes por millón (ppm) , está relacionado con la población p expresada en miles de habitantes por la función

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

El aumento de población en esa ciudad en t años se estima que está dado por la relación $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿ Con qué rapidez estará variando la concentración de CO2 en esa ciudad dentro de 3 años?

Situación 2:

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17} \qquad p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$$

Bibliografía

- Ambas et al. *Matemática Teórica*. CBC UBA. Ed. 2010
- Spivak, M. *Calculo Infinitesimal*, Ed. Reverte, 1999
- Rabuffetti,H.*Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1)*, Ed. El Ateneo, Bs As, 1981.