ÁLGEBRA I: PRÁCTICO 7
Números complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}\left(z^{-1}\right)$, $\operatorname{Im}\left(z^{-1}\right)$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$.

   a) $z = (2+i)(1+3i)$.

   b) $z = 5i(1+i)^4$.

   c) $z = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)^2 \overline{(1-3i)}$.

   d) $z = i^{17} + \dfrac{1}{2}i(1-i)^3$.

   e) $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{179}$.

   f) $z = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$.

   g) $z = \overline{1-3i}^{-1}$.

2. Dados $z = 1+3i$ y $w = 4+2i$, representar en el plano complejo los siguientes números:

   a) z.

   b) w.

   c) $z+w$.

   d) $z-w$.

   e) $-z$.

   f) $2z$.

   g) $\dfrac{1}{2}z$.

   h) iz.

   i) $\overline{z}$.

   j) $\overline{3z+2w}$.

   k) $\overline{iz}$.

   l) $|z|$.

   m) $|2z|$.

   n) $|z+w|$.

   ñ) $|z-w|$.

   o) $|\overline{w-z}|$.

3. Halle el valor del número complejo z que satisface cada una de las siguientes igualdades:

   a) $3 \cdot z + \overline{z} = 3 + 5 \cdot i$.

   b) $2 \cdot z \cdot (1+i) = \left(1 - i^{39}\right) \cdot 2 \cdot \overline{z}$.

4. Describa geométricamente en el plano complejo la región determinada por las siguientes condiciones:

   a) $\operatorname{Re}(z) < 2$.

   b) $\operatorname{Im}(z) > 3$.

   c) $|z| \leqslant 4$.

   d) $z + \overline{z} - 4 \leqslant 0$.

   e) $z \neq 0$, $|z| \geqslant 2$ y $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg(z) \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$.

   f) $z \neq 0$ y $\arg(-iz) > \dfrac{\pi}{4}$.

   g) $z \neq 0$, $|z| < 3$ y $\arg\left(z^4\right) \leqslant \pi$.

5. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos:

   a) $3 + \sqrt{3}i$.

   b) $(2+2i)\left(\sqrt{3} - i\right)$.

   c) $(-1-i)^{-1}$.

   d) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5$.

   e) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{-5}$.

   f) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

6. *a)* Escribir el siguiente número en forma binómica: $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{17}$.

   b) Escribir la forma binómica de $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   c) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^{n-1}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$.

7. Hallar:

a) $(1+i)^{3523}$.
b) $(1-i)^{4236}$.
c) $(2+i)^2$.
d) $\left(3+i\sqrt{2}\right)^2$.
e) $(-2+5i)^2$.
f) $(1-i)^3$.
g) $(3-2i)^5$.

8. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos:

   a) $z=-36$.
   b) $z=i$.
   c) $z=-3-4i$.
   d) $z=-15+8i$

9. Calcule y represente gráficamente las raíces cuartas de $z=1+\sqrt{3}\cdot i$.

10. Hallar en cada caso las raíces n-ésimas de z:

    a) $z=8$, $n=6$.
    b) $z=-4$, $n=3$.
    c) $z=-1+i$, $n=7$.
    d) $z=2i\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^{-1}$, $n=11$.
    e) $z=(2-2i)^{12}$, $n=6$.
    f) $z=1$, $n=8$.

11. a) Calcular $w+\overline{w}+\left(w+w^2\right)^2-w^{38}\left(1-w^2\right)$ para cada $w\in G_7$.
    b) Calcular $w^{73}+\overline{w}\cdot w^9+8$ para cada $w\in G_3$.
    c) Calcular $1+w^2+w^{-2}+w^4+w^{-4}$ para cada $w\in G_{10}$.
    d) Calcular $w^{14}+w^{-8}+\overline{w}^4+\overline{w^{-3}}$ para cada $w\in G_5$.

12. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a\sim b\Leftrightarrow a=wb,\quad \text{para algún } w\in G_4,$$

    o sea, dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

    a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
    b) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

13. Halle los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones

    a) $x^3-1=0$.
    b) $x^2+16=0$.
    c) $x^2+25=0$.
    d) $3x^2+12=0$.
    e) $\frac{1}{2}x^2-3x+5=0$.
    f) $x^2-x+5=0$.
    g) $2x^2-x+3=0$.

14. Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos y $z=(1-t)\cdot z_1+t\cdot z_2$ para algún $t\in(0,1)$. Mostrar que

    a) $|z-z_1|+|z-z_2|=|z_2-z_1|$.
    b) $\arg(z-z_1)=\arg(z_2-z)$.
    c) $\arg(z-z_1)=\arg(z_2-z_1)$.

15. Sean z_1 y z_2 dos números complejos no nulos tales que $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Mostrar que $\dfrac{z_1}{z_2}$ es un imaginario puro.

16. Un triángulo equilátero tiene su centro en el origen y un vértice en $(5,0)$. Encontrar los otros dos vértices.