Unidad 9: Análisis Combinatorio

Preliminares

- *Cent mille milliards de poèmes* (Cien billones de poemas): obra de poesía escrita por Raymond Queneau en 1961
- Consta de 10 páginas, en cada página un soneto formado por 14 versos.
- Queneau sostiene que:
    - es posible escoger como primer verso cualquiera de los primeros versos de los 10 sonetos originales,
    - como segundo verso, el segundos verso de cualquiera de los 10 sonetos originales
    - $\vdots$
    - como catorceavo verso, el catorceavo verso de cualquiera de los 10 sonetos originales

¿ Es correcto el título del libro?

Definición

"La COMBINATORIA es el arte de contar, sin enumerar"

"La COMBINATORIA trata, ante todo, de *contar el número de maneras* en que objetos dados pueden organizarse de una determinada forma" (Anderson, I)

Algunas aplicaciones:

- Inmediatas: Cálculo de Probabilidades (Bioestadística)
- No tan inmediatas: Genética (secuenciamiento de ADN), Biología Computacional (árboles filogenéticos, desdoblamiento de proteínas), localización de plantas, problemas de optimización, etc., etc.

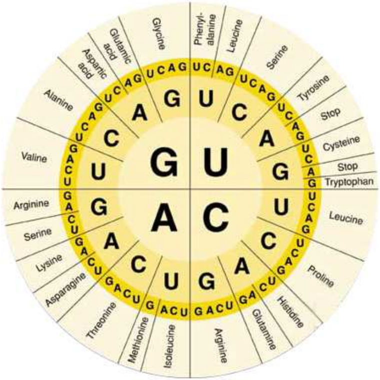
Análisis Combinatorio Simple

Si en un problema de combinatoria NO se pueden REPETIR los elementos, estamos ante un problema de Combinatoria Simple o sin repetición. Caso contrario es un problema de Combinatoria con Repetición.

En este curso sólo se abordarán situaciones de Combinatoria Simple

Ejemplo

Los péptidos son un tipo de moléculas formadas por cadenas de varios aminoácidos mediante enlaces peptídicos. La unión de un número bajo de aminoácidos da lugar a un péptido (< 100) y una cadena de al menos 100 aminoácidos da lugar a una proteína.
Un bi (tri, tetra, penta,..) péptido es una cadena de 2 (resp. 3, 4, 5,...) aminoácidos.
¿Cuántos tri-péptidos distintos pueden configurarse con los tres aminoácidos Serine (S), Lysine (L), Tyrosine (T)? Tener en cuenta que los tri-péptidos SLT y LST, son distintos.

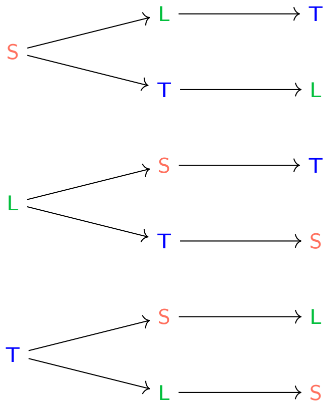


Pregunta: ¿Cuántos tri-péptidos distintos pueden configurarse con los tres aminoácidos Serine (S), Lysine (L), Tyrosine (T)?

Enumeración

1. S L T
2. S T L
3. L S T
4. L T S
5. T S L
6. T L T

Diagrama de Arbol



$3 \quad \times \quad 2 \quad \times \quad 1$

Número Factorial

Situación: Se quiere contar el número de grupos distintos que se pueden formar con todos los elementos de los que se dispone (sin repetirlos).

Ejemplos:

- Tri-péptidos que contienen los tres aminoácidos Serine (S), Lysine (L) y Tyrosine (T)
  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- Contraseñas de 6 caracteres que contienen las letras a,b,c,d,e,f.
  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
- Formas distintas en que pueden formar una fila los 20 alumnos de un curso
  $20 \cdot 19 \cdot \ldots 2 \cdot 1 = 20!$

Notación: Al producto $20 \cdot 19 \cdot \ldots 2 \cdot 1$ se lo llama Factorial de 20 y se lo denota por **20!**

Función Factorial

Sea $f : \mathbb{N}_o \to \mathbb{R}$ tal que si n es un número natural, entonces $f(n)$ es el producto de los n primeros números naturales y se lo denota por $n!$
Esto es,

$$f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1, \quad \text{si } n \geq 1$$

es la Función Factorial

Además,

- $1! = 1$
- $0! = 1$
- $n! = n \cdot (n-1)!$

Permutaciones Simples

Situación:
En el estante de un herbario se quieren exhibir m plantas diferentes. ¿De cuántas maneras distintas pueden exhibirse?

Esta situación y los ejemplos dados recientemente pueden generalizarse a la siguiente situación:

¿Cuántas m-uplas (conjuntos de m elementos) distintas pueden formarse con exactamente m elementos distintos?

Permutaciones Simples

Definición

Se llaman Permutaciones simples de m elementos a todas y cada una de las ordenaciones posibles de esos m elementos, es decir, a los diferentes grupos de m elementos que de ellos pueden formarse, de modo que, entrando todos ellos en cada grupo, lo hagan en distinta posición (u orden).

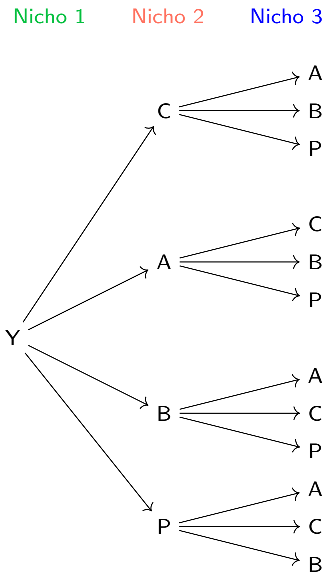
Notación: $P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1 = m!$

Arreglos (o Variaciones) simples

Situación:
En el serpentario de un zoológico hay 3 nichos exhibidores. Sin embargo el zoológico cuenta con cuatro serpientes distintas: una yarará (Y), una cascabel (C), una anaconda (A), una Boa arbolícora (B) y una pitón (P). Si sólo puede colocarse una serpiente por exhibidor, ¿de cuántas maneras distintas pueden exhibirse las serpientes?

Es decir: ¿Cuántos grupos distintos de $n=3$ elementos pueden formarse de un conjunto conformado por $m=5$ elementos distintos?

1. Supongamos en el primer nicho exhibidor colocan una yarará (Y). Las opciones para colocar en el segundo nicho exhibidor son C, A, B y P. Una vez colocada la segunda serpiente en el nicho, para el tercer nicho van a quedar 3 opciones. Esto puede verse en diagrama de árbol de la derecha. En total hay 12 posibilidades distintas de exhibir las serpientes si en el primero de los tres nichos se exhibe una yarará (Y)
2. Diagramas similares se obtienen si en el primer nicho se coloca alguna de las otras serpientes. Por lo tanto, habrá 12 posibilidades distintas de exhibir las serpientes por cada una de las 5 serpientes que se colocan en el primer nicho. Lo que hace un total de 60 maneras distintas de exhibir 3 de las 5 serpientes.
3. Nicho 1: 5 posibilidades x Nicho 2: 4 posibilidades x Nicho 3: 3 posibilidades.
4. $5 \times 4 \times 3 = 60$



Arreglos (Variaciones) simples

Generalizando, la pregunta es:

¿Cuántas n-uplas distintas, con elementos no repetidos, pueden formarse de un conjunto conformado por m elementos distintos? $(n \leq m)$. La respuesta es:

Arreglos simples

Se llaman arreglos (A) o variaciones (V) simples (sin repetición) de m elementos tomados de n en n $(n \leq m)$, y se denota A_n^m, a los diferentes grupos que con ellos se pueden formar, de tal modo que en cada grupo entren n elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás ya sea en alguno de sus elementos o bien en la posición (orden de colocación) de dichos elementos.

Notación:

$$A_n^m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots \cdot [m-(n-1)]$$

Combinaciones Simples

Situación:
Continuando con el ejemplo de las 5 serpientes del zoológico, ahora el director del mismo decidió realizar una muestra itinerante con sólo 3 de las 5 serpientes.

¿Dé cuantas maneras distintas puede elegir las tres serpientes que llevará a la muestra?

1. ¿En qué difiere esta situación de la situación de exhibir 3 serpientes en los exhibidores del zoológico?
2. ¿Por qué no es correcto responder a esta pregunta con A_3^5?

Respuestas:

Los distintos grupos de 3 serpientes (elegidos de un total de 5 serpientes) para llevar la muestra son:

YAC YAB YAP YCB YCP

YBP ACB ACP ABP CBP

1. En este caso, da igual que el director lleva a la muestra a una yarará, una boa y una pitón (YBP), a que lleve una yarará, una pitón y una boa (YPB). Es decir, todas las permutaciones de esos elementos representan un mismo grupo de serpientes que se llevará a la gira.
2. No es correcto responder a esa pregunta con Arreglos de 5 elementos tomados de a 3 (A_3^5) pues en ese caso el grupo YBP y el grupo YPB serían distintos, ya que las posiciones de los elementos que los conforman son distintas.
3. El director puede llevar : $\frac{A_3^5}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ grupos distintos de serpientes.

Combinaciones Simples

Situación General:
¿Cuántas posibles configuraciones de n elementos podemos construir desde un conjunto de m elementos diferentes ($n \leq m$), sin que importe la posición de los elementos (no hay jerarquía) y no sea posible la repetición?

A ese número se lo llama Combinación de m elementos tomados de a n y se lo denota por C_n^m

Combinaciones sin repetición

Combinaciones simples

Se llaman Combinaciones sin repetición de m elementos, tomados de a n ($n \leq m$), a los diferentes grupos que se pueden formar con m elementos, de modo que:

- en cada grupo haya exactamente n elementos distintos de los m dados,
- dos grupos son diferentes siempre y cuando difieran en al menos uno de sus elementos.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right)$$

Además se satisface $C_n^m = C_{m-n}^m$

Principios Generales de la Combinatoria

Supongamos que una elección A (acción, experiencia) tiene n alternativas (resultados) posibles, otra elección B (acción, experiencia) tiene m alternativas (resultados) posibles entonces:

- Principio general de la Multiplicación: la realización conjunta de ambas elecciones (experiencias) tiene $n \times m$ alternativas (resultados) posibles.
- Principio general de la Adición: si A y B son excluyentes, la cantidad de alternativas (resultados) para la elección (acción, experiencia)"A ó B" es $n + m$

Ejemplo de aplicación:

Un biólogo debe disecar animales de distinta especie y dispone de una colección de 3 anfibios distintos (A), 5 reptiles distintos(R) y 6 mamíferos pequeños (M).
¿Cuántas elecciones posibles tiene si

1. tiene que disecar 3 animales de distinta especie?
2. tiene que disecar 2 animales de distinta especie?

Respuestas

1. Tiene que disecar 3 animales de distinta especie.
   En este caso tiene que elegir un animal de cada especie, es decir, 1 de los 3 anfibios A y 1 de los 5 reptiles R y 1 de los 6 mamíferos M.
   Por el principio de la multiplicación, esto puede escribirse como:

$$C_1^3 \cdot C_1^5 \cdot C_1^6 = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$$

2. tiene que disecar 2 animales de distinta especie?
   En este caso debe disecar: uno de los 3 anfibios A y uno de los 5 reptiles R, ó, uno de los 3 anfibios A y uno de los 6 mamíferos M, ó, uno de los 5 reptiles R y uno de los 6 mamíferos M. Usando principio de multiplicación y de la adición, esto es:

$$C_1^3 \cdot C_1^5 + C_1^3 \cdot C_1^6 + C_1^5 \cdot C_1^6 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 63$$

Ejercicio

En el caso del serpentario del zoológico, ¿de cuántas maneras distintas pueden exhibirse las serpientes si:

1. Uno de los exhibidores se rompió y sólo quedan 2 habilitados?
2. Los tres exhibidores están en perfecto estado pero el primero sólo pueden exhibirse una pitón o una anaconda?

Algunas consideraciones al abordar un problema de combinatoria

- ¿Qué se quiere contar?
- ¿Se van a formar grupos con todos o sólo algunos elementos?
- Los elementos, ¿pueden repetirse?
- ¿Importa o no la posición de los elementos dentro de cada grupo?
- Se puede utilizar alguno de los principios generales?
- etc, etc, etc...

Propiedades de los números combinatorios

Los números $C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ se llaman números combinatorios y suelen indicarse con la notación de Euler

$$C_n^m = \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right)$$

Usando la definición de número combinatorio puede verse que:

$$\left(\begin{array}{c} m \\ 0 \end{array} \right) = 1 \text{ y } \qquad \left(\begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right) = 1$$

Números Combinatorios Complementarios

$$C_n^m = \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right) = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \left(\begin{array}{c} m \\ m-n \end{array} \right) = C_{m-n}^m$$

Se dice que C_n^m y C_{m-n}^m son números combinatorios complementarios

Fórmula de Stieffel

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

Una aplicación de está fórmula es en la construcción del triángulo de Pascal

Triángulo de Pascal (o de Tartaglia)

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$$

Triángulo de Pascal

1. Notar que los números consecutivos en una fila $\begin{pmatrix} m-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} m-1 \\ n \end{pmatrix}$ tienen justo por debajo, entre ambos, a su suma $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$
2. Si en las diagonales exteriores ubicamos los números combinatorios $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$ podemos utilizar este triángulo para hallar números combinatorios

Triángulo de Pascal

Calculando los números combinatorios se tiene que:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Aplicación: Potencia de un binomio

Supongamos se quiere calcular la potencia m-ésima del binomio $(x+a)$, es decir, $(x+a)^m$

- Si $m=0$, $(x+a)^0 = 1$
- Si $m=1$, $(x+a)^1 = x+a = 1\cdot x + 1\cdot a$
- Si $m=2$, $(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2 = 1x^2+2xa+1a^2$
- Si $m=3$, $(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3 = 1x^3+3x^2a+3xa^2+1a^3$

Tomemos, a modo de ejemplo $(x+a)^3$

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3 = 1x^3+3x^2a+3xa^2+1a^3\\ &= 1x^3a^0+3x^2a+3xa^2+1x^0a^3\\ &= \left(\begin{array}{c}3\\0\end{array}\right)x^3a^0+\left(\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right)x^2a+\left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)xa^2+\left(\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right)x^0a^3\end{aligned}$$

Caso general

$$(x+a)^m =$$
$$x^m + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} x^{m-1}a + \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} x^{m-2}a^2 + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix} xa^{m-1} + a^m$$

Observaciones:

- La cantidad de términos (sumandos) del desarrollo de $(x+a)^m$ es $m+1$
- Como $\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m-i \end{pmatrix}$, no es necesario calcular todos los coeficientes, pues términos equidistantes de los extremos son números combinatorios complementarios.

El 2er término (término 2-ésimo) del desarrollo de $(x+a)^3$ es

$$\binom{3}{1} x^2 a^1 = \binom{3}{(2-1)} x^{3-(2-1)} a^{2-1}$$

En general, el término k-ésimo del desarrollo de $(x+a)^m$ es

$$T_k = \binom{m}{(k-1)} x^{m-(k-1)} a^{k-1}$$

Ejercicios

1. Hallar el desarrollo de $(x - b)^5$
2. Hallar el desarrollo de $(3x + 5)^6$
3. Encontrar el 5to término del desarrollo de $(4x^2 + y)^7$