

UNIDAD IV:

APLICACIONES DE LA DERIVADA.

Uso de la derivada segunda cuando no se anula. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Aplicaciones físicas de la derivada: velocidad y aceleración.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- Los puntos de inflexión de una función, los intervalos de concavidad y convexidad de una función y cómo determinarlos.
- Los puntos que permiten esbozar el gráfico de una función.



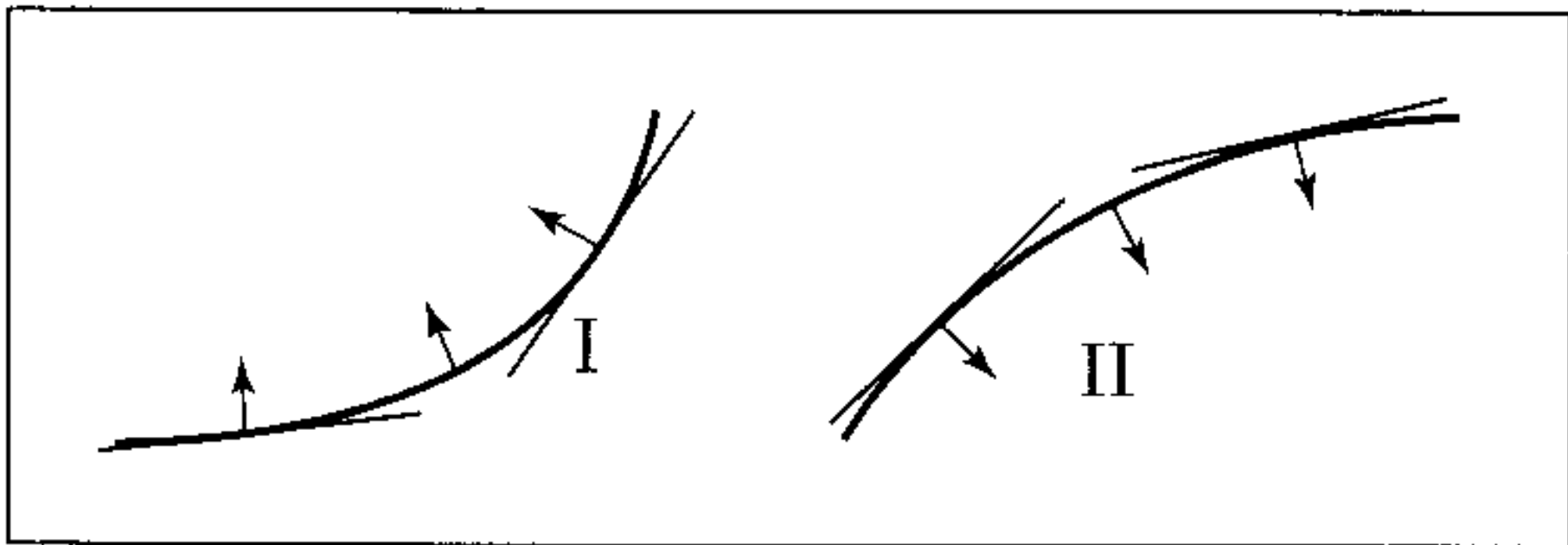
¿Cómo determinamos los extremos de una función?

En la práctica, también es útil el siguiente criterio para la determinación de los extremos de una función.

Teorema. Sea x_0 un punto estacionario y donde, además, existe $f''(x_0)$, entonces:

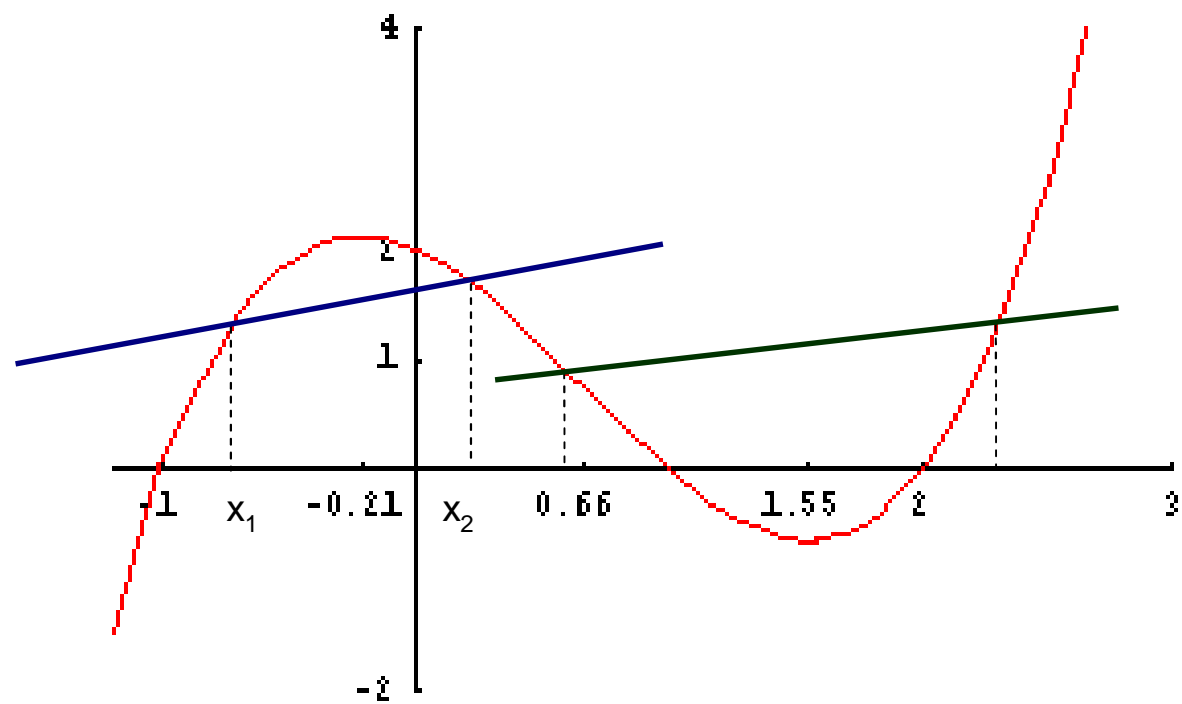
- 1) Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.
- 2) Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.

Considere los siguientes dos gráficos.
Note que ambas funciones son
crecientes, pero hay diferencias en la
“forma” en que ellas crecen.
¿Cuál es la diferencia?



La **Curvatura** de una curva, posee una relación directa con la recta tangente a la curva.

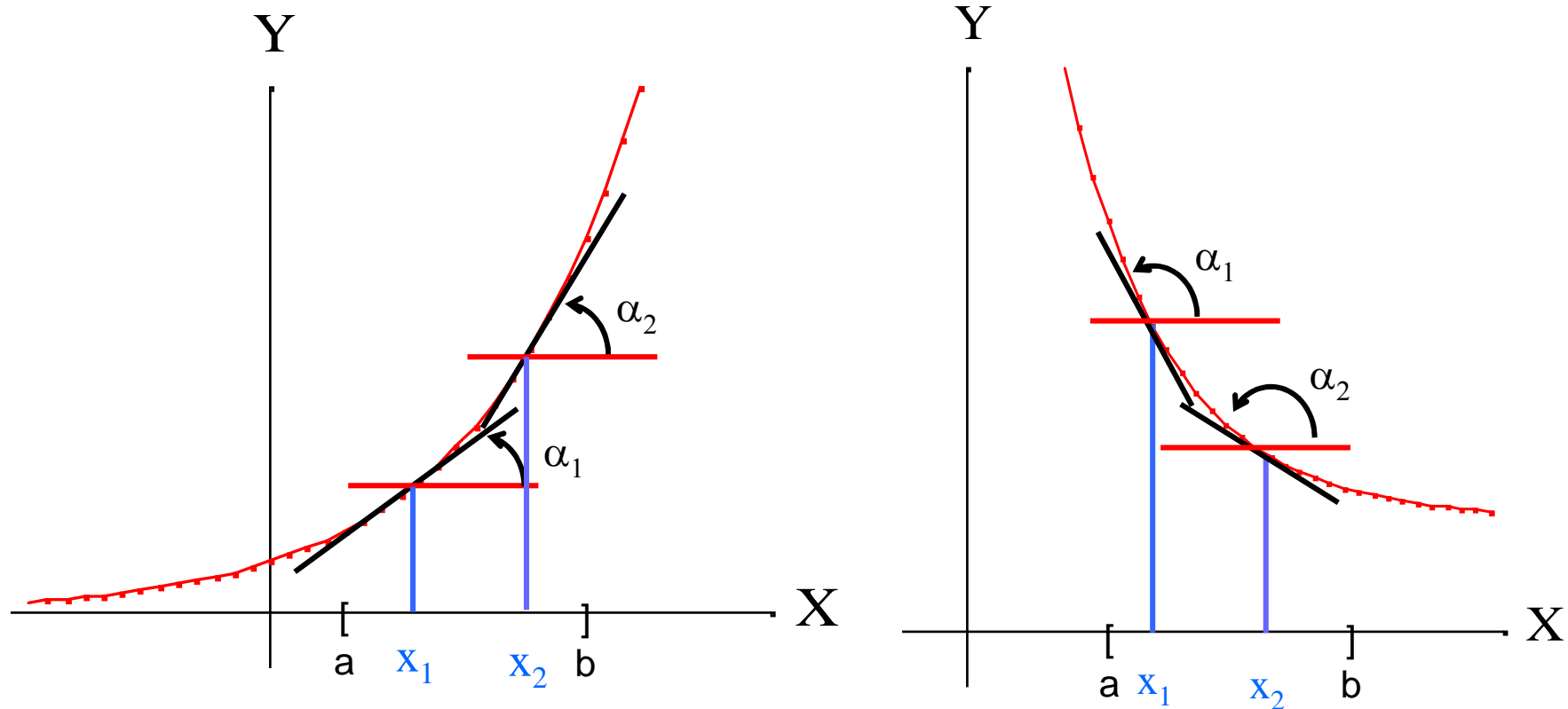
Sea $y=f(x)$ definida y continua en el intervalo $[a,b]$ y x_1, x_2 dos puntos de este intervalo. Decimos que el gráfico de $y=f(x)$ es cóncavo en $[a,b]$ si el gráfico de $y=f(x)$ queda por arriba de la secante que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.



Decimos que el gráfico de $y=f(x)$ es convexo en $[a,b]$ si el gráfico de $y=f(x)$ queda por debajo de la secante que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Un ejemplo muy conocido es el de la función $y=|x|$, cuya posición con respecto a la secante es muy fácil de obtener. Otra función convexa en todo su dominio es la parábola $y=x^2$.

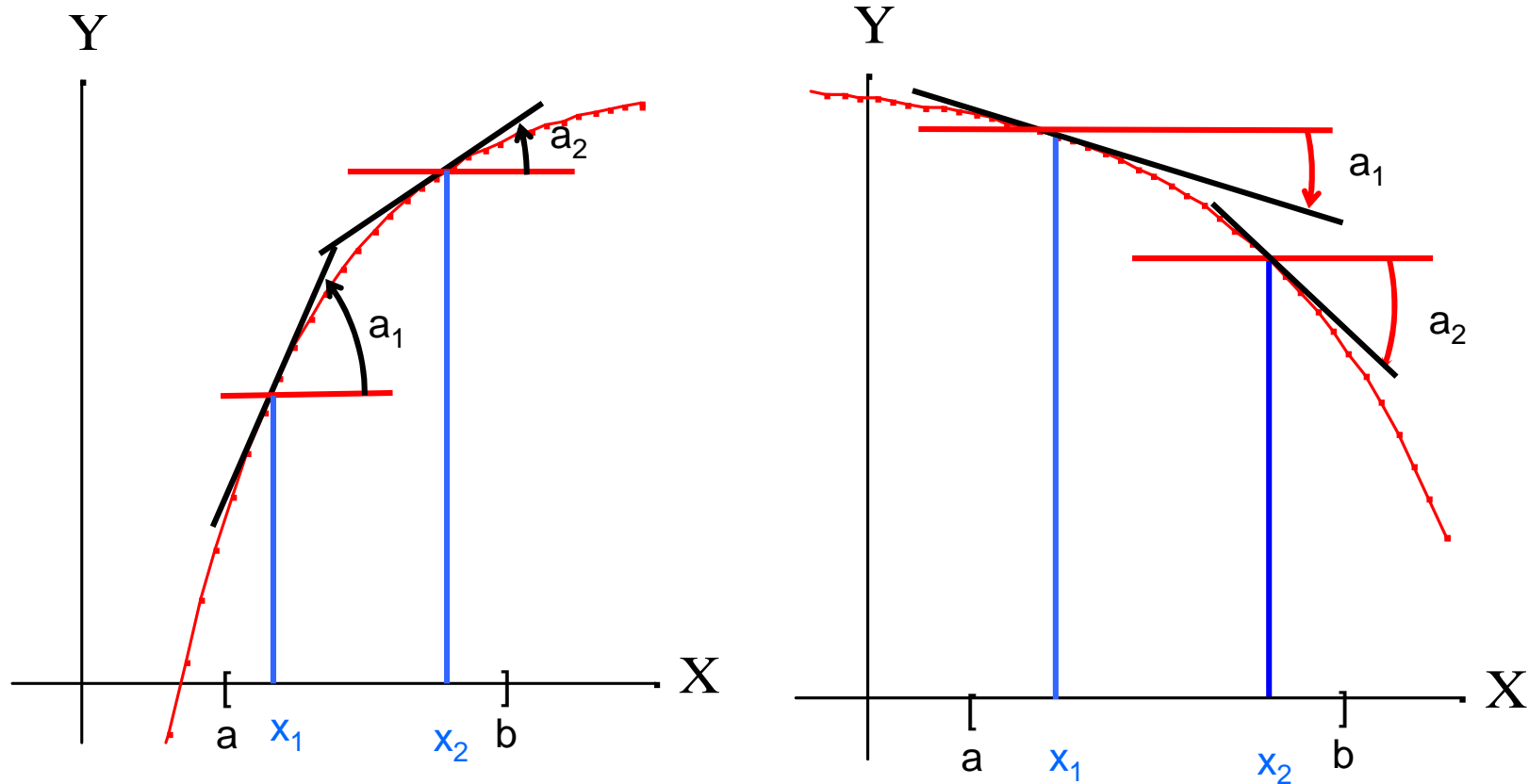
Derivadas y curvatura: convexidad



$$\text{tg } \alpha_1 < \text{tg } \alpha_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

Las pendientes de las tangentes aumentan, por lo que f' es creciente, de aquí que $f'' > 0$, de donde se tiene que la función es convexa..

Derivadas y curvatura: concavidad

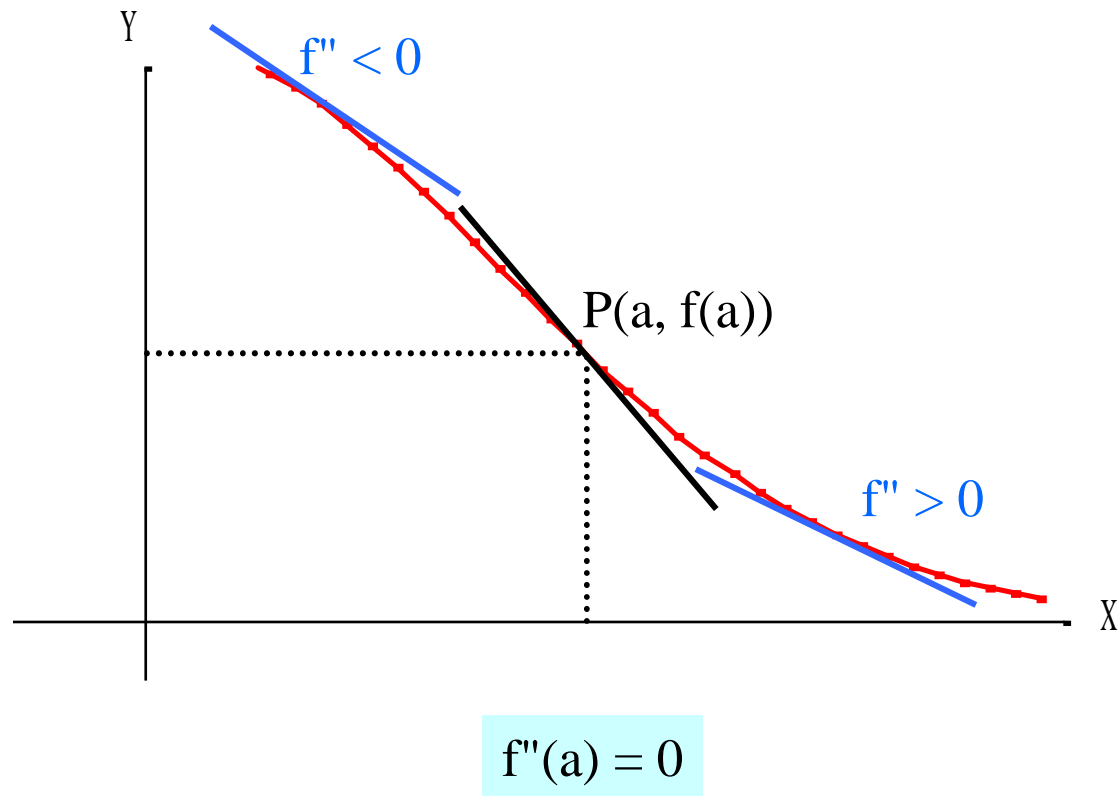


$$\operatorname{tg} a_1 > \operatorname{tg} a_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$$

Las pendientes de las tangentes disminuyen, es decir, f' es decreciente, lo que implica que $f'' < 0$ y la función es cóncava.

Puntos de Inflexión

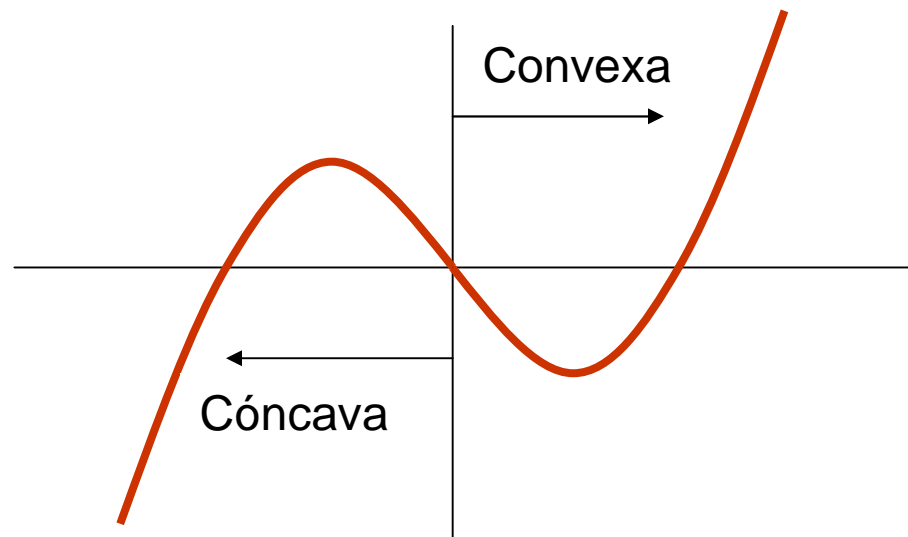
Analicemos el gráfico de la función, a la izquierda y a la derecha de $x=a$.



Decimos que el punto $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de $y=f(x)$, si existe una vecindad de a , tal que a la derecha e izquierda de dicho punto, $y=f(x)$ tiene definida la curvatura y son de diferentes tipos.

Condición necesaria y suficiente, utilizando la segunda derivada.

Teorema. Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y que admite derivada segunda en el intervalo (a,b) . Entonces, el gráfico de $y=f(x)$ es cóncavo (convexo) en $[a,b]$ si y solo si $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) para todo $x \in (a,b)$.



Ejemplo. Analicemos la curvatura de la función $y=x^3-3x^2-4$ en todo \mathbf{R} .

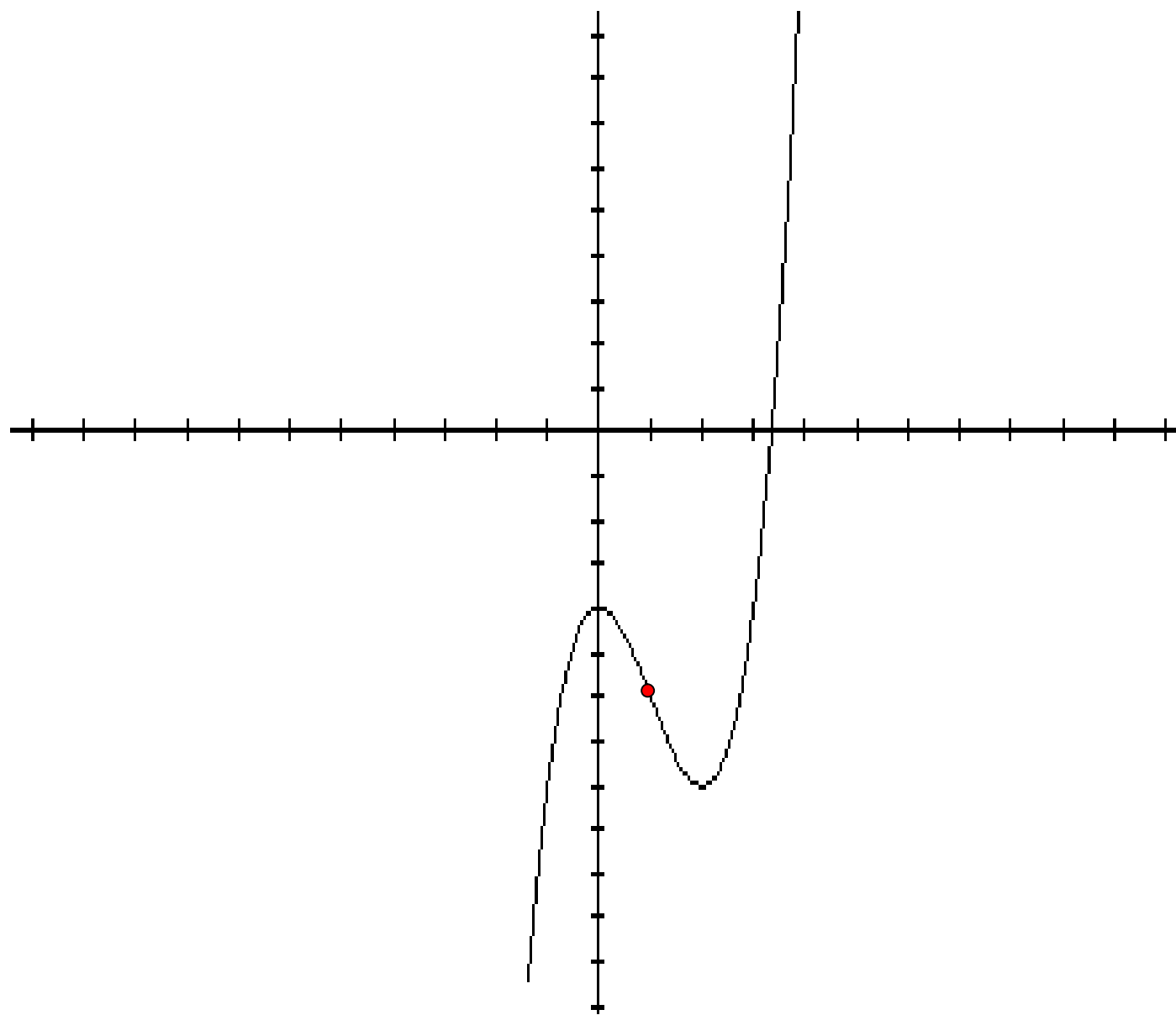
$$y''=6x-6=6(x-1).$$

$x < 1$, $y'' < 0$, cóncavo

$x > 1$, $y'' > 0$, convexo



$(1, -6)$ es un punto de inflexión de la función



Relación entre la curvatura de una función y la posición del gráfico con respecto a las tangentes.

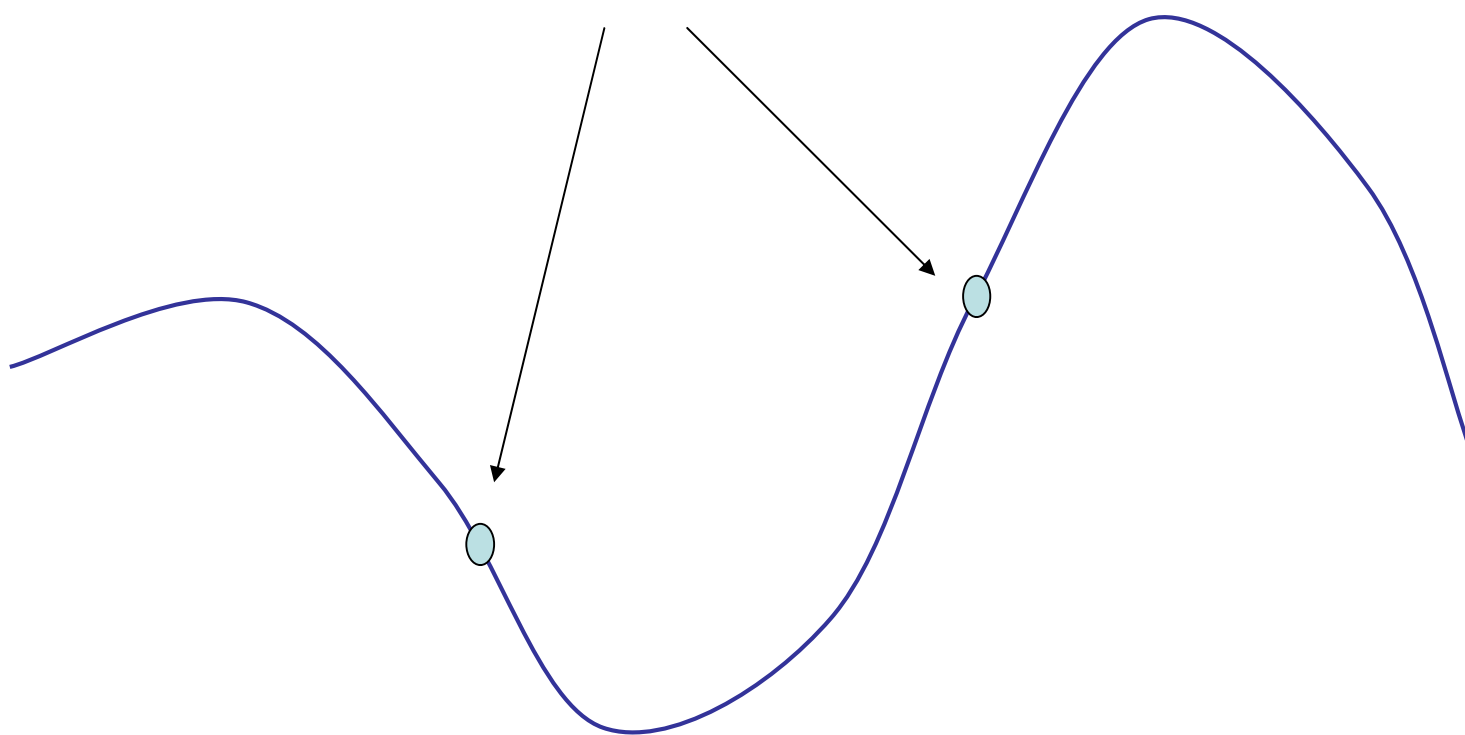
Teorema. Si $f(x)$ tiene en (a,b) segunda derivada y $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) para todo $x \in (a,b)$, es decir, el gráfico es cóncavo (convexo) entonces, dado cualquier punto del intervalo (a,b) , la curva $y=f(x)$ está situada por debajo (encima) de su tangente en dicho punto.

Condición necesaria para que un punto sea de inflexión.

Teorema. Sea $f(x)$ que admita segunda derivada continua en (a,b) , entonces si $(x_0, f(x_0))$ es un punto del gráfico de $y=f(x)$, se cumple que $f''(x_0)=0$.

Observación. Los puntos de inflexión deben buscarse dentro de aquellos valores de x , que anulan a la segunda derivada o donde no sea continua.

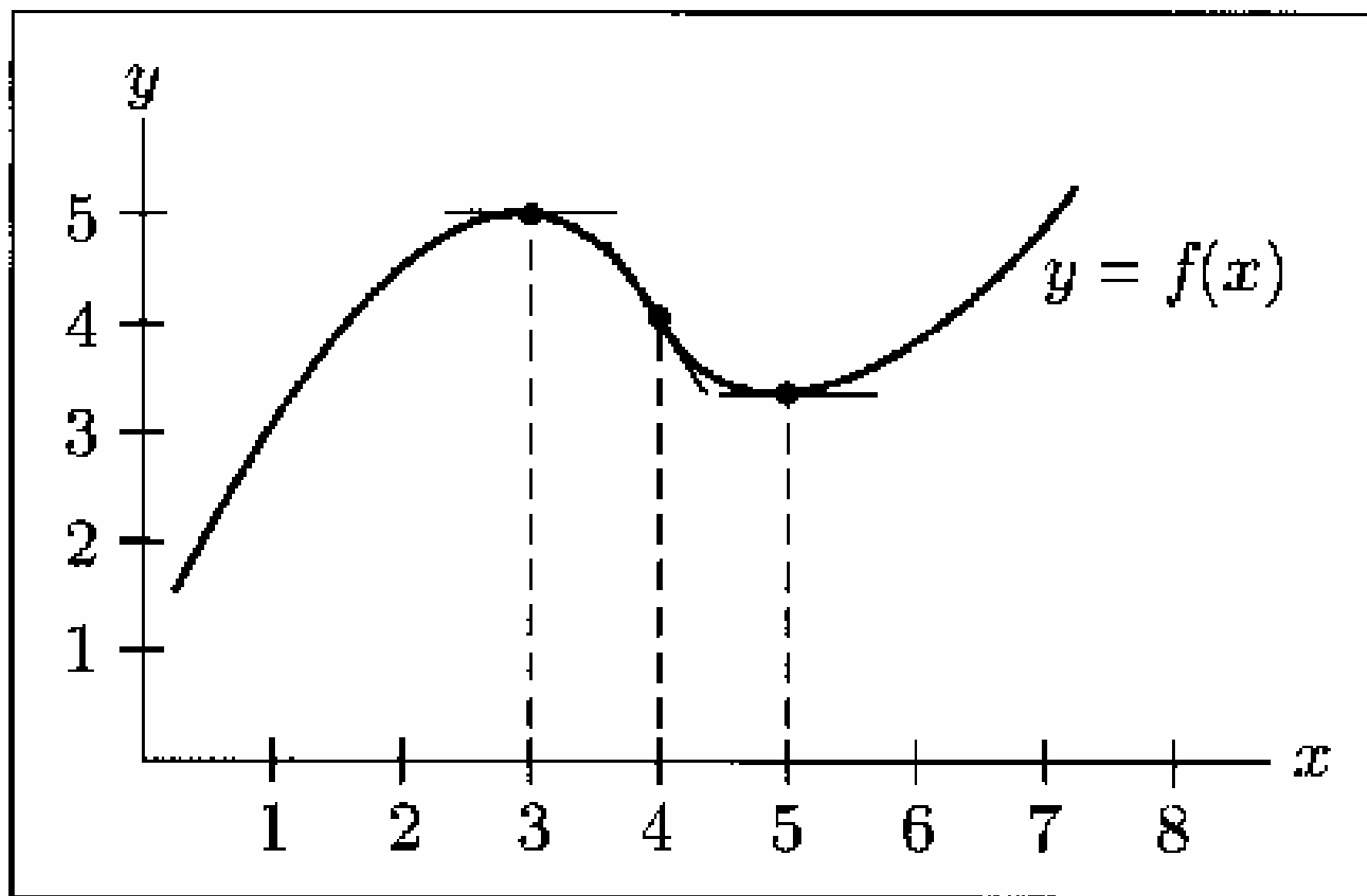
Puntos de Inflexión



¿Es necesario que la función tenga segunda derivada en el punto?

Teorema. Si $f(x)$ es dos veces derivable en una vecindad de x_0 salvo, quizás, en el propio punto x_0 , donde $f(x)$ es continua y $f''(x)$ tiene signos distintos a la derecha y a la izquierda del punto, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de $y=f(x)$.

Observación. Este criterio puede ser aplicado tanto en el caso en que la derivada segunda exista, como cuando no exista en el punto.



- Para $x < 4$, $f(x)$ es creciente y cóncava.
- Tiene un máximo relativo en $x=3$.
- Para $3 < x < 4$, $f(x)$ es decreciente y cóncava.
- Punto de Inflexión en $(4,4)$.
- Para $4 < x < 5$, $f(x)$ es decreciente y convexa.
- Tiene un mínimo relativo en $x=5$.
- Para $x > 5$, $f(x)$ es creciente y convexa.

¿Puede utilizarse la tercera derivada, similarmente a cómo procedimos en el caso de los extremos de una función?

Teorema. Si $f(x)$ es tres veces derivable en el punto x_0 y se cumple, además, que $f''(x_0)=0$ mientras que $f'''(x_0)\neq 0$, entonces en el punto $(x_0, f(x_0))$ se tiene un punto de inflexión de $y=f(x)$.

Teorema. Sea la función $y=f(x)$ y supongamos que en el punto x_0 admite derivadas hasta el orden $n+1$ inclusive, además, supongamos que se cumple:

$$f^{(k)}(x_0)=0, \text{ para } k=1,2,3,\dots,n \text{ y } f^{(n+1)}(x_0)\neq 0.$$

Entonces, si n es:

a) Impar, la función tiene en el punto $(x_0, f(x_0))$ un extremo relativo, máximo cuando $f^{(n+1)}(x_0)<0$ y mínimo cuando $f^{(n+1)}(x_0)>0$.

b) Par, entonces la función $f(x)$ en $V(x_0)$ es creciente, si $f^{(n+1)}(x_0)>0$ y decreciente si $f^{(n+1)}(x_0)<0$. Punto de Inflexión horizontal.

Si además, $n\geq 2$, es decir, $f''(x_0)=0$, el punto $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la curva $y=f(x)$.

Cuadro general para el análisis de máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones dos veces derivables.

$$f'(a) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f''(a) < 0, \text{ máximo} \\ f''(a) > 0, \text{ mínimo} \\ f''(a) = 0, \\ \text{buscamos } f^{(n+1)}(a) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} n \text{ impar } \left\{ \begin{array}{l} f^{(n+1)}(a) < 0, \text{ máximo} \\ f^{(n+1)}(a) > 0, \text{ mínimo} \end{array} \right. \\ n \text{ par } \left\{ \begin{array}{l} \text{creciente } f^{(n+1)}(a) > 0 \\ \text{decreciente } f^{(n+1)}(a) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. , \text{ punto de inflexión horizontal} \end{array} \right.$$

$$f'(a) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} f''(a) = 0, \text{ punto de inflexión no horizontal} \\ f''(a) \neq 0, \text{ no hay punto singular} \end{array} \right.$$

La representación gráfica de funciones requiere el estudio previo de diversos aspectos de la función. Para una representación rápida y esquemática no es preciso estudiar exhaustivamente todos esos aspectos, aunque sí saber elegir aquellos que definan los rasgos más característicos de la gráfica, según sea el tipo de función. A continuación se presentan los diversos aspectos teóricos que deben tenerse en cuenta, para lograr una mejor aproximación. En la práctica, no encontraremos normalmente las funciones elementales aisladas, sino otras obtenidas mediante operaciones con ellas (suma, resta, producto, cociente y, sobre todo, la composición). Por ello es necesario fijarse en qué medida y de qué modo se “heredan” las propiedades de las funciones elementales en las más complejas de las que forman parte.

Esquema para la construcción del gráfico de $y=f(x)$.

1. Determinación del dominio de la función, interceptos con los ejes, signo de la función, simetría, acotación, periodicidad y demás características elementales.
2. Continuidad de la función y clasificación de sus discontinuidades.
3. Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como de los puntos críticos.
4. Obtención de los máximos y mínimos.
5. Determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, así como de los puntos de inflexión.
6. Obtención de las asíntotas.
7. Esbozar el gráfico y comprobar.

Esbozar el gráfico de la función $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4}$

