

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuaciones Lineales con n incógnitas

Se denomina ecuación lineal con n incógnitas, a toda expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$


$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales, y llamamos coeficientes

$b \in R$ denominamos término independiente.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ llamamos incógnitas.

Abreviadamente:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$



Se llama solución de una ecuación lineal con n incógnitas a toda n -úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de números reales, tal que al reemplazar ordenadamente cada incógnita por cada valor verifica la igualdad.

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Es toda expresión de la forma:

[illegible]

Abreviadamente:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Notación

m : número de ecuaciones. ($m \in N$)

n : número de incógnitas. ($n \in N$)

$a_{ij} \in R$: coeficiente de la incógnita x_j en la i -ésima ecuación

$i \in N, \quad 1 \leq i \leq m$ indica la ecuación a la que pertenece el coeficiente

$j \in N, \quad 1 \leq j \leq n$ indica la incógnita de la que es coeficiente.

$x_j \in R$ son las incógnitas.


$b_i \in R, \quad 1 \leq i \leq m$: términos independientes.

Ejercicio: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 11 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_5 = 22 \\ 5x_1 + x_3 = 14 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 - 5 = 0 \end{cases}$$

Identificar:


- a) El número de ecuaciones y el número de incógnitas.
- b) Los coeficientes a_{23} , a_{32} y a_{42}
- c) Los términos independientes: b_1 y b_4



Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el número de ecuaciones y de incógnitas

1) Sistemas cuadrados: ($m = n$).

2) Sistemas no cuadrados o rectangulares: ($m \neq n$).



Resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es determinar los valores de las incógnitas que verifican en forma simultánea las ecuaciones del sistema.

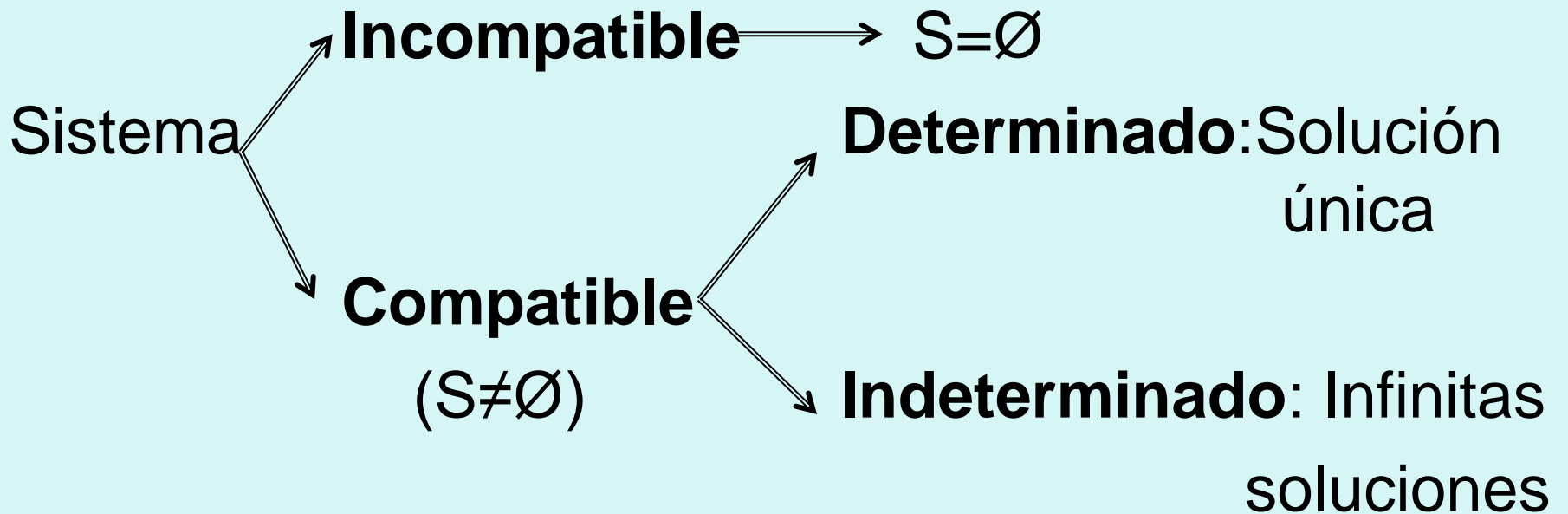
Solución del sistema de ecuaciones lineales


Es una n-úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$, tal que al reemplazar ordenadamente las incógnitas por los α_i satisfacen **simultáneamente** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Conjunto solución:

Es el conjunto **S** de todas las n-úplas $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$ que satisfacen en forma **simultánea** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el conjunto solución






✚ **Sistema incompatible:** es aquel que carece de solución; no existe ninguna n -úpla de K^n que verifique en forma simultánea todas las ecuaciones del sistema.

✚ **Sistema compatible:** es aquel que tiene solución.

➤ **Sistema compatible determinado:** La solución es única, existe un único valor para cada incógnita que satisface a la ecuación.

➤ **Sistema compatible indeterminado:** El sistema tiene infinitas soluciones.



Sistemas de ecuaciones equivalentes: Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes, si tienen el mismo conjunto solución.

Forma Matricial de un Sistema

Asociamos a todo sistema de m ecuaciones con n incógnitas cuatro matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas; se puede escribir matricialmente de la siguiente manera

$$A_{(m \times n)} \cdot X_{(n \times 1)} = B_{(m \times 1)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA

Si a un sistema expresado en forma matricial se aplican operaciones elementales de filas a ambos miembros de la igualdad, el sistema obtenido y el original admiten el mismo conjunto solución.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

Sea $A \bullet X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$A \bullet X = B \text{ es compatible} \Leftrightarrow r(A) = r(A')$$

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen igual rango.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

Demostración:

$$A.X = B \text{ es compatible} \Leftrightarrow \exists \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} / A . \alpha = B \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n] . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \dots + \alpha_n . A_n = B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow B$ es combinación lineal de las n columnas de A

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A')$$

Consecuencias del Teorema

- 1) Si $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}')$ el sistema de ecuaciones es incompatible y no admite soluciones.
- 2) Si $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = r$ el sistema es compatible.
 - a) Si $r = n$, el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.
 - b) Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.



✚ **Sistema incompatible:** es aquel que carece de solución; no existe ninguna n -úpla de K^n que verifique en forma simultánea todas las ecuaciones del sistema.

✚ **Sistema compatible:** es aquel que tiene solución.

➤ **Sistema compatible determinado:** La solución es única, existe un único valor para cada incógnita que satisface a la ecuación.

➤ **Sistema compatible indeterminado:** El sistema tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS CUADRADOS

Sea $A.X=B$ un sistema de ecuaciones tal que A es cuadrada.

Definición: Un sistema cuadrado se llama Crameriano si y solo sí, la matriz del sistema es inversible.

TEOREMA DE CRAMER

Todo Sistema Crameriano: $A.X = B$ admite solución única, es decir, es compatible determinado, siendo la única solución del sistema: $X = A^{-1}.B$

TEOREMA DE CRAMER

Demostración:

Sea $A.X = B$ un sistema crameriano.

Premultiplicamos ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$$

- Propiedad Asociativa: $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$
- Por definición de matriz inversa: $I.X = A^{-1}.B$
- La matriz Identidad es el elemento neutro para producto de matrices: $X = A^{-1}.B$

Resolver el siguiente sistema mediante el teorema de cramer:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

1) La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) Como el determinante de A es distinto de cero, decimos que A es inversible. $|A| = 1$

3) La expresión matricial del sistema será: $A.X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será: $X = A^{-1} \cdot B$

1) El determinante de $A \neq 0$: $|A| = 1$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) Hallamos la matriz adjunta de A

$$Adj A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Hallamos la inversa de A :

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será:

$$A^{-1} \cdot B = X$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolver el siguiente sistema mediante el teorema de cramer:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4y + z = 22 \\ 5x + z = 14 \end{cases}$$

1) La matriz de los coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Como el determinante de A es distinto de cero, decimos que A es inversible. $|A| = -10$

3) La expresión matricial del sistema será: $A.X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

1) El determinante de $A \neq 0$: $|A| = -10$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Hallamos la matriz adjunta de A

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -20 \\ -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -20 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

3) Hallamos la inversa de A :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -20 & 5 & 5 \end{bmatrix}}{-10} = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/10 & 3/10 \\ -1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será:

$$A^{-1} \cdot B = X$$

$$\begin{bmatrix} -2/5 & 1/10 & 3/10 \\ -1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

REGLA DE CRAMER

Si un sistema es Crameriano cada incógnita se puede calcular como un cociente de determinantes.

- ❖ El Dividendo es el determinante de la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz del sistema, los coeficientes de la incógnita que se quiere determinar por los términos independientes.
- ❖ El Divisor es el determinante de la matriz de los coeficientes o matriz del sistema.

La regla de Cramer afirma que la única n -úpla solución de un sistema Crameriano se encuentra efectuando los n cocientes de dichos determinantes.

REGLA DE CRAMER

Sea $A.X=B$ un sistema crameriano:

La matriz A representada por columnas:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n]$$

$$x_1 = \frac{|B \quad A_2 \quad \dots \quad A_n|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|A_1 \quad B \quad \dots \quad A_n|}{|A|}$$

.....

columna j

$$x_j = \frac{|A_1 \quad A_2 \quad \dots B \dots A_n|}{|A|}; \quad 1 \leq j \leq n$$

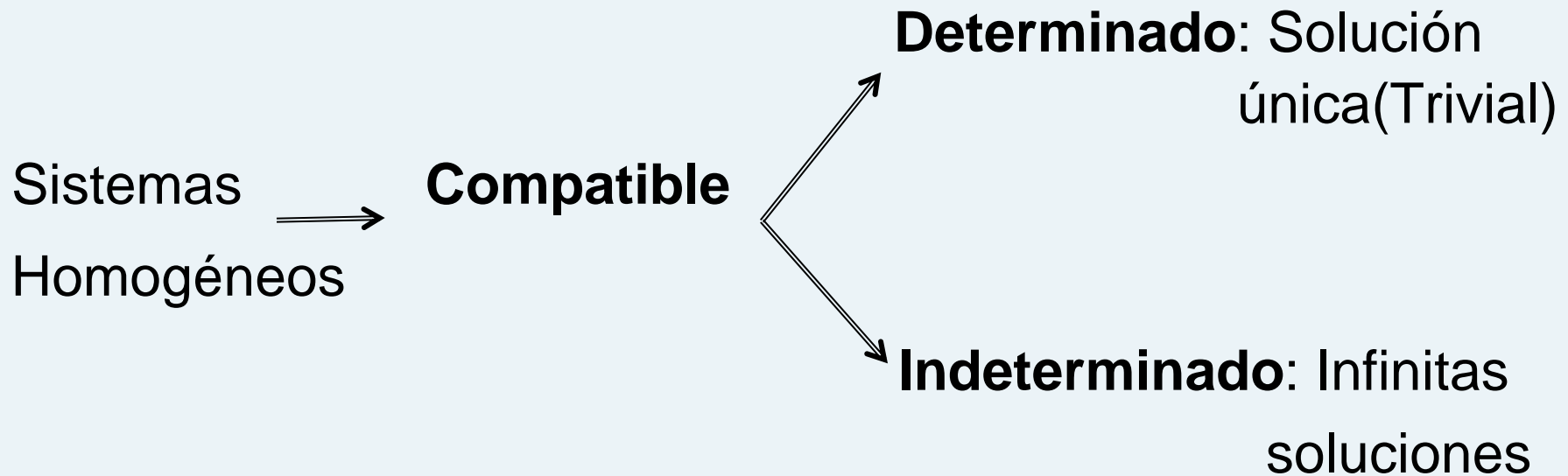
Un Sistema de Ecuaciones Lineales es homogéneo si y solo si todos los términos independientes son simultáneamente nulos.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad \forall i : b_i = 0$$

Un Sistema de Ecuaciones Lineales es no homogéneo si todos los términos independientes no son simultáneamente nulos.

$$\exists i / b_i \neq 0$$

Clasificación de los Sistemas Homogéneos



SISTEMAS HOMOGÉNEOS CUADRADOS

Propiedad:

- ❖ Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.
- ❖ Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es indeterminado si y solo si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4y + z = 22 \\ 5x + z = 14 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x - y + z = 1 \\ 4x + 6y + 8z = 30 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15 \\ x - y + z = 1 \\ 4x + 6y + 8z = 25 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad e) \begin{cases} x + 3z = -2y \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y = -9z \end{cases}$$