Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Lógica de Proposiciones

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Unidad I. Lógica de Proposiciones

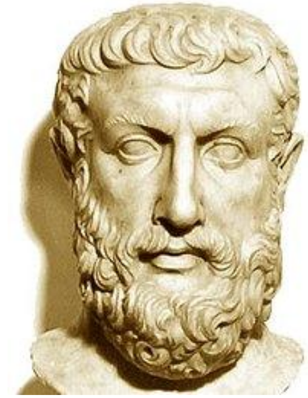
Sintaxis y semántica de fórmulas proposicionales.
Interpretaciones.
Fórmulas satisfacibles.
Modelos. Tautologías. Contradicciones.
Implicación lógica.
Consecuencia lógica.
Teorema de la deducción.
Conectivos adecuados. Reglas de prioridad.
Circuitos lógicos.
Reglas de inferencia: Modus ponens. Modus tollens. Silogismo hipotético. Aplicaciones.

Los compromisos epistemológicos de la Lógica Clásica son:

1. Principio de identidad

$$p = p$$

"El **Ser**, ***es***
y el **No-Ser, *no es***"



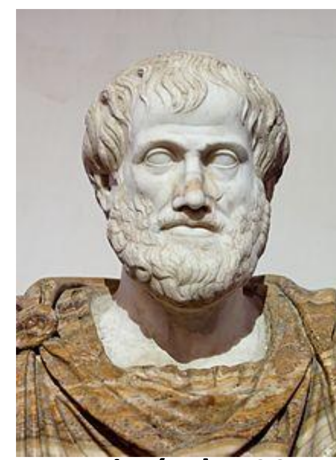
Parménides
Nació entre 515-530 a C.

2. Ley del tercero excluido

$$p \vee {\sim}p$$

3. El Principio de no contradicción

$$\sim(p \wedge {\sim}p)$$



Aristóteles 384-322 a C.

Lógica simbólica

George Boole
1847 El análisis matemático de la lógica

1854 Las leyes del pensamiento.

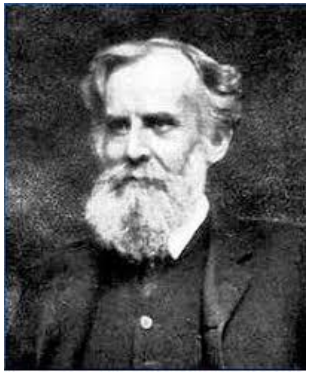
1815 – 1864. Reino Unido

Augustus De Morgan
1847 Lógica formal
(introduce las leyes de De Morgan e intenta generalizar la noción de silogismo).

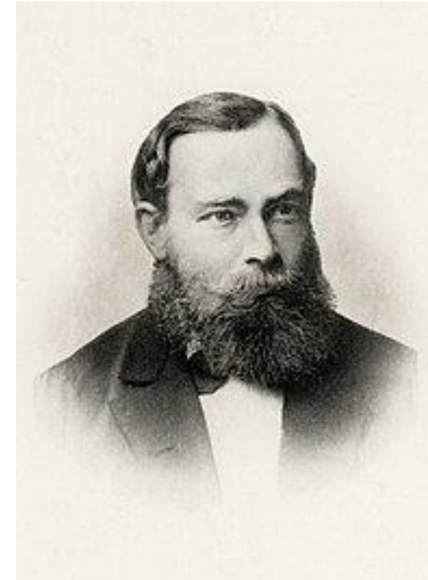
John Venn
1834. R. U.
1923. R. U.

John Venn
1881 Lógica Simbólica
(introduce los diagramas de Venn)

De Morgan
1806. India
1871. Londres



Gottlob Frege (Alemania, 1848-1925). En 1879 “Conceptografía”, ofrece por primera vez un sistema completo de lógica de predicados y cálculo proposicional.



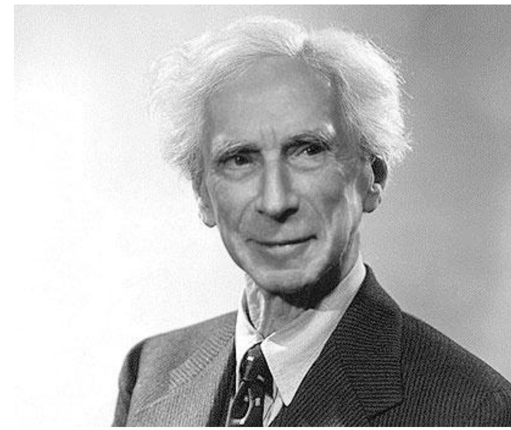
También desarrolla la idea de un lenguaje formal y define la noción de prueba.
Estas ideas constituyeron una base teórica fundamental para el desarrollo de las computadoras y las ciencias de la computación.

En 1893 y 1903, Frege publica en dos volúmenes “Las leyes de la aritmética”, donde intenta deducir toda la matemática a partir de la lógica, en lo que se conoce como el proyecto logicista.

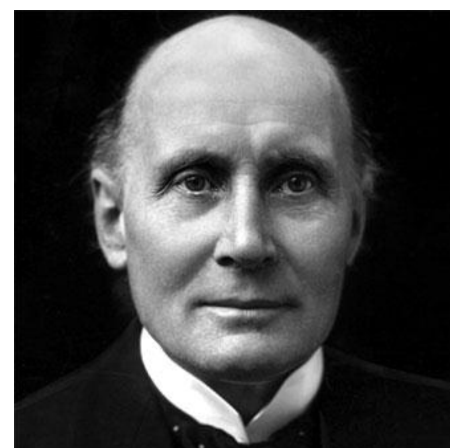
Su sistema y su aplicación a la teoría de conjuntos, sin embargo, contenía una contradicción (la paradoja de Russell).

Giuseppe Peano (Italia, 1858-1932) le da el nombre de Lógica matemática a la nueva disciplina.
En esencia, es la lógica de Aristóteles, pero desde el punto de vista de una nueva notación, más abstracta, tomada del álgebra.

En 1910, **Bertrand Russell** y **Alfred Whitehead** publican "Principia mathematica", logran gran parte de la matemática a partir de la lógica, evitando caer en las paradojas en las que cayó Frege.


B. Russell (R.U. 1872-1970)

Los autores reconocen el mérito de Frege en el prefacio. En contraste con el trabajo de Frege, "Principia mathematica" tuvo un éxito rotundo.


A. Whitehead (R.U.1861-1947 EEUU)

El origen de los modelos abstractos de computación se encuadra en los años '30 (antes que existieran los ordenadores modernos)

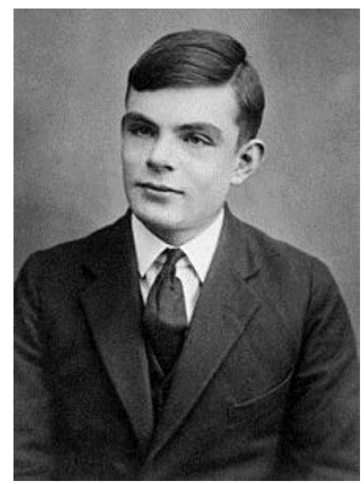
- Alonzo Church
- Kurt Gödel
- Emil Leon Post
- Alan Turing

A. Church (EEUU1903-1995)
Problemas indecidibles

K. Godel
(Rep Checa 1906-1978 EEUU)
Teoremas de incompletitud

(Polonia 1897 – 1954 EEUU)
Lenguajes Formales
Máquina de Post
(Antecedente de la
M. De Turing)

Alan Turing
(R.U. 1912-1954)



1.1 SINTAXIS DEL LENGUAJE DE PROPOSICIONES

$V = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ variables proposicionales

$K = \{\sim\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ conectores lógicos

$P = \{ (,) \}$ símbolos auxiliares

$\Sigma = V \cup K \cup P$ Alfabeto sigma

Fórmulas bien formadas (fbf)

i) Una variable proposicional es una fbf

ii) $\theta \ es\, una\, fbf, \ \sim\theta \ \ también\, es\, una\, fbf$

iii) $\theta \ y \ \varphi \ son \ fbf; \ \ (\theta \wedge \varphi); (\theta \vee \varphi); (\theta \rightarrow \varphi) \ y \ (\theta \leftrightarrow \varphi) \ \ son\, fbf$

iv) Una sucesión o cadena de variables proposicionales, conectivos y símbolos auxiliares del alfabeto Σ es una fbf **si y solo si puede obtenerse mediante un número finito de aplicaciones de las reglas i) ; ii) y iii)**

Ejemplo:

Si $V = \{ p, q, r \}$

$$\Sigma = V \cup K \cup P$$

Son fbf

$(p \wedge q) \rightarrow r$ $\quad$ $(p \rightarrow r) \vee \sim q$ $\quad$ $p \vee (q \rightarrow \sim r)$

No son fbf

$(p \wedge\rightarrow q)r$ $\quad$ $(p\sim r) \vee \sim q$ $\quad$ $p \vee\wedge (qr \rightarrow \sim r)$

1.2 SEMANTICA DE FORMULAS PROPOSICIONALES

Trataremos las fórmulas proposicionales como proposiciones, como enunciados a los que se les puede asignar un valor de verdad "verdadero" o "falso"

Si θ es una fórmula arbitraria cualquiera, puede ser:

verdadera (1) o *falsa* (0)

Negación

Se define así $\sim\theta$ de manera que:

θ	$\sim\theta$
0	1
1	0

Si θ: Pedro lee

$\sim\theta$: Pedro no lee

Conjunción

θ	φ	$\theta \wedge \varphi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

10 es múltiplo de 2 y de 6

10 es múltiplo de 2 y de 5

10 es múltiplo de 3 y de 6

Disyunción incluyente

θ	φ	$\theta \vee \varphi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

10 es múltiplo de 2 o de 6

10 es múltiplo de 2 o de 5

10 es múltiplo de 3 o de 6

Disyunción excluyente

Solo una de las proposiciones debe ser verdadera para que el valor de verdad sea verdadero

θ	φ	$\theta \Delta \varphi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

θ: vamos a pescar

φ: vamos a bailar

O vamos a pescar o vamos a bailar (pero no ambas)

$$\theta \Delta \varphi \quad \equiv \quad (\theta \wedge \sim\varphi) \vee (\sim\theta \wedge \varphi)$$

θ	φ	$\sim\theta$	$\sim\varphi$	$(\theta \wedge \sim\varphi)$	$(\sim\theta \wedge \varphi)$	$(\theta \wedge \sim\varphi) \vee (\sim\theta \wedge \varphi)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

Implicación

θ: Juan es correntino

φ: Juan es argentino

Si Juan es correntino, Juan es argentino

Juan es correntino entonces Juan es argentino

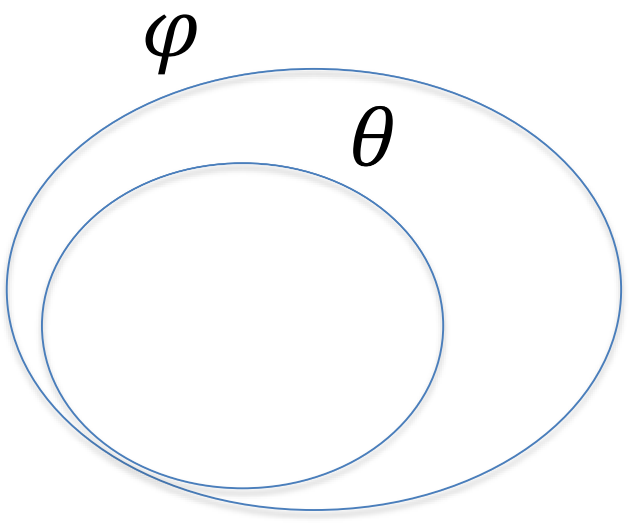
θ	φ	$\theta \to \varphi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\theta \to \varphi \quad \equiv \quad \sim\theta \vee \varphi$$

θ	φ	$\sim\theta$	$\sim\theta \vee \varphi$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Si $\theta \quad y \quad \varphi$ son variables proposicionales

$\theta \rightarrow \varphi$ Cuando el conjunto de verdad de θ es un subconjunto del conjunto de verdad de φ



Todo θ *es* φ

$\theta\!: \; x > 2$

$\varphi : \; x > 1$

$\theta \subset \varphi$

$\theta \rightarrow \varphi$

Considere el lanzamiento de dos monedas juntas al aire.

Sean las variables proposicionales:

θ: “El resultado tiene exactamente una cara”

Φ: “El resultado no tiene dos cecas”

¿una de ellas implica a la otra?

θ resulta verdadera para   {CS; SC}

Φ resulta verdadera para   {CC; CS; SC}

Con $\theta \subset \varphi$

$\theta \rightarrow \varphi$

θ : "El resultado tiene tres caras"

Esta variable proposicional es falsa para cualquier resultado, por tanto, su conjunto de valores de verdad verdaderos, es el conjunto vacío.

El conjunto de valores de verdad verdadero de θ es un subconjunto del conjunto de valores de verdad de cualquier variable proposicional φ

Se cumple que $\theta \subset \varphi$

θ es una variable proposicional ***universalmente falsa***

bajo esta condición θ implica todas y cada una de las demás proposiciones sobre su universo.

θ	φ	$\sim\theta$	$\sim\varphi$	$\theta \to \varphi$	$\varphi \to \theta$	$\sim\theta \to \sim\varphi$	$\sim\varphi \to \sim\theta$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1
				Directa	Recíproca	Contraria	Contrarecíproca

$$\varphi \to \theta \quad \equiv \quad \sim\theta \to \sim\varphi$$

$$\theta \to \varphi \quad \equiv \quad \sim\varphi \to \sim\theta$$

Doble implicación

θ : 2n + 1 es un número impar si n es cualquier número entero

φ : 2n es un número par si n es cualquier número entero

θ	φ	$\theta \leftrightarrow \varphi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

θ	φ	$\theta \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \theta$	$(\theta \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \theta)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Tabla 5. Equivalencias lógicas.	
Equivalencia	*Nombre*
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leyes de dominación
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de la doble negación
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leyes conmutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leyes asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leyes de negación

Tabla 6. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$p \vee q \equiv \neg p \to q$

$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Tabla 7. Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

1.3. INTERPRETACION

La ***interpretación*** define qué fórmulas del lenguaje de proposiciones son verdaderas y cuales falsas.

Los valores de verdad son dos: falso o verdadero, y pueden ser indicados con: **0** o **1**; **off** u **on**; **F** o **V**; **F** o **T** respectivamente

Definición:

Sea *Var* el conjunto de átomos del lenguaje L

Una *interpretación* es una función de *Var* ➔ {0,1},
que asigna a cada elemento de *Var* un 0 o un 1

Ejemplo:

Sea *Var* = { *p, q, r* } ; una interpretación I_1, puede estar dada por: I_1 = { *p* }

Significa que la imagen de *p* es 1, mientras los restantes átomos (elementos) de *Var* tienen como imagen 0

Si I_2 = { *q, r* } significa que la imagen de *q* es 1 y la de *r* es 1 también, mientras la de *p* es 0

Si I_3 = { *p, q, r* } significa que la imagen de *p, q y r* es 1

	p	q	r
$I_1 = \{p\}$	1	0	0
$I_2 = \{q, r\}$	0	1	1
$I_3 = \{p, q, r\}$	1	1	1

Definición:

- Sea I una *interpretación*.
- Sea *Form* el conjunto de fórmulas de *L*

Una ***valuación*** bajo una *interpretación I*, es cualquier función v_I de Form en {0,1}, que satisface las siguientes reglas:

v.1) $v_I(p_n) = I(p_n)$ para cada variable proposicional.

Cuando la fórmula es una variable proposicional, su *valuación* coincide con la asignación que le hace su interpretación.

v.2) Si φ y ρ son fbf arbitrarias, se define θ según la siguiente tabla:

φ	ρ	$\theta = {\sim}\varphi$	$\theta = (\varphi \wedge \rho)$	$\theta = (\varphi \vee \rho)$	$\theta = (\varphi \rightarrow \rho)$	$\theta = (\varphi \leftrightarrow \rho)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ejemplo:

Sea *Var* = { *p*, *q*, *r* } y *J* una interpretación dada por: *J* = { *q* }.
La valuación de la fórmula:

$$\theta = (p \wedge (q \rightarrow {\sim}r))$$

$$v_J(\theta) = v_J\big(p \wedge (q \rightarrow {\sim}r)\big) = 0$$

Porque: $v_J(p) = 0$

Si $I = \{ p \}$ la *valuación* de la fórmula dada es 1

$$\theta = (p \wedge (q \to \sim r))$$

$$v_I(\theta) = v_I\big(p \wedge (q \to \sim r)\big) = 1$$

porque: $v_I(p) = 1$ y $v_I(q) = 0$ $\quad v_I(q \to \sim r) = 1$

Valuaciones de θ_1 y θ_2 para diferentes configuraciones de valuaciones de φ y ρ

$$\theta_1 = (\varphi \to (\varphi \vee \rho)) \qquad \theta_2 = (\varphi \wedge (\sim\varphi \wedge \rho))$$

	φ	ρ	$\varphi \vee \rho$	$\varphi \to (\varphi \vee \rho)$
v_1	0	0	0	1
v_2	0	1	1	1
v_3	1	0	1	1
v_4	1	1	1	1

	φ	ρ	$\sim\varphi$	$\sim\varphi \wedge \rho$	$\varphi \wedge (\sim\varphi \wedge \rho)$
v_1	0	0	1	0	0
v_2	0	1	1	1	0
v_3	1	0	0	0	0
v_4	1	1	0	0	0

Ejercicios:
Sea *Var* = { *p*, *q* }. Encuentre la valuación de cada una de las fórmulas θ_i para las interpretaciones dadas en cada caso

$$\theta = ((p \rightarrow q) \wedge {\sim}q \qquad I_1 = \{p, q\}$$

$$\theta = ((p \rightarrow q) \wedge {\sim}q \qquad I_2 = \{p\}$$

$$\theta = ((p \rightarrow q) \wedge {\sim}q \qquad I_3 = \{q\}$$

$$\theta = ((p \rightarrow q) \wedge {\sim}q \qquad I_4 = \{\ \}$$

1.4 FORMULAS SATISFACIBLES

Definición:

Sea θ una fórmula y sea *I* una interpretación.

θ es verdadera bajo *I*, si su valor de verdad es 1
se dice que *I* satisface a θ;
o que θ es satisfacible por *I*

$$I \vDash \theta$$

Si θ es falsa bajo *I*, cuando su valor de verdad es 0
se dice que *I* no satisface a θ

$$I \nvDash \theta$$

Ejercicio:
Diga en qué caso $I \vDash \theta$

a) $\theta = ((p \to q) \land \sim q$ $\qquad I_1 = \{p, q\}$

b) $\theta = ((p \to q) \land \sim q$ $\qquad I_2 = \{p\}$

c) $\theta = ((p \to q) \land \sim q$ $\qquad I_3 = \{q\}$

d) $\theta = ((p \to q) \land \sim q$ $\qquad I_4 = \{\ \}$

1.5 MODELOS – TAUTOLOGIAS - CONTRADICCIONES

Definición

Sea θ una fórmula y sea *I* una interpretación.

I es un ***modelo*** para θ si *I* satisface a θ;

se dice también que θ tiene como *modelo* a *I*

Definición

θ es tautología si todas las interpretaciones son modelos para θ

Las tautologías se denotan con T_0

Si una fórmula θ es tautológica, se escribe:

$$\models \theta$$

Los tipos mas importantes de Tautología son:

Las equivalencias lógicas

Se utilizan como esquemas de sustitución en procesos de razonamiento

Las implicaciones lógicas

Se utilizan como esquemas de razonamientos válidos

Definición

θ es ***contradicción***, ***insatisfacible*** o ***inconsistente*** si es falsa para todas las interpretaciones.

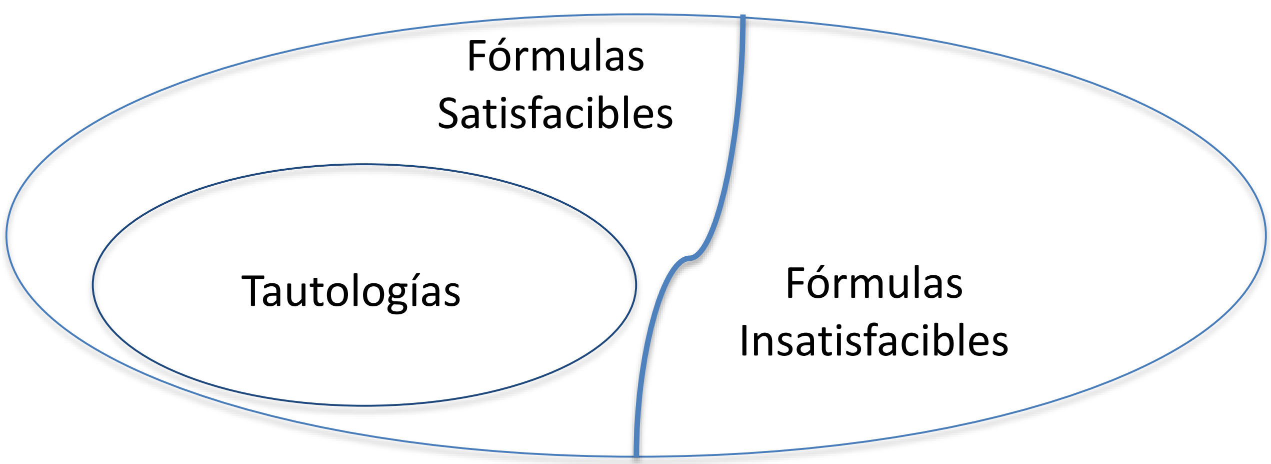
Las contradicciones se denotan con F_0

Una contradicción no tiene interpretaciones que sean modelos.

Una fórmula lógica que no es tautología ni contradicción se denomina ***contingencia***

Una contingencia es satisfacible pero no es tautología; significa que para alguna(s) interpretación(es) tiene valor de verdad 1, pero no para otras.

p	q	$\sim p$	$\theta = \sim(p \wedge q)$	$\varphi = (\sim(p \wedge q) \vee q)$	$\rho = (p \wedge \sim p)$	$\omega = (p \vee \sim p)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
			contingencia	tautología	contradicción	tautología



Sea S un conjunto de fórmulas de manera que $S \subseteq Form$ y una valuación.

La valuación es modelo para S si es modelo para todas las fórmulas de *S*.

$$v(\varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in S$$

Ejemplo:

Sea $S = \{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r))\}$ Busque una valuación que satisfaga a S

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	
0	0	0	1	1	$I_1 = \{\ \}$
0	0	1	1	1	$I_2 = \{r\}$
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	$I_3=\{q, r\}$
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	$I_4=\{p, q, r\}$

Ejercicio

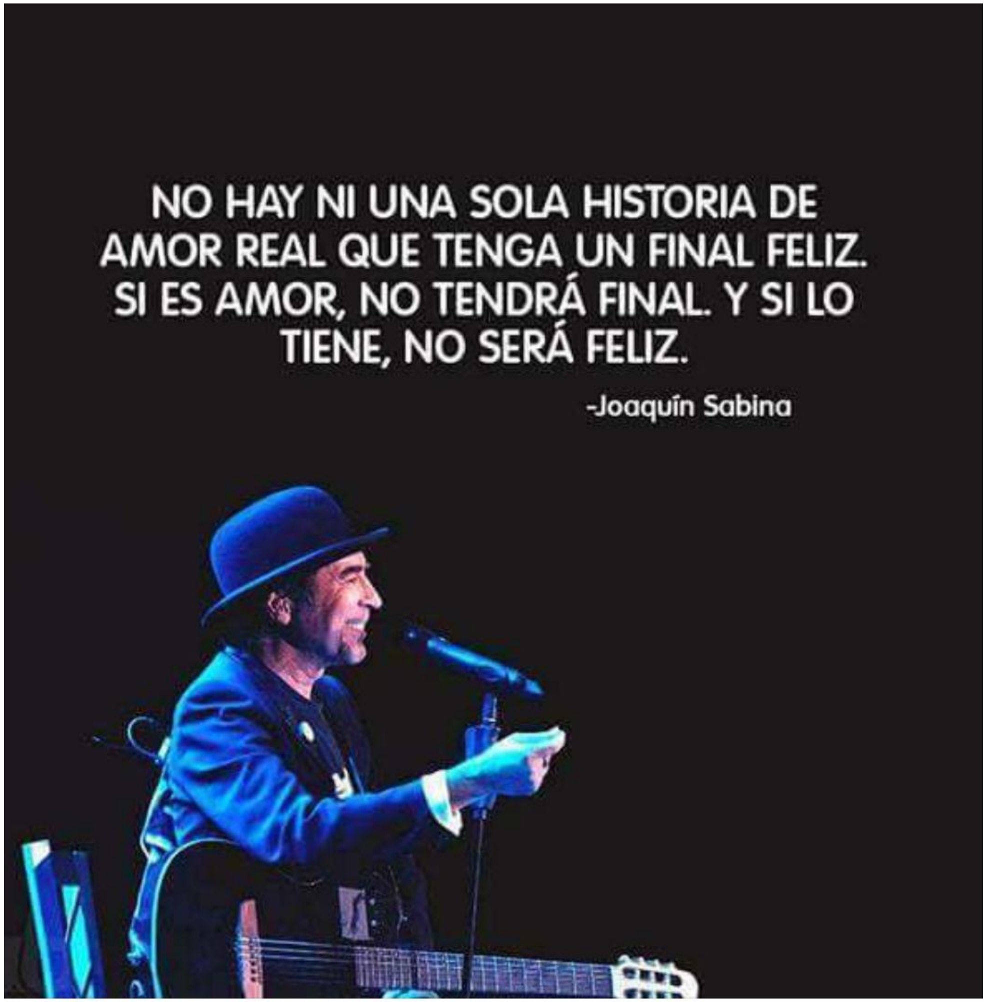
En cada enunciado, identifica las proposiciones primitivas, escribe en forma simbólica y construye la tabla de verdad para cada fórmula e indica si se trata de tautología, contingencia o contradicción

a) Si Juan estuvo ayer en el partido, necesita dormir. Juan no necesita dormir. Por consiguiente, Juan no fue ayer al partido

b) Si el programa para resolver el problema es eficaz, entonces no tiene error. El programa es eficaz. Por tanto, no tiene error.

c) Si los programas tienen errores lógicos, no funcionan correctamente. Si no funcionan correctamente entonces no son eficaces. Por tanto, los programas que tienen errores lógicos no son eficaces.

d) Si Agustín no cumple con el horario de trabajo, será despedido. Agustín fue despedido. Por tanto Agustín no cumplió con el horario de trabajo.


NO HAY NI UNA SOLA HISTORIA DE
AMOR REAL QUE TENGA UN FINAL FELIZ.
SI ES AMOR, NO TENDRÁ FINAL. Y SI LO
TIENE, NO SERÁ FELIZ.
-Joaquín Sabina

Juegos de Lógica

En una isla hay dos clases de habitantes: caballeros, que siempre dicen la verdad y villanos, que siempre mienten. Si encuentras a dos personas, A y B. ¿Qué son A y B, si A dice: "B es un caballero" y B dice: "Los dos somos de clase opuesta"?

p: A es un caballero q: B es un caballero

Si A es un caballero, entonces dice la verdad cuando afirma que B es un caballero

Si A es un caballero, entonces B es un caballero es verdad

$$v(p \to q) = 1$$

Lo que resulta inconsistente porque B dice: Los dos somos de clase opuesta ; y esto debe ser verdad si B es un caballero, pero el supuesto en este caso es que los dos son caballeros.

Si B es un caballero, necesariamente A es villano, por la afirmación de B: Somos de clases opuestas, así:

$$(p \wedge {\sim}q) \vee ({\sim}p \wedge q)$$

Debe ser verdadera, pero A dijo que B es caballero, con lo cual A también es caballero y la propuesta se hace inconsistente.

Si A es villano, miente cuando dice que B es caballero

Si B es villano, miente cuando dice que ambos son de la misma clase

Lo cual es consistente, entonces A y B son villanos

1.6 IMPLICACIÓN LOGICA. CONSECUENCIA LOGICA

Una fórmula φ es ***consecuencia lógica*** de un conjunto de fórmulas S, si la verdad de todas las fórmulas de S implican la verdad de φ

Definición:

Sea *S* un conjunto de fórmulas y φ una fórmula.
φ es *consecuencia lógica* de *S*, si toda interpretación que es modelo para *S* también lo es para φ. $S \vDash \varphi$ (*S implica lógicamente* a φ)

$S \vDash \varphi$ se puede decir también φ es *consecuencia lógica* de *S*

El conjunto de las consecuencias lógicas de *S* se escribe:

$$S = \{\varphi \in Form \ / \ S \vDash \varphi \ \}$$

1.7 TEOREMA DE LA DEDUCCION

Sea S un conjunto de fórmulas y θ y φ fórmulas arbitrarias

Luego: $S \cup \{\theta\} \vDash \varphi \quad si\ y\ solo\ si \quad S \vDash \theta \rightarrow \varphi$

Demostración:

1) $S \cup \{\theta\} \vDash \varphi \quad implica \quad S \vDash \theta \rightarrow \varphi$

Sea *I* una interpretación que verifica las fórmulas de S

Probaremos que *I* verifica también $\theta \rightarrow \varphi$

Supongamos que v(θ) = 1 , por hipótesis tenemos que: $S \cup \{\theta\} \vDash \varphi$; luego v(φ) = 1

Esto es suficiente para probar que *I* verifica $\theta \rightarrow \varphi$

2) $S \vDash \theta \rightarrow \varphi \quad implica \quad S \cup \{\theta\} \vDash \varphi$

Sea *I* una interpretación que verifica las fórmulas de *S* U { θ }

I verifica todas las fórmulas de S; por hipótesis verifica también $\theta \rightarrow \varphi$

Al ser v(θ) = 1, necesariamente V(φ) = 1

Ejemplo:

Diga si $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ es una fórmula tautológica, sabiendo que:

$$\{p, (p \to q), (q \to r)\} \vDash r$$

Aplicando sucesivamente el Teorema de deducción, tenemos:

$$\{(p \to q), (q \to r)\} \vDash (p \to r)$$

$$\{(p \to q)\} \vDash (q \to r) \to (p \to r)$$

$$\vDash (p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$$

Todo conjunto de fórmulas S, $S \subseteq Form$ para toda fórmula θ se tiene que:

$$S \vDash \theta \quad si\ y\ solo\ si \quad S \cup \{\sim\theta\}$$ es insatisfacible

Demostración:

$\theta \in Con\, S$ Si y solo si toda valuación que satisface a S, también satisface a θ

Si y solo si toda valuación que satisface a S, verifica que: $\sim v(\theta) = v(\sim\theta) = 0$

Si y solo si toda valuación que satisface a S, no satisface $\sim\theta$

Es decir que: $S \cup \{\sim\theta\}$ es insatisfacible

Ejemplo: Verifique que $\{p, (p \wedge q) \rightarrow r\} \vDash r$

Analizamos: $\{p, (p \wedge q) \rightarrow r\} \cup \{\sim r\}$

Bajo la *I* = { p } es modelo de

$$\{p, (p \wedge q) \rightarrow r\} \cup \{\sim r\}$$

Luego, la deducción propuesta es ilegítima, no se verifica

Ejercicio:

Diga si las siguientes fórmulas son satisfacibles. Justifique

$$\{p, p \rightarrow (q \rightarrow r), q\} \vDash r$$

$$\{r \rightarrow (s \rightarrow q), \sim t \vee r, s, t\} \vDash t \rightarrow q$$

$$\{p \rightarrow q, r \vee \sim q, \sim(p \wedge r)\} \vDash \sim p$$

$$\{p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow \sim p, s \rightarrow \sim r\} \vDash p \rightarrow \sim s$$

Demuestre la validez de las siguientes afirmaciones mediante tabla de verdad:

$$\{(p \vee q) \rightarrow \sim p, q \rightarrow \sim p, r \rightarrow \sim p)\} \vDash \sim p$$

$$\{p \rightarrow (q \vee r), r \rightarrow s, \sim q \vee s\} \vDash \sim(p \wedge \sim s)$$

1.8 EQUIVALENCIA LOGICA

Dos fórmulas θ y φ son *lógicamente equivalentes* si para toda interpretación *I*, los valores de verdad coinciden;

es decir v(θ) = v(φ) para toda *I*

$\theta \vDash \varphi \quad y \quad \varphi \vDash \theta$ se expresa $\varphi \Leftrightarrow \theta$

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

TEOREMA

Si θ y φ son fórmulas arbitrarias, entonces

$$\varphi \Leftrightarrow \theta \qquad si\ y\ solo\ si \qquad \vDash (\theta \leftrightarrow \varphi)$$

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$	$p \to q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (p \to q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

$$(\theta \to \varphi) \leftrightarrow (\sim\theta \vee \varphi)$$

$$(\theta \wedge \sim\varphi) \vee (\sim\theta \wedge \varphi) \leftrightarrow (\theta \Delta \varphi)$$

Conectivos adecuados

Un conjunto de conectivos es adecuado si a partir de sus elementos pueden definirse todos los demás conectivos

El conjunto $\{\sim, \wedge, \vee\}$ ***es adecuado***

$$\{\sim,\wedge\};\{\sim,\vee\};\{\sim,\rightarrow\}$$

Son conjuntos adecuados

$$\{\sim\};\{\wedge,\vee\};\{\rightarrow,\vee\}$$

NO son conjuntos adecuados

$$(\theta \to \varphi) \leftrightarrow (\sim\theta \lor \varphi)$$

$$(\theta \land \sim\varphi) \lor (\sim\theta \land \varphi) \leftrightarrow (\theta \Delta \varphi)$$

θ	φ	$\sim\theta$	$\sim\varphi$	$\theta \land \sim\varphi$	$\sim\theta \land \varphi$	$(\theta \land \sim\varphi) \lor (\sim\theta \land \varphi)$	$\theta\Delta\varphi$	$(\theta \land \sim\varphi) \lor (\sim\theta \land \varphi) \leftrightarrow \theta\Delta\varphi$
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1

1.9 REGLAS DE PRIORIDAD

Se pueden eliminar eventualmente los paréntesis, estableciendo una regla de prioridad según el siguiente orden de mayor a menor:

$$\sim$$
$$\wedge$$
$$\vee$$
$$\rightarrow$$
$$\leftrightarrow$$

$p \rightarrow q \wedge t$ $\qquad$ $(p \rightarrow (q \wedge t))$

$p \rightarrow \sim q \wedge r \vee s \leftrightarrow \sim t$ $\qquad$ $((p \rightarrow ((\sim q \wedge r) \vee s)) \leftrightarrow \sim t)$

$(p \wedge (r \vee s)) \leftrightarrow t$ $\qquad$ $p \wedge (r \vee s) \leftrightarrow t$

$p \wedge r \vee s \leftrightarrow t$ $\qquad$ $((p \wedge r) \vee s) \leftrightarrow t$

Si en una expresión los conectivos tienen el mismo orden de precedencia, la evaluación de tal expresión se realiza de izquierda a derecha

$$p \to q \to r \qquad\qquad (p \to q) \to r$$

Ejercicio: Sean las fbf

$$a.\ (p \to (q \to r)) \quad b.\ (\sim p \to \sim(q \to r)) \quad c.\ (p \vee q)$$

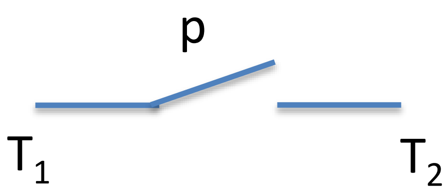
Encuentre fórmulas equivalentes que usen solo los conectivos

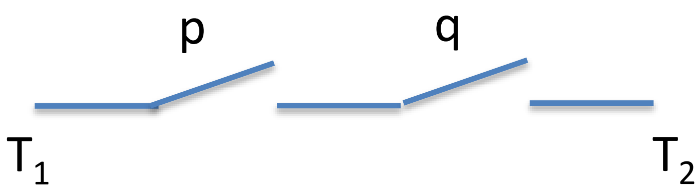
$$i)\ \{\sim, \wedge\} \quad ii)\ \{\sim, \vee\} \quad iii)\ \{\sim, \to\}$$

Ejercicio: Usando paréntesis, indique el orden en que se ejecutan los conectivos de acuerdo al orden de precedencia

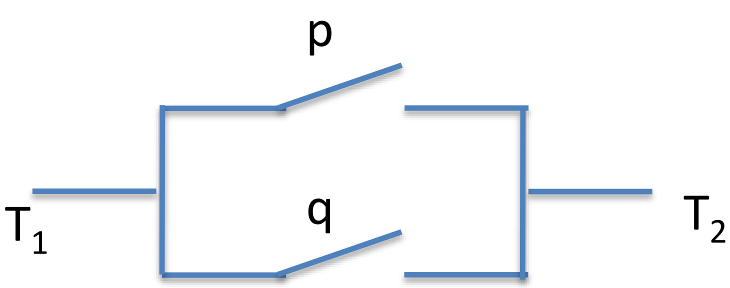
$$a.\ \ p \wedge q \to p \qquad\qquad b.\ \ p \wedge q \vee r \leftrightarrow p \wedge t$$

1.10 CIRCUITOS LOGICOS

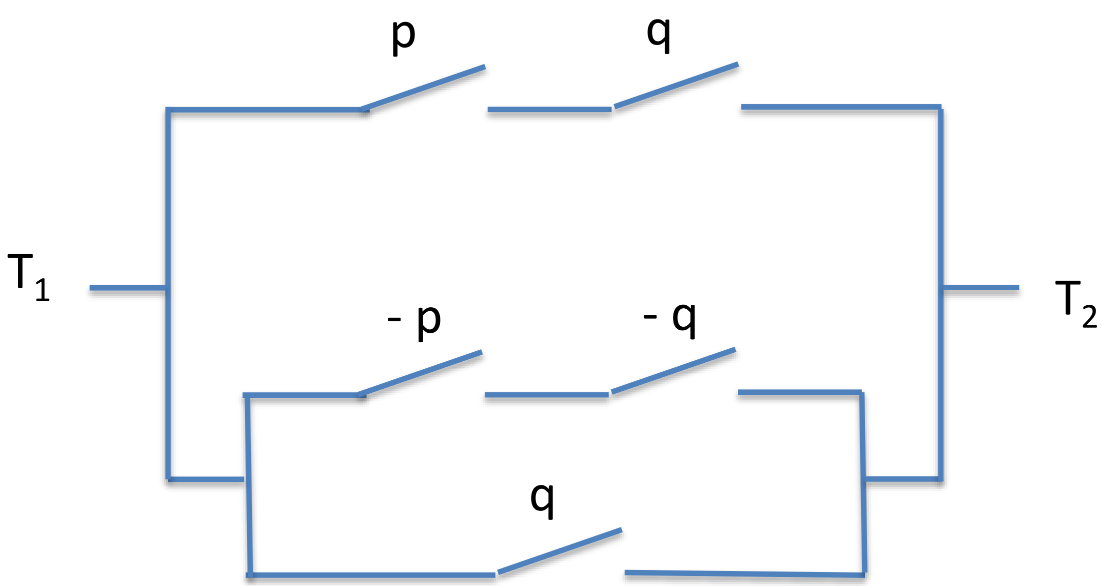




$$p \wedge q$$



$$p \vee q$$



$$(p \wedge q) \vee ((\sim p \wedge \sim q) \vee q)$$

$i)\qquad ((p \wedge (q \vee ({\sim} p \wedge r))) \vee (q \wedge {\sim} r)) \wedge p$

$ii)\qquad (p \wedge ({\sim} r \vee q \vee {\sim} q)) \vee (({\sim} r \vee t \vee r) \wedge {\sim} q)$

$iii)\qquad (p \vee q \vee {\sim} p) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee {\sim} p) \wedge p$

1.11 REGLAS DE INFERENCIA

El principal objetivo del estudio de la lógica de proposiciones es poder establecer *Reglas de inferencia* o *poder reconocer razonamientos válidos*

Una inferencia es básicamente una implicación lógica

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow c$$

El *antecedente* de la implicación estará dado por una cadena de conjunciones de fbf

El consecuente de la implicación es la conclusión

El *antecedente* expresa un conocimiento ya obtenido

El *consecuente* expresa el conocimiento nuevo, obtenidos a partir del antecedente

En una implicación, el razonamiento será válido si el condicional es tautológico.

Si las *premisas* son verdaderas, la *conclusión* debe ser necesariamente verdadera para que el condicional sea verdadero y el razonamiento sea considerado válido.

Si las *premisas* son falsas, no importará como sea la *conclusión; el condicional* será verdadero y por consiguiente el razonamiento se considerará válido.

Un razonamiento válido se llama ***regla de inferencia***

Deducción es el procedimiento por el cual se obtiene una *conclusión* a partir de un *conjunto de premisas*, usando reglas aceptadas de razonamiento

Reglas de inferencia más usuales

Modus Ponens

Modus Tollens

Silogismo hipotético

Silogismo disyuntivo

Dilema constructivo

Dilema destructivo

Modus Ponens

$$p \wedge (p \to q) \to q$$

p: Juan es correntino

q: Juan es argentino

$$\begin{array}{l}
p_1: \quad p \\
p_2: p \to q \\
\hline
c: \quad q
\end{array}$$

Juan es correntino **y**

si Juan es correntino **entonces** Juan es argentino;

luego Juan es argentino

Tabla de verdad del Modus Ponens

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$$
\begin{array}{ll}
P_1: & p \\
P_2: & p \to q \\
\hline
T_0: & \sim p \vee q \\
 & F_0 \vee q \\
c: & q
\end{array}
$$

Por hipótesis: p es 1, luego –p es 0

Modus Tollens

$$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$$

p: Aprobé el exámen

q: Te presto los apuntes

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \to q \\ P_2: & \sim q \\ \hline c: & \sim p \end{array}$$

Si aprobé el examen **entonces** te presto los apuntes

y no te presto los apuntes

luego: no aprobé el examen

Modus Tollens

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \land \sim q$	$((p \to q) \land \sim q) \to \sim p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

$$
\begin{array}{ll}
P_1: & p \to q \\
P_2: & \sim q \\
\hline
T_0: & \sim p \lor q \\
 & \sim p \lor F_0 \\
\hline
c: & \sim p
\end{array}
$$

Por hipótesis: - q es 1, luego q es 0

Silogismo hipotético

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p: Hago mi trabajo mas eficiente

q: Gano mas

r: mejora mi nivel de vida

$$\begin{array}{ll} P_1 & p \rightarrow q \\ P_2 & q \rightarrow r \\ \hline c & p \rightarrow r \end{array}$$

Si Hago mi trabajo mas eficiente **entonces** gano mas

y **si** gano mas **entonces** mejora mi nivel de vida

Luego: **si** hago mi trabajo mas eficiente, **entonces** mejora mi nivel de vida

$$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$$

$$\left.\begin{array}{l} (p \to q) \land (q \to r) \vDash p \to r \\ \\ (p \to q) \land (q \to r) \land p \vDash r \end{array}\right\} \text{Teorema de deducción}$$

$$[(p \to q) \land (q \to r) \land p] \to r$$

$$\begin{array}{lcl} P_1: & p \to q & \\ P_2 & q \to r & \\ P_3 & p & \\ \hline T_1 & q & \text{Por Modus Ponens de } P_1 \text{ y } P_3 \\ \hline & r & \text{Por Modus Ponens de } P_2 \text{ y } T_1 \end{array}$$

Silogismo disyuntivo

$$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$$

p: Compramos un departamento

q: Cambiamos el auto

$$\begin{array}{cc} P_1 & p \vee q \\ P_2 & \sim p \\ \hline c & q \end{array}$$

Compramos un departamento **o** cambiamos el auto

Y NO compramos un departamento

Luego: cambiamos el auto

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

$$
\begin{array}{ll}
P_1: & p \vee q \\
P_2: & \sim p \\
\hline
 & F_0 \vee q \\
\hline
c: & q
\end{array}
$$

Por hipótesis P_2: -p es 1, p es 0

Dilema constructivo

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

p: Viajo a Salta

q: Viajo a Córdoba

r: Voy a descansar

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \vee q \\ P_2: & p \rightarrow r \\ P_3: & q \rightarrow r \\ \hline c & r \end{array}$$

Viajo a Salta **o** viajo a Córdoba

Y si viajo a Salta **entonces** voy a descansar

Y si viajo a Córdoba **entonces** voy a descansar

Luego: voy a descansar

P_1:	$p \vee q$	
P_2:	$p \rightarrow r$	
P_3:	$q \rightarrow r$	
T_0	$\sim p \vee r$	Equivalente a P_2
T_1	$\sim q \vee r$	Equivalente a P_3
T_2	$(\sim p \wedge \sim q) \vee r$	De T_0 y T_1
T_3	$\sim (p \vee q) \vee r$	Equivalente a T_2
T_4	$F_o \vee r$	Por hipótesis p v q es 1
c	r	

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

Dilema destructivo

$$(p \to q) \land (r \to s) \land (\sim q \lor \sim s) \to (\sim p \lor \sim r)$$

p: Viajo a Salta

q: Viajo a Córdoba

r: Voy a descansar

s: Me siento mejor

$$\begin{array}{ll} P_1 & p \to q \\ P_2 & r \to s \\ P_3 & \sim q \lor \sim s \\ \hline c & \sim p \lor \sim r \end{array}$$

Si viajo a Salta **entonces** viajo a Córdoba

Y si voy a descansar **entonces** me siento mejor

Y si no viajo a Córdoba **entonces** no me siento mejor

Luego: no viajo a Salta o no voy a descansar

P_1	$p \rightarrow q$	
P_2	$r \rightarrow s$	
P_3	$\sim q \vee \sim s$	
T_0	$\sim s \vee \sim q$	De P_3
T_1	$s \rightarrow \sim q$	De T_0
T_3	$r \rightarrow \sim q$	S.H. $P_2 - T_1$
T_4	$\sim q \rightarrow \sim p$	De P_1
	$r \rightarrow \sim p$	
	$\sim r \vee \sim p$	
	$\sim p \vee \sim r$	