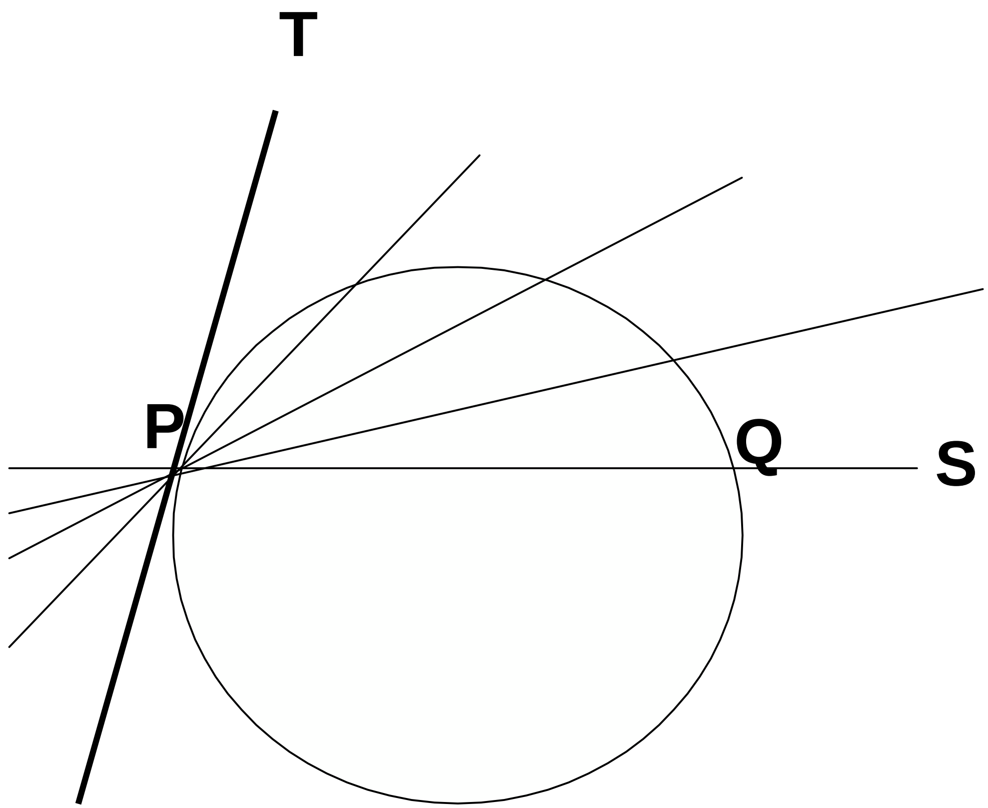
UNIDAD III: LA DERIVADA.

Variación de las funciones. Incremento y razón incremental. Noción de derivada. Definición. La función derivada. Interpretación geométrica de la derivada.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- La definición de derivada de una función en un punto.
- La interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

Fluxiones vs Diferenciales


T
P
Q
S

$$s=F(t)$$

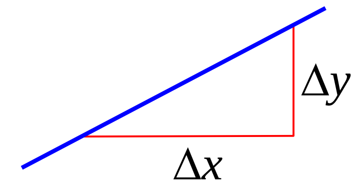
$$\Delta s=F(t+\Delta t)-F(t),\ \Delta t>0$$

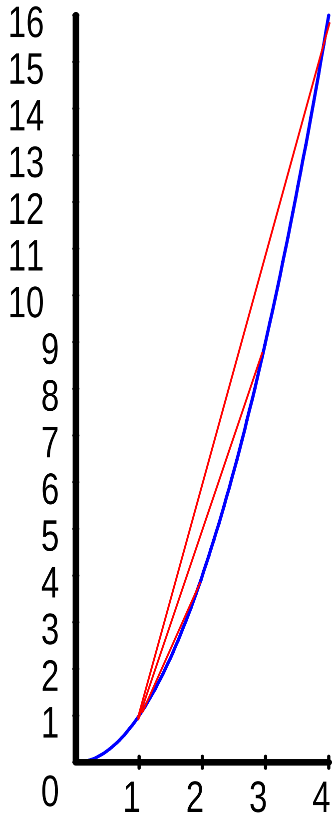
Si el movimiento es uniforme, es decir, s es una función lineal de t de la forma $s=v_0t+s_0$, tenemos que $\Delta s=v_0\,\Delta t$ y de aquí

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0$$

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La pendiente de una recta es dada por $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$





La pendiente en (1,1) puede ser aproximada por la pendiente de la recta secante en (4,16).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16-1}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$$

Tendremos una mejor aproximación si nos movemos a un punto más cercano, por ejemplo, (3,9).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

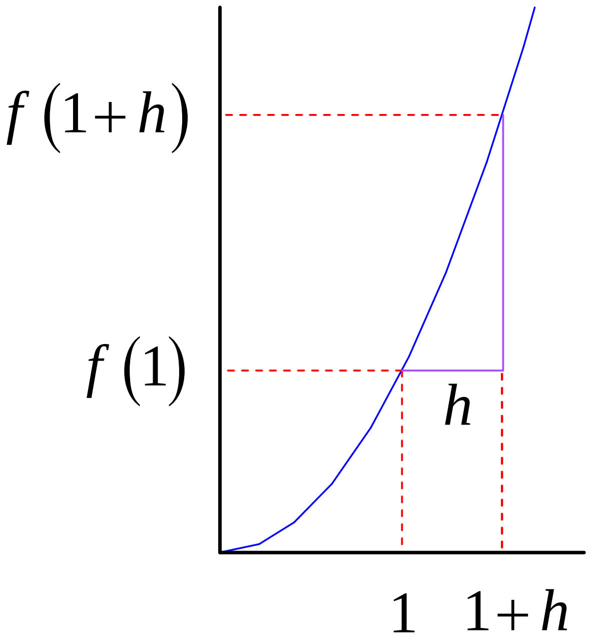
Será aún mejor en el punto (2,4).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Si nos situamos realmente cerca del punto (1,1), por ejemplo (1.1,1.21), la aproximación será aún mejor.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = \frac{.21}{.1} = 2.1$$

¿Cuán lejos podemos llegar en este proceso?



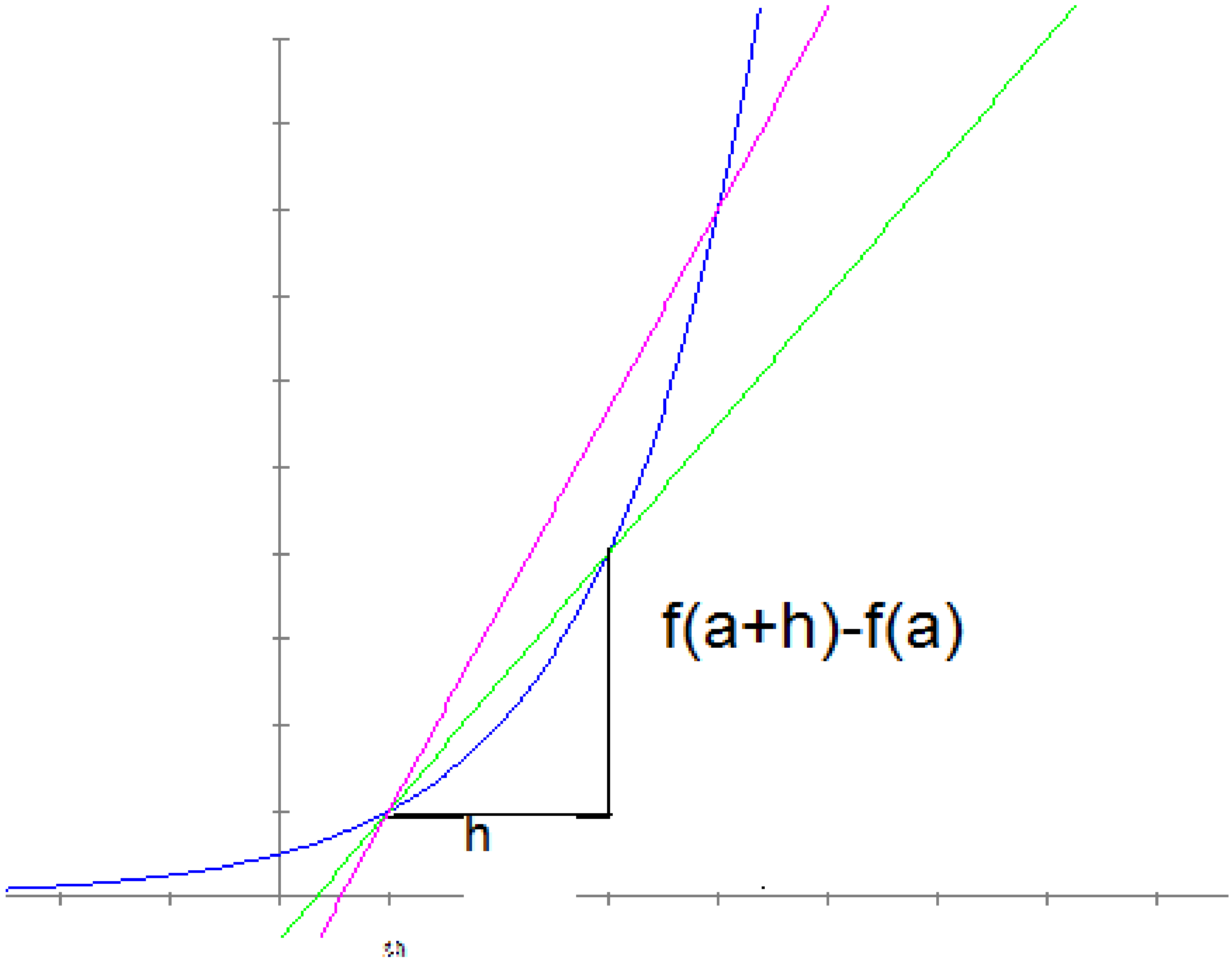
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 \cancel{-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

La pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$


h
f(a+h)-f(a)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ es llamado el cociente incremental de f en a.

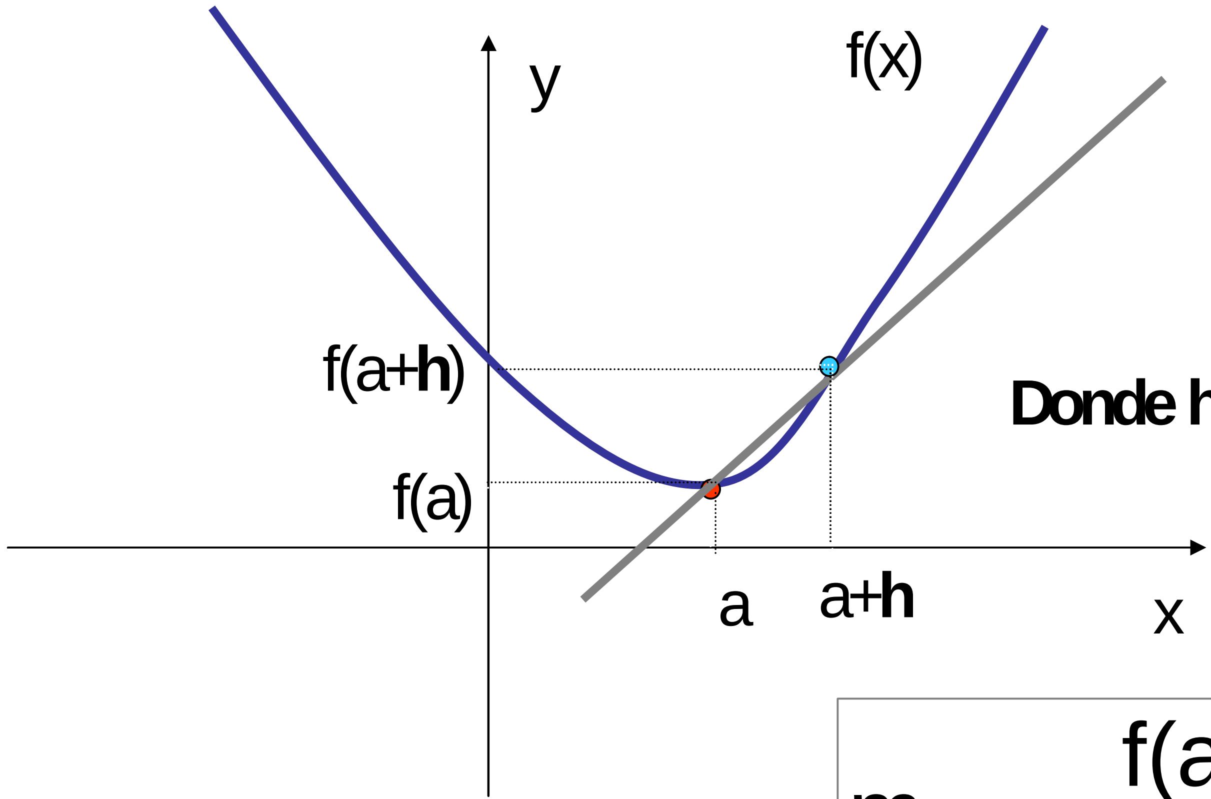
La pendiente de una curva en un punto es la misma que la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

En el ejemplo anterior, la recta tangente puede ser encontrada usando la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

Si queremos encontrar la recta normal, debemos obtener el recíproco negativo de la pendiente de la recta tangente, en este caso, $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Recordemos que la recta normal es perpendicular a la tangente.

RECTA TANGENTE A UNA CURVA



Donde h tiende a cero...

$$m_{sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO X CUALQUIERA

f '(x)

$$m_{tang} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Este límite representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva f(x) en un punto x cualquiera perteneciente al dominio de f(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \Delta \mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}{\Delta \mathrm{x}}$$

Se dice que la función f(x) es ***derivable en el punto x_0*** si el límite del cociente incremental existe, cuando $\Delta x \to 0$. Al valor de este límite se le denomina ***derivada de la función en el punto x_0*** y se denota por uno de los símbolos

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ y_0^{'},\ \frac{dy}{dx}(x_0),\ \ Df_x(x_0), \ldots$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}_0 + \Delta \mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}{\Delta \mathrm{x}}}$$

Apliquemos esto a algunas funciones…

ASÍNTOTA VERTICAL

Si una curva f(x) posee una asíntota vertical en x=a de su dominio, entonces se cumple:

$$\lim_{x \to a} = \left| f'(x) \right| = \infty$$

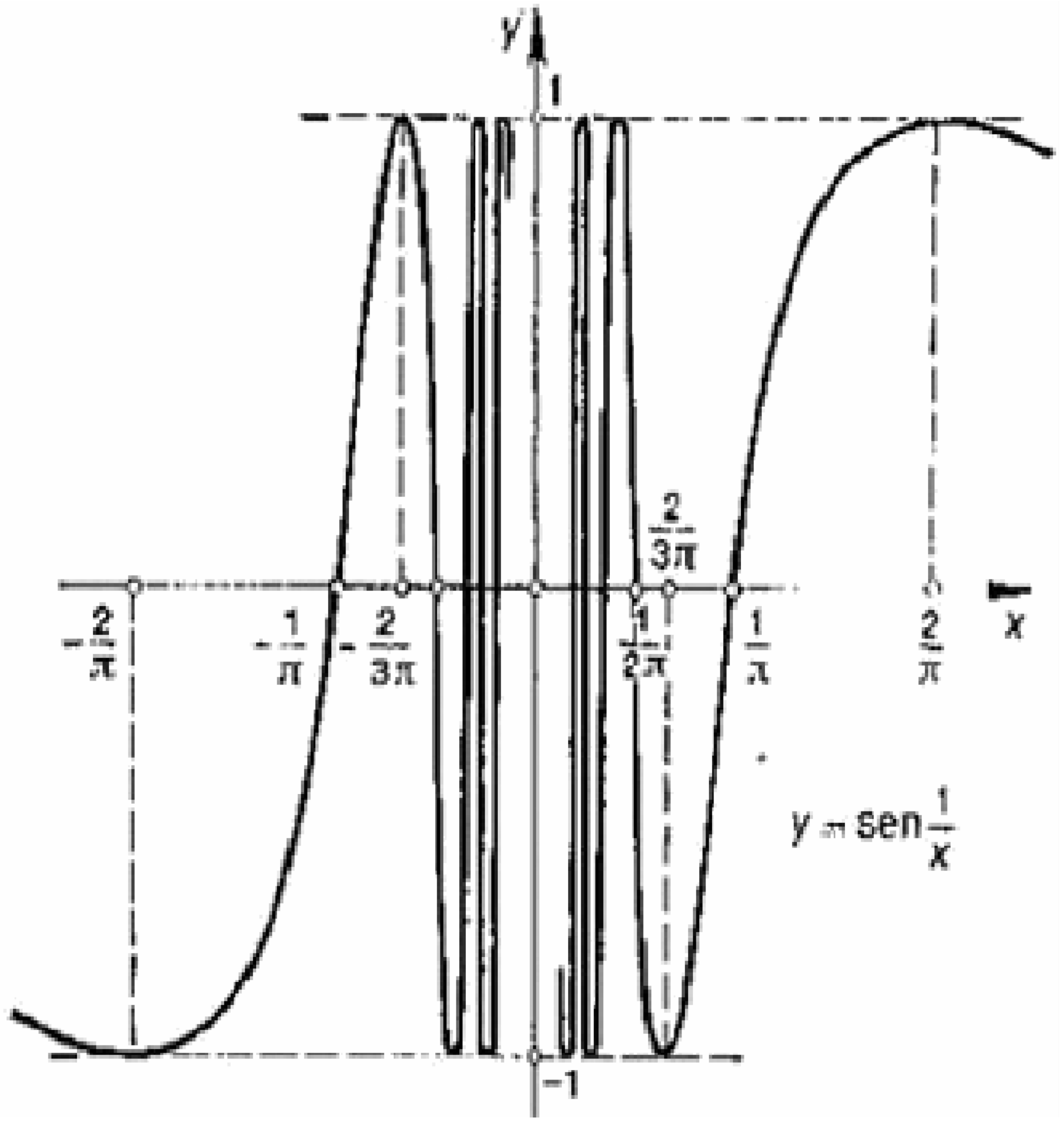
Denominaremos *derivada lateral derecha (izquierda)* de $y=f(x)$ en el punto x_0, al límite lateral derecho (izquierdo) del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$ (si estos límites existen).

Es fácil ver que la función $f(x)=|x|$, posee derivadas laterales en 0, 1 (derecha) y -1 (izquierda), por lo que no posee derivada en el punto.

Pudiera pensarse que una función continua, si no tiene derivada, debe tener derivadas laterales (finitas o infinitas) en ese punto….

$$f(x) = \begin{cases} x\,sen\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,sen\left(\dfrac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = sen\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$



y
1
-1
x
$-\frac{2}{\pi}$
$-\frac{1}{\pi}$
$-\frac{2}{3\pi}$
$\frac{1}{2\pi}$
$\frac{2}{3\pi}$
$\frac{1}{\pi}$
$\frac{2}{\pi}$
$y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

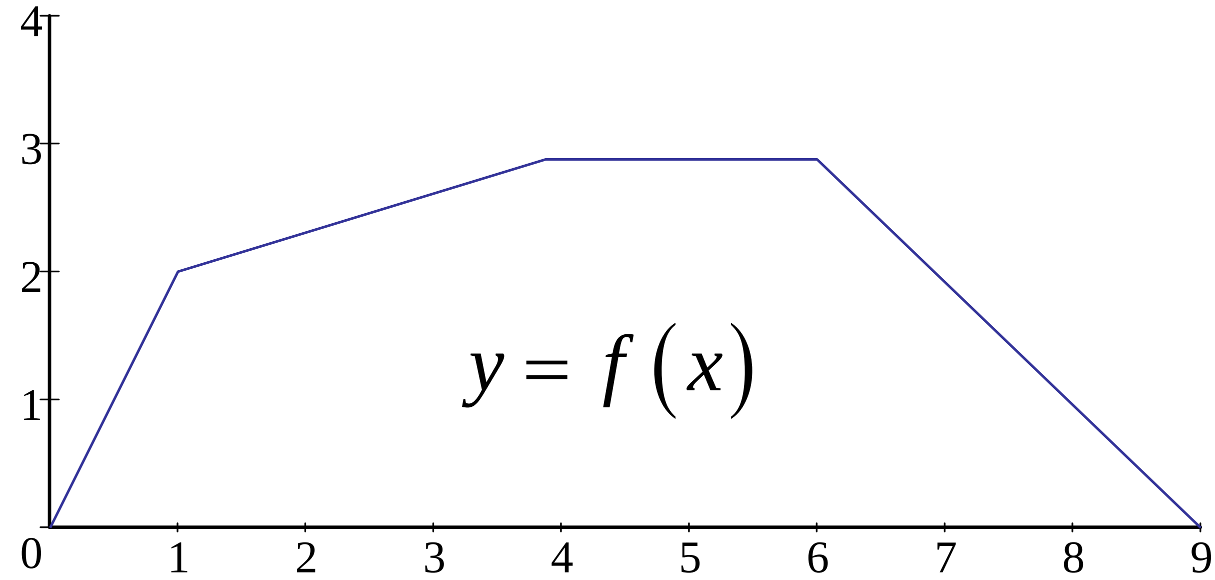
Teorema. Si las funciones f(x) y g(x) son derivables en el punto x_0, entonces las funciones f(x)±g(x), f(x)g(x), f(x)/g(x) ($g(x_0)\neq 0$) son derivables en x_0 y se cumple:

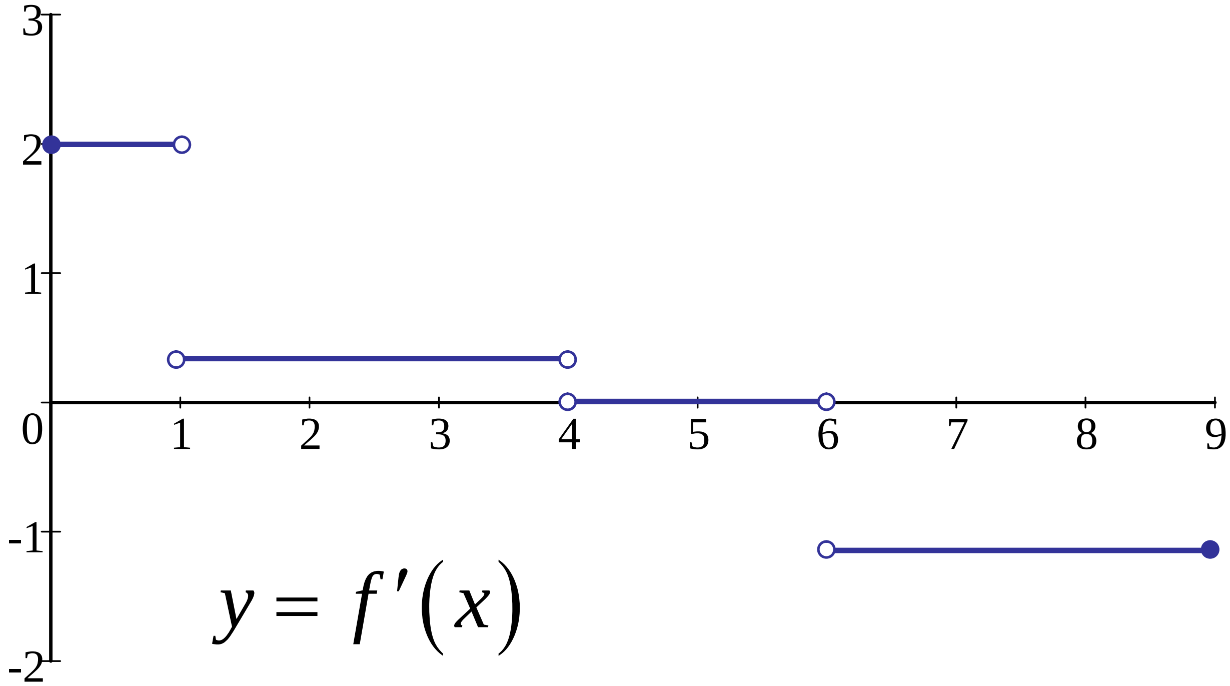
$$(f(x)\pm g(x))'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

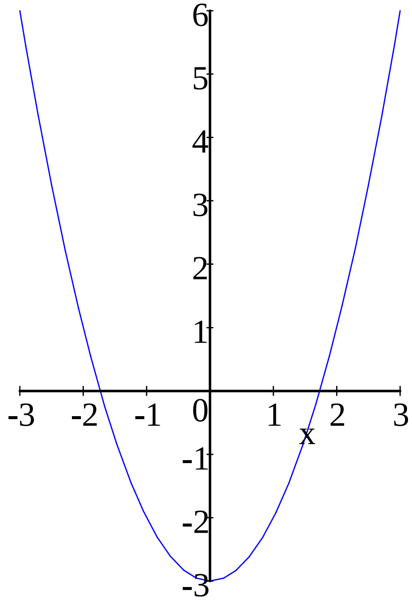
$$(f(x)g(x))'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

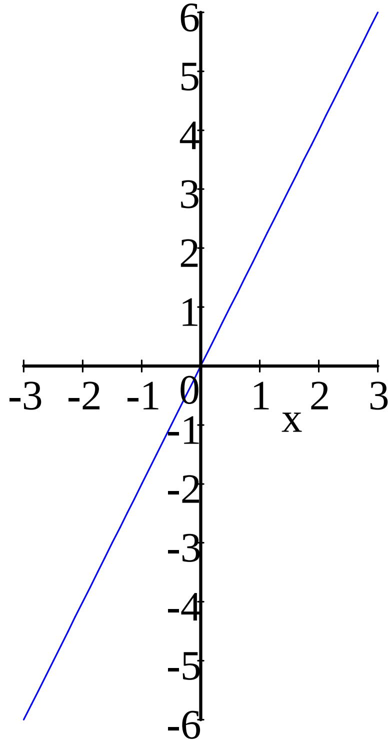
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

La derivada es la pendiente de la función original.









$$y = x^2 - 3$$

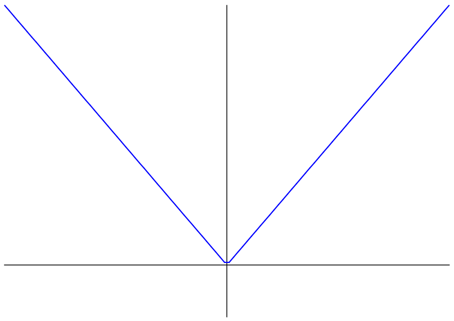
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + \cancel{h^2} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}}$$

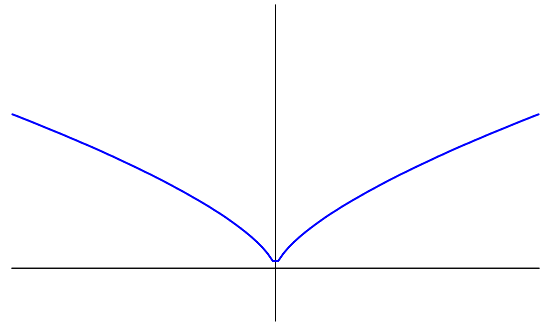
$$y' = \lim_{h \to 0} 2x + \cancelto{0}{h}$$

$$y' = 2x$$

$$f(x) = |x|$$

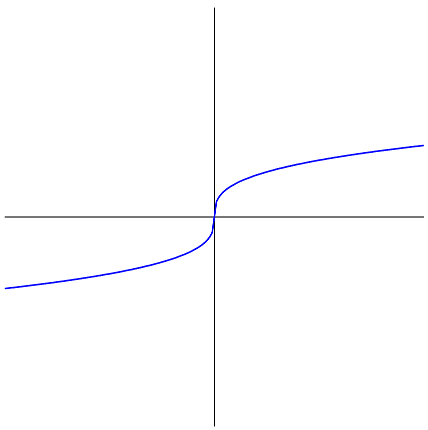


pico



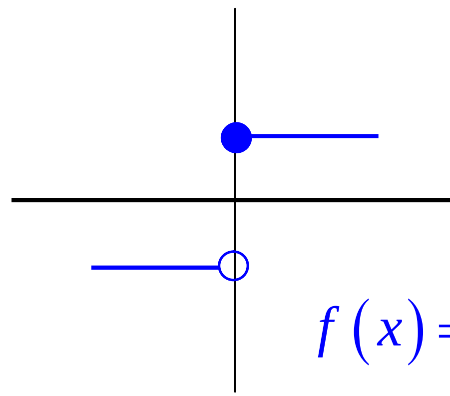
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

cúspide



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tangente vertical



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

discontinuidad

Hemos observado que si f(x) es una función derivable en todos los puntos de un cierto intervalo (a,b), entonces f’(x) define una “nueva” función en ese intervalo. Para esta nueva función f’(x), también podemos cuestionarnos su derivabilidad en un punto cualquiera x_0 del intervalo (a,b). Si existe la derivada de la función derivada en un punto $x_0 \in$(a,b), le llamaremos *segunda derivada* o *derivada de segundo orden* de la función f(x) en el punto x_0 y se designará por f’’(x_0), y’’(x_0), $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0)$, etc.

Una función que admita derivada hasta el orden n en un punto x_0, se dice *n veces derivable en ese punto*.