Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Algebra de Boole

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Unidad IV. <u>Algebra de Boole</u>

Definición.

Propiedades.

Principio de dualidad.

Puertas lógicas y circuitos booleanos.

Minimización de circuitos.

Funciones booleanas.

Diagrama de Karnaugh.

Definición

$$B = (S, +, \cdot\ , \,' \,, 0, 1)$$

- Leyes asociativas

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

- Leyes conmutativas

$$x + y = y + z\ , \qquad\qquad x \cdot y = y \cdot x$$

- Leyes distributivas

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Definición

$$B = (S, +, \cdot\,, {}', 0, 1)$$

- Leyes de identidad (o del neutro)

$$x + 0 = x, \qquad x \cdot 1 = x$$

- Leyes del complemento

$$x + x' = 1\,, \qquad x \cdot x' = 0$$

$$B = (S, +, \cdot\,, \acute{}\,, 0, 1)$$

$$B = (Z_2, \vee, \wedge, \overline{}\,, 0, 1)$$

$$Z_2 = \{0, 1\}$$

$$\vee, \wedge, \overline{} \quad son \quad +, \cdot\,, '$$

Asumiendo el orden de precedencia de los operadores del lenguaje proposicional, definimos que en el álgebra de Boole, el producto precede a la suma

$$(x \cdot y) + z = x \cdot y + z$$

Sea U un conjunto universal y sea S=P(U), definimos las siguientes operaciones:

$$x + y = X \cup Y \qquad x \cdot y = X \cap Y \qquad x' = \bar{X}$$

$$B = (S, +, \cdot\, , \,\acute{}\, , 0, 1)$$

$$B = (S, \cup, \cap, \,\bar{}\,\,, \emptyset, U)$$

La definición de Algebra de Boole se transforma en las siguientes propiedades del álgebra de conjuntos

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

$$X \cup Y = Y \cup X\,, \qquad X \cap Y = Y \cap X$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cup \emptyset = X, \qquad X \cap U = X$$

$$X \cup \bar{X} = U, \qquad X \cap \bar{X} = \emptyset$$

$$B = (S, +, \cdot\,, {}', 0, 1)$$

$$B = (Z_2, \vee, \wedge, \overline{}, 0, 1)$$

$$B = (S, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, U)$$

Unicidad del complemento

Hipótesis: Si $x + y = 1 \quad y \quad x \cdot y = 0$

Tesis: $y = x'$

Demostración:

$$y = y \cdot 1 \quad \rightarrow \quad y = y \cdot (x + x')$$

$$y = y \cdot x + y \cdot x` \quad \rightarrow \quad y = x \cdot y + x' \cdot y$$

$$y = 0 + x' \cdot y \quad \rightarrow \quad y = x \cdot x' + x' \cdot y$$

$$y = x' \cdot x + x' \cdot y \quad \rightarrow \quad y = x' \cdot (x + y)$$

$$y = x' \cdot 1 \quad \rightarrow \quad y = x'$$

Ley de idempotencia $x + x = x \quad y \quad x \cdot x = x$

Demostración:

$$x = x + 0 \quad \rightarrow \quad x = x + (x \cdot x')$$

$$x = (x + x) \cdot (x + x`) \quad \rightarrow \quad x = (x + x) \cdot 1$$

$$x = x + x$$

$$x = x \cdot 1 \quad \rightarrow \quad x = x \cdot (x + x')$$

$$x = (x \cdot x) + (x \cdot x`) \quad \rightarrow \quad x = (x \cdot x) + 0$$

$$x = x \cdot x$$

Ley de acotación $\quad x+1=1 \quad y \quad x\cdot 0=0$

Demostración:

$$x+1=(x+1)\cdot 1$$
$$=(x+1)\cdot(x+x')$$
$$=x\cdot(x+x')+1\cdot(x+x')$$
$$=x\cdot x+x\cdot x'+1\cdot x+1\cdot x'$$
$$=x+0+x+x'$$
$$=0+x+x'$$
$$=x+x'$$
$$=1$$

Ley de acotación $$x \cdot 0 = 0$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &= (x \cdot 0) + 0 \\
&= (x \cdot 0) + (x \cdot x') \\
&= x \cdot (0 + x') \\
&= x \cdot (x' + 0) \\
&= x \cdot x' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ley de absorción $x + x \cdot y = x \quad y \quad x \cdot (x + y) = x$

Demostración:

$$x + x \cdot y = x \quad \rightarrow \quad x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y$$

$$x + x \cdot y = x \cdot (1 + y\ ) \quad \rightarrow \quad x + x \cdot y = x \cdot 1$$

$$x + x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x + y) = x \quad \rightarrow \quad x \cdot (x + y) = (x + 0) \cdot (x + y)$$

$$x \cdot (x + y) = x + (0 \cdot y\ ) \quad \rightarrow \quad x \cdot (x + y) = x + 0$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

Ley del complemento $(x')' = x$

Ley deyes del 0 y del 1 $0' = 1\,,\qquad 1' = 0$

Leyes de De Morgan

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

Demostración de Leyes de De Morgan:

Si mostramos que:

$$(x + y) \cdot (x' \cdot y') = 0$$

$$(x + y) + (x' \cdot y') = 1$$

Entonces:

$$(x + y)' = x' \cdot y'$$

Demostraremos que:

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y')=0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y')=1$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y')=(x'\cdot y')\cdot(x+y)$$

$$=((x'\cdot y')\cdot x)+((x'\cdot y')\cdot y\ )$$

$$=\big(x\cdot(x'\cdot y')\big)+((x'\cdot y')\cdot y\ )$$

$$=\big((x\cdot x')\cdot y'\big)+(x'\cdot(y'\cdot y))$$

$$=(x\cdot x')\cdot y'+x'\cdot(y\cdot y')$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = (x\cdot x')\cdot y' + x'\cdot(y\cdot y')$$

$$= 0\cdot y' + x'\cdot 0$$

$$= y'\cdot 0 + x'\cdot 0$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

$$(x+y)+(x'\cdot y') = ((x+y)+x')\cdot((x+y)+y')$$

$$= ((y+x)+x')\cdot((x+y)+y')$$

$$= (y+(x+x'))\cdot(x+(y+y'))$$

$$(x+y)\cdot(x'\cdot y') = (y+(x+x'))\cdot(x+(y+y'))$$

$$= (y+1)\cdot(x+1)$$

$$= 1\cdot 1$$

$$= 1$$

Queda demostrado que:

$$(x+y)' = x'\cdot y'$$

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Demostración de Leyes de De Morgan:

Si mostramos que:

$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$$

Entonces:

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Demostraremos que:

$$(x \cdot y) + (x' + y') = 1$$

$$(x \cdot y) \cdot (x' + y') = 0$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = (x' + y') + (x \cdot y)$$

$$= ((x' + y') + x) \cdot ((x' + y') + y)$$

$$= (x + (x' + y')) \cdot ((x' + y') + y)$$

$$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y' + y))$$

$$= ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y'))$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = ((x + x') + y') \cdot (x' + (y + y'))$$

$$= (1 + y') \cdot (x' + 1)$$

$$= (y' + 1) \cdot (x' + 1)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 1$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = \big((x \cdot y) \cdot x'\big) + ((x \cdot y) \cdot y')$$

$$= \big((y \cdot x) \cdot x'\big) + ((x \cdot y) \cdot y')$$

$$= \big(y \cdot (x \cdot x')\big) + (x \cdot (y \cdot y'))$$

$$(x \cdot y) + (x' + y') = \big(y \cdot (x \cdot x')\big) + (x \cdot (y \cdot y'))$$

$$= (y \cdot 0) + (x \cdot 0)$$

$$= 0 \cdot 0$$

$$= 0$$

Queda demostrado que:

$$(x \cdot y)' = x' + y'$$

Principio de Dualidad

El Dual de una expresión booleana, es otra expresión booleana donde se cambia
+ por • y • por + ; además
0 por 1 y 1 por 0.

Observación: Si dos expresiones boolenas son iguales, sus duales también lo son.

Verifique la validez de la siguiente expresión y de su dual.

$$(x+y)\cdot(x+1)=x+x\cdot y+y$$

$$(x + y) \cdot (x + 1) = x + x \cdot y + y$$

$$= x \cdot (x + 1) + y \cdot (x + 1) =$$

$$= x \cdot x + x + y \cdot x + y =$$

$$= x + x + x \cdot y + y =$$

$$= x + x \cdot y + y$$

$$(x \cdot y) + (x \cdot 1) = x \cdot x + y \cdot y \ = x + y$$

$$= x \cdot y + 1 =$$

$$= x \cdot 1 + y \cdot 1 =$$

$$= x + y$$

Puertas Lógicas

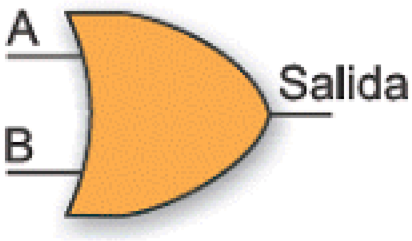
AND

A	B	Salida
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \bullet B$$

Puertas Lógicas

OR

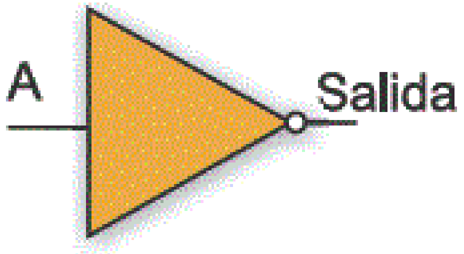


A	B	Salida
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A + B

Puertas Lógicas

NOT

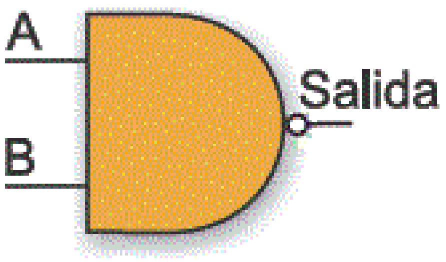


A	Salida
0	1
1	0

A '

Puertas Lógicas

NAND

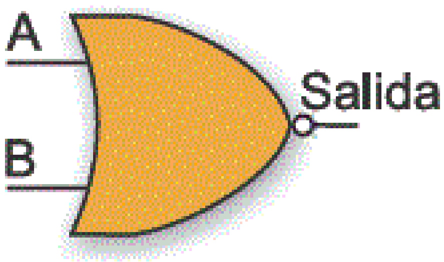


A	B	Salida
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$(A \bullet B)'$

Puertas Lógicas

NOR

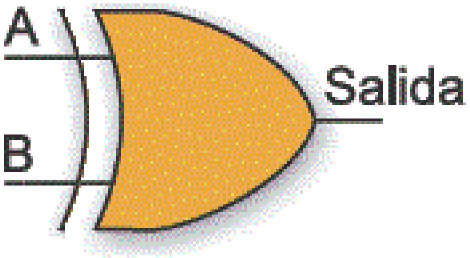


A	B	Salida
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$(A + B)'$

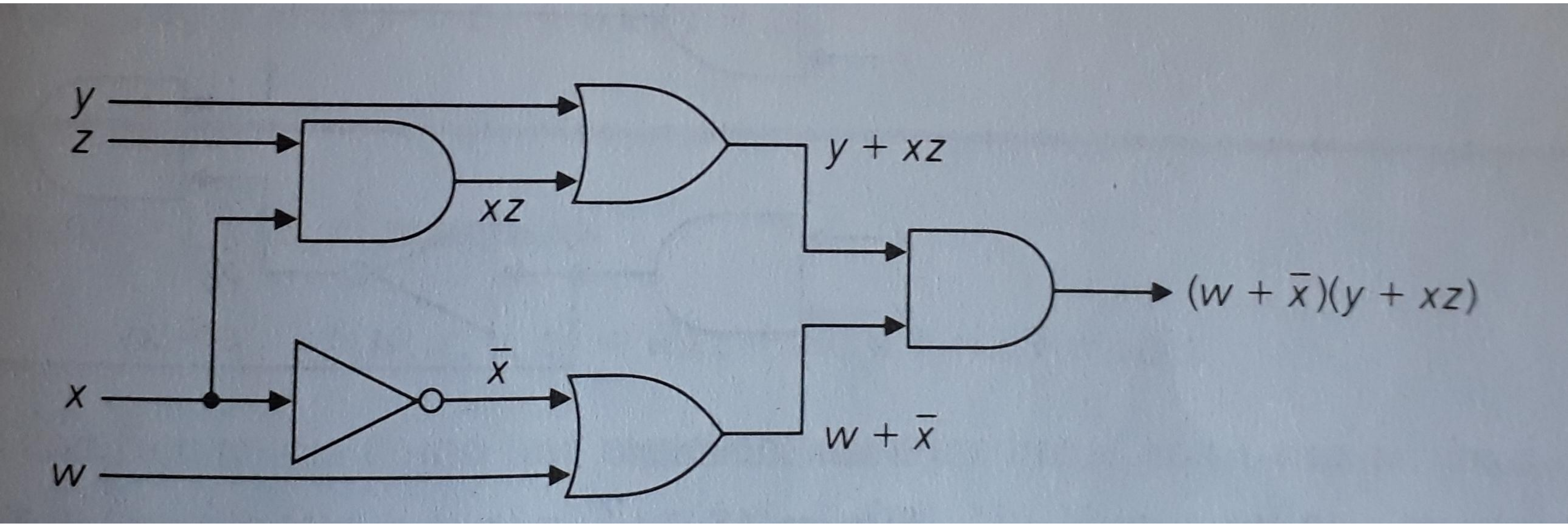
Puertas Lógicas

X-OR



A	B	Salida
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A \oplus B$$


y
z
x
w
xz
$\bar{x}$
y + xz
w + $\bar{x}$
(w + $\bar{x}$)(y + xz)