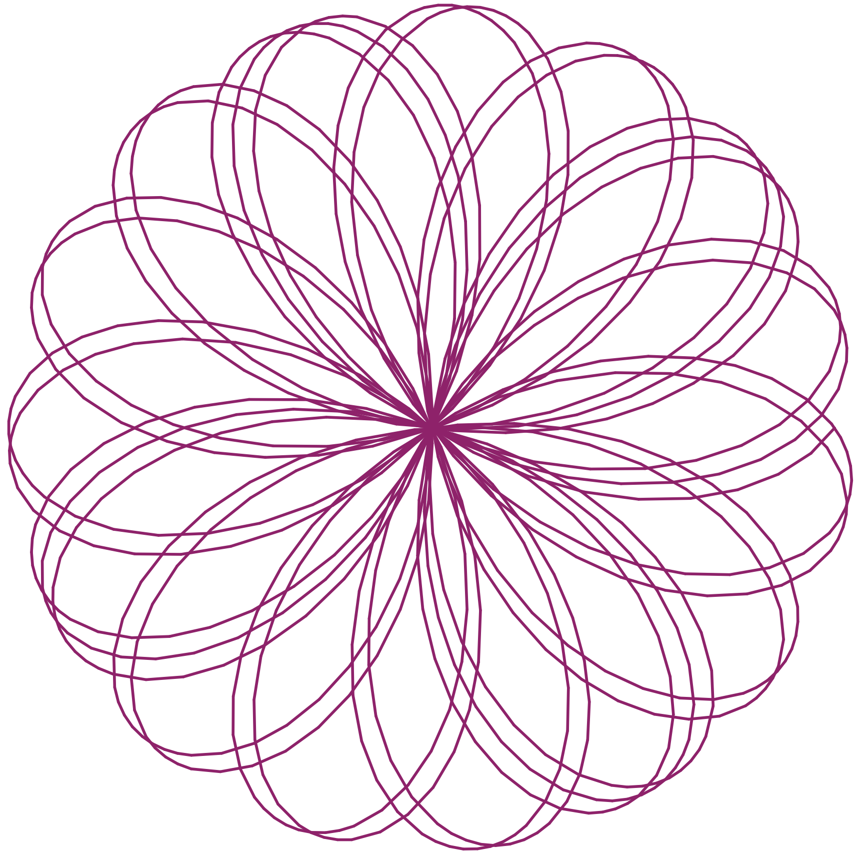
UNIDAD IX:
APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS.

Área de un sector en coordenadas polares. Área de una superficie de revolución. Volumen de un sólido de revolución.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan cómo calcular el área de una superficie y volumen de un sólido de revolución mediante la Integral Definida.

x=rcosθ

y=rsenθ



$$r = 2\sin\left(2.15\theta\right)$$
$$0 \le \theta \le 16\pi$$

Encontrar la pendiente de una curva (en polares):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta} r \sin\theta}{\frac{d}{d\theta} r \cos\theta} = \frac{r' \sin\theta + r\cos\theta}{r' \cos\theta - r\sin\theta}$$

Usamos la regla del producto.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin\theta + r\cos\theta}{r' \cos\theta - r\sin\theta}}$$

Ejemplo. $r = 1 - \cos\theta \qquad r' = \sin\theta$

$$\text{Pendiente } = \frac{\sin\theta\sin\theta + (1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta - (1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + \sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta}{2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta}$$

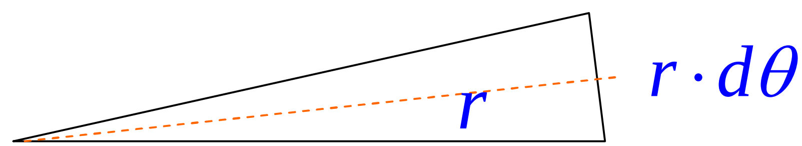
$$= \frac{-\cos 2\theta + \cos\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta}$$

Area en Coordenadas Polares

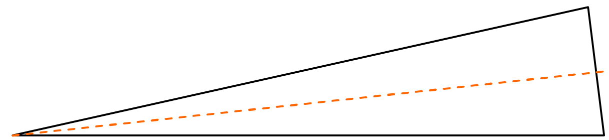
La longitud de una arco (en una circuinferencia) es dado por r· θ donde θ es dado en radianes.

Para valores de θ suficientemente pequeños, la curva se aproxima a una línea recta y podemos aproximar el área de ese sector circular, usando la fórmula para el área del triángulo:

$$A = \frac{1}{2} bh$$



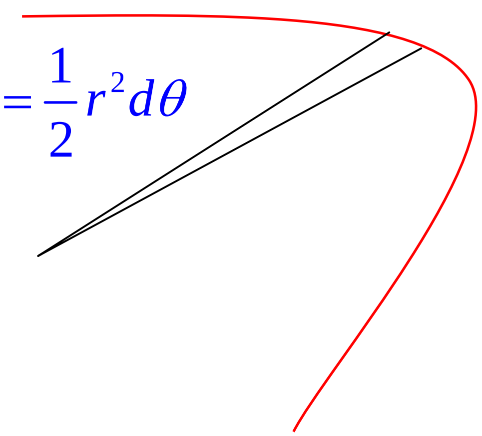
$$dA = \frac{1}{2}\left(r d\theta\right) \cdot r = \frac{1}{2} r^2 \; d\theta$$



$$dA = \frac{1}{2} r^2 \; d\theta$$

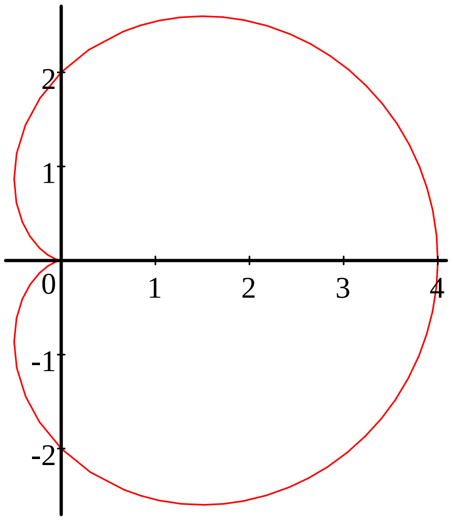
Podemos usar esto, para encontrar el área en coordenadas polares.

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$



$$\boxed{A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta}$$

Ejemplo 1. Encontrar el área encerrada por $r = 2\left(1+\cos\theta\right)$



$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4\left(1+\cos\theta\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2+4\cos\theta+2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2 + 4\cos\theta + 2 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \; d\theta$$

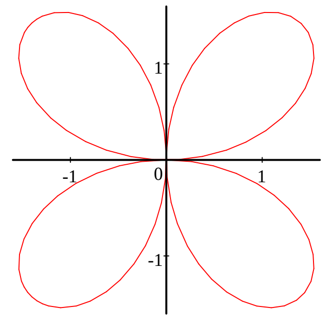
$$= 3\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi - 0$$

$$= 6\pi$$

Ejemplo 2. Encontrar el área de la siguiente región:

$$r = 2\sin(2\theta)$$



Area de una Rosa de 4 Pétalos

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin(2\theta)\right]^2 d\theta$$

$$A = 2\pi$$

Area de toda la figura:

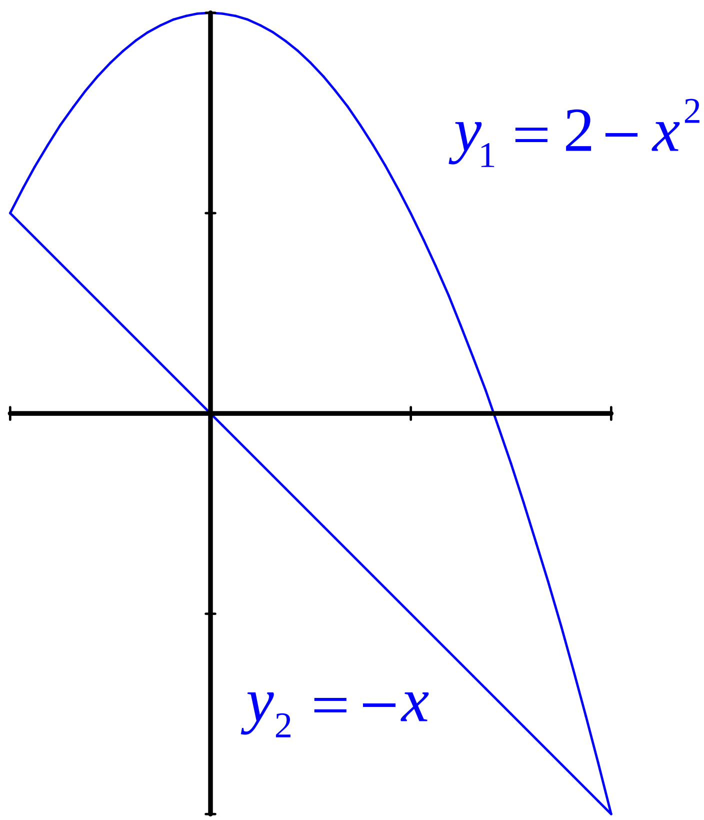
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[2\sin(2\theta)\right]^2 d\theta$$

$$A = 2\pi$$

Observación 1. Para encontrar el área entre curvas, a la mayor, le sustraemos la menor:

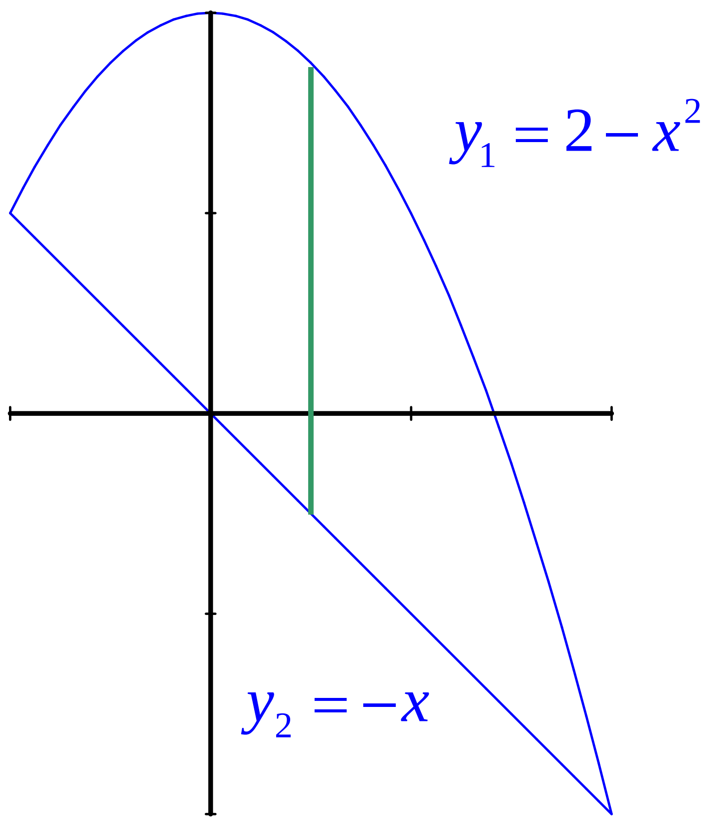
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} R^2 - r^2 d\theta$$

Observación 2. De la misma manera se se procede en coordenadas cartesianas, donde los límites de integración depende de los puntos de intersección de las curvas o las impuestas por el problema.



¿Cómo podemos encontrar el área entre esas dos curvas?

Podemos dividir el área en varias secciones, tomando en cuenta lo que apuntamos en la última observación.

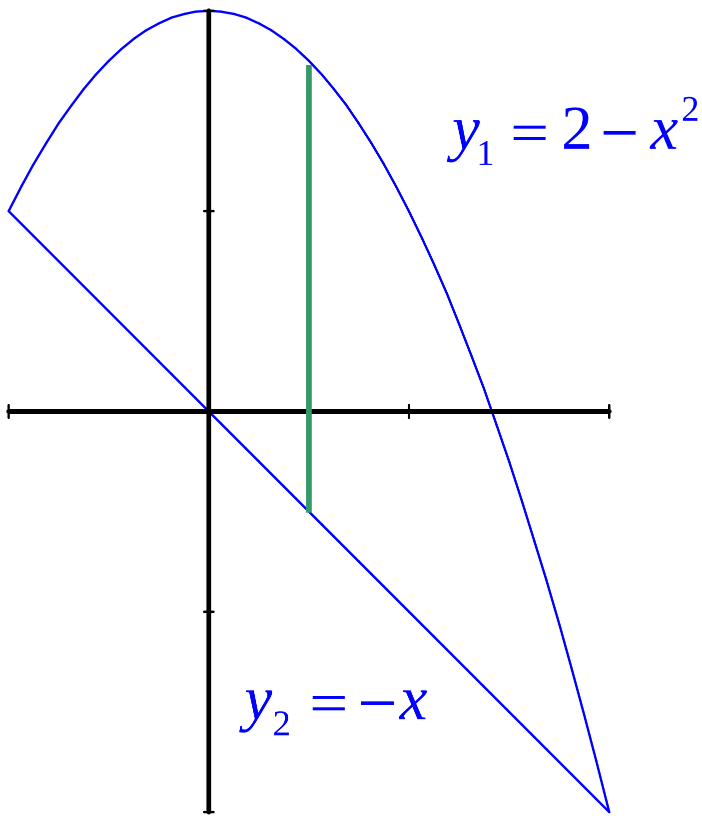


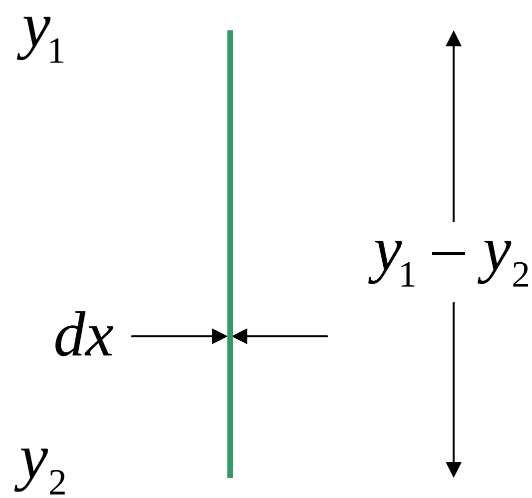
Consideremos una franja vertical.

La longitud de esta franja es:

$$y_1 - y_2 \quad \text{or} \quad \left(2 - x^2\right) - \left(-x\right)$$

Puesto que el ancho de esta franja es muy pequeña en x, la llamaremos dx.

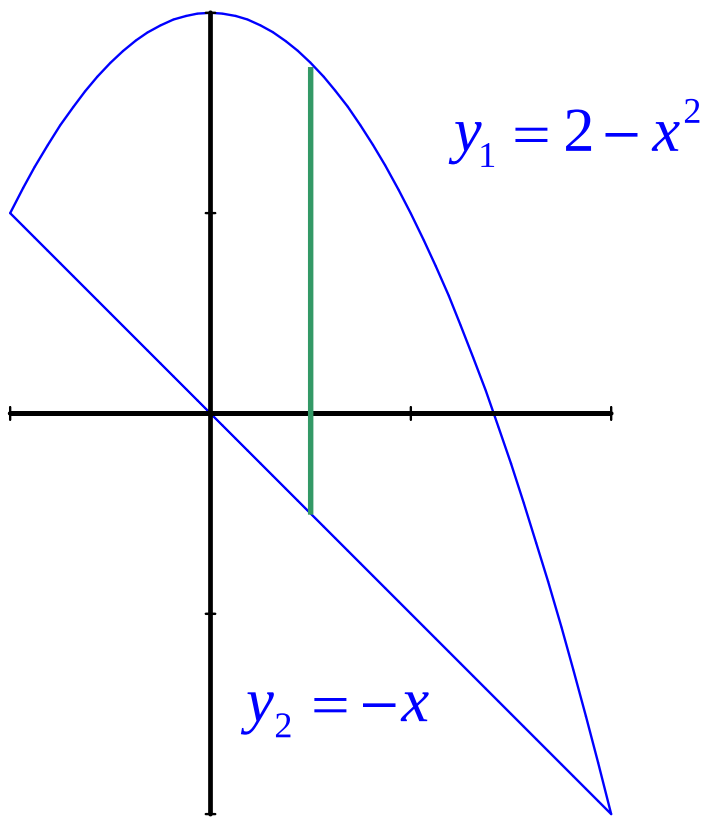




Puesto que esta franja es semejante a un rectángulo, el área de dicha franja es:

$$Largo \bullet ancho = (2 - x^2 + x)dx$$

Si añadimos todas las franjas, obtenemos: $\int_{-1}^{2} 2 - x^2 + x \; dx$



$$\int_{-1}^{2} 2 - x^2 + x \, dx$$

$$2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{2}$$

$$\left(4 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

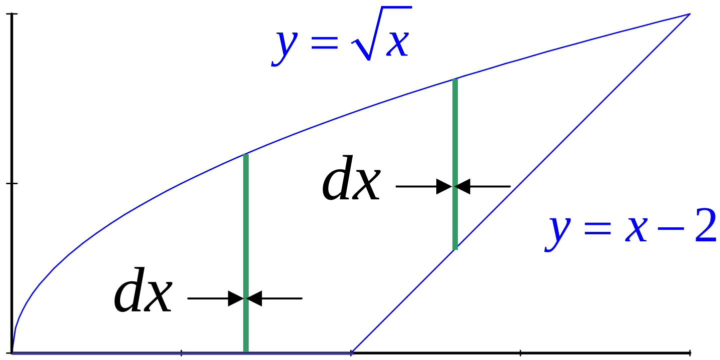
$$6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{36 - 16 + 12 - 2 - 3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

El área entre dos curvas puede ser obtenida entonces como:

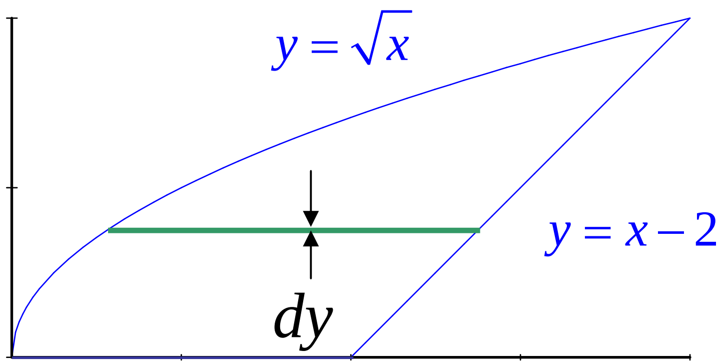
$$\text{Area} = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx$$

Como usarán mucho esta expresión, no es necesario “memorizarla”¡¡¡¡¡¡¡¡



Si trazamos franjas verticales, tenemos que dividir la integral en dos partes:

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 \sqrt{x} - (x-2)\, dx$$

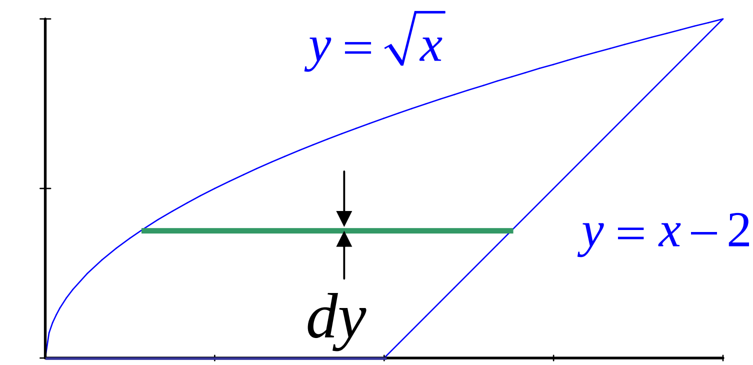


Podemos encontrar el área usando franjas horizontales.

$$y=\sqrt{x} \qquad y=x-2$$

$$y^2=x \qquad y+2=x$$

Puesto que el ancho de la franja es dy, encontramos la longitud de la franja, poniendo x en términos de y.



$$y=\sqrt{x} \qquad\qquad y=x-2$$

$$y^2=x \qquad\qquad y+2=x$$

$$\int_0^2 \underbrace{(y+2)-y^2}_{\text{Longitud}}\; dy$$

anchura

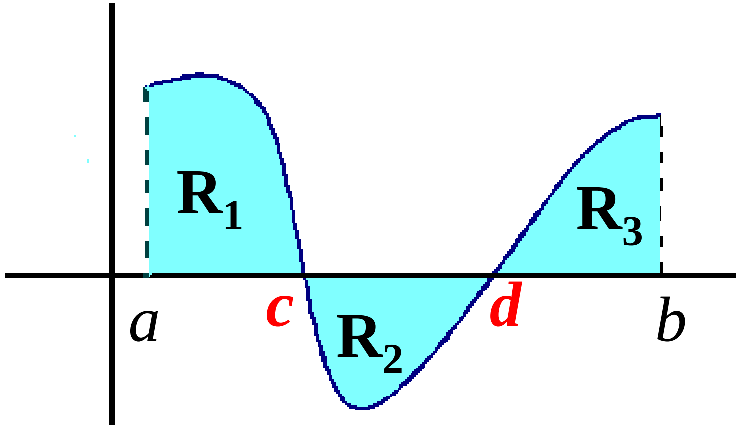
$$\left.\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right|_0^2$$

$$2+4-\frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

Area Total

Si la función ***cambia de signo*** en el intervalo $a \leq x \leq b$, y necesitamos el área total entre el gráfico de dicha función, el eje x, entre a y b, entonces

$$\text{Area Total} = \text{Area } R_1 + \text{Area } R_2 + \text{Area } R_3$$



$$\text{Area of } R_1 = \int_a^c f(x)dx$$

$$\text{Area of } R_2 = -\int_c^d f(x)dx$$

$$\text{Area of } R_3 = \int_d^b f(x)dx$$

Estrategia General para calcular el área entre curvas

1. Dibuje las curvas.

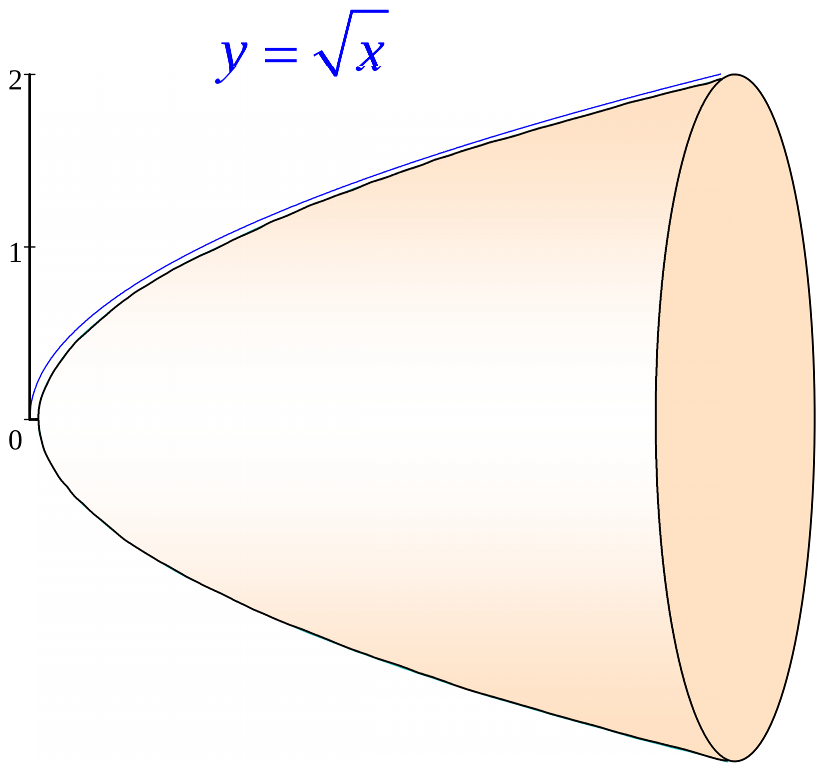
2. Decida si utilizará franjas verticales u horizontales (eso depende muchas veces de la región), para simplificar el cálculo.

3. Escriba una expresión para el área de la franja (si el ancho es dx, la longitud debe estar en términos de x).

4. Encuentre los límites de integración (si usó dx, los límites son valores de x; si usó dy, los límites son valores de y).

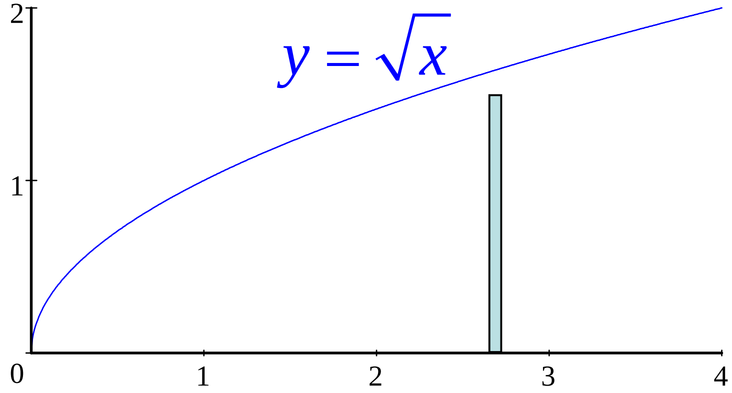
5. Integre, para encontrar el área.

Consideremos la curva y=√x.



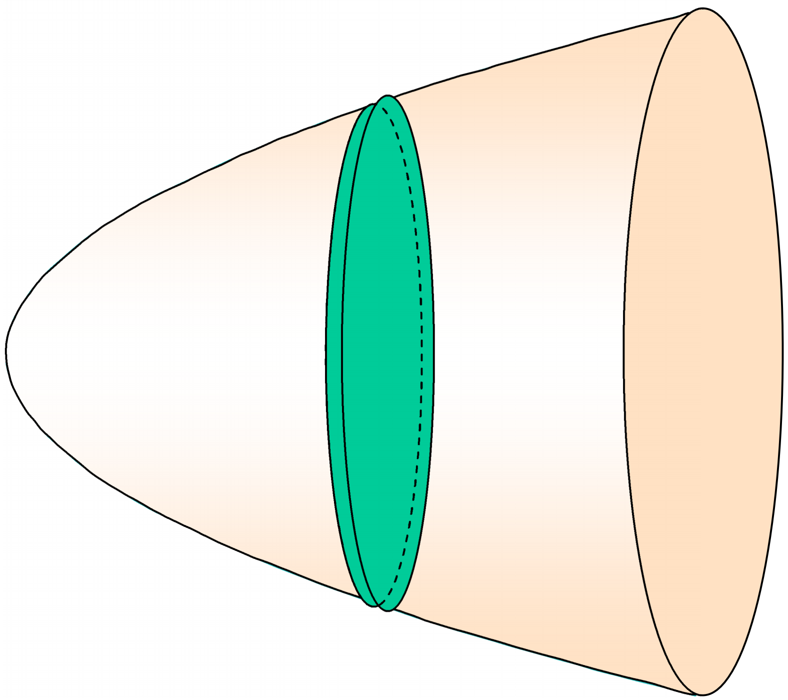
Su jefe en ACME Rocket Company le ha asignado la tarea de construir una “nariz” en esta forma.

Así que puso un trozo de madera en un torno y lo convirtió en un cono que coincide con la curva.



¿Cuál es el volumen de este cono?

Una forma puede ser, cortarlo en una serie de rodajas finas (cilindros planos) y sumar sus volúmenes



El volumen de cada cilindro es

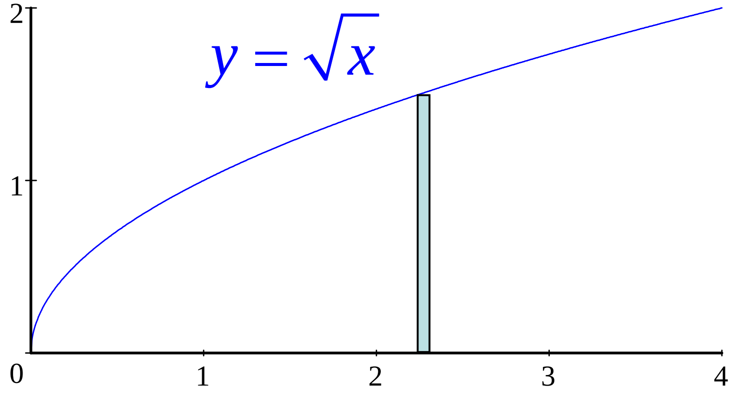
$$\pi r^2 \bullet espesor$$

En este caso:

$$\pi\left(\sqrt{x}\right)^2 \; dx$$

$r =$ el valor y de la función

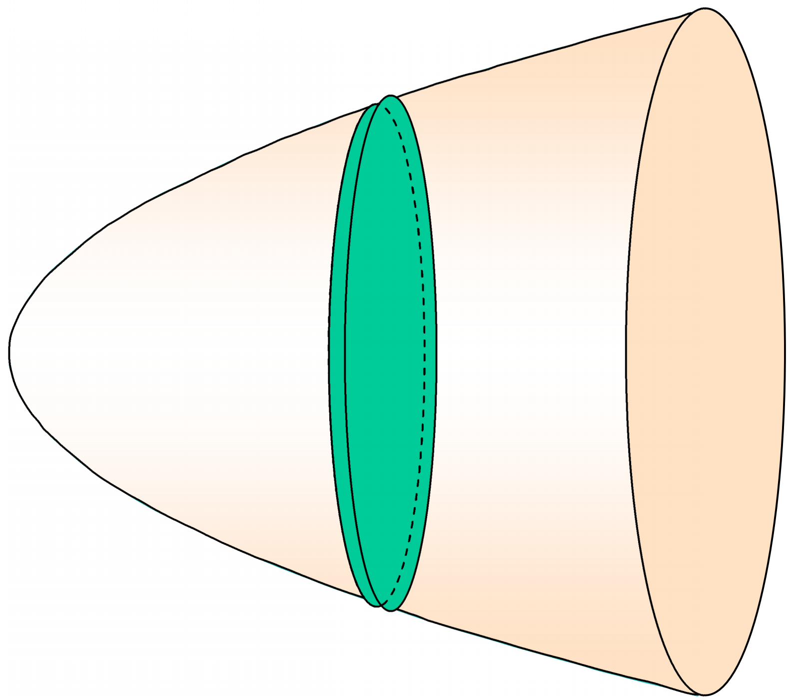
espesor=cambios pequeños en x, o sea, dx



El volumen de cada cilindro es

$$\pi r^2 \bullet espesor$$

$$\pi\left(\sqrt{x}\right)^2\ dx$$



Si sumamos los volúmenes:

$$\int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2\ dx$$

$$=\int_0^4 \pi x\ dx$$

$$=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^4 \qquad =8\pi$$

Por este motivo, este procedimiento es llamado el “Método del Disco”, pues la forma del corte es un disco, así usamos la fórmula del área de un círculo para encontrar el volumen de un disco.

Si la curva rota alrededor del eje x, tenemos:

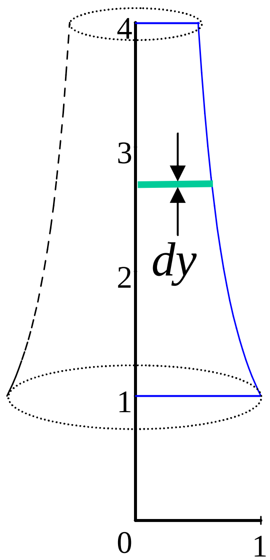
$$V = \pi \int_a^b y^2 \ dx$$

En realidad este método también es aplicable, cuando la curva gira alrededor del eje y, o cuando gira alrededor de cualquier otro eje.

La curva si rota alrededor del eje y, nos da $V = \pi \int_a^b x^2 \ dy$

Sea la región comprendida entre la curva $x=y^{-1/2}$, $1 \leq y \leq 4$ y el eje y, que rota alrededor de este eje. Encontrar el volumen.

y	x
1	1
2	$\frac{1}{\sqrt{2}} = .707$
3	$\frac{1}{\sqrt{3}} = .577$
4	$\frac{1}{2}$



Usamos un disco horizontal.

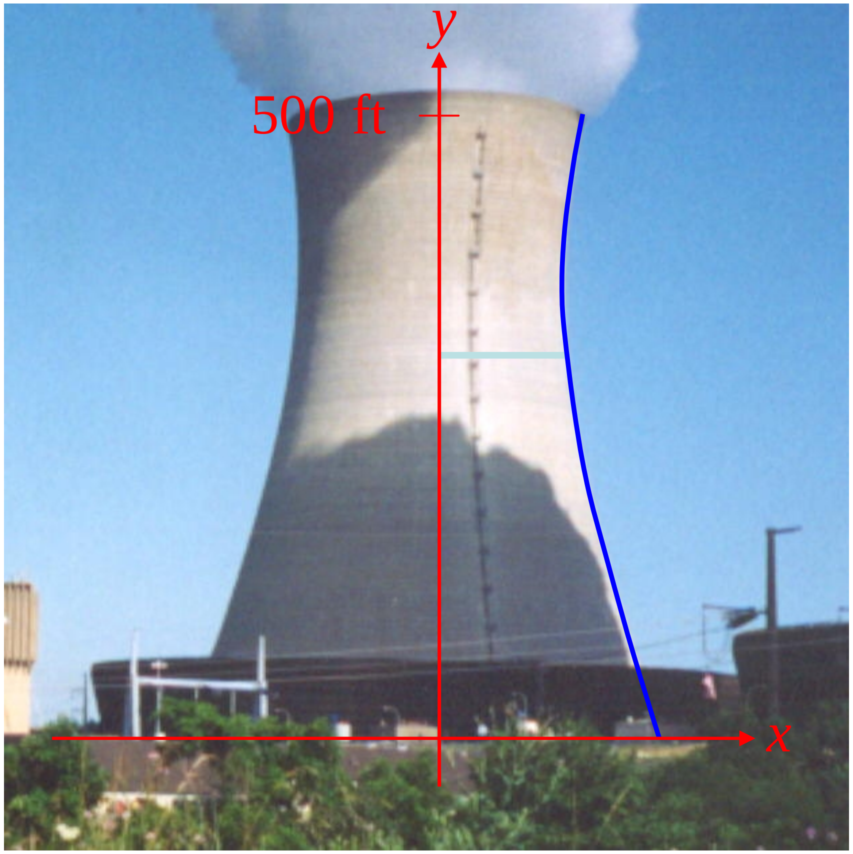
El espesor es dy.

El radio es el valor x de la función.

$$1 \leq y \leq 4$$

$$V = \underbrace{\int_1^4 \pi \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 dy}_{\text{Volumen del disco}} \qquad = \int_1^4 \pi \frac{1}{y}\, dy$$

$$= \pi \ln y \Big|_1^4 \;= \pi \left(\ln 4 - \overset{0}{\ln 1} \right) \;= \pi \ln 2^2 \;= 2\pi \ln 2$$

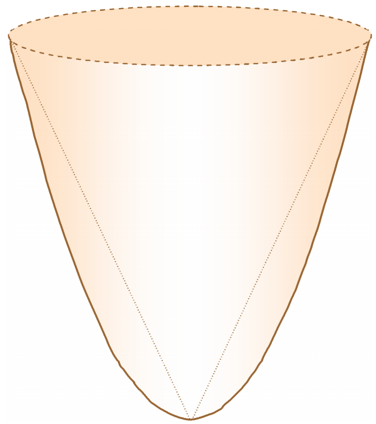


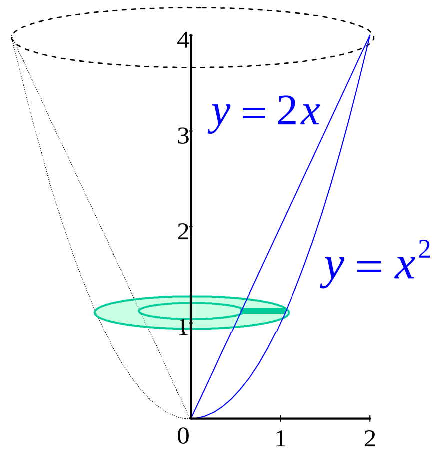
La torre de enfriamiento de las centrales nucleares, tienen 500 pies de altura y el contorno puede ser aproximado por el gráfico de esta ecuación que rota alrededor del eje y:

$$x = .000574y^2 - .439y + 185$$

El volumen puede ser calculado usando el método del disco, con un disco horizontal.

$$\pi \int_0^{500} \left(.000574y^2 - .439y + 185\right)^2 \; dy \quad \boxed{\approx 24,700,000 \text{ ft}^3}$$





$y = x^2 \qquad y = 2x$

$\sqrt{y} = x \qquad \dfrac{y}{2} = x$

La región acotada por $y = x^2$ y $y = 2x$ rota alrededor del eje y. Calcular el volumen generado.

Si usamos un disco horizontal:

El "disco" en este caso, posee un agujero.

El volumen es entonces $\left(\pi R^2 - \pi r^2\right)$espesor

$$V = \int_0^4 \pi\left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) dy$$

$$\pi\left(\underset{\text{Radio externo}}{R^2} - \underset{\text{Radio interno}}{r^2}\right) dy$$

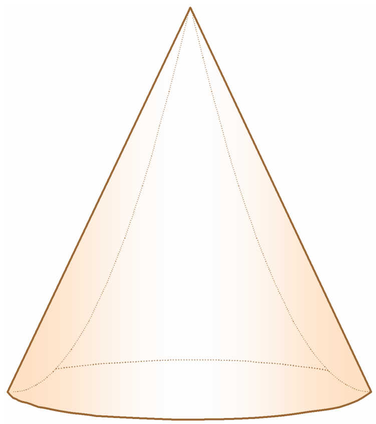
$$V = \int_0^4 \pi\left(y - \frac{1}{4}y^2\right) dy$$

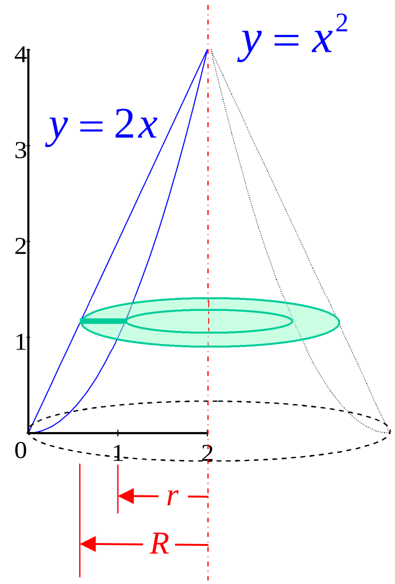
$$V = \pi\int_0^4 y - \frac{1}{4}y^2\ dy \quad = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3\right]_0^4 \quad = \pi\left[8 - \frac{16}{3}\right] \quad = \frac{8\pi}{3}$$

La aplicación de este método, sustraer al volumen externo, el volumen interno, se conoce con el nombre de “Método de la Arandela”.

El volumen obtenido es entonces $V = \pi \int_a^b R^2 - r^2 \; dx$

Al igual que el método anterior, la idea es aplicable a múltiples situaciones, donde a un volumen externo se le resta un volumen interno.





Si la misma región rota alrededor de la recta x=*2*:

El radio externo es

$$R = 2 - \frac{y}{2}$$

El radio interior:

$$r = 2 - \sqrt{y}$$

$y = x^2$ $\quad$ $y = 2x$

$$\sqrt{y} = x \qquad \frac{y}{2} = x$$

$$V = \pi \int_0^4 R^2 - r^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 dy$$

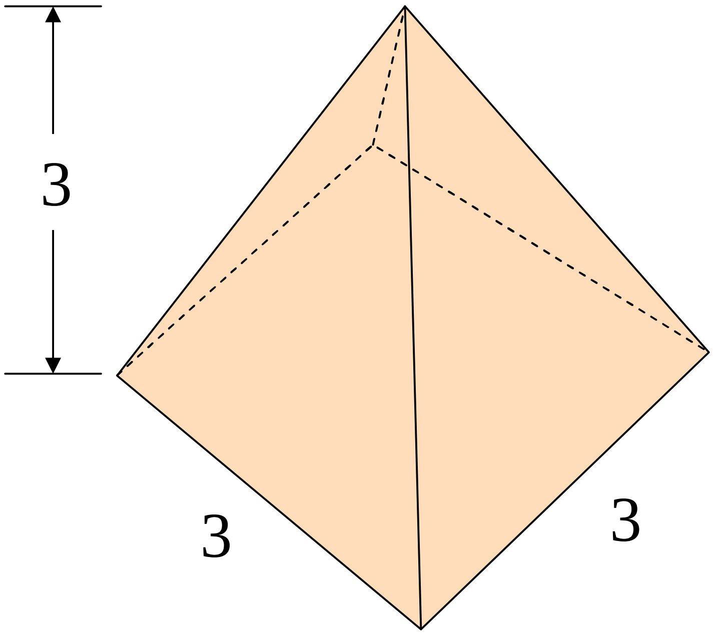
$$= \pi \int_0^4 \left(4 - 2y + \frac{y^2}{4}\right) - \left(4 - 4\sqrt{y} + y\right) dy$$

$$= \pi \int_0^4 \cancel{4} - 2y + \frac{y^2}{4} - \cancel{4} + 4\sqrt{y} - y \; dy$$

$$= \pi \int_0^4 -3y + \frac{1}{4} y^2 + 4y^{\frac{1}{2}} \; dy$$

$$= \pi \cdot \left[-\frac{3}{2} y^2 + \frac{1}{12} y^3 + \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

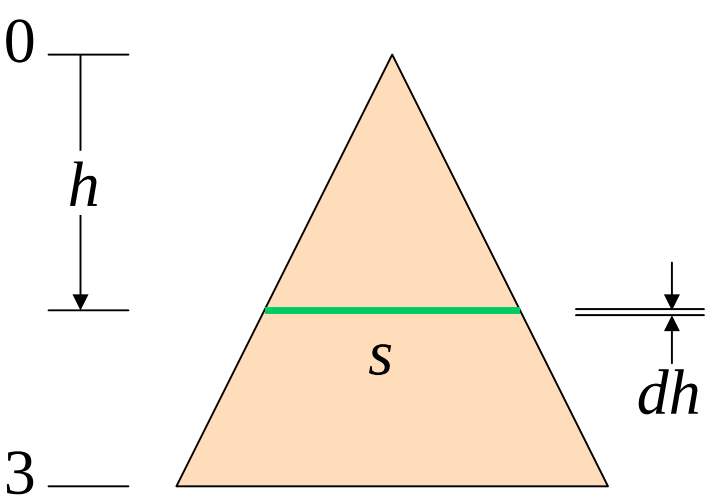
$$= \pi \cdot \left[-24 + \frac{16}{3} + \frac{64}{3} \right] \qquad = \frac{8\pi}{3}$$



Para encontrar el volumen de esa pirámide, consideremos discos horizontales

El volumen de ese cilindro es s^2dh.

Si ponemos el cero en el vértice de la pirámide y tomamos como dirección positiva hacia abajo, entonces $s=h$.



$$V_{\textbf{Cil}} = h^2 dh$$

$$V = \int_0^3 h^2 dh = \frac{1}{3} h^3 \Big|_0^3 = 9$$

El mismo resultado de la geometría:

$$V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9$$

Método de Corte

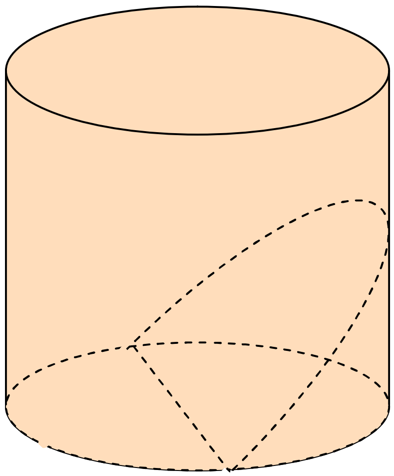
1. Dibuje el sólido y una sección transversal.

2. Encuentre una expresión para V(x).

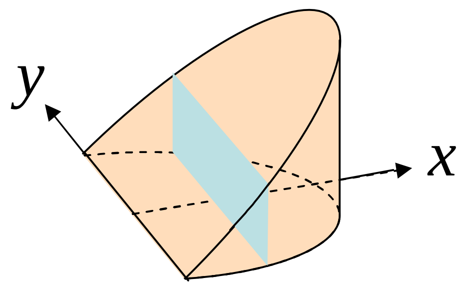
3. Encuentre los límites de integración.

4. Integre V(x) para encontrar el volumen.

Una cuña de 45º es cortada de un cilindro recto de radio 3.



Encuentre el volumen de la cuña.

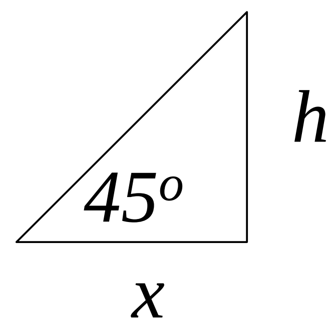


Aunque se puede analizar de diversas formas, la más sencilla es un triángulo rectángulo.

Si h es la altura de la pared exterior, el volumen es:

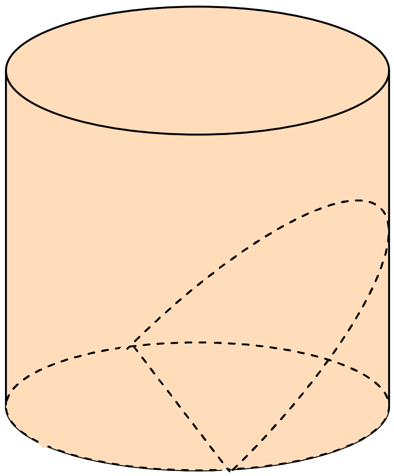
$$V\left(x\right) = 2y \cdot h \cdot dx$$

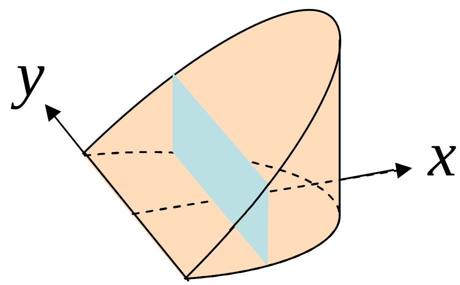
Puesto que la cuña es cortada en 45º:



$$h = x$$

Así $\quad x^2 + y^2 = 9 \Longrightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$





A pesar de que se comenzó con un cilindro, π no entra en el cálculo!

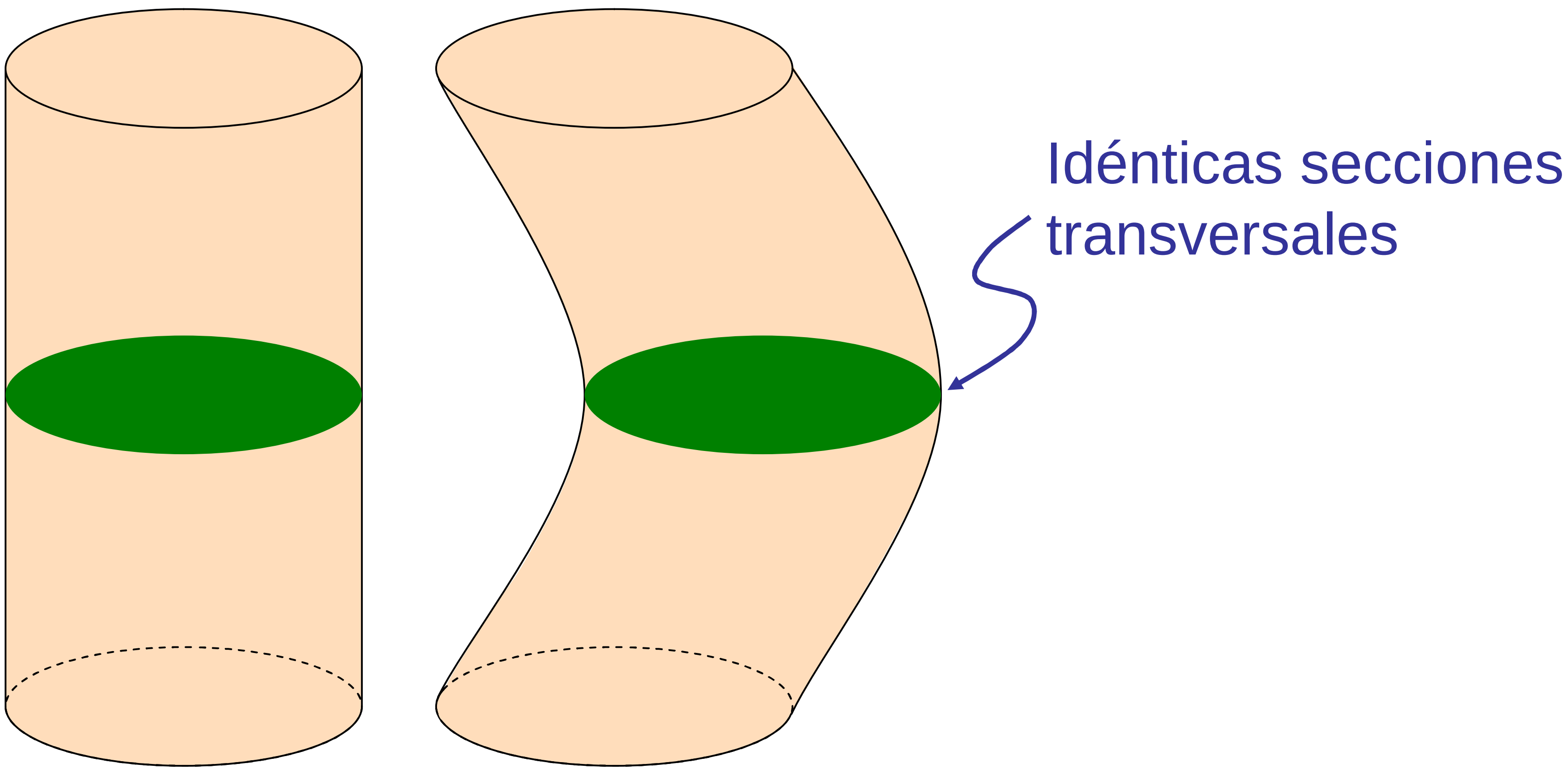
$$V(x) = 2\sqrt{9 - x^2} \cdot x \cdot dx$$

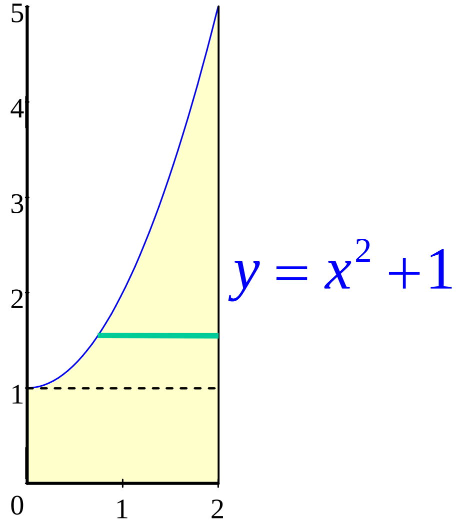
$$V = \int_0^3 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx \qquad \begin{aligned} u &= 9 - x^2 \\ du &= -2x\ dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u(0) &= 9 \\ u(3) &= 0 \end{aligned}$$

$$V = -\int_9^0 u^{\frac{1}{2}}du \quad = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 \quad = \frac{2}{3}\cdot 27 \quad = 18$$

Principio de Cavalieri

Dos sólidos con iguales alturas e idénticos secciones transversales paralelas, tienen el mismo volumen.





$$y - 1 = x^2 \qquad x = \sqrt{y-1}$$

$$\pi \int_1^5 \underbrace{2^2}_{\text{Radio externo}} - \underbrace{\left(\sqrt{y-1}\right)^2}_{\text{Radio interno}} \underbrace{dy}_{\text{Espesor de la “rebanada”}} + \underbrace{\pi \cdot 2^2 \cdot 1}_{\text{cilindro}}$$

$$\pi \int_1^5 4 - (y-1)\, dy + 4\pi$$

$$\pi \int_1^5 5 - y \; dy + 4\pi$$

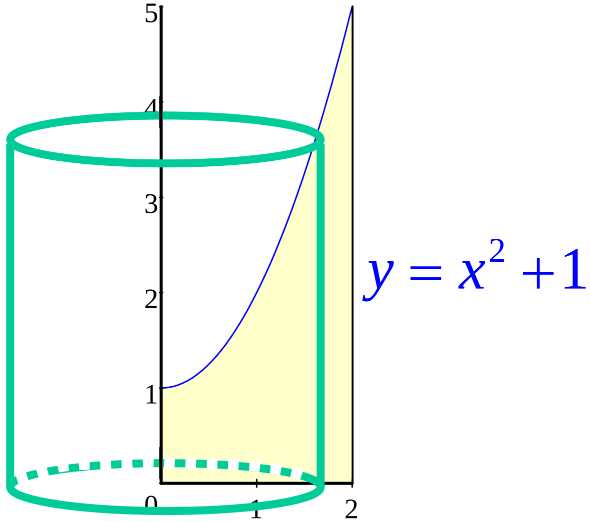
$$\pi \left[5y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^5 + 4\pi$$

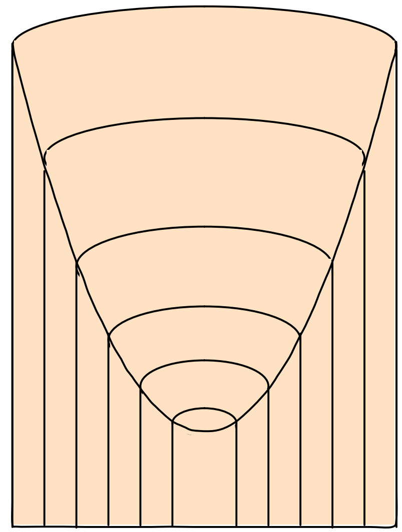
$$\pi \left[\left(25 - \frac{25}{2} \right) - \left(5 - \frac{1}{2} \right) \right] + 4\pi$$

$$\pi \left[\frac{25}{2} - \frac{9}{2} \right] + 4\pi$$

$$\pi \cdot \frac{16}{2} + 4\pi$$

$$8\pi + 4\pi \qquad = 12\pi$$



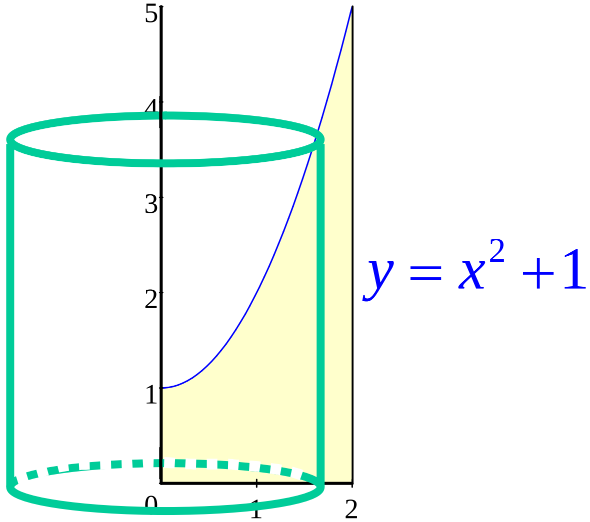


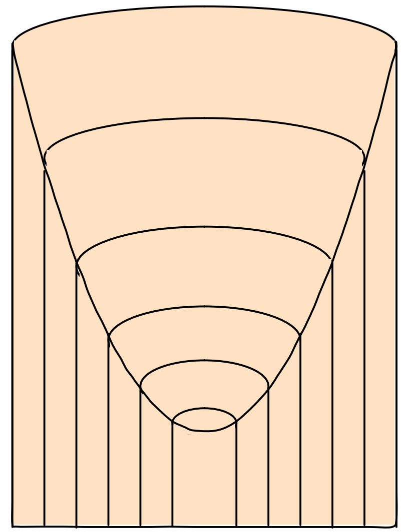
Sección transversal

Esta es otra forma de resolver el problema:

Si tomamos un corte vertical, y rotamos alrededor del eje y, obtenemos un cilindro.

Si unimos todos los cilindros, podemos reconstruir el objeto original.





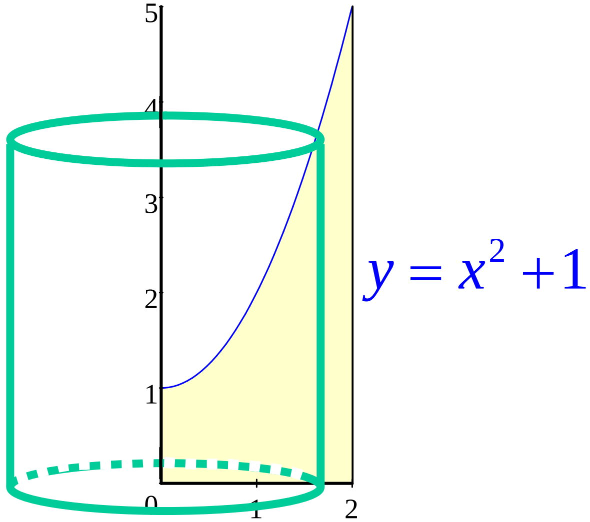
Sección transversal

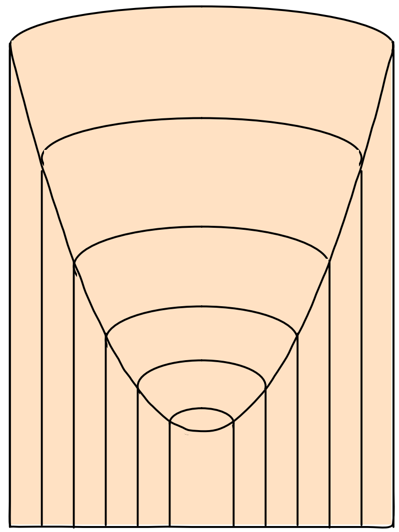
El volumen de un fino cilindro hueco está dado por:

Superficie Lateral cilindro.espesor=
=circunferencia.altura.espesor

=2π.h.espesor

$$=\underbrace{2\pi \underbrace{x}_{r}}_{\text{circunferencia}}\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{h}\ \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$





Sección transversal

Este es llamado el "Método Caracol", por la forma que adopta.

Si añadimos todos los cilindros del menor al mayor:

$$\boxed{\pi x\left(x^2+1\right)\ dx}$$

$$\int_0^2 2\pi x\left(x^2+1\right)dx$$

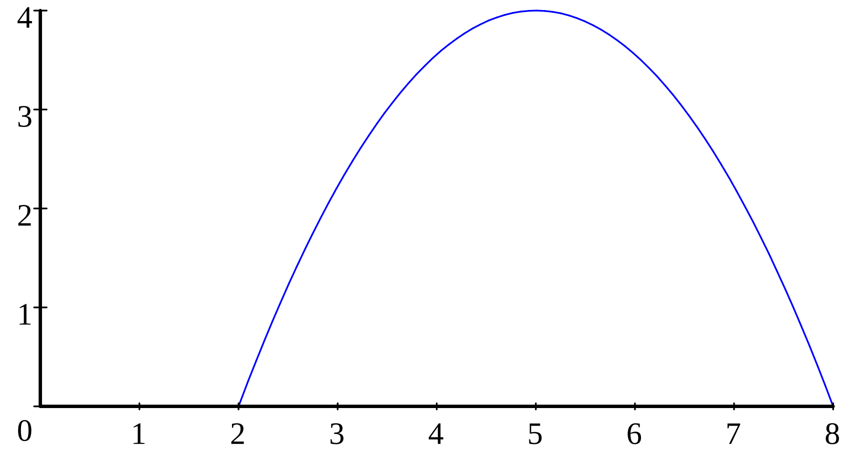
$$2\pi\int_0^2 x^3 + x\ dx$$

$$2\pi\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$2\pi\left[4+2\right]$$

$$12\pi$$

Obtenga el volumen cuando la curva gira alrededor del eje x.



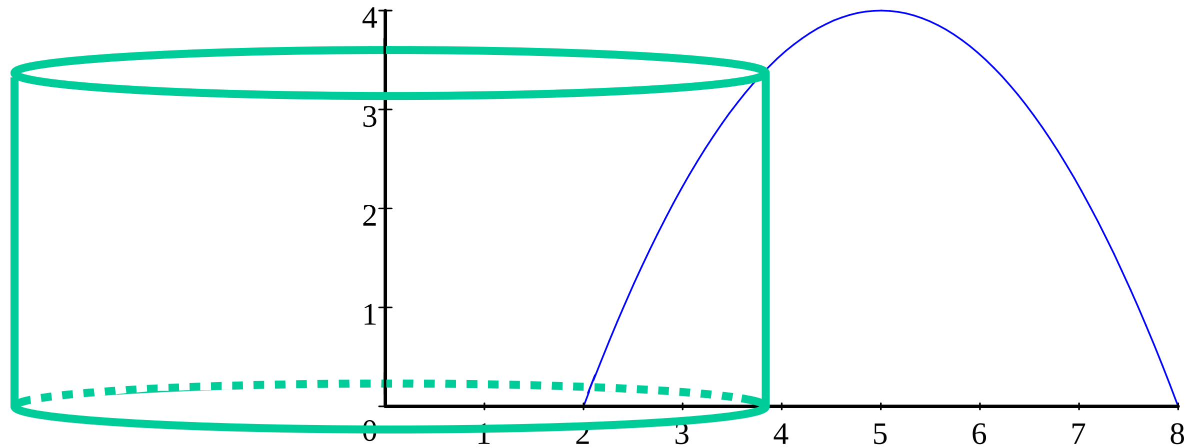
$$y = -\frac{4}{9}\left(x^2 - 10x + 16\right)$$

No podemos resolver para x, por lo que no podemos usar cortes horizontales directamente.

Si tomamos una rebanada vertical.

Y rota alrededor del eje y.

Obtenemos un cilindro.



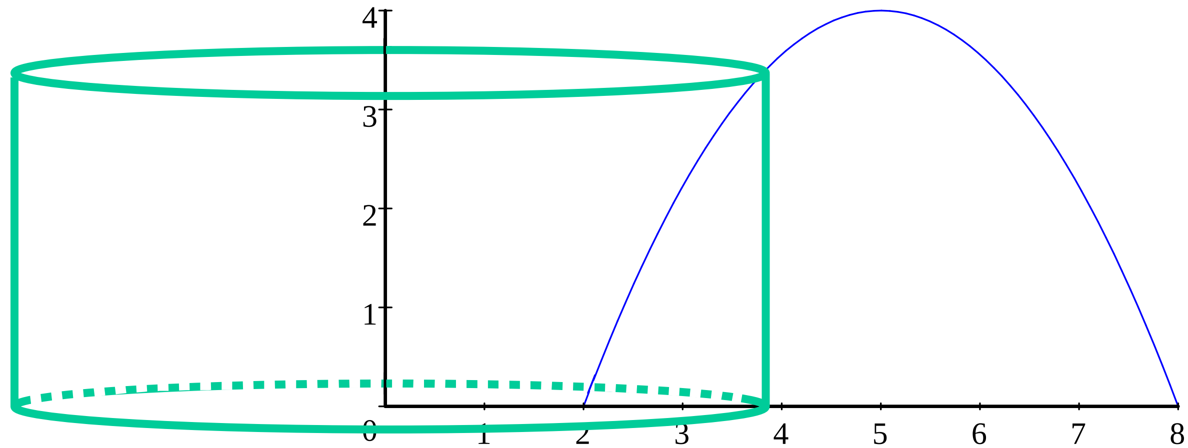
$$y = -\frac{4}{9}\left(x^2 - 10x + 16\right)$$

Método del Caracol

Area Lateral cilindro=
=circunferencia.altura

$$=2\pi r \cdot h$$

Volumen de la faja cilíndrica=2πr.h.dx



Volumen de la faja cilíndrica=2πr.h.dx

$$y = -\frac{4}{9}\left(x^2 - 10x + 16\right)$$

$$\int_2^8 \underbrace{2\pi \underset{r}{x}}_{\text{circunferencia}} \underbrace{\left[-\frac{4}{9}\left(x^2 - 10x + 16\right)\right]}_{h} \underset{\text{espesor}}{dx}$$

$$= 160\pi$$

$$\approx 502.655 \text{ cm}^3$$

Cuando la faja (o banda) es paralela al eje de rotación, usamos el método de caracol.

Cuando es perpendicular al eje de rotación, usamos el método de la arandela.