ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

TEMA 5:
POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINOMICAS
Esp. Prof. Liliana Caputo

DEFINICION

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un conjunto disjunto con $\mathbb{K}$. Entonces, el conjunto $\mathbb{K}[V]$, en el cual se han definido dos operaciones ($\oplus$, suma y $\otimes$, producto) es el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ si, y sólo si, se cumplen los siguientes axiomas: C1. $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[V]$

C2. $V \subset \mathbb{K}[V]$

C3. $\forall p,q \in \mathbb{K}[V]$: $p \oplus q \in \mathbb{K}[V] \wedge p \otimes q \in \mathbb{K}[V]$

C4. $\forall p, q \in \mathbb{K}$: $p \oplus q = p + q \wedge p \otimes q = p \,.\, q$

C5. Los únicos elementos de $\mathbb{K}[V]$ son los determinados por los axiomas C1 a C4.

AXIOMAS DE OPERATIVIDAD

- En virtud del axioma C4, si escribimos $p + q$ en vez de $p \oplus q$ y $p.q$ en lugar de $p \otimes q$, ya no hay ambigüedad.
- Sean $p, q, s \in \mathbb{K}[V]$, entonces:

O1) $p + (q + s) = (p + q) + s$
O2) $p + q = q + p$
O3) $p + 0 = p$, siendo 0 el neutro de la suma en $\mathbb{K}$
O4) $p.(q.s) = (p.q).s$
O5) $p.(q + s) = p.q + p.s$
O6) $p.q = q.p$
O7) $p.1 = p$, siendo 1 el neutro del producto en $\mathbb{K}$
O8) $0.p = 0$.

OBSERVACIONES

- Al polinomio 0 se lo llama **polinomio nulo.**
- Como 1 es un polinomio, −1 también lo es.
- Al producto de un polinomio p por −1, lo denotamos con −p y lo llamamos **opuesto de p**.
- A la suma de un polinomio p y del opuesto de q, la denotamos con p − q.

POTENCIACION

- Sean $p \in \mathbb{K}[V] - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:
  - $p^0 = 1$
  - $p^n = p.p^{n-1}$

Veamos que $\forall\ p \in \mathbb{K}[V] - \{0\}\ \forall n \in \mathbb{N}$: $p^n \in \mathbb{K}[V]$, por inducción sobre n.

Además, como $0 \in \mathbb{K}$, $\forall m \in \mathbb{N}$: $0^m = 0 \in \mathbb{K} \subset \mathbb{K}[V]$

POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA

Si $V = \{x\}$, es usual usar $\mathbb{K}[x]$ para denotar al conjunto $\mathbb{K}[V]$. En ese caso, cada polinomio, se llama **polinomio en una indeterminada x.**

Como $x \in V \subset \mathbb{K}[x]$, por lo antes probado, también x^2, x^3, … son polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x^n \in \mathbb{K}[x]$.

Además, como $V \cap \mathbb{K} = \varnothing$, $x \notin \mathbb{K}$, de donde debe ser $x \neq 0$ y, en consecuencia, $x^0 = 1$.

POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA

- Por otra parte, dado $a \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, por el axioma C3, $a.x^n \in \mathbb{K}[x]$.
- Estos polinomios $a.x^n$ tales que $a \in \mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, se llaman **monomios**. La suma de dos monomios se llama **binomio**.
- Por lo dicho hasta aquí, es usual presentar a los polinomios de la manera siguiente:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

con $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. El polinomio nulo es aquel donde todos los a_i son ceros.

GRADO Y COEFICIENTES

Dado un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Se llama **grado de p** al siguiente entero no negativo: $gr(p) = \text{máx}\ \{i \in \mathbb{N}_0 / \ a_i \neq 0\}$. De esta definición, se desprende que **no existe** el grado del polinomio nulo.

Si $gr(p) = n$, a_n se llama **coeficiente principal**.

En cambio, a_0 se llama **término independiente**.

Si p tiene coeficiente principal 1, p es **mónico**.

IGUALDAD DE POLINOMIOS

- Dados dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ y } q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

$$p = q \Leftrightarrow gr(p) = gr(q) \wedge \forall i: a_i = b_i$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Dados dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ tales que

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ y } q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

y gr(p) = n $\wedge$ gr(q) = m, acordamos que:

(p + q) (x) = p(x) + q(x)

(p.q) (x) = p(x) . q(x)

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Entonces, utilizando los axiomas de operatividad, se obtiene que:

$$(p+q)(x) = \sum_{j=0}^{h} (a_j + b_j) x^j$$

con h = gr(p + q) =máx {gr(p), gr(q)}

Y además, que:

$$(p.q)(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_i\, b_k x^{i+k}$$

con gr(p.q) = gr(p) + gr(q)

Si gr(q) = 0, resulta: $(pq)(x) = \sum_{i=0}^{n} q a_i x^i$

TEOREMA 1

- **Los únicos polinomios con coeficientes en un cuerpo que son invertibles, son los de grado cero.**
- Para demostrarlo, supondremos que dado un polinomio p, con coeficientes en un cuerpo, existe q tal que p.q = 1. Se verá que, en ese caso, debe ser gr(p) = 0.

DIVISION DE POLINOMIOS

- Dados dos polinomios p y q (q $\neq$ 0) con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, existen y son únicos, c, r $\in$ $\mathbb{K}[x]$ tales que p = c.q + r, siendo r = 0 $\vee$ gr(r) < gr(q). En este caso, p se llama **dividendo**, q **divisor**, c **cociente** (gr (c) = = gr (p) – gr(q)) y r **resto** de la división de p por q.

- Cuando al hacer la división de p por q, el resto es cero (r = 0), diremos que **q divide a p** y lo denotamos q|p.

REGLA DE RUFFINI

- Cuando el divisor es mónico y de grado 1, se puede realizar la división usando la llamada **Regla de Ruffini**. Si $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ con $a_n \neq 0$ y $q(x) = x + b_0$, el cociente, c es tal que gr(c) = n –1. Como r = 0 $\vee$ gr(r)<gr(q)=1, resulta que r = 0 $\vee$ gr(r) = 0.
- Sean $c_{n-1}, \ldots , c_1, c_0$ los coeficientes de c, entonces:

  $c_{n-1} = a_n$; $c_{n-2} = a_{n-1} - c_{n-1}.b_0, \ldots , c_0 = a_1 - c_1 b_0$
  Luego, $c(x) = a_n\, x^{n-1} + c_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + c_0$ y el resto es $r = a_0 - c_0 b_0$.

REGLA DE RUFFINI

- Habitualmente, se usa la siguiente disposición:

	a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0
$-b_0$		$-b_0.c_{n-1}$	....	$-b_0.c_1$	$-b_0.c_0$
	a_n	$a_{n-1} - b_0.c_{n-1}$	....	$a_1 - b_0.c_1$	$a_0 - b_0.c_0$

Veamos un ejemplo:

$$p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 4x - 1$$

$$q(x) = x - 2$$

FUNCIONES POLINOMICAS

- Sea p $\in \mathbb{K}[x]$ tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, gr(p) = n. Entonces, definimos:

$$f_p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} / f_p(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i$$

como la **función polinómica de grado n asociada a p.**

Por leyes de cierre de la suma y del producto en $\mathbb{K}$, cualquiera sea p $\in \mathbb{K}[x]$, f_p es función.

OBSERVACIONES

- Sea la función lineal f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f(x) = ax + b, con a, b $\in \mathbb{R}$. Entonces:
  Si a $\neq$ 0, f es la función polinómica de grado 1, asociada al polinomio p(x) = ax + b.
  Si a = 0, f es la función polinómica de grado 0, asociada al polinomio p(x) = b.
- La función cuadrática g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ /g(x)=ax^2+bx+c con a, b, c $\in$ $\mathbb{R}$ y a $\neq$ 0 es la función polinómica de grado 2, asociada al polinomio p(x) = ax^2+bx+c.

OBSERVACIONES

A partir de este momento, debemos tener en cuenta que podemos trabajar con 3 objetos matemáticos distintos:

- Un **polinomio** p con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, que son los elementos construidos en los axiomas C1 a C5.
- Una **función polinómica** f_p que NO es un polinomio, sino una función de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$.
- Una **ecuación polinómica** $f_p(k) = a \in \mathbb{K}$ que es una igualdad. Resolverla consiste en hallar las preimágenes de a por la función f_p. Por ello, su conjunto solución es un subconjunto de $\mathbb{K}$.

VALOR NUMERICO

- Para cada $k \in \mathbb{K}$, a $f_p(k)$ lo llamamos **valor numérico de p en k**, o **especialización de p en k**. Al valor numérico de p en $k \in \mathbb{K}$ se lo denotará, simplemente, con p(k) en vez de con $f_p(k)$.
- Es trivial que el valor numérico de un polinomio p de grado cero en cualquier $k \in \mathbb{K}$, es $p \in \mathbb{K}$.

VALOR NUMERICO

- Dados los polinomios p, q, s, t, w, v $\in \mathbb{K}[x]$ tales que p = t, p = q + s y p = v.w, las funciones polinómicas asociadas f_p, f_t, f_{q+s} y $f_{v.w}$ son iguales, de donde se tiene que $\forall k \in \mathbb{K}$:
  - p(k) = t(k)
  - p(k) = q(k) + s(k)
  - p(k) = v(k).w(k)

TEOREMA DEL RESTO

- Sean p, q $\in \mathbb{K}[x]$ tales que q(x) = x + a. Entonces, el resto de la división de p por q es r = p(−a).
- Veamos, después de demostrarlo, el ejemplo dado al estudiar la Regla de Ruffini:
- En ese caso, resultó:

  $c(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 20$ y $r = 39$.

  Luego, $p(2) = 2.2^5 - 5.2^4 + 6.2^3 + 4.2 - 1 =$
  $= 64 - 80 + 48 + 8 - 1 = 39 = r$.

RAICES DE UN POLINOMIO

Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $p \in \mathbb{K}[x]$, entonces:

<u>DEFINICION 1</u>: α es **una raíz de p** $\Leftrightarrow p(\alpha) = 0$.

<u>TEOREMA 2</u>: α es una raíz de p $\Leftrightarrow (x - \alpha) | p$.
(Se demostrará a continuación)

<u>DEFINICION 2</u>: α es una **raíz de orden de multiplicidad k** $\in \mathbb{N}$ de p si, y sólo si, se cumple que: $(x - \alpha)^k | p \wedge (x - \alpha)^{k+1} \nmid p$.

<u>PROPOSICION</u>: Un polinomio de grado $n \neq 0$ admite, a lo sumo, n raíces distintas. (Se acepta sin demostración).

POLINOMIOS CON COEFICIENTES COMPLEJOS

ENUNCIADO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA(TFA)

- Todo polinomio de coeficientes complejos admite en $\mathbb{C}$, al menos, una raíz compleja.

Este teorema, que admitimos sin demostración, permite afirmar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo **algebraicamente cerrado**, característica que no tienen el cuerpo de números racionales ni el de los reales.

TEOREMA DE GAUSS

- Sea t un polinomio de coeficientes enteros de grado $n > 0$, y término independiente no nulo. <u>**Si**</u> t admite como raíz al número $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con p y q coprimos, <u>**entonces**</u>, $p|a_0 \wedge q|a_n$.
- Nótese que no vale la recíproca es decir, que $p|a_0 \wedge q|a_n$ no es suficiente para decir que t admite una raíz racional $\frac{p}{q}$.
- Nótese que si t es mónico, y admite una raíz racional, ésta es entera.

DOS TEOREMAS

- <u>TEOREMA</u> 3: Todo polinomio con coeficientes reales, si admite como raíz a un número complejo, también admite como raíz a su conjugado. (Se demuestra a continuación)
- <u>ENUNCIADO DEL TEOREMA DE DESCOMPOSICION FACTORIAL</u>:

Sean $p \in \mathbb{C}[x]$, de grado $n \in \mathbb{N}$ y de coeficiente principal a_n. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ son n raíces (no necesariamente distintas) de p, entonces, p se puede factorizar como sigue: $p(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$

(Se admite sin demostración)

POLINOMIOS EN 2 INDETERMINADAS

- Sea $V = \{x, y\} / V \cap \mathbb{C} = \varnothing$. Entonces, por el axioma C1, $x, y \in \mathbb{C}[V]$.
- Además, $x, y \notin \mathbb{C}$, con lo cual, $x \neq 0 \neq y$. Por definición de potenciación: $x^0 = y^0 = 1 \in \mathbb{C}[V]$.
- De la misma manera, si $m, n \in \mathbb{N}_0$ y $a \in \mathbb{C}$, por axioma C3 y definición de potenciación, el **monomio** $a.x^m.y^n \in \mathbb{C}[V]$. Llamemos p(x, y) al monomio anterior.
- Si $a = 0$, $p = 0$, es el polinomio nulo.
- Si $a \neq 0$, diremos que $gr(p) = m + n$.

POLINOMIOS EN 2 INDETERMINADAS

- Dados $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{C}[V]$ monomios, entonces se llama **polinomio en x e y con coeficientes en $\mathbb{C}$** a la suma de dichos monomios, Lo denotaremos con q(x, y) y definimos su grado:
  $$gr(q) = \text{máx}\,\{gr(p_i) \,/\, i = 1, \ldots, k\}$$
- $q(x, y) = 9ix^2 - 18xy + (4 - i)y^2 + 8y - 23$ es un ejemplo de un polinomio en x e y, con coeficientes en $\mathbb{C}$, de grado 2.

FUNCION POLINOMICA DE 2 VARIABLES

- Dado el polinomio $q(x, y) \in \mathbb{C}[V]$, se puede definir una función polinómica f_q de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}$, tal que a cada par de números complejos z, w le hace corresponder un número complejo (que es el valor numérico de q en (z, w) y que denotaremos con q(z, w)).
- Para obtener dicha imagen, es suficiente reemplazar x por z e y por w en la expresión de q(x, y).
- Ejemplo: $p(x, y) = x^3.y^2 + x^2.y^2 - 3i$.

Luego $f_p(1,-2i) = 1^3.(-2i)^2 + 1^2.(-2i)^2 - 3i = -8 - 3i$.

ECUACION POLINOMICA CON 2 INCOGNITAS

- Sean $q \in \mathbb{C}[V]$, f_q función polinómica asociada a q y $u \in \mathbb{C}$ fijo. Entonces, la igualdad siguiente: $f_q(z,w) = u$ se llama **ecuación polinómica con dos incógnitas** (z y w) **de grado gr(q).** Su conjunto solución será un subconjunto de $\mathbb{C}$.
- Ejemplo: La ecuación $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ admite como conjunto solución a C(p, 2), con p = (2, 1) es decir, el subconjunto complejo

$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - 2 - i| = 2\}$.