

**Universidad Nacional del Nordeste**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura**

# **Unidad 2: Relaciones**

# PAR ORDENADO

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos.

Se llama par ordenado  $(a, b)$  al par de elementos dados en un cierto orden,  $a$  es el primer elemento del par y  $b$  es el segundo.

Decimos que

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

# PRODUCTO CARTESIANO

Se define el producto cartesiano de  $A \times B$  al conjunto formado por los pares ordenados tal que el primer elemento pertenece a  $A$  y el segundo a  $B$ .

En símbolos:  $A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo: Sean  $A = \{2,3,9\}$  y  $B = \{1,4,8\}$

$$A \times B = \{(2,1), (2,4), (2,8), (3,1), (3,4), (3,8), (9,1), (9,4), (9,8)\}$$

$$\#A=m \text{ y } \#B=n$$

$$\#(A \times B) = m.n$$

## Relación Binaria de un conjunto A en otro B

Se llama relación al subconjunto R definido:

$$R: A \rightarrow B \Leftrightarrow R \subset A \times B$$

A este subconjunto R incluido en  $A \times B$  se llama relación.

**Por ejemplo:**

Sean  $A = \{2, 3, 9\}$ ,  $B = \{1, 4, 8\}$  y  $R: A \rightarrow B / R = \{(a, b) / a \leq b\}$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 8), (3, 1), (3, 4), (3, 8), (9, 1), (9, 4), (9, 8)\}$$

$$R = \{(2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 8)\}$$

# DOMINIO, IMAGEN, RELACIÓN INVERSA

**Dominio de la Relación:** es el conjunto de primeros elementos de los pares, tal que  $(a,b) \in R$  .

$$D_R = \{a \in A / (a,b) \in R\}$$

**Imagen:** es el conjunto de segundos elementos de los pares, tal que  $(a,b) \in R$  .

$$I_R = \{b \in B / (a,b) \in R\}$$

**Relación Inversa de R:** es el subconjunto de  $B \times A$  definido:  $R^{-1} = \{(b,a) / (a,b) \in R\}$

# DOMINIO, IMAGEN E INVERSA

**Por ejemplo:**

Sean  $A = \{2, 3, 9\}$   $B = \{1, 4, 8\}$   $R: A \rightarrow B / R = \{(a, b) / a \leq b\}$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 8), (3, 1), (3, 4), (3, 8), (9, 1), (9, 4), (9, 8)\}$$

$$R = \{(2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 8)\}$$

$$D_R = \{2, 3\} \quad I_R = \{4, 8\}$$

$$R^{-1} = \{(4, 2), (8, 2), (4, 3), (8, 3)\}$$

# COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Dados tres conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , una relación  $R \subset A \times B$  y otra relación  $S \subset B \times C$

Es posible definir una tercera relación de  $A$  en  $C$  de la siguiente manera:

$$S \circ R \subset A \times C \text{ } / (x, z) \in (S \circ R) \Leftrightarrow \exists y \in B \text{ } / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S$$

# COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sean los conjuntos:

$$A = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \} ; B = \{ 1; 4; 6; 16 \} ; C = \{ 2; 3; 8; 10 \}$$

y las relaciones

$$R \subset A \times B / (x, y) \in R \Leftrightarrow y = x^2$$

$$S \subset B \times C / (y, z) \in S \Leftrightarrow z = y/2$$

**Tarea:**

- Determinar  $R$  y  $S$  por extensión.
- Definir la composición  $S \circ R \subset A \times C$  por extensión.

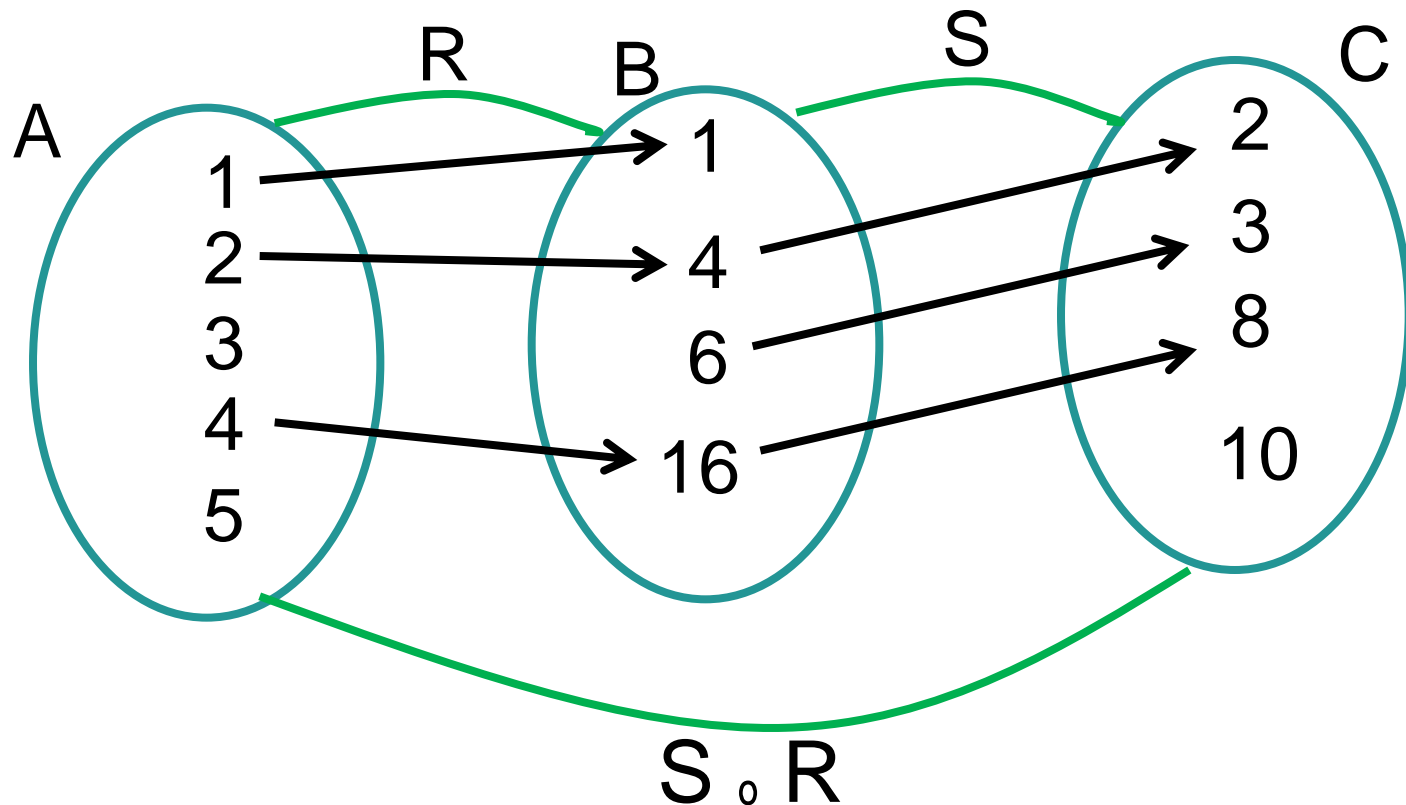


# COMPOSICIÓN DE RELACIONES

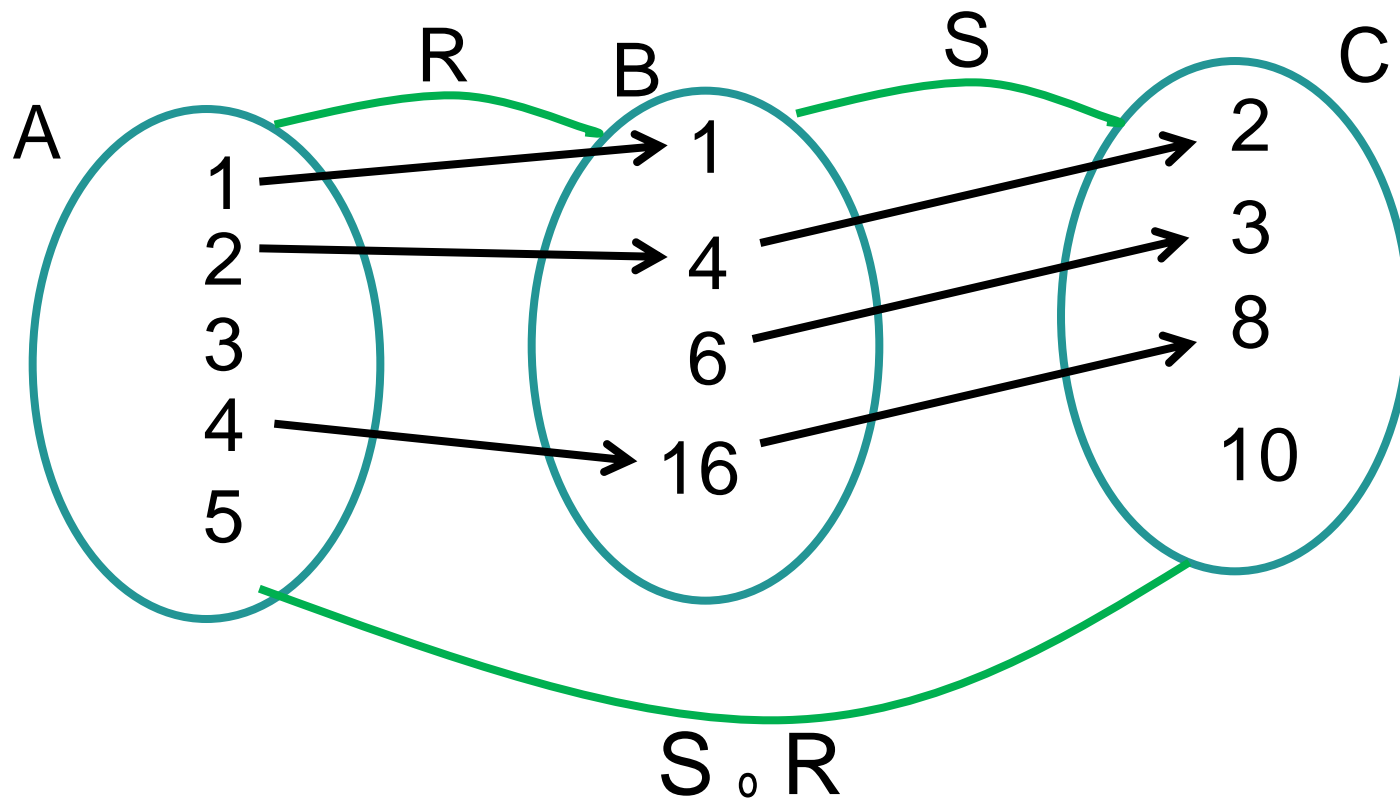
$A = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$  ;  $B = \{ 1; 4; 6; 16 \}$  ;  $C = \{ 2; 3; 8; 10 \}$

$R \subset A \times B$  /  $(x, y) \in R \Leftrightarrow y = x^2$

$S \subset B \times C$  /  $(y, z) \in S \Leftrightarrow z = y/2$



# COMPOSICIÓN DE RELACIONES



$$R = \{(1,1), (2,4), (4,16)\}$$

$$S = \{(4,2), (6,3), (16,8)\}$$

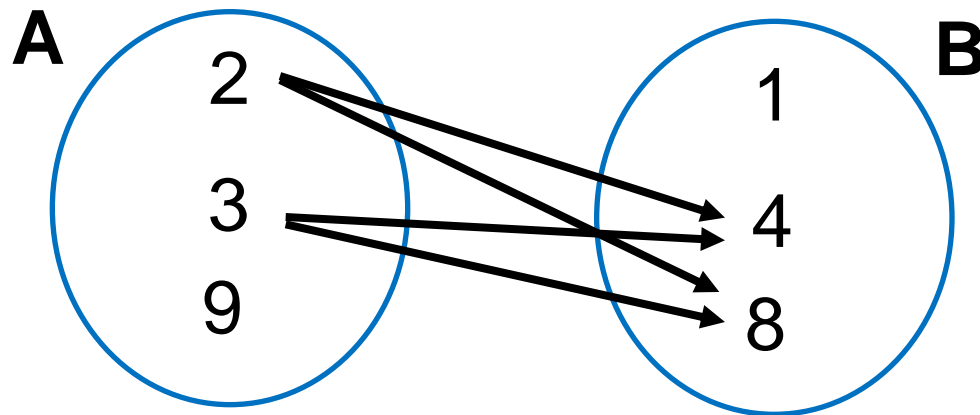
$$S \circ R = \{(2,2), (4,8)\}$$

# REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

Sea  $R$  una relación entre  $A$  y  $B$ , es decir  $R \subset A \times B$   
En el caso de conjuntos finitos se utilizan los siguientes tipos de representación:

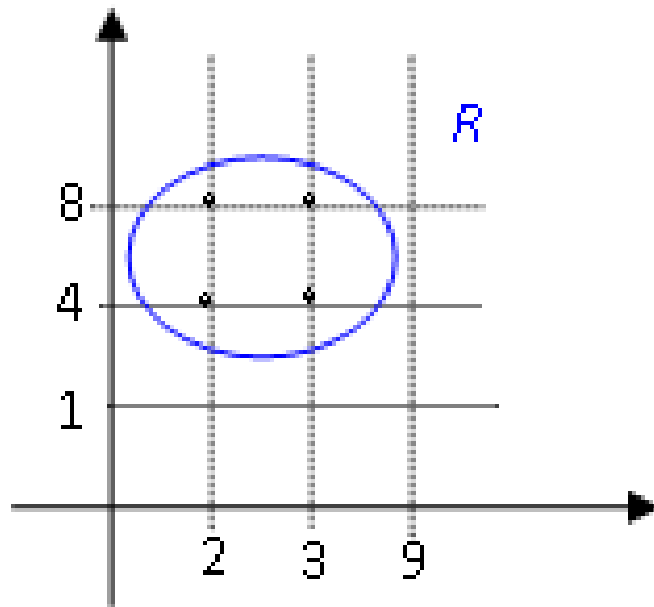
1) Mediante diagramas de Venn

$$R = \{(2,4), (2,8), (3,4), (3,8)\}$$



# REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

## 2) Mediante un gráfico cartesiano



## REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

3) Mediante una matriz, también llamada matriz de adyacencia

R	1	4	8
2	0	1	1
3	0	1	1
9	0	0	0

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea  $R$  una relación definida en  $A \times A$ , es decir  $R \subset A^2$

1) **Reflexividad:**  $R$  es reflexiva en  $A$ , si y sólo si,

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

2) **No reflexividad:**  $R$  es no reflexiva en  $A$ , si y sólo si,

$$\exists a \in A / (a, a) \notin R$$

3) **Arreflexividad:**  $R$  es arreflexiva en  $A$ , si y sólo si,

$$A \Leftrightarrow \forall a \in A : (a, a) \notin R$$

# PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

4) **Simetría:** R es simétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

5) **Asimetría:** R es asimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$$

6) **Antisimetría:** R es antisimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

# PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

7) **Transitividad:** R es transitiva en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

8) **No transitividad:** R es no transitiva en A, si y sólo si,  $\exists a, \exists b, \exists c \in A / (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \notin R$

9) **Atransitividad:** R es atransitiva en A, si y sólo si,  $\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \notin R$



# CLASIFICACION DE RELACIONES

**Relación de equivalencia:** La relación  $R \subset A^2$  es de equivalencia en  $A$ , si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Relación de Orden:**

La relación  $R \subset A^2$  es de **orden amplio** en  $A$  si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

La relación  $R \subset A^2$  es de **orden estricto** en  $A$  si y sólo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva