

# **UNIDAD VIII:**

## **LA INTEGRAL DEFINIDA**

**El Teorema Fundamental del Cálculo Integral.  
Definición e interpretación geométrica de la  
integral definida. Áreas en coordenadas  
cartesianas. Áreas positivas y negativas.  
Propiedades de la integral.**

**Objetivos Instructivos.** Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan la definición de integral definida, sus propiedades fundamentales y su interpretación geométrica.

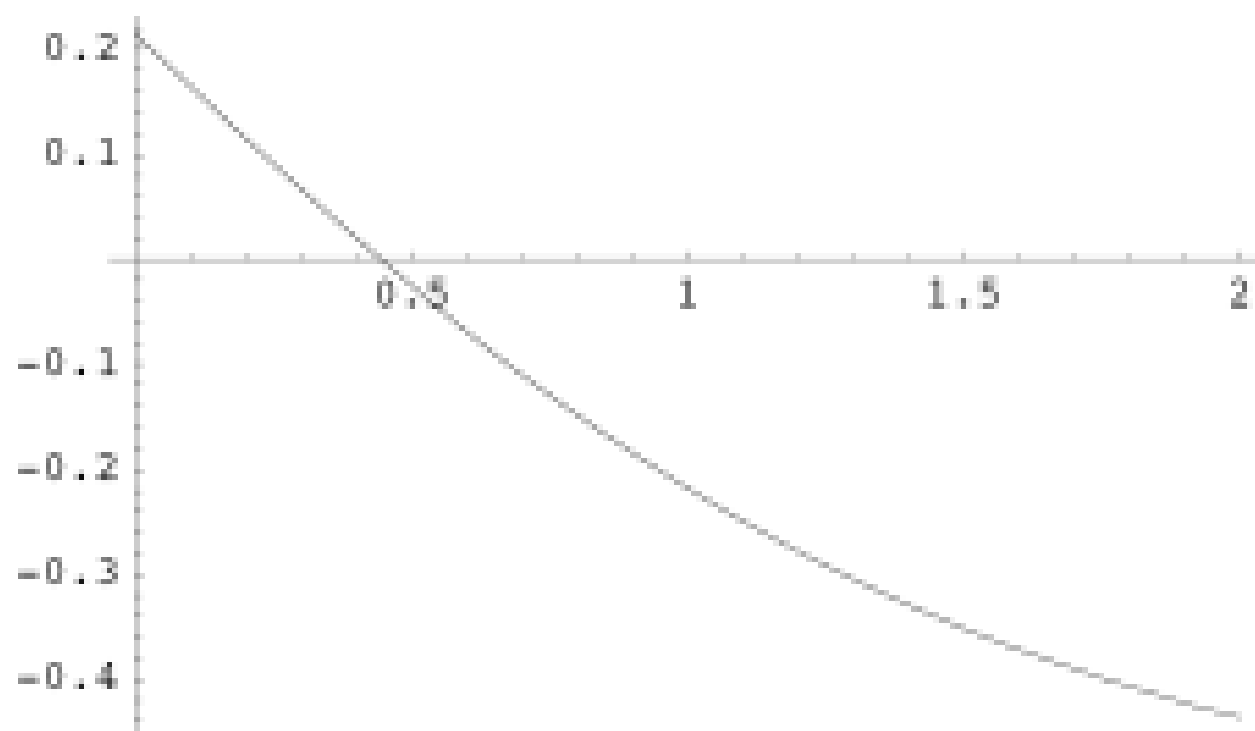


Una partícula se mueve sobre el eje  $y$  de tal forma que su velocidad  $v$  en cualquier instante de tiempo  $t \geq 0$  es dada por  $v(t) = 1 - \tan^{-1}(e^t)$ . En el instante inicial  $t=0$ , la partícula está en  $y=-1$ . Encuentre la posición de la partícula en el tiempo  $t=2$ .

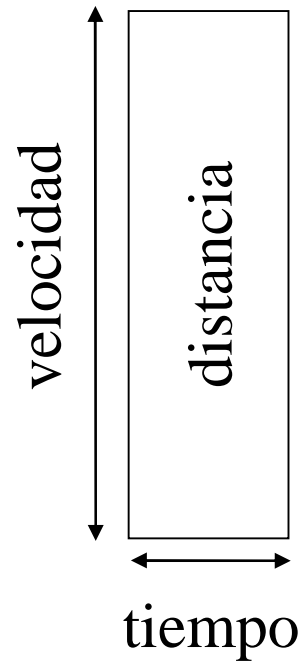
$$y'(t) = v(t) = 1 - \tan^{-1}(e^t)$$

$$y(t) = ?$$

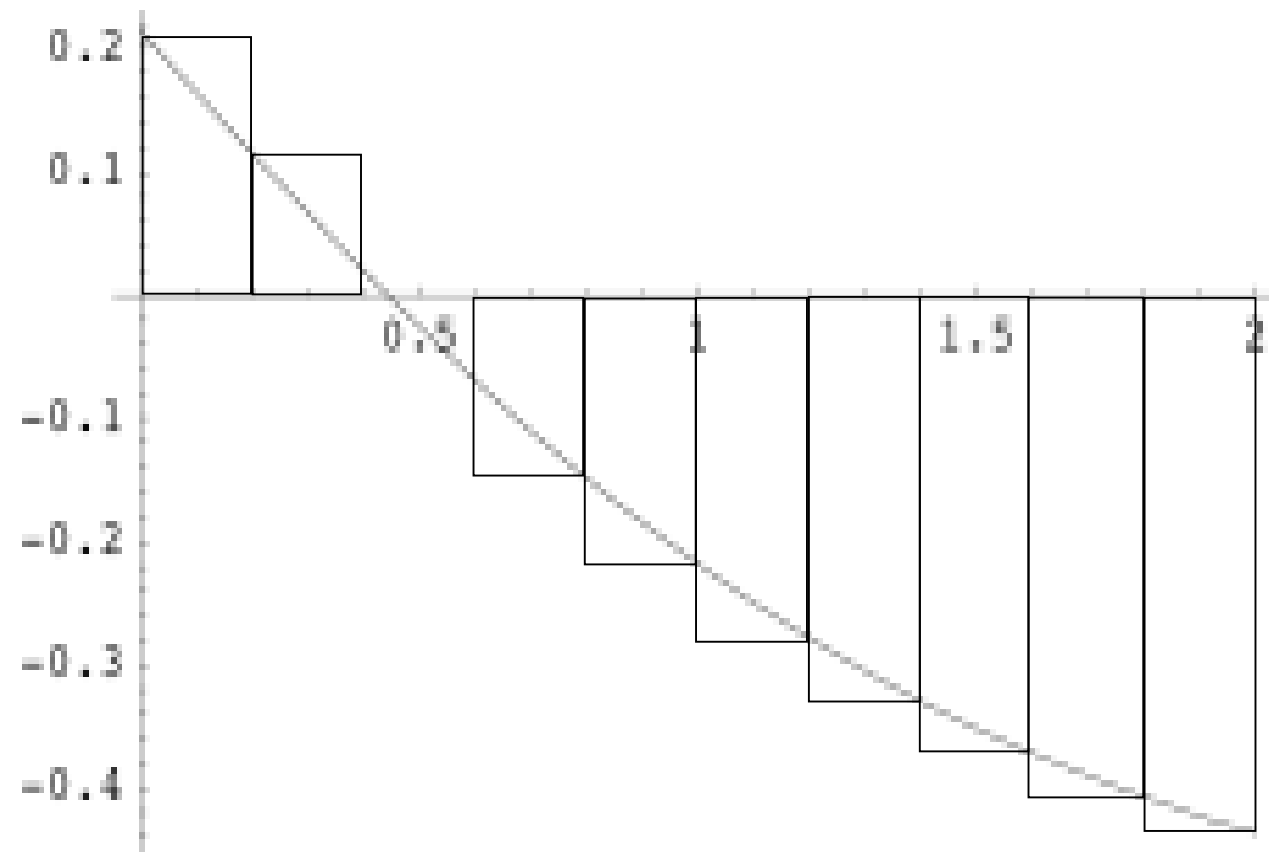
```
In[1]:= Plot[1 - ArcTan[E^t], {t, 0, 2}]
```



$$\text{Velocidad} \times \text{Tiempo} = \text{Distancia}$$



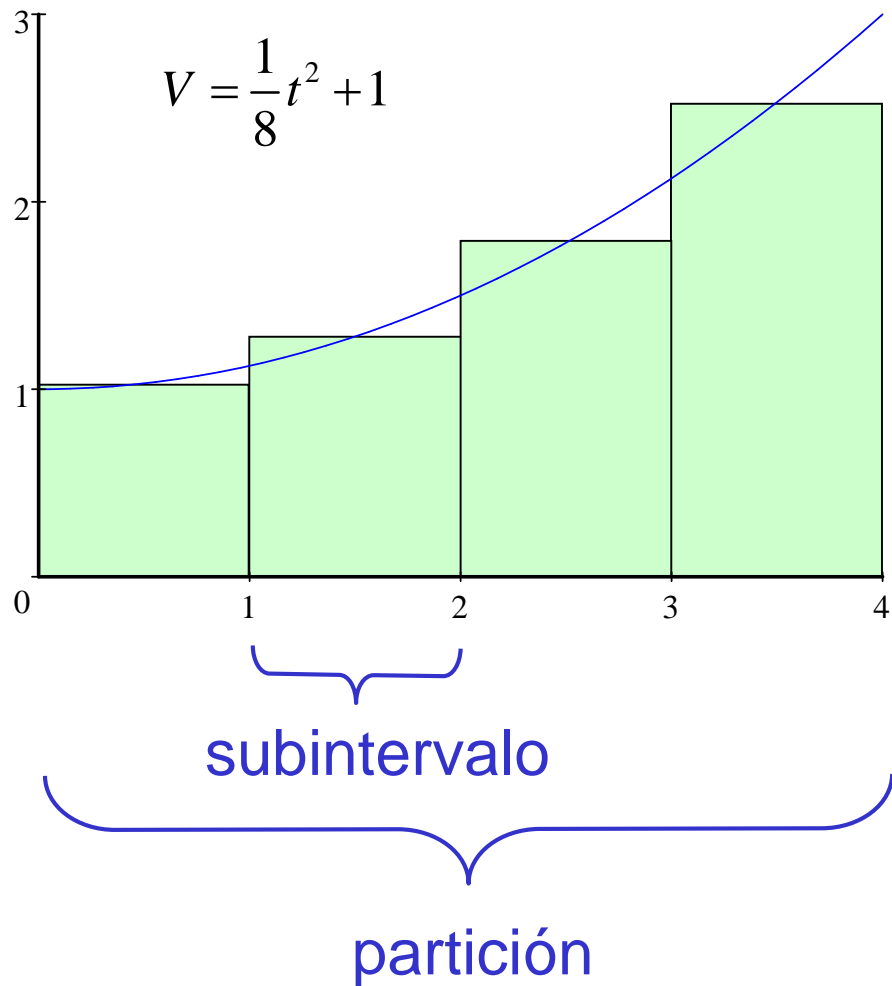
```
In[1]:= Plot[1 - ArcTan[E^t], {t, 0, 2}]
```



Las áreas representan la distancia recorrida (positiva cuando  $v > 0$ , negativa cuando  $v < 0$ ). Esta es la distancia total acumulada de  $t=0$  a  $t=2$ .

Lo que hemos dicho es que  $y(t) \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i$

$$y(t) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i$$



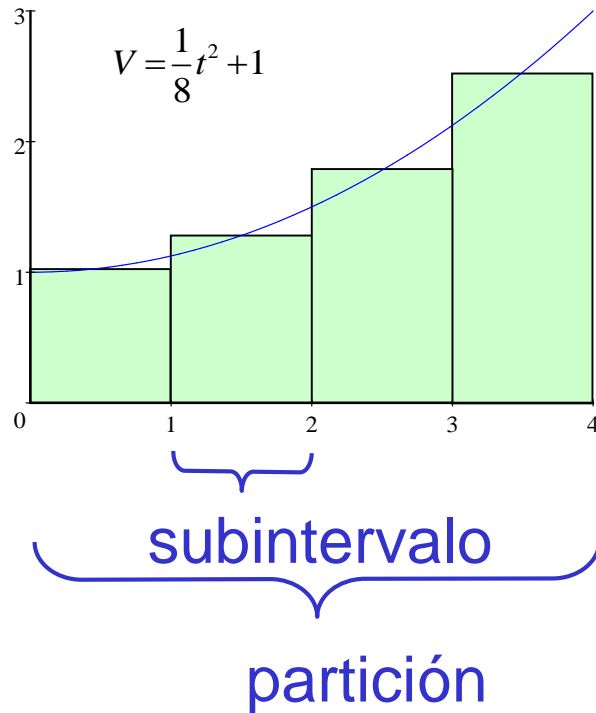
Encontrar el área bajo la curva, adicionando rectángulos es llamada la **Suma de Rieman**.

El ancho de un rectángulo es llamado un subintervalo.

El intervalo total es llamado la **partición**.

Los subintervalos no tienen que poseer el mismo tamaño.





Si la partición es denotada por  $P$ , entonces la longitud del mayor subintervalo es llamado la **norma** de  $P$  y es denotada por  $\|P\|$ .

Si  $\|P\|$  se hace menor, la aproximación del área será mejor.

$$\text{Area} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \quad \text{si } P \text{ es una partición del intervalo } [a, b]$$

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$  es llamada la **integral definida** de  $f$  sobre  $[a, b]$ .

Si usamos subintervalos de igual longitud, entonces la longitud de un subintervalo es:  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

La integral definida es dada entonces por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

Leibnitz introdujo una notación muy simple para la integral definida  $\int$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Note que cambios muy pequeños en  $x$  se transforman en  $dx$ .

Diagram illustrating the components of a definite integral:

$$\int_a^b f(x) dx$$

The diagram includes the following labels and arrows:

- Límite superior de integración**: Points to the upper limit  $b$ .
- Símbolo de Integración**: Points to the integral symbol  $\int$ .
- Límite inferior de integración**: Points to the lower limit  $a$ .
- integrando**: A bracket under  $f(x)$  points to this label.
- variable de integración**: Points to the differential  $dx$ .

Esta es llamada a veces una variable ficticia pues la respuesta no depende de ella.

**Definición.** La función  $f(x)$  se dice **integrable** según Riemann, en el intervalo  $[a,b]$ , si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x$$

existe para esa función  $f(x)$ . Al valor límite se le denomina **integral definida** (según Riemann) de la función  $f(x)$  en el intervalo  $[a,b]$  y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Demostremos que  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$  es integrable sobre el intervalo  $[0,1]$ .

Queda claro que si, en lugar de valer cero en todo el intervalo, la función dada toma un valor distinto en un punto, se tomará una función nula en el intervalo excepto en dicho punto, y por generalización en un número finito de puntos (da lo mismo uno que  $k$ ), donde puede tomar valores arbitrarios, la integral de esta función sería cero. Por tanto, tampoco varía su condición de integrable o no.

Demostremos que la función de Dirichlet no es integrable en cualquier intervalo  $[a,b]$ .

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in I \\ 1, & x \in Q \end{cases}$$

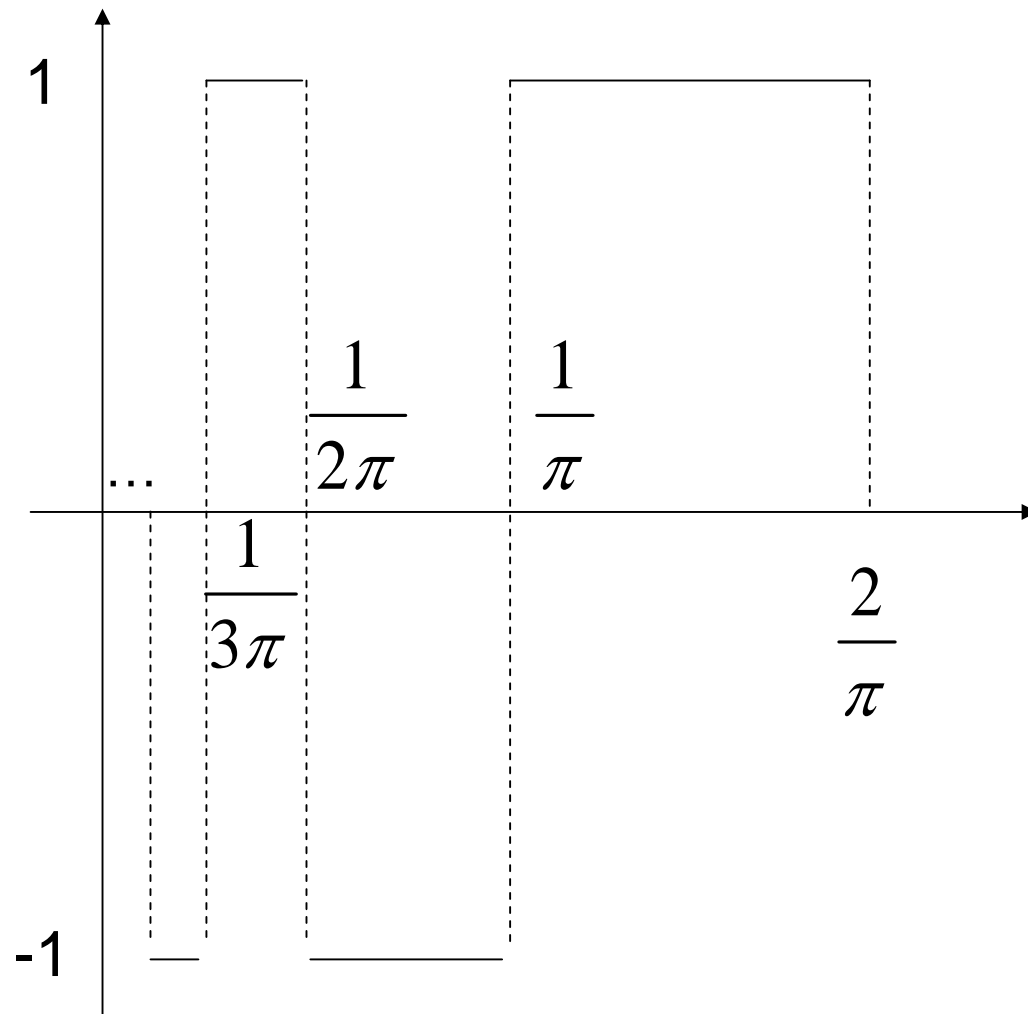
**$S_I = 0 \neq 1 = S_S$**  es decir, no tienden a un valor común.

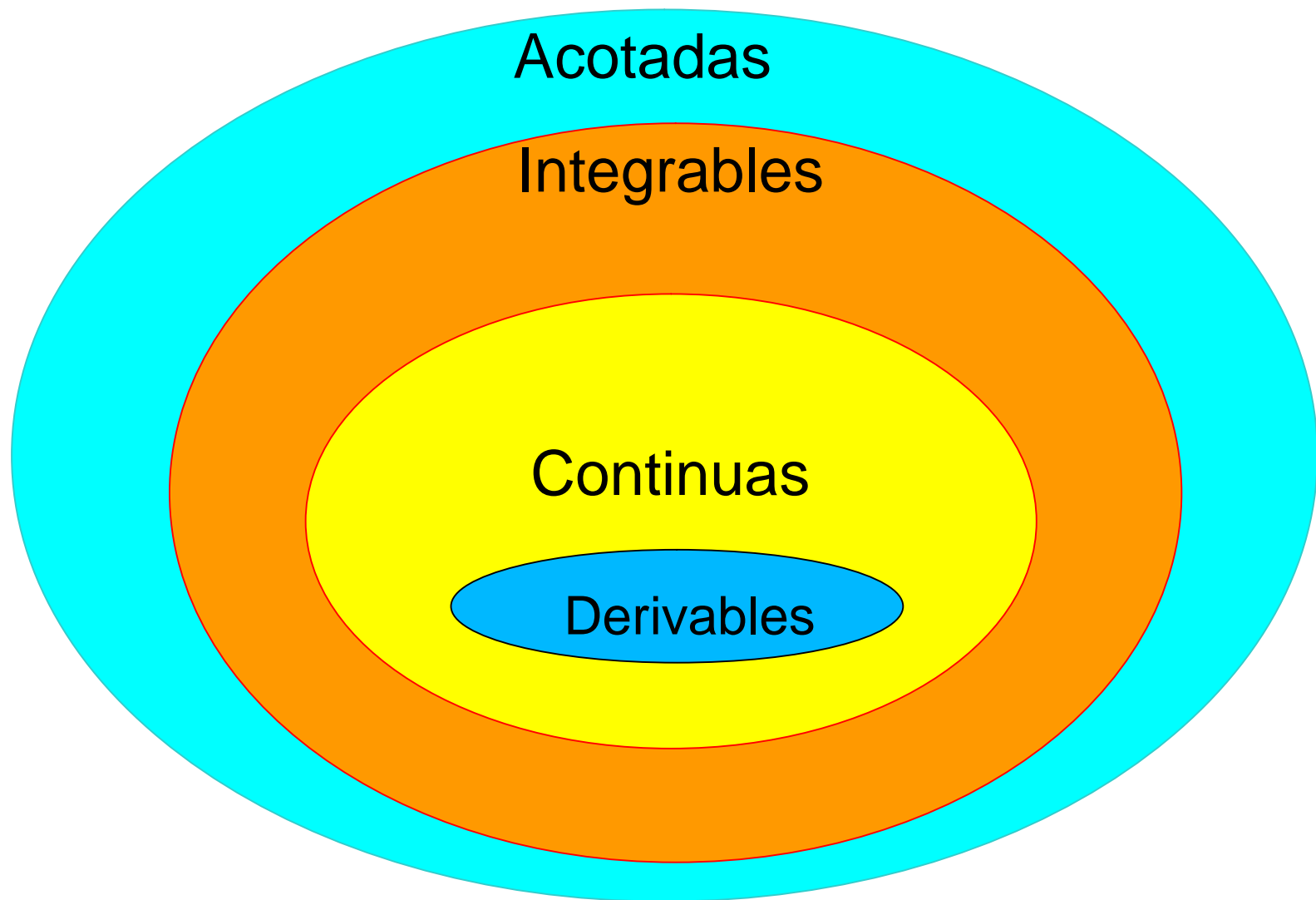
**Teorema.** Sea  $f(x)$  definida y acotada en  $[a,b]$ . Si para todo  $\varepsilon > 0$  puede encontrarse un número finito (o infinito numerable) de intervalos cuya unión contenga todas las discontinuidades de  $f(x)$  en  $[a,b]$  y la suma total de las longitudes es menor que  $\varepsilon$ , entonces  $f(x)$  es integrable sobre  $[a,b]$ .

**Corolario.** Si  $f(x)$  es acotada en  $[a,b]$  y tiene un número finito de discontinuidades en dicho intervalo, entonces  $f(x)$  es integrable sobre  $[a,b]$ .



Analicemos la integrabilidad de la función  $f(x)=\text{sgn}[\text{sen}(1/x)]$  en el intervalo  $[0, 2/\pi]$ .





$$\int_a^b f(x) dx$$

Tenemos la notación para la integración, pero necesitamos saber más sobre cómo evaluar la integral.

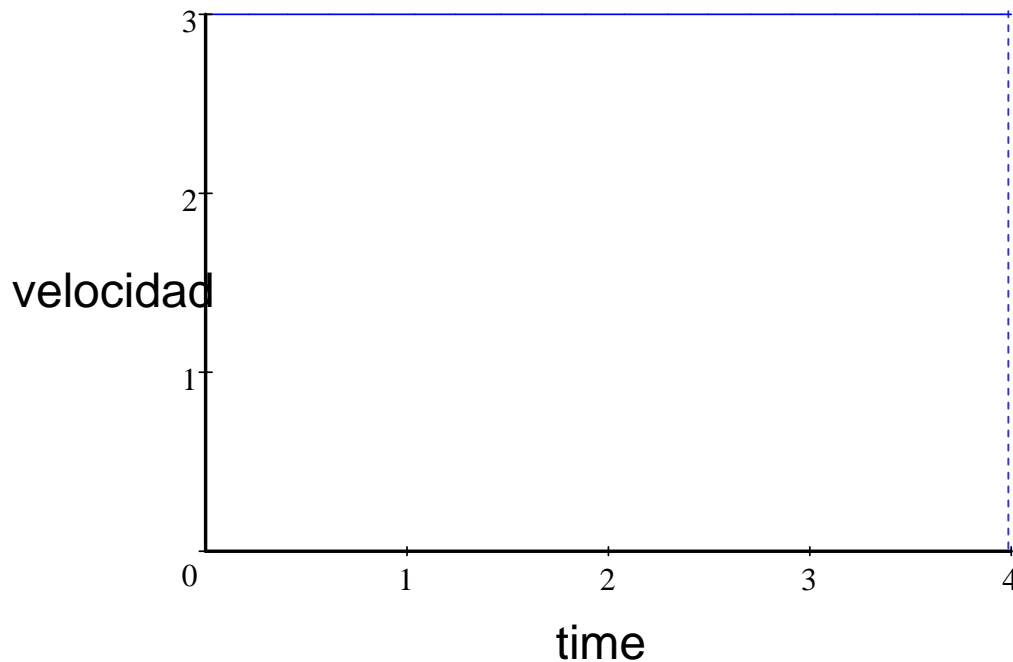
100



GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646-1716 DEUTSCHLAND

Consideremos un móvil que se desplaza siguiendo una ley determinada  $v(t)$ . ¿Cuál es el espacio recorrido?

Si la velocidad es constante, e igual a 3 mts/s, tenemos el siguiente gráfico:

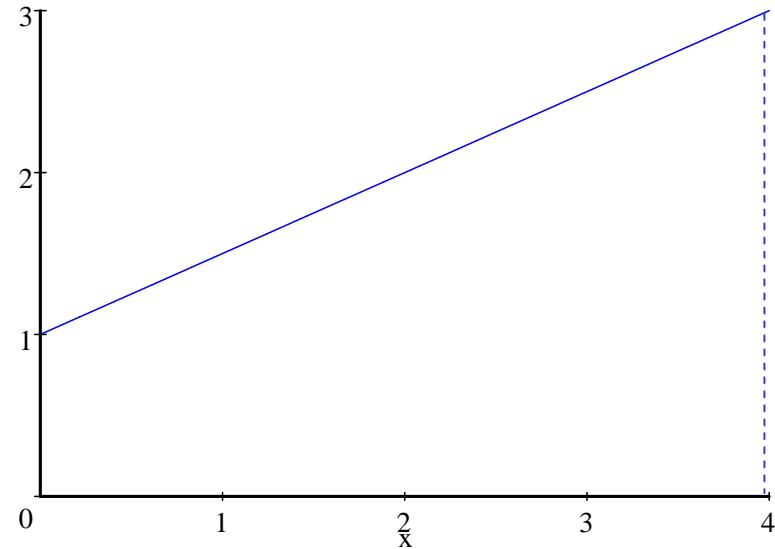


Después de 4 segundos, el móvil ha recorrido 12 mts.

Si la velocidad es variable:

$$v = \frac{1}{2}t + 1$$

Distancia:  $s = \frac{1}{4}t^2 + t$



(C=0 puesto que s=0 en t=0)

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(1+3)4 = 8$$

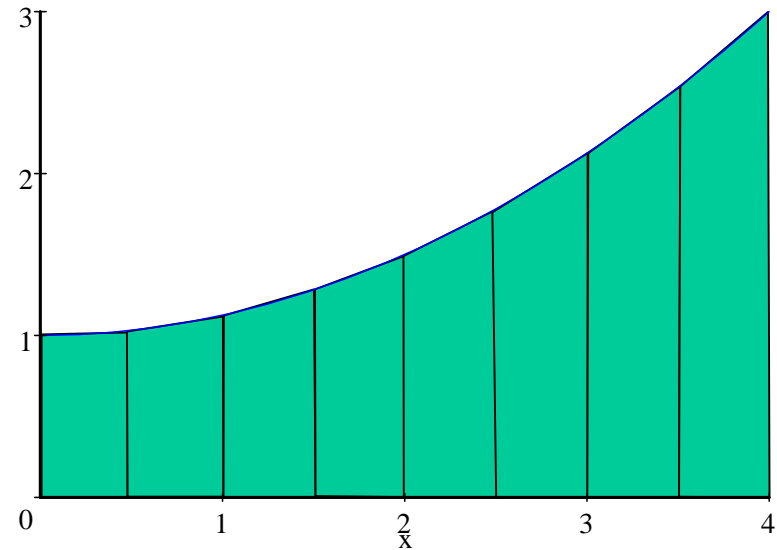
Después de 4 seg:  $s = \frac{1}{4} \cdot 16 + 4$

$$s = 8$$

La distancia sigue  
siendo el área bajo  
la curva!

Note que la figura es un trapecio.

Si es  $v = \frac{1}{8}t^2 + 1$



Podemos desarrollar el área bajo la curva en un conjunto de trapecios y cada trapecio será semejante al de la figura anterior.

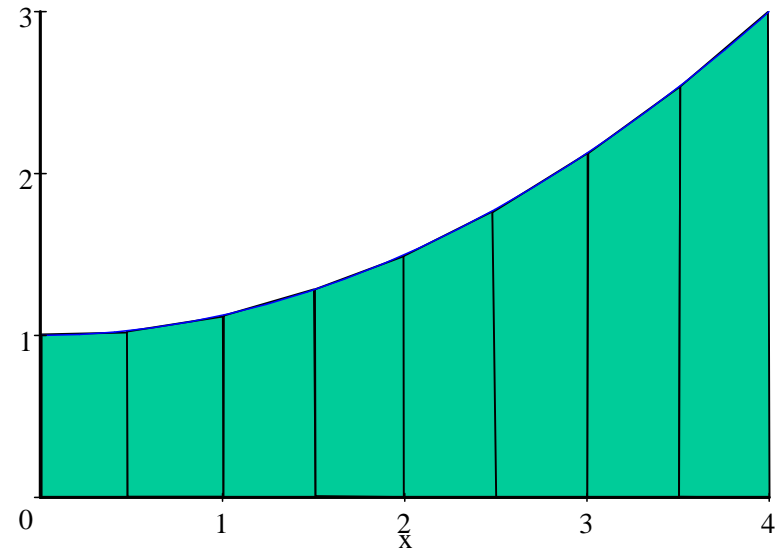
Parece razonable que la distancia sea igual al área bajo la curva.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{8}t^2 + 1$$

$$s = \frac{1}{24}t^3 + t$$

$$s = \frac{1}{24}4^3 + 4$$

$$s = 6\frac{2}{3}$$

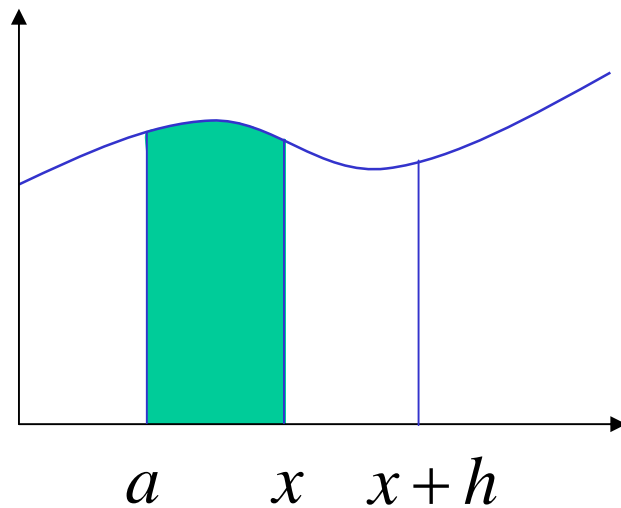


El área bajo la curva es  $A = 6\frac{2}{3}$

**Podemos usar primitivas para encontrar el área bajo la curva!**



Veamos de otra forma:



$$\underbrace{A_a(x) \quad A_x(x+h)}_{A_a(x+h)}$$

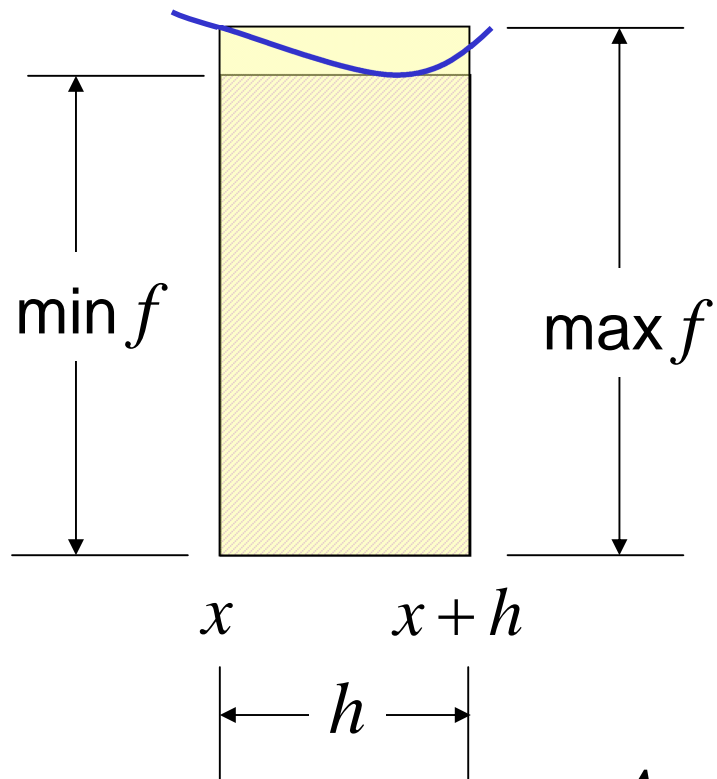
$$A_a(x+h)$$

Sea  $A_a(x) =$  el area bajo la curva desde  $a$ , a  $x$  (" $a$ " es una constante).

Entonces:

$$A_a(x) + A_x(x+h) = A_a(x+h)$$

$$A_x(x+h) = A_a(x+h) - A_a(x)$$



El área del rectángulo bajo la curva será menor que el área “real” bajo la curva.

El área del rectángulo sobre la curva será mayor que el área “real” bajo la curva.

$$A_C \leq A \leq A^C$$

$$h \cdot \min f \leq A_a(x+h) - A_a(x) \leq h \cdot \max f$$

$$\min f \leq \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq \max f$$

$$\min f \leq \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq \max f$$

Si  $h$  disminuye,  $\min f$  y  $\max f$  tienden a acercarse.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} A_a(x) = f(x)$$

$$A_a(x) = F(x) + c$$

$$A_a(a) = F(a) + c$$

$$0 = F(a) + c$$

$$-F(a) = c$$

Valor inicial

$$A_a(x) = F(x) + c$$

$$-F(a) = c$$

$$A_a(x) = F(x) - F(a)$$

El área bajo la curva de  $a$  hasta  $x$ , es igual a la primitiva evaluada en  $x$  menos la primitiva evaluada en  $a$ .

$$\text{Area} = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

$$= F(x) - F(a)$$

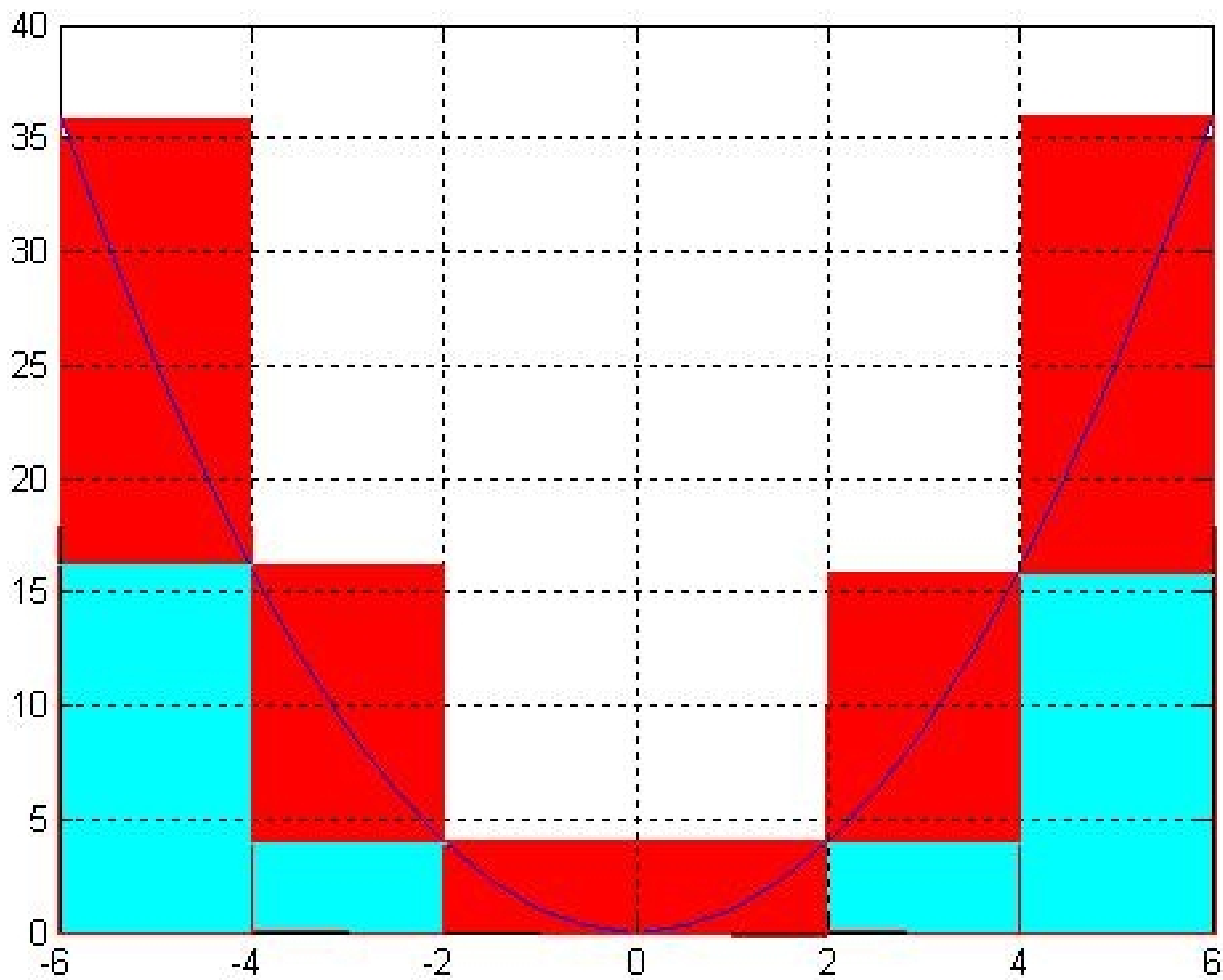
**Ejemplo.** Hallar la suma superior y la suma inferior de la función  $f(x)=x^2$  sobre  $[-6,6]$ , según:

- a) una partición regular de longitud 2,
- b) la partición  $P=\{-6,-4,-3,-1,-0.5,0.5,2,3,5,6\}$

$x_i$	-6	-4	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	36	16	4	0	4	16	36

$$SI(f, P) = 2(16 + 4 + 0 + 0 + 4 + 16) = 80$$

$$SS(f, P) = 2(36 + 16 + 4 + 4 + 16 + 36) = 224$$



$$80 \leq \int_{-6}^6 x^2 dx \leq 224$$

$$\int_{-6}^6 x^2 dx = \frac{6^3}{3} - \frac{(-6)^3}{3} = 144$$



**Este es el**

**Teorema Fundamental del Cálculo**

# Teorema Fundamental del Cálculo (parte 1)

Si  $F'(x) = f(x)$  entonces  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Si  $y'(t)=v(t)$  entonces  $\int_0^2 v(t)dt = y(2) - y(0),$

$$y(2) = y(0) + \int_0^2 v(t)dt$$

Si conocemos una primitiva, PODEMOS  
ENCONTRAR EL VALOR DE LA  
INTEGRAL DEFINIDA.

Vemos que en cualquier tiempo  $T$ ,  $y(T) = y(0) + \int_0^T v(t) dt$

$$\begin{aligned} \text{Y por tanto, } \frac{d}{dT} y(T) &= \frac{d}{dT} \left( y(0) + \int_0^T v(t) dt \right) \\ &= \frac{d}{dT} \int_0^T v(t) dt. \end{aligned}$$

Pero  $y(T)$  es la posición en el tiempo  $T$ ,  $\frac{d}{dT} y(T) = v(T)$ ,

Poniendo todo esto junto, vemos que  $\frac{d}{dT} \int_0^T v(t) dt = v(T)$ .

$$y(T) = y(0) + \int_0^T v(t) dt$$

$$\frac{d}{dT} \int_0^T v(t) dt = v(T)$$

## Teorema Fundamental del Cálculo (part 2)

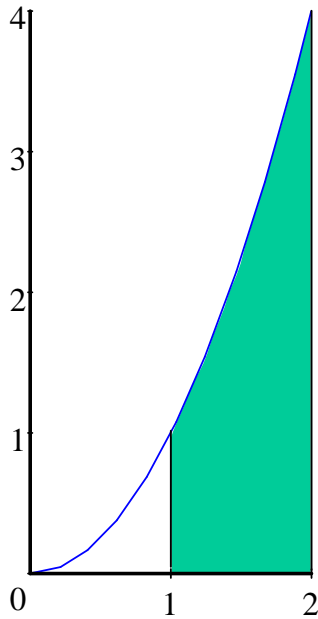
La integral definida puede ser usada para definir la primitiva de  $v$  que es igual a  $y(0)$  en  $t=0$ .

Una descripción útil de la integral definida dada por el Teorema Fundamental del Cálculo es:

- La diferencia entre los valores de una primitiva en los extremos del intervalo.
- El límite de las áreas (llamadas de Riemann).

Nos dan el mismo valor.

**Ejemplo.**  $y = x^2$



Encuentre el área bajo la curva de  $x=1$  a  $x=2$ .

$$\int_1^2 x^2 dx$$

$$\left. \frac{1}{3} x^3 \right|_1^2$$

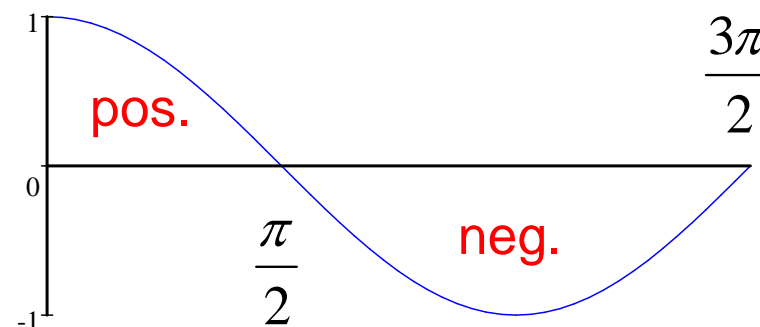
$$\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Area bajo la curva desde  $x=1$  a  $x=2$ .

## Ejemplo.

Encuentre el área entre el eje  $x$  y la curva  $y=\cos x$  de  $x=0$  a  $x=3\pi/2$ .



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$\sin x \Big|_0^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$\left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left( \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(1 - 0) - (-1 - 1) = 3$$

Si se usa valor absoluto, no es necesario encontrar las raíces de la ecuación.



Las propiedades más importantes de la integral definida son:

1.  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$  Inversión de los límites de integración, cambia el signo de la integral.

2.  $\int_a^a f(x) dx = 0$  Si los límites de integración son iguales, entonces la integral es cero.

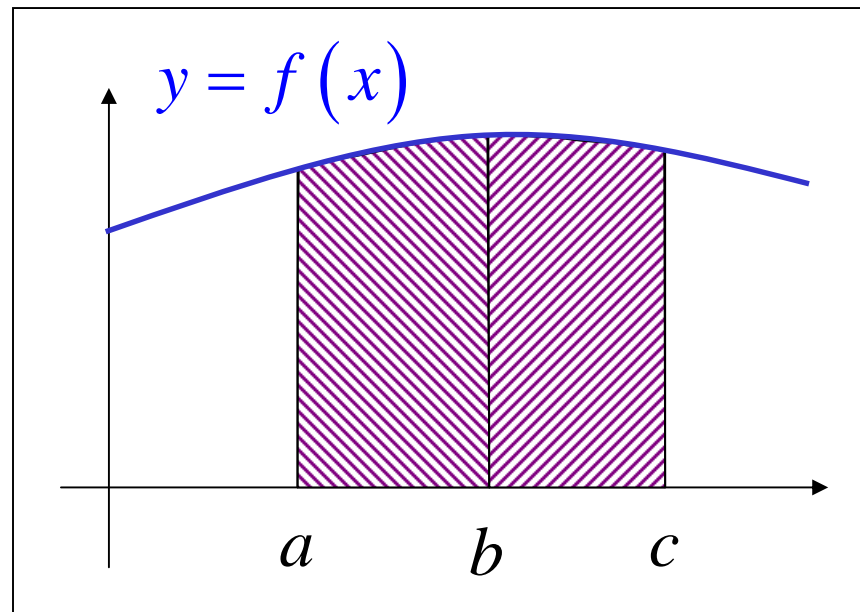
3.  $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  La constante puede ser movida fuera del signo integral.

4. 
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Las integrales pueden ser añadidas y sustraídas.

$$5. \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Los Intervalos pueden ser añadidos y sustraídos.



6. Si  $f(x)$  es integrable en  $[a,b]$  y  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  de  $[a,b]$  entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

7. Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son integrables en  $[a,b]$  y  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x$  de  $[a,b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

8. Si  $f(x)$  es integrable en  $[a,b]$ , entonces  $|f(x)|$  es integrable en  $[a,b]$  y se cumple

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$