UNIDAD V:
TEOREMA DEL VALOR MEDIO. LÍMITES INDETERMINADOS. MAC LAURIN. TAYLOR.

Teorema de los incrementos finitos (Lagrange). Teorema de Rolle. Consecuencias. Teorema de Cauchy. Límites indeterminados. Regla de L'Hopital. Formas 0/0 e ∞/∞. Generalizaciones de L'Hopital para otras indeterminaciones.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- Las indeterminaciones presentes en el cálculo de límite y los procedimientos para calcular esos límites indeterminados.

El Teorema de Rolle

Si f(x) es una función continua en [a,b] y derivable en (a,b) y f(a)=f(b) entonces existe c en (a,b) tal que f´(c)=0.

Observación 1. Notemos que todas las hipótesis son necesarias.

$$f(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x<1, \\ 0,\ x=1 \end{cases}$$

$$f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$$

No es continua en [0,1]

No es derivable en (-1,1).

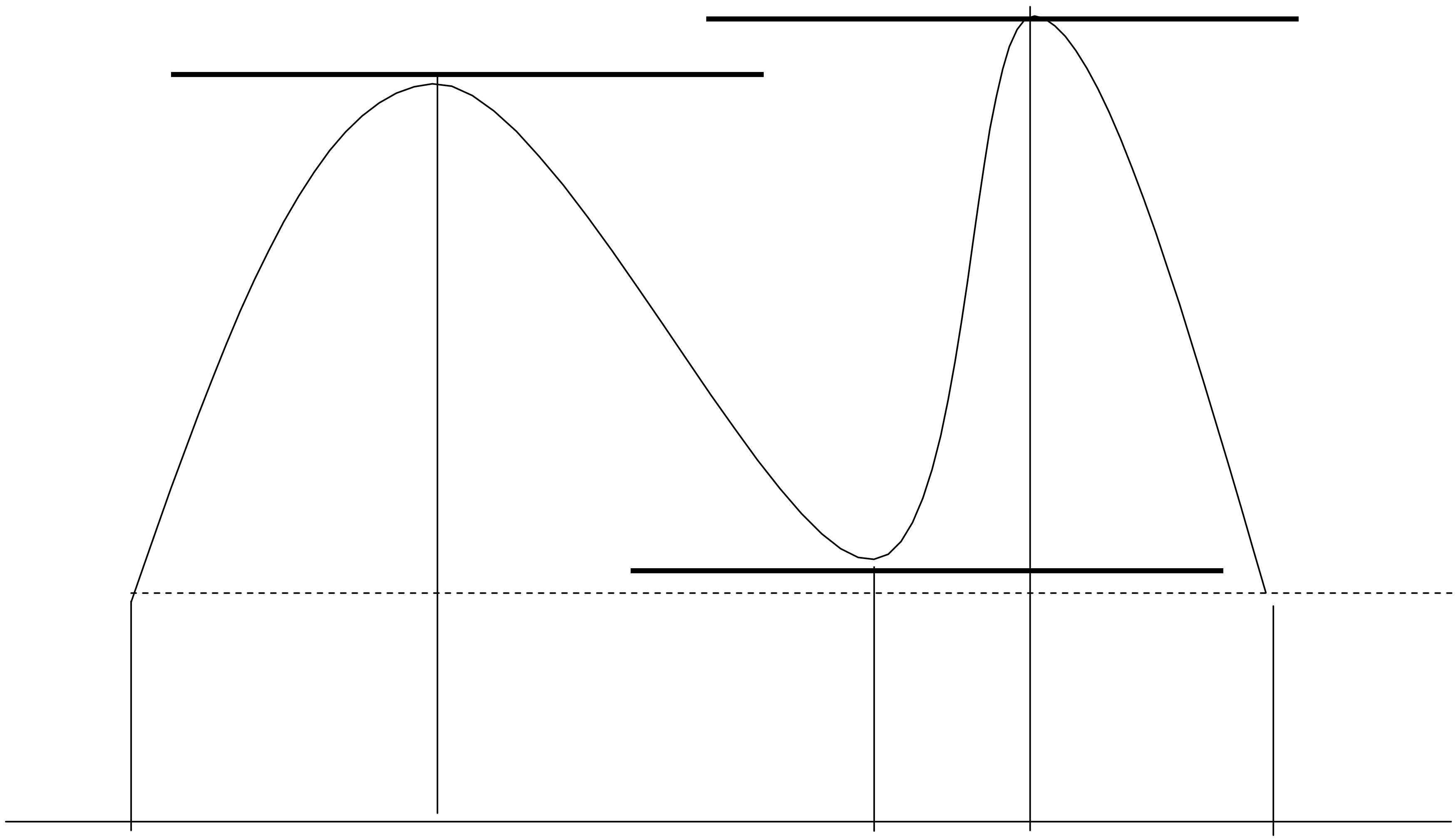
$$f(x)=x,\ x\in[0,1]$$ f(0)≠f(1)

Observación 2. Tengamos en cuenta que, en realidad, la conclusión del teorema es “por lo menos uno”.

Demostración. Como f(x) es continua en un intervalo cerrado, alcanza su valor máximo (M) y mínimo (m) sobre el intervalo. Consideremos dos casos:

a) M=m; en este caso, f(x) es constante en [a,b], por lo que aquí f’(x)=0, y se cumple el teorema.

b) $m<M$, como f(a)=f(b), al menos uno de los valores extremos se alcanza en el interior del intervalo, por el Teorema de Fermat, en dicho punto se anula derivada. Esto completa la demostración.



Observación 3. El hecho que se incumpla una (o todas) de las hipótesis, significa que no se cumpla la conclusión. Basta considerar la función f(x)=sgnx sobre [-1,1].

Observación 4. Si además de las hipótesis se cumple que f(a)=f(b)=0, este teorema se convierte en el siguiente resultado:

Corolario. Entre dos ceros de una función derivable, existe siempre un cero de su función derivada.

Observación 5. Si consideramos la función F(x)=f(x)-f(a) se nota que este corolario no solo es consecuencia del Teorema de Rolle, sino que es equivalente a el.

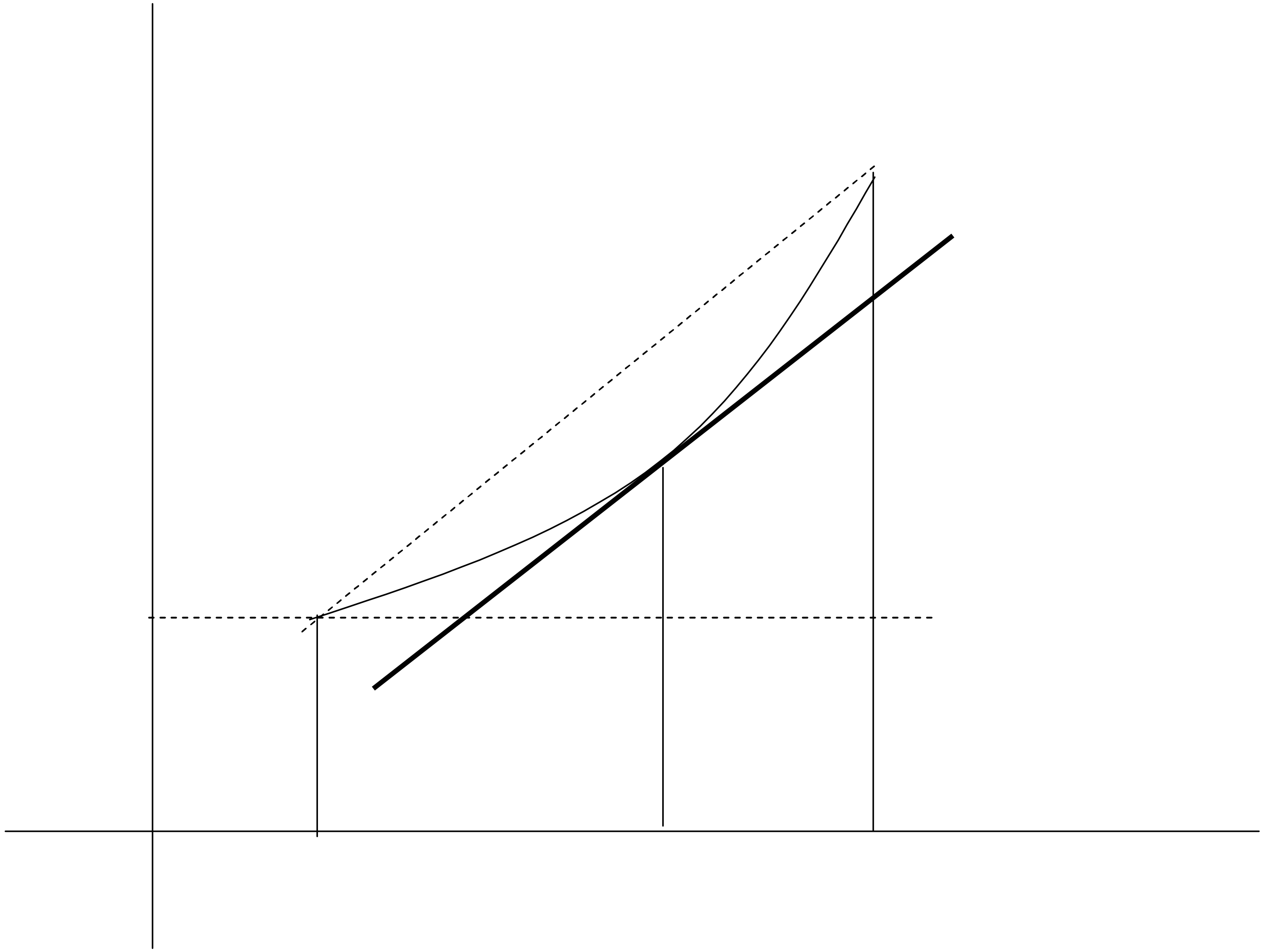
¿Puede expresarse el valor de la derivada en algún punto con otro valor distinto de cero?

Teorema de los Incrementos Finitos, del Valor Medio o de Lagrange

Si f(x) es una función continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe c en (a,b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación 6. Las observaciones realizadas sobre la necesidad de las hipótesis en el caso del Teorema de Rolle, siguen siendo válidas, así como el hecho de la existencia de "al menos un punto c".

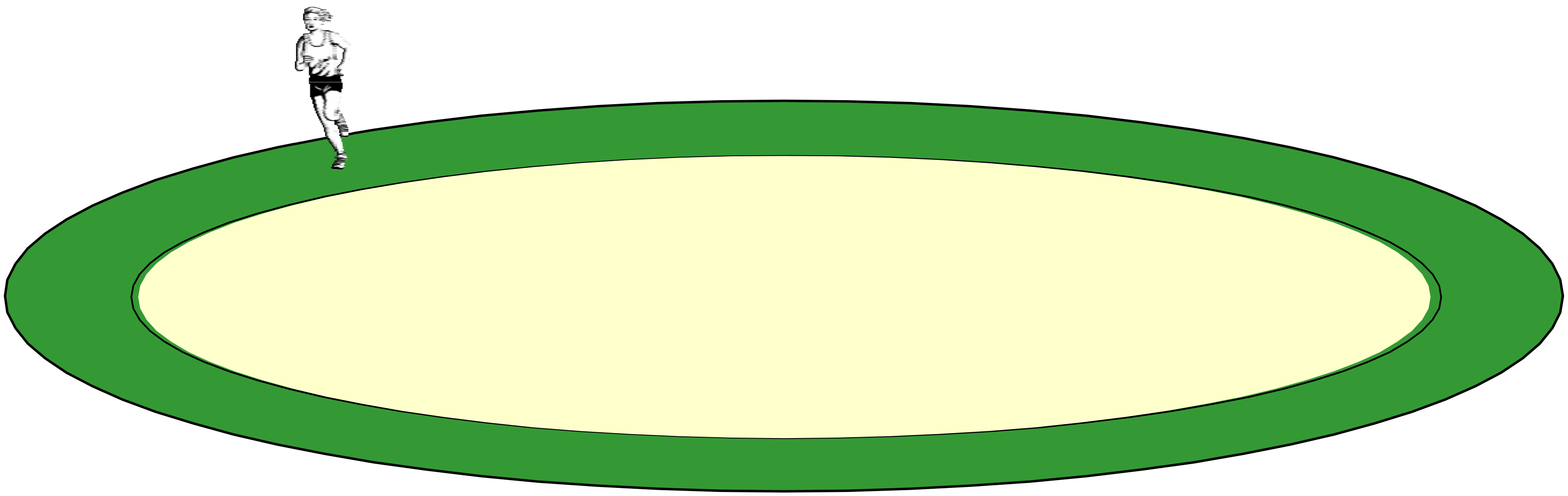


APLICACIONES

Teorema. Sea f(x) derivable en el intervalo (a,b) y talque para todo x de (a,b) se tiene que f'(x)=0 entonces, f(x) es constante en este intervalo.

Corolario. Si dos funciones son derivables en todos los puntos de un intervalo (a,b) y para todo x de este intervalo f'(x)=g'(x), entonces f(x)=g(x)+c, donde c es una constante.

Un corredor recorre una pista de 6 km en 45 minutos. En algún momento del recorrido, el corredor debió alcanzar la velocidad de 8 km/h.



Sea s(t) la distancia recorrida a partir de la salida y sea T=3/4 h el tiempo de recorrido. Como el corredor no se sale de la pista, ni frena bruscamente, s(t) es una función continua en [0,T] y diferenciable en (0,T). Como s(0)=0, s(T)=6 km, existe t* tal que

$$s'(t^{*}) = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = \frac{6 - 0}{3/4 - 0} = 8\ km/h$$

Teorema de Cauchy

Sean f(x) y g(x) funciones continuas en el intervalo [a,b] y derivables en (a,b). Si g'(x)$\neq$0, para todo x de (a,b), entonces existe c en (a,b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observación 7. Si g(x)=x este teorema se reduce al Teorema de Lagrange, por lo que se le denomina a veces, *“Teorema generalizado del Valor Medio”*.

¿Qué hacemos con un límite indeterminado?

Consideremos: $\dfrac{\infty}{\infty}$

Veamos los siguientes ejemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1000} = \infty \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1000}{x} = 0$$

Tenemos un conflicto en ciernes aquí. El límite dependerá de la razón en la cual el numerador y denominador tienden a infinito (o cero); cuando esta razón es del mismo orden, decimos que estamos en presencia de una indeterminación.

Regla de L’Hôpital

La actual Regla de L’Hôpital fue desarrollada por su profesor Johann Bernoulli. L’Hôpital le pagó a este último por clases particulares y después publicó el primer libro de Calculus basado en estas lecciones.

Guillaume De l’Hôpital
1661 - 1704

Johann Bernoulli
1667 - 1748

Consideremos: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Si evaluamos por sustitución obtenemos: $\frac{0}{0}$

Esta división no puede ser calculada y es un claro ejemplo de una forma **indeterminada**.

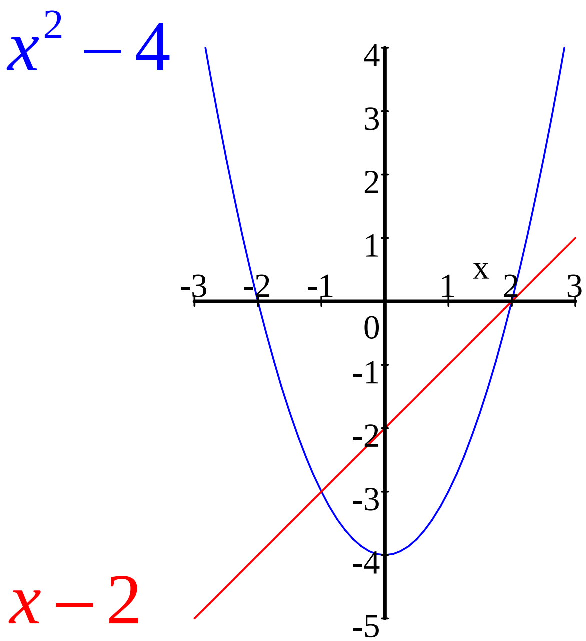
En este caso, podemos calcular este límite, por medio de operaciones algebraicas:

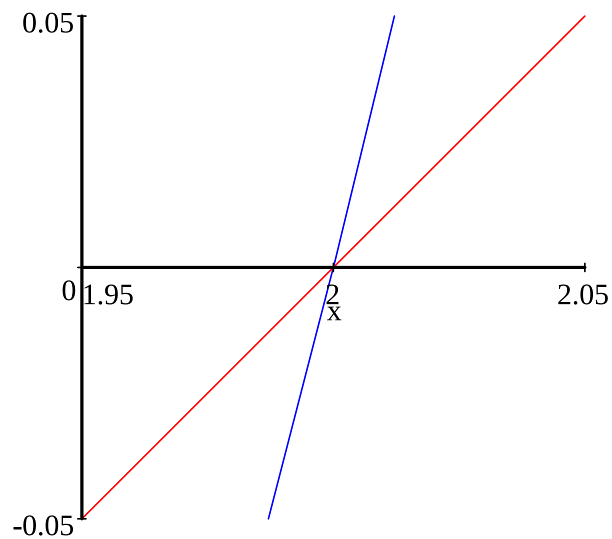
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

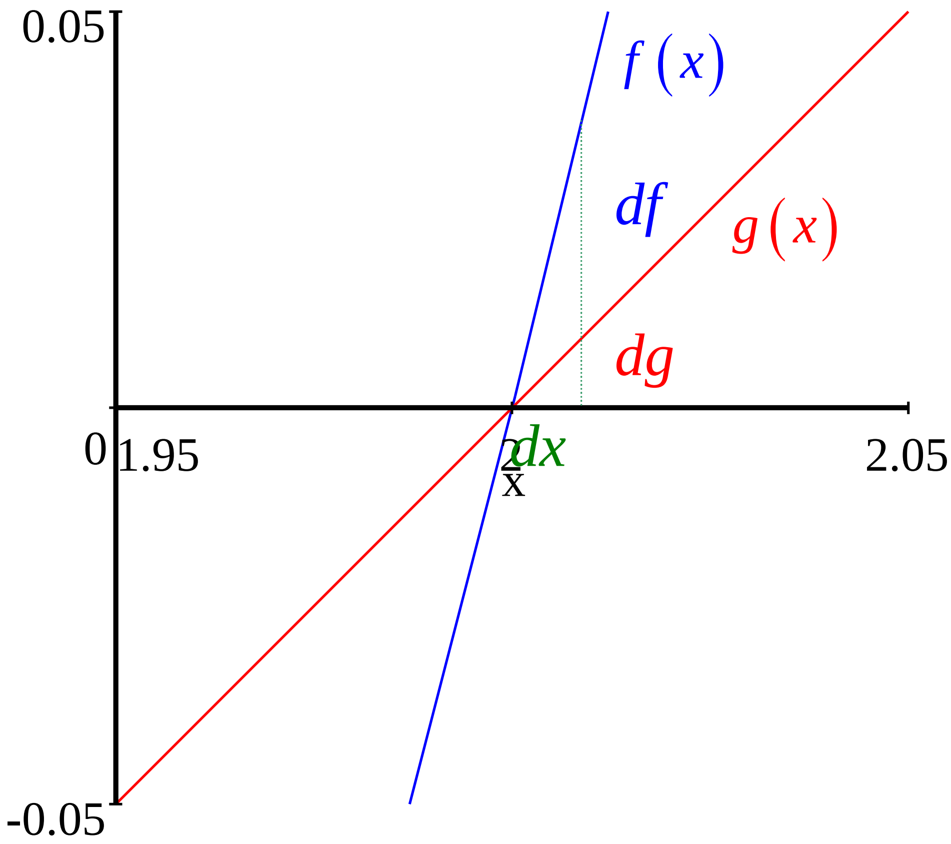
El límite es la razón del numerator sobre el denominator cuando x se aproxima a 2.

Si el zoom lo permitiera, las curvas aparecerían como líneas rectas.





$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$



Si $\quad x \to 2$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ Se convierte:

$$\frac{df}{dg} = \frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{dg}{dx}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)}{\frac{d}{dx}\left(x-2\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{1} = 4$$

Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Podemos confirmar la Regla de L'Hôpital trabajando "hacia atrás" y usando la definición de derivada (Teorema de Cauchy):

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \qquad = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} \quad = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} = 0$$

Si no está iindeterminado, entonces **PARE¡¡¡¡**

Si continuamos trabajando con la Regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Lo cual es falso, y Ud. estará muy mal si lo hace¡¡¡¡¡¡¡¡

Por otra parte, Ud puede aplicar L'Hôpital tantas veces como sea necesario, mientras la fracción es indeterminada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} \longleftarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}$$

(Reescribiéndola en forma exponencial)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{2x} \longleftarrow \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{2} \longleftarrow \text{no } \frac{0}{0}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}$$

Esta es la lista standard de formas indeterminadas:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot 0$$

$$\infty - \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{0} \qquad \infty^{0}$$

Existen otras formas indeterminadas usando números complejos, pero escapan al propósito de nuestro curso.

Analícemos otras expresiones que parecen indeterminadas:

Consideremos: 0^{∞}

Tomemos los siguientes casos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(.1\right)^{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(-.1\right)^{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}x^{1000}=0$$

El límite es cero de cualquier forma, así esta expresión no está indeterminada.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$ ⟵ Este se convierte $\infty\cdot 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$ ⟵ Tenemos así $\frac{0}{0}$

Ya sabemos que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$

Pero si usamos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$ ⟵ Es una indeterminación $\infty - \infty$

Podemos encontrar una factor común y sustraer:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$$ ⟵ Se reduce a: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}\right)$$ ⟵ Aplicando L'Hôpital de nuevo.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\right)$$ ⟵ La fracción se clarificó $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln x}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1+1+\ln x}\right)$$ ← De nuevo L’Hôpital

$$\frac{1}{2}$$

Formas indeterminadas: 1^{∞} 0^{0} ∞^{0}

Evaluar estas formas requiere un cierto trabajo matemático para convertirla enn una fracción.

$$\ln u^{n} = n \ln u = \frac{\ln u}{\frac{1}{n}}$$

Podemos escribir la expresión como una fracción, la cual nos permite usar la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to a} f(x) = e^{\ln\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)} = e^{\lim_{x \to a} \ln\left(f(x)\right)}$$

La continuidad nos permite hacer esto.

Podemos tomar logaritmo y exponencial al mismo tiempo.