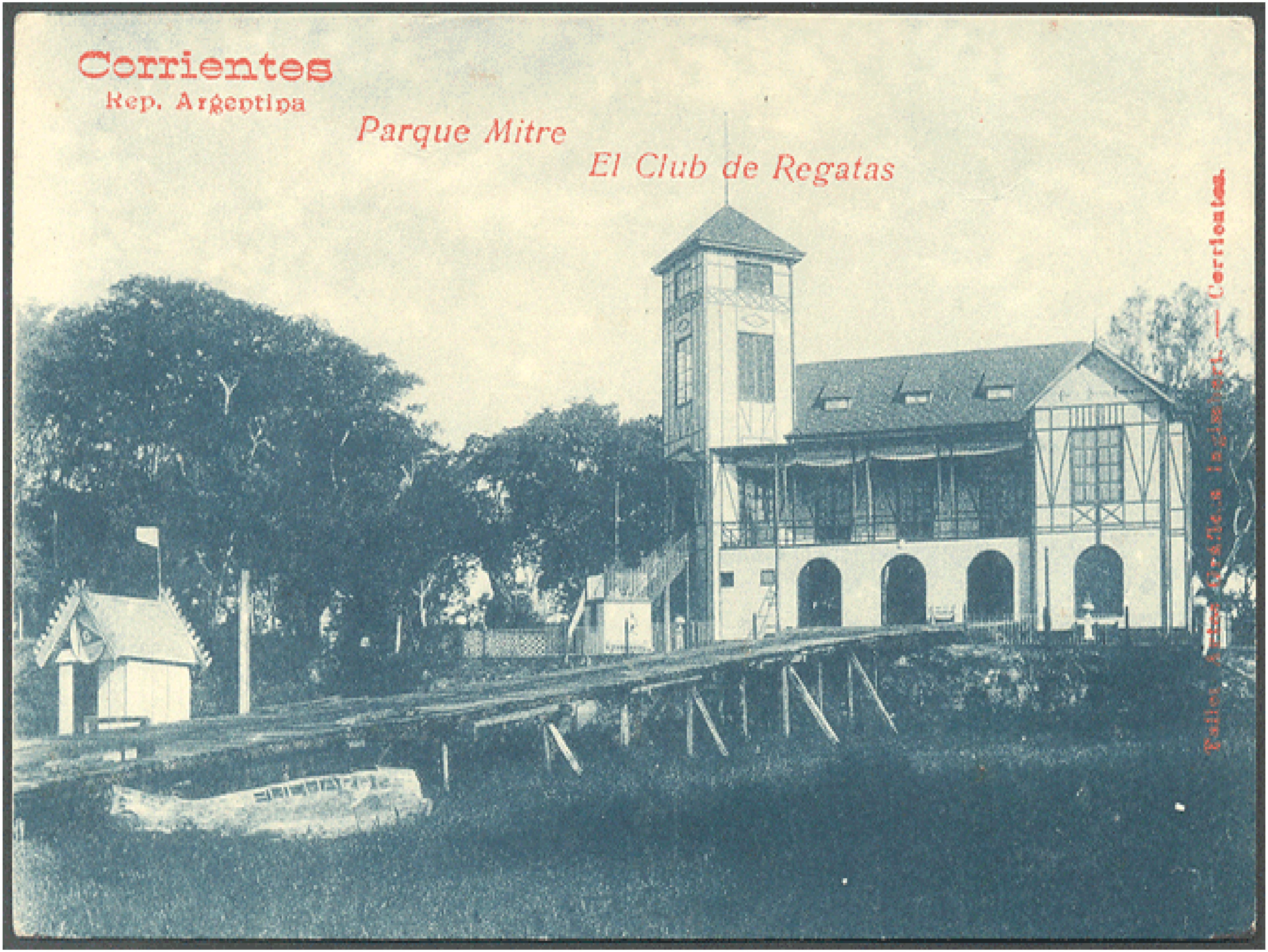
UNIDAD III: LA DERIVADA.

Derivada de las funciones inversas.
Derivada de las funciones trascendentes.
Derivada de las funciones compuestas.
Regla de la cadena.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

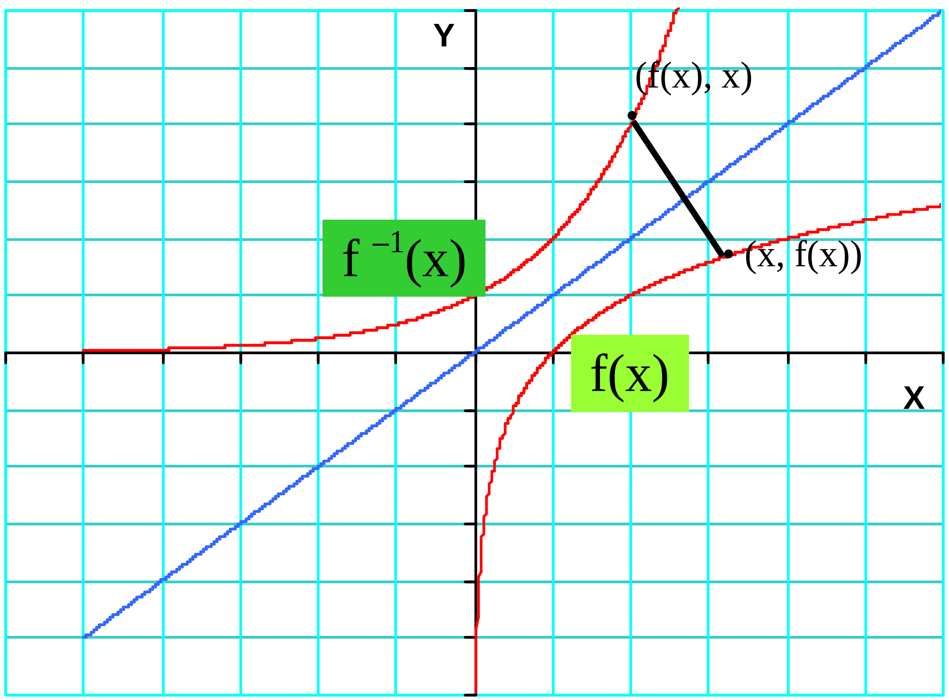
• La derivada de las funciones trascendentes.

• La derivada de funciones compuestas.


Corrientes
Rep. Argentina
Parque Mitre
El Club de Regatas

Derivada de la función inversa

Sea y=f(x) definida, continua y estrictamente creciente (o decreciente) en una vecindad del punto x_0, supongamos, además, que $f'(x_0)\neq 0$. Entonces, la función inversa $x=f^{-1}(y)$ tiene derivada en el punto $y_0=f'(x_0)$ y se calcula mediante la fórmula:



$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0=f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$g(x) = \operatorname{sen} x \qquad g'(x) = \cos x$$

$$h(x) = \tan x \qquad h'(x) = \sec^2 x$$

$$z(x) = \sec x \qquad z'(x) = \sec x . \tan x$$

$$G(x) = \operatorname{cotan} x \qquad G'(x) = -\csc^2 x$$

$$F(x) = \csc x \qquad F'(x) = -\csc x . \operatorname{cotan} x$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_derivatives

Ahora tenemos una buena lista de recursos para encontrar la derivada de funciones simples.

Por supuesto, muchas de las funciones que nos encontramos, no son simples. Así que es necesario combinar las reglas de derivación para obtener la derivada de funciones más complicadas.

Consideremos la siguiente función compuesta:

$$y = 6x - 10$$

$$y = 2(3x - 5)$$

Si u=3x-5

Entonces y=2u

$$y = 6x - 10 \qquad y = 2u \qquad u = 3x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \qquad \frac{dy}{du} = 2 \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Y esta otra:

$$y = 5u - 2$$

Donde u=3t

Entonces y=5(3t)-2

$$y = 5(3t) - 2$$

$$y = 15t - 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 15$$

$$y = 5u - 2$$

$$\frac{dy}{du} = 5$$

$$u = 3t$$

$$\frac{du}{dt} = 3$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

Y una más:

$$y = 9x^2 + 6x + 1$$

$$y = (3x+1)^2$$

Si u=3x+1

Entonces y=u²

$$y = 9x^2 + 6x + 1 \qquad y = u^2 \qquad u = 3x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 18x + 6 \qquad \frac{dy}{du} = 2u \qquad \frac{du}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{du} = 2(3x+1)$$

$$\frac{dy}{du} = 6x + 2$$

$$18x + 6 = (6x+2) \cdot 3$$

Este patrón es llamado la **Regla de la Cadena**.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Regla de la Cadena

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Sea $x=\varphi(t)$ derivable en un punto t_0 y la función $y=f(x)$ derivable en el punto correspondiente $x_0=\varphi(t_0)$. Entonces, la función compuesta $y=f[\varphi(t)]$ es derivable en el punto t_0 y, además, su derivada se expresa mediante

$$\{f[\varphi(t)]\}'_{t=t_0} = f'(x_0).\varphi'(t_0) = f'[\varphi'(t_0)].\varphi'(t_0)$$

Demostración. Consideremos el caso general x=φ(t)

$$\left[f(\varphi(t))\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{\varphi(t+h)-\varphi(t)} \cdot \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{\varphi(t+h)-\varphi(t)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} =$$

$$= \lim_{\varphi(x+h)\to\varphi(x)} \frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{\varphi(t+h)-\varphi(t)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} =$$

$$= f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

También podemos proceder de esta forma:

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\sin\left(x^2-4\right)$$

$$y=\sin\left(x^2-4\right)$$

$$y=\sin u \qquad u=x^2-4$$

$$\frac{dy}{du}=\cos u \qquad \frac{du}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(x^2-4\right)\cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(2^2-4\right)\cdot 2\cdot 2$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(0\right)\cdot 4$$

$$\frac{dy}{dx}=4$$

Y la forma más rápida de hallar la derivada es:

$$y = \sin\left(x^2 - 4\right)$$

$$y' = \cos\left(x^2 - 4\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2 - 4\right)$$ Derivar la función exterior...

$$y' = \cos\left(x^2 - 4\right) \cdot 2x$$ …y después la función interior.

En x=2, y’=4

Otro ejemplo:

$$\frac{d}{dx}\cos^2(3x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos(3x)\right]^2$$

$$\underbrace{2\left[\cos(3x)\right]}_{\text{Derivada de la Función exterior}}\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}\cos(3x)}_{\text{Derivada de la función interior}}$$

Fíjense que es necesario usar la Regla de la Cadena de nuevo!

Otro ejemplo:

$$\frac{d}{dx}\cos^2(3x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos(3x)\right]^2$$

$$2\left[\cos(3x)\right]\cdot\frac{d}{dx}\cos(3x)$$

$$2\cos(3x)\cdot -\sin(3x)\cdot\frac{d}{dx}(3x)$$

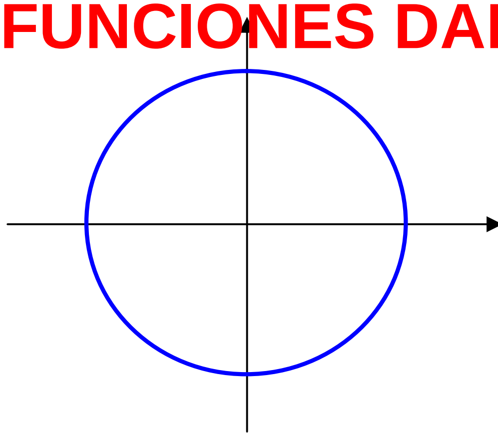
La Regla de la Cadena puede ser usada más de una vez.

$$-2\cos(3x)\cdot\sin(3x)\cdot 3$$

(esto es la “cadena” en la Regla de la Cadena!)

$$-6\cos(3x)\sin(3x)$$

DERIVADA DE FUNCIONES DADAS IMPLÍCITAMENTE



$$x^2 + y^2 = 1$$

Esta no es una función, pero en ocasiones es necesario encontrar su pendiente en un punto dado.

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1$$

Derivamos en ambos miembros.

Note que usamos la Regla de la Cadena.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$2y = x^2 + \sin y$$ Esto no puede ser resuelto para *y*.

$$\frac{d}{dx}2y = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}\sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2-\cos y}$$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2-\cos y) = 2x$$

Esta técnica es llamada <u>derivación implícita</u>

1 Derivando ambos miembros.

2 Obteniendo $\frac{dy}{dx}$.

Obtener la ecuación de la tangente y la normal a la curva

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \text{en } (-1, 2) \; .$$

Necesitamos la pendiente. Como no podemos resolver para y, usaremos la derivación implícita $\dfrac{dy}{dx}$.

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$2x - \left[x\frac{dy}{dx} + y \right] + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}}$$

$$m = \frac{2 - 2(-1)}{2 \cdot 2 - (-1)} = \frac{2 + 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}$$

Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $x^2 - xy + y^2 = 7$ en $(-1, 2)$.

$m = \frac{4}{5}$

tangente

$$y - 2 = \frac{4}{5}(x+1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}}$$

normal

$$y - 2 = -\frac{5}{4}(x+1)$$

$$y - 2 = -\frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$\boxed{y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}}$$

Derivadas de Orden Superior

Encontrar $\frac{d^2 y}{dx^2}$ si $2x^3 - 3y^2 = 7$

$$2x^3 - 3y^2 = 7$$

$$6x^2 - 6y\,y' = 0$$

$$-6y\,y' = -6x^2$$

$$y' = \frac{-6x^2}{-6y}$$

$$y' = \frac{x^2}{y}$$

$$y'' = \frac{y \cdot 2x - x^2 y'}{y^2}$$

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} y'$$

Sustituyendo y'
en la ecuación.

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2}{y}$$

$$\boxed{y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}}$$

El error más frecuente es olvidarse de usar la Regla de la Cadena.

Todo problema de derivada puede ser considerado como un problema de la Regla de la Cadena:

$$\frac{d}{dx}x^2 = \underbrace{2x}_{\text{Derivada de la función exterior}}\underbrace{\frac{d}{dx}x}_{\text{Derivada de la función interior}} = 2x\cdot 1 = 2x$$

La derivada de x es uno.


No olviden usar la Regla de la Cadena!
Gracias!