ÁLGEBRA I: PRÁCTICO 5
Números naturales

MANEJO DE SUMATORIAS

Concepto

1. Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria.

   (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$.
   (b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 1024$.
   (c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \ldots + (-144)$.
   (d) $1 + 9 + 25 + 49 + \ldots + 441$.
   (e) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)$.
   (f) $n + 2n + 3n + \ldots + n^2$.

2. Reescribir cada uno de los siguientes productos usando el símbolo de productoria.

   (a) $5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$.
   (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \ldots \cdot 1024$.
   (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \ldots \cdot n^2$.

3. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} 2\,(i-5)$.
   (b) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i\,(i+1)}$.
   (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$.

4. Calcular

   (a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$.
   (b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$.
   (c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k\,(k+4)}$.
   (d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$.

Propiedades de las sumatorias

(e) Probar por inducción las siguientes propiedades de las sumatorias.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}.$

INDUCCIÓN

Conjuntos inductivos

6. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos X son inductivos, justificando su respuesta.

(a) $X=\mathbb{N}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$

(b) $X\subset\mathbb{N}$, $X\neq\mathbb{N}$ y X infinito.

(c) $X\subset\mathbb{N}$, $X\neq\mathbb{N}$, X infinito y $1\in X$.

(d) $X=\{1\}\cup\{2\}\cup\{x\in\mathbb{R}:x\geq 3\}.$

Comprensión del procedimiento

7. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n\in\mathbb{N}$. Intentar, no obstante, demostrarlas por inducción e indicar cuál de los pasos del principio de inducción falla.

(a) $n=n^2.$

(b) $3^n=3^{n+2}.$

Inducción con sumatorias y productorias

8. Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n\in\mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$

(c) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}a^r=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, con $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0,1$.

(d) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(2l-1)(2l+1)}=\frac{n}{2n+1}.$

(e) $\displaystyle\sum_{v=1}^{n}v\cdot v!=(n+1)!-1.$

(f) $\displaystyle\prod_{w=1}^{m} \frac{w+1}{w} = m+1.$

Inducción con divisibilidad

9. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

   (a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $2 \cdot 5^n + 1$ es divisible por 4 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

   (d) $3^n + 1$ es divisible por n cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Inducción con desigualdades

10. Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n.

   (a) $2^n > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $2n - 1 \leq n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $n^2 \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 3$.

   (d) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n\,(n-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (f) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{2^k} \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (g) $\displaystyle\sum_{r=1}^{2^n} \frac{1}{2r-1} > \frac{n+3}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (h) $n! \geq \dfrac{3^{n-1}}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (i) $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inducción con conjuntos

11. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de un conjunto universal $\mathcal{U}$. Probar por inducción:

   (a) $(A_1 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup \ldots \cup A_n^c$.

   (b) $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$.

RECURRENCIA

Comprender el concepto

12. Para cada una de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia, escribir explícitamente sus primeros 10 términos.

   (a) $a_1 = \pi$, $a_n = 3 + a_{n-1}$, con $n \geq 2$.

   (b) $b_0 = 0$, $b_k = 4b_{k-1}$, con $k \geq 1$.

Demostrar términos generales usando inducción

13. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $a_n = 2^n + 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 2nb_n + 2^{n+1}n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n = 2^n n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = c_n + n\,(3n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar que $c_n = n^2\,(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demostrar términos generales usando la variante de inducción</u>

16. Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Probar que $u_n = 2^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>POTENCIACIÓN</u>

17. Sea $n \in \mathbb{N}$, calcular:
    (a) $2^{n+1} - 2^n$.
    (b) $\left(2^2\right)^n + \left(2^n\right)^2$.
    (c) $\left(2^n + 1\right)^2$.
    (d) $2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}$.

18. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
    (a) $\left(2^{2^n}\right)^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$.
    (b) $2^{2^n} \cdot 2^{2^n} = 2^{2^{n+1}}$.
    (c) $2^{2^{nk}} = \left(2^{2^n}\right)^k$.

19. Un subconjunto no vacío T de $\mathbb{R}$ se dice *aditivo* (respectivamente *multiplicativo*) si $x, y \in T$ implica que $x + y \in T$ (respectivamente $xy \in T$). Identifica cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son aditivos y cuáles multiplicativos.
    (a) $T = \{1\}$.
    (b) $T = \{2^n : n \in \mathbb{N} \text{ o } n = 0\}$.
    (c) $T = \left\{\dfrac{2^n}{2^m} : n, m \in \mathbb{N}, n \geq m\right\}$.

<u>COMBINATORIA</u>

20. (a) ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son múltiplos de 5?
    (b) ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son múltiplos de 2?

(c) ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 2 ni de 5?

21. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista, ¿cuántas formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

22. ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5? ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

23. Un estudiante puede elegir qué cursar entre 5 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar, incluyendo como posibilidad no cursar ninguna materia? ¿Y si tiene que cursar al menos dos materias?

24. De un grupo de 5 hombres y 4 mujeres se desean formar comités de 3 personas.

   (a) ¿Cuántos posibles comités pueden formarse?

   (b) ¿Cuántos posibles comités pueden formarse pidiendo que en cada comité figure una mujer por lo menos?

25. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea F el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

   (a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto F?

   (b) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in F : 10 \in \mathrm{Im}\,(f)\}$?

   (c) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in F : f\,(1) \in \{2, 4, 6\}\}$?

   (d) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$? ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto? ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto? ¿Y si se pide que 1 o 2 pertenezcan al subconjunto pero no simultáneamente los dos?

26. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

27. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras “elementos” y “combinatorio”?

28. Supongamos que se tienen 8 CDs distintos de Rock, 7 CDs distintos de Música Clásica y 5 CDs distintos de Cuarteto.

   (a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?

   (b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CDs, uno de cada tipo?

   (c) Un sonidista en una fiesta de casamiento planea poner 3 CDs, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

29. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse ...

   (a) 8 personas en una mesa circular?

   (b) 6 mujeres y 6 hombres en una mesa circular si nunca deben quedar dos hombres juntos?

   (c) 7 mujeres y 10 hombres en una mesa circular si nunca deben quedar dos hombres juntos?

30. Simplificar las expresiones siguientes ($n \in \mathbb{N}$)

   (a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$, si $n \geq 2$.

   (b) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$.

   (c) $\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$, si $n \geq 2$.

(d) $\dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$, si $n \geq 2$.

(e) $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!}$.

31. Probar que $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.

32. Calcular el valor de n siempre que sea posible:

    (a) $3\binom{n}{4} = 5\binom{n-1}{5}$.

    (b) $4\binom{n+2}{2} - \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = 56$.

    (c) $7 \cdot V_{n-1,2} = 6\binom{n}{3}$.

33. Hallar si existe:

    (a) el coeficiente de x^{32} en $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$.

    (b) el término de grado 7 en $\left(x^{12} + x^3\right)^7$.

BUENA ORDENACIÓN

34. Recordemos que todo subconjunto L de $\mathbb{R}$ se dice *bien ordenado (BO)* si todo subconjunto no vacío de L posee primer elemento.

    (a) Probar que todo subconjunto de un conjunto BO es BO.

    (b) Sea $K = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, ¿es K BO?

    (c) Sea $L = K \cup \{0\}$, ¿es L BO?

35. Sea K un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Analizar la existencia de máximo y mínimo en los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    (a) $\left\{1 - \dfrac{1}{n} : n \in K\right\}$.

    (b) $\left\{n^2 - 1 : n \in K\right\}$.

    (c) $\{2n + 3 : n \in K\}$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

36. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes.

    (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$.

    (b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$.

37. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos X son inductivos, justificando su respuesta.

(a) $X \subset \mathbb{N}$, $X = \{1\} \cup \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $X = \{x - 1 \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}_{>-3} \vee x \text{ es múltiplo de } 5\}$.

38. Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Intentar, no obstante, demostrarlas por inducción e indicar cuál de los pasos del principio de inducción falla.

    (a) $n = n + 1$.

    (b) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

39. Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (a) $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} s2^{s-1} = 1 + (n-1)\,2^n$.

    (b) $\displaystyle\sum_{u=1}^{n} u^2 2^u = 2^{n+1}\left(n^2 - 2n + 3\right) - 6$.

40. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

    (a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

    (b) $10^{2n} - 1$ es divisible por 11 cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

41. Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n.

    (a) $3^n \geq 1 + 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) $n^3 \leq 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > 3$.

42. Sea $n \in \mathbb{N}$, calcular:

    (a) $\left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right)$.

    (b) $3^{n+1} - 9$.

43. Identificar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son aditivos y cuáles multiplicativos.

    (a) $T = \{0\}$.

    (b) $T = \{2^n 2^m : n, m \in \mathbb{N}\}$.

    (c) $T = \left\{\dfrac{1}{2^m} : m \in \mathbb{N}\right\}$.

44. ¿Cuántos equipos de fútbol se pueden formar con 18 personas?

45. ¿Cuántas líneas quedan determinadas en el plano por 10 puntos no alineados de a 3?

46. Con los dígitos 1, 2, 3, 4:

    (a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse?

    (b) ¿Cuántos son pares?

    (c) ¿Cuántos terminan en 32?

    (d) ¿Cuántos son divisibles por 5?

47. Con 22 consonantes y 5 vocales:

    (a) ¿Cuántas palabras distintas de cinco letras (sin que se repitan letras) con o sin sentido se pueden formar?

    (b) ¿En cuántas de las palabras del item (a) la letra central es una vocal?

    (c) ¿Cuántas de las palabras del item (a) se forman con 3 consonantes y 2 vocales?

48. ¿Cuántas palabras pueden formarse permutando las letras de la palabra *neuquen*?

49. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse permutando los dígitos de 11122233345?

50. Calcular el valor de n siempre que sea posible:

   (a) $\frac{1}{2} \cdot V_{n,3} - V_{n-1,2} = V_{n-1,2}$.

   (b) $4 \cdot C_{n+2,2} - C_{n+1,2} + C_{n,2} = 56$.

51. Hallar si existe:

   (a) el undécimo término (contando desde el primer término) de $\left(2x^2 - x\right)^{15}$ sin efectuar el desarrollo.

   (b) el o los términos centrales de $(3x - 2y)^9$.

   (c) el término que contiene a^{-35} en $\left(a^3 + \frac{3}{a^2}\right)^{25}$.

52. Indique si los siguientes conjuntos son BO.

   (a) Sea $K = \{2k : k \in \mathbb{N}_0\}$.

   (b) Sea $L = K \cup \{1\}$.

53. Sea K un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Analizar la existencia de máximo y mínimo en los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) $\{1 - n : n \in K\}$.

   (b) Siendo K finito, $\{kn : k \in K, n \in \mathbb{N}\}$.