Trabajo Práctico 4 - Números Reales.

1. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ demostrar las siguientes propiedades, teniendo en cuenta el orden en que han sido presentadas en la teoría.
   (a) $a \cdot 0 = 0$.
   (b) $-(a-b) = b-a$.
   (c) $a+b = a-(-b)$.
   (d) $(-a) \cdot b = -a \cdot b = a \cdot (-b)$
   (e) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.
   (f) $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$.
   (g) $-1 = (-1)^{-1}$.
   (h) Si $a \neq 0$ entonces $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$.
   (i) $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

2. Expresar en cada caso de forma factorizada, utilizando las propiedades recién demostradas:
   (a) $a^2 - 4$
   (b) $1 - x^2$
   (c) $64 - b^6$
   (d) $25 + 10 \cdot z + z^2$
   (e) $25 - 10 \cdot y + y^2$
   (f) $-25 + 10 \cdot a - a^2$

3. Si $a, b, c, d, x, z \in \mathbb{R}$ demostrar las siguientes identidades.
   (a) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.
   (b) Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot c}$.
   (c) Si $b \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.
   (d) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$.
   (e) $\dfrac{25 + 10z + z^2}{5+z} = 5 + z$.
   (f) $\dfrac{10z^2 - 15z^5 + 5z^3}{10z^5 + 5z^2} = \dfrac{2 - 3z^3 + z}{2z^3 + 1}$.
   (g) $\dfrac{64 - x^6}{(8 - x^3)} = \left(8 + x^3\right)$.

4. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ demostrar las siguientes propiedades.
   (a) $a < b \Leftrightarrow -b < -a$.
   (b) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$.
   (c) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
   (d) Si $a \cdot b < 0$ entonces $a < 0$ y $b > 0$, ó $a > 0$ y $b < 0$.
   (e) Si $a \cdot b > 0$ entonces $a < 0$ y $b < 0$, ó $a > 0$ y $b > 0$.

5. Resolver las siguientes inecuaciones, aplicando las propiedades demostradas e indicar el conjunto solución.
   (a) $3 \cdot (x-2) < 5$.
   (b) $-2 \cdot (-x+6) \geq -10$.
   (c) $25 - 10 \cdot x + x^2 < 0$.
   (d) $64 - x^6 > 0$

6. Si $a, b \in \mathbb{R}$ demostrar las siguientes propiedades:
   (a) Desigualdad Triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$.
   (b) ($\bigstar$) Siendo $a > 0$, $|b| = a \Leftrightarrow b = -a \vee b = a$.
   (c) ($\bigstar$) Siendo $a > 0$, $|b| \leq a \Leftrightarrow -a \leq b \wedge b \leq a$. (Esta útima proposición pueden encontrarla en la literatura simplemente como $-a \leq b \leq a$, y debe entenderse como la conjunción original)
   (d) ($\bigstar$) Siendo $a > 0$, $|b| \geq a \Leftrightarrow b \leq -a \vee a \leq b$.

   Los ítems indicados con ($\bigstar$) serán de gran utilidad para resolver las inecuaciones del ejercicio siguiente.

7. Encontrar los subconjuntos de $\mathbb{R}$ para los cuáles se verifican las siguientes inecuaciones. Graficar en la recta real.
   (a) $|2 \cdot x + 5| \leq 6$, (b) $|2 \cdot x + 5| \leq -6$, (c) $|2 \cdot x + 5| \geq 6$, (d) $|2 \cdot x + 5| \geq -6$,

   (e) $\left|\dfrac{-2 \cdot x - 5}{5}\right| \leq 6$, (f) $\left|\dfrac{-5 \cdot x - 5}{3}\right| + 4 \leq 8$, (g) $\left|-\dfrac{5}{3} \cdot (x-3)\right| - 4 \geq 0$, (h) $\left|-\dfrac{5}{3} \cdot (x-3)\right| \leq 0$.

8. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? Justificar la respuesta.
   (a) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.
   (b) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b$.
   (c) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b \vee a = b$.
   (d) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = -b \wedge a = b$.

9. Analizar la validez de la siguiente demostración:
   Teorema: Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a = 0$.

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 \\ a^2 - a^2 &= a^2 - a^2 \\ (a-a) \cdot (a+a) &= a \cdot (a-a) \\ a + a &= a \\ a &= 0 \end{aligned}$$

10. Demostrar que para cualquier número real a se cumple que $a^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1$.

11. Sean a y b reales positivos. Probar:
   (a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

12. Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   (a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3 \cdot x + 5 = 2 \cdot (x-1) + x$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 \cdot x + 1 > 0$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 3 \cdot x + 2 = 0$.
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = (x+y)^2$.

13. Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

(a) $x - 5 \geq 7$.
(b) $4 \cdot x + 1 < 2 \cdot x$.
(c) $2 \cdot x^2 - 3 \cdot x \leq -2$.
(d) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > 5$.
(e) $-7 < 5 \cdot x - 13 < 4$.

14. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son vacíos.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |-x| \leq 2 \wedge 2 \cdot x + 1 < -4\}$.
(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |-x+1| > 5 \veebar |x| \leq -4\}$.
(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |3 \cdot x + 1| < 8 \wedge |x| > -3\}$.
(d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{|x+3|}{|x-1|} < 1\right\}$.
(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : |2 \cdot x - 2| \geq 1 \wedge x = -1\}$.

★★★★★★★★★★★★★*Ejercicios Complementarios*★★★★★★★★★★★★★

1. Analizar la validez de las siguientes resoluciones:

(a)

Dada la ecuación	$2 \cdot a = a^2$
multiplicando ambos ambos miembros por a^{-1},	$(2 \cdot a) \cdot a^{-1} = a^2 \cdot a^{-1}$
por definición de potencia y asociatividad del producto	$2 \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) = a \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right)$
por existencia de elemento inverso	$2 \cdot 1 = a \cdot 1$
por existencia de elemento neutro	$2 = a$

Con lo que el Conjunto solución resultante es $S = \{2\}$.

(b)

Dada la inecuación	$\lvert x - 2\rvert \leq 5$
utilizando la propiedad demostrada en el ejercicio 6	$x - 2 \leq -5 \vee 5 \leq x - 2$
	$x \leq -5 + 2 \vee 5 + 2 \leq x$
	$x \leq -3 \vee 7 \leq x$

Con lo que el Conjunto solución resultante es $S = (-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

(c)

Dada la inecuación	$\lvert -3 \cdot x + 5\rvert \geq 5$
utilizando la propiedad demostrada en el ejercicio 6	$-3 \cdot x + 5 \leq -5 \vee 5 \leq -3 \cdot x + 5$
	$-3 \cdot x \leq -5 - 5 \vee 5 - 5 \leq -3 \cdot x$
	$-3 \cdot x \leq -10 \vee 0 \leq -3 \cdot x$
	$x \leq \dfrac{-10}{-3} \vee \dfrac{0}{-3} \leq x$
	$x \leq \dfrac{10}{3} \vee 0 \leq x$

Con lo que el Conjunto solución resultante es $S = (-\infty, 10/3] \cup [0, +\infty)$.

2. Encontrar los subconjuntos de $\mathbb{R}$ para el cual se verifican las siguientes inecuaciones. Graficar en la recta real.

(a) $\left|-5 \cdot x - \dfrac{3}{4}\right| \leq 3$, (b) $\left|\dfrac{2 \cdot x + 5}{3\left[\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1} - \left(\dfrac{8}{3} : \dfrac{3}{4}\right) : \dfrac{27}{32} \cdot \dfrac{1}{3}\right]}\right| \leq 1$, (c) $3 \cdot x^2 - 3 \geq 0$, (d) $3 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \leq 0$.

3. Sean a y b reales positivos. Probar:

(a) Si $a + b = 1$ entonces $\left(\dfrac{1}{a} - 1\right) \cdot \left(\dfrac{1}{b} - 1\right) = 1$.