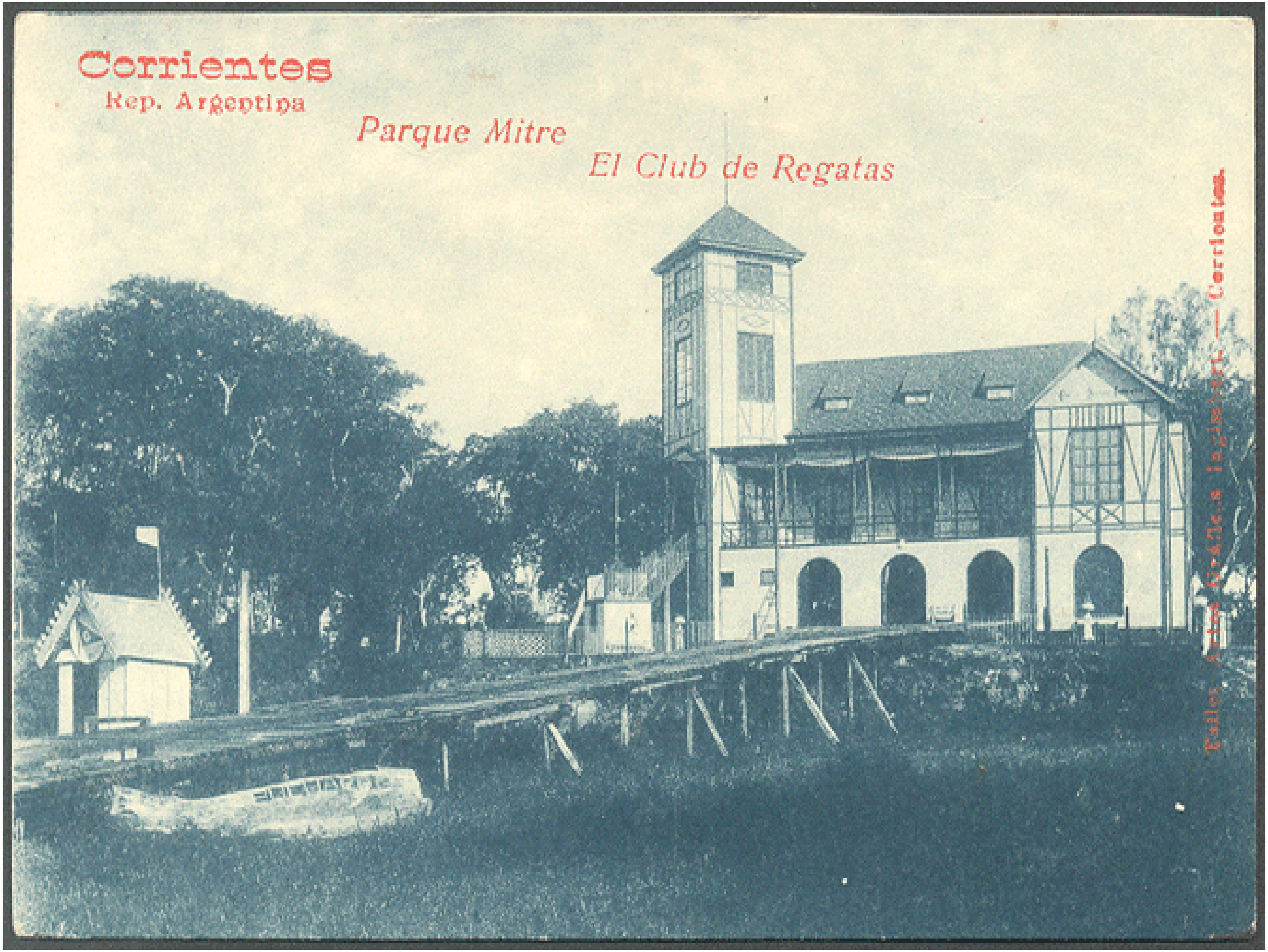
UNIDAD VIII:
LA INTEGRAL DEFINIDA

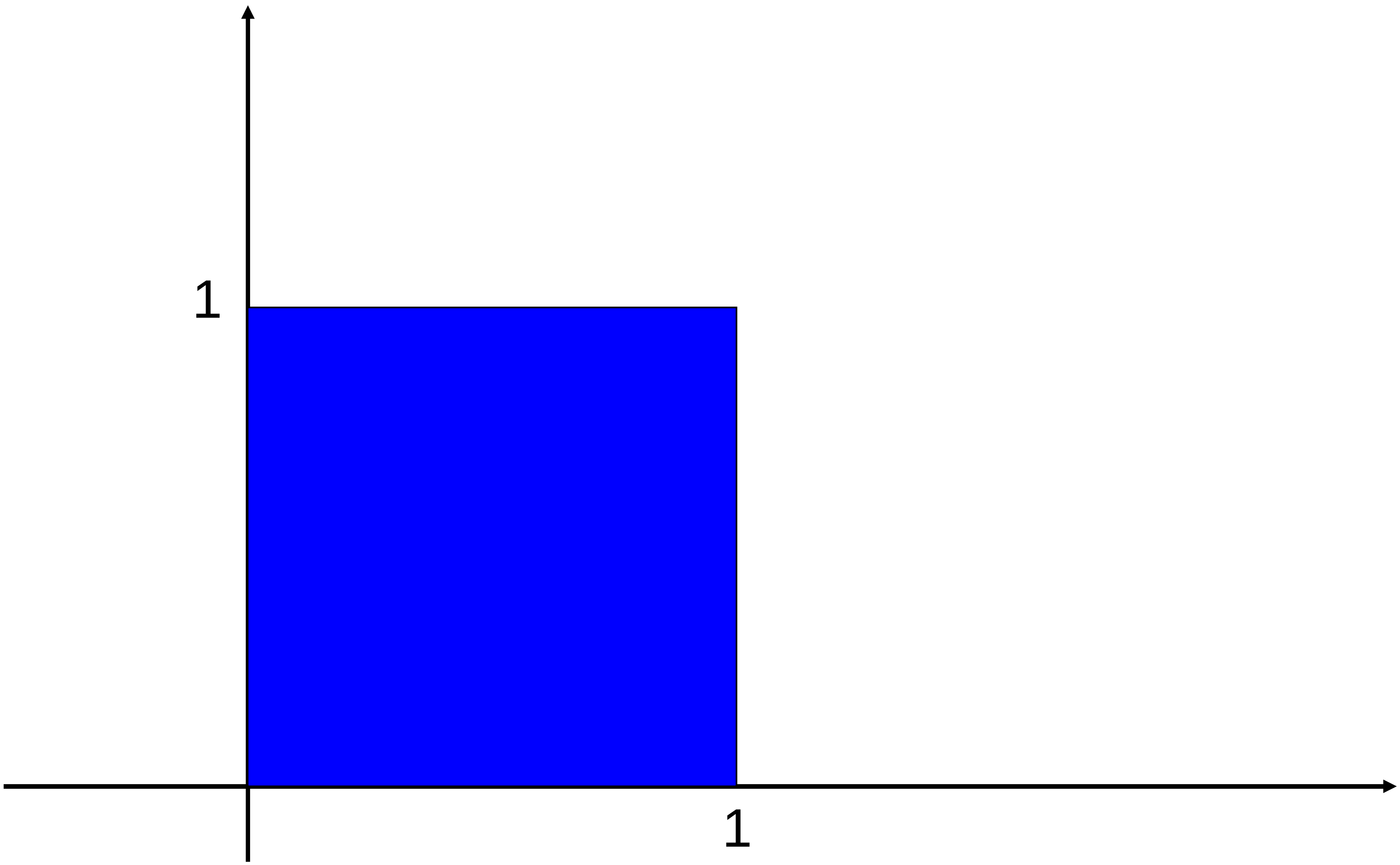
Integrales generalizadas e impropias. Cambios de variables.

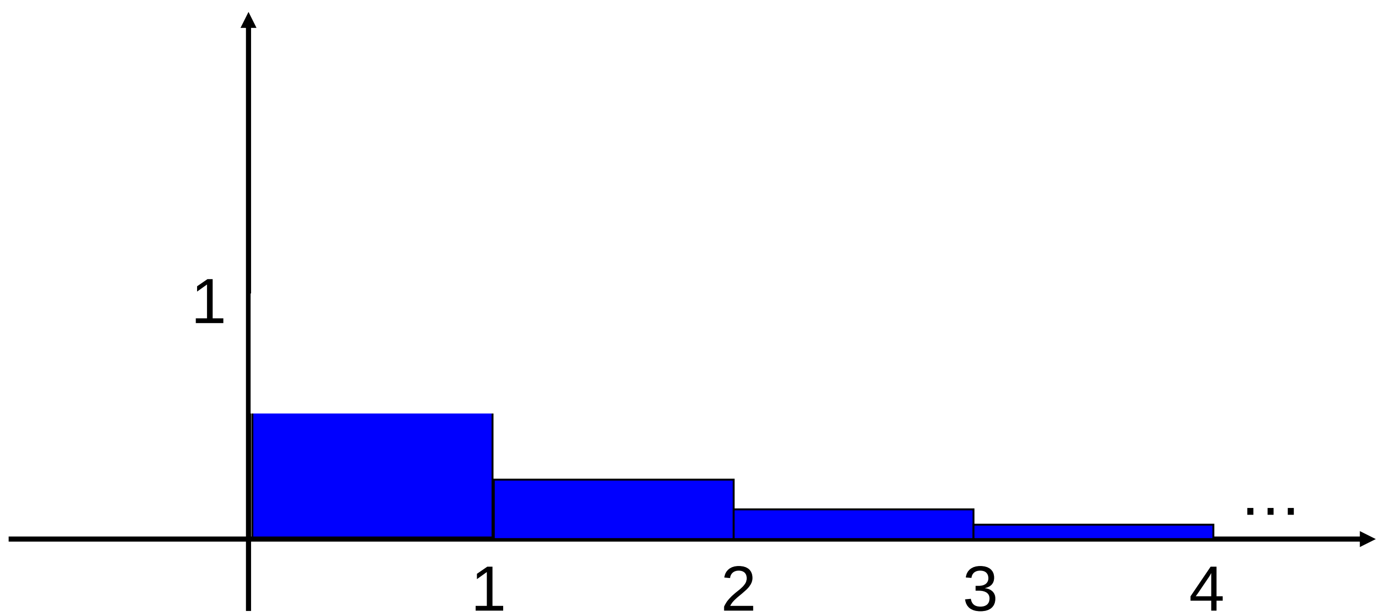
Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan una generalización del concepto de Integral Definida.


Corrientes
Rep. Argentina
Parque Mitre
El Club de Regatas

Hasta ahora hemos encontrado integrales de funciones <u>continuas</u> sobre intervalos <u>cerrados</u>.

En ocasiones podemos encontrar integrales donde las funciones tienen una asíntota vertical en el intervalo de integración o estamos integrando sobre intervalos infinitos, en ambos casos, estamos en presencia de <u>integrales</u> <u>impropias</u>.


1
1


1
1
2
3
4
...

Integrales Impropias

de 1era Especie

Definición 1. Sea f(x) una función definida en el intervalo [a,+∞) tal que para todo A≥a, existe $\int_a^A f(x)dx$ en sentido Riemann. Si existe (finito) el límite de G(A) cuando A→∞, diremos que la *integral impropia* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es convergente y le asignamos a ésta el valor límite, es decir, para una integral convergente se tiene

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} G(A)$$

Observación 1. Cuando este límite no existe, diremos que la integral impropia de 1era especie diverge.

Observación 2. Note que si $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ converge, también lo será cualquier integral impropia de la forma

$$\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

cuando b≥a.

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{A} f(x)dx$$

Observación 3. Todo lo anterior sigue siendo válido si el límite inferior es el que es infinito, es decir, estamos en presencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$

Y por definición

C es cualquier número real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx$$

Su convergencia o divergencia, depende de las dos integrales del miembro derecho.

Ejemplo 1.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^P} \qquad P > 0$$

$$\int_1^{\infty} x^{-P}\ dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-P}\ dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{-P+1} x^{-P+1}\Big|_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1^{-P+1}}{-P+1}$$

¿Qué pasa aquí?

Si $P \leq 1$ entonces b^{-P+1} se hace cada vez mayor cuando $b \to \infty$, por tanto, la integral <u>diverge</u>.

Si *P>1* entonces b posee un exponente negativo y, por tanto, la integral <u>converge</u>, pues $b^{-P+1} \to 0$

Revisión…

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^P} \qquad P > 0$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1^{-P+1}}{-P+1}$$

$$\int_1^{\infty} x^{-P}\ dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-P}\ dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{-P+1} x^{-P+1} \Big|_1^b$$

Si $P \leq 1$ entonces b^{-P+1} se hace cada vez mayor cuando $b \to \infty$, por tanto, la integral <u>diverge</u>.

Si *P>1* entonces b posee un exponente negativo y, por tanto, la integral <u>converge</u>, pues $b^{-P+1} \to 0$

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$$

Converge

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x}\,dx$$

$$\lim_{b\to\infty}\; -e^{-x}\Big|_1^{b}$$

$$\lim_{b\to\infty}\; -e^{-b}-\left(-e^{-1}\right)$$

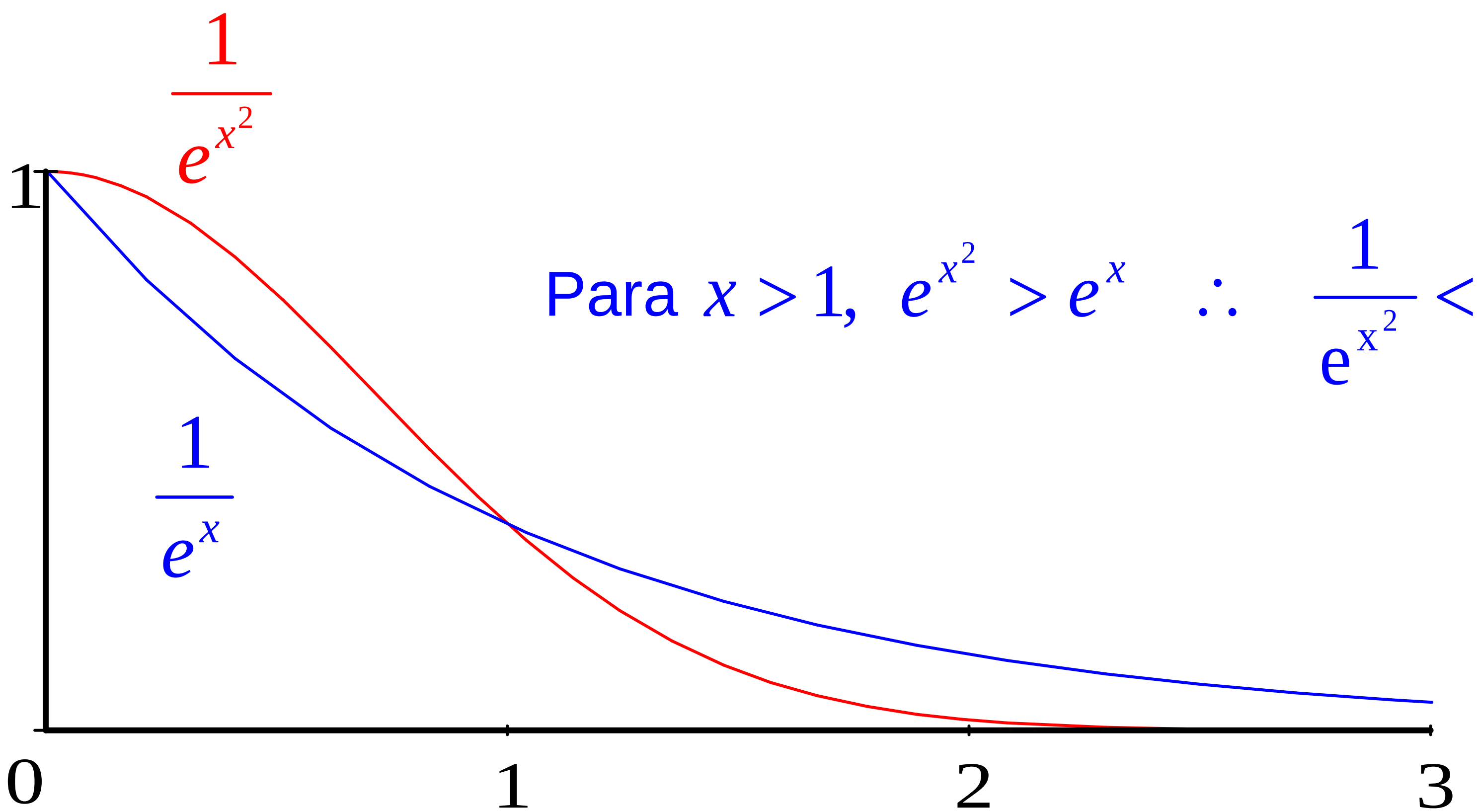
$$\lim_{b\to\infty}\; -\cancelto{0}{\frac{1}{e^{b}}}+\frac{1}{e} \quad =\frac{1}{e}$$

¿ $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge?

Compare:

$\dfrac{1}{e^{x^2}}$ a $\dfrac{1}{e^{x}}$ para valores positivos de x.

Para $x > 1,\ e^{x^2} > e^{x} \quad \therefore \quad \dfrac{1}{e^{x^2}} < \dfrac{1}{e^{x}}$



Para $x > 1,\ e^{x^2} > e^{x} \quad \therefore \quad \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{e^{x}}$

Puesto que $\frac{1}{e^{x^2}}$ es siempre menor a $\frac{1}{e^{x}}$, decimos que está acotada "por encima" por $\frac{1}{e^{x}}$.

Puesto que $\frac{1}{e^{x}}$ converge a un número finito, $\frac{1}{e^{x^2}}$ también!!!

Propiedad 1. Si f(x)≥0 en [a,+∞) entonces la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

O bien converge o tiene un valor infinito, según la función

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx$$

Sea acotada o no en [a,+∞).

Observación 4. Si f(x)<0 y es decreciente la integral también será converge.

Teorema 1. Criterio de Comparación Directa

Sean *f* y *g* continuas sobre $\left[a,\infty\right)$ con $0 \le f\left(x\right) \le g\left(x\right)$ para todo $x \ge a$, entonces:

1. $\int_a^{\infty} f\left(x\right)\,dx$ converge si $\int_a^{\infty} g\left(x\right)\,dx$ converge.

2. $\int_a^{\infty} g\left(x\right)\,dx$ diverge si $\int_a^{\infty} f\left(x\right)\,dx$ diverge.

Corolario. Si $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ para $x \geq a$, siendo f(x) y g(x) integrables según Riemann en [a,A], para todo $A \geq a$ y

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 \leq k \leq +\infty$$

Entonces:

1) Si $k \neq 0$ (finito) ambas integrales tienen el mismo carácter.
2) Si $k = 0$, de la convergencia de la integral de g, se deduce la convergencia de la integral de f.
3) Si $k = +\infty$ de la divergencia de la integral de f, se deduce la divergencia de la integral de g.

Teorema 2. Sea la función f(x) integrable en cualquier intervalo de la forma [a,A] con A>a. Si converge la integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Entonces converge la integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Y se cumple

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Definición 3. La integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se dice que *converge absolutamente* si converge la integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

Si converge la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ y diverge la integral

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

diremos que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge condicionalmente.*

Ejemplo 2.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\ dx$$

El valor máximo de senx es 1, así:

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \text{ sobre } [1,\infty)$$

Puesto que $\dfrac{1}{x^2}$ converge, $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ converge.

Ejemplo 3.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}\, dx$$

$\sqrt{x^2 - 0.1} < x$ Para todo los valores positivos de x, así:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}} \geq \frac{1}{x} \quad \text{sobre} \quad [1, \infty)$$

Puesto que $\dfrac{1}{x}$ diverge, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 0.1}}$ diverge.

Si las funciones crecen en la misma razón, entonces sus integrales son <u>ambas convergentes</u> o <u>ambas divergentes</u>.

¿ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge?

Cuando $x \to \infty$ el “1” en el denominador se torna insignificante, así comparamos a $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

Como $\frac{1}{x^2}$ converge, $\frac{1}{1+x^2}$ converge.

Por supuesto $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

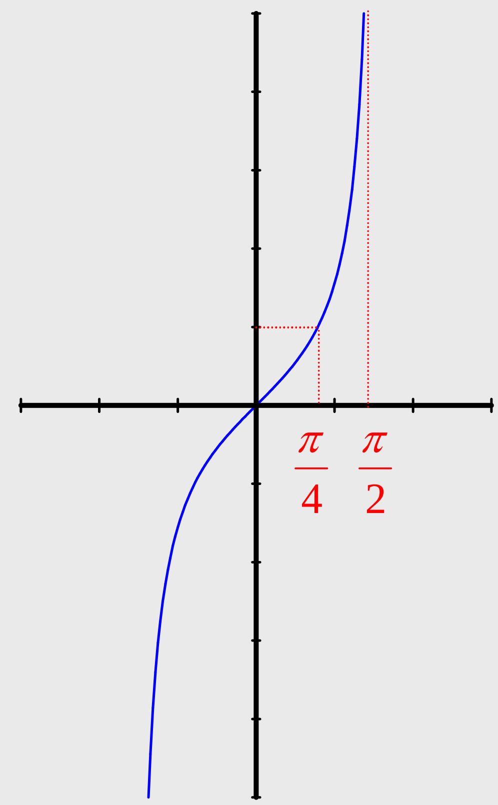
$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \overset{\frac{\pi}{2}}{\tan^{-1} b} - \overset{\frac{\pi}{4}}{\tan^{-1} 1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



$y = \tan x$

$$y \to \infty, \;\; x \to \frac{\pi}{2}$$

Por supuesto $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} x \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \tan^{-1} b - \tan^{-1} 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} -x^{-1} \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\cancelto{0}{\frac{1}{b}} - \left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$= 1$$

Integrales Impropias

de 2da Especie

Definición 4. Sea la función f(x) definida en el intervalo [a,b). El punto b se dice *singular* si la función es no acotada en [a,b), pero es acotada en cualquier segmento de la forma [a,A] con a<A<b.

Observación 5. Noten que una función acotada en el intervalo [a,b), puede definirse en b de cualquier manera, obteniéndose una función acotada en [a,b] cuya integrabilidad se analiza según Riemann.

$$G(A) = \int_a^A f(x)dx, \; a \leq A < b$$

Definición 5. Bajo las condiciones anteriores, si existe (finito) el límite de G(A) cuando $x \to b^-$, diremos que la *integral impropia* $\int_a^b f(x)dx$ es convergente y le asignamos a ésta el valor límite, es decir, para una integral convergente se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to b^-} G(A)$$

Observación 6. El razonamiento es análogo cuando el punto singular es el extremo inferior del intervalo.

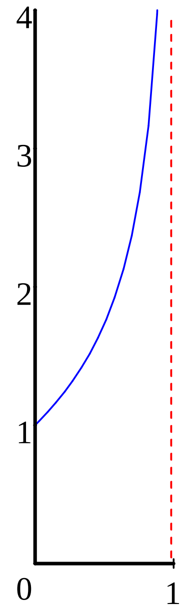
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to a^+} \int_A^b f(x)dx$$

Observación 7. Si la función tiene un número finito de puntos singulares, ella convergerá si convergen todas las integrales y su valor, será la suma de todos los valores “parciales”.

Ejemplo 4.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$$

La función está indefinida en $x = 1$.



¿Podemos encontrar el área bajo la curva que es una región infinita?

Puesto que x=1 es una asíntota, la función no posee máximo.

Podemos definir esta integral como:

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$$

(límite lateral izquierdo)

Podemos aproximar el límite desde “adentro” del intervalo.

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\;dx$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\;dx$$

Racionalizando el numerador.

$$\int \frac{1+\mathrm{x}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;dx+\int \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx$$

$$u=1-x^2$$

$$du=-2x\;dx$$

$$-\frac{1}{2}du=x\;dx$$

$$\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$u = 1 - x^2$$

$$du = -2x\,dx$$

$$-\frac{1}{2}du = x\,dx$$

$$\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\sin^{-1} x - u^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{b\to 1^-} \left. \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}\right|_0^b$$

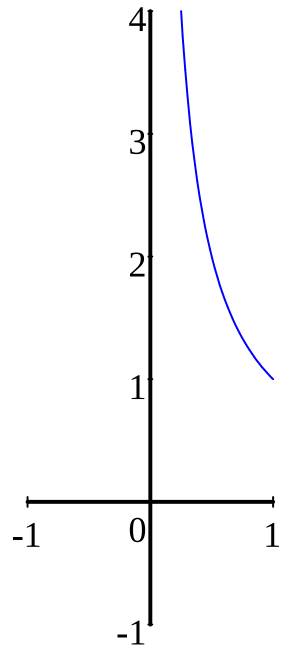
Esta integral <u>converge</u> puesto que existe el límite para b→1.

$$\lim_{b\to 1^-} \left(\underbrace{\sin^{-1} b}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\sqrt{1-b^2}}_{0}\right) - \left(\underbrace{\sin^{-1} 0}_{0} - \sqrt{1}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2} + 1}$$

Ejemplo 5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$\lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{1}{x}\ dx$$



$$\lim_{b\to 0^+} \ln x\Big|_b^1$$

$$\lim_{b\to 0^+}\ \ln 1 - \ln b$$

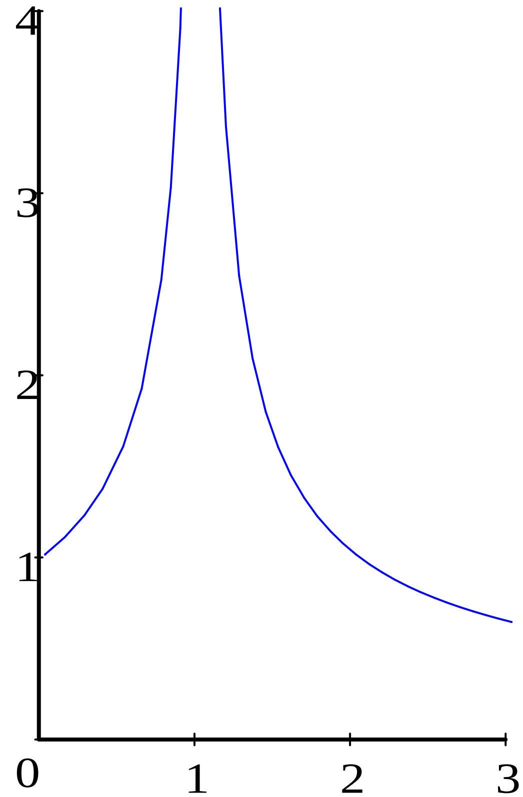
$$\lim_{b\to 0^+}\ \ln\frac{1}{b}\qquad \boxed{=\infty}$$

Esta integral <u>diverge</u>.

Ejemplo 6.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

La función se aproxima a ∞ cuando $x \to 1$.



$$\int_0^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ dx$$

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ dx + \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ dx$$

$$\lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^b + \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_c^3$$

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ dx+\lim_{c\to 1^+}\int_c^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}}\ dx$$

$$\lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^b+\lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_c^3$$

$$\lim_{b\to 1^-}\left[3\cancelto{0}{(b-1)^{\frac{1}{3}}}-3(-1)^{\frac{1}{3}}\right]+\lim_{c\to 1^+}\left[3\cdot 2^{\frac{1}{3}}-3\cancelto{0}{(c-1)^{\frac{1}{3}}}\right]$$

$$\boxed{3+3\sqrt[3]{2}}$$

Ejemplo 7. Analicemos la convergencia de la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Observación 8. Es claro que si la función está definida y es integrable en [a,b], entonces la integral en el sentido ordinario, coincidirá con la integral “.

Observación 9. Si la función tiene un número finito de puntos singulares en [a,+∞), ella convergerá si convergen todas las integrales impropias que surjan en las que f(x) tenga solamente un punto singular (2da especie) y una integral impropia de 1era especie.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Observación 10. El cálculo de las integrales impropias, usando los métodos de integración estudiados para las integrales indefinidas y definidas, siguen siendo válidos en este caso, considerando siempre el límite cuando $A \to +\infty$ (ó $-\infty$).