Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 7: Matrices y Determinantes

Matrices. Definición

Se llama matriz de clase *m x n* a todo arreglo rectangular con m filas y n columnas, siendo m y n números naturales.

Al conjunto de todas las matrices de clase m x n, lo notaremos: K^{mxn} donde K puede ser el conjunto numérico $Q, R\ o\ C$.

Una matriz se representa con letra mayúscula y los elementos de dicha matriz se representan con letras minúsculas, que indican la fila y columna.

En forma genérica, designaremos a la matriz A, así:

$$A = [a_{ij}]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .....a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .....a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1/2 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{4x4} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -9 & 4 \\ -1 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Matrices Especiales

De acuerdo a la disposición o naturaleza de sus elementos se pueden clasificar en:

Matriz cuadrada: Una matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$ es cuadrada si y solo si, tiene el mismo número de filas que de columnas.(m=n)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .....a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .....a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

Se llama diagonal principal de $A=[a_{ij}]_{nxn}$ al conjunto de los elementos de A que verifican que $i=j; \quad \forall i, \forall j$

Matriz rectangular: Una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ es rectangular si y solo si, el número de filas no coincide con el de columnas.(m ≠ n)

Matriz fila: Es aquella que tiene una sola fila (m = 1).

Por ejemplo: $A = [1 \quad -3 \quad 5]_{1x3}$

Matriz columna: Es aquella que tiene una sola columna.

(n = 1)**.** Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3x1}$$

Matriz nula: Es la que tiene todos sus elementos nulos.

$$a_{ij} = 0; \quad \forall i, \forall j$$

Matriz Traspuesta: Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A, a la matriz cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A. Por lo tanto, si A es una matriz de clase m x n, A^T es una matriz de clase n x m.

La matriz traspuesta de $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ $\quad es \quad$ $A^T = \left[a_{ji}\right]_{nxm}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .....a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .....a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \qquad \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & .....a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & .....a_{m2} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & .....a_{mn} \end{bmatrix}_{nxm}$$

Matriz Opuesta: Dada la matriz A, indicamos su opuesta como –A y es la matriz que se obtiene con todos los elementos opuestos de A.

La matriz opuesta de $A = [a_{ij}]_{mxn} \quad es \quad -A = [-a_{ij}]_{mxn}$

Matrices Cuadradas Particulares

Matriz triangular superior: Una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz triangular superior si y solo si, los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

$A = [a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz triangular superior si y solo si, $a_{ij} = 0, \forall i > j$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Una matriz $A=[a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz triangular inferior, si y solo si, los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

$A=[a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz triangular inferior, si y solo si, $a_{ij}=0, \forall i<j$

Por ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: Una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz diagonal, si y solo si, los elementos situados por encima y debajo de la diagonal principal son ceros.

$A = [a_{ij}]_{nxn}$ es una matriz diagonal, si y solo si,

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Una matriz es escalar, si y solo si, es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad o unidad: Una matriz es identidad, si y solo si, los elementos de la diagonal principal de una matriz escalar de clase nxn son iguales a 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica: Son aquellas matrices que coinciden con su transpuesta. O sea:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, \forall j$$

Esto significa que $A = A^T$

Suma de Matrices

Dos matrices son conformables para la suma, si y solo si, son de la misma clase.

Dadas las matrices: $A = [a_{ij}]_{mxn} \; y \; B = [b_{ij}]_{mxn}$

$$A + B = [a_{ij}]_{mxn} + [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mxn} \quad \forall i, \forall j$$

La suma de dos matrices de la misma clase, es otra matriz, de la misma clase que las dadas; y cada coeficiente de esta matriz se obtiene sumando los coeficientes de las matrices dadas que están en la misma posición.

Propiedades de la Suma de Matrices

La suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

1) Propiedad Asociativa:

$$\forall A, B, C \in K^{mxn} : (A+B)+C = A+(B+C)$$

2) Propiedad Conmutativa:

$$\forall A, B \in K^{mxn} : A+B = B+A$$

3) Existencia de elemento neutro:

$$\exists N \in K^{mxn} / \forall A \in K^{mxn} : A+N = N+A = A$$

$$N = [0_{ij}]_{mxn}$$

4) Existencia de elemento opuesto:

$$\forall A \in K^{mxn} : \exists A' \in K^{mxn} / A+A' = A'+A = N$$

$$A' = [-a_{ij}]_{mxn}$$

Diferencia de Matrices

Dadas dos matrices de la misma clase:

$$A = [a_{ij}]_{mxn} \;\; y \; B = [b_{ij}]_{mxn}$$

La diferencia $A - B$ la podemos expresar como $A + (-B)$,es decir la suma de la matriz A y la opuesta de B. O bien:

$$A - B = [a_{ij}]_{mxn} - [b_{ij}]_{mxn} = [a_{ij} - b_{ij}]_{mxn} \quad \forall i, \forall j$$

La resta de dos matrices de la misma clase, es otra matriz, de la misma clase que las dadas; y cada coeficiente de esta matriz se obtiene restando los coeficientes de las matrices dadas que están en la misma posición.

Producto de una Matriz por un escalar

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ $y\, un\, escalar\; c \in K$

Se define la matriz: $c.A = c.[a_{ij}]_{mxn} = [c.a_{ij}]_{mxn} \quad \forall i, \forall j$

El producto de una matriz por un escalar es otra matriz que se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por dicho número.

Producto de Matrices

Dadas las matrices $A = [a_{ij}]_{mxn} \; y \; B = [b_{ij}]_{pxq}$

- Dos matrices son conformables para el producto, si y solo si, el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda. (n = p)
- El producto de A.B es una matriz de clase mxq.
- Si n ≠ p**,** el producto A.B no está definido y se dice que A y B no son conformables para el producto.

Producto de Matrices

Dadas las matrices $A=[a_{ij}]_{mxn}\ y\ B=[b_{ij}]_{nxp}$

Se llama producto de la matriz A por la matriz B, a la matriz $C=[c_{ij}]_{mxp}$, tal que:

$$c_{ij}=a_{i1}.b_{1j}+a_{i2}.b_{2j}+a_{i3}.b_{3j}+....+a_{in}.b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}.b_{kj}$$

$$i=1,2,...,m$$

$$j=1,2,...,p$$

Esto significa que el elemento c_{ij} se obtiene sumando los n elementos que resultan de multiplicar cada elemento de la fila i-ésima de A por el correspondiente elemento de la columna j-ésima de B.

Producto de Matrices

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots b_{1j} \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots b_{2j} \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \quad \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots b_{ij} \dots & b_{ip} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots b_{nj} \dots & b_{np} \end{matrix} \\
A.B & \\
\hline
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots\dots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn} \end{matrix} & \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots c_{1j} \dots & b_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots c_{2j} \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \quad \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots c_{ij} \dots & c_{ip} \\ \vdots & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots c_{mj} \dots & c_{mp} \end{matrix}
\end{array}
$$

Producto de Matrices

Por ejemplo:

Dadas las matrices $A=[a_{ij}]_{3x2}$ y $B=[b_{ij}]_{2x3}$

Observamos que este producto es posible ya que el número de columna de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B.

La matriz producto $C=[c_{ij}]_{3x3}$ se obtiene:

		B			
			b_{11}	b_{12}	b_{13}
			b_{21}	b_{22}	b_{23}
	a_{11}	a_{12}	$a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}$	$a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}$	$a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23}$
A	a_{21}	a_{22}	$a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}$	$a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}$	$a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23}$
	a_{31}	a_{32}	$a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21}$	$a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22}$	$a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23}$

Propiedades del Producto de Matrices Cuadradas

1) Ley de Cierre $\forall A, B \in K^{nxn} : A.B \in K^{nxn}$

2) Propiedad Asociativa:

$$\forall A, B, C \in K^{nxn} : (A.B).C = A.(B.C)$$

3) Existencia de elemento neutro:

$$\exists I_n \in K^{nxn} / \forall A \in K^{nxn} : A.I_n = I_n.A = A$$

Operaciones elementales de filas

Definición: Dada una matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$, se llaman operaciones elementales de filas a las siguientes:

- Permutación de dos filas: La fila F_i se reemplaza por la fila F_j y la fila F_j se reemplaza por la fila F_i . (Se indica: $F_i \leftrightarrow F_j$)
- Reemplazo de todos los elementos de una fila por su producto por un escalar distinto de cero. (Se indica: $k.F_i \rightarrow F_i$).
- Reemplazo de una fila por su suma con otra.

  (Se indica: $F_i + k.F_j \rightarrow F_i$).

Operaciones elementales de filas

Por ejemplo:

Aplicar la siguiente secuencia de operaciones elementales a la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Permutar las filas primera y segunda.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2$$

2) Reemplazar la tercera fila por su producto por 3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 12 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3F_3 \rightarrow F_3$$

3) Reemplazar la primera fila por su suma con la segunda.

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 12 & -30 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 12 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 + F_2 \to F_1$$

4) Reemplazar la segunda fila por: $F_1 - 2F_2 \to F_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 12 & -30 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -4 & 8 & -3 \\ 12 & -30 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1 - 2F_2 \to F_2$$

Matrices Equivalentes

Sean $A = [a_{ij}]_{mxn} \; y \; B = [b_{ij}]_{mxn}$

Se dice que A es equivalente a B, si B se obtiene de A, por la sucesiva aplicación de un número finito de operaciones elementales.

COMBINACIONES LINEALES

Sea $A=[a_{ij}]_{mxn}$, de filas $F_1, F_2,....,F_m$ y sean $c_1, c_2,....,c_r \in K,$ con $r \leq m$

***Definición*: Se llama combinación lineal de las filas $F_1, F_2,....,F_r$ con coeficientes $c_1, c_2,....,c_r$ a la siguiente expresión: $c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_rF_r$

Por ejemplo, consideremos la matriz: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ 9 & 22 & 16 \end{bmatrix}$

Puede observarse que la tercera fila es una combinación lineal de las dos primeras, con coeficientes 2 y 3, pues:

$$2.[3 \quad 2 \quad 5]+3.[1 \quad 6 \quad 2]=[6 \quad 4 \quad 10]+[3 \quad 18 \quad 6]=[9 \quad 22 \quad 16]$$

COMBINACIÓN LINEAL NULA

Definición: Una combinación lineal de filas se llama nula si es igual a la matriz nula de clase 1xn.

Por ejemplo, la siguiente combinación lineal de filas es nula:

$$2.[3 \quad 6] + 3.[-2 \quad -4] = [6 \quad 12] + [-6 \quad -12] = [0 \quad 0]$$

Dadas filas cualesquiera, la combinación lineal con todos los coeficientes cero, es una combinación lineal nula; se llama combinación lineal nula trivial.

$$\forall A = [a_{ij}]_{mxn} : \; 0F_1 + 0F_2 + ... + 0F_n = [0 \quad 0 \quad 0 \quad ...0] = 0_{1xn}$$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $A=[a_{ij}]_{mxn}$, de filas $F_1, F_2, ..., F_r$ con $r \leq m$

Definición: Las filas $F_1, F_2, ..., F_r$ son linealmente dependientes si y solo si existen escalares $c_1, c_2, ..., c_r \in K,$ no todos nulos, tales que:

$$c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_rF_r = [0 \quad 0 \quad 0 \quad ...0] = 0_{1xn}$$

Definición: Las filas $F_1, F_2, ..., F_r$ son linealmente independientes si y solo si, no son linealmente dependientes.

Definición: Las filas $F_1, F_2, \ldots., F_r$ son linealmente independientes si y solo si, no son linealmente dependientes.

Esto es equivalente a decir que la única forma de expresar la matriz nula 0_{1xn} como combinación lineal de las filas F_i es la combinación nula trivial:

$F_1, F_2, \ldots., F_r$ son linealmente independientes si y sólo si:

$$c_1.F_1 + c_2.F_2 + \ldots. + c_r.F_r = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots 0] = 0_{1xn} \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots c_r = 0$$

PROPIEDADES DEL CONJUNTO DE FILAS

1) Si dos filas son iguales, el conjunto de filas es linealmente dependiente.
2) Si alguna de las filas es nula, el conjunto de filas es linealmente dependiente.
3) Si alguna de las filas es combinación lineal de las otras, el conjunto de filas es linealmente dependiente.
4) Si alguna de las filas es múltiplo de otra, el conjunto de filas es linealmente dependiente.

Rango de una matriz

Sea $A = [a_{ij}]_{mxn}$

Se llama rango fila de A al máximo número de filas linealmente independientes de A.

Se llama rango columna de A al máximo número de columnas linealmente independientes de A.

Teorema: El rango fila de toda matriz es igual a su rango columna.

PROPIEDADES

1) El rango fila de la matriz nula, de cualquier clase, es cero.
2) El rango fila de la matriz identidad de clase nxn, es n.
3) Dos matrices equivalentes por fila tienen el mismo rango fila.

MATRICES ESCALONADAS

Una matriz es escalonada si, y solo si, verifica las dos condiciones siguientes:

- Las filas nulas, si existen, están después de todas las no nulas.
- En cada una de las filas no nulas, el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que el anterior.

Por ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Propiedad: El rango fila de una matriz escalonada, es igual al número de filas no nulas de esa matriz.

MATRIZ ADJUNTA $A_{(i,j)}$ DEL ELEMENTO a_{ij}

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$

Llamamos matriz adjunta del elemento a_{ij} a la matriz de clase (n-1) x (n-1) que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4x4} \qquad A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES

Definición: Es una función $|\ |: K^{nxn} \to K$ definida de la siguiente manera:

- Si n = 1 $\quad |\ |: K^{1x1} \to K \,/\, |A| = |a_{11}| = a_{11}$
- Si n = 2 $\quad |\ |: K^{2x2} \to K \,/\, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$
- Si n ≥ 3

$$|\ |: K^{nxn} \to K \,/\, |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.(-1)^{i+j}.\left|A_{(i,j)}\right| \,, con\ 1 \leq i \leq n$$

$$|\ |: K^{3x3} \to K \,/\, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{32}.a_{13}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

Regla de Sarrus: Sirve para calcular el valor del determinante de orden 3.

Consiste en agregar a continuación de la última fila las dos primeras filas, y el determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas, menos la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{31}.a_{12}.a_{23}) -$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{23}.a_{32}.a_{11} + a_{33}.a_{12}.a_{21})$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.
2) Si una matriz tiene una fila o una columna nula, su determinante es cero.
3) El determinante del producto de dos matrices de la misma clase, es igual al producto de los determinantes de las matrices.
4) El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) o diagonal, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

5) El determinante de la matriz identidad de cualquier orden es 1.
6) Si se multiplica un escalar no nulo por una fila o columna de una matriz, el determinante de la nueva matriz será igual al determinante de la matriz multiplicado por el escalar.
7) Si en una matriz se permutan dos filas o dos columnas, el determinante de la nueva matriz es el opuesto del determinante de la primera.

8) Si una matriz tiene dos o más filas (o columnas) linealmente dependientes, su determinante es cero.

9) Si una matriz tiene sus filas proporcionales, su determinante es nulo.

10) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

Menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz de clase nxn

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$

Llamamos menor complementario del elemento a_{ij} de A y lo anotamos M_{ij}, al determinante de la matriz adjunta del elemento a_{ij} de clase

(n-1) x (n-1) que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A. Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4x4} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Adjunto o cofactor del elemento a_{ij} de una matriz de clase nxn

Dada una matriz $A=[a_{ij}]_{nxn}$, llamamos adjunto o cofactor del elemento a_{ij} de A y lo anotamos A_{ij} , a su menor complementario o a su opuesto según i+j es par o impar respectivamente.

Es decir que

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} \ \ si \ \ i+j \ \ es \ \ par \\ -M_{ij} \ \ si \ \ i+j \ \ es \ \ impar \end{cases}$$

o lo que es lo mismo: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$

Ejemplo: Dada una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

El adjunto del elemento a_{32} se obtiene:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = (-1) . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

MATRIZ ADJUNTA DE LA MATRIZ A

Sea $A = [a_{ij}]_{nxn}$. Se llama matriz adjunta de A y anotamos Adj A, a la traspuesta de la matriz que se obtiene al reemplazar cada elemento de A por sus respectivos adjuntos.

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & .....A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & .....A_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & .....A_{nn} \end{bmatrix}^T_{nxn}$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -20 \\ -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -20 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$ es regular, inversible o no singular si y solo si, existe una matriz de la misma clase (notada A^{-1}) tal que multiplicada a izquierda y derecha por A, da por resultado la matriz identidad de la misma clase.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{nxn} \; es\ inversible \Leftrightarrow \exists A^{-1} / A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$$

$$A^{-1} \; es\ la\ inversa\ \ de\ A$$

$$La\ inversa\ \ es\ única$$

Propiedad: Una matriz cuadrada de clase nxn es inversible si, y solo si, su rango fila es igual a n.

Cálculo de la inversa de una matriz

Una matriz de clase nxn es inversible $\Leftrightarrow$ su rango es igual a n $\Leftrightarrow$ su determinante es distinto de cero.

$$A = [a_{ij}]_{nxn} \; es \; inversible \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Sea $A = [a_{ij}]_{nxn}$ y A inversible. La matriz inversa de A es igual a la matriz adjunta de A dividida por el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

Por ejemplo: Calcular la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) $|A| = 1$

2) $Adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A^{-1} = \dfrac{Adj\ A}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Es posible verificar haciendo:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular la inversa de: $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&4&1\\5&0&1\end{bmatrix}$

1) $|A|=-10$

2) $$Adj\ A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\5&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&4\\5&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\5&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\5&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&2&-20\\-1&-3&5\\-3&1&5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&-1&-3\\2&-3&1\\-20&5&5\end{bmatrix}$$

3) $$A^{-1}=\frac{Adj\ A}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}4&-1&-3\\2&-3&1\\-20&5&5\end{bmatrix}}{-10}=\begin{bmatrix}-2/5&1/10&3/10\\-1/5&3/10&-1/10\\2&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

Es posible verificar haciendo:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2/5 & 1/10 & 3/10 \\ -1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$