UNIDAD III: LA DERIVADA.

Derivación gráfica. Continuidad de una función derivable. Existencia de la derivada. Derivada de las funciones algebraicas.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

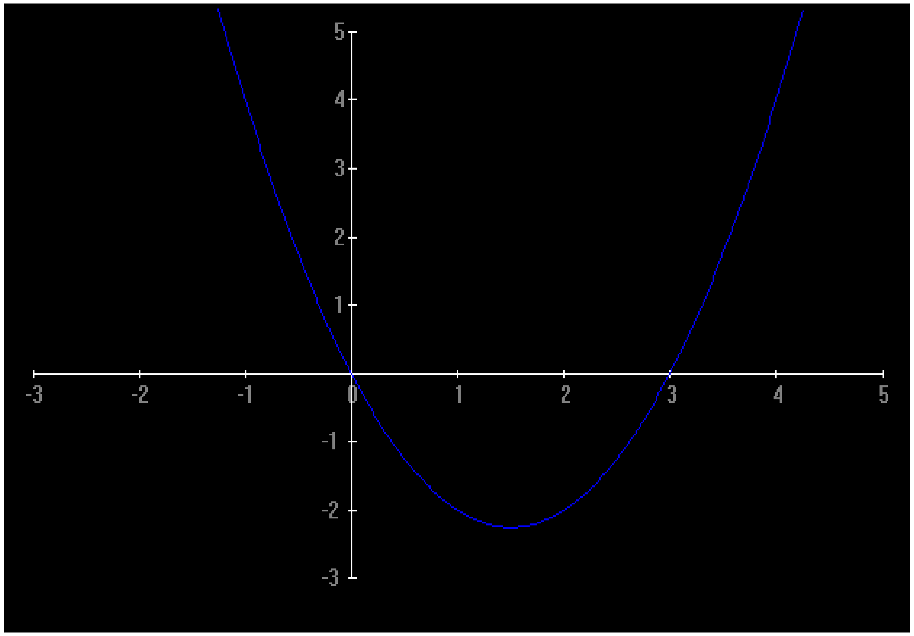
- La relación entre continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- La derivada de funciones algebraicas.

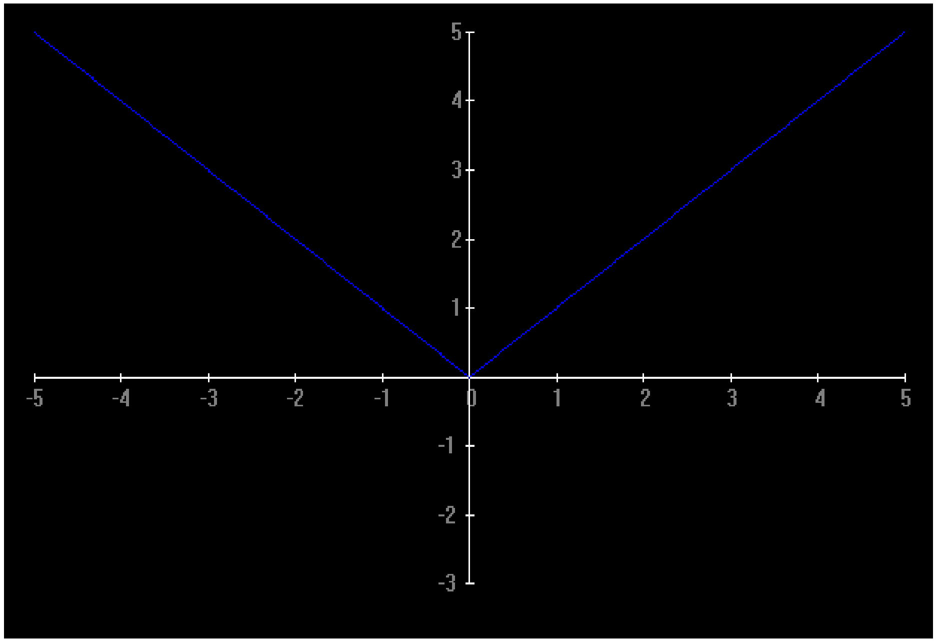
DERIVABILIDAD. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

Una función es **derivable** si ella posee derivada en todo punto de su dominio, eso implica que será continua y **suave**. Funciones derivables, definidas sobre intervalos cerrados, tendrán derivadas laterales en los puntos extremos.

Es decir, es **derivable** en un punto x=*a* cuando la gráfica de f(x) en una vecindad de *a* no tiene cambios en su crecimiento o “picos”.

Por ejemplo $f(x)=x^2-3x$ es derivable en cualquier punto, mientras que $f(x)=|x|$ no es derivable cuando $x=0$, vemos que en ese punto cambia el crecimiento bruscamente (hace un pico).


5
4
3
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-1
-2
-3

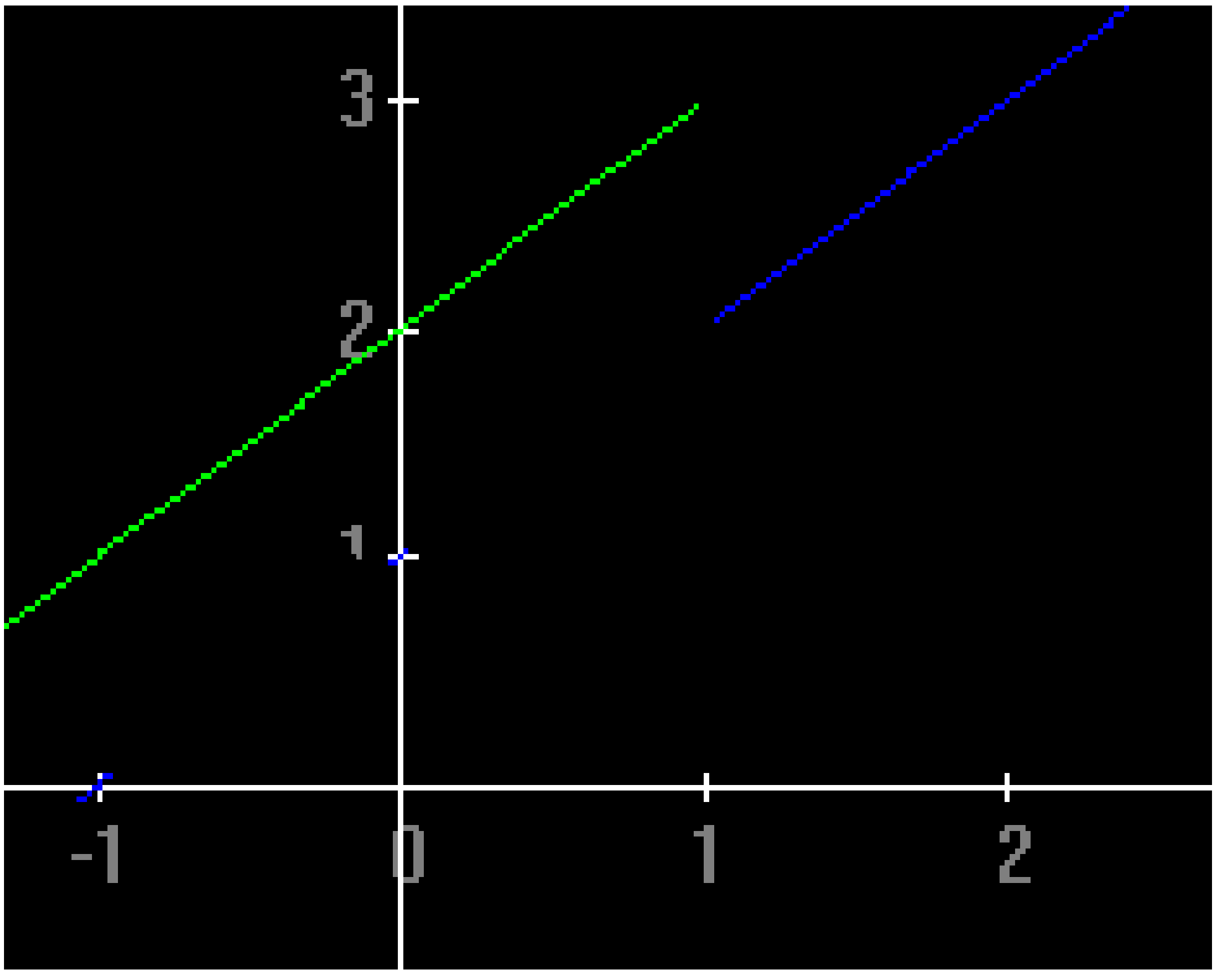

5
4
3
2
1
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
-1
-2
-3

Teorema. Si f(x) es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Ojo¡¡¡¡¡¡¡ El recíproco no necesariamente es cierto

Observación. Este teorema es equivalente al resultado que suele utilizarse habitualmente: *Si f(x) no es continua en un punto, entonces no es derivable en dicho punto*.

Una función no puede ser derivable en un punto si no es continua en él. Aunque esta función no tenga cambios en el crecimiento cuando x=1, no existe la derivada en ese punto pues no es continua en él.



Demostremos que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto. Sea dicho punto x=c.

$$\lim_{x\to c}\left(f(x)-f(c)\right)=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)(x-c)=$$

$$=\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)\lim_{x\to c}(x-c)=0$$

Es decir, si x→c, f(x)→f(c), que significa la continuidad de la función en el punto x=c.

RESUMIENDO…

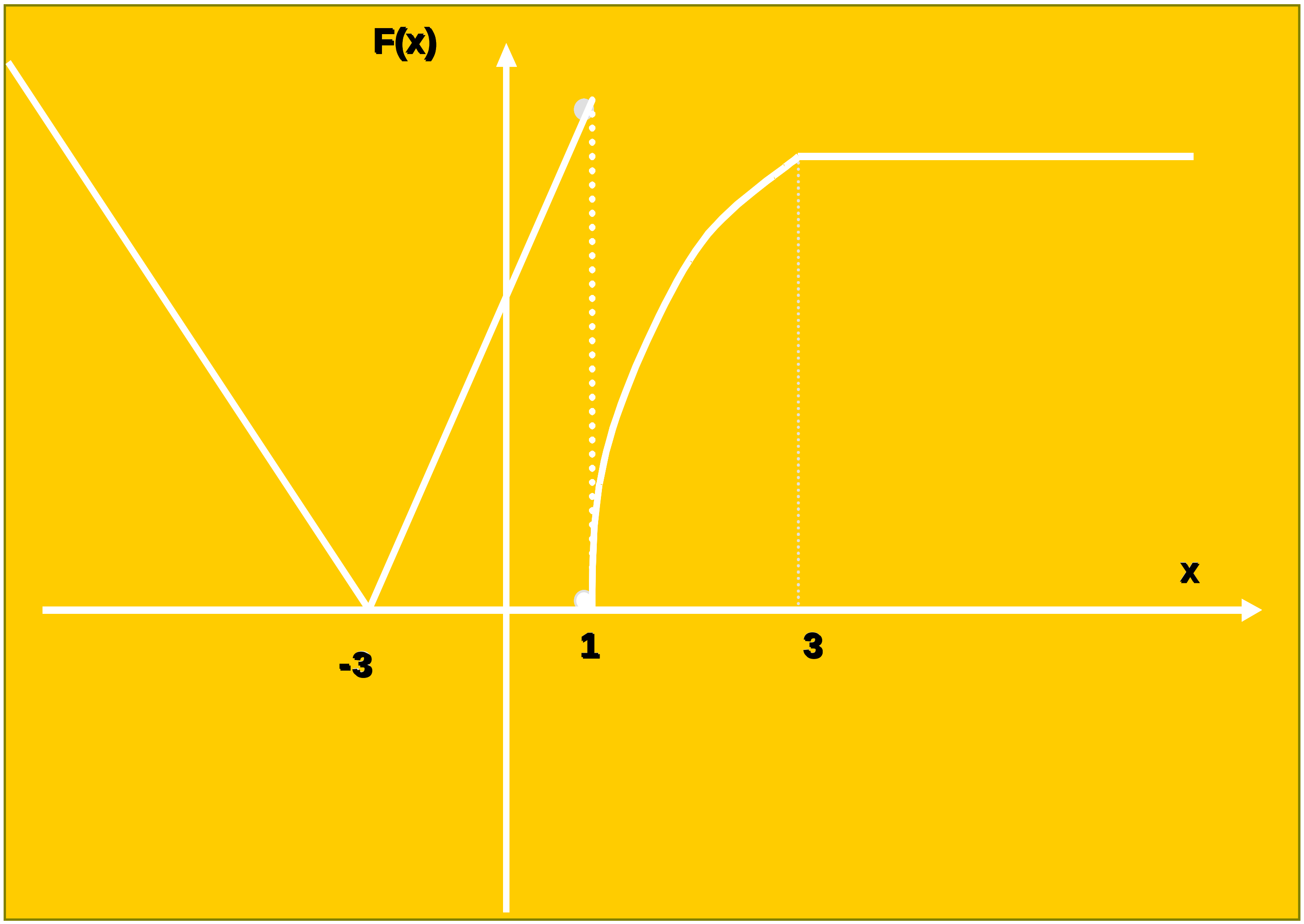
- Si f(x) es derivable en un punto, es continua en dicho punto.
- Si f(x) no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto.
- Si f(x) es continua en un punto, puede o no, ser derivable en dicho punto.

¿En qué puntos del dominio, la función representada es

a. Derivable?

b. Continua pero no derivable?

c. Ni continua ni derivable?



DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TRAMOS

Para comprobar si una función definida a trozos es derivable en una de sus uniones debemos:

1. **Comprobar que es continua** en dicha unión. Si no es continua, entonces no es derivable en ese punto.

2. Si la función es continua, pasamos a **calcular las derivadas laterales**, $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ es decir la derivada en ese punto por la izquierda y por la derecha. Si las dos derivadas laterales coinciden, entonces podemos decir que existe la derivada en ese punto.

Observe que en esta caso, la pendiente de la recta tangente es la misma si nos acercamos al punto por la derecha o por la izquierda, y por tanto la función no hace “picos”

Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones

a)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \ \ si \ \ x<2 \\ x^2-3 \ \ si \ \ x\geq 2 \end{cases}$$

Veamos si es continua en x=2.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x+1=3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2-3=1 \end{array}\right\}$$

Como no es continua, no puede ser derivable en x=2.

b)

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 \ \ si \ \ x<1 \\ 4x^2-3x \ \ si \ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Veamos si es continua en x=1.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x-1=1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 4x^2-3x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\}$$

Como es continua, comprobamos si las derivadas laterales coinciden:

$$(2x-1)\text{´}=2\rightarrow f\text{´}(1^-)=2$$

$$(4x^2-3x)\text{´}=8x-3\rightarrow f\text{´}(1^+)=5$$

Como no coinciden, la función no es derivable en x=1, ya que no existe f´(1).

Una función se dice **algebraica**, si ella se puede expresar como un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y radicaciones de la variable independiente y constantes. Polinomios raciones e irracionales, y cociente racional de polinomios.

En caso contrario se dice que la función es trascendente, por ejemplo la funciones exponencial, logarítmica, ttrigonométrica y trigonométrica inversas.

REGLAS DE DERIVACIÓN

- Se utilizan para hallar la derivada de una función sin necesidad de hacer uso de la definición.
- Permiten encontrar f ’(x) de forma rápida.

REGLAS DE DERIVACIÓN

Derivada de una función potencial.

$$\boxed{\text{Si } f(x) = x^n, \text{ entonces } f'(x) = nx^{n-1}.}$$

NOTA.

$$\text{Si } f(x) = x, \text{ entonces } f'(x) = 1$$

$$\text{Si } f(x) = k, \text{ entonces } f'(x) = 0$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

Regla del múltiplo constante K, de la forma $g(x) = Kf(x)$.

$$\boxed{\begin{aligned} g(x) &= Kf(x) \\ g'(x) &= Kf'(x) = K\frac{df(x)}{dx} \end{aligned}}$$

CONSIDERACIÓN

Si la derivada es nula en un punto de un intervalo ($m_{tan}=0$), f(x) presentará una tangente horizontal en ese punto, es decir, si **$f´(c)=0$**, f(x) tendrá una **tangente horizontal** en x=c

Un problema interesante…

Dada f(x) y las condiciones que se indican, encuentre f'(4).

$$f(x) = \sqrt{x}\,.\,g(x), \quad g(4) = 2, \quad g'(4) = 3,$$

$$f'(4) = ?$$

DERIVADA DE FUNCIONES DADAS PARAMÉTRICAMENTE

x=f(t),

y=g(t), $t \in I$,

$x_0=f(t_0)$; $x_0=f(t_0)$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}, \; f'(t_0) \neq 0$$

$$\frac{dx}{dy}(y_0) = \frac{f'(t_0)}{g'(t_0)}, \; g'(t_0) \neq 0$$