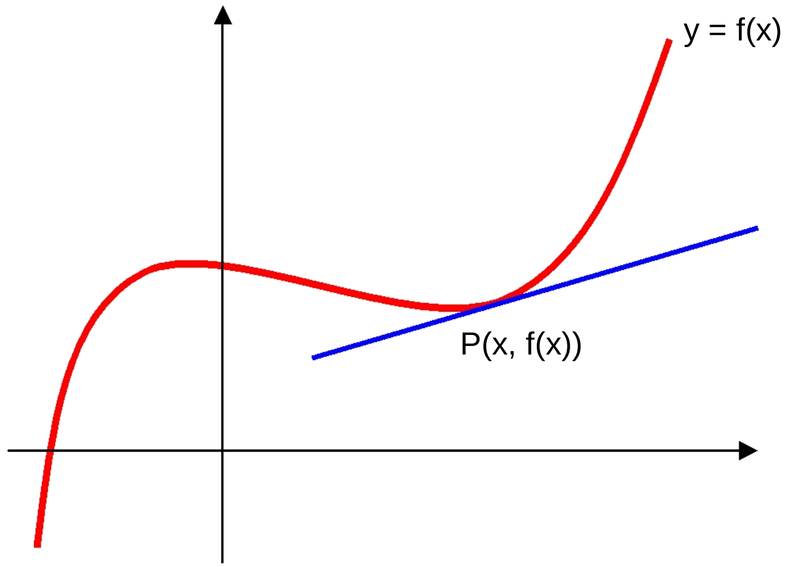
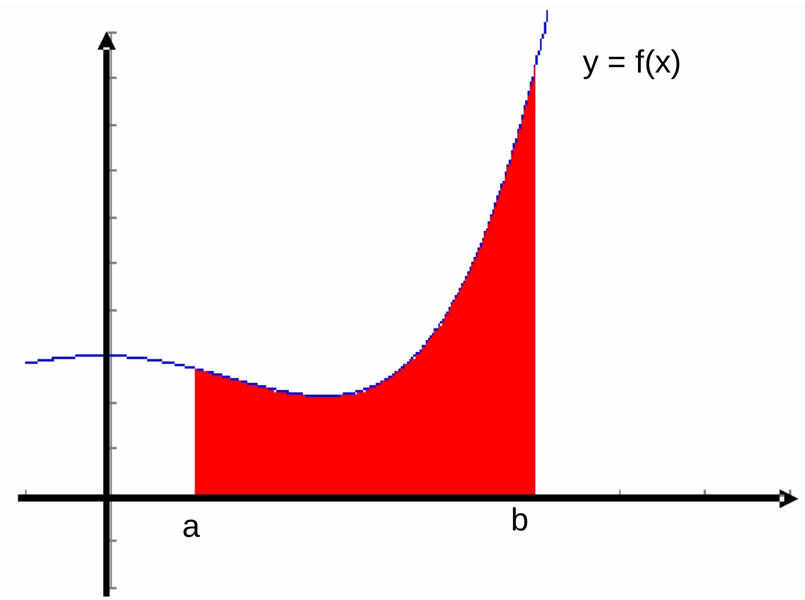
UNIDAD II: LÍMITE. CONTINUIDAD

CONCEPTO Y DEFINICIÓN DE LÍMITE. LÍMITES FINITOS E INFINITOS. SUCESIONES. EL NÚMERO e. INFINITÉSIMOS. OPERACIONES CON INFINITÉSIMOS. TEOREMAS SOBRE EL CÁLCULO DE LÍMITES. FRACCIONES CUYO DENOMINADOR TIENDE A CERO. LÍMITE DE SENX/X CUANDO X TIENDE A CERO.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos sean capaces de conocer:

- La definición de límite de una función en un punto según Cauchy.
- Cómo aplicar dicho resultado a la resolución de ejercicios del Cálculo.

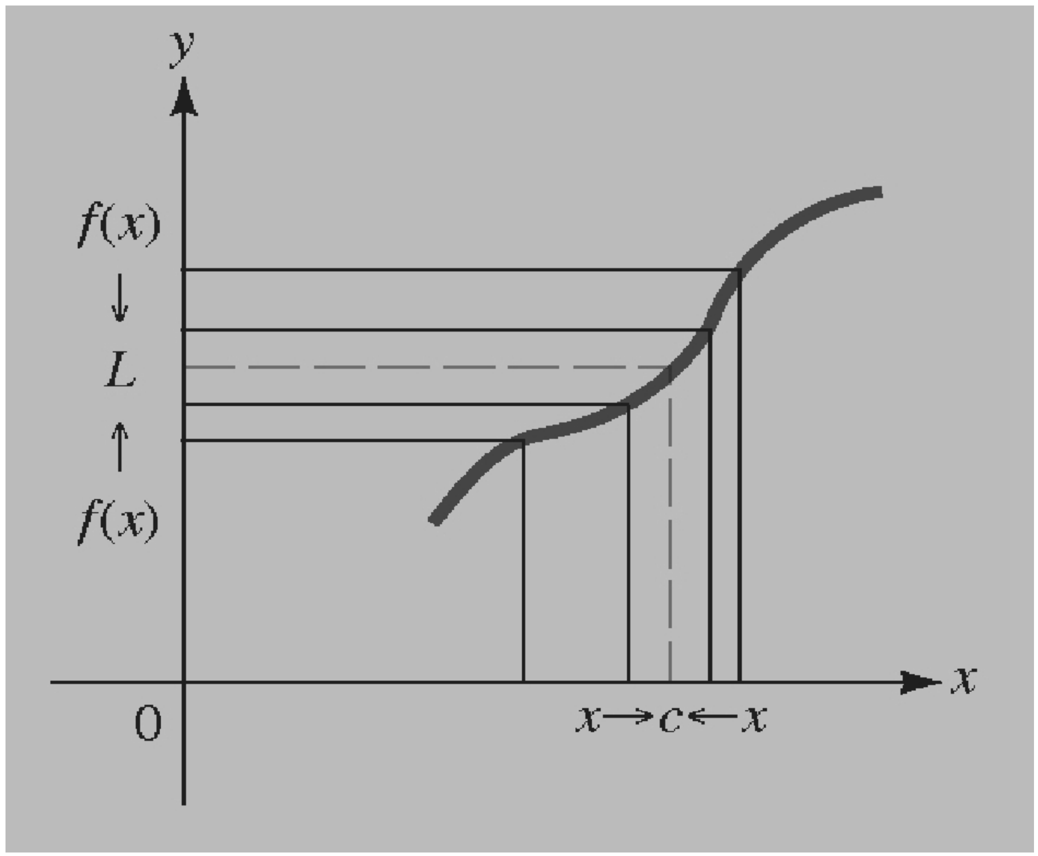

y = f(x)
P(x, f(x))

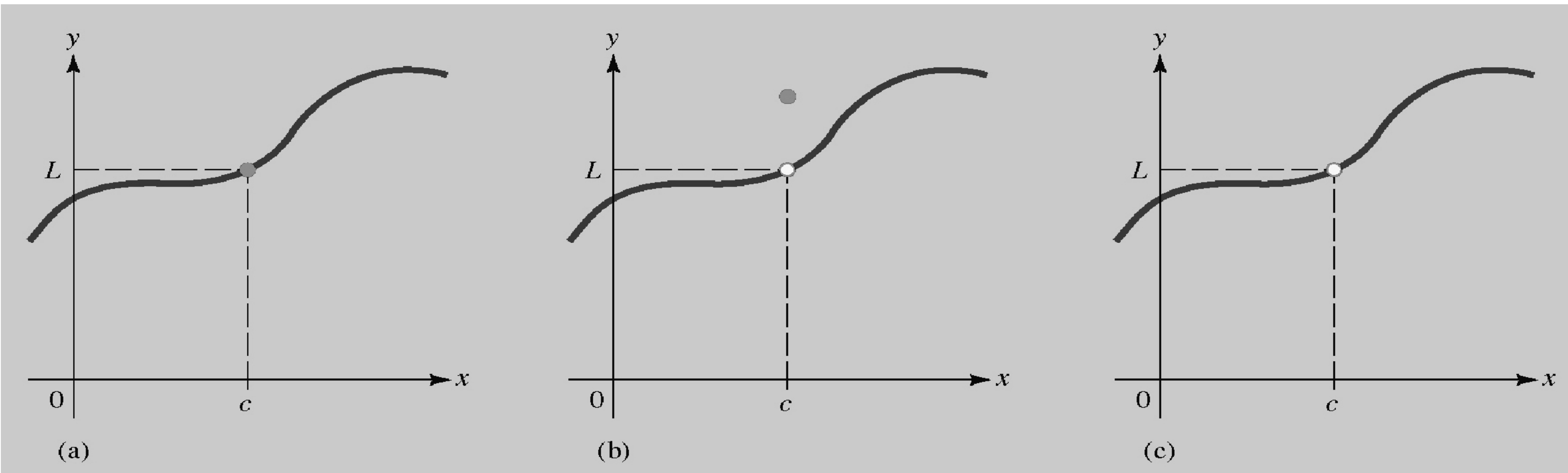

y = f(x)
a
b

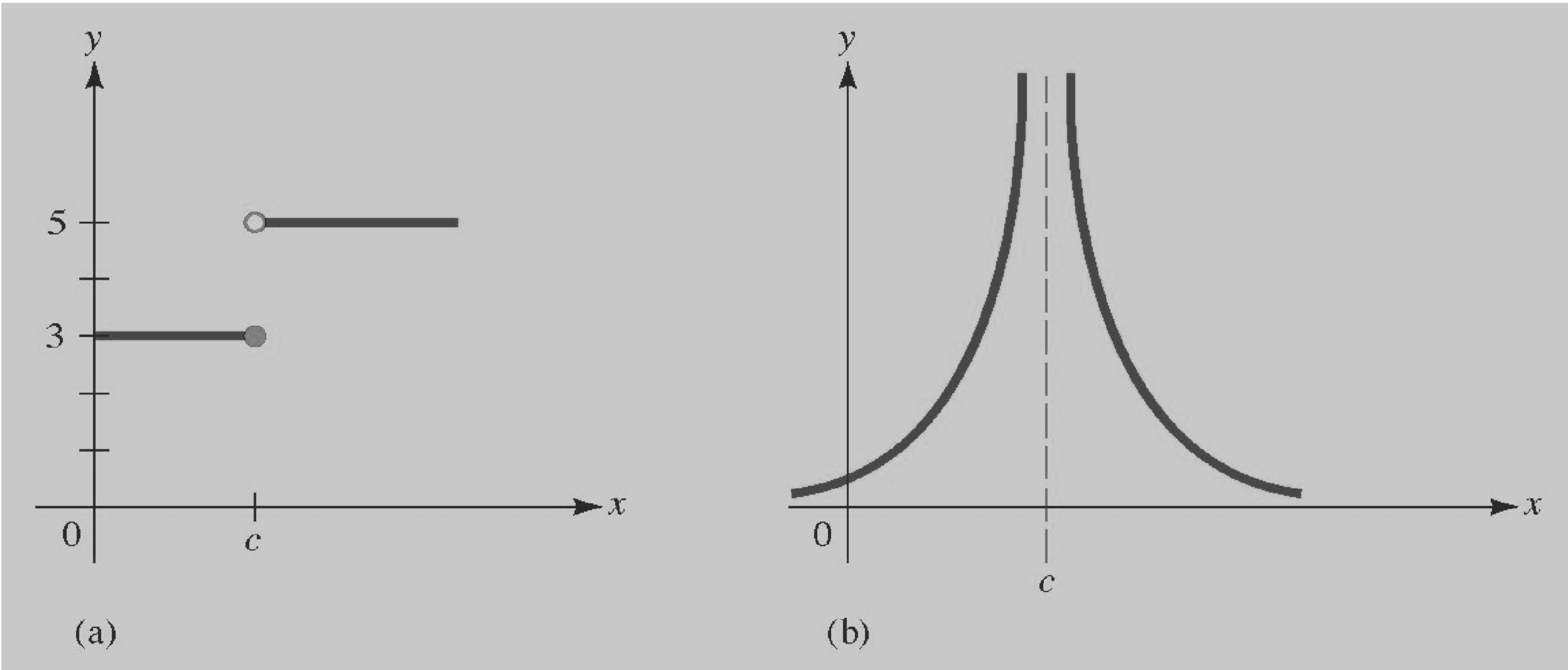
$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$$, x≠1

x tiende a 1 por la izquierda						x tiende a 1 por la derecha		
0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

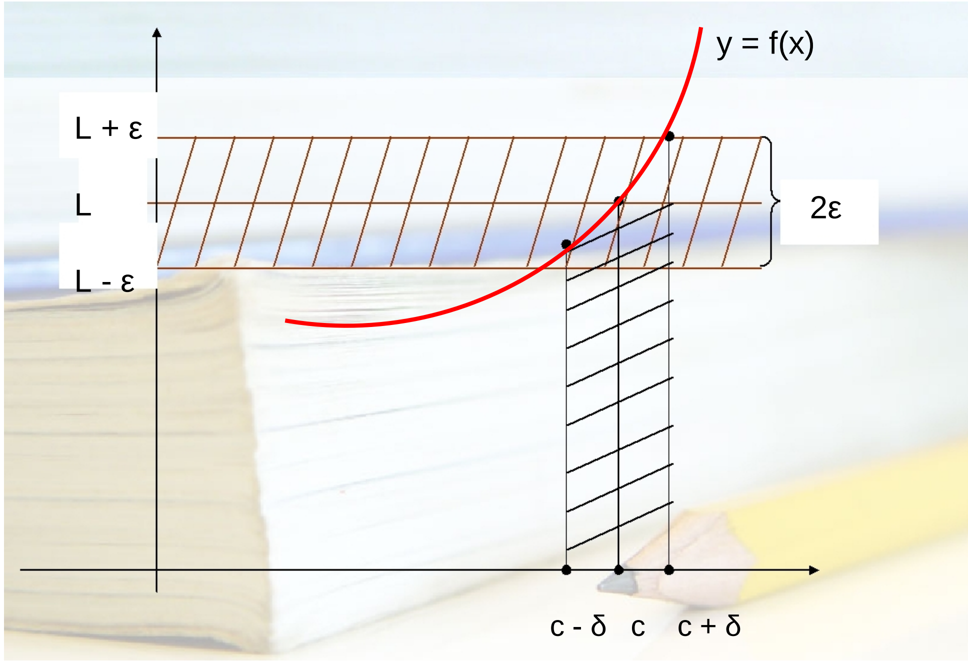
Definición provisional. La función f *tiende* hacia el *límite* L cerca de c, si se puede hacer que f(x) esté tan cerca como queramos de L, haciendo que x esté suficientemente cerca de c, pero siendo *distinto* de c, y se dice que *el límite de f(x) es igual a L cuando x tiende a c*, lo que se denota como $\lim_{x \to c} f(x) = L$




y
L
0
c
x
(a)
y
L
0
c
x
(b)
y
L
0
c
x
(c)


y
5
3
0
c
x
(a)
y
0
c
x
(b)

Definición 1 (Límite según Cauchy). El número L, se llama límite de la función f en el punto c, si cualquiera sea $\varepsilon>0$, se puede encontrar un $\delta=\delta(\varepsilon)$, para el cual la condición $|x-c|<\delta$, $x\neq c$, implica que $|f(x)-L|<\varepsilon$. Esto se denota como $\lim_{x\to c} f(x) = L$

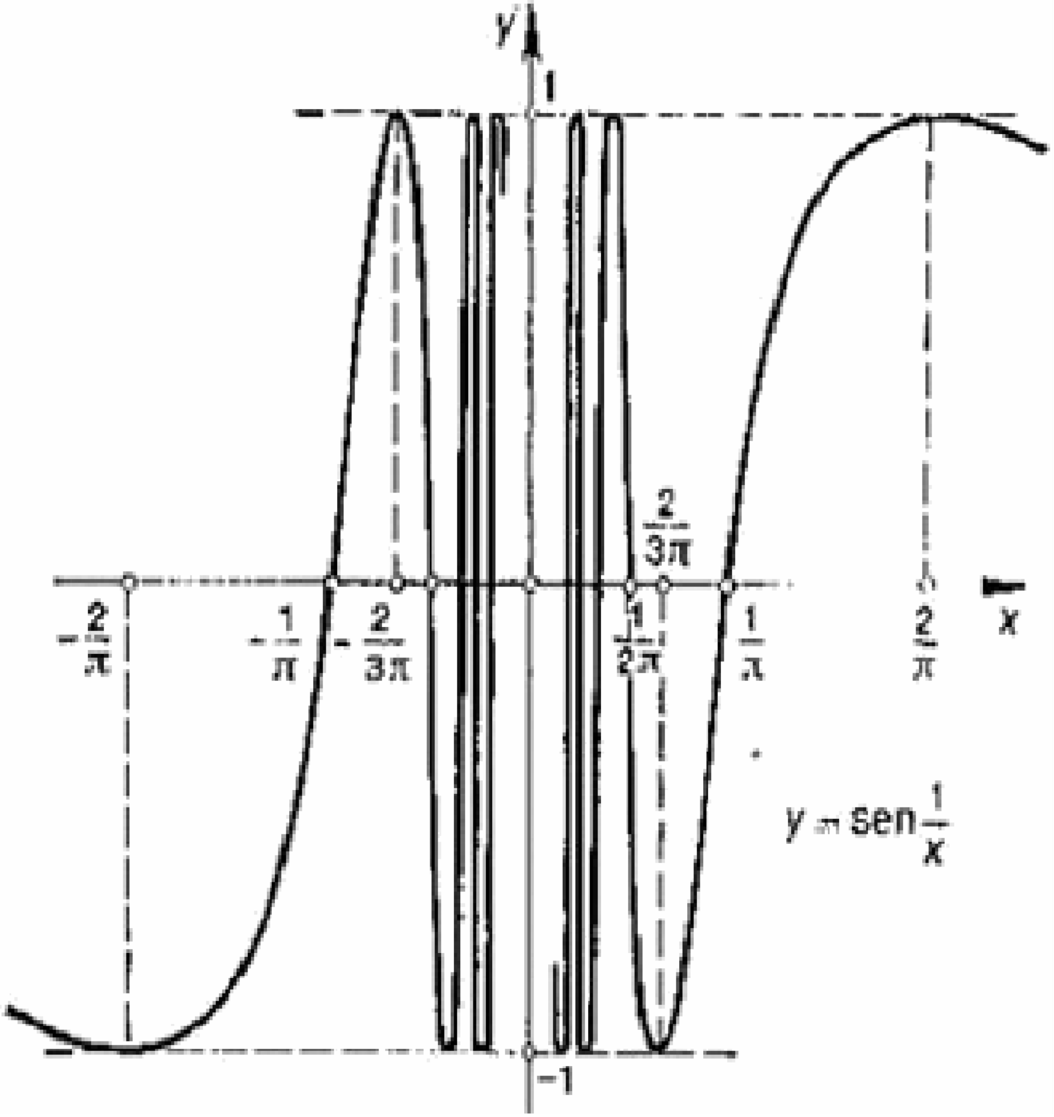


¿Qué significa esto en la práctica?

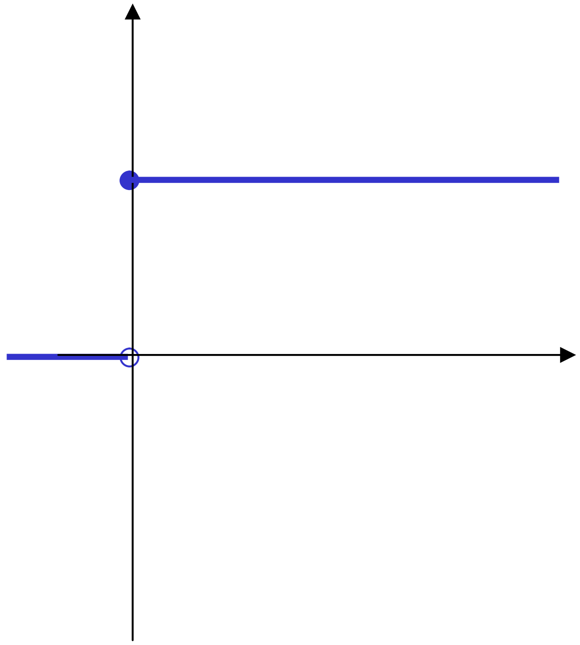
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x} \quad \rightarrow \; 2$$ cuando x→0

El valor L es *único*

¿Siempre existe el límite de la función en un punto?



$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

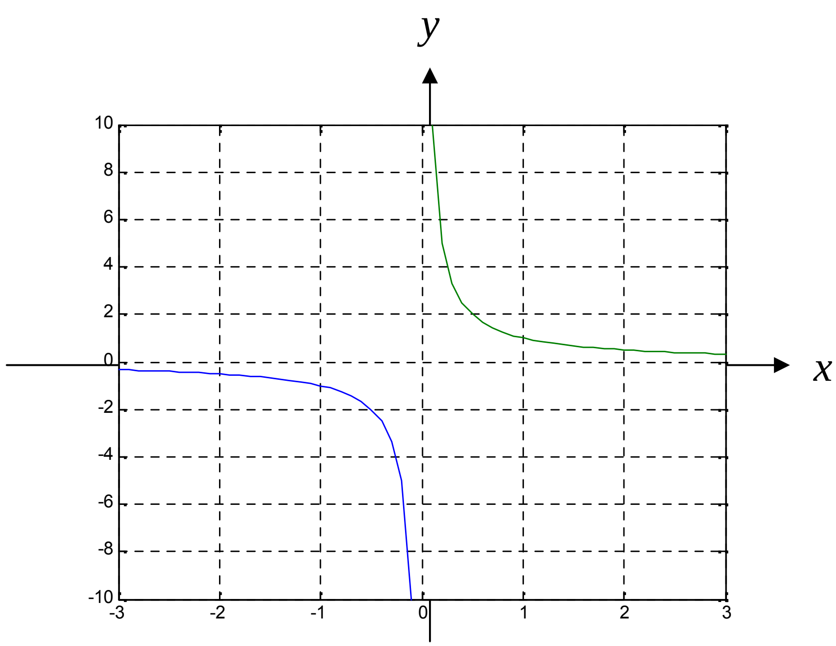


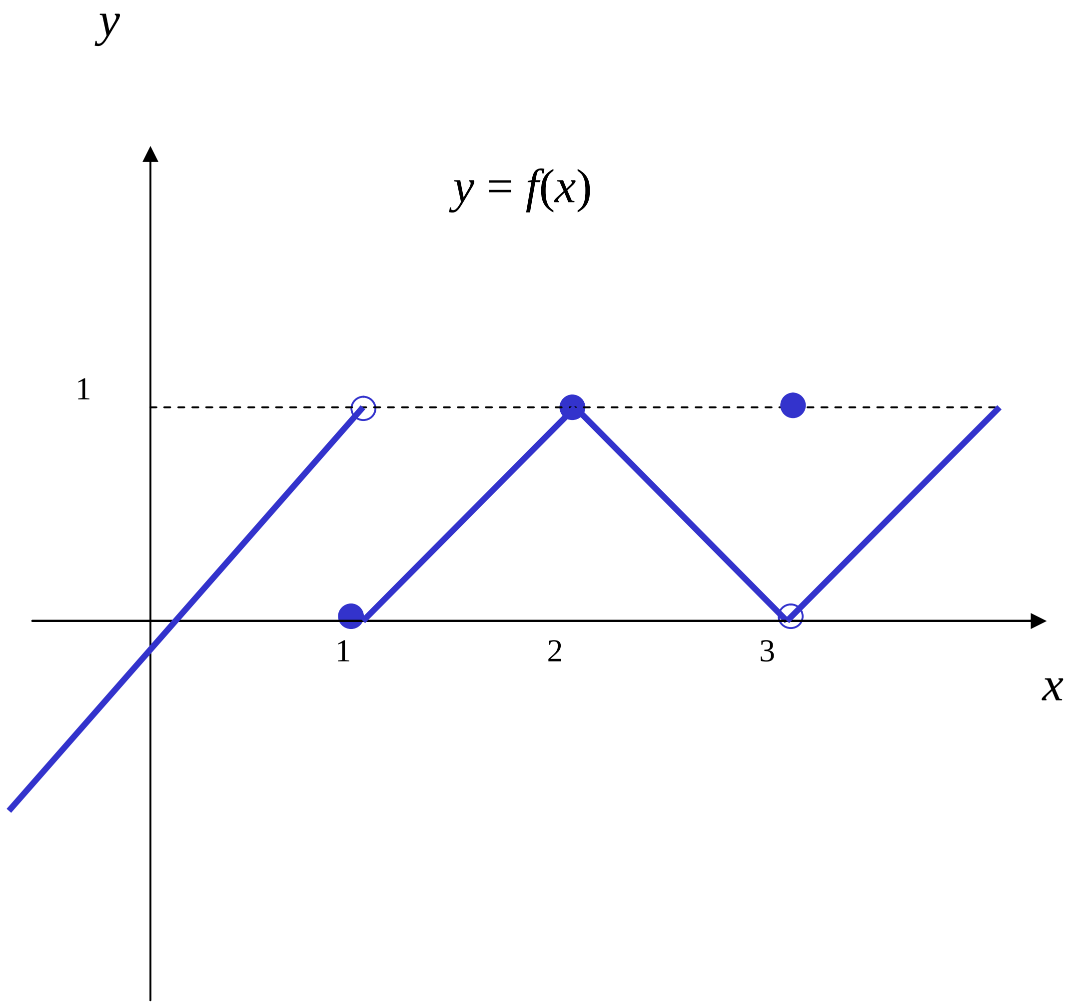
$$y=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

La función
“salta”

No está
acotada

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$




y
y = f(x)
1
1
2
3
x

Límite lateral izquierdo. El límite lateral izquierdo de f(x) cuando x tiende a c (o límite de f(x) cuando x tiende a c por la izquierda) es igual a L si podemos acercar arbitrariamente a L los valores de f(x) aproximando x lo suficiente a c, con valores de x menores que c y se escribe $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$

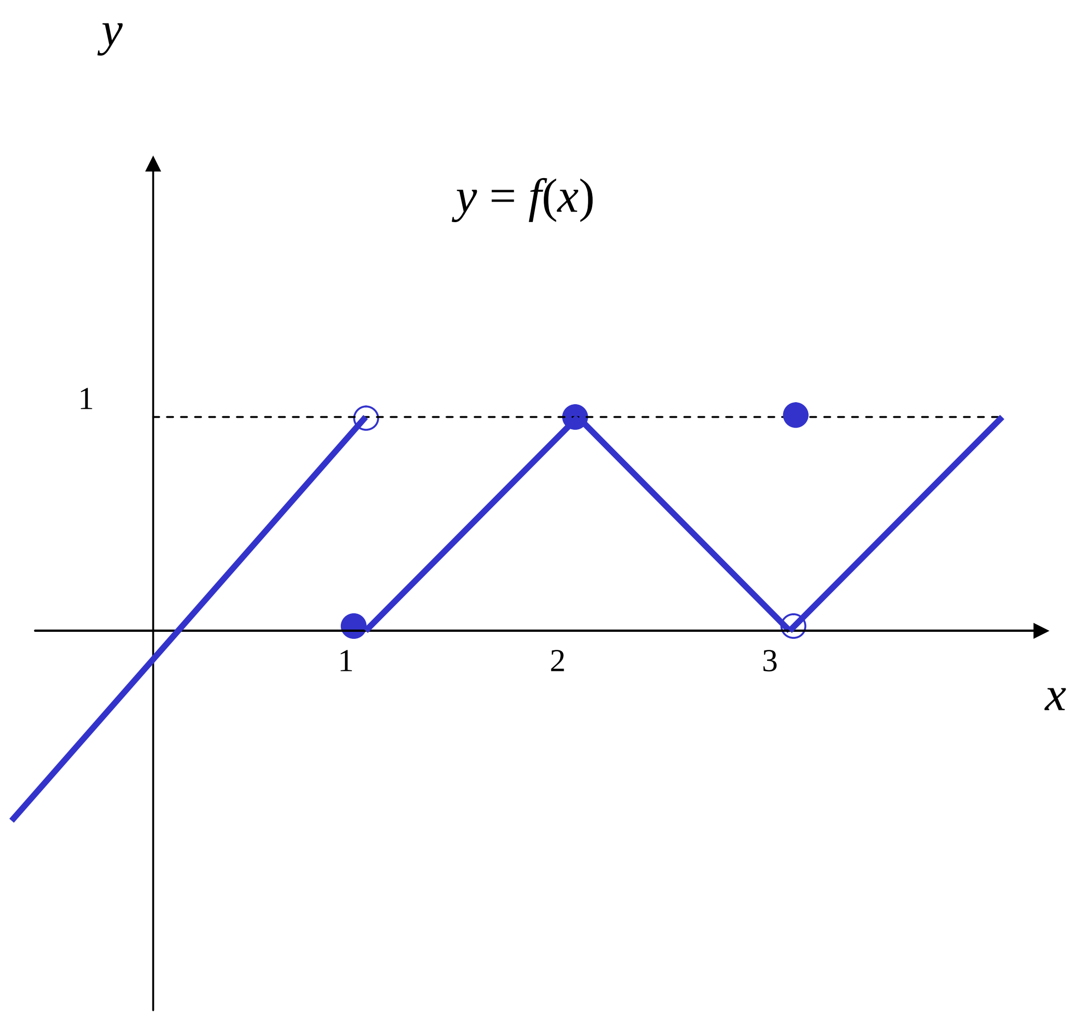
$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c} f(x)$$

Encontrar

$$\lim_{x \to +1} g(x)$$

$$\lim_{x \to +2} g(x)$$

$$\lim_{x \to +3} g(x)$$



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & si\ x<0\\ x^3, & si\ x>0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

existe *algún* $\varepsilon>0$, tal que para todo $\delta>0$, existe *algún* x para el que se cumple que $|x-c|<\delta$, pero no $|f(x)-L|<\varepsilon$.

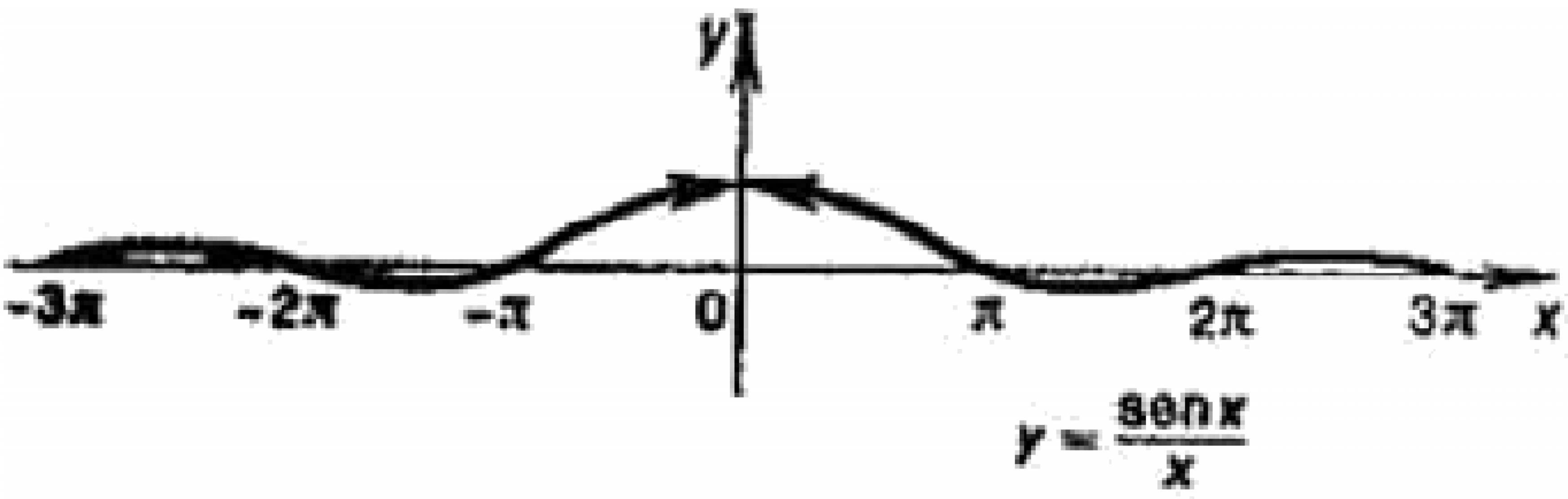
Una función definida sobre todo R que tiene límite en un solo punto

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in Q \\ -x, & x \in I \end{cases}$$

Una función definida sobre todo R y sin límite en ningún punto

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

¿cómo extender estas nociones al caso en que c sea ∞?



$$\lim_{x \to \infty} \frac{senx}{x} = 0$$

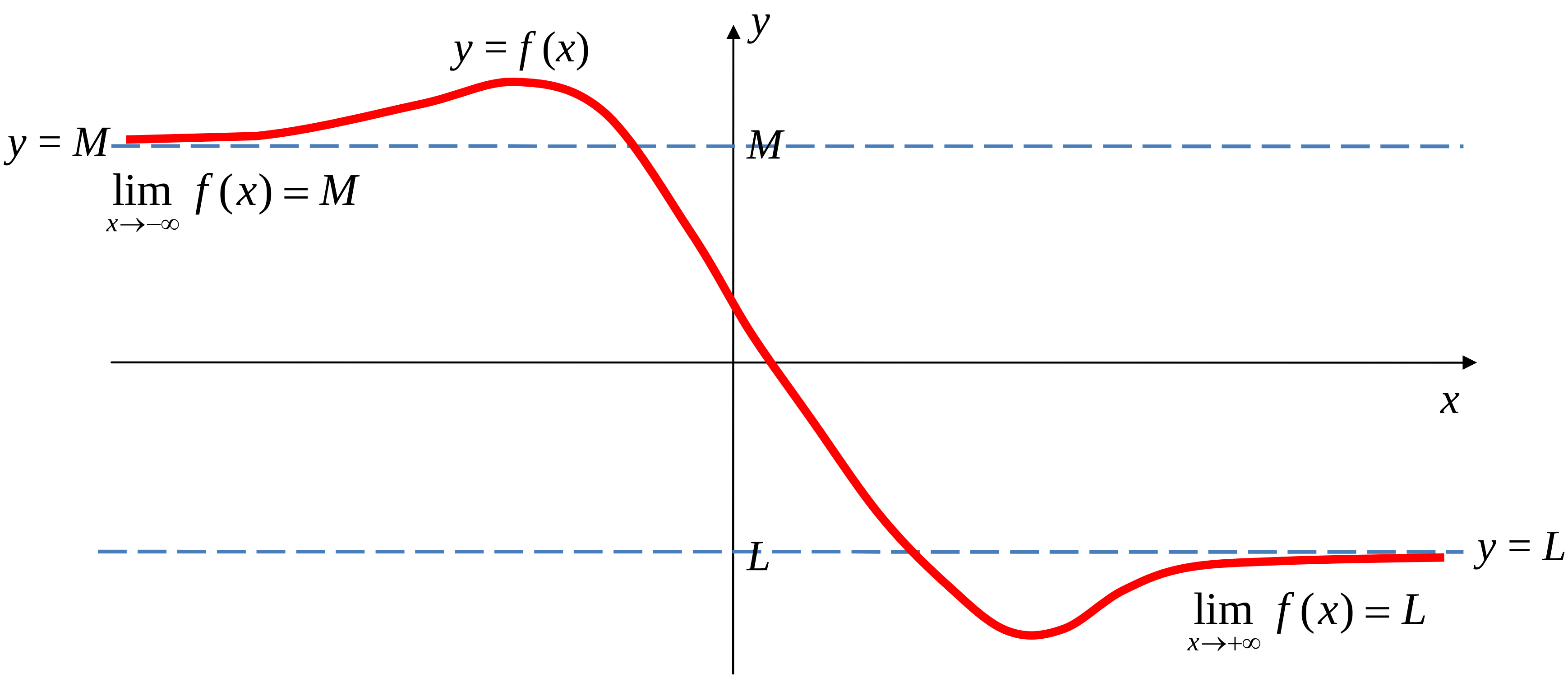
Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a infinito, y escribimos $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si para todo ε>0, existe un número real positivo K, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sí $|x|>K$.

Si los valores de la función $f(x)$ tienden al número L cuando x aumenta indefinidamente, se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

De manera similar, valores de la función $f(x)$ tienden al número M cuando x disminuye indefinidamente, y se escribe:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$



y
$y = f(x)$
$y = M$
M
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$
x
L
$y = L$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) \bullet g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \bullet \lim_{x \to c} g(x)$$

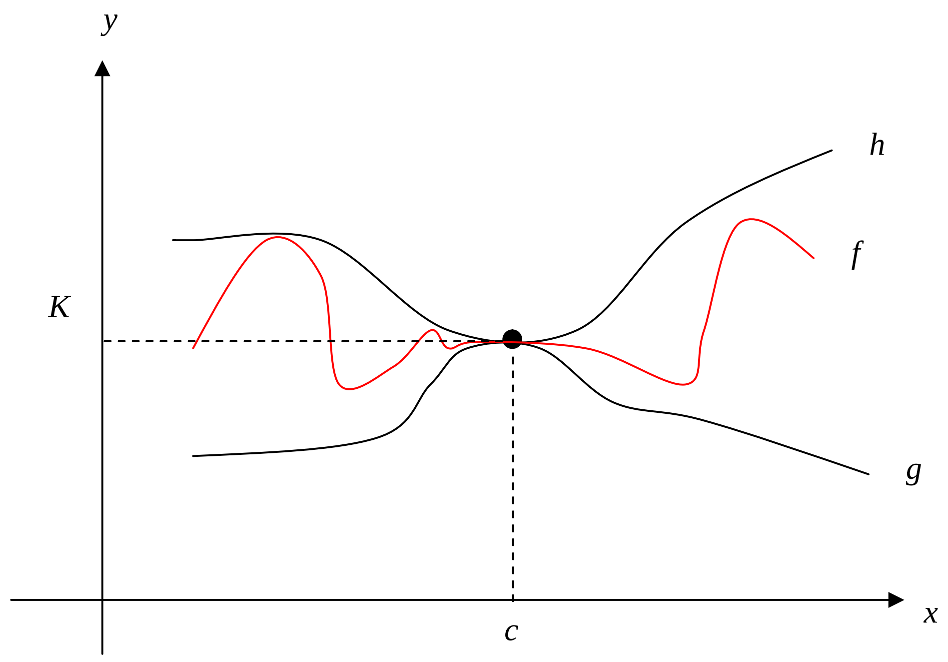
$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$$

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \right)^k = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right)^k, k \in \Re$$

Propiedad del acotamiento. Si una función tiene límite en un punto, existe un entorno de ese punto en el que la función está acotada.

Propiedad de la conservación del signo. Si el límite de una función en un punto no es cero, existe un entorno de ese punto en el que la función tiene el mismo signo que el límite.

Propiedad del emparedado. Sean h, f y g tres funciones definidas en un entorno reducido de un punto c, y tales que en ese entorno se verifica g(x)≤f(x)≤h(x). Si existen los límites de h(x) y de g(x) cuando x tiende al punto c y ambos límites tienen el mismo valor, por ejemplo K, entonces también existe el límite de f(x) cuando x tiende al punto c y ese límite es necesariamente K.



Cálculo del límite de $\operatorname{sen}(\theta)/\theta$ cuando θ tiende a 0

De la figura se ve que:

$$\operatorname{sen}\theta \leq \theta \leq \tan\theta$$

Dividiendo por $\operatorname{sen}\theta$:

$$1 \leq \theta/\operatorname{sen}\theta \leq \tan\theta/\operatorname{sen}\theta = 1/\cos\theta$$

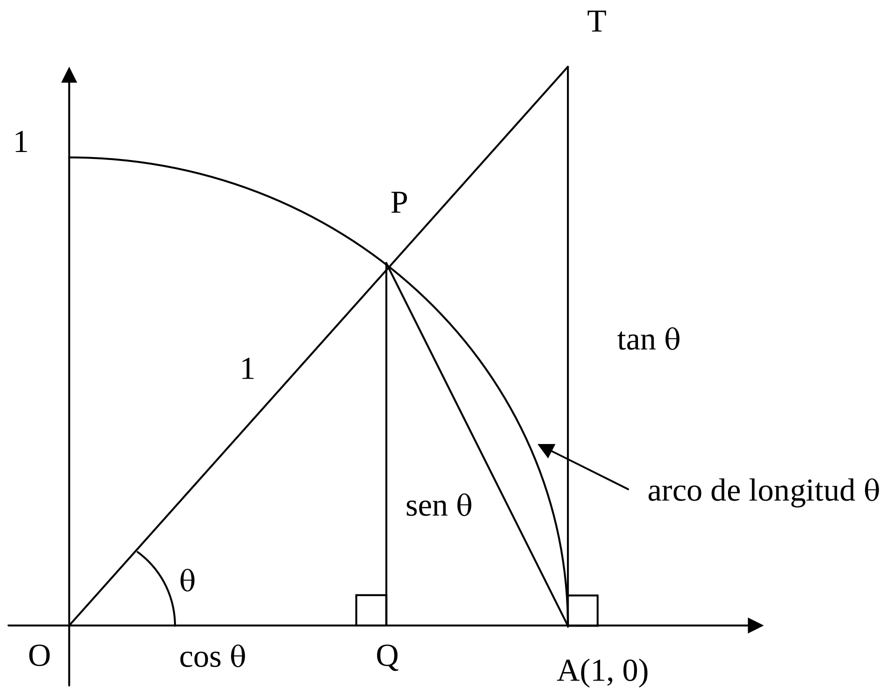
Invirtiendo cada término

$$1 \geq \operatorname{sen}\theta/\theta \geq \cos\theta$$

Tomando límite

$$\lim_{\theta\to 0} 1 \geq \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta/\theta \geq \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

Pero $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$



Luego, por el teorema del emparedado $\lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta/\theta = 1$

Límites de Polinomios

En el caso de funciones polinómicas, los límites pueden ser calculados por sustitución directa, es decir, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, entonces $\underset{x \to c}{Lim}\, P(x) = P(c)$ donde $P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + ... + a_0$

Límites de Funciones Racionales

Los límites de las funciones racionales pueden calcularse por sustitución directa, si el límite del denominador es distinto de cero, es decir, si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces $\underset{x \to c}{Lim} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

¿Qué hacer?

¿Existen más dificultades?

Al hallar los límites de la forma

$$\lim_{x\to a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = C, \tag{3}$$

debe tenerse en cuenta que:

1) si existen los límites finitos

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \psi(x) = B,$$

se tiene que $C = A^B$;

2) si $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A \neq 1$ y $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \pm\infty$, el problema de hallar el límite (3) se resuelve directamente;

3) si $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = \infty$, se supone que $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) \to 0$, cuando $x \to a$ y, por consiguiente,

$$C = \lim_{x\to a} \{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} [\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

siendo $e = 2{,}718\ldots$ el número de Neper.

Ejemplo 9. Hallar

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

Solución. Tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Haciendo las transformaciones que se indicaron más arriba, obtendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{1+x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

En este caso concreto, puede hallarse el límite con más facilidad, sin recurrir al procedimiento general:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}.$$

En todo caso, es conveniente recordar que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

Usando la definición $\varepsilon-\delta$ probar que $\lim_{x\to 1}(5x-2)=3$

Solución. Tenemos que probar que para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$, que dependerá del ε correspondiente, tal que

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |(5x-2)-3|<\varepsilon$$

Para ello intentamos establecer una conexión entre ambos valores absolutos, expresando el segundo en función del primero

$$|(5x-2)-3|=|5x-5|=5|x-1|<\varepsilon$$

Luego, para que se cumpla la desigualdad $|(5x-2)-3|<\varepsilon$ se ha de cumplir que $5|x-1|<\varepsilon$ y, en consecuencia

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$$

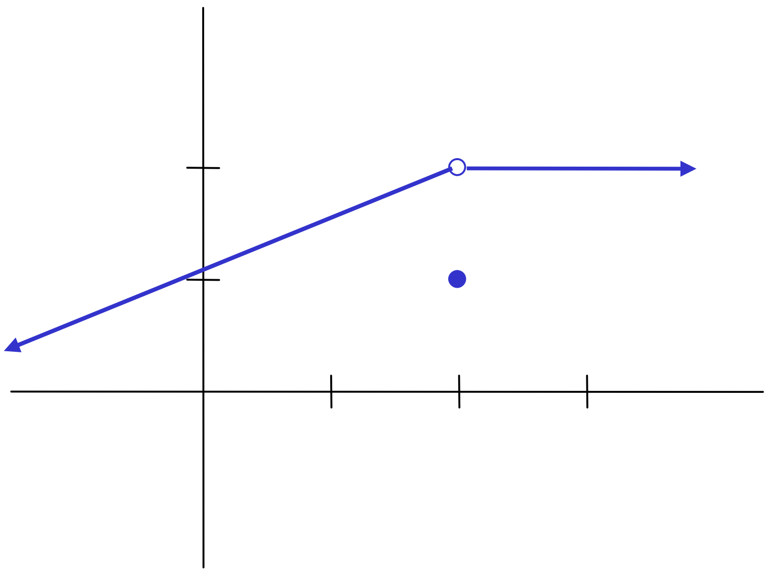
Luego eligiendo $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$, se tiene que la desigualdad $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{5}$

implica que $|(5x-2)-3|=|5x-5|=5|x-1|<5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)=\varepsilon$

y la veracidad del límite queda probada.

RECORDEMOS¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡

El Límite de una función se refiere al valor al cual la función se aproxima, tiende, no al valor de la función en el punto, si es que éste existe.



$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

<u>no es 1</u>

Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

El valor máximo del seno es 1, luego $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

El valor mínimo del seno es -1, luego $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq -x^2$

Así $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

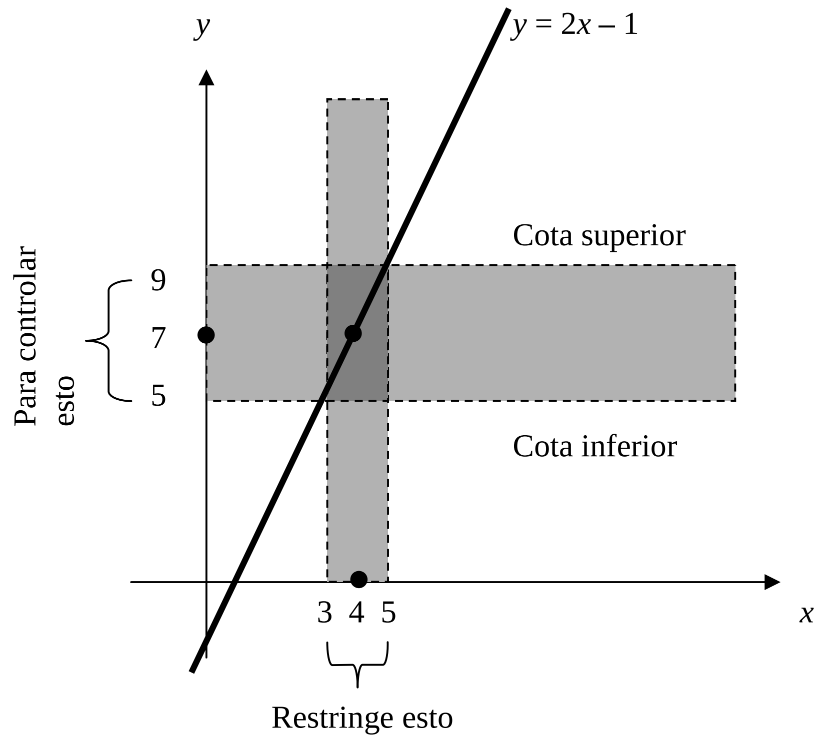
De donde se obtiene el valor deseado.

¿Qué significa para el ingeniero un límite?

Control de una función lineal

¿Qué tan cerca de $c=4$ debemos mantener el valor de entrada x, para estar seguros de que el resultado de $y=2x-1$ está a menos de 2 unidades de y=7?

¿Para que valores de x es $| y - 7 | < 2$?



$$| y - 7 | = | (2x - 1) - 7 | = | 2x - 8 |$$

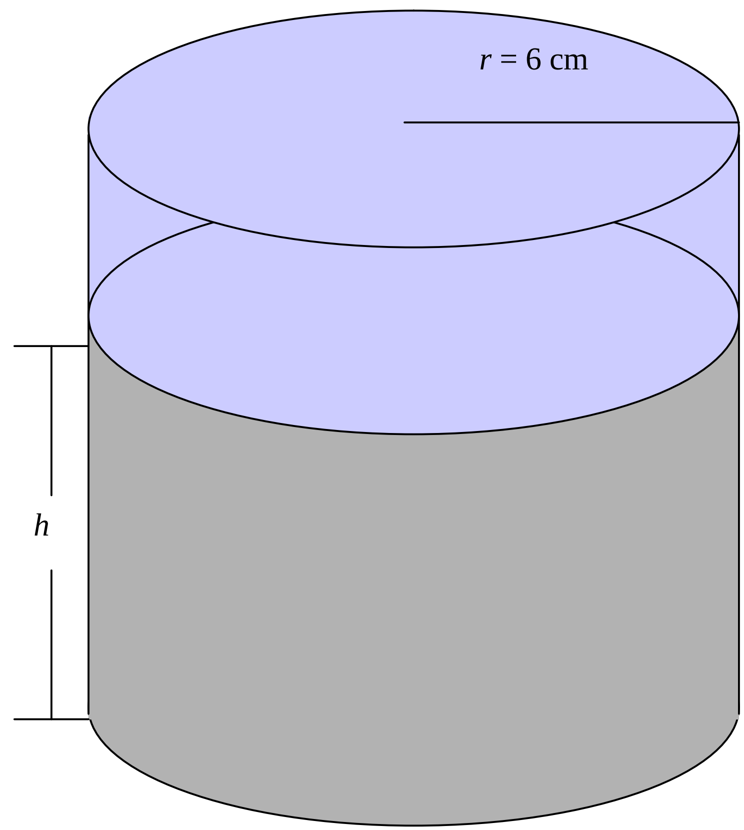
ó $\quad | 2x - 8 | < 2$

Resolviendo $3 < x < 5$ ó $\quad -1 < x - 4 < 1$

¿Por qué las marcas de una taza de medir de un litro miden alrededor de un milímetro de ancho?

Si la taza es un cilindro circular recto de 6 cm de radio, el volumen es $V=\pi 6^2 h=36\pi h$

¿Con qué precisión se debe medir h para medir 1 L(1000 cm^3), con un error no mayor de 1% (10 cm^3)?



Para que valores de *h* se satisface

$| V - 1000 | = | 36\pi h - 1000 | \leq 10$

$| 36\pi h - 1000 | \leq 10$

$-10 \leq 36\pi h - 1000 \leq 10$

$990 \leq 36\pi h \leq 1010$

$990 /36\pi \leq h \leq 1010 /36\pi$

$8.8 \leq h \leq 8.9$

$8.9 - 8.8 = 0.1 \text{ cm} = 1 \text{ mm}$

$$f : N \to R$$
$$n \to f(n) = x_n$$

Teorema 1. Toda sucesión x_n acotada superiormente (inferiormente) y monótona creciente (decreciente) es convergente y se tiene que $\lim x_n = \sup\{x_n\}$ ($\lim x_n = \inf\{x_n\}$).

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\ldots.(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$2 < x_n < 3$ $\qquad$ $e \approx 2,718281828459045$

La palabra infinitésimo suena como señalando hacia las dimensiones de la cantidad estudiada y frecuentemente se tiende a relacionar ésta con la representación de una cantidad “muy pequeña”. Tal representación es incorrecta, pues el término “infinitésimo”, por definición, no describe las dimensiones de la cantidad, sino el *carácter de su variación*. Por eso, sería más correcto llamarlas “cantidades que *disminuyen indefinidamente*” y no como es usual.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} \left(f(x) - L \right) = 0$; es decir, la diferencia entre una variable y su límite es un infinitésimo.

Por lo tanto, si la diferencia entre una función y una constante es un infinitésimo, *entonces la constante es el límite de la función.*

Los infinitésimos, cumplen propiedades muy similares a las que cumplen las funciones que tienen límites, a saber:

- La suma y resta de infinitésimos, es un infinitésimo.
- El producto de infinitésimos, es un infinitésimo.
- El producto de un infinitésimo, por una función acotada (no tiene que tener límite necesariamente), es un infinitésimo.

Los infinitésimos en otras operaciones (cociente, potencia, composición, etc.) deben ser tratados **cuidadosamente**.

Interrogante . . . . . .

Si sabemos que para $n > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, ¿cuál es el valor de los siguientes límites?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} =$$

Límite al infinito para funciones racionales

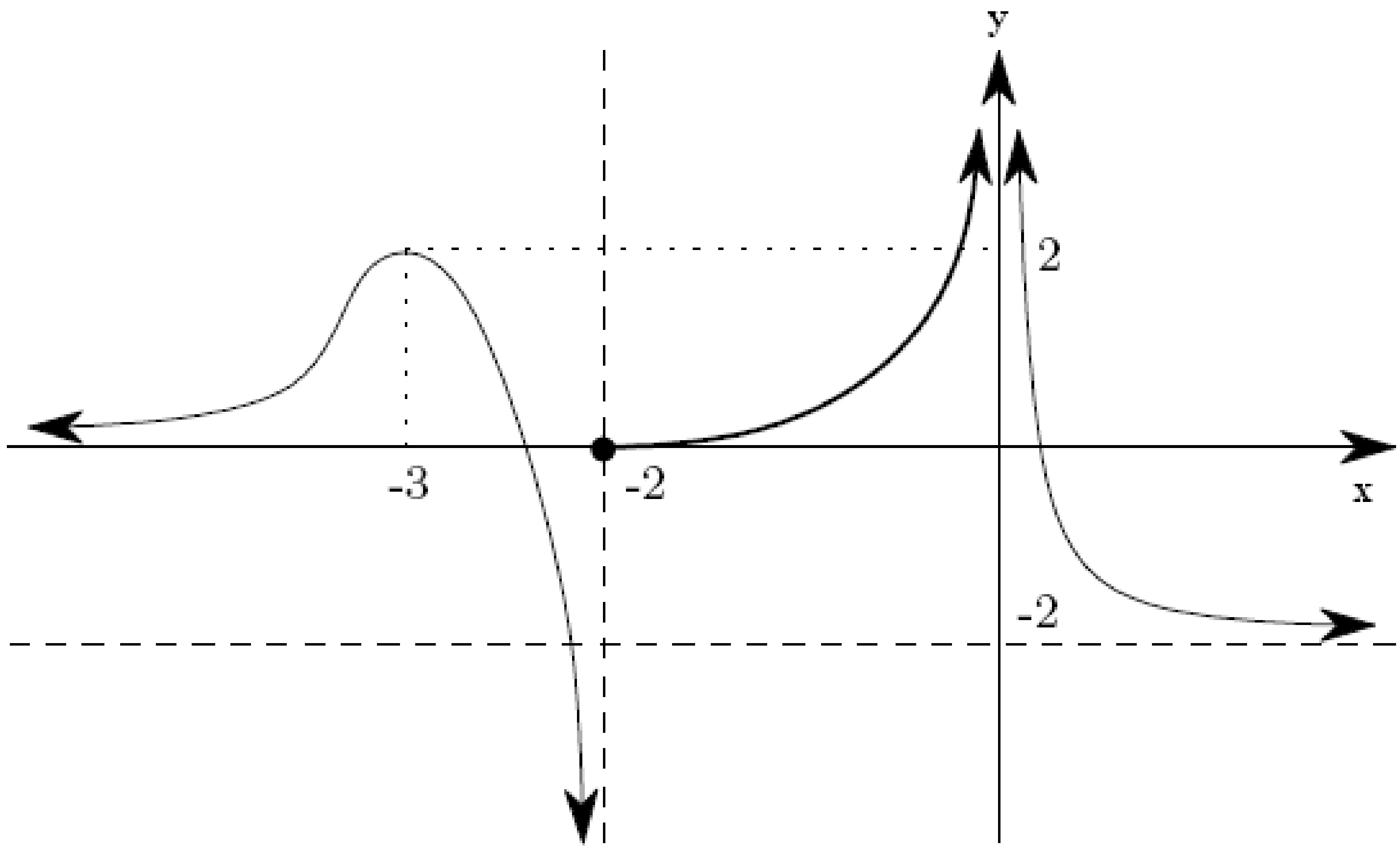
$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x + b_0}$$

Dividamos el numerador y denominador por la potencia de mayor orden que aparece (supongamos m>n) y calculemos el límite de la nueva expresión:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{x^m}}{\dfrac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x + b_0}{x^m}}\right]$$

A partir de la gráfica…….

¿En qué valor de ***a***, se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$?



Volvamos a las asíntotas de una función

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

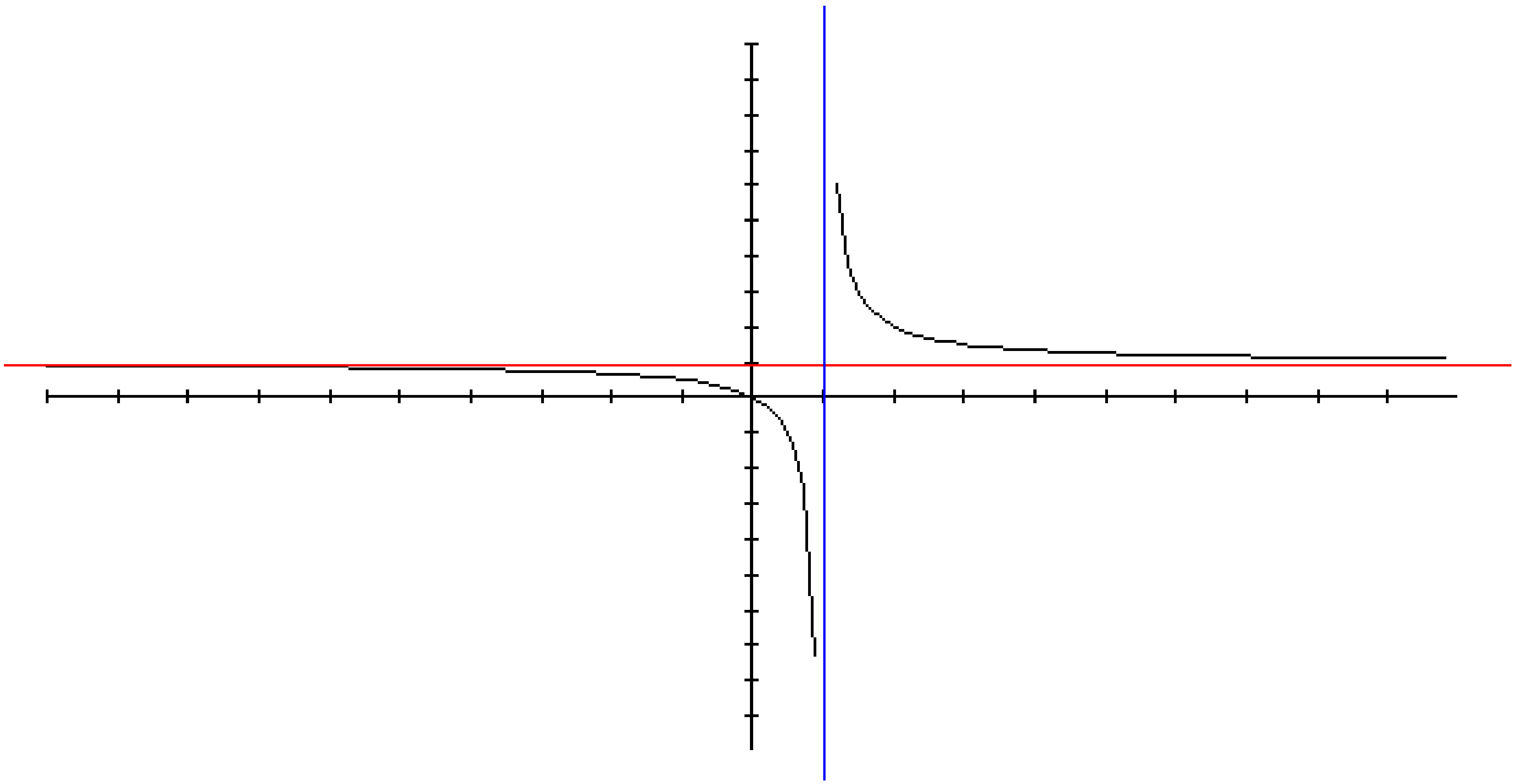
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = n$$

Consideremos la función y=x/(x-1) ¿tiene asíntotas?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{x-1} - 0 \right] = 1$$



¿Qué problemas y ejercicios nos encontraremos?

1. Desde el punto de vista práctico, es necesario saber calcular límites, para ello deben basarse en las propiedades presentadas.
2. Demostrar, utilizando la definición, que un valor dado L, es el límite de una función en un punto c señalado.
3. Demostrar, utilizando la definición, que un valor dado L, no es el límite de una función en un punto c señalado.
4. Demostrar, utilizando límites laterales, que una función tiene, o no, límite en un punto.
5. Analizar la convergencia de una sucesión dada (la existencia de su límite) mediante la aplicación del Teorema 1 o la definición.