Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

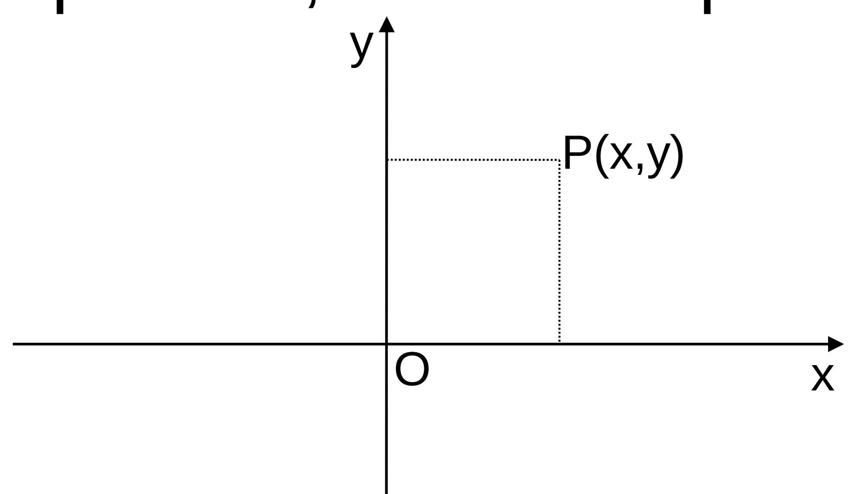
UNIDAD 9: NOCIONES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES

Para fijar la posición de un punto en el plano se emplea entre otros, el sistema de coordenadas cartesianas, debido a René Descartes.

Se trazan en el plano dos ejes orientados perpendiculares x e y cuyos ceros coincidan en O (Origen del sistema).

Las coordenadas del punto P, está dado por la abscisa x y la ordenada y.



ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

La siguiente ecuación $Ax + By + C = 0$ recibe el nombre de Ecuación general de la recta o Ecuación de la recta en su forma implícita.

A, B y C son números constantes, es decir, independientes de x e y, tales que los dos primeros no sean nulos a la vez.

Su gráfica es una recta.

$$Si \quad x = 0 \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-C}{B}$$

$$Si \quad y = 0 \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-C}{A}$$

Ecuación General de la recta $\boxed{Ax + By + C = 0}$

Si B $\neq$ 0 podemos despejar: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Si llamamos: $a = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B}$

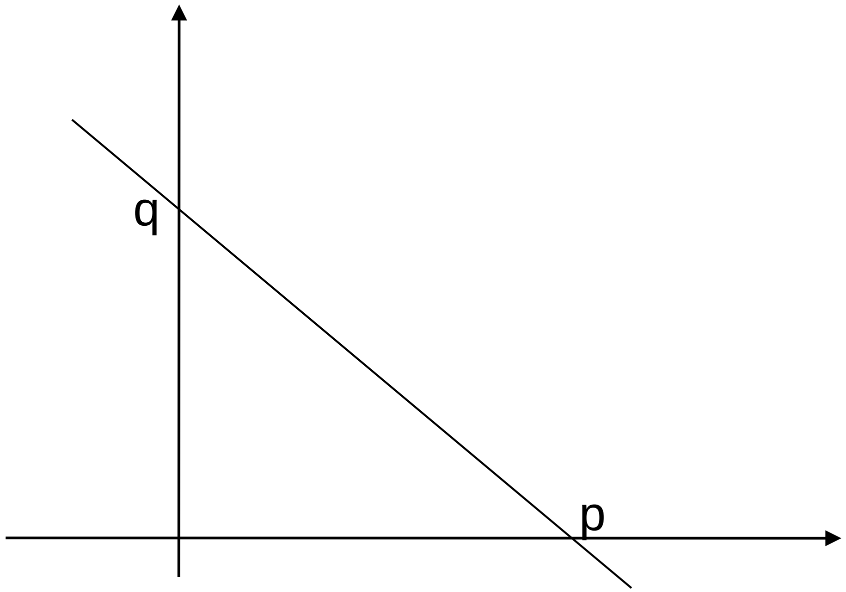
Se tiene la **Ecuación Explícita de la recta** $\boxed{y = ax + b}$

El valor *a* se llama pendiente de la recta y representa la tangente trigonométrica del ángulo positivo que la recta determina con el semieje positivo de las abscisas; el valor b se llama ordenada al origen y es la ordenada del punto en que la recta intersecta al eje de las ordenadas.

Ecuación General de la recta

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Si A, B y C son distintos de cero se tiene:



$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = \frac{-C}{-C}$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Si llamamos $p = \dfrac{-C}{A}; \quad q = \dfrac{-C}{B}$

Ecuación Segmentaria de la recta

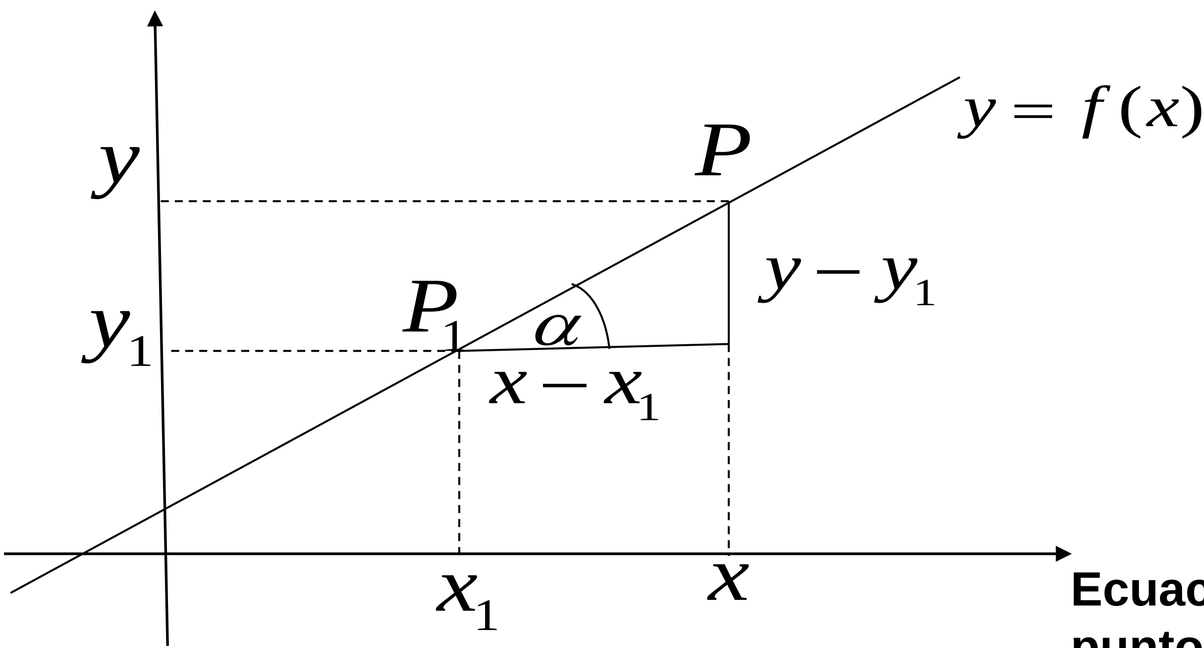
$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA DETERMINADA POR UN PUNTO Y SU PENDIENTE

Supongamos conocidas las coordenadas de un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ que pertenece a cierta recta no paralela al eje y, y además su pendiente $a = tg\alpha$

Consideramos un punto genérico $P = (x, y)$, con $x \neq x_1$

Según la definición de pendiente que hemos visto:



$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

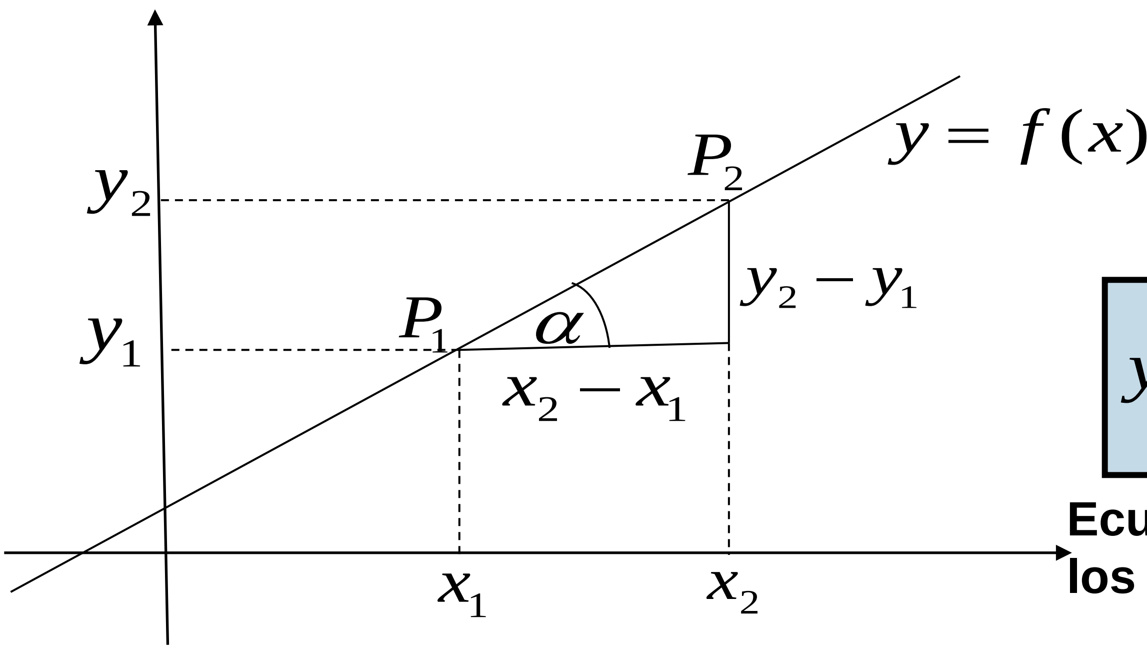
$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

Ecuación de la recta que contiene al punto P_1 cuya pendiente es a

Ecuación de la recta determinada por dos puntos

Supongamos conocidas las coordenadas de dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ que pertenecen a cierta recta no paralela al eje y, es decir $x_1 \neq x_2$

Como la recta pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ $\quad y - y_1 = a(x - x_1)$



$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ecuación de la recta que contiene a los puntos P_1 y P_2

CIRCUNFERENCIA: DEFINICIÓN. ECUACIÓN.

Se llama Circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro fijo llamado centro. La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro recibe el nombre de radio.

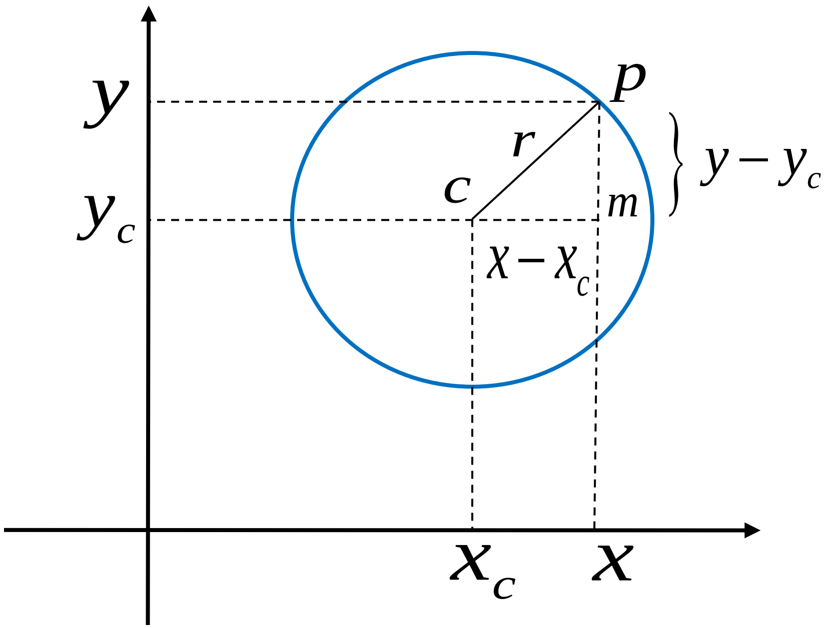
Sea C una circunferencia de centro $c = (x_c, y_c)$

$Sea\ \ p \in C\ con\ \ p = (x, y)$

En el triángulo $\overset{\triangle}{c\,p\,m}$, *por el Teorema de Pitágoras*, se tiene:

$$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2}$$

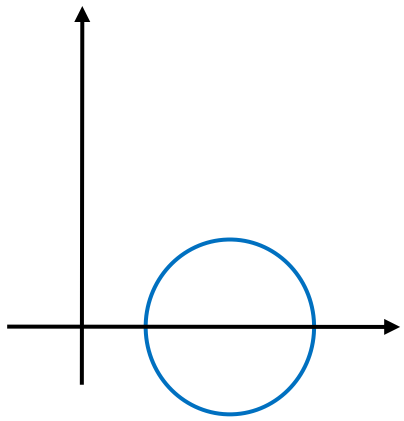
Ecuación Explícita de la circunferencia



Casos Particulares:

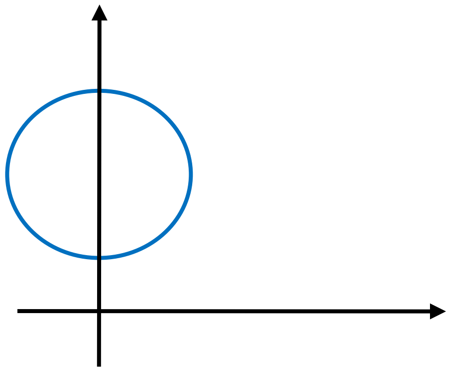
a) El centro es un punto del eje x.

$$(x-x_c)^2+y^2=r^2$$



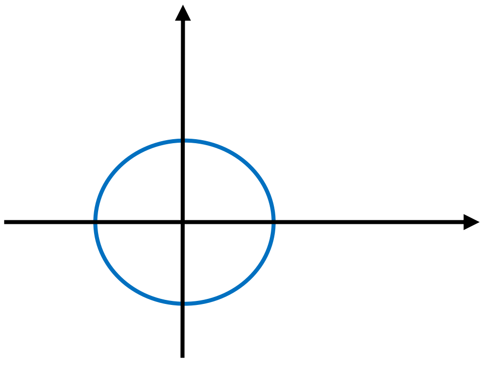
b) El centro es un punto del eje y

$$x^2+(y-y_c)^2=r^2$$



c) El centro es el origen del sistema.

$$x^2+y^2=r^2$$



ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Ecuación Explícita de la circunferencia $\boxed{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2}$

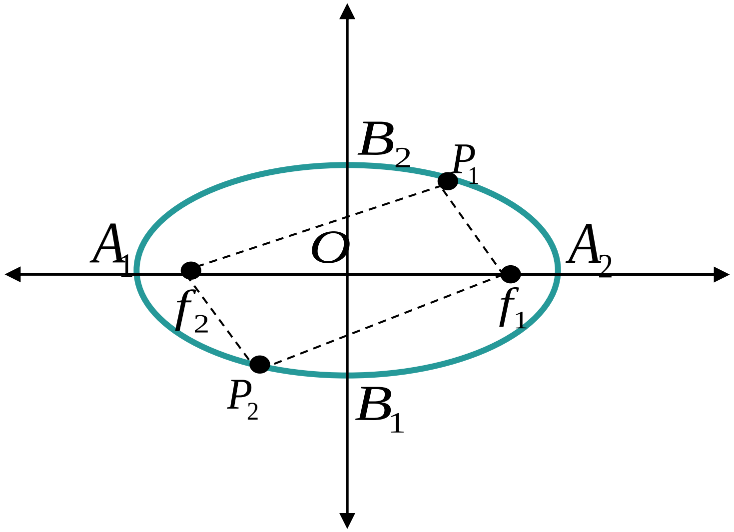
$$x^2-2.x.x_c+x_c{}^2+y^2-2.y.y_c+y_c^2-r^2=0$$

$$Llamando:-2x_c=D;\quad -2y_c=E;\quad x_c^2+y_c^2-r^2=F$$

Ecuación general o implícita de la Circunferencia $\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$

ELIPSE: DEFINICIÓN. ECUACIÓN.

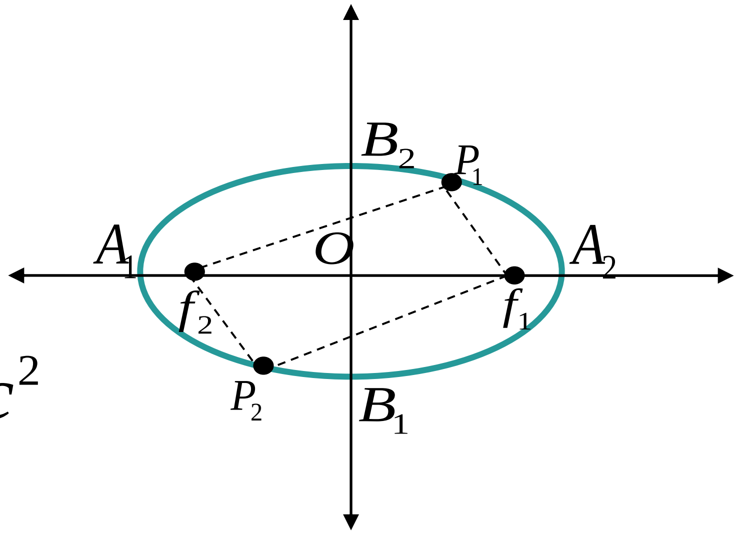
Se llama Elipse al lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una suma constante



ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA ELIPSE

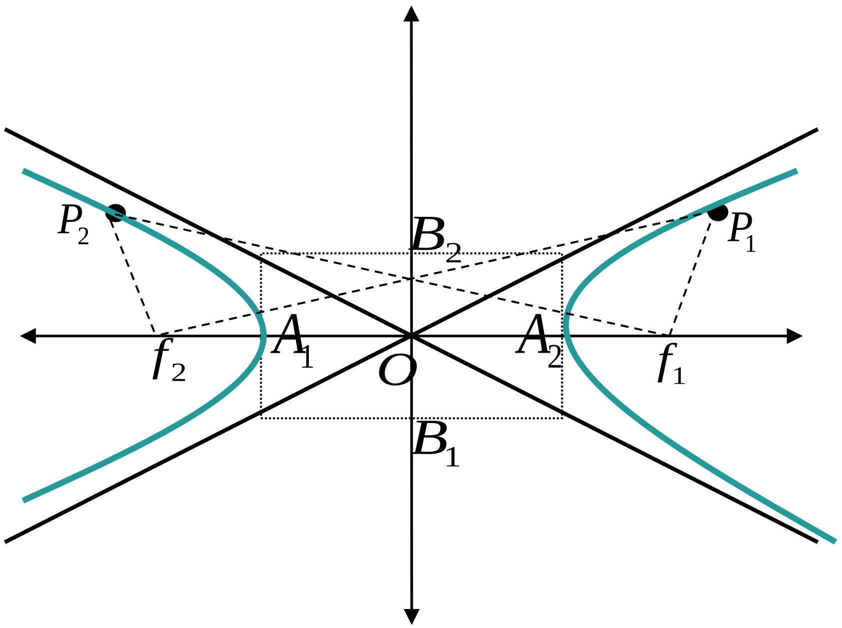
- Focos: $f_1 \ y \ f_2$
- *Centro O, punto medio de* $\overline{f_1 f_2}$
- *Vértices:* $A_1 \ y \ A_2$; $B_1 \ y \ B_2$
- *Eje mayor* $\overline{A_1 A_2}$; *Medida* $\overline{A_1 A_2} = 2a$
- *Eje menor* $\overline{B_1 B_2}$; *Medida* $\overline{B_1 B_2} = 2b$
- *Lado recto* $L_r = 2\frac{b^2}{a}$
- Una relación importante: $a^2 = b^2 + c^2$
- *Excentricidad:* $e = \frac{c}{a}$
-
- ***Ecuación explícita de la elipse desplazada***

$$\boxed{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$$

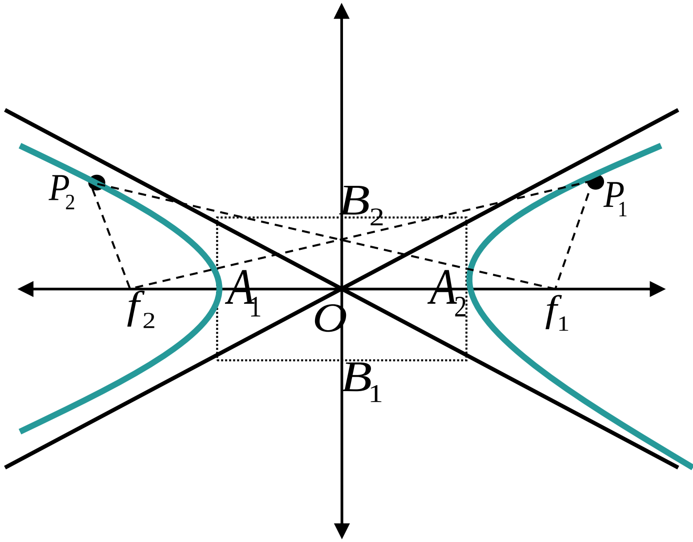


HIPÉRBOLA: DEFINICIÓN. ECUACIÓN.

Se llama Hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una diferencia constante.



ELEMENTOS PRINCIPALES DE LA HIPÉRBOLA

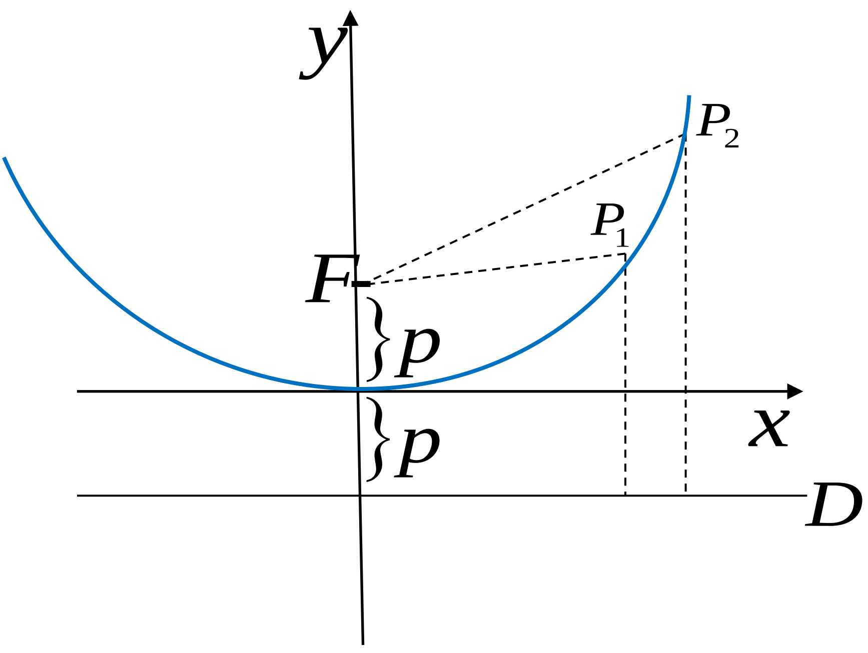


- *Focos:* $f_1 \;\; y \;\; f_2$
- *Centro O, punto medio de* $\overline{f_1 f_2}$
- *Vértices:* $A_1 \;\; y \;\; A_2$; $B_1 \;\; y \;\; B_2$
- *Eje transversal* $\overline{A_1 A_2}$ *;Medida* $\overline{A_1 A_2} = 2a$
- *Eje imaginario* $\overline{B_1 B_2}$ *;Medida* $\overline{B_1 B_2} = 2b$
- Una relación importante: $c^2 = a^2 + b^2$
- *Asíntotas: Son las rectas que están sobre las diagonales del rectángulo fundamental de ecuación:* $y = \frac{b}{a} x$ $\quad y = -\frac{b}{a} x$
- *Ecuación explícita de la hipérbola desplazada:*

$$\boxed{\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1}$$

PARÁBOLA: DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIÓN.

Se llama Parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.



Elementos principales:

Foco: F

Directriz: D

Vértice: $V = (X_0, Y_0)$

Eje de la parábola VF

Parámetro 2p: distancia del foco a la directriz.

PARÁBOLA: DEDUCCIÓN DE FÓRMULA

En la parábola: $\overline{PF} = \overline{PD}$

Sea 2p = d (F,D)

Sean $F = (0, p)$ y $D // X$ *donde la ecuación de D: y = -p*

Dado $p = (x, y)$ *un punto cualquiera de la parábola, se debe verificar que* $\overline{PF} = \overline{PD}$

Como $\overline{PD} = y + p$ *y* $\overline{PF} = \sqrt{(y-p)^2 + x^2}$

Se tiene: $y + p = \sqrt{(y-p)^2 + x^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros: $(y+p)^2 = (\sqrt{(y-p)^2 + x^2})^2$

$$y^2 + 2yp + p^2 = y^2 - 2yp + p^2 + x^2$$

$$2yp + 2yp = x^2$$

$$4yp = x^2$$

Ecuación de la Parábola desplazada del origen:

$$\boxed{(X - X_0)^2 = 4p(Y - Y_0)}$$