Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Licenciatura en Sistemas de Información
Álgebra

UNIDAD 6:
POLINOMIOS

POLINOMIOS

Se llama polinomio en una indeterminada x, con coeficientes en R, de grado n, a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

donde: x es la indeterminada

$n \in N$

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in R$ y se llaman coeficientes

$a_n \neq 0$

Cada una de las expresiones $a_i x^i$ se llama término del polinomio, a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente.

Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Justificar.

$a) \quad 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$

$b) \quad 3x^5 + 2\sqrt{x} - x + 5$

$c) \quad -2x^3 + \sqrt{2}x^2 - x + 3$

$d) \quad x^5 + 2x^4 - x + \dfrac{5}{x}$

$e) \quad (x-1).(x+1)$

POLINOMIOS

Sea el polinomio:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

Llamamos **grado del polinomio** a $n \; si \; a_n \neq 0$

Polinomio Nulo: es aquel en el que todos sus coeficientes son iguales a cero. $P(x)=0x^n+.....+0x^2+0x^1+0x^0$

Notación: $P(x)=0$

Polinomio Mónico: es aquel cuyo coeficiente principal es 1.

Por ej: $P(x)=x+2$ es un polinomio mónico de grado 1.

$P(x)=x^4+2x^3-x^2+1$ es un polinomio mónico de grado 4.

POLINOMIOS

Según el número de términos, los polinomios se llaman:

- **Monomio:** si tiene un único término. Ejemplo: $P(x) = -3x^2$
- **Binomio**: si tiene dos términos. Ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3$
- **Trinomio**: si tiene tres términos.

  Ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3 - 5$
- **Cuatrinomio**: si tiene cuatro términos.

  Ejemplo: $P(x) = 2x^2 + 3x^3 - 5x + 1$
- **Polinomio:** si tiene más de cuatro términos.

MONOMIO

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Son **monomios semejantes** entre sí aquellos en los que aparecen las mismas letras con los mismos exponentes.

Ejemplo: Son monomios semejantes:

$2ax^4$; $-3ax^4$; ax^4 ; $5ax^4$

Por tanto "***Dos monomios semejantes sólo se pueden diferenciar en el coeficiente***"

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS

Solamente pueden sumarse dos monomios si estos son semejantes.

La suma es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes.

Ejemplos:

$$a)\quad 5x^2+2x^2+x^2=8x^2$$

$$b)\quad 3x^3+5x^2-2x^2+x^3=4x^3+3x^2$$

$$c)\quad 3x^4+2x^2+5x^4=8x^4+2x^2$$

PRODUCTO Y DIVISIÓN DE MONOMIOS

Para multiplicar o dividir dos monomios, se aplican las propiedades ya estudiadas, en particular las relacionadas con el producto y el cociente de dos potencias de igual base. $a^m . a^n = a^{m+n} \quad y \quad a^m : a^n = a^{m-n}$

- El producto de dos monomios siempre es otro monomio.
- El resultado de la división puede ser otro monomio o una expresión algebraica fraccionaria.

Ejemplos: $a) \quad 5ax^4.(2ax^2) = 10a^2x^6$

$b) \quad 10ax^4 : (2ax^2) = 5x^2$

$c) \quad 5ax^4 : (2ax^2z) = \frac{5x^2}{2z}$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma: Para sumar dos polinomios, se agrupan los términos semejantes y se suman sus coeficientes.

Resta: Para restar un polinomio de otro, se agrupan como en la suma, los términos semejantes, pero cambiando de signo cada término del polinomio sustraendo, y se suman los coeficientes.

Dados: $P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$

$Q(x) = -x^3 + 5x^2 + 7x + 4$

Hallar: $a)\quad P(x) + Q(x)$

$b)\quad P(x) - Q(x)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Producto: Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta.

Se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se suman los términos semejantes obtenidos.

Dados: $P(x) = 5x^4 - 2x^2 - 10$

$$Q(x) = -x^2 + 7x + 4$$

Hallar: $P(x).Q(x)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

División

Algoritmo de la división:

Dados dos polinomios $P(x)\ y\ Q(x)$. Existen y son únicos dos polinomios $C(x)\ y\ R(x)$ tales que:

$$a)\quad P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

$$b)\quad R(x) = 0 \quad \vee \quad gr(R) < gr(Q)$$

Los polinomios P, Q, C y R se llaman, respectivamente, dividendo, divisor, cociente y resto.

La disposición usual de estos cuatro polinomios es la conocida en la división de números

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

División

Dados dos polinomios $P(x)\ y\ Q(x)$.

Sea $gr(p) = m \quad y \quad gr(Q) = n$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

- Si $m < n \Rightarrow C(x) = 0\ y\ R(x) = P(x)$
- Si $m \geq n \Rightarrow gr(C) = m - n \quad y \quad gr(R) \leq n - 1$

Ejemplo: Dados $P(x) = 4x^3 + 3 - 3x^2$ y $Q(x) = -x + x^2 + 1$

Hallar el cociente y el resto de $P(x) : Q(x)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Caso Particular: Regla de Ruffini

Si el divisor Q es un polinomio mónico y gr(Q) = 1, el proceso anterior puede simplificarse utilizando la Regla de Ruffini.

Dados los polinomios:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad y \quad Q(x) = x + b_0$$

Observemos que:

a) El cociente C es un polinomio de grado n – 1

gr (C) = gr(P) – gr(Q) = n – 1

b) El resto R es un número

gr (R) < gr (Q) = 1 $\Rightarrow$ gr (R) = 0

REGLA DE RUFFINI

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $\quad y \quad$ $Q(x) = x + b_0$

Para realizar la división $P(x) : Q(x)$ se procede de la siguiente manera:

1) En el primer renglón se escriben todos los coeficientes del dividendo completo y ordenado en forma decreciente según los exponentes de la indeterminada.

$$\begin{array}{r|lllll} & a_n & a_{n-1}\ .... & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

REGLA DE RUFFINI

2) En el ángulo de las dos rectas se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor.

$$\begin{array}{cc|ccccc} & & a_n & a_{n-1} \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & + & & & \\ & -b_0 & & -a_n b_0 & & & \\ \hline \mathrm{x} & & a_n & a_{n-1}-a_n b_0 & & & \end{array}$$

3) El primer coeficiente del dividendo (a_n) se repite en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal, y luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente; se coloca este resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo y se realiza la suma de los números que quedaron alineados. El resultado se escribe en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal.

REGLA DE RUFFINI

$$\begin{array}{cc|cccccc} & & a_n & a_{n-1} & \ldots\ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & + & & & & \\ & -b_0 & & -a_n b_0 & & & & \\ \hline x & & a_n & a_{n-1}-a_n b_0 & & & & R \end{array}$$

4) Se repite este proceso hasta el último coeficiente.

El último valor obtenido es el resto (R) de la división y los valores que le preceden son los coeficientes del cociente C.

Ejemplo: Dados los polinomios P y Q, hallar el cociente y el resto de P:Q, aplicando la regla de Ruffini.

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \qquad Q(x) = x - 2$$

REGLA DE RUFFINI

Ejemplo: Dados los polinomios P y Q, hallar el cociente y el resto de P:Q, aplicando la regla de Ruffini.

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \qquad Q(x) = x - 2$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 5 & -3 & -4 & 6 & -1 \\
 & & + & + & & \\
2 & & 10 & 14 & 20 & 52 \\
\hline
 & 5 & 7 & 10 & 26 & 51
\end{array}$$

x

$$C(x) = 5x^3 + 7x^2 + 10x + 26$$

$$\text{Resto}: 51$$

DIVISIBILIDAD

Si al dividir dos polinomios P y Q se obtiene como resto el polinomio nulo, entonces se dice que la división es exacta y que: **P es múltiplo de Q**,

o bien que **P es divisible por Q**

o que **Q es un divisor de P**.

En este caso se cumple que: $P(x) = Q(x).C(x)$

ESPECIALIZACIÓN DE LA INDETERMINADA X

Dado un polinomio P y un valor $\alpha \in R$, se llama **especialización de la indeterminada x por** α al valor:

$$\mathbf{P\ (\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \dots\dots\dots + a_n\alpha^n}$$

Es decir, es el valor numérico que toma el polinomio cuando se sustituye la indeterminada x, por el número α y se realizan las operaciones indicadas en el polinomio.

Por ejemplo: Sea $P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

Si α **= 2** $P(2) = 51$

TEOREMA DEL RESTO

Hemos visto que al dividir un polinomio P por otro mónico y de grado 1 el resto es, necesariamente, de grado cero.

Teorema: El resto de dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) = x - a es la especialización de P por a.

Es decir: R = P(a).

A partir del algoritmo de la división, se tiene:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R$$

$$P(x) = (x - a).C(x) + R$$

Especializando P por a:

$$P(a) = (a - a).C(a) + R$$

$$P(a) = 0 + R = R$$

TEOREMA DEL RESTO

Si retomamos el ejemplo utilizado para aplicar la Regla de Ruffini:

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1 \qquad Q(x) = x - 2$$

Teorema del resto:

$$P(2) = 5.2^4 - 3.2^3 - 4.2^2 + 6.2 - 1$$

$$P(2) = 51$$

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Sea P(x) un polinomio de grado n y α un número cualquiera. Se dice que **α es una raíz de P** si y sólo si la especialización de la indeterminada x por α es cero.

$$\alpha \ es \ raíz \ de \ P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Propiedad: α es raíz de P sí y solo si (x-α) es divisor de P

Por ejemplo: $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

$P(1) = 1^4 - 2.1^3 - 1.1^2 + 2.1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$ es raíz de P.

$P(1/2) = (1/2)^4 - 2.(1/2)^3 - 1.(1/2)^2 + 2.(1/2) = 9/16 \Rightarrow \alpha = 1/2$ no es raíz de P.

$P(2) = 2^4 - 2.2^3 - 1.2^2 + 2.2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$ es raíz de P.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

Propiedades:

1) **Teorema Fundamental del Álgebra**: Todo polinomio P con coeficientes en R y de grado mayor que cero, admite una raíz en C.

2) Todo polinomio de grado n, admite n raíces, no necesariamente distintas.

3) Si un polinomio admite una raíz compleja, entonces admite a su conjugada. Es decir, si un número complejo es raíz de un polinomio, su conjugado también lo es.

TEOREMA DE GAUSS

Si un polinomio real P de grado n, con coeficientes enteros, admite raíces racionales, de la forma $\frac{p}{q}$ (siendo p y q coprimos), entonces p es divisor del término independiente a_0 y q es divisor del coeficiente principal a_n

Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

$$a) \quad P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$b) \quad P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$$c) \quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE POLINOMIOS REALES

Teorema: Todo polinomio real P de grado n $\geq$ 1, puede escribirse de manera única, como un producto de la forma:

$$P = a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2).......(x-\beta_{n-1})(x-\beta_n) = a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i)$$

Donde $\beta_1;\beta_2;\beta_3;....\beta_n \in C$ y son las n raíces, no necesariamente distintas, de P.

Ejercicios

Realizar la descomposición factorial del Polinomio real P:

$$a)\quad P = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

$$b)\quad P = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$$

$$c)\quad P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

$$d)\quad P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

$$e)\quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$Si\ gr\ P = 3, \quad a_3 \neq 0, \quad \beta_1, \beta_2\ y\ \beta_3\ son\ raíces\ de\ P.$$

$$P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$Por\ DF \quad P = a_3(x-\beta_1).(x-\beta_2).(x-\beta_3)$$

$$P = a_3[x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2].(x-\beta_3)$$

$$P = a_3[x^3 - \beta_3x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x^2 + (\beta_1 + \beta_2)\beta_3x + \beta_1\beta_2x - \beta_1\beta_2\beta_3]$$

$$P = a_3[x^3 - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x^2 + (\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2)x - \beta_1\beta_2\beta_3]$$

$$P = a_3x^3 - a_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x^2 + a_3(\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2)x - a_3\beta_1\beta_2\beta_3$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Por el teorema de identidad de Polinomios

$$P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P = a_3x^3 - a_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)x^2 + a_3(\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2)x - a_3\beta_1\beta_2\beta_3$$

Se tiene:

$$-a_3(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = a_2 \quad \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{-a_2}{a_3}$$

$$a_3(\beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2) = a_1 \Rightarrow \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$-a_3\beta_1\beta_2\beta_3 = a_0 \quad \Rightarrow \beta_1\beta_2\beta_3 = \frac{-a_0}{a_3}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Sea el polinomio P, de grado n:

$$P=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Su descomposición factorial es, en consecuencia:

$$P=a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2).......(x-\beta_{n-1})(x-\beta_n)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i)$$

Donde $\beta_1;\beta_2;\beta_3;....\beta_n \in C$ son las n raíces complejas, no necesariamente distintas, de P.

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

Efectuando el producto de los polinomios mónicos irreducibles, se tiene:

$$P = a_n\left[x^n - (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n)x^{n-1} + \right.$$

$$+(\beta_1\beta_2 + \beta_1.\beta_3 + \ldots + \beta_{n-1}\beta_n)x^{n-2} +$$

$$-(\beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1.\beta_2\beta_4 + \ldots + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n)x^{n-3} + \ldots +$$

$$\left. + (-1)^n \beta_1.\beta_2.\beta_3.\ldots.\beta_n\right]$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Por el teorema de Identidad de Polinomios, se tiene:

$$-a_n(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = a_{n-1}$$

$$a_n(\beta_1\beta_2 + \beta_1.\beta_3 + \ldots + \beta_{n-1}\beta_n) = a_{n-2}$$

$$-a_n(\beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1.\beta_2\beta_4 + \ldots + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n) = a_{n-3}$$

....

$$(-1)^n a_n \, \beta_1.\beta_2.\beta_3\ldots.\beta_n = a_0$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

De lo cual surgen las siguientes relaciones:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\beta_1\beta_2 + \beta_1.\beta_3 + \ldots + \beta_{n-1}\beta_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1.\beta_2\beta_4 + \ldots + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$\beta_1.\beta_2.\beta_3....\beta_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

En resumen:

- La suma de las raíces es igual al segundo coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

- La suma de los productos binarios de las raíces es igual al tercer coeficiente dividido por el coeficiente principal

$$\beta_1\beta_2 + \beta_1.\beta_3 + \ldots + \beta_{n-1}\beta_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

RELACIONES ENTRE RAÍCES Y COEFICIENTES

- La suma de los productos ternarios de las raíces es igual al cuarto coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal

$$\beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1.\beta_2\beta_4 + \ldots + \beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

- El producto de las n raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal, con signo + o – según n sea par o impar, respectivamente.

$$\beta_1.\beta_2.\beta_3\ldots.\beta_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Ejemplo:

1) Hallar las raíces de P sabiendo que la suma de dos de sus raíces es igual a la tercera.

$$P = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$$

2) Hallar las raíces de P sabiendo que el producto de dos de ellas es 1.

$$P = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$$