Ejercicios Adicionales

MATEMÁTICA 0

Curso Inicial 2024

FACULTAD DE INFORMÁTICA - UNLP

★ Diofanto de Alejandría fue un matemático griego que vivió en el siglo III, considerado el *padre del álgebra* y conocido principalmente por su obra **Aritmética**, una serie de libros, muchos de los cuales ahora se han perdido, en los que se trata esta materia de forma sistemática.

En la tumba de Diofanto grabaron un problema, un acertijo cuya solución daba al visitante el número de años que vivió quien allí estaba enterrado.

Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto. Los números pueden mostrar la duración de su vida.
La infancia de Diofanto duró $\frac{1}{6}$ *de su vida. Más tarde, durante la* $\frac{1}{12}$ *parte de su existencia, sus mejillas se cubrieron de barba. Después de* $\frac{1}{7}$ *de su vida Diofanto se casó. Cinco años después tuvo un hijo. El hijo vivió exactamente la mitad de lo que vivió el padre, y Diofanto murió cuatro años más tarde que su hijo, tras consolar su pena con la ciencia de los números.*

El reto es calcular la edad que tenía Diofanto al morir.

★ Imaginemos que tenemos 8 pelotas del mismo tamaño, se ven iguales y casi todas pesan lo mismo (si quiere supongo que pesan 100 grs) salvo una que pesa un poquito menos (por ejemplo 95 grs) pero es algo imperceptible, no podemos saber cual es pesàndolas a mano ni tampoco al verlas. Además tenemos una balanza antigua de dos platillos, con ella podemos descubrir cual es la pelota que pesa menos pero sòlo puedes usarla dos veces. ¿Còmo lo harías?

★ Una familia de 4 miembros (la hija pequeña, papá, mamá embarazada y el abuelo) tiene que cruzar un viejo, endeble y estrecho puente sobre un río.

Cada uno tarda un tiempo para cruzel papá tarda 2 minutos, la mamá tarda 5, la niña pequeña tarda 1 minuto y el abuelo tarda 8.
El puente sólo resiste un máximo de 2 personas cruzando a la vez, y cuando cruzan dos personas juntas caminan a la velocidad del más lento.

Es una noche cerrada y se necesita llevar una linterna para cruzar, pero el grupo sólo dispone de una linterna, a la que le quedan 15 minutos de batería. No se puede lanzar la linterna de un extremo a otro del puente, así que cada vez que crucen dos personas, alguien tiene que volver a cruzar hacia atrás con la linterna a buscar a los que falten, y repetir este proceso hasta que hayan cruzado todos.

¿Cuál sería una solución válida?

★ Tenemos dos relojes de arena, uno de 4 minutos y otro de 7 minutos,

¿Cuál es el método más rápido para cronometrar exactamente 9 minutos?

★ ¿Cuántas veces se puede doblar un papel?

Dicen que, según la calidad del papel, no se puede doblar en partes iguales más de 7 veces PERO si se pudiera plegar más veces ¿cuántos pliegos se necesitarían para llegar a la luna? (La NASA no quiere que sepas que es con sólo 42!! ya lo veremos en Mate 1)

Si tenemos un papel de 0.1 ml de grosor, ¿Cuánto mide luego de doblarlo 7 veces?

⋄ Este es uno de los acertijos que nos dejó Lewis Carroll, el autor de "Alicia en el país de las maravillas", quien bajo su verdadero nombre, Charles Lutwidge Dodgson, era un matemático y, en sus últimos años de vida, dedicó parte de su tiempo a las matemáticas recreativas.

En tu jardín, hay nueve rosas plantadas en un círculo perfecto. Pero ya te cansaste de ver lo mismo todo el tiempo. Tienes tres opciones para cambiarlas, pero cada una tiene sus reglas:

1. *Planta las 9 rosas de manera que crees 8 filas con 3 rosas en cada fila.*
2. *Planta las 9 rosas de manera que crees 9 filas con 3 rosas en cada fila.*
3. *Planta las 9 rosas de manera que crees 10 filas con 3 rosas en cada fila.*

¿Se puede??

⋄ Otro problema con el que Lewis Carroll retó a una adolescente -Helen Fielden, que en ese entonces tenía 14 años de edad- en 1873.

Un noble tenía un salón con una sola ventana que era cuadrada y medía 1 *metro de alto y* 1 *metro de ancho. Tenía un problema en sus ojos, y la ventana dejaba entrar mucha luz. Llamó a un constructor y le pidió que alterara la ventana para que sólo entrara la mitad de la luz. Pero tenía que seguir siendo cuadrada y con las mismas dimensiones de* 1×1 *metros. Tampoco podía usar cortinas o persianas o vidrios de color, ni nada parecido.*

¿cómo lo resolvió el constructor?

El siguiente fragmento es una editorial periodística del Profesor y periodista Adrián Paenza, leerlo y tratar de hallar la solución:

Ojos Celestes en la Isla

En una isla hay 100 habitantes.
Todos ellos tienen o bien ojos celestes o bien ojos marrones. Todos ven el color de los otros, pero no el color propio. Está prohibido hablar entre ellos de ese tema. No hay espejos ni trampas posibles. Eso sí: hay una ley en la isla que establece que si alguien "descubre" que tiene ojos celestes, tiene que abandonar la isla inexorablemente a las 8 de la mañana del día siguiente. Todos los pobladores tienen la misma capacidad para razonar y todos son capaces de usar una lógica impecable.
Un día, una persona llega de visita a la isla y, mientras, los mira a todos, dice: "¡Qué bueno es ver al menos una persona con ojos celestes después de tanto tiempo de estar en alta mar!"
Ahora le toca pensar a usted: ¿Qué consecuencias trajo esta frase entre los habitantes de la isla? Es decir, una vez que los pobladores escucharon al visitante decir que había al menos uno de ellos que tenía ojos celestes, ¿qué cree usted que pasó después?

1 Lógica y Teoría de Conjuntos

- Un prisionero está encerrado en una celda que tiene dos puertas: una conduce a la muerte y otra a la libertad. Cada puerta está custodiada por un vigilante.
  El prisionero sabe que uno de ellos siempre dice la verdad, y el otro siempre miente. Para elegir la puerta por la que pasará solo puede hacer una pregunta a uno solo de los vigilantes.

  ¿Qué debe preguntar para salvarse?

- Imagine un sistema de riego automático. Tenemos dos sensores A y B que miden la luz y la humedad del suelo. El jardinero no quiere regar sus plantas en exceso, es decir si el sensor detecta que el suelo está húmedo, también sabe que no es bueno regar durante el día cuando hay mucho sol.
  ¿Cuándo debería activarse el sistema? ¿Se anima a mostrarlo usando proposisiones y una tabla de verdad?

- Un sistema de seguridad activará un imán para desbloquear una caja fuerte sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

  – p: la puerta exterior está cerrada
  – q: la alarma NO se ha disparado
  – r: se introdujo la clave correcta

  ¿cuáles de las siguientes proposiones corresponden a la situación de "caja fuerte bloqueada" ?

  a $(p \wedge r) \vee \neg q$
  b $(p \wedge r) \vee q$
  c $r \wedge (p \underline{\vee} q)$
  d $r \wedge (p \vee q)$

- Un ciclista debe usar una campera impermeable y reflectante si hace frío o llueve y además está oscuro.
  ¿Se anima a dar una proposición compuesta que refleje la situación?

1. Indicar los valores de verdad de todas las proposiciones que intervienen para que la proposición $[p \longrightarrow (q \vee r)]$ resulte falsa

2. Marcar las afirmaciones correctas:
   - Una conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la componen lo son
   - Una conjunción es falsa si las dos proposiciones componentes lo son
   - Una disyunción es falsa sólo si todas las proposiciones que la componen lo son
   - Una conjunción es falsa si algunas las proposiciones componentes lo son
   - Una disyunción es verdadera sólo si lo son todas las proposiciones componentes
   - Una disyunción es verdadera solo si lo son algunas las proposiciones componentes
   - Un condicional es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es verdadero
   - Un condicional es verdadero si el antecedente es falso
   - Un condicional es falso si el antecedente es verdadero
   - Un bicondicional es verdadero si ambos componentes son verdaderos
   - Un bicondicional es verdadero si ambos componentes tienen el mismo valor de verdad
   - Un bicondicional es falso si ambos componentes son falsos

3. La proposición $\neg p \longrightarrow (q \vee r)$ es falsa ¿Qué sucede con las siguientes proposiciones?
   - $p \longrightarrow q$
   - $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
   - $(\neg p \vee q) \longrightarrow r$
   - $\neg q \longrightarrow p$

4. Analizar si las siguientes proposiciones son equivalentes:
   - $\neg(p \wedge q)$
   - $\neg p \wedge \neg q$

5. Para cada una de las siguientes proposiciones dar el valor de verdad para un conjunto universal apropiado y simbolizar usando esquemas proposicionales y cuantificadores

   (a) Todos los números son perfectos
   (b) Algunos números son reales
   (c) Los números y los matemáticos son irracionales

6. (a) Simbolizar la siguiente proposición, usando proposiciones simples y/o esquemas proposicionales, cuantificadores y dar un universo:
   Hay ingresantes que cursan COC pero no cursan EPA
   (b) Negar la proposición anterior de forma simbólica y coloquial

7. Considerando como conjunto Universo a aquel comprendido por todas las letras del alfabeto castellano, y los siguientes conjuntos:
   $A = \{x : x\, es\ vocal\}$
   $B = \{a, e, o\}$
   $C = \{i, u\}$
   $D = \{x : x \text{ es letra de la palabra ``murcielago''}\}$
   $E = \{x : x \text{ es consonante}\}$

   Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas.

   - la intersección entre B y C es vacía
   - la unión entre A y E es igual al Universo
   - el complemento de C respecto de A es igual a D

2 Conjuntos Numéricos

El enigma del número 6

El enigma del número 6 consiste en completar o añadir operaciones matemáticas comunes para que cada conjunto de números listados abajo termine dando 6 como resultado.

$$
\begin{array}{lcl}
0 \quad 0 \quad 0 = 6 & \qquad & 6 \quad 6 \quad 6 = 6 \\
1 \quad 1 \quad 1 = 6 & & 7 \quad 7 \quad 7 = 6 \\
2 \quad 2 \quad 2 = 6 & & 8 \quad 8 \quad 8 = 6 \\
3 \quad 3 \quad 3 = 6 & & 9 \quad 9 \quad 9 = 6 \\
4 \quad 4 \quad 4 = 6 & & 10 \quad 10 \quad 10 = 6 \\
5 \quad 5 \quad 5 = 6 & &
\end{array}
$$

Hay dos reglas a tener en cuenta:
No vale agregar un nuevo número dentro de la operación.
No vale alterar el símbolo = (por ejemplo, tachándolo).

El mágico número 7

Probemos las propiedades "mágicas" y de *adivinación* del número **7**: (puede ayudarse con la calculadora)

- Piense una fecha importante (puede ser la su cumpleaños)
- Multiplique el día (el número del día) por 7
- Restar 1
- Ahora multiplique por otro número *especial*, el 13.
- Sumar el (número) del mes de la fecha elegida
- Sumar 3 y multiplicar por 11
- Restar el día y mes de esa fecha importante que eligió
- Dividir por 10
- Sumar 11
- Dividir por 100

- ¿ qué aparece?

¿ Qué aparece? ¿Por qué cree que da ese resultado? ¿puede descubrir el truco? (recuerde el Teorema Fundamental de la Numeración)

1. Pizzas!!
   (a) Si cada pizza viene cortada en 8 porciones, ¿qué es más, 4 pizzas o 37 porciones?
   (b) 21 amigos se juntan a comer pizza. Compran 8 pizzas, (que vienen cortadas en 8 porciones cada una). ¿Alcanza para que coman 3 porciones cada uno?

2. Demostrar que el número 2.520 es el número más pequeño que puede ser dividido en forma exacta por los números del 1 al 10.

3. Hallar el error en el siguiente cálculo:
   $4+\frac{18}{3} = \frac{12}{3}+6$ pues $\frac{12+18}{3} = \frac{12+18}{3}$, por la definición de suma en $\mathbb{Q}$. Entonces $4-\frac{12}{3} = 6-\frac{18}{3}$ y luego, $2\left(2-\frac{6}{3}\right) = 3\left(2-\frac{6}{3}\right)$. Así resulta $2 = 3$.

4. En una heladería de Barracas, venden potes de un sexto de kilo, además de los potes comunes de un cuarto de kilo.
   Extrañamente tienen como política no poner más de un gusto en un mismo pote, por lo tanto, hay que llevar tantos potes como gustos uno quiera. Un grupo de amigos lleva 7 potes de un sexto y 3 potes de un cuarto. En total ¿están llevando 2 kilos, más, o menos?

5. Analizar si son válidas las siguientes igualdades:
   (a) $2^{2-m}.(2.2^{m+1} + 2^{m+2}) = 32$
   (b) $\frac{2^{m-1}}{2^{3-m}} - (2^m + 2.2^{m-1}) = 0$
   (c) $3^{-4-m}(3^2 3^{m+1} + 3^{m+3} + 3.3^{m+2}) = 0$
   (d) $(2k + 3k)^2 = 13k^2$
   (e) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

6. Calcular:

   a) $\sqrt{5}.\sqrt{5} - \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} =$
   b) $\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{20} =$
   c) $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}.\left(1 + \sqrt[4]{81}\right) =$

7. Escriba fracciones equivalentes a las dadas, racionalizando los denominadores:

   a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
   b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}}$
   c) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}$

8. ¿Son correctas las igualdades?

   a) $\sqrt{50} = 5.\sqrt{2}$
   b) $\sqrt{12} = 3.\sqrt{2}$
   c) $\sqrt[5]{64} = 2.\sqrt[5]{-2}$

3 Ecuaciones y polinomios

- Agustín y su hermana Belén completaron un álbum de 420 figuritas deportivas. Agustín consiguió 162 figuritas más que su hermana.
  Plantear la ecuación que corresponda y averiguar: ¿Cuántas figuritas obtuvo cada uno de ellos?

- Entre Ana y Beto tienen 8000 pesos. Ana tiene el triple de Beto. ¿Cuánta plata tiene cada uno?

- El cuádruple de la edad que Nicolás tenía hace 3 años es igual al doble de la que tendrá dentro de 5 años. ¿Cuántos años tiene Nicolás?

- La suma de las edades de María y Juana es 30, Juana tiene 10 años menos que el riple de la edad de María, ¿Cuántos años tiene cada una?

- En una exhibición un basketbolista tira un total de 32 tiros en los mismos tres aros. Emboca en el azul el doble de tiros que en el amarillo, y en el rojo, el triple de tiros que en el amarillo. Erra menos de 5 tiros. ¿Cuántos tiros embocó en cada aro?

1. Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 168.

2. En cada caso, elegir la opción correcta.

   (a) Si 9x + 12 = 15, entonces :
   - 3x + 4 = 5
   - 3x + 12 = 5
   - 9x + 4 = 5

   (b) Si 6x + 12y 10 = 0, entonces:
   - 3x + 6y = 0
   - 3x + 6y = 10
   - 3x + 6y = 5

3. Encuentre la base y la altura de un triángulo cuya área es de $2m^2$ si su base es $3m$ más larga que su altura.

4. La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número. (Recíproco de a es $\frac{1}{a}$, cuando $a \neq 0$).

5. Cuarenta alumnos deben ser distribuidos para prácticas de linux o de java. En cada grupo de linux hay 8 alumnos, mientras que en los de java 2; el número de grupos de java supera en 10 a los de linux. ¿Cuántas grupos de linux y cuántos de java se realizarán?

6. Dos personas están acomodando una gran cantidad de sillas en un patio de manera de formar un cuadrado. Una sugiere una manera, pero le sobran 39 sillas. La otra, entonces propone sumarle una silla más a cada fila, pero le faltan 50 sillas. ¿Cuántas sillas tenían?

7. Encuentra todos los valores de k tales que $P(x)$ sea divisible por el polinomio lineal dado en cada caso:
   $P(x) = kx^3 + x^2 + k^2x + 11$, $x + 2$
   $P(x) = k^2x^3 - 4kx + 3$, $x - 1$