Расчётно-графическая работа №1

Задача 1. Варианты:

1. Из колоды, состоящей из 52 карт, наудачу достаются 2 карты (без возвращения). Найти вероятность того, что ранг первой карты больше ранга второй карты.

2. Игральный кубик бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в результате будут выпадать только 2 числа, причем одно появится дважды, другое – трижды?

3. В коробке лежат 70 фруктов, 10 из которых испорчены. Наугад берутся 5 фруктов. С какой вероятность среди выбранных фруктов есть и испорченные, и хорошие?

4. В коробке лежат 12 красных и 8 зеленых карандашей. Наудачу извлекают 4 карандаша (без возвращения). С какой вероятностью среди извлеченных карандашей будут хотя бы два красных карандаша?

5. Три человека заходят в лифт девятиэтажного дома на первом этаже. Какова вероятность того, что по крайней мере двое выйдут на одном и том же этаже, если выбор этаже для каждого случаен и не зависит от выбора остальных?

Задача 2. Варианты:

1. Из отрезка $[0;1]$ наудачу выбираются два числа. С какой вероятностью их сумма не превосходит единицы? Та же задача, но для трех чисел.

2. На окружности случайно ставятся три точки A, B, C. С какой вероятностью треугольник ABC будет остроугольным?

3. На окружности радиуса r выбирается наудачу точка, и через нее проводится диаметр. На диаметре наудачу выбирается точка — середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина полученной хорды превзойдет x.

4. Внутри круга радиуса r выбирается точка. Данная точка служит серединой хорды, перпендикулярной проведенному через нее диаметру. Найти вероятность того, что длина полученной хорды больше x.

5. На окружности радиуса r случайно выбираются две точки, которые служат концами хорды. С какой вероятностью длина хорды больше x?

Задача 3. Варианты:

1. Пусть имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов в каждой с вероятностью успеха p, S_i – количество успехов в n испытаниях в i-ой серии. Найти вероятность $\mathrm{P}(S_1 = k | S_1 + S_2 = m)$.

2. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geqslant 0$. Известно, что для любых $i \geqslant 0$ и $j \geqslant 0$ события A_i и B_i – независимы, при этом

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i) &= e^{-\lambda} \tfrac{\lambda^i}{i!}, \quad \lambda > 0, \quad i \geqslant 0, \\
\mathrm{P}(Y = j) &= e^{-\mu} \tfrac{\mu^j}{j!}, \quad \mu > 0, \quad j \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Найти $\mathrm{P}(X = i | X + Y = j)$.

3. Введем события $A_i = \{X = i\}$, $B_i = \{Y = i\}$, $i \geqslant 0$. Известно, что для любых $i \geqslant 0$ и $j \geqslant 0$ события A_i и B_i – независимы, при этом

$$
\mathrm{P}(X = i) = \mathrm{P}(Y = i) = (1 - p)^i p \quad i \geqslant 0,
$$

где $p \in (0, 1)$. Найти $\mathrm{P}(X = i | X + Y = j)$.

Задача 4. Рассмотрите схемы Бернулли при $n \in \{100, 1000, 10000\}$ и $p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$ и рассчитайте точные вероятности (где это возможно) $\mathrm{P}(S_n \in [n/2 - \sqrt{npq}, n/2 + \sqrt{npq}])$, $\mathrm{P}(S_n \leqslant 5)$ и максимальную вероятность вида $\mathrm{P}(S_n = k)$, S_n – количество успехов в n испытаниях, и приближенные с помощью одной из предельных теорем. Сравните точные и приближенные вероятности. Объясните результаты.