Задача 1

Задача 1

5. Пусть A — событие «по крайней мере двое выйдут на одном и том же этаже»

Тогда $\overline{A}$ — событие «все выйдут на разных этажах»

$$p(\overline{A}) = \frac{A_8^3}{8^3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{8\cdot 8\cdot 8} = \frac{21}{32}$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = \frac{11}{32}$$

Ответ: $p(A) = \frac{11}{32}$

3. Пусть A — событие «среди выбранных пяти фруктов есть и испорченные, и хорошие», $\overline{A}$ — событие «все пять фруктов либо все испорченные, либо все хорошие»

$$m = \underbrace{C_{10}^5}_{\text{кол-во способов достать пять испорченных фруктов}} + \underbrace{C_{60}^5}_{\text{кол-во способов достать пять хороших фруктов}}$$

$n = C_{70}^5$ — кол-во способов достать пять фруктов

$$p(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5 + C_{60}^5}{C_{70}^5}$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{10}^5}{C_{70}^5} - \frac{C_{60}^5}{C_{70}^5} =$$

$$= 1 - \frac{10!}{5!\,5!}\cdot\frac{65!\,5!}{70!} - \frac{60!}{5!\,55!}\cdot\frac{65!\,5!}{70!} \approx 0,55$$

Ответ: 0,55

Задача 2

№ 2 (1, 4)

1. $[0; 1]$ $\quad x, y$

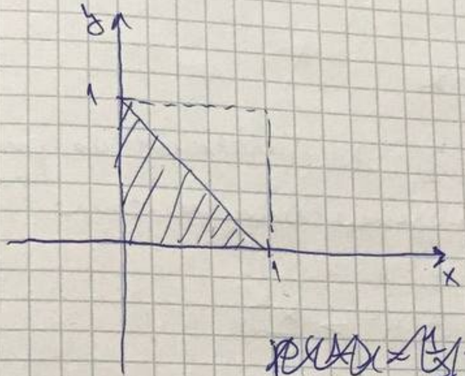
$A: x + y \le 1$

$P(x + y \le 1)$?

$y \le -x + 1$

$P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

$S(\Omega) = 1 \cdot 1 = 1$



$\cancel{P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}}$

$S(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

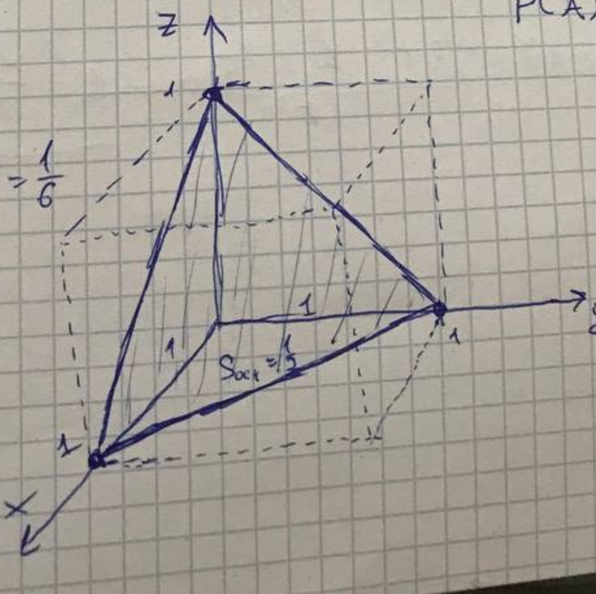
$P(A) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$[0; 1]$ $\quad x, y, z$

$x + y + z \le 1$

$x + y + z - 1 = 0$

$P(A) = \dfrac{V(A)}{V(\Omega)}$



$V(A) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P(A) = \dfrac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$

4.

l – длина хорды

диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам

$S(\Omega)=\pi r^2$

A – событие: $l > x$

$l > x \Rightarrow \frac{l}{2} > \frac{x}{2}$; ∃ h – расстояние от центра до выбр. точки

из изображения видно, что

$$r^2-h^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

тогда $$r^2-h^2>\frac{x^2}{4}$$

$$h^2<\frac{4r^2-x^2}{4}$$

$$0<h<\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}$$

тогда $l>x$, если точка лежит внутри круга с центром в т. O и $R=\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}$

$$S(A)=\pi\cdot\left(r^2-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$P(A)=\frac{\pi r^2-\pi\cdot\frac{x^2}{4}}{\pi r^2}=1-\frac{x^2}{r^2\cdot 4}$$

Задача 3

$$p(X+Y=j) = p((X=0)\cdot(Y=j)) + p((X=1)\cdot(Y=j-1)) + \dots + p((X=j-1)\cdot(Y=1)) + p((X=j)\cdot(Y=0)) =$$

события A_i и B_i независимы

$$= p(X=0)\cdot p(Y=j) + \dots + p(X=j)\cdot p(Y=0)$$

$$= p(1-p)^j p + (1-p)p\cdot(1-p)^{j-1}p + \dots + (1-p)^j p\cdot p = (j+1)p^2(1-p)^j$$

$$p(X+Y=j \mid X=i) = p(Y=j-i) = (1-p)^{j-i}p$$

По формуле Байеса

$$p(X=i \mid X+Y=j) = \frac{p(X+Y=j \mid X=i)\,p(X=i)}{p(X+Y=j)}$$

$$= \frac{(1-p)^{j-i}p\cdot(1-p)^i p}{(j+1)p^2(1-p)^j} = \frac{1}{j+1}$$

Ответ: $p(X=i \mid X+Y=j) = \frac{1}{j+1}$

Задача 4

Расчёт точной вероятности $P\left(S_n \in \left[\frac{n}{2} - \sqrt{npq}, \frac{n}{2} + \sqrt{npq}\right]\right)$ и максимальной вероятности $P(S_n = k)$ для $n \in \{100, 1000\}, p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$

```python
# Расчёт биномиальных коэффициентов
def Binc(bcs, n, k):
    if (k > n):  return 0
    if k > n // 2:  k = n - k
    if k == 0:  return 1
    if k == 1:  return n
    while len(bcs) < n - 3:
        for i in range(len(bcs), n - 3):
            r = []
            for j in range(2, i // 2 + 3):
                r.append(Binc(bcs, i + 3, j - 1) + Binc(bcs, i + 3, j))
            bcs.append(r)
    r = bcs[n - 4]
    if len(r) < k - 1:
        for i in range(len(r), k - 1):
            r.append(Binc(bcs, n - 1, k - 1) + Binc(bcs, n - 1, k))
    return bcs[n - 4][k - 2]
```

```python
# Нахождение k такого, что p(Sn = k) - максимальна
def findK(n, p):
    if (p * (n + 1)) % 1 != 0:
        return [math.floor(p * (n + 1) - 1) + 1]
    else:
        return [p * (n + 1) - 1, p * (n + 1) - 1]
```

```python
def firstTaskFunc(numberOfTests, probabilities):
    bcs = []
    for n in numberOfTests:
        for p in probabilities:
            print(f"n = {n} \tp = {p} ", end="\t")

            q = 1 - p
            sqrt_npq = math.sqrt(n * p * q)

            exactProb = 0
            for s in range(math.ceil(n / 2 - sqrt_npq), math.floor(n / 2 + sqrt_npq) + 1):
                coef = Binc(bcs, n, s)
                exactProb += coef * (p ** s) * (q ** (n - s))

            print(f"P(Sn) = {exactProb}")
            maxK = findK(n, p)
            if (len(maxK) == 1):
                print(f"При k = {maxK[0]} вероятность максимальна: P(Sn = k) = "
                      f"{Binc(bcs, n, maxK[0]) * (p ** maxK[0]) * (q ** (n - maxK[0]))}")
            else:
                print(f"При k1 = {maxK[0]} и k2 = {maxK[1]} вероятность максимальна: P(Sn = k1 = k2) = "
                      f"{Binc(bcs, n, maxK[0]) * (p ** maxK[0]) * (q ** (n - maxK[0]))}")
            print()
```

```
Расчёт точной вероятности для Sn из промежутка:
n = 100     p = 0.001   P(Sn) = 9.596841476810663e-122
При k = 0 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.9047921471137089

n = 100     p = 0.01    P(Sn) = 6.103987557172999e-72
При k = 1 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.36972963764972644

n = 100     p = 0.1     P(Sn) = 3.6123083280873955e-21
При k = 10 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.13186534682448858

n = 100     p = 0.25    P(Sn) = 4.2504440254864535e-06
При k = 25 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.09179969176683679

n = 100     p = 0.5     P(Sn) = 0.7287469759261653
При k = 50 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.07958923738717877

n = 1000    p = 0.001   P(Sn) = 0.0
При k = 1 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.3680634882592229

n = 1000    p = 0.01    P(Sn) = 0.0
При k = 10 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.12574021112620629
```

```
n = 1000    p = 0.1     P(Sn) = 0.0
При k = 100 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.0420167908610866

n = 1000    p = 0.25    P(Sn) = 1.4970596601027823e-58
При k = 250 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.029124105883705082

n = 1000    p = 0.5     P(Sn) = 0.6730633175684045
При k = 500 вероятность максимальна: P(Sn = k) = 0.0252250181783608
```

Расчёт точной вероятности $P(S_n \leq 5)$ для $n \in \{100, 1000\}, p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$

```python
def secondTaskFunc(numberOfTests, probabilities):
    bcs = []
    for n in numberOfTests:
        for p in probabilities:
            print(f"n = {n} \tp = {p} ", end="\t")

            q = 1 - p
            exactProb = 0

            for s in range(6):
                coef = Binc(bcs, n, s)
                exactProb += coef * (p ** s) * (q ** (n - s))

            print(f"P(Sn <= 5) = {exactProb}")
            print()
```

```
Расчёт точной вероятности P(Sn <= 5):
n = 100     p = 0.001   P(Sn <= 5) = 0.9999999989001893

n = 100     p = 0.01    P(Sn <= 5) = 0.9994654655360061

n = 100     p = 0.1     P(Sn <= 5) = 0.057576886487033956

n = 100     p = 0.25    P(Sn <= 5) = 1.1700149154089138e-07

n = 100     p = 0.5     P(Sn <= 5) = 6.26162256269268e-23

n = 1000    p = 0.001   P(Sn <= 5) = 0.9994119298982362

n = 1000    p = 0.01    P(Sn <= 5) = 0.0661395116072514

n = 1000    p = 0.1     P(Sn <= 5) = 2.556545693060053e-38

n = 1000    p = 0.25    P(Sn <= 5) = 3.9691404522735886e-115

n = 1000    p = 0.5     P(Sn <= 5) = 7.738505306294352e-289
```

Расчёт приближённой вероятности $P(S_n \in \left[\frac{n}{2} - \sqrt{npq}, \frac{n}{2} + \sqrt{npq}\right])$ для $n \in \{100, 1000, 10000\}, p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$

```
Расчёт приближенной вероятности для Sn из промежутка:
n = 100     p = 0.001   P(Sn) = 0.0

n = 100     p = 0.01    P(Sn) = 0.0

n = 100     p = 0.1     P(Sn) = 0.0

n = 100     p = 0.25    P(Sn) = 6.180993840088078e-07

n = 100     p = 0.5     P(Sn) = 0.6826894921370859

n = 1000    p = 0.001   P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.01    P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.1     P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.25    P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.5     P(Sn) = 0.6572182888520886

n = 10000   p = 0.001   P(Sn) = 0.0
```

```
n = 10000   p = 0.01    P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.1     P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.25    P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.5     P(Sn) = 0.6826894921370859
```

Для большинства значений вероятность рассчитана некорректно, поскольку интегральная теорема Муавра-Пуассона дает приближенные значения при p ~ 1/2 и n *p - порядка сотен.

Расчёт приближённой вероятности $P(S_n \leq 5)$ для $n \in \{100, 1000, 10000\}, p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$

```
Расчёт приближенной вероятности P(Sn <= 5):
n = 100     p = 0.001   P(Sn) = 0.6241452284609645

n = 100     p = 0.01    P(Sn) = 0.8425315989385818

n = 100     p = 0.1     P(Sn) = 0.047361291939617856

n = 100     p = 0.25    P(Sn) = 1.9259262001858346e-06

n = 100     p = 0.5     P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.001   P(Sn) = 0.841434387503702

n = 1000    p = 0.01    P(Sn) = 0.05527748145542166

n = 1000    p = 0.1     P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.25    P(Sn) = 0.0

n = 1000    p = 0.5     P(Sn) = 0.0
```

```
n = 10000   p = 0.001   P(Sn) = 0.05605431814512307

n = 10000   p = 0.01    P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.1     P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.25    P(Sn) = 0.0

n = 10000   p = 0.5     P(Sn) = 0.0
```

Некоторые значения сильно отличаются от точных вероятностей, потому что значение n * p в данных случаях значительно больше k – количества благополучных исходов.