

# MC-202

## Aplicações de Pilhas

Marcelo S. Reis  
msreis@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2023

# Exercício

Temos uma expressão aritmética e queremos saber se os parênteses estão balanceados

- Exemplos corretos:
  - $(a + b)$
  - $(a * b) + (c / (d - e))$
- Exemplos incorretos:
  - $(a + b$
  - $(a * b) + (c / d - e))$
  - $)a + b($

Escreva uma função que, dada uma sequência de parênteses, diz se ela é balanceada ou não

- Vamos ignorar operandos e operadores
- $()(())$

# Balanceamento de delimitadores

Uma sequência de delimitadores é **balanceada** se for

- *vazia*
- ou **[***sequência balanceada***]**
- ou **(***sequência balanceada***)**
- ou a concatenação de duas sequências balanceadas

Exemplos:

Balanceada

[ [ ] ]

( [ ( ) ( [ ] ) ] )

Não Balanceada

( [ ]

[ [ ) )

( [ ) ]

Para testar, leia cada símbolo e se:

1. leu **(** ou **[**: empilha o símbolo lido
2. leu **]**: desempilha **[**
3. leu **)**: desempilha **(**

# Implementação em C

```
1 int eh_balanceada(char *str) {
2     p_pilha pilha;
3     int i, ok = 1;
4     char par;
5     pilha = criar_pilha();
6     for (i = 0; ok && str[i] != '\0'; i++)
7         if (str[i] == '[' || str[i] == '(') {
8             empilhar(pilha, str[i]);
9         } else if (eh_vazia(pilha)) {
10            ok = 0;
11        } else {
12            par = desempilhar(pilha);
13            if (str[i] == ']' && par != '[')
14                ok = 0;
15            if (str[i] == ')' && par != '(')
16                ok = 0;
17        }
18    if (!eh_vazia(pilha))
19        ok = 0;
20    destruir_pilha(pilha);
21    return ok;
22 }
```

- E se usássemos `return 0` dentro do `for`?

# Notação de expressões

Exemplo 1:

- Infixa:  $a + b$
- Pré-fixa:  $+ a b$
- Pós-fixa:  $a b +$

Exemplo 2:

- Infixa:  $5 * ( (9 + 8) * 4 * 6 + 7 )$
- Pré-fixa:  $* 5 + * + 9 8 * 4 6 7$
- Pós-fixa:  $5 9 8 + 4 6 * * 7 + *$

Notação de expressões aritméticas:

1. **Infixa**: é a notação cotidiana
  - operador **entre** operandos
  - precisa de parênteses para evitar ambiguidade
  - ou requer uma ordem de precedência de operadores
2. **Pré-fixa**: é a notação polonesa do lógico Jan Lukasiewicz
  - operador **precede** operandos
3. **Pós-fixa**: é notação polonesa reversa (RPN) de calculadoras HP
  - operador **sucede** operandos

## Exemplo de cálculo de expressão

- **Infixa:**  $2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 26$
- **Pós-fixa:**  $2\ 2\ 1\ +\ 4\ *\ 1\ +\ *$

Resolvendo com notação infix:

$$2 * ((2 + 1) * 4 + 1) = 2 * (3 * 4 + 1) = 2 * (12 + 1) = 2 * 13 = 26$$

Resolvendo com notação pós-fixa:

$$2\ 2\ 1\ +\ 4\ *\ 1\ +\ * = 2\ 2\ 1\ +\ 3\ 4\ *\ 1\ +\ * = 2\ 2\ 1\ +\ 13\ * = 26$$

# Calculando expressões pós-fixas

Algoritmo:

1. Para cada elemento lido:
  - Se for número  $n$ :
    - empilha  $n$
  - Se for operador  $\oplus$ :
    - desempilha  $operando_1$
    - desempilha  $operando_2$
    - empilha  $operando_2 \oplus operando_1$
2. Desempilha (único) valor da pilha e retorna

# Convertendo de infixa para pós-fixa

Objetivo:

$1 + 2 * 3 / 4 * 5 - 6 \Rightarrow 1 2 3 * 4 / 5 * + 6 -$

Ideia:

- Copiamos os números diretamente na saída
- Quando aparece um operador na entrada
  - enquanto o operador no topo tem precedência maior ou igual ao operador na entrada
    - desempilhamos e copiamos na saída
  - empilhamos o operador novo
- No final, desempilhamos todos os elementos da pilha, copiando para a saída

Observações:

- Usamos uma nova operação: “olhar topo da pilha”.
  - É possível fazer sem?
- Como generalizar para o caso em que a expressão tem parênteses?



# Pilhas e recursão

**Pergunta:** Qual a relação entre *pilhas* e *recursão*?

```
1 int fat(int n) {  
2     int ret, ant;  
3     if (n == 0)  
4         ret = 1;  
5     else {  
6         ant = fat(n-1);  
7         ret = n * ant;  
8     }  
9     return ret;  
10 }
```

Vamos tentar descobrir simulando uma chamada: **fat(4)**

# Pilha de Chamadas

Estado da “pilha” de chamadas para `fat(4)`:

```
1 int fat(int n) {  
2     int ret, ant;  
3     if (n == 0)  
4         ret = 1;  
5     else {  
6         ant = fat(n-1);  
7         ret = n * ant;  
8     }  
9     return ret;  
10 }
```

0	1	?
1	1	1
2	2	1
3	6	2
4	24	6
n	ret	ant

# Pilhas e recursão (continuando)

Quando empilhamos:

- Alocamos espaço para as variáveis locais (`n`, `ret`, `ant`)

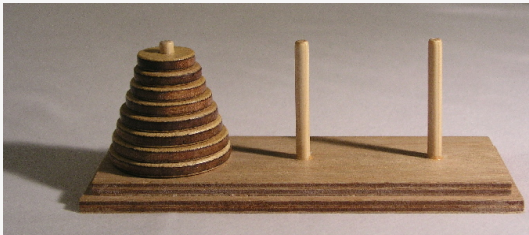
Quando desempilhamos:

- Quando a chamada de `fat(n)` retorna, apagamos o espaço para as variáveis locais
- Restabelecemos os valores das variáveis locais para o valor que tinham antes da chamada

O conjunto de variáveis locais formam um elemento da pilha

Isto é, a recursão pode ser simulada usando uma pilha de suas variáveis locais

## Um exemplo mais complexo: Torres de Hanói



```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {  
2     if (n > 0) {  
3         hanoi(n-1, orig, aux, dest);  
4         printf("move de %c para %c\n", orig, dest);  
5         hanoi(n-1, aux, dest, orig);  
6     }  
7 }
```

Precisamos além de empilhar a variáveis locais, armazenar em qual linha devemos voltar a execução do código

# Pilhas e recursão

O **registro de ativação** de uma função é o conjunto formado por:

1. Variáveis locais
2. Endereço de retorno após a chamada

A **pilha de execução** (ou pilha de chamadas) é a pilha dos registros de ativação das várias chamadas em execução em um programa

# Buscando um elemento em uma lista ligada

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {  
2     if (lista == NULL || lista->dado == x)  
3         return lista;  
4     else  
5         return busca_rec(lista->prox, x);  
6 }
```

Note que:

- a recursão é a última coisa antes do retorno da função
- i.e., devolvemos o valor de retorno da chamada `busca_rec(lista->prox, x)`, mas não o manipulamos
- exceto na base, o retorno não depende do valor das variáveis locais
  - Depende apenas do valor de retorno da chamada recursiva

# Eliminação de Recursão

Podemos eliminar o uso de recursão na nossa função

Versão recursiva:

```
1 p_no busca_rec(p_no lista, int x) {  
2     if (lista == NULL || lista->dado == x)  
3         return lista;  
4     else  
5         return busca_rec(lista->prox, x);  
6 }
```

Eliminando a recursão:

```
1 p_no busca_iterativa(p_no lista, int x) {  
2     while(lista != NULL && lista->dado != x)  
3         lista = lista->prox;  
4     return lista;  
5 }
```

# Recursão de Cauda

Se o último passo de uma função  $f(x)$  é o retorno de  $f(y)$  então

- podemos reiterar a função  $f(x)$  usando  $x = y$
- usando um `while`
- até chegar em uma das bases da recursão

Chamamos esse tipo de recursão de **recursão de cauda**



# Recursão geral

Note que `hanoi` e `fat` não têm recursão de cauda

```
1 void hanoi(int n, char orig, char dest, char aux) {
2     if (n > 0) {
3         hanoi(n-1, orig, aux, dest);
4         printf("move de %c para %c\n", orig, dest);
5         hanoi(n-1, aux, dest, orig);
6     }
7 }
```

```
1 int fat(int n) {
2     int ret, ant;
3     if (n == 0)
4         ret = 1;
5     else {
6         ant = fat(n-1);
7         ret = n * ant;
8     }
9     return ret;
10 }
```

Recursões que não são de cauda também podem ser eliminadas

- Porém é necessário utilizar uma pilha
- E o processo é mais trabalhoso

# Recursão vs. Iteração

Algoritmos recursivos:

- mais fáceis de entender e de criar
- mais elegantes

Algoritmos iterativos:

- Normalmente mais rápidos do que os recursivos
- Não precisamos empilhar registros a cada iteração

Eliminação de recursão de cauda é uma ótima forma de otimização

- E é feita automaticamente por alguns compiladores

“We should forget about small efficiencies, say about 97% of the time:  
**premature optimization is the root of all evil.** Yet we should not pass up  
our opportunities in that critical 3%”

Donald E. Knuth

# Exercício

Elimine a recursão da busca binária:

```
1 int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
2     int m = (l+r)/2;
3     if (l > r)
4         return -1;
5     if (dados[m] == x)
6         return m;
7     else if (dados[m] < x)
8         return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
9     else
10        return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
11 }
```