EL VIAJE

MARCOS M. TIRADOR AND LEANDRO RODRÍGUEZ LLOSA

1. Preliminares

Se define un grafo no dirigido G como un par (V, E) de conjuntos tales que el segundo es una relación ($E \subseteq V \times V$) anti-reflexiva y asimétrica definida sobre el primero. A los elementos de V se les suele llamar vértices o nodos y a los elementos de E aristas. Además usaremos la notación $V(G)$ y $V(E)$ para referirnos respectivamente al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo G dado; aunque en caso de que no haya ambigüedad usaremos simplemente V y E. Sea (x, y) un elemento de E, usaremos también la notación $\langle x, y\rangle$ para referirnos al mismo.

Decimos que la tupla (G, w) es un grafo G es ponderado si $w\colon E \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada arista un valor real, conocido como peso o costo. A la función w se le llama función de ponderación.

Definimos un camino sobre un grafo G como una tupla de la forma $p = \langle v_0, v_1, \ldots v_k\rangle$ donde $v_i \in V$ y $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$. En este caso decimos que el camino p conecta a v_0 y v_k. Definimos la longitud de un camino como la cantidad de aristas en el mismo. Alternativamente se usará la notación $x \rightsquigarrow y$ para referirnos a un camino que comienza en x y termina en y, e $x \to y$ para referirnos a una arista de x a y que es parte de un camino cualquiera que contiene a x inmediatamente antes de y. Definimos además la distancia entre dos nodos como la longitud del camino de menor longitud que conecta a dichos nodos.

En un grafo ponderado definimos la longitud de un camino como la suma de los pesos de las aristas que este contiene. Dado el camino p definido anteriormente, definimos la longitud de p como $\sum_{i=1}^{k} w(\langle v_{i-1}, v_i\rangle)$. Análogamente definimos la distancia entre dos vértices como la longitud del camino de menor longitud que los conecta.

2. Enunciado del Problema

Problema 2.1. El viaje

Kenny y Jesús quieren hacer un viaje por carretera de La Habana a Guantánamo. Objetivo: Fiesta. Obstáculo: Precio de la gasolina. Incluyendo el punto de salida (La Habana) y de destino (Guantánamo), hay un total de n puntos a los cuales es posible visitar, unidos por m carreteras cuyos costos de gasolina se cononcen. Los compañeros comienzan entonces a planificar su viaje.

Luego de pensar por unas horas, Kenny va entusiasmado hacia Jesús y le entrega una hoja. En esta hoja se encontraban q tuplas de la forma (u, v, l) y le explica que a partir de ahora considerarían como útiles sólo a los caminos entre los puntos u y v cuyo costo de gasolina fuera menor o igual a l, para u, v, l de alguna de las q tuplas.

Jesús lo miró por un momento y le dijo: Gracias. La verdad esta información no era del todo útil para su viaje. Pero para no desperdiciar las horas de trabajo de Kenny se dispuso a buscar lo que definió como carreteras útiles. Una carretera útil es aquella que pertenece a un algún camino útil. Ayude a Kenny y Jesús encontrando el número total de carreteras útiles.

Date: May 8, 2023.

A continuación presentamos una redefinición del problema en términos más formales.

Problema 2.2. Se tiene un grafo no dirigido y ponderado, con función de ponderación w, de n nodos y m aristas. Se tiene un conjunto Q conformado por q tuplas de la forma (u, v, l), donde u y v son nodos del grafo, y l es un entero no negativo. Se dice que un camino entre u y v de longitud l es útil si la tupla $(u, v, l') \in Q$ para algún $l' \geq l$. Una arista e es útil si pertenece a algún camino útil. Encuentre el número de aristas útiles del grafo.

3. Solución Propuesta

Solución 3.1. Sea $d\colon V \times V \to \mathbb{R}^+$ la función que a cada par de nodos del grado hace corresponder la longitud del caminos de costo mínimo que los conecta. La misma puede ser hallada usando el conocido algoritmo de Floyd-Warshall, o haciendo el algoritmo de Dijkstra desde cada nodo. Luego para cada arista $\langle x, y\rangle$ del grafo, si existe en Q una tupla (u, v, l) tal que

$$d(u, x) + d(y, v) + w\left(\langle x, y\rangle\right) \leq lo \tag{3.1}$$

$$d(u, y) + d(x, v) + w\left(\langle x, y\rangle\right) \leq l, \tag{3.2}$$

entonces dicha arista puede ser contada como útil. Para determinar esto podemos para cada arista comprobar cada una de las tuplas de Q. En caso de que ninguna satisfaga la desigualdad (3.1), dicha arista no será útil.

Complejidad temporal:
La complejidad temporal de la solución es $O\left(mq + \min\left(\min(q, n)m\log(m), n^3\right)\right)$. El sumando mq sale del hecho de que debemos comprobar para cada arista, cada una de las tuplas de Q en la condición (3.1). El otro sumando es el costo de calcular la función d. En caso de que $m\log(m) = O(n^2)$ podemos usar la variante de hacer Dijktsra desde cada nodo, de donde sale la complejidad $O(nm\log(m))$ dado que son n nodos y la complejidad de Dijkstra es $O(m\log(m))$ (remplazamos el factor n por $\min(n, q)$, dado que solo nos interesan los caminos de longitud mínima partiendo de los nodos que aparecen en algunas de las q tuplas). En otro caso podemos usar Floyd-Warshall que tiene una complejidad total de $O(n^3)$.

Complejidad espacial: La complejidad espacial está determinada por el costo de almacenar la función d, el cual es $O(n^2)$, más el costo de almacenar las tuplas y el grafo en sí que es $O(n + m + q)$. Por tanto la complejidad final es $O(n^2 + q)$ (siempre pueden eliminarse ciertas tuplas innecesarias de modo que siempre sea $O(n^2)$).

Proposición 3.2. *La Solución 3.1 es correcta.*

Demostración: Comencemos por observar que si una arista $\langle x, y\rangle$ satisface la desigualdad (3.1) para alguna tupla $(u, v, l) \in Q$, entonces dicha arista es útil. Esto se puede ver fácilmente del hecho de que el camino $u \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow v$ tiene longitud $d(u, x) + d(y, v) + w\big(\langle x, y\rangle\big)$. Por tanto a partir de la desigualdad (3.1) la longitud de ese camino es menor que l, de donde tenemos que es útil para la tupla (u, v, l) y así la arista (x, y) también lo será.

Supongamos ahora que existe una arista $\langle x, y\rangle$ que es útil pero que no fue encontrada por el algoritmo. Sea (u, v, l) la tupla que hace útil a dicha arista. Por tanto, existe un camino $p_1 := u \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow v$ con longitud a lo sumo l o un camino $p_2 := u \rightsquigarrow y \to x \rightsquigarrow v$ con longitud a lo sumo l. Supongamos sin pérdida de generalidad que existe p_1. Sea w_1 la longitud del fragmento de p que va de u a x y w_2 la longitud del fragmento de p que va de y a v. Por definición de d, se cumple que $d(u, x) \leq w_1$ y $d(y, v) \leq w_2$. Entonces $d(u, x) + w(\langle x, y\rangle) + d(y, v) \leq w_1 + w(\langle x, y\rangle) + w_2 = |p| \leq l$. Por tanto la arista $\langle x, y\rangle$ satisface la desigualdad (3.1) para la tupla (u, v, l), lo cual contradice que el algoritmo no la encontró. Podemos concluir que una arista es útil si y solo si la solución propuesta la encuentra.

■

Proposición 3.3. *La Solución 3.1 es óptima si y solo si los algoritmos de Dijkstra y Floyd-Warshall son óptimos.*

Demostración: Supongamos que dadas las entradas es mejor usar Floyd-Warshall, o sea que $n^2 = O(mlog(m))$, o en otras palabras que el grafo es denso. El caso de Dijkstra será análogo. Ahora supongamos que nuestra solución es óptima. Si existe un algoritmo mejor que Floyd-Warshall para hallar el camino de costo mínimo entre cada par de vértices (la función d enunciada en la Solución 3) entonces podremos usar ese algoritmo en lugar de Floyd-Warshall en nuestra solución para obtener una mejor, lo que contradice que fuera óptima.

Ahora asumamos que Floyd-Warshall es óptimo. Supongamos que existe una solución a nuestro problema que tiene complejidad mejor que la dada, para el caso peor. Entonces esta solución no utiliza Floyd-Warshall, ni ningún otro algoritmo que calcule la función d para todo par de nodos. Por tanto habrán pares de nodos para los cuales d será desconocida. Construyamos una entrada del problema para el cuál este algoritmo nuevo nunca dará la solución correcta lo cual concluirá nuestra demostración. Asumamos que en el problema a resolver existe en Q una tupla para cada par de vértices del grafo. Por tanto, existe al menos una tupla para la cual la distancia entre los vértices de los extremos se desconoce.

■

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: `marcosmath44@gmail.com`

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: `leandro_driguez@outlook.com`