EL VIAJE

MARCOS M. TIRADOR AND LEANDRO RODRÍGUEZ LLOSA

1. Preliminares

Se define un grafo no dirigido G como un par (V, E) de conjuntos tales que el segundo es una relación ($E \subseteq V \times V$) anti-reflexiva y asimétrica definida sobre el primero. A los elementos de V se les suele llamar vértices o nodos y a los elementos de E aristas. Además usaremos la notación $V(G)$ y $V(E)$ para referirnos respectivamente al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo G dado; aunque en caso de que no haya ambigüedad usaremos simplemente V y E. Sea (x, y) un elemento de E, usaremos también la notación $\langle x, y\rangle$ para referirnos al mismo.

Decimos que la tupla (G, w) es un grafo G es ponderado si $w\colon E \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada arista un valor real, conocido como peso o costo. A la función w se le llama función de ponderación.

Definimos un camino sobre un grafo G como una tupla de la forma $p = \langle v_0, v_1, \ldots v_k\rangle$ donde $v_i \in V$ y $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$. En este caso decimos que el camino p conecta a v_0 y v_k. Definimos la longitud de un camino como la cantidad de aristas en el mismo. Alternativamente se usará la notación $x \rightsquigarrow y$ para referirnos a un camino que comienza en x y termina en y, e $x \to y$ para referirnos a una arista de x a y que es parte de un camino cualquiera que contiene a x inmediatamente antes de y. Definimos además la distancia entre dos nodos como la longitud del camino de menor longitud que conecta a dichos nodos.

En un grafo ponderado definimos la longitud de un camino como la suma de los pesos de las aristas que este contiene. Dado el camino p definido anteriormente, definimos la longitud de p como $\sum_{i=1}^{k} w(\langle v_{i-1}, v_i\rangle)$. Análogamente definimos la distancia entre dos vértices como la longitud del camino de menor longitud que los conecta.

Agregar a preliminares lo relacionado con NP y la definición de grafo cúbico

2. Enunciado del Problema

Problema 2.1. La venganza de Alejandra

Por algún motivo, a Alejandra no le gustaba la paz y le irritaba que sus compañeros de aula se llevaran tan bien. Ella quería ver el mundo arder. Un día un demonio se le acercó y le propuso un trato: "A cambio de un cachito de tu alma, te voy a dar el poder para romper relaciones de amistad de tus compañeros, con la única condición de que no puedes romperlas todas". Sin pensarlo mucho (Qué más da un pequeño trocito de alma), Alejandra aceptó y se puso a trabajar. Ella conocía, dados sus k compañeros de aula, quiénes eran mutuamente amigos.

Como no podía eliminar todas las relaciones de amistad, pensó en qué era lo siguiente que podía hacer más daño. Si una persona quedaba con uno o dos amigos, podría hacer proyectos en parejas o tríos (casi todos los de la carrera son así), pero si tenía exactamente tres amigos, cuando llegara un proyecto de tres personas, uno de sus amigos debería quedar afuera y se formaría el caos.

Date: June 13, 2023.

Ayude a Alejandra a saber si puede sembrar la discordia en su aula eliminando relaciones de amistad entre sus compañeros de forma que todos queden, o bien sin amigos, o con exactamente tres amigos.

Teorema 2.2. *El problema de reconocer si un grafo tiene algún subgrafo cúbico es NP-completo.*

Demostración: Primero es fácil ver que el problema es NP dado que si nos dan un subgrafo del grafo original, pordemos fácilmente comprobar si es o no cúbico, en tiempo polinomial, solamente comprobando los grados de todos los vértices.

Ahora para demostrar que el problema de decisión en cuestión es NP completo reduciremos el problema de 3-coloración a nuestro problema. Sea $G = (V, E)$ un grafo que se recibe como entrada al problema de 3-coloración. Del mismo queremos determinar si sus vértices se pueden dividir en 3 conjuntos disjuntos tal que no existen aristas entre los vértices de un mismo conjunto. Para proceder a demostrar que este problema se puede reducir al problema de tener determinar si un grafo posee subgrafos cúbicos, transformemos la entrada G del problema original en otra entrada G' para el segundo problema.

El conjunto V' estará formado de la siguiente forma:

- Por cada $v_i \in V$ tendremos 15 vértices v_{ij}^h en V', para cada $1 \leq j \leq 5$ y $1 \leq h \leq 3$
- Por cada arista $e_i \in E$ tendremos los vértices a_i^h en V', para cada $1 \leq h \leq 3$
- Por cada vértice $x_i \in V$ tendremos otro vértice $x_i' \in V'$
- n vértices especiales s_i.

El conjunto de aristas E' estará definido como sigue:

- Por cada $1 \leq i \leq n$ tendremos una arista entre los vértices v_{ij}^h y v_{ij+1}^h (donde se toma el segundo subíndice módulo 5), para cada $1 \leq h \leq 3$. Como podemos ver se formarán así unos ciclos de tamaño 5 a los que denotaremos por C_i^h
- Por cada arista e_i que conecta a v_x y v_y en G, entonces por cada $1 \leq h \leq 3$ conectaremos a a_i^h con cada uno de los nodos v_{xj}^h y v_{yj}^h, para cada $1 \leq j \leq 3$
- Por cada vértice $x_i \in V$ conectamos el vértice $x_i' \in V'$, con v_{i4}^h y v_{i5}^h, para cada $1 \leq h \leq 3$
- Cada vértice s_i lo conectamos con s_{i+1} formando así un ciclo que denotaremos por S
- Por cada $1 \leq i \leq n$ conectamos x_i' con s_i.

Una vez definida la transformación del grafo G que se da como entrada del problema original en el grafo G' solo resta demostrar que G es 3 coloreable si y solo si G' tiene un subgrafo regular de grado 3.

□

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: marcosmath44@gmail.com

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: leandro_driguez@outlook.com