

# EL VIAJE

MARCOS M. TIRADOR AND LEANDRO RODRÍGUEZ LLOSA

## 1. PRELIMINARES

Se define un grafo no dirigido  $G$  como un par  $(V, E)$  de conjuntos tales que el segundo es una relación ( $E \subseteq V \times V$ ) anti-reflexiva y asimétrica definida sobre el primero. A los elementos de  $V$  se les suele llamar vértices o nodos y a los elementos de  $E$  aristas. Además usaremos la notación  $V(G)$  y  $E(G)$  para referirnos respectivamente al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo  $G$  dado; aunque en caso de que no haya ambigüedad usaremos simplemente  $V$  y  $E$ . Sea  $(x, y)$  un elemento de  $E$ , usaremos también la notación  $\langle x, y \rangle$  para referirnos al mismo.

Dado un grafo  $G = (V, E)$  se dice que  $G' = (V', E')$  es un subgrafo de  $G$  si  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$  y todas las aristas en  $E'$  inciden solo sobre elementos de  $V'$ . En este caso escribimos  $G' \leq G$ .

Definimos el grado de un vértice como la cantidad de aristas que inciden sobre este. Decimos que un grafo es regular si todos sus nodos tienen el mismo grado. Un grafo será entonces  $k$ -regular si todos sus nodos tienen grado  $k$ . A los grafos  $k$ -regulares con  $k = 3$  también suele llamárseles grafos cúbicos.

Definimos un problema abstracto o simplemente problema como una relación binaria  $Q$  sobre un conjunto de instancias del problema  $I$  y un conjunto  $S$  de soluciones del problema. Se dice que un problema es decisión si  $S = \{0, 1\}$ . Decimos que un problema es polinomial o pertenece a la clase de complejidad  $P$  si existe un algoritmo que con complejidad temporal polinomial (o dicho más simple un algoritmo polinomial) puede encontrar para un elemento de  $I$  un elemento de  $S$  que esté relacionado con este.

Dado un problema de decisión se define informalmente un certificado como un camino que puede ser seguido para verificar si la respuesta del problema es que “sí” o que “no”. Decimos que un problema es  $NP$  si existe un algoritmo polinomial  $A$  tal que para cada instancia del problema  $x$  con solución 1, existe un certificado  $y$  que el algoritmo recibe como entrada junto con  $x$  y tiene salida 1, o sea  $A(x, y) = 1$ .

Se dice que un problema  $Q$  puede ser reducido a otro problema  $Q'$  si cualquier instancia de  $Q$  puede ser transformada en una instancia de  $Q'$  tal que la solución de  $Q'$  provea una solución para  $Q$ . Se dice que una reducción es polinomial si existe un algoritmo polinomial que transforma cada instancia de  $Q$  en una instancia de  $Q'$ . Se dice entonces que un problema  $Q$  pertenece a la clase de complejidad  $NP$ -duro si existe una reducción polinomial de todo problema  $NP$  al problema  $Q$  (en términos informales se dice que cualquier problema  $NP$  es cuándo más tan difícil como  $Q$ ). Por último se dice que un problema es  $NP$ -completo si este es  $NP$  y  $NP$ -duro. Es fácil ver que demostrar que un problema  $NP$ -completo  $Q'$  puede ser reducido a un problema  $Q$  es suficiente para afirmar que  $Q$  es  $NP$ -duro, dado que cualquier problema  $NP$  puede ser reducido a  $Q'$  en tiempo polinomial y luego este a  $Q$ .

## 2. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

**Problema 2.1. La venganza de Alejandra**

Por algún motivo, a Alejandra no le gustaba la paz y le irritaba que sus compañeros de aula se llevaran tan bien. Ella quería ver el mundo arder. Un día un demonio se le acercó y le propuso un trato: "A cambio de un cachito de tu alma, te voy a dar el poder para romper relaciones de amistad de tus compañeros, con la única condición de que no puedes romperlas todas". Sin pensarlo mucho (Qué más da un pequeño trocito de alma), Alejandra aceptó y se puso a trabajar. Ella conocía, dados sus  $k$  compañeros de aula, quiénes eran mutuamente amigos.

Como no podía eliminar todas las relaciones de amistad, pensó en qué era lo siguiente que podía hacer más daño. Si una persona quedaba con uno o dos amigos, podría hacer proyectos en parejas o tríos (casi todos los de la carrera son así), pero si tenía exactamente tres amigos, cuando llegara un proyecto de tres personas, uno de sus amigos debería quedar afuera y se formaría el caos.

Ayude a Alejandra a saber si puede sembrar la discordia en su aula eliminando relaciones de amistad entre sus compañeros de forma que todos queden, o bien sin amigos, o con exactamente tres amigos.

Podemos representar a los compañeros de Alejandra mediante un grafo no dirigido, donde las aristas indican las relaciones de amistad existentes. Como Alejandra quiere que cada persona termine siendo amigo de cero o tres personas, sin eliminar todas las relaciones, básicamente Alejandra quiere obtener un subgrafo del grafo de amistad tal que todos sus nodos tengan grado 0 o 3, y haya al menos uno de grado 3. Luego de retirar los nodos de grado 0, podemos pensar en el problema de la siguiente forma.

**Problema 2.2.** Dado un grafo no dirigido  $G$  determinar si existe un subgrafo  $G' \leq G$  tal que  $G'$  es cúbico.

## 3. NP COMPLETITUD

En esta sección demostraremos que el Problema 2.2 es NP-completo, al demostrar que es NP y que se puede reducir en tiempo polinomial el conocido problema de 3-coloración al nuestro. Definamos primeramente el problema de 3-coloración.

**Problema 3.1. Problema de 3-coloración**

Dado un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  se quiere determinar si existe una partición de  $V$  de la forma  $\{V_1, V_2, V_3\}$ , tal que no existe  $\langle x, y \rangle \in E$  tal que  $x, y \in V_i$  para algún  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Teorema 3.2.** *El problema de 3-coloración es NP-completo.*

sertar referencia

*Demostración:* Ver [?]. .

□

Ya estamos preparados para demostrar el resultado principal de esta sección. Este esta basado en la demostración hecha en [2], en el apéndice titulado *NP-completeness*.

**Teorema 3.3.** *El problema de reconocer si un grafo tiene algún subgrafo cúbico es NP-completo.*

*Demostración:* Primero es fácil ver que el problema es NP dado que podemos crear fácilmente un algoritmo que dado un subgrafo  $G'$  del grafo original, compruebe en tiempo polinomial si este es cúbico, solamente comprobando los grados de todos los vértices. Entonces para cada grafo  $G$  que es una instancia del problema con solución afirmativa podemos tomar como certificado algún subgrafo  $G' \leq G$  cúbico y el algoritmo descrito decidirá que la solución en este caso es afirmativa.

Ahora para demostrar que el problema de decisión en cuestión es NP-completo reduciremos el problema de 3-coloración a nuestro problema. Sea  $G = (V, E)$  un grafo que se recibe como entrada al problema de 3-coloración. Del mismo queremos determinar si sus vértices se pueden dividir en 3 conjuntos disjuntos tal que no existen aristas entre los vértices de un mismo conjunto. Para proceder a demostrar que este problema se puede reducir al problema de tener determinar si un grafo posee

subgrafos cúbicos, transformemos la entrada  $G$  del problema original en otra entrada  $G'$  para el segundo problema.

Denotemos  $d_i = \deg(v_i)$  por cada nodo  $v_i \in V$ . El conjunto  $V'$  estará formado de la siguiente forma:

- Por cada  $v_i \in V$  añadimos el vértice  $v_{ij}^h$  en  $V'$ , para cada  $1 \leq j \leq 3d_i + 2$  y  $1 \leq h \leq 3$ .
- Por cada arista  $e_i \in E$  tendremos los vértices  $a_i^h$  en  $V'$ , para cada  $1 \leq h \leq 3$ .
- Por cada vértice  $v_i \in V$  tendremos otro vértice  $x_i \in V'$ .
- $n$  vértices especiales  $s_i$ .

El conjunto de aristas  $E'$  estará definido como sigue:

- Por cada  $1 \leq i \leq n$  tendremos una arista entre los vértices  $v_{ij}^h$  y  $v_{ij+1}^h$  (donde se toma el segundo subíndice módulo  $3d_i + 2$ ), para cada  $1 \leq h \leq 3$ . Como podemos ver se formarán así  $3n$  ciclos de tamaño  $3d_i + 2$  a los que denotaremos por  $C_i^h$ .
- Sean  $e_{\rho_1}, e_{\rho_2}, \dots, e_{\rho_{d_i}}$  las aristas incidentes en el nodo  $v_i$ , entonces por cada  $1 \leq h \leq 3$  conectaremos los nodos  $v_{i,3j}^h, v_{i,3j+1}^h$  y  $v_{i,3j+2}^h$  con el nodo  $a_{\rho_j}^h$ , para cada  $1 \leq j \leq d_i$ .
- Por cada vértice  $v_i \in V$  conectamos el vértice  $x_i \in V'$ , con  $v_{i,3d_i+1}^h$  y  $v_{i,3d_i+2}^h$ , para cada  $1 \leq h \leq 3$ .
- Cada vértice  $s_i$  lo conectamos con  $s_{i+1}$  formando así un ciclo que denotaremos por  $S$ .
- Por cada  $1 \leq i \leq n$  conectamos  $x_i$  con  $s_i$ .

Una vez definida la transformación del grafo  $G$  que se da como entrada del problema original en el grafo  $G'$  solo resta demostrar que  $G$  es 3 coloreable si y solo si  $G'$  tiene un subgrafo regular de grado 3.

Primero supongamos que  $G$  es 3-coloreable y por tanto sea  $\{V^1, V^2, V^3\}$  la partición de sus vértices en tres conjuntos correspondientes a la 3-coloración. Tomaremos  $G''$  como el subgrafo inducido en  $G'$  por los siguientes vértices:

- Todos los vértices  $s_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ .
- Todos los vértices  $x_i$ , para  $1 \leq i \leq n$ .
- Todos los vértices  $a_i^h$ , para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq h \leq 3$ .
- Por cada vértice  $v_i \in V_j$ , añadimos todos los vértices en  $C_i^j$ , para  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

Demostremos que  $G''$  contiene solo vértices de grado 0 o 3, por lo que luego de eliminar los vértices de grado 0 tendremos el grafo cúbico buscado. Es fácil ver que todos los vértices  $s_i$  tienen grado 3. Para cada vértice  $x_i$  notemos que este está conectado a  $s_i$  y además a exactamente a uno de los siguientes pares de vértices:  $(v_{i,3d_i+1}^1, v_{i,3d_i+2}^1), (v_{i,3d_i+1}^2, v_{i,3d_i+2}^2), (v_{i,3d_i+1}^3, v_{i,3d_i+2}^3)$ , ya que solo los vértices en uno de esos pares pertenecerá a  $G''$ , en dependencia de a qué conjunto de  $V_1, V_2, V_3$  pertenezca  $v_i$ .

Sea  $v_{xy}^k$  un vértice arbitrario de  $G''$  (con la forma descrita). Nótese que para cada vértice  $v_i \in V_h$ , todos los vértices  $v_{ij}^h$  pertenecen  $G''$  y entonces el ciclo  $C_i^h$  está en  $G''$ . Por tanto, el vértice  $v_{xy}^k \in V(G'')$  tendrá arista en  $G''$  con sus dos adyacentes en el ciclo  $C_x^k$ . Además, como  $v_{xy}^k$  estaba conectado en  $G'$  con exactamente un vértice de la forma  $a_{\rho_p}^k$ , para algún  $1 \leq p \leq d_x$ , y cada vértice de esta forma pertenece a  $G''$ , tenemos que  $v_{xy}^k$  tiene al menos grado 3. Sin embargo,  $v_{xy}^k$  tenía exactamente grado 3 en  $G'$ , por lo que concluimos que este tiene grado 3 en  $G''$  también.

Ahora tomemos un vértice  $a_i^h$  cualquiera (con la forma descrita), supongamos que  $e_i = \langle v_x, v_y \rangle$  (donde el índice de  $e_i$  fue tomado de igual forma que en la definición de  $a_i^h$ ). Nótese que  $a_i^h$  está en  $G'$  conectado a los 3 vértices  $v_{x3j}^h, v_{x3j+1}^h$  y  $v_{x3j+2}^h$  para algún  $1 \leq j \leq d_x$ , y a los 3 vértices  $v_{y3k}^h, v_{y3k+1}^h$  y  $v_{y3k+2}^h$  para algún  $1 \leq k \leq d_y$ . Sin embargo, como  $v_x$  y  $v_y$  son adyacentes, entonces estos están en conjuntos de  $\{V_1, V_2, V_3\}$  diferentes. Por tanto, a lo sumo uno de los ciclos  $C_x^h$  y  $C_y^h$  estará en  $G''$

de donde tenemos que  $a_i^h$  tendrá o bien grado 3, o 0. Por tanto podemos concluir que  $G'$  tiene un subgrafo cúbico.

Ahora supongamos que  $G'$  tiene un subgrafo cúbico  $G''$  y demosremos que  $G$  es 3-coloreable. Para ello construiremos los conjuntos  $V_k := \{v_i \mid v_{ij}^k \in V(G'') \text{ para algún } j\}$ , para  $k = 1, 2, 3$ , y demostraremos que estos conforman una partición de  $V$ . Además, tendríamos que demostrar que no existen aristas entre vértices en un mismo conjunto  $V_k$ .

Denotemos por  $V'' := V(G'')$ . Empecemos por notar que si  $v_{i,j}^h \in V''$ , entonces  $C_i^h$  está en  $G''$ . Esto se debe a que  $v_{i,j}^h$  tiene solamente un adyacente fuera de  $C_i^h$  en  $G'$ . Supongamos que el vértice  $a_i^h$  está en  $G''$ . Sean  $v_x$  y  $v_y$  los vértices que  $e_i$  conectaba en  $G$ . Si  $a_i^h$  tuviera adyacentes en  $G''$  tanto en  $C_x^h$  como en  $C_y^h$ , entonces por lo expuesto anteriormente ambos ciclos estarían en  $G''$  y el grado de  $a_i^h$  sería 6, lo cual es absurdo. Entonces si  $a_i^h \in V''$  entonces exactamente uno de los ciclos  $C_x^h$  o  $C_y^h$  está en  $G''$ . Analizando en el otro sentido, si el ciclo  $C_x^h$  está en  $G''$ , entonces para cada arista  $e_{\rho_i}$  incidente en  $v_x$  en  $G$ , tenemos que para que el nodo  $v_{x,3i}^h$  tenga grado 3 en  $G''$ , el vértice  $a_{\rho_i}^h$  debe estar en  $V''$ . Por tanto, podemos concluir que no existen en  $G'$  aristas entre vértices de un mismo conjunto  $V_k$ .

Ahora veamos que si  $C_i^h \in G''$  entonces  $v_{i,3d_i+1}^h \in V''$  y para que su grado sea 3, debe pasar que  $x_i \in V''$ . Ahora si  $x_i \in V''$ , como este vértice es adyacente en  $G'$  solamente a  $s_i$  y a dos vértices en cada ciclo  $C_i^h$ , entonces tenemos que  $s_i \in V''$  es la única forma de que  $\deg_{G''}(x_i)$  sea impar. Además, en ese caso exactamente uno de los ciclos  $C_i^1, C_i^2$  y  $C_i^3$  estará en  $G''$ . Es fácil ver además que si  $s_i \in V''$  para algún  $i$ , entonces  $s_i, x_i \in V''$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , dado que  $s_i$  tiene en  $G'$  exactamente un adyacente fuera de  $S$ , que es  $x_i$ , y dos en  $S$ .

Hemos demostrado que si un vértice  $x$  cualquiera pertenece a  $G''$ , entonces  $x_i$  y  $s_i$  pertenecen a  $V''$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Además, si  $x_i \in V''$ , entonces  $C_i^h \in G''$  para exactamente un valor de  $h$ . Por tanto, podemos concluir que  $\{V_1, V_2, V_3\}$  es una partición de  $V$ . □

## REFERENCES

- [1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest y C. Stein: *Introduction to Algorithms*. Third Edition.
- [2] V. Chvátal, H. Fleischner, J. Sheehan, C. Thomassen: *Three-Regular Subgraphs of Four-Regular Graphs*. Journal of Graph Theory, Vol. 3 (1979) pp. 371 - 386.

FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CIUDAD DE LA HABANA, CUBA  
*Email address:* marcosmath44@gmail.com

FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, CIUDAD DE LA HABANA, CUBA  
*Email address:* leandro.dríguez@outlook.com