EL VIAJE

MARCOS M. TIRADOR AND LEANDRO RODRÍGUEZ LLOSA

1. Preliminares

Se define un grafo no dirigido G como un par (V, E) de conjuntos tales que el segundo es una relación ($E \subseteq V \times V$) anti-reflexiva y asimétrica definida sobre el primero. A los elementos de V se les suele llamar vértices o nodos y a los elementos de E aristas. Además usaremos la notación $V(G)$ y $V(E)$ para referirnos respectivamente al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo G dado; aunque en caso de que no haya ambigüedad usaremos simplemente V y E. Sea (x, y) un elemento de E, usaremos también la notación $\langle x, y\rangle$ para referirnos al mismo.

Decimos que la tupla (G, w) es un grafo G es ponderado si $w \colon E \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada arista un valor real, conocido como peso o costo. A la función w se le llama función de ponderación.

Definimos un camino sobre un grafo G como una tupla de la forma $p = \langle v_0, v_1, \ldots v_k\rangle$ donde $v_i \in V$ y $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$. En este caso decimos que el camino p conecta a v_0 y v_k. Definimos la longitud de un camino como la cantidad de aristas en el mismo. Alternativamente se usará la notación $x \rightsquigarrow y$ para referirnos a un camino que comienza en x y termina en y, e $x \to y$ para referirnos a una arista de x a y que es parte de un camino cualquiera que contiene a x inmediatamente antes de y. Definimos además la distancia entre dos nodos como la longitud del camino de menor longitud que conecta a dichos nodos.

En un grafo ponderado definimos la longitud de un camino como la suma de los pesos de las aristas que este contiene. Dado el camino p definido anteriormente, definimos la longitud de p como $\sum_{i=1}^{k} w(\langle v_{i-1}, v_i\rangle)$. Análogamente definimos la distancia entre dos vértices como la longitud del camino de menor longitud que los conecta.

2. Enunciado del Problema

Problema 2.1. El viaje

Kenny y Jesús quieren hacer un viaje por carretera de La Habana a Guantánamo. Objetivo: Fiesta. Obstáculo: Precio de la gasolina. Incluyendo el punto de salida (La Habana) y de destino (Guantánamo), hay un total de n puntos a los cuales es posible visitar, unidos por m carreteras cuyos costos de gasolina se cononcen. Los compañeros comienzan entonces a planificar su viaje.

Luego de pensar por unas horas, Kenny va entusiasmado hacia Jesús y le entrega una hoja. En esta hoja se encontraban q tuplas de la forma (u, v, l) y le explica que a partir de ahora considerarían como útiles sólo a los caminos entre los puntos u y v cuyo costo de gasolina fuera menor o igual a l, para u, v, l de alguna de las q tuplas.

Jesús lo miró por un momento y le dijo: Gracias. La verdad esta información no era del todo útil para su viaje. Pero para no desperdiciar las horas de trabajo de Kenny se dispuso a buscar lo que definió como carreteras útiles. Una carretera útil es aquella que pertenece a un algún camino útil. Ayude a Kenny y Jesús encontrando el número total de carreteras útiles.

Date: May 8, 2023.

A continuación presentamos una redefinición del problema en términos más formales.

Problema 2.2. Se tiene un grafo no dirigido y ponderado, con función de ponderación w, de n nodos y m aristas. Se tiene un conjunto Q conformado por q tuplas de la forma (u, v, l), donde u y v son nodos del grafo, y l es un entero no negativo. Se dice que un camino entre u y v de longitud l es útil si la tupla $(u, v, l') \in Q$ para algún $l' \geq l$. Una arista e es útil si pertenece a algún camino útil. Encuentre el número de aristas útiles del grafo.

3. Solución inocente

Como podemos ver, una vez formulado el problema, podemos encontrar una solución simplemente explorando el espacio de todos los posibles caminos entre cada par de vértices u y v tal que $(u, v, l) \in Q$ y tomando el conjunto de las aristas que pertenezcan a aquellos caminos cuyo costo sea menor o igual que l. Veremos a continuación dicha solución.

Solución 3.1. Por cada tupla de la forma $(u, v, l) \in Q$ exploramos todos los caminos que salen desde u con distancia menor o igual a l. Cada vez que uno de tales caminos termine en v marcamos todas sus aristas como útiles.

Para calcular los caminos que parten de u y tienen distancia menor o igual que l, lo que hacemos es explorar cada una de las aristas $\langle u, x\rangle$ y resolver recursivamente el problema de explorar los caminos que parten de x con costo menor o igual a $l - w(\langle u, x\rangle)$. Es importante que si $p := u \rightsquigarrow y$ es la parte del camino explorada hasta un momento, en los caminos que se exploren desde y, las aristas $a \to b$ que se visiten, no esten en p en ese mismo sentido. En caso de que $l < 0$ terminamos la ejecución y en caso de que $y = v$ marcamos como útiles a todas las aristas del camino p que veníamos siguiendo (las aristas correspondietes a la pila de llamados recursivos).

Proposición 3.2. *La Solución 3.1 es correcta.*

Demostración: Para demostrar la correctitud del algoritmo basta con demostrar que este termina, ya que lo que hace es explorar todos los posibles caminos útiles, y por tanto analizar todas las posibilidades para que una arista sea útil, tal y como se requiere en el problema. Supongamos en busca de una contradicción que el algoritmo no termina. Note que como la función de costo es no negativa, entonces la distancia del camino a hallar en cada llamado recursivo es menor o igual que la del llamado recursivo anterior. Como el algoritmo no termina, entonces tenemos un conjunto infinito de llamados recursivos para los cuales la longitud del camino a hallar es la misma. Sin embargo, para cada par de llamados recursivos consecutivos corresponde una arista del camino explorado hasta el momento. Pero cada arista puede ser usada a lo sumo dos veces según lo descrito en la solución (una vez en cada sentido) y existe un número finito de estas, lo cual contradice que el algoritmo no termina. ∎

4. Solución Propuesta

Solución 4.1. Sea $d\colon V \times V \to \mathbb{R}^+$ la función que a cada par de nodos del grado hace corresponder la longitud del caminos de costo mínimo que los conecta. La misma puede ser hallada usando el conocido algoritmo de Floyd-Warshall, o haciendo el algoritmo de Dijkstra desde cada nodo. Luego para cada arista $\langle x, y\rangle$ del grafo, si existe en Q una tupla (u, v, l) tal que

$$d(u, x) + d(y, v) + w\left(\langle x, y\rangle\right) \leq lo \tag{4.1}$$

$$d(u, y) + d(x, v) + w\left(\langle x, y\rangle\right) \leq l, \tag{4.2}$$

entonces dicha arista puede ser contada como útil. Para determinar esto podemos para cada arista comprobar cada una de las tuplas de Q. En caso de que ninguna satisfaga la desigualdad (4.1), dicha arista no será útil.

Complejidad temporal:
La complejidad temporal de la solución es $O\left(mq + \min\left(\min(q,n)m\log(m), n^3\right)\right)$. El sumando mq sale del hecho de que debemos comprobar para cada arista, cada una de las tuplas de Q en las condiciones (4.1) y (4.2). El otro sumando es el costo de calcular la función d. En caso de que $m\log(m) = O(n^2)$ podemos usar la variante de hacer Dijktsra desde cada nodo, de donde sale la complejidad $O(nm\log(m))$ dado que son n nodos y la complejidad de Dijkstra es $O(m\log(m))$ (remplazamos el factor n por $\min(n,q)$, dado que solo nos interesan los caminos de longitud mínima partiendo de los nodos que aparecen en algunas de las q tuplas). En otro caso podemos usar Floyd-Warshall que tiene una complejidad total de $O(n^3)$.

Complejidad espacial: La complejidad espacial está determinada por el costo de almacenar la función d, el cual es $O(n^2)$, más el costo de almacenar las tuplas y el grafo en sí que es $O(n+m+q)$. Por tanto la complejidad final es $O(n^2+q)$ (siempre pueden eliminarse ciertas tuplas innecesarias de modo que siempre sea $O(n^2)$).

Proposición 4.2. *La Solución 4.1 es correcta.*

Demostración: Comencemos por observar que si una arista $\langle x,y\rangle$ satisface la desigualdad (4.1) para alguna tupla $(u,v,l) \in Q$, entonces dicha arista es útil. Esto se puede ver fácilmente del hecho de que el camino $u \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow v$ tiene longitud $d(u,x) + d(y,v) + w\big(\langle x,y\rangle\big)$. Por tanto a partir de la desigualdad (4.1) la longitud de ese camino es menor que l, de donde tenemos que es útil para la tupla (u,v,l) y así la arista (x,y) también lo será. Para el caso en que satisfaga (4.2) la demostración es análoga.

Supongamos ahora que existe una arista $\langle x,y\rangle$ que es útil pero que no fue encontrada por el algoritmo. Sea (u,v,l) la tupla que hace útil a dicha arista. Por tanto, existe un camino $p_1 := u \rightsquigarrow x \to y \rightsquigarrow v$ con longitud a lo sumo l o un camino $p_2 := u \rightsquigarrow y \to x \rightsquigarrow v$ con longitud a lo sumo l. Supongamos sin pérdida de generalidad que existe p_1. Sea w_1 la longitud del fragmento de p que va de u a x y w_2 la longitud del fragmento de p que va de y a v. Por definición de d, se cumple que $d(u,x) \le w_1$ y $d(y,v) \le w_2$. Entonces $d(u,x) + w(\langle x,y\rangle) + d(y,v) \le w_1 + w(\langle x,y\rangle) + w_2 = |p| \le l$. Por tanto la arista $\langle x,y\rangle$ satisface la desigualdad (4.1) para la tupla (u,v,l), lo cual contradice que el algoritmo no la encontró. Podemos concluir que una arista es útil si y solo si la solución propuesta la encuentra.

■

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: marcosmath44@gmail.com

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: leandro_driguez@outlook.com