EL VIAJE

MARCOS M. TIRADOR AND LEANDRO RODRÍGUEZ LLOSA

1. Preliminares

Se define un grafo no dirigido G como un par (V, E) de conjuntos tales que el segundo es una relación ($E \subseteq V \times V$) anti-reflexiva y asimétrica definida sobre el primero. A los elementos de V se les suele llamar vértices o nodos y a los elementos de E aristas. Además usaremos la notación $V(G)$ y $V(E)$ para referirnos respectivamente al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de un grafo G dado; aunque en caso de que no haya ambigüedad usaremos simplemente V y E. Sea (x, y) un elemento de E, usaremos también la notación $\langle x, y \rangle$ para referirnos al mismo.

Decimos que la tupla (G, w) es un grafo G es ponderado si $w\colon E \to \mathbb{R}$ es una función que asigna a cada arista un valor real, conocido como peso o costo. A la función w se le llama función de ponderación.

Definimos un camino sobre un grafo G como una tupla de la forma $p = \langle v_0, v_1, \ldots v_k \rangle$ donde $v_i \in V$ y $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \in E$ para todo $1 \leq i \leq k$. En este caso decimos que el camino p conecta a v_0 y v_k. Definimos la longitud de un camino como la cantidad de aristas en el mismo. Alternativamente se usará la notación $x \rightsquigarrow y$ para referirnos a un camino que comienza en x y termina en y, e $x \to y$ para referirnos a una arista de x a y que es parte de un camino cualquiera que contiene a x inmediatamente antes de y. Definimos además la distancia entre dos nodos como la longitud del camino de menor longitud que conecta a dichos nodos.

En un grafo ponderado definimos la longitud de un camino como la suma de los pesos de las aristas que este contiene. Dado el camino p definido anteriormente, definimos la longitud de p como $\sum_{i=1}^{k} w(\langle v_{i-1}, v_i \rangle)$. Análogamente definimos la distancia entre dos vértices como la longitud del camino de menor longitud que los conecta.

Agregar a preliminares lo relacionado con NP y la definición de grafo cúbico

2. Enunciado del Problema

Problema 2.1. La venganza de Alejandra

Por algún motivo, a Alejandra no le gustaba la paz y le irritaba que sus compañeros de aula se llevaran tan bien. Ella quería ver el mundo arder. Un día un demonio se le acercó y le propuso un trato: "A cambio de un cachito de tu alma, te voy a dar el poder para romper relaciones de amistad de tus compañeros, con la única condición de que no puedes romperlas todas". Sin pensarlo mucho (Qué más da un pequeño trocito de alma), Alejandra aceptó y se puso a trabajar. Ella conocía, dados sus k compañeros de aula, quiénes eran mutuamente amigos.

Como no podía eliminar todas las relaciones de amistad, pensó en qué era lo siguiente que podía hacer más daño. Si una persona quedaba con uno o dos amigos, podría hacer proyectos en parejas o tríos (casi todos los de la carrera son así), pero si tenía exactamente tres amigos, cuando llegara un proyecto de tres personas, uno de sus amigos debería quedar afuera y se formaría el caos.

Date: June 14, 2023.

Ayude a Alejandra a saber si puede sembrar la discordia en su aula eliminando relaciones de amistad entre sus compañeros de forma que todos queden, o bien sin amigos, o con exactamente tres amigos.

Teorema 2.2. *El problema de reconocer si un grafo tiene algún subgrafo cúbico es NP-completo.*

Demostración: Primero es fácil ver que el problema es NP dado que si nos dan un subgrafo del grafo original, pordemos fácilmente comprobar si es o no cúbico, en tiempo polinomial, solamente comprobando los grados de todos los vértices.

Ahora para demostrar que el problema de decisión en cuestión es NP completo reduciremos el problema de 3-coloración a nuestro problema. Sea $G = (V, E)$ un grafo que se recibe como entrada al problema de 3-coloración. Del mismo queremos determinar si sus vértices se pueden dividir en 3 conjuntos disjuntos tal que no existen aristas entre los vértices de un mismo conjunto. Para proceder a demostrar que este problema se puede reducir al problema de tener determinar si un grafo posee subgrafos cúbicos, transformemos la entrada G del problema original en otra entrada G' para el segundo problema.

Denotemos $d_i = \deg(v_i)$ por cada nodo $v_i \in V$. El conjunto V' estará formado de la siguiente forma:

- Por cada $v_i \in V$ añadimos el vértice v_{ij}^h en V', para cada $1 \leq j \leq 3d_i + 2$ y $1 \leq h \leq 3$.
- Por cada arista $e_i \in E$ tendremos los vértices a_i^h en V', para cada $1 \leq h \leq 3$.
- Por cada vértice $v_i \in V$ tendremos otro vértice $x_i \in V'$.
- n vértices especiales s_i.

El conjunto de aristas E' estará definido como sigue:

- Por cada $1 \leq i \leq n$ tendremos una arista entre los vértices v_{ij}^h y v_{ij+1}^h (donde se toma el segundo subíndice módulo $3d_i + 2$), para cada $1 \leq h \leq 3$. Como podemos ver se formarán así $3n$ ciclos de tamaño $3d_i + 2$ a los que denotaremos por C_i^h.
- Sean $e_{\rho_1}, e_{\rho_2}, \ldots, e_{\rho_{d_i}}$ las aristas incidentes en el nodo v_i, entonces por cada $1 \leq h \leq 3$ conectaremos los nodos $v_{i,3j}^h$, $v_{i,3j+1}^h$ y $v_{i,3j+2}^h$ con el nodo $a_{\rho_j}^h$, para cada $1 \leq j \leq d_i$.
- Por cada vértice $v_i \in V$ conectamos el vértice $x_i \in V'$, con $v_{i,3d_i+1}^h$ y $v_{i,3d_i+2}^h$, para cada $1 \leq h \leq 3$.
- Cada vértice s_i lo conectamos con s_{i+1} formando así un ciclo que denotaremos por S.
- Por cada $1 \leq i \leq n$ conectamos x_i con s_i.

Una vez definida la transformación del grafo G que se da como entrada del problema original en el grafo G' solo resta demostrar que G es 3 coloreable si y solo si G' tiene un subgrafo regular de grado 3.

Primero supongamos que G es 3-coloreable y por tanto sea $\{V^1, V^2, V^3\}$ la partición de sus vértices en tres conjuntos correspondientes a la 3-coloración. Tomaremos G'' como el subgrafo inducido en G' por los siguientes vértices:

- Todos los vértices s_i, para $1 \leq i \leq n$.
- Todos los vértices x_i, para $1 \leq i \leq n$.
- Todos los vértices a_i^h, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq h \leq 3$.
- Por cada vértice $v_i \in V_j$, añadimos todos los vértices en C_i^j, para $j \in \{1, 2, 3\}$.

Demostremos que G'' contiene solo vértices de grado 0 o 3, por lo que luego de eliminar los vértices de grado 0 tendremos el grafo cúbico buscado. Es fácil ver que todos los vértices s_i tienen grado 3. Para cada vértice x_i notemos que este está conectado a s_i y además a exactamente a uno de los siguientes pares de vértices: $(v_{i,3d_i+1}^1, v_{i,3d_i+2}^1), (v_{i,3d_i+1}^2, v_{i,3d_i+2}^2), (v_{i,3d_i+1}^3, v_{i,3d_i+2}^3)$, ya que solo los vértices en uno de esos pares pertenecerá a G'', en dependencia de a qué conjunto de V_1, V_2, V_3 pertenezca v_i.

Sea v^k_{xy} un vértice arbitrario de G'' (con la forma descrita). Nótese que para cada vértice $v_i \in V_h$, todos los vértices v^h_{ij} pertenecen G'' y entonces el ciclo C^h_i está en G''. Por tanto, el vértice $v^k_{xy} \in V(G'')$ tendrá arista en G'' con sus dos adyacentes en el ciclo C^k_x. Además, como v^k_{xy} estaba conectado en G' con exactamente un vértice de la forma $a^k_{\rho_p}$, para algún $1 \leq p \leq d_x$, y cada vértice de esta forma pertenece a G'', tenemos que v^k_{xy} tiene al menos grado 3. Sin embargo, v^k_{xy} tenía exactamente grado 3 en G', por lo que concluimos que este tiene grado 3 en G'' también.

Ahora tomemos un vértice a^h_i cualquiera (con la forma descrita), supongamos que $e_i = \langle v_x, v_y \rangle$ (donde el índice de e_i fue tomado de igual forma que en la definición de a^h_i). Nótese que a^h_i está en G' conectado a los 3 vértices v^h_{x3j}, v^h_{x3j+1} y v^h_{x3j+2} para algún $1 \leq j \leq d_x$, y a los 3 vértices v^h_{y3k}, v^h_{y3k+1} y v^h_{x3k+2} para algún $1 \leq k \leq d_y$. Sin embargo, como v_x y v_y son adyacentes, entonces estos están en conjuntos de $\{V_1, V_2, V_3\}$ diferentes. Por tanto, a lo sumo uno de los ciclos C^h_x y C^h_y estará en G'' de donde tenemos que a^h_i tendrá o bien grado 3, o 0. Por tanto podemos concluir que G' tiene un subgrafo cúbico.

Ahora supongamos que G' tiene un subgrafo cúbico G'' y demostremos que G es 3-coloreable. Para ello construiremos los conjuntos $V_k := \{v_i \mid v^k_{ij} \in V(G'') \textbf{ para algún } j\}$, para $k = 1, 2, 3$, y demostraremos que estos conforman una partición de V. Además, tendríamos que demostrar que no existen aristas entre vértices en un mismo conjunto V_k.

Denotemos por $V'' := V(G'')$. Empecemos por notar que si $v^h_{i,j} \in V''$, entonces C^h_i está en G''. Esto se debe a que $v^h_{i,j}$ tiene solamente un adyacente fuera de C^k_i en G'. Supongamos que el vértice a^h_i está en G''. Sean v_x y v_y los vértices que e_i conectaba en G. Si a^h_i tuviera adyacentes en G'' tanto en C^h_x como en C^h_y, entonces por lo expuesto anteriormente ambos ciclos estarían en G'' y el grado de a^h_i sería 6, lo cual es absurdo. Entonces si $a^h_i \in V''$ entonces exactamente uno de los ciclos C^h_x o C^h_y está en G''. Analizando en el otro sentido, si el ciclo C^h_x está en G'', entonces para cada arista e_{ρ_i} incidente en v_x en G, tenemos que para que el nodo $v^h_{x,3i}$ tenga grado 3 en G'', el vértice $a^h_{\rho_i}$ debe estar en V''. Por tanto, podemos concluir que no existen en G aristas entre vértices de un mismo conjunto V_k.

Ahora veamos que si $C^h_i \in G''$ entonces $v^h_{i,3d_i+1} \in V''$ y para que su grado sea 3, debe pasar que $x_i \in V''$. Ahora si $x_i \in V''$, como este vértice es adyacente en G' solamente a s_i y a dos vértices en cada ciclo C^h_i, entonces tenemos que $s_i \in V''$ es la única forma de que $\deg_{G''}(x_i)$ sea impar. Además, en ese caso exactamente uno de los ciclos C^1_i, C^2_i y C^3_i estará en G''. Es fácil ver además que si $s_i \in V''$ para algún i, entonces $s_i, x_i \in V''$ para todo $1 \leq i \leq n$, dado que s_i tiene en G' exactamente un adyacente fuera de S, que es x_i, y dos en S.

Hemos demostrado que si un vértice x cualquiera pertenece a G'', entonces x_i y s_i pertenecen a V'' para todo $1 \leq i \leq n$. Además, si $x_i \in V''$, entonces $C^h_i \in G''$ para exactamente un valor de h. Por tanto, podemos concluir que $\{V_1, V_2, V_3\}$ es una partición de V.

□

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: marcosmath44@gmail.com

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Ciudad de La Habana, Cuba
Email address: leandro_driguez@outlook.com