Probabilidade
e
Teoria da Medida

Notas de Aula

Maio / 2015

UnB

Autores/Colaboradores:

Versão 1. Julho–Dezembro de 2014

Josimar Aguirre
Eduardo Antonio
Leandro Cioletti
Thiago Sousa
Roberto Vila Gabriel

Versão 2. Março–Julho de 2015

Leandro Cioletti
Roberto Vila
Leandro Chiarini

Probabilidade e Teoria da Medida:
Notas de Aula Março de 2015 [1]

Sumário

Página

Parte I

Primeiro Terço do Curso

Aula 1

Conjuntos e Limite de Sequências de Conjuntos

1.1 Teoria Básica de Conjuntos

Nesta seção são introduzidos alguns fatos básicos da teoria conjuntos. O ponto de vista adotado aqui é o da "teoria ingênua de conjuntos" e não temos objetivos de discutí-la do ponto vista axiomático.

Em geral, vamos trabalhar em um espaço que será denotado por Ω. Assim, operações de conjuntos serão sempre consideradas com relação a este espaço. A coleção de todos os subconjuntos de Ω será denotada por $\mathcal{P}(\Omega) \equiv \{A : A \subset \Omega\}$ e será chamado de conjunto das partes de Ω. Em geral, usaremos as letras maiúsculas A, B e etc... para denotar um subconjunto arbitrário de Ω. Quando quisermos nos referir a uma coleção de subconjuntos de Ω usaremos letras maiúsculas caligráficas como $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e etc. Finalmente, usaremos, na maioria das vezes, a notação $\omega \in \Omega$ para denotar um ponto do espaço Ω.

O complementar de um conjunto A ou simplesmente complemento de A será denotado por $A^c \equiv \{w \in \Omega; w \notin A\}$. Se T é um conjunto de índices arbitrários e para cada $t \in T$ temos que $A_t \subset \Omega$ então a interseção e união dos conjuntos A_t's sobre a coleção T são dados, respectivamente, por

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{w \in \Omega : \quad w \in A_t, \ \forall t \in T\}.$$

e

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{w \in \Omega : \ w \in A_t, \ \text{para algum } t \in T\}.$$

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que A e B são disjuntos. De maneira mais geral, uma família de conjuntos $\{A_t\}_{t\in T}$ é dita mutuamente disjunta (ou dois a dois disjunta) se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i, j \in T$ com $i \neq j$. Por questão de simplicidade vamos usar a notação

$$\bigsqcup_{t\in T} A_t$$

para indicar a união de uma família $\{A_t\}_{t\in T}$ de conjuntos mutuamente disjunta.

Observação. Alguns autores usam simplesmente a notação AB para indicar a interseção $A \cap B$.

Vamos usar as notações $A \setminus B$ ou $A - B$ para denotar o conjunto diferença entre A e B, que é definido por $A \setminus B \equiv A \cap B^c$. É importante observar que em geral, $A - B \neq B - A$. Outra operação, entre conjuntos, que vamos considerar com frequência é a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B. Esta operação é definida por $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Segue da comutatividade da união, que a diferença simétrica é uma operação comutativa, isto é, $A \triangle B = B \triangle A$. Por último, vamos convencionar que $\emptyset^c = \Omega$ e $\Omega^c = \emptyset$.

Exercício 1.1 (Associatividade)**.** *Mostre que para quaisquer subconjuntos A, B e C de Ω valem as seguintes igualdades:*

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Exercício 1.2 (Leis de de Morgan)**.** *Sejam I um conjunto arbitrário de índices e $A_i \subset \Omega$ para todo $i \in I$. Mostre que as seguintes igualdades são válidas:*

1. $\displaystyle \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i{}^c$.
2. $\displaystyle \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

Exercício 1.3 (Distributiva)**.** *Sejam I um conjunto arbitrário de índices, $B \subset \Omega$ e $A_i \subset \Omega$ para todo $i \in I$. Mostre que as seguintes igualdades são válidas:*

1. $\displaystyle B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$.
2. $\displaystyle B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$.

Definição 1.4 (Função Indicadora)**.** *Seja $A \subseteq \Omega$. A função indicadora de A é a função $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por*

$$1_A(w) = \begin{cases} 1, & \textit{se } w \in A; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 1.5. *Da definição de função indicadora, podemos mostrar facilmente as seguintes relações, as quais serão importantes ao longo do texto*

1. $1_A \leqslant 1_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.
2. $1_{A^c} = 1 - 1_A$.

1.2 Limite de Conjuntos

Nesta seção queremos introduzir uma noção de convergência de conjuntos. A definição de convergência que vamos dar abaixo é baseada em algumas ideias da noção de limite de uma sequência de números reais. Esta ideia consiste em definir limites superior e inferior de uma sequência de conjuntos e dizer que uma sequência de conjuntos converge para um determinado conjunto se os limites superior e inferior coincidem. De maneira mais precisa, seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de subconjuntos de Ω e para cada $n\in\mathbb{N}$ fixado considere os seguintes conjuntos:

$$\inf_{k\geqslant n} A_k \equiv \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{e} \qquad \sup_{k\geqslant n} A_k \equiv \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Os conjuntos limite inferior e superior da sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são definidos, respectivamente, por

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \equiv \bigcup_{n\geqslant 1}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n \equiv \bigcap_{n\geqslant 1}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Definição 1.6 (Limite de uma Sequência de Conjuntos)**.** *Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. Se existe um conjunto A tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = A = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

então dizemos que a sequência de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite A e usamos a seguinte notação para indicar este fato $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Abaixo apresentamos um lema que caracteriza os conceito de limite inferior e superior em termos de funções tomando valores no conjunto dos números reais. Esta caracterização é também muito útil para que possamos interpretar de maneira intuitiva ambos conjuntos.

Lema 1.7. *Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω. Então as seguintes igualdades são válidas:*

1. $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{w\in\Omega:\ w\in A_n \text{ para infinitos valores de } n\}.$
$$= \left\{w\in\Omega:\ \sum_{n\geqslant 1} 1_{A_n}(w)=\infty\right\}.$$

2. $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{w\in\Omega:\ w\in A_n \text{ para todo } n \text{ exceto uma quantidade finita}\}$
$$= \left\{w\in\Omega:\ \sum_{n\geqslant 1} 1_{A_n^c}(w)<\infty\right\}$$
$$= \{w\in\Omega:\ w\in A_n, \forall n\geqslant n_0(w)\}.$$

Demonstração. Prova do item 1. Suponha que $w \in \limsup A_n$, então $w \in \cup_{k \geq n} A_k, \forall n \in \mathbb{N}$, logo existe $k_n(\omega) \equiv k_n \geqslant n$ tal que $w \in A_{k_n}$. Portanto w pertence a infinitos A_n's e além do mais temos que

$$\sum_{n \geqslant 1} 1_{A_n}(w) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} 1_{A_{k_n}}(w) = \infty.$$

Reciprocamente, se $w_0 \in \{w \in \Omega;\ \sum_{n \geqslant 1} 1_{A_n}(w) = \infty\}$, então para infinitos valores de k temos que $w_0 \in A_k$. Logo $w_0 \in \cup_{k \geq n} A_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De onde podemos concluir que $w_0 \in \cap_{n \in \mathbb{N}} \cup_{k \geq n} A_k = \limsup A_n$.

A prova do item 2 é feita de maneira análoga a do item 1. ∎

Exercício 1.8. *Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de Ω. Mostre que*

1. $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.
2. $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.

Observação 1.9. Para leitores que já fizeram um curso introdutório de Probabilidade. *Seja $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ uma sequência de v.a.'s. Uma das maneiras de mostrar que $X_n \to X$ quase certamente (q.c.) consiste em provar, para todo $\epsilon > 0$, que*

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon \textit{ infinitas vezes}) = 0.$$

Pelo item 1 do Lema 1.7 a igualdade acima é verdadeira se, e somente se, temos que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$, onde $A_n = \{|X_n - X| > \epsilon\}$. Voltaremos a este critério posteriormente e apresentaremos sua prova no momento apropriado.

Definição 1.10 (Sequências Monótonas de Conjuntos)**.** *Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos de Ω. Dizemos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não-decrescente se $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente definimos sequência não-crescente. Usaremos as notações $A_n \nearrow$ ou $A_n \uparrow$ (analogamente $A_n \searrow$ ou $A_n \downarrow$) para indicar que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente (não-crescente).*

Proposição 1.11. *Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona.*

1. *Se $A_n \nearrow$ então existe* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$.
2. *Se $A_n \searrow$ então existe* $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \geqslant 1} A_n$.

Demonstração. Vamos provar inicialmente o item 1, isto é,

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n.$$

Por hipótese temos $A_j \subseteq A_{j+1}$ e portanto podemos afirmar que $\cap_{k \geqslant n} A_k = A_n$. Assim segue da definição de limite inferior que

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n.$$

Usando a definição de limite superior, observando que a interseção de uma sequência arbitrária de conjuntos está contida em qualquer elemento da sequência, a igualdade obtida acima e o item 1 do Exercício 1.8 temos que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \subseteq \bigcup_{k\geqslant 1} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Para provar o item 2 basta proceder de maneira análoga feita acima e usar as Leis de De Morgan. ∎

Exercício 1.12. *Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos. Usando a proposição acima prove que*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} A_k\right) \qquad e \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} A_k\right).$$

1.3 Relações de "Dualidade"

Nesta seção deixamos como exercício para o leitor a prova de seis relações entre os limites superior e inferior de conjuntos e de suas respectivas funções indicadoras; bem como algumas relações ligadas as operações básicas de conjuntos. Estas relações explicam por si só a escolha do título desta seção.

Exercício 1.13. *Sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos, A e B dois conjuntos arbitrários. Mostre que*

1. $1_{\inf_{k\geqslant n} A_k} = \inf_{k\geqslant n}(1_{A_k})$.

2. $1_{\sup_{k\geqslant n} A_k} = \sup_{k\geqslant n}(1_{A_k})$.

3. $1_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$.

4. $1_{\limsup A_n} = \limsup(1_{A_n})$.

5. $1_{\liminf A_n} = \liminf(1_{A_n})$.

6. $1_{A\triangle B} = 1_A + 1_B \pmod 2$.

Aula 2

Espaços de Medida e o Teorema da Extensão de Caratheodóry

2.1 Espaço de Medida

Seja Ω um conjunto não vazio. Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é chamada de *álgebra* se satisfaz as seguintes condições:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Note que 2) e 3) implicam que $\mathcal{A}$ é fechada para uniões e interseções finitas. Se substituímos 3) por:

3') $A_n \in \mathcal{A} \ \ (n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *σ-álgebra* . Observe que a condição 3') implica na condição 3) e também que uma σ-álgebra é fechada para interseções enumeráveis.

Definição 2.1 (Medida)**.** *Uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é chamada de uma medida sobre uma álgebra $\mathcal{A}$ se*

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) para toda sequência de conjuntos $A_n \ \ (n = 1, 2, \ldots)$ dois a dois disjunta tal que se $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, então temos $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

A segunda propriedade é conhecida como σ-aditividade e ela implica em aditividade finita (tomando $A_n = \emptyset$ para $n \geq m$, para algum $m \in \mathbb{N}$).

Exercício 2.2. *Mostre que se $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ é a σ-álgebra das partes de Ω, então a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ cuja a imagem de um subconjunto $E \subset \Omega$ é dada por*

$$\mu(E) = \sharp E$$

é uma medida em $\mathcal{A}$. Esta medida é chamada de medida da contagem em $\mathbb{N}$.

Exercício 2.3. *Seja Ω um conjunto enumerável não vazio, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $f : \Omega \to [0, \infty]$ uma função arbitrária. Mostre que a fórmula*

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x),$$

determina uma medida em $\mathcal{A}$.

Exercício 2.4 (Monotonicidade da Medida)**.** *Seja Ω um conjunto não vazio e $A \subset B$ elementos de uma álgebra $\mathcal{A}$ de suconjuntos de Ω. Mostre que se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida então*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

Definição 2.5 (Medida de Probabilidade)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de conjuntos de um espaço Ω e $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ uma medida tal que $P(\Omega) = 1$. Neste caso dizemos que P é uma medida de probabilidade. Normalmente o espaço Ω é chamado de espaço amostral, um elemento $E \in \mathcal{F}$ é chamado de evento e $P(E)$ é a probabilidade de ocorrer E.*

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ uma medida. Se $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ então para todo $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tal que $A \in \mathcal{A}$, temos

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Para verificar que este fato é verdadeiro, definimos $B_1 = A_1$ e $B_n = A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então B_n forma uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos e além do mais $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, logo

$$\mu(A) = \mu(A \cap [\cup_{n=1}^{\infty} B_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

na última desigualdade usamos que $B_n \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e monotonicidade de μ, veja o Exercício 2.4.

Proposição 2.6 (Continuidade da Medida)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de conjuntos de um espaço Ω e $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ uma medida.*

- *Para qualquer sequência crescente A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ em $\mathcal{F}$, isto é, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ temos que*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

- *Se A_n é uma sequência decrescente, isto é, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Demonstração. A prova é deixada como exercício para o leitor. ∎

Exercício 2.7. *Sejam I um conjunto arbitrário de índices e $\mathcal{F}_i$, para cada $i \in I$, uma σ-álgebra de conjuntos de Ω. Defina*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i := \{F \subset \Omega : F \in \mathcal{F}_i,\ \forall i \in I\}.$$

Mostre que $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ é uma σ-álgebra.

Exercício 2.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de Ω. Mostre que*

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{F}\supset\mathcal{A} \\ \mathcal{F} \text{ é } \sigma\text{-álgebra}}} \mathcal{F}$$

é uma σ-álgebra e além do mais é a "menor" σ-álgebra contendo $\mathcal{A}$ no sentido da inclusão. Esta σ-álgebra é conhecida como a σ-álgebra gerada pela coleção $\mathcal{A}$.

Exercício 2.9. *Mostre que, em geral, a união de σ-álgebras não é uma σ-álgebra.*

2.2 O Teorema de Dynkin

Definição 2.10. *Dada uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, a menor σ-álgebra que contém todos os elementos de $\mathcal{C}$ é chamada de* ***σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$*** *e será denotada por $\sigma(\mathcal{C})$.*

A existência da σ-álgebra da definição acima é garantida pela afirmação contida no Exercício 2.8.

Definição 2.11 (π-sistema)**.** *Uma coleção $\mathcal{C}$ fechada para interseções finitas é chamada de um π-sistema.*

Exemplo 2.12. *A coleção de todos os intervalos abertos da reta da forma (a, b) com $a < b$ é um π-sistema.*

Outro exemplo importante de π-sistema é obtido considerando a coleção de todos os cilindros finito dimensionais de um produto cartesiano infinito de cópias de $\mathbb{R}$. De maneira mais precisa, considere o espaço

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \equiv \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Um subconjunto $F \subset \Omega$ é chamado de um cilindro finito dimensional se existe uma quantidade finita de subconjuntos $A_1, \ldots A_n \subset \mathbb{R}$ tal que $F = A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$. Observe que alguns A_i's podem ser iguais a $\mathbb{R}$ e que em geral o índice n depende de F. Para ver que a coleção dos cilindros é de fato um π-sistema consideramos dois cilindros arbitrários $F_1 = A_1 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ e $F_2 = B_1 \times \ldots \times B_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $n \leq m$. Desta forma temos que a interseção dos cilindros F_1 e F_2 é dada por

$$F_1 \cap F_2 = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n) \times B_{n+1} \times \ldots \times B_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

que é também um cilindro o que mostra que a coleção dos cilindros é de fato um π-sistema.

Definição 2.13. *Um λ-sistema é uma coleção $\mathcal{L}$ de subconjuntos de Ω tais que:*

1) $\Omega \in \mathcal{L}$;

2) *Se $A \in \mathcal{L}$, então $A^c \in \mathcal{L}$;*

3) *Se $\{A_n\}$ é uma família de conjuntos de $\mathcal{L}$, dois a dois disjuntos, então temos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.*

Exercício 2.14. *Mostre que se $\mathcal{L}$ é um π-sistema e um λ-sistema, então $\mathcal{L}$ é uma σ-álgebra.*

Teorema 2.15 (Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin)**.** *Se $\mathcal{L}$ é um λ-sistema contendo um π-sistema $\mathcal{C}$, então $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \cap_{i\in I}\mathcal{L}_i$, onde I indexa a coleção de todos os λ-sistemas contendo $\mathcal{C}$. Para provar o teorema, basta mostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é um π-sistema e também um λ-sistema, pois do Exercício 2.14 podemos concluir que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é uma σ-álgebra (contendo $\mathcal{C}$) e portanto que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$.

Vamos mostrar primeiramente que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é um um λ-sistema. Como $\Omega \in \mathcal{F}$, para todo o λ-sistema $\mathcal{L}_i$, segue que $\Omega \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Para todo $i \in I$ temos que $\emptyset \in \mathcal{L}_i$, pois $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{L}_i$. Logo $\emptyset \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. De maneira análoga para qualquer $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, temos que $A^c \in \mathcal{L}_i$ para todo $i \in I$, de onde segue que $A^c \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Considere agora uma sequência dois a dois disjunta de subconjuntos de $\mathcal{L}(\mathcal{C})$, digamos $\{A_n\}$. Para cada $n \geq 1$, temos que $A_n \in \mathcal{L}_i$ para todo $i \in I$ o que implica que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}_i$ para todo $i \in I$ e portanto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ o que concluí a prova de que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é um λ-sistema.

Agora vamos mostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é um π-sistema. Para fazer isto vamos precisar de algumas famílias de conjuntos especiais. Estas famílias são dadas da seguinte forma: para cada $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ seja $\mathcal{L}_A := \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{C})\}$.
Afirmação. Se $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_A$, para todo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ então $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ é um π-sistema. De fato, dados $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ temos por hipótese que $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_B$ logo $A \in \mathcal{L}_B$. Da definição de $\mathcal{L}_B$ temos que $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ e portanto a afirmação está provada.

Resta mostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_A$, para todo o $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Primeiro observamos que os argumentos dados acima podem ser usados de maneira análoga para mostrar que $\mathcal{L}_A$ é um λ-sistema para qualquer $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Já que $\mathcal{C}$ é um π-sistema temos para qualquer par $A, B \in \mathcal{C}$ que $A \cap B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{L}(\mathcal{C})$ e portanto podemos concluir que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_B$ e consequentemente temos por definição que $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_B$. Esta última continência implica que $A \cap B \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ para todo $B \in \mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Agora fixamos um conjunto arbitrário $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Pela afirmação anterior podemos garantir que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_A$. Logo $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}_A$ para qualquer que seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. ■

Corolário 2.16 (Unicidade)**.** *Sejam P_1, P_2 duas medidas de probabilidade definidas em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ contendo um π-sistema $\mathcal{C}$. Se $P_1(C) = P_2(C)$ para todo evento $C \in \mathcal{C}$, então, temos que $P_1 = P_2$ em $\sigma(\mathcal{C})$.*

Demonstração. Observe que $\mathcal{L} = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{F}$ e $P_1(A) = P_2(A)\}$ é um λ-sistema. Por hipótese $\mathcal{L}$ contém o π-sistema $\mathcal{C}$, daí segue do Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$. ■

Exemplo 2.17. *Note que, de fato, não podemos estender o corolário acima para medidas em geral. Considere* $\Omega = \mathbb{R}$ *e o* π*-sistema*

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

(verifique que $\mathcal{C}$ *é, de fato, um* π*-sistema), seja* $\mathcal{B}$ *a* σ*-álgebra dada por* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$*. Considere* ν *a medida da contagem em* $\mathcal{B}$*, isto é, para* $A \in \mathcal{B}$ *defina*

$$\nu(A) = \begin{cases} \#A, & \text{se } A \text{ é finito} \\ \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

defina $\mu = 2\nu$*. Note que para todo* $A \in \mathcal{C}$*,temos duas possibilidades:* A *é vazio ou infinito, em ambos os casos,* $\nu(A) = \mu(A)$*. Mas para* $a \in \mathbb{R}$*, temos*

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a\right] \in \mathcal{B},$$

entretanto $\mu(\{a\}) = 2 \neq 1 = \nu(\{a\})$*. Portanto* $\nu \neq \mu$ *em* $\mathcal{B}$*.*

2.3 O Teorema da Extensão de Carathéodory

Em determinadas situações, quando estamos trabalhando com uma medida μ sobre Ω podemos nos livrar de várias dificuldades técnicas se esta medida esta definida em todo $\mathcal{P}(\Omega)$. Acontece que na maioria das situações mais interessantes, isto nem sempre ocorre. Entretanto é possível definir um outro objeto matemático, chamado *medida exterior*, que está sempre definido na σ-álgebra das partes. Uma medida exterior tem a vantagem de estar sempre definida no conjunto das partes, mas por outro lado, em geral, ela não é uma função σ-aditiva. Mas como veremos a abaixo as medidas exteriores são objetos muito úteis na construção de medidas sobre um determinado conjunto Ω.

Definição 2.18 (Medida Exterior)**.** *Uma função* $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *é chamada de medida exterior sobre* Ω *se satisfaz:*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$*;*

2) se $A \subset B$ *então* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*;*

3) $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$*, para toda sequência* A_n $(n = 1, 2, \ldots)$*.*

A proposição seguinte é uma poderosa máquina de construir medidas exteriores. Como o leitor pode ver as hipóteses são muito fracas. Ela nos diz que escolhida uma coleção arbitraria $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço Ω (note que não exigimos nenhuma estrutura nesta coleção nem de álgebra, σ-álgebra e etc.) e qualquer função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$, podemos construir a partir da coleção $\mathcal{A}$ e da função μ uma medida exterior, que será chamada de μ^*, definida em toda a σ-álgebra das partes de Ω. O leitor deve examinar com cuidado a definição de μ^*, dada abaixo, para se convencer que nem sempre μ^* é uma extensão de μ.

Proposição 2.19. *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de Ω satisfazendo apenas que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, uma função arbitrária, tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Para todo $A \subset \Omega$, defina*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \mu(F_n) : F_n \in \mathcal{A} \; \forall n \text{ e } \; A \subset \cup_n F_n \right\}. \tag{2.1}$$

Então μ^* é uma medida exterior em Ω.

Demonstração. Já que $\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{A}$, temos que $\mu^*(\emptyset) = 0$. Se $A \subset B$, então qualquer coleção enumerável F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ que é uma cobertura de B (isto é, $B \subset \cup_n F_n$) é também uma cobertura de A. Logo segue da definição de ínfimo que $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Resta agora verificar que μ^* satisfaz a propriedade 3) de medida exterior. Seja A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ uma coleção enumerável de subconjuntos de Ω e $A = \cup_n A_n$. Se para algum índice n temos $\mu^*(A_n) = \infty$, então segue da monotonicidade de μ que $\mu^*(A) = \infty$, e portanto 3) é válida neste caso. Vamos assumir então que $\mu^*(A_n) < \infty$ para todo n. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para cada n existe uma sequência $F_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ em $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subset \cup_k F_{n,k}$ e

$$\sum_k \mu(F_{n,k}) - \mu^*(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad \text{para todo } n. \tag{2.2}$$

Certamente temos que

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k F_{n,k}.$$

Usando a monotonicidade, em seguida, a definição de μ^* e por último a desigualdade (2.2) temos que

$$\mu^*(A) \leq \mu^* \left(\bigcup_n \bigcup_k F_{n,k} \right) \leq \sum_n \sum_k \mu(F_{n,k}) \leq \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

■

Definição 2.20 (Medida σ-finita)**.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ uma medida. Se existe uma sequência A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tal que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, então dizemos que μ é uma medida σ-finita.*

Precisamos de mais duas definições para podermos apresentar de forma precisa o enunciado do Teorema da Extensão de Carathéodory. Seja μ uma medida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$. A σ-álgebra $\mathcal{F}$ é dita μ-**completa** se para todo $N \in \mathcal{F}$ e para todo $A \subset N$, com $\mu(N) = 0$ temos $A \in \mathcal{F}$. Em outras palavras, $\mathcal{F}$ é μ-completa se os subconjuntos dos conjuntos de medida μ zero pertecem a σ-álgebra $\mathcal{F}$. Neste caso dizemos também que μ é completa. Dada qualquer medida μ definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ é fácil verificar que a coleção

$$\overline{\mathcal{F}} = \{ C = A \cup B : A \in \mathcal{F}, B \subset N \text{ para algum } N \in \mathcal{F} \text{ com } \mu(N) = 0 \}$$

é uma σ-álgebra $\overline{\mu}$ completa, onde $\overline{\mu}(A \cup B) := \mu(A)$. Observe que $\overline{\mu}$ está bem definida e que $\overline{\mu}$ é uma medida definida em $\overline{\mathcal{F}}$ que estende μ. Esta extensão de μ é chamada de *completamento* de μ.

Definição 2.21 (Conjuntos μ^*-mensuráveis)**.** *Dada uma medida exterior μ^* definida sobre as partes de um conjunto Ω, dizemos que $A \subset \Omega$ é μ^*-mensurável se a condição abaixo é satisfeita:*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \qquad \textit{para todo} \;\; E \subset \Omega. \tag{2.3}$$

Esta condição é conhecida como Condição de Carathéodory.

Teorema 2.22 (Teorema da Extensão de Carathéodory)**.** *Seja $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ uma medida exterior sobre Ω.*

1) A coleção $\mathcal{M}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra e a restrição de μ^* a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.

2) Se μ^* é definida por (2.1)*, com $\mathcal{A}$ sendo uma álgebra e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ e $\mu^* = \mu$ em $\mathcal{A}$.*

3) Se μ é uma medida σ-finita em uma álgebra $\mathcal{A}$ então ela se estende **unicamente** *a uma medida definida em $\sigma(\mathcal{A})$. Esta extensão é dada por μ^*, definida em* (2.1)*, restrita a $\sigma(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Prova do item 1). Mostraremos primeiro que $\mathcal{M}$ é uma álgebra. Em primeiro lugar observamos que $A = \emptyset$ satisfaz a condição de Carathéodory. Também é imediato verificar que se A satisfaz a condição de Carathéodory, então A^c também satisfaz esta condição. Pela subaditividade da medida exterior (propriedade 3 da Definição 2.18), temos que a condição de Carathéodory é satisfeita sempre que

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E), \qquad \text{para todo } E \in \Omega. \tag{2.4}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{M}$ é fechado com respeito a interseções finitas. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}$, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&= \mu^*(E \cap B \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap A^c) + \mu^*(E \cap B^c \cap A) + \mu^*(E \cap B^c \cap A^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap (B \cap A)) + \mu^*(E \cap (B \cap A)^c),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade, usamos que $(B \cap A)^c = B^c \cup A^c = (B^c \cap A) \cup (B^c \cap A^c) \cup (B \cap A^c)$ e a subaditividade de μ^*. Isto mostra que a desigualdade (2.4) é satisfeita para $A \cap B$, logo $A \cap B \in \mathcal{M}$. Já que $\mathcal{M}$ é fechada para interseções, podemos concluir que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões finitas. E portanto concluímos a prova que $\mathcal{M}$ é uma álgebra.

Próximo passo é provar que $\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra e que μ^* é σ-aditiva sobre $\mathcal{M}$. Seja B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ uma sequência em $\mathcal{M}$ de conjuntos dois a dois disjuntos. Defina $C_m = \cup_{n=1}^m B_n$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Vamos mostrar por indução em m que

$$\mu^*(E \cap C_m) = \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n), \qquad \text{para todo } E \subset \Omega. \tag{2.5}$$

Já que $C_1 = B_1$ a fórmula acima é verdadeira para $m = 1$. Suponha então que (2.5) seja satisfeita para um dado m. Como $B_{m+1} \in \mathcal{M}$, para todo o $E \subset \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap C_{m+1}) &= \mu^*((E \cap C_{m+1}) \cap B_{m+1}) + \mu^*((E \cap C_{m+1}) \cap B_{m+1}^c) \\ &= \mu^*(E \cap B_{m+1}) + \mu^*(E \cap C_m) \\ &= \mu^*(E \cap B_{m+1}) + \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a hipótese de indução. A igualdade acima mostra que (2.5) é satisfeita para $m + 1$ no lugar de m e assim a indução está completa.

Seja $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ e $E \subset \Omega$, temos que

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap C_m) + \mu^*(E \cap C_m^c) \qquad (\text{pois } C_m \in \mathcal{M}) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap C_m^c) \\ &\geq \sum_{n=1}^{m} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c),\end{aligned}$$

pois $A^c \subset C_m^c$. Tomando $m \to \infty$, ficamos com a seguinte desigualdade

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \tag{2.6}$$

onde na última desigualdade usamos a propriedade subaditiva da medida exterior. Isso mostra que $A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M}$ é fechado para uniões disjuntas contáveis. Se A_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ é uma sequência em $\mathcal{M}$, podemos expressar $A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ como $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $B_1 = A_1$ e $B_n = A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$ para $n \geq 2$. Note que a sequência B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ definida desta forma é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos e cada $B_n \in \mathcal{M}$. Então $A \in \mathcal{M}$, provando que $\mathcal{M}$ é fechada para uniões enumeráveis arbitrárias.

Para provar a σ-aditividade de μ^* em $\mathcal{M}$, considere B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{M}$. Tomando $E = A \equiv \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ na primeira desigualdade em (2.6) obtemos a seguinte estimativa: $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right)$. Usando a propriedade subaditiva de uma medida exterior concluímos que

$$\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(B_n\right).$$

Assim, concluímos a prova de que μ^* é uma medida na σ-álgebra $\mathcal{M}$.

Vamos provar agora a última parte do item 1), isto é, mostrar que a medida que acabamos de obter é completa. Sejam $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu^*(N) = 0$ e $A \subset N$. Pela monotonicidade de μ^* temos que $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(N) = 0$ e $\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$. Mas estas duas desigualdades implicam que (2.4) é satisfeita, provando que $A \in \mathcal{M}$. O que é suficiente para concluir que a σ-álgebra $\mathcal{M}$ é μ^*-completa.

Prova do item 2). Considere agora o caso em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, μ é uma medida em $\mathcal{A}$, e μ^* é a medida exterior definida em (2.1). Para provar que

$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, seja $A \in \mathcal{A}$. Fixe $E \subset \Omega$ e $\epsilon > 0$ arbitrariamente. Invocando a definição de medida exterior (2.1), podemos afirmar que existe $A_n \in \mathcal{A}$, $(n = 1, 2, \dots)$ tal que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \epsilon \leq \mu^*(E). \tag{2.7}$$

Além disso, segue da subaditividade da medida exterior e em seguida, da definição dada em (2.1) as seguintes desigualdades:

$$\mu^*(E \cap A) \leq \mu^* \left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n)$$

e

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^* \left(A^c \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n).$$

Somando as duas desigualdades em ambos os lados e usando a estimativa (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu * (E \cap A^c) \leq & \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)] \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\ \leq & \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário a condição (2.4) é satisfeita, provando que $A \in \mathcal{M}$. Para provar que $\mu = \mu^*$ em $\mathcal{A}$, seja $A \in \mathcal{A}$. Pela definição (2.1), $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ (tomando $A_1 = A$ e $A_n = \emptyset$, para $n \geq 2$ por exemplo). Por outro lado, $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para toda a sequência $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \geq 1)$ tal que $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, então temos que $\mu^*(A) \geq \mu(A)$ (por subaditividade de μ em $\mathcal{A}$). Mostrando que $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Prova do item 3). Suponha que μ seja σ-finita na álgebra $\mathcal{A}$ e seja μ^* sua extensão a $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$, dada pelo item 2) deste teorema. Já que μ é σ-finita, podemos encontrar uma sequência A_n $(n = 1, 2, \dots)$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Seja ν uma extensão da medida μ, definida em $\sigma(\mathcal{A})$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, vamos mostrar primeiro que $\mu^* = \nu$, em todos os conjuntos da coleção $A_n \cap \sigma(\mathcal{A}) \equiv \{A_n \cap A : A \in \sigma(\mathcal{A})\}$. Para provar este fato vamos mostrar que a coleção $\mathcal{C} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \nu(A_n \cap A) = \mu^*(A_n \cap A)\}$ é um λ-sistema contendo $\mathcal{A}$ (que é um π-sistema). De fato, se $A \in \mathcal{C}$ então temos que:

$$\nu(A_n) = \nu((A_n \cap A^c) \cup (A_n \cap A)) = \nu(A_n \cap A^c) + \nu(A_n \cap A)$$

e

$$\mu^*(A_n) = \mu^*((A_n \cap A^c) \cup (A_n \cap A)) = \mu^*(A_n \cap A^c) + \mu^*(A_n \cap A).$$

Observando que o lado esquerdo de ambas igualdades acima são iguais (ν e μ^* são extensões de μ em $\mathcal{A}$) e que as segundas parcelas do lado direito também são iguais já que $A \in \mathcal{C}$, concluímos que $\mu^*((A_n \cap A^c) = \nu(A_n \cap A^c)$ e portanto $A^c \in \mathcal{C}$. Como o $\emptyset \in \mathcal{C}$ segue do fato que acabamos de provar que $\Omega \in \mathcal{C}$. Seja B_m $(m = 1, 2, \ldots)$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{C}$ dois a dois disjuntos. Segue da σ-aditividade de μ^* e ν que

$$\begin{aligned}\nu\left(A_n \cap \left(\cup_{m=1}^{\infty} B_m\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu\left(A_n \cap B_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n \cap B_m\right)\\ = \mu^*\left(A_n \cap \left(\cup_{m=1}^{\infty} B_m\right)\right).\end{aligned}$$

O que encerra a prova de que $\mathcal{C}$ é um λ-sistema. Como $\mathcal{C}$ é um λ-sistema que contém o π-sistema $\mathcal{A}$ segue do Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin que $\sigma(A) \subset \mathcal{C}$.

Para finalizar a prova, basta notar que dado $A \in \sigma(\mathcal{A})$, podemos escrever $A = \cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$. Agora, usando a continuidade das medidas ν e μ^*, temos que

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu\left(\cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap A_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu^*(A \cap A_n)\\ &= \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n))\\ &= \mu^*(A).\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.23. *Novamente, note que não podemos retirar a hipótese de σ-finitude para garantir a a unicidade da extensão. De modo análogo ao Exemplo 2.17, considere $\Omega = \mathbb{R}$, e as seguintes coleções*

$$\mathcal{I} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},$$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset\} \bigcup \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} I_k : n \in \mathbb{N}, I_k \in \mathcal{I}, k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Note (e prove que) $\mathcal{A}$ é uma álgebra, agora considere λ a função de conjuntos definida em $\mathcal{A}$ definida como

$$\lambda(A) = \begin{cases} 0, & se\ A = \emptyset \\ \infty, & caso\ o\ contrário. \end{cases}$$

É fácil ver que λ é de fato uma medida em $\mathcal{A}$ e que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, onde $\mathcal{C}$ é como no Exemplo 2.17. Assim, tomando μ e ν também como no Exemplo 2.17 temos que $\mu\ |_{\mathcal{A}} = \nu\ |_{\mathcal{A}} = \lambda$, ou seja, λ é estendido de maneira não única de $\mathcal{A}$ para $\sigma(\mathcal{A})$. Isso ocorre pois $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que A_k é não-vazio, logo $\lambda(A_k) = \infty$ e portanto Ω não é σ-finito com relação a λ.

Aula 3

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

3.1 Medida de Lebesgue em $(0,1]$

Nesta seção vamos mostrar como construir a medida de Lebesgue no intervalo semi-aberto $(0,1]$ via o Teorema da Extensão de Carathéodory. Para isto vamos considerar a coleção de subconjuntos do intervalo $(0,1]$ dada por

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset (0,1] : \begin{array}{c} A \text{ é uma união finita de intervalos disjuntos} \\ \text{da forma } (a,b] \text{ com } 0 \leq a < b \leq 1 \end{array} \right\} \cup \{\emptyset\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de $(0,1]$. Para provar a afirmação observamos primeiro que ambos conjuntos $\emptyset$ e $(0,1]$ pertencem a $\mathcal{A}$. Seja $A = (a_1, b_1] \cup \ldots (a_n, b_n] \in \mathcal{A}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Por questão de conveniência para $b_i = a_{i+1}$ vamos convencionar que $(b_i, a_{i+1}] = \emptyset$. Já que $A \in \mathcal{A}$ temos que os n intervalos que formam o conjunto A são mutuamente disjuntos, logo $A^c = (0, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \ldots \cup (b_{n-1}, a_n] \cup (a_n, 1] \in \mathcal{A}$. Se $B = (c_1, d_1] \cup \ldots (c_m, d_m] \in \mathcal{A}$ temos pelas propriedades de elementares de conjuntos que

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Big((a_i, b_i] \cap (c_j, d_j] \Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Big((\max\{a_i, c_j\}, \min\{b_i, d_j\}] \Big).$$

Como a coleção de intervalos aparecendo acima é mutuamente disjunta segue que $A \cap B \in \mathcal{A}$ e assim encerramos a prova de que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de $(0,1]$.

Embora, a coleção $\mathcal{A}$ seja uma álgebra ela não é σ-álgebra, para ver isto basta observar que a coleção $\mathcal{A}$ não possui nenhum dos conjuntos unitários $\{c\} \subset (0,1]$ que são obtidos, por exemplo, como uma interseção enumerável de subconjuntos de $\mathcal{A}$ da seguinte maneira $\cap_{n > c^{-1}} (c - 1/n, c]$. A álgebra $\mathcal{A}$ também não contém conjuntos que são uniões enumeráveis de intervalos que não pode ser expressa como uma união finita de intervalos disjuntos.

Considere a função de conjuntos $\text{Leb} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida por

$$\text{Leb}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Teorema 3.1. *Sejam $I = (a, b]$ e $I_k = (a_k, b_k]$ uma sequência arbitrária de intervalos todos contidos em $(0, 1]$.*

1) *Se $\cup_k I_k \subset I$ e I_k's são disjuntos, então $\sum_k \mathrm{Leb}(I_k) \leq \mathrm{Leb}(I)$.*

2) *Se $I \subset \cup_k I_k$ (os I_k's não necessariamente disjuntos), então temos que $\mathrm{Leb}(I) \leq \sum_k \mathrm{Leb}(I_k)$.*

3) *Se $I = \cup_k I_k$ e I_k's são disjuntos, então $\mathrm{Leb}(I) = \sum_k \mathrm{Leb}(I_k)$.*

Demonstração. Evidentemente 3) segue de 1) e 2). Vamos provar 1). Primeiro vamos estabelecer este fato para o caso em que $\cup_k I_k$ é uma união finita. A prova deste caso será feita por indução no número de intervalos. Para o caso $n = 1$ o resultado é óbvio. Suponha que 1) vale para união de n intervalos disjuntos contida em I. Sem perda de generalidade podemos supor que $I_1 = (a_1, b_1], \ldots, I_n = (a_n, b_n], I_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1}]$ são tais que $a_1, \ldots, a_n < a_{n+1}$. Já que todos I_k's estão contidos em $(a, b]$ temos que $\cup_{k=1}^n (a_k, b_k] \subset (a, a_{n+1}]$. Pela hipótese de indução temos que

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \equiv \sum_{k=1}^n \mathrm{Leb}(I_k) \leq \mathrm{Leb}((a, a_{n+1}]) \equiv a_{n+1} - a.$$

Usando a definição de Leb e a desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Leb}(I_{n+1}) + \textstyle\sum_{k=1}^n \mathrm{Leb}(I_k) &\leq (b_{n+1} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a) \\ &= b_{n+1} - a \\ &\leq b - a \\ &= \mathrm{Leb}(I). \end{aligned}$$

No caso em que a união em 1) é infinita basta aplicar o resultado acima para cada subcoleção finita obtendo $\sum_{k=1}^n \mathrm{Leb}(I_k) \leq b - a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que a cota superior é uniforme em n segue que $\sum_{k=1}^\infty \mathrm{Leb}(I_k) \leq b - a$.

Passamos agora para a prova do item 2). Por questão de simplicidade vamos dividir a prova em dois casos. Primeiro consideramos que a união em 2) é finita. Vamos novamente argumentar por indução. Suponha que o resultado seja válido para uma coleção de n intervalos e assuma que $(a, b] \subset \cup_{k=1}^{n+1} (a_k, b_k]$. Sem perda de generalidade podemos supor que $b \in (a_{n+1}, b_{n+1}]$, isto é, $a_{n+1} < b \leq b_{n+1}$. Se $a_{n+1} < a$ o resultado é óbvio. Caso contrário temos $(a, a_{n+1}] \subset \cup_{k=1}^n (a_k, b_k]$. Pela hipótese de indução segue que

$$a_{n+1} - a \equiv \mathrm{Leb}((a, a_{n+1}]) \leq \sum_{k=1}^n \mathrm{Leb}((a_k, b_k]) \equiv \sum_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Somando $b_{n+1} - a_{n+1}$ em ambos termos da desigualdade acima e lembrando que $b \leq b_{n+1}$ ficamos com

$$\mathrm{Leb}(I) \equiv b - a \leq b_{n+1} - a \leq \sum_{k=1}^{n+1} (b_k - a_k) \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{Leb}((a_k, b_k]).$$

e portanto o item 2) está provado para coleções finitas. Vamos agora analisar o caso de coleções infinitas. Suponha que $(a,b] \subset \cup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < b-a$ temos que

$$[a+\varepsilon,\ b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k,\ b_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Já que $[a+\varepsilon,\ b]$ é um compacto existe uma subcobertura finita da cobertura por abertos dada acima. Desta forma para algum $n \in \mathbb{N}$ podemos afirmar que

$$[a+\varepsilon,\ b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(a_k,\ b_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right).$$

Deste fato podemos concluir imediatamente que

$$(a+\varepsilon,\ b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} \left(a_k,\ b_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right].$$

Usando agora o resultado provado acima para o caso finito podemos afirmar que

$$b-(a+\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(b_k + \frac{\varepsilon}{2^k} - a_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário ficamos com

$$\mathrm{Leb}(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Leb}(I_k).$$

■

Com os Teoremas 3.1 e 2.22 em mãos podemos apresentar finalmente a medida de Lebesgue em $(0,1]$. Pois bem, dado $A \subset (0,1]$ definimos a medida exterior de A como em (2.1), ou seja,

$$\mathrm{Leb}^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Leb}(I_j) :\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ \text{com } I_j \in \mathcal{A}\ \ \forall j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Pelo Teorema 3.1 temos que $\mathrm{Leb} : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$. Pelo item 2) do Teorema de Carathéodory podemos afirmar que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é a coleção dos conjuntos mensuráveis com respeito a medida exterior Leb^*, além do mais o teorema afirma que $\mathrm{Leb}^*\big|_{\mathcal{M}}$ é uma medida e que para todo intervalo $I = (a,b] \in \mathcal{A}$ que $\mathrm{Leb}^*(I) = \mathrm{Leb}(I) = b-a$. Esta medida é conhecida como a **Medida de Lebesgue** em $(0,1]$ e será denotada por λ.

A σ-álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ é a σ-álgebra gerada pela coleção dos intervalos abertos contidos em $(0,1]$ chamada normalmente de σ-álgebra de Borel de $(0,1]$. Já a σ-álgebra $\mathcal{M}$ é conhecida como a σ-álgebra de Lebesgue de $(0,1]$. Uma pergunta natural neste momento é como se relacionam as σ-álgebras de Borel e Lebesgue. Vamos mostrar mais a frente que

$$\sigma(\mathcal{A}) \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}((0,1]).$$

A prova que a primeira continência é estrita será dada mostrando que a σ-álgebra de Borel $\sigma(\mathcal{A})$ tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$ enquanto que a σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{M}$ tem a cardinalidade das partes de $\mathbb{R}$. Para provar que a segunda continência é estrita vamos usar o famoso exemplo de Giuseppe Vitali de 1905, que permanece até nos dias de hoje sendo o exemplo mais simples.

Teorema 3.2. *Seja $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue em $(0, 1]$ e suponha que $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ seja uma medida satisfazendo $\nu\big|_{\mathcal{A}} = \lambda\big|_{\mathcal{A}}$. Então $\nu(E) = \lambda(E)$ para todo conjunto $E \in \mathcal{M}$.*

Observação 3.3. *No teorema acima, se desejamos mostrar apenas $\nu\big|_{\sigma(\mathcal{A})} = \lambda\big|_{\sigma(\mathcal{A})}$ basta aplicar o item 3) do Teorema da Extensão de Carathéodory. Porém para estender a conclusão a todos os conjuntos Lebesgue mensuráveis, como afirmado no enunciado, é necessário um pouco mais de trabalho.*

3.2 Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Existem várias maneira equivalentes de se definir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Para exercitar as técnicas apresentadas na seção anterior vamos mostrar como fazer esta construção a partir da extensão de uma medida definida em uma álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}$. Na verdade esta seção apresenta apenas um roteiro para esta construção com grande parte dos detalhes sendo deixados como exercício.

Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subset \mathbb{R} : \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{A \text{ é uma união finita de intervalos disjuntos}} \\ \multicolumn{2}{l}{\text{dos seguintes tipos:}} \\ I) & (a, b] \text{ com } -\infty < a < b < +\infty; \\ II) & (a, +\infty) \text{ com } a \in \mathbb{R}; \\ III) & (-\infty, a] \text{ com } a \in \mathbb{R}; \end{array} \right\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}. \tag{3.1}$$

Exercício 3.4. *Mostre que a coleção $\mathcal{A}$ definida acima é uma álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}$.*

Defina a função de conjuntos $\mathrm{Leb} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ da seguinte maneira:

$$\mathrm{Leb}(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i), & \begin{array}{l} \text{se } A = \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j, \text{ onde } I_j \equiv (a_j, b_j] \\ \text{com } -\infty < a_j < b_j < +\infty \ \forall j = 1, \ldots, n; \end{array} \\ \\ +\infty, & \begin{array}{l} \text{se } A = \bigsqcup_{j=1}^{n} I_j \text{ e existe } 1 \leq q \leq n \\ \text{tal que } I_q \text{ é do tipo } II \text{ ou } III. \end{array} \end{cases}$$

Exercício 3.5. *Mostre que a função* $\mathrm{Leb} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *como definida acima é uma medida na álgebra $\mathcal{A}$.*
Dica. Generalize o Teorema 3.1.

Para finalizar a construção da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, consideramos a medida exterior $\mathrm{Leb}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ definida como na Proposição 2.19. Temos pelo item 1) do Teorema da Extensão de Carathéodory que a medida exterior Leb^* restrita a coleção $\mathcal{M}$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são Leb^*-mensuráveis é de fato uma medida. Esta medida é chamada de **medida de Lebesgue** sobre $\mathbb{R}$ e será denotada simplesmente por λ. A σ-álgebra $\mathcal{M}$ é chamada de σ-álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Utilizando o item 2) do Teorema da Extensão de Carathéodory podemos concluir também para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ que

$$\lambda(\{a\}) = 0, \quad \lambda([a,b]) = b - a, \quad \lambda\big((-\infty, a]\big) = +\infty \quad \text{e} \quad \lambda\big([a, +\infty)\big) = +\infty.$$

Observamos que ao longo do texto vamos utilizar com mais frequência a restrição da medida de Lebesgue λ à $\sigma(\mathcal{A})$ que é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ e por simplicidade (e tradição) vamos chamar esta restrição também de medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

3.3 A Invariância por Translação da Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Seja $x \in \mathbb{R}$ fixado. Definimos a translação por x de subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ como sendo o conjunto

$$x \oplus A \equiv \{x + a \in \mathbb{R} : a \in A\}.$$

O objetivo desta seção é provar que a medida de Lebesgue é invariante por translações, isto é, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}$ fixados, temos que $\lambda(A) = \lambda(x \oplus A)$. Uma maneira interessante e que fornece uma perspectiva mais geral da afirmação feita acima é considerar o conjunto A como a **imagem inversa** do conjunto $x \oplus A$ pela aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(y) = y - x$. Neste contexto a igualdade $\lambda(A) = \lambda(x \oplus A)$ se expressa da seguinte forma $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}(A))$.

Uma pergunta natural sobre esta última maneira de expressar a invariância translacional é: porque escrever esta equação usando a imagem inversa ao invés de escrevê-la usando a imagem direta da função inversa de T (o que parece ser mais simples). A resposta é que desta maneira podemos definir o conceito de medida invariante para aplicações que não são inversíveis e que podem ser apenas mensuráveis. De fato, dada qualquer aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel mensurável a função de conjuntos definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$) por

$$A \mapsto \lambda(T^{-1}(A))$$

define sempre uma medida sobre os borelianos. Por causa desta observação podemos definir que λ (ou qualquer outra medida em $\mathbb{R}$) é invariante por T se a medida definida acima coincide com a medida λ.

Antes de provar a invariância por translações da medida de Lebesgue vamos provar um fato relacionado que se refere a invariância por translações da medida exterior Leb^*.

Teorema 3.6 (Invariância por Translações de Leb^*)**.** *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixado e $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ temos que*

$$\text{Leb}^*(x \oplus E) = \text{Leb}^*(E).$$

Demonstração. Seja $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ uma cobertura de E, onde cada $I_j \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é a álgebra de conjuntos de $\mathbb{R}$ definida em (3.1). É fácil ver que $\bigcup_{j=1}^{\infty}(x \oplus I_j)$ é uma cobertura de $x \oplus E$ e além do mais que $(x \oplus I_j) \in \mathcal{A}$.

Exercício 3.7. *Mostre que as duas afirmações feitas acima são verdadeiras e que* $\mathrm{Leb}(x \oplus I_j) = \mathrm{Leb}(I_j)$.

Usando a definição da medida exterior Leb^* em seguida, o exercício acima obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\mathrm{Leb}^*(x \oplus E) &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Leb}(x \oplus I_j) : \ x \oplus E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (x \oplus I_j) \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Leb}(I_j) : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \\
&= \mathrm{Leb}^*(E).
\end{aligned}$$

Já que toda cobertura $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $x \oplus E$ pode ser obtida por translação de uma cobertura $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de E, obtemos de maneira semelhante a que fizemos acima a cota $\mathrm{Leb}^*(E) \leq \mathrm{Leb}^*(x \oplus E)$ e finalmente que $\mathrm{Leb}^*(E) = \mathrm{Leb}^*(x \oplus E)$. ■

Teorema 3.8 (Invariância por Translações da Medida de Lebesgue)**.** *Sejam E um conjunto Lebesgue mensurável e $x \in \mathbb{R}$ fixados. Então $x \oplus E$ é Lebesgue mensurável e além do mais temos que*

$$\lambda(x \oplus E) = \lambda(E).$$

Demonstração. Pelo teorema anterior é suficiente mostrar que para todo conjunto Lebesgue mensurável E temos que $x \oplus E$ é Lebesgue mensurável.

Exercício 3.9. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos arbitrários e $x \in \mathbb{R}$ fixado. Mostre que as seguintes igualdades são válidas*

$$(x \oplus A) \cap B = x \oplus \Big(\big((-x) \oplus B \big) \cap A \Big) \quad e \quad (x \oplus A^c) = (x \oplus A)^c.$$

Do teorema anterior e da primeira igualdade do exercício acima, para quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ fixados, podemos deduzir a seguinte igualdade

$$\mathrm{Leb}^*\big((x \oplus A) \cap B \big) = \mathrm{Leb}^*\Big(\big((-x) \oplus B \big) \cap A \Big). \tag{3.2}$$

Já que estamos assumindo que E é um conjunto Lebesgue mensurável, então podemos afirmar que

$$\mathrm{Leb}^*\big((-x) \oplus A \big) = \mathrm{Leb}^*\Big(\big((-x) \oplus A \big) \cap E \Big) + \mathrm{Leb}^*\Big(\big((-x) \oplus A \big) \cap E^c \Big)$$

Aplicando a identidade (3.2) nas duas parcelas do lado direito da igualdade acima, ficamos com

$$\mathrm{Leb}^*\big((-x) \oplus A \big) = \mathrm{Leb}^*\Big(\big(x \oplus E \big) \cap A \Big) + \mathrm{Leb}^*\Big(\big(x \oplus E^c \big) \cap A \Big)$$

Usando a invariância por translações da medida exterior Leb^* e a segunda igualdade do exercício, na segunda parcela acima, ficamos com

$$\mathrm{Leb}^*(A) = \mathrm{Leb}^*\big((-x) \oplus A\big) = \mathrm{Leb}^*\Big(\big(x \oplus E\big) \cap A\Big) + \mathrm{Leb}^*\Big(\big(x \oplus E\big)^c \cap A\Big).$$

Como $A \subset \mathbb{R}$ é arbitrário segue da igualdade acima que $x \oplus E$ é Lebesgue mensurável. ∎

Exercício 3.10. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e B um boreliano da reta fixados. Mostre que $x \oplus B$ é um boreliano. Em seguida, usando que* $\mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(x \oplus A)$, *para todo A elemento da álgebra $\mathcal{A}$ definida em* (3.1) *e o Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin, mostre que $\lambda\big|_{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$ é invariante por translações.*

Aula 4

Espaços de Probabilidade

4.1 Propriedades das Medidas de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é um tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde

- Ω é um conjunto chamado de espaço amostral.
- $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de eventos.
- $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade, isto é, uma função com domínio em $\mathcal{F}$ tomando valores em $[0,1]$ satisfazendo
  i) $\mathbb{P}(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{F}$.
  ii) $\mathbb{P}$ é σ-aditiva: Para qualquer sequência $\{E_n\}$ mutuamente disjunta de eventos em $\mathcal{F}$ temos
  $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n).$$
  iii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Seguem das propriedade ii) e iii) acima que para qualquer evento $E \in \mathcal{F}$ vale a seguinte identidade
$$P(E^c) = 1 - P(E).$$
De fato,
$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c).$$
Como toda medida de probabilidade é em particular uma medida então temos que
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Proposição 4.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se A, B são dois eventos arbitrários então*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Demonstração. Primeiro observamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B)\\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(B \cap A)\end{aligned}$$

Note que podemos escrever $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \cup (A \cap B)$. Tomando probabilidade em ambos lados desta igualdade e usando as identidades acima, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= [\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)] + [\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)] + P(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2 (Fórmula de Inclusão-Exclusão). *Para quaisquer eventos $E_1, \ldots, E_n$ temos*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n+1}\mathbb{P}(E_1 \cap \ldots \cap E_n).$$

Demonstração. Podemos provar o teorema por indução. Para $n = 2$ o teorema segue diretamente da proposição acima. Para dar o passo de indução basta escrever $\cup_{j=1}^{k+1} E_j$ como $\cup_{j=1}^{k} E_j \cup E_{k+1}$, usar o caso $n = 2$ para calcular a probabilidade desta decomposição, em seguida usar a hipótese de indução para

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k} (E_j \cap E_{k+1})\right)$$

e reorganizar os termos de ambas as somas. Observe por exemplo, que as probabilidades de interseções de pares com E_j's com índice menores ou iguais a k virão da primeira probabilidade e interseção de pares de eventos E_j's onde um dos eventos é E_{k+1} virá da segunda soma e assim por diante. ■

Uma aplicação deste Teorema é a obtenção das chamadas **Desigualdades de Bonferroni** . A prova destas desigualdades segue simplesmente de negligenciarmos os resto. Dois exemplos de tais desigualdades são mostrados abaixo:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \ge \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$$

Outra propriedade importante é a **Monotonicidade** de $\mathbb{P}$, isto é, para quaisquer eventos A, B tais que $A \subset B$ temos $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$. De fato, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \ge \mathbb{P}(A)$.

Toda medida de probabilidade é σ-subaditiva, ou seja, para quaisquer eventos $E_1, E_2, \ldots$ temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n).$$

Para verificar que esta propriedade é verdadeira basta observar que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) \cup \ldots$$

aplicar a σ-aditividade de $\mathbb{P}$ e em seguida usar a monotonia obtendo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_1^c \cap E_2) + \mathbb{P}(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) + \ldots \\ &\leq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) + \ldots\end{aligned}$$

Teorema 4.3 (Continuidade da Probabilidade)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de Probabilidade e* $\{E_n\}$ *uma sequência de eventos neste espaço.*

1. *Se* $E_n \nearrow E$ *então* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E)$.
2. *Se* $E_n \searrow E$ *então* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E)$.

Demonstração. Vamos provar o primeiro item do Teorema. Suponha que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ e defina a seguinte sequência de eventos

$$B_1 = E_1,\ B_2 = E_2 \setminus E_1,\ \ldots,\ B_n = E_n \setminus E_{n-1}.$$

Por construção a sequência $\{B_n\}$ é uma sequência de eventos mutuamente disjunta e além do mais

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = E_n, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E.$$

Da σ-aditividade segue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(E_n\right).\end{aligned}$$

Para provar o segundo item note que se $E_n \searrow E$ então $E_n^c \nearrow E^c$. Aplicando o resultado que acabamos de provar temos que

$$1 - \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n^c) = \lim_{n\to\infty} [1 - \mathbb{P}(E_n)]$$

de onde segue o resultado. ■

Vamos provar agora um lema de continuidade para sequências que não são necessariamente monótonas. Este lema será chamado de lema de Fatou para funções indicadoras e a razão para isto ficará clara futuramente.

Lema 4.4 (Lema de Fatou para Funções Indicadoras)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $\{E_n\}$ *uma sequência de eventos.*

1. $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n)$.

2. *Se* $E_n \to E$ *então* $\mathbb{P}(E_n) \to \mathbb{P}(E)$.

Demonstração. Primeiro vamos assumir que 1 é válido e vamos mostrar 2. Suponha que $E_n \to E$. Então

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = E.$$

Aplicando 1 temos que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = P(E).$$

O que prova que $\mathbb{P}(E_n) \to P(E)$.

Passamos agora a prova do item 1. Por definição do $\liminf$, continuidade da probabilidade temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} E_n) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} E_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} E_k\right)\end{aligned}$$

Por monotonicidade temos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} E_k\right) \leq \mathbb{P}(E_n).$$

Assim se tomamos $\liminf$ em ambos os lados e usamos as igualdades acima, obtemos a seguinte desigualdade

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n).$$

De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} E_n) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\geq n} E_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} E_k\right) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n).\end{aligned}$$

■

4.2 Função Distribuição

Exemplo 4.5. *Seja* $\Omega = \mathbb{R}$ *(conjunto dos números reais) e* $\mathbb{P}$ *uma medida de probabilidade em* $\mathbb{R}$*. Defina* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *por*

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]).$$

Então

1. *F é contínua à direita.*
2. *F é monótona não-decrescente*
3. *Existem os seguintes limites*
   - $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
   - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

Demonstração. Vamos mostrar primeiro o item 2. Se $x < y$ então temos que $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$. O resultado segue diretamente da monotonicidade de $\mathbb{P}$ e da definição de F.

Passamos agora para a prova do item 3. Considere uma subsequência $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ monótona crescente com $x_{n_j} \to \infty$, como $(-\infty, x_{n_j}]$ é uma sequência encaixada crescendo para $\mathbb{R}$, segue da continuidade da probabilidade que

$$\lim_{n\to\infty} F(x_{n_j}) = 1$$

ou seja dado $\epsilon > 0$ existe n_{j_0} tal que para todo $n_j > n_{j_0}$ vale que $F(x_{n_j}) > 1 - \epsilon$. Como $x_n \to \infty$ temos que existe N tal que para todo $n > N$ tem-se $x_n > x_{n_{j_0}}$ portanto da monotonicidade de F segue que $F(x_n) > 1-\epsilon$ para todo $n > N$ donde segue o item 3. O cálculo do outro limite do item 3 é análoga, bastando agora usar a continuidade no vazio.

Para provar o item 1 temos que mostrar que sempre que $x_n \downarrow x$ temos que $F(x_n) \downarrow F(x)$. Mas isto é consequência imediata da propriedade de continuidade de $\mathbb{P}$ e de que

$$(-\infty, x_n] \searrow (-\infty, x].$$

■

Definição 4.6 (Função Distribuição)**.** *Uma função* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *F é contínua à direita.*
2. *F é monótona não-decrescente*
3. *Existem os seguintes limites*
   - $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
   - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

é chamada de uma função distribuição.

4.3 Construção de $\mathbb{P}_F$

O objetivo nesta seção é construir uma medida de probabilidade em $\mathbb{R}$ com uma dada função distribuição F. Em outras palavras, vamos construir uma medida $\mathbb{P}_F$ tal que

$$\mathbb{P}_F((-\infty, x]) = F(x).$$

Para construir tal probabilidade vamos precisar da medida de Lebesgue que nesta seção será denotada por λ.

Vamos começar definindo uma função contínua a esquerda $G : (0,1) \to \mathbb{R}$ que é uma espécie de "inversa generalizada" de F. Esta função é definida da seguinte maneira: para cada $y \in (0,1)$ definimos

$$G(y) \equiv \inf\{s \in \mathbb{R} : y \leq F(s)\} = \inf\{F^{-1}([y, +\infty))\}.$$

Para simplificar a notação vamos escrever

$$A(y) \equiv \{s \in \mathbb{R} : y \leq F(s)\}$$

Exercício 4.7. *Mostre que a função G dada acima está bem definida, isto é, para todo $y \in (0,1)$ temos que $A(y) \neq \emptyset$ e que seu ínfimo pertence a $\mathbb{R}$.*

Observação 4.8. *Em geral, G* **não** *é uma função injetiva. Por exemplo, se x_0 é um ponto de descontinuidade de F então para qualquer ponto y pertencente ao intervalo aberto $I_0 = (F(x_0-), F(x_0))$ temos $G(y) = x_0$, veja figura abaixo:*

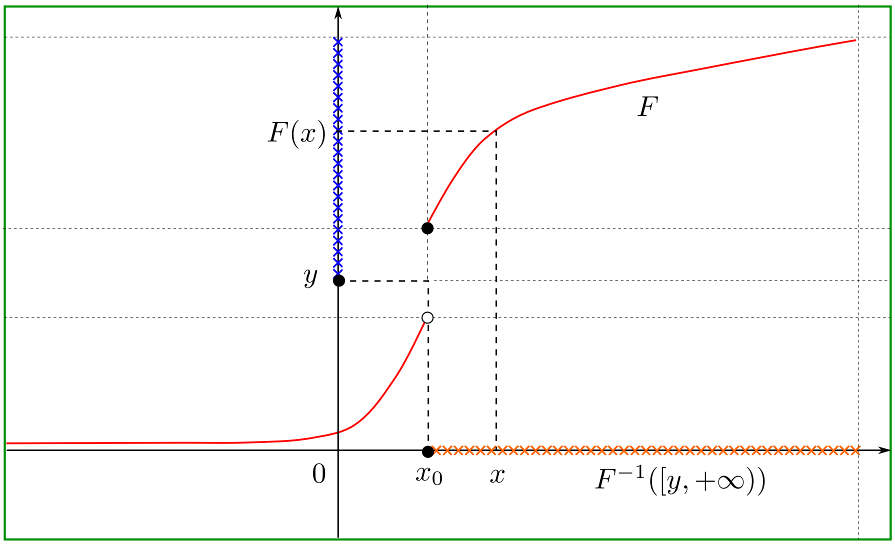

Figura 4.1: Esboço do gráfico de uma função distribuição F descontínua.

Proposição 4.9. *Para todo $y \in (0,1)$ o conjunto $A(y)$ definido acima tem as seguintes propriedades:*

1. *$A(y)$ é um conjunto fechado.*
2. *$\inf A(y) \in A(y)$, ou seja, $y \leq F(G(y))$.*

3. *$t < G(y)$ se, e somente se, $F(t) < y$.*

4. *$G(y) \leq t$ se, e somente se, $y \leq F(t)$.*

Demonstração. **Prova do item 1.** Seja $\{s_n\}$ uma sequência em $A(y)$ tal que $s_n \to s$. Note que $\{s_n\}$ possui pelo menos uma subsequência monótona, não-crescente ou não-decrescente $\{s_{n_k}\}$ que converge para s. Vamos considerar primeiro o caso em que existe uma subsequência $s_{n_k} \downarrow s$. Já que $s_{n_k} \in A(y)$ então é válida a seguinte desigualdade $y \leq F(s_{n_k})$. Tomando nesta desigualdade o limite, quando $k \to \infty$, obtemos da continuidade a direita de F que

$$y \leq \lim_{k\to\infty} F(s_{n_k}) = F(s).$$

O que mostra que $s \in A(y)$. Por outro lado, se $\{s_n\}$ não possui uma subsequência $s_{n_k} \downarrow s$, então existe no máximo uma quantidade finita de pontos da sequência $\{s_n\}$ que é maior ou igual a s. Assim podemos afirmar que existe pelo menos uma subsequência $s_{n_k} \uparrow s$ tal que $s_{n_k} < s$. Usando a definição de $A(y)$ e a monotonicidade de F temos que

$$y \leq F(s_{n_k}) \leq F(s).$$

Logo $s \in A(y)$ e isto conclui a prova de que $A(y)$ é um subconjunto fechado da reta.

Prova do item 2. Segue diretamente da definição $\inf A(y)$, que existe uma sequência $\{s_n\} \subset A(y)$ tal que $s_n \to \inf A(y)$. Uma vez que o item 1 garante que $A(y)$ é fechado, temos que

$$G(y) = \inf A(y) \in A(y).$$

Segue então da definição de $A(y)$ que $y \leq F(G(y))$.

Prova do item 3. Note que $t < G(y)$ é equivalente a $t < \inf A(y)$. Esta desigualdade é equivalente a $t \in A(y)^c$, isto é, $t \in \{s \in \mathbb{R} : F(s) < y\}$. Como a última afirmação é equivalente a $F(t) < y$ a prova deste item está completa.

Prova do item 4. Se $G(y) \leq t$ então segue do item 3 que $y \leq F(t)$. A recíproca é também uma aplicação direta do item 3. Isto completa a prova da proposição. ∎

Para cada $A \subset \mathbb{R}$ definimos agora o seguinte conjunto:

$$\xi_F(A) \equiv \{x \in (0,1] : G(x) \in A\} = G^{-1}(A) \cap (0,1]. \tag{4.1}$$

No lema seguinte mostramos que se A é um boreliano de $\mathbb{R}$ (notação $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$) então $\xi_F(A)$ é um boreliano de $(0,1]$ (notação $\xi_F(A) \in \mathscr{B}((0,1])$).

Lema 4.10. *Se $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ então $\xi_F(A) \in \mathscr{B}((0,1])$, onde $\xi_F(A)$ é definido como em* (4.1).

Demonstração. Considere a seguinte coleção

$$\mathscr{C} = \{A \subset \mathbb{R} : \xi_F(A) \in \mathscr{B}((0,1])\}.$$

Afirmamos que $\mathscr{C}$ contém qualquer intervalo finito da forma $(a, b] \subset \mathbb{R}$. De fato, segue dos itens 3 e 4 da Proposição 4.9 que para todo $x \in (0,1)$ satisfazendo $a < G(x)$ temos $F(a) < x$ e por outro lado, se $G(x) \leq b$ temos $x \leq F(b)$. Da definição de $\xi_F(A)$ e das duas observações anteriores temos que

$$\begin{aligned}
\xi_F((a,b]) &= \{x \in (0,1] : G(x) \in (a,b]\} \\
&= \{x \in (0,1] : a < G(x) \leq b\} \\
&= \{x \in (0,1] : F(a) < x \leq F(b)\} \\
&= (F(a), F(b)].
\end{aligned}$$

Como o lado direito acima pertence a $\mathscr{B}((0,1])$ segue que todo intervalo finito $(a,b] \in \mathscr{C}$. Em outras palavras, a coleção $\mathscr{C}$ contém o π-sistema $\mathcal{G} = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Vamos mostrar agora que $\mathscr{C}$ é um λ-sistema. Para provar que $\mathbb{R} \in \mathscr{C}$, basta notar que $\xi_F(\mathbb{R}) = G^{-1}(\mathbb{R}) \cap (0,1] = (0,1) \cap (0,1] \in \mathscr{B}((0,1])$. Suponha que $A \in \mathscr{C}$, então $\xi_F(A) = G^{-1}(A) \cap (0,1] \in \mathscr{B}((0,1])$. Pela propriedades de imagem inversa temos que

$$G^{-1}(A^c) = \Big(G^{-1}(A)\Big)^c$$

e como $\xi_F(A)$ é um boreliano de $(0,1]$, segue da definição de topologia induzida que

$$\xi_F(A^c) = G^{-1}(A^c) \cap (0,1] = \Big(G^{-1}(A)\Big)^c \cap (0,1]$$

é um boreliano de $(0,1]$, mostrando que $A^c \in \mathscr{C}$.

Se $\{A_n\}$ é uma família de conjuntos mutuamente disjuntos em $\mathscr{C}$, então

$$\begin{aligned}
\xi_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= G^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap (0,1] \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} G^{-1}(A_n) \cap (0,1]
\end{aligned}$$

pertence a $\mathscr{B}((0,1])$. Logo $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{C}$ o que prova encerra a prova de que $\mathscr{C}$ é um λ-sistema.

Pelo Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin $\mathscr{C}$ contém a σ-álgebra gerada por $\mathcal{G}$ que é $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Este fato completa a prova do lema. ■

Finalmente podemos apresentar a definição de $\mathbb{P}_F$. Para cada $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ definimos

$$\mathbb{P}_F(A) = \lambda(\xi_F(A)),$$

onde λ é a medida de Lebesgue em $(0,1]$. É simples verificar que $\mathbb{P}_F$ é de fato uma medida de probabilidade sobre $\mathbb{R}$ e que a função distribuição que ela induz é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_F((-\infty, x]) &= \lambda\Big(\xi_F((-\infty, x])\Big) \\
&= \lambda\Big(\{y \in (0,1] : G(y) \in (-\infty, x]\}\Big) \\
&= \lambda\Big(\{y \in (0,1] : G(y) \leq x\}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\Big(\{y \in (0,1] : y \leq F(x)\}\Big) \qquad \text{(item 4 Proposição 4.9)}\\
&= \lambda\Big((0, F(x)]\Big)\\
&= F(x).
\end{aligned}
$$

Aula 5

Funções Mensuráveis Reais e Complexas

5.1 Funções Mensuráveis

A partir de agora usamos a notação $\overline{\mathbb{R}}$ para denotar a reta estendida, isto é, o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Observe que podemos estender naturalmente conceito de soma e produto de números reais para os seguintes pares de elementos de $\overline{\mathbb{R}}$:

1. para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ a soma é a soma usual e o mesmo para o produto.
2. para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ temos $0 \cdot x = 0$.
3. Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ diferente de $-\infty$ definimos $x + (+\infty) = +\infty$.
4. Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ diferente de $+\infty$ definimos $x + (-\infty) = -\infty$.
5. $\pm\infty \cdot \pm\infty = +\infty$ e $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$.

Não vamos nos preocupar, neste momento, em munir $\overline{\mathbb{R}}$ de uma topologia, mas vamos definir a σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$, como sendo a coleção formada pela reunião da coleção $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ e de todos conjuntos da forma $B \cup \{-\infty\}$, $B \cup \{+\infty\}$ e $B \cup \{-\infty, +\infty\}$, onde B varia sobre todos os elementos de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Esta coleção que acabamos de definir é de fato uma σ-álgebra e será chamada de σ-álgebra de borel de $\overline{\mathbb{R}}$ e denotada por $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Exercício 5.1. *Mostre que a coleção $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ é uma σ-álgebra.*

Exercício 5.2. *Podemos ver $\overline{\mathbb{R}}$ como um conjunto totalmente ordenado se consideramos a relação de ordem "$<$" obtida pela extensão natural da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Seja τ a topologia da ordem definida por "$<$" em $\overline{\mathbb{R}}$. Mostre que a σ-álgebra gerada pelos abertos de τ coincide com a coleção $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ definida acima.*

Funções a Valores Reais Mensuráveis

Nesta subseção vamos considerar funções que saem de um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ e tomam valores em $\mathbb{R}$. O caso mais geral, onde as funções assumem valores em $\overline{\mathbb{R}}$ será tratado na subseção seguinte.

Definição 5.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita $\mathcal{F}$-mensurável se para todo número real α temos que*

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{F}.$$

O próximo lema fornece três maneira alternativas de definir funções mensuráveis.

Lema 5.4. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $A_\alpha \equiv \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{F}$.*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $B_\alpha \equiv \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}$.*
3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $C_\alpha \equiv \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$.*
4. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $D_\alpha \equiv \{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\} \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Já que A_α e B_α são complementares um do outro temos imediatamente que 1 e 2 são equivalentes. Pelo mesmo motivo segue que 3 e 4 são equivalentes. Vamos assumir agora que 1 seja válido. Então temos que $A_{\alpha-1/n} \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-1/n}$$

temos que 1 implica 3. Por outro lado, a igualdade

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+1/n}$$

mostra que 3 implica 1. ■

Exercício 5.5. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Mostre que f é uma função $\mathcal{F}$-mensurável se, e somente se, a coleção*

$$f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \equiv \{f^{-1}(B) : \ B \text{ é um boreliano de } \mathbb{R}\}.$$

é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

Exemplo 5.6. *Toda função constante $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável. De fato, se $f(\omega) = c$ para todo $\omega \in \Omega$ então temos que se $\alpha \geq c$ então $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} = \emptyset$. Por outro lado, se $\alpha < c$ então $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} = \Omega$.*

Exemplo 5.7. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Se $E \in \mathcal{F}$ então a função $1_E : \Omega \to \mathbb{R}$, a função indicadora de E, é mensurável e vice-versa. Para ver que a afirmação é verdadeira basta notar que $\{\omega \in \Omega : 1_E(\omega) > \alpha\}$ é igual Ω, E ou $\emptyset$.*

Exemplo 5.8. *Considere o espaço mensurável $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Então qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é $\mathscr{B}(\mathbb{R})$-mensurável. Basta notar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos por continuidade que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ é um aberto da reta e portanto pertence a σ-álgebra de borel de $\mathbb{R}$.*

Exemplo 5.9. *Considere o espaço mensurável* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *e seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função monótona não-decrescente. Para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos que* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ *ou é uma semi-reta da forma* $(-\infty, a)$ *ou* $(-\infty, a]$ *ou* $\mathbb{R}$ *ou* $\emptyset$*. Portanto toda função monótona não-decrescente é borel mensurável, isto é,* $\mathscr{B}(\mathbb{R})$*-mensurável.*

Vamos mostrar na sequência que algumas operações algébricas entre funções mensuráveis fornece também uma função mensurável.

Lema 5.10. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F})$ *um espaço de medida e* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *funções* $\mathcal{F}$*-mensuráveis e* c *uma constante real. Então as funções*

$$cf, \ f^2, \ f+g, \ fg, \ |f|$$

são também funções $\mathcal{F}$*-mensuráveis.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que cf é mensurável. Se $c = 0$ então $cf \equiv 0$ e a mensurabilidade de cf segue do Exemplo 5.6. Se $c > 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\{\omega \in \Omega : cf(\omega) > \alpha\} = \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \frac{\alpha}{c}\right\} \in \mathcal{F}.$$

O caso $\alpha < 0$ é análogo.

Vamos provar agora que f^2 é $\mathcal{F}$-mensurável. Vamos dividir o argumento em dois casos, $\alpha < 0$ e $\alpha \geq 0$. No primeiro caso $\alpha < 0$, temos que $\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) > \alpha\} = \Omega$ Se $\alpha \geq 0$ então

$$\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{\omega \in \Omega : f(\omega) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{F}.$$

Passamos agora para a mensurabilidade da soma. Por hipótese para qualquer número racional r e qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$S_r \equiv \{\omega \in \Omega : f(\omega) > r\} \cap \{\omega \in \Omega : g(\omega) > \alpha - r\} \in \mathcal{F}.$$

Já que

$$\{\omega \in \Omega : (f+g)(\omega) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r$$

é um conjunto $\mathcal{F}$-mensurável, segue que $f + g$ é mensurável.

Para mostrar que o produto fg é mensurável, basta notar que

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

e usar o resultados provados acima.

Resta mostrar que $|f|$ é mensurável. Novamente consideramos dois casos, $\alpha < 0$ e $\alpha \geq 0$. No primeiro caso, $\alpha < 0$, temos que $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \alpha\} = \Omega$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$ então

$$\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \cup \{\omega \in \Omega : f(\omega) < -\alpha\}.$$

como ambos conjuntos do lado direito da igualdade acima pertencem a $\mathcal{F}$, segue que $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \alpha\} \in \mathcal{F}$ o que encerra a prova do lema. ∎

Partes Positiva e Negativa de Funções a Valores Reais

A cada função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ podemos associar duas funções **não-negativas** denotadas por f^+ e f^- ambas definidas em Ω por

$$f^+(\omega) = \sup\{f(\omega), 0\} \qquad \text{e} \qquad f^-(\omega) = \sup\{-f(\omega), 0\}$$

As funções f^+ e f^- são chamadas, respectivamente de **parte positiva** e **parte negativa** de f.

Note que para qualquer que seja $\omega \in \Omega$, sempre temos

$$f(\omega) = f^+(\omega) - f^-(\omega) \qquad \text{e} \qquad |f(\omega)| = f^+(\omega) + f^-(\omega).$$

Lema 5.11. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, é $\mathcal{F}$-mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são $\mathcal{F}$-mensuráveis.*

Demonstração. A prova deste lema é consequência direta das seguintes identidades:

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \qquad \text{e} \qquad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

■

Até o momento trabalhamos com o conceito de mensurabilidade em $\mathbb{R}$. Como frequentemente iremos trabalhar com sequências de funções e estaremos interessados em tomar, supremos, ínfimos, limites e etc... é tecnicamente conveniente trabalhar com o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$. Esta é a razão de introduzirmos na seção seguinte o conceito de mensurabilidade de uma função tomando valores na reta estendida.

5.2 Funções a Valores em $\overline{\mathbb{R}}$ Mensuráveis

Definição 5.12 (Função Mensurável em $\overline{\mathbb{R}}$)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de mensurável. Uma função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita $\mathcal{F}$-mensurável, se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \in \mathcal{F}$.*

A coleção de todas as funções $\mathcal{F}$-mensuráveis tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$ é denotada por $M(\Omega, \mathcal{F})$. Observe que se $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$ então

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) > n\}$$

e

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) = -\infty\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f(x) > -n\} \right)^c$$

são conjuntos $\mathcal{F}$-mensuráveis.

O próximo lema apresenta uma caracterização do conceito de mensurabilidade que acabamos de introduzir. Ele será muito útil para provar mensurabilidade de funções tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$.

Lema 5.13. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Uma função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos*

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\} \quad \text{e} \quad B = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = -\infty\}$$

são $\mathcal{F}$-mensuráveis e a função $f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(\omega) = \begin{cases} f(x), & se\ x \notin A \cup B; \\ 0, & se\ x \in A \cup B. \end{cases}$$

é $\mathcal{F}$-mensurável.

Demonstração. Suponha que a função f seja $\mathcal{F}$ mensurável. Como já observamos, se $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$ então A e B são $\mathcal{F}$-mensuráveis. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 0$ então temos que

$$\{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \setminus A.$$

Se $\alpha < 0$ então

$$\{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} \cup B.$$

Portanto podemos concluir que f_1 é $\mathcal{F}$-mensurável.

Reciprocamente, suponha que $f_1 \in M(\Omega, \mathcal{F})$ e $A, B \in \mathcal{F}$. Então para $\alpha \geq 0$ temos

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > \alpha\} \cup A$$

e se $\alpha < 0$ temos que

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f_1(\omega) > \alpha\} \setminus B,$$

o que mostra que $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$. ■

Corolário 5.14. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Se $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$ então para toda constante $c \in \mathbb{R}$ temos que as funções cf, f^2, $|f|$, f^+ e $f^- \in M(\Omega, \mathcal{F})$.*

Demonstração. A prova é uma aplicação dos Lemas 5.10 e 5.13. Para exemplificar vamos mostrar que $f^2 \in M(\Omega, \mathcal{F})$. Vamos mostrar primeiro que $(f^2)_1 = f_1 f_1$. Sejam A e B os conjuntos definidos no Lema 5.13 com respeito a função f. Se $\omega \notin A \cup B$, então $f(\omega) \in \mathbb{R}$ e assim $(f^2)_1(\omega) = f^2(\omega) = f_1(\omega) f_1(\omega)$. Por outro lado, se $\omega \in A \cup B$ então temos que $(f^2)_1(\omega) = 0 \cdot 0 = f_1(\omega) f_1(\omega)$. Já que $(f^2)_1 = f_1 f_1$ segue do Lema 5.10 que $(f^2)_1$ é mensurável. Observando que os conjuntos A e B para f^2 são $\mathcal{F}$-mensuráveis segue do Lema 5.13 que f^2 é $\mathcal{F}$-mensurável. ■

Observação 5.15. *Se f e g pertencem a $M(\Omega, \mathcal{F})$, então a função soma $(f + g)(\omega)$ não está bem definida pela fórmula $(f + g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ nos seguintes conjuntos:*

$$E_1 = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty \ e \ g(\omega) = -\infty\}$$
$$e$$
$$E_2 = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = -\infty \ e \ g(\omega) = +\infty\}.$$

Note que E_1 e $E_2 \in \mathcal{F}$. Assim se definimos $(f + g)$ sobre a união destes conjuntos como sendo zero, então a função resultante é $\mathcal{F}$-mensurável. Após o lema seguinte vamos discutir sobre a mensurabilidade de fg.

Lema 5.16. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $M(\Omega, \mathcal{F})$. Defina as seguintes funções:*

$$f(\omega) = \inf_{n \to \infty} f_n(\omega), \qquad F(\omega) = \sup_{n \to \infty} f_n(\omega),$$

$$f^*(\omega) = \liminf_{n \to \infty} f_n(\omega), \quad F^*(\omega) = \limsup_{n \to \infty} f_n(\omega).$$

Então f, F, f^* e F^* pertencem a $M(\Omega, \mathcal{F})$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, segue da hipótese de mensurabilidade de f_n que o seguinte conjunto é $\mathcal{F}$-mensurável

$$\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \geq \alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) > \alpha - \frac{1}{k}\right\}.$$

Como as seguinte igualdade são válidas:

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \geq \alpha\}$$

e

$$\{\omega \in \Omega : F(\omega) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) > \alpha\}$$

temos que f e F são mensuráveis sempre que f_n é mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que

$$f^*(\omega) = \sup_{n \geq 1} \left\{\inf_{m \geq n} f_m(\omega)\right\} \quad \text{e} \quad F^*(\omega) = \inf_{n \geq 1} \left\{\sup_{m \geq n} f_m(\omega)\right\}$$

basta aplicar duas vezes consecutivas o resultado que acabamos de provar para concluir que ambas f^* e F^* são $\mathcal{F}$-mensuráveis. ■

Corolário 5.17. *Se $\{f_n\}$ é uma sequência em $M(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, então $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$.*

Demonstração. Basta observar que

$$f(\omega) = \limsup_{n \to \infty} f_n(\omega) = \liminf_{n \to \infty} f_n(\omega).$$

■

Voltamos a questão da mensurabilidade do produto fg, quando ambas f e $g \in M(\Omega, \mathcal{F})$. Para isto vamos introduzir a noção de truncamento de uma função em $M(\Omega, \mathcal{F})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função f_n que é chamada de um truncamento de f, definida por

$$f_n(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{se } |f(\omega)| \leq n; \\ n, & \text{se } f(\omega) > n; \\ -n, & \text{se } f(\omega) < -n. \end{cases}$$

Exercício 5.18. *Sejam $f \in M(\Omega, \mathcal{F})$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se f_n é um truncamento de f, como definido acima, então $f_n \in M(\Omega, \mathcal{F})$.*

Se f_n e g_m são truncamentos de f e g, respectivamente segue do Lema 5.10 que o produto $f_n \cdot g_m$ é mensurável. Já que para todo $\omega \in \Omega$ temos

$$f(\omega)g_m(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)g_m(\omega)$$

segue do Corolário 5.17 que $fg_m \in M(\Omega, \mathcal{F})$. Observando que

$$(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega) = \lim_{m\to\infty} f(\omega)g_m(\omega)$$

outra aplicação do Corolário 5.17 mostra finalmente que $fg \in M(\Omega, \mathcal{F})$.

Definição 5.19 (Sequência Monótona de Funções)**.** *Uma sequência $\{f_n\}$ em $M(\Omega, \mathcal{F})$ é dita monótona não-decrescente, se para todo $\omega \in \Omega$ fixado, temos que*

$$f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogamente definimos sequências monótonas não-crescentes.

Definição 5.20 (Função Simples)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita simples se assume no máximo uma quantidade finita de valores, isto é, $\#f(\Omega) < \infty$.*

O Corolário 5.17 afirma que limite pontual de funções em $M(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função em $M(\Omega, \mathcal{F})$. Assumindo apenas que f é não-negativa e mensurável mostramos no próximo lema um fato ainda mais forte. Sob estas condições vamos ver que f é limite pontual de alguma sequência monótona não-decrescente de funções simples f_n em $M(\Omega, \mathcal{F})$, além do mais a demostração fornece uma maneira de construir tal sequência.

Teorema 5.21. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida. Se $f : \Omega \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, existe uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ tal que para todo $\omega \in \Omega$ temos $0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots \leq f(\omega)$ e $f_n(\omega) \to f(\omega)$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere uma partição do intervalo $[0, n)$ em intervalos semi-abertos de mesmo comprimento igual a $1/2^n$, da seguinte forma:

$$[0, n) = \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n}\right).$$

Estes $n2^n$ intervalos junto com o intervalo $[n, +\infty]$ formam uma partição de $[0, +\infty]$. Esta partição induz uma partição em Ω que é determinada pelas pré-imagens destes conjuntos por f, isto é, para $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $0 \leq k \leq n2^n - 1$, defina

$$E_n^k = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad E_n^{n2^n} = f^{-1}\big([n, +\infty]\big).$$

Com auxilio desta partição, definimos uma sequência de funções simples não-negativas $\{f_n\}$, onde

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} 1_{E_n^k} + n 1_{E_n^{n2^n}}.$$

Segue diretamente da definição dos conjuntos E_n^k que $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Note também que se $f(\omega) < n$ então $0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) < \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, se $f(\omega) = +\infty$ temos que $f_n(\omega) = n$, logo $f_n(\omega) \to +\infty$. Portanto para todo $\omega \in \Omega$ temos que $f_n(\omega) \to f(\omega)$, quando $n \to \infty$. ∎

Observação 5.22. *O leitor mais atento deve ter notado que a última estimativa apresentada na demonstração acima implica que a convergência das funções simples* f_n *para* f *é uniforme nos conjuntos onde* f *é limitada, isto é, dado* $M > 0$ *seja* $\Omega_M = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \leq M\}$ *então a sequência* $f_n|_{\Omega_M} \to f|_{\Omega_M}$ *uniformemente.*

5.3 Funções Mensuráveis a Valores Complexos

É de grande importância na Teoria da Probabilidade o estudo de algumas funções a valores complexos como, por exemplo, as chamadas funções características. Por isto, vamos introduzir nesta pequena seção a noção de mensurabilidade para tais funções. Observe que se f é uma função complexa definida em Ω, isto é, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é uma função, então existem duas outras funções reais unicamente determinadas chamadas respectivamente, de partes real e imaginária denotadas por $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

onde $u(\omega) = \mathrm{Re}(f(\omega))$ e $v(\omega) = \mathrm{Im}(f(\omega))$.

Definição 5.23 (Função Complexa Mensurável)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F})$ *um espaço de medida. Uma função complexa* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *é dita mensurável se, e somente se, suas partes real e imaginária são funções mensuráveis.*

Exercício 5.24. *Mostre que somas, produtos e limites de funções complexas mensuráveis é uma função complexa mensurável.*

Lista de Exercícios

1. Seja Ω um espaço não vazio. Seja $\mathcal{F}_0$ a coleção de todos os subconjuntos $E \subset \Omega$ tais que E ou E^c é finito. Considere a função de conjuntos $P : \mathcal{F}_0 \to [0,1]$ definida por
$$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é finito;} \\ 1, & \text{se } E^c \text{ é finito.} \end{cases}$$
   a) Mostre que $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra de conjuntos.
   b) Assumindo que Ω é um conjunto infinito enumerável, mostre que P é finitamente aditiva, mas não é σ-aditiva.
   c) Assumindo que Ω é não-enumerável, mostre que P é σ-aditiva em $\mathcal{F}_0$.

2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ o evento $B_n \subset A_n$ então mostre que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n)\Big)$$

3. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de mensurável. Suponha que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade definida em $\mathcal{F}$ e que existe um conjunto $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{F}$. Considere a σ-álgebra $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{F}, A)$. Mostre que $\mathbb{P}$ admite uma extensão a uma medida de probabilidade $\mathbb{P}_1$ definida em $\mathcal{F}_1$.

4. Seja $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade em $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Mostre que para qualquer $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe uma união finita de intervalos A tal que
$$\mathbb{P}(A \triangle B) < \varepsilon.$$
   Dica. Defina a seguinte coleção:
$$\mathscr{C} = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon (\text{união finita de interv.}) \text{ tal que} \mathbb{P}(A_\varepsilon \triangle B) < \varepsilon\}$$

5. Dizemos uma sequência de eventos $\{A_n\}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é quase disjunta se $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ se $i \neq j$. Para tais eventos mostre que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

6. Sabemos que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ em $\mathcal{F}$ dado que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é π-sistema que gera $\mathcal{F}$. Mostre que a hipótese de $\mathcal{C}$ ser um π-sistema não pode ser removida, através do seguinte exemplo: considere $\Omega = \{a, b, c, d\}$ e que
$$\mathbb{P}_1(\{a\}) = \mathbb{P}_1(\{d\}) = \mathbb{P}_2(\{b\}) = \mathbb{P}_2(\{c\}) = \frac{1}{6}$$
e
$$\mathbb{P}_1(\{b\}) = \mathbb{P}_1(\{c\}) = \mathbb{P}_2(\{a\}) = \mathbb{P}_2(\{d\}) = \frac{1}{3}.$$
Tome $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$.

7. **Definição.** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que dois conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ são equivalentes se $\mathbb{P}(A \bigtriangleup B) = 0$. A classe de equivalência do envento A é dada por
$$[A] = \{B \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \bigtriangleup B) = 0\}.$$
Desta forma podemos decompor $\mathcal{F}$ em classes de equivalência.
Definição. Um átomo em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é definido como sendo um conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) > 0$ e se $B \subset A$ e $B \in \mathcal{F}$, então $\mathbb{P}(B) = 0$ ou $P(A \setminus B) = 0$. Além do mais o espaço de probabilidade é dito não-atômico se ele não possui átomos, isto é, se $A \in F$ e $P(A) > 0$ então existe pelo menos um evento $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset A$ e $0 < P(B) < P(A)$.

   a) Se $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$ é determinada por uma função distribuição F, mostre que os átomos são $\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x-) > 0\}$.
   b) Mostre que o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ((0, 1], \mathscr{B}((0, 1]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue, é não-atômico.
   c) Mostre que se A e B são átomos tais que $\mathbb{P}(A \bigtriangleup B) > 0$ então temos que $\mathbb{P}((A \cap B) \bigtriangleup \emptyset) = 0$.
   d) Um espaço de probabilidade contém no máximo uma quantidade enumerável de classes de equivalência de átomos.
   (Dica. Qual é o número máximo de átomos que o espaço pode conter tendo probabilidade pelo menos $1/n$?)
   e) Se um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ não contém átomos, então para todo $a \in (0, 1]$ existe pelo menos um conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(A) = a$.
   (Uma maneira de provar este fato é usando o Lema de Zorn.)

8. Suponha que $\{E_n\}$ é uma sequência de eventos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\mathbb{P}(E_n) = 1$. Mostre que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1$$

9. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma coleção de subconjuntos de Ω e que $B \subset \Omega$ é um evento satisfazendo $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Mostre que existe uma coleção enumerável $\mathcal{C}_B$ tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)$.
(Dica. Considere o conjunto $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega : \exists$ uma coleção enumerável $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)\}$ e mostre que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra contendo $\mathcal{C}$.)

10. Se $\{E_k\}$ é uma coleção de eventos tal que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) > n-1$$

então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n} E_n\right) > 0.$$

11. Mostre que se F é uma função distribuição, então F tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades.

12. Seja F uma função distribuição e considere as seguintes funções $G, H : (0,1) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$G(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : y \leq F(t)\} \quad \text{e} \quad H(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : y < F(t)\}$$

   a) Mostre que G é contínua a esquerda e que H é contínua a direita.
   b) $\lambda\{t \in (0,1] : G(t) \neq H(t)\} = 0$, onde λ é a medida de Lebesgue.

13. Suponha que F é uma função distribuição contínua em R. Mostre que F é uniformemente contínua.

14. Seja $\{E_n\}$ uma sequência de eventos e defina

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$$
$$\mathcal{S}_2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j)$$
$$\mathcal{S}_3 = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k)$$
$$\vdots$$

Mostre que a probabilidade $(1 \leq m \leq n)$

$$p(m) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} = m\right)$$

de m eventos ocorrerem é dada por

$$\begin{aligned} p(m) &= \mathcal{S}_{m+1} - \binom{m+1}{m}\mathcal{S}_{m+1} + \binom{m+2}{m}\mathcal{S}_{m+2} - \dots \\ &\quad +(-1)^{n-m}\binom{n}{m}\mathcal{S}_n \end{aligned}$$

15. **Medidas Regulares**. Considere o espaço de probabilidade $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k), \mathbb{P})$, onde $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ é a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^k$, isto é, a σ-álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}^k$. Um boreliano E é dito regular se satisfaz as seguintes condições:

$$\mathbb{P}(E) = \inf\{P(A) : E \subset A,\ A \text{ aberto}\}$$
e
$$\mathbb{P}(E) = \sup\{P(F) : F \subset E,\ F \text{ fechado}\}.$$

Dizemos que $\mathbb{P}$ é regular se todos os borelianos são regulares. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os conjuntos regulares.

a) Mostre que $\mathbb{R}^k, \emptyset \in \mathcal{C}$.

b) Mostre que a coleção $\mathcal{C}$ é fechada para complementação e união enumerável.

c) Seja $\mathscr{F}(\mathbb{R}^k)$ a coleção de todos os subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^k$. Mostre que $\mathscr{F}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{C}$.

d) Mostre que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \subset \mathcal{C}$, em outras palavras, mostre que $\mathbb{P}$ é regular.

e) Mostre que $\forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, temos $\mathbb{P}(E) = \sup\{\mathbb{P}(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}$.

16. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A \in \mathcal{F}$ um conjunto fixado. Mostre que a função definida em $\mathcal{F}$ dada por $E \mapsto \mathbb{P}(A \cap E)$ é uma medida.

17. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Suponha que $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ seja uma família de medidas de probabilidade definidas em $\mathcal{F}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais tais que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Mostre que

$$\mathbb{P} \equiv \lambda_1 \mathbb{P}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbb{P}_n$$

é uma medida de probabilidade.

18. Sejam $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\{a_n\}$ é uma sequência em $[0, +\infty]$. Defina $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E = \emptyset; \\ \displaystyle\sum_{n \in E} a_n, & \text{se } E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Mostre que μ é uma medida. Reciprocamente, mostre que toda medida μ definida em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pode ser obtida desta maneira para alguma sequência $\{a_n\}$ em $[0, +\infty]$.

19. Sejam $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Se E é finito seja $\mu(E) = 0$ e se E é infinito seja $\mu(E) = +\infty$. A função μ definida desta maneira é uma medida em $\mathcal{F}$?

20. Seja λ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

a) Se $\#E < +\infty$(cardinalidade de E), mostre que $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $\lambda(E) = 0$.

b) Se E é um conjunto enumerável, mostre que $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $\lambda(E) = 0$.

c) Seja A é um aberto de $\mathbb{R}$. Mostre que A é não-vazio se, e somente se, $\lambda(E) > 0$.

d) Mostre que se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto então $\lambda(K) < +\infty$.

21. Mostre que o conjunto de Cantor, do terço médio, pertence a σ-álgebra de Borel e que sua medida de Lebesgue é nula.

22. Fazendo uma adaptação na construção do conjunto de Cantor, obtenha um conjunto de medida de Lebesgue positiva que não possui intervalos abertos.

23. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $E, N \subset \Omega$ tais que $E \notin \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $E \subset N$ e $\mathbb{P}(N) = 0$. Mostre que a sequência de funções $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $f_n \equiv 0$, converge $\mathbb{P}$-quase certamente para 1_E. Assim limite quase certo de uma sequência de funções mensuráveis pode não ser mensurável.

Aula 6

Variáveis Aleatórias e Independência

6.1 Variáveis Aleatórias

Definição 6.1 (Variável Aleatória)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida e $\Lambda \in \mathcal{F}$. Uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F})$ (v.a.) é uma função $X : \Lambda \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que para todo $B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ temos*

$$\{\omega \in \Lambda : X(\omega) \in B\} \in \Lambda \cap \mathcal{F},$$

onde $\Lambda \cap \mathcal{F}$ denota a coleção de todos os subconjuntos de Ω da forma $\Lambda \cap F$ com $F \in \mathcal{F}$.

Observação 6.2. *A definição nesta generalidade é necessária por razões técnicas em algumas aplicações, mas para a discussão das propriedades básicas de variáveis aleatórias, podemos supor que $\Lambda = \Omega$.*

Exercício 6.3. *Suponha que $\Lambda = \Omega$ na Definição 6.1. Mostre que uma variável aleatória é uma função $\mathcal{F}$-mensurável tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$ no sentido da seção anterior.*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma variável aleatória então vamos usar a notação

$$\mathbb{P}(X \in B) \equiv \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}).$$

Vamos usar a abreviação v.a. para nos referir a uma variável aleatória, assim ao invés de escrever $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma variável aleatória, vamos escrever simplesmente X é uma v.a.. Quando $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ vamos dizer que X é uma v.a. real.

Proposição 6.4. *Se X uma v.a. real em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ então $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ dada por*

$$\mu(B) \equiv \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$$

é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Claramente $\mu(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Se $\{A_n\}$ é uma sequência de conjuntos mutuamente disjunta em $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ então $\{X^{-1}(A_n)\}$ é uma sequência mutuamente disjunta em Ω, portanto

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Já que $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, temos que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ e isto encerra a prova de que μ é uma medida de probabilidade. ■

A medida de probabilidade μ induzida pela v.a. real X, definida na proposição acima, é frequentemente denotada por

$$\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}.$$

Neste caso, a função distribuição F associada a medida μ é chamada **função distribuição de** X, mais especificamente

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Quando estivermos lidando com mais de uma v.a. usamos a notação F_X para indicar que estamos falando da função distribuição de X.

Teorema 6.5. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Se X é uma v.a. real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável (com respeito a σ-álgebra de Borel), então $f(X)$ é uma v.a. real.*

Demonstração. Segue das propriedades elementares de composição de função que $(f(X))^{-1}(A) = (f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}(f^{-1}(A))$. Logo

$$(f \circ X)^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = X^{-1}(f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))) = X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}.$$

O que completa a demostração. ■

6.2 Independência

Independência é uma propriedade básica de eventos e variáveis aleatórias em vários modelos de probabilidade. A definição deste conceito é motivada pelo raciocínio intuitivo de que a ocorrência ou não de um evento não afeta nossa estimativa da probabilidade que um evento independente ocorra ou não. Apesar deste conceito ter um apelo intuitivo é importante entender que independência em Teoria da Probabilidade é um conceito técnico com uma definição precisa e que deve ser verificada em cada modelo específico que estiver sendo estudado.

Certamente existem exemplos de eventos dependentes que nossa intuição nos diz que eles devem ser dependentes e exemplos que nossa intuição diz que não devem ser independentes, mas que satisfazem a definição. Assim devemos recorrer sempre a definição para termos certeza sobre a independência de determinados eventos.

Definição 6.6. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado. Os eventos A e B são ditos independentes se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Definição 6.7. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade fixado. Dizemos que os eventos* $A_1, \ldots, A_n$ *são independentes se*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i), \qquad \forall I \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Deve se observar que a condição de independência de eventos $A_1, \ldots, A_n$ envolve a verificação de

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

equações.

Definimos em seguida, o conceito de independência de uma quantidade finita de coleções de subconjuntos de um espaço de probabilidade. Em grande parte das aplicações vamos usar este conceito com cada coleção sendo uma σ-álgebra de conjuntos de Ω.

Definição 6.8. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade fixado e* $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$ *coleções de eventos. Dizemos que as coleções* $\mathcal{C}_i$*'s são independentes se para qualquer escolha de* $A_1, \ldots, A_n$, *com* $A_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *temos que os eventos* $A_1, \ldots, A_n$ *são eventos independentes.*

Prosseguimos apresentando um critério bastante útil para provar independência de uma quantidade finita de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Devido a sua importância nesta seção, vamos apresentá-lo na forma de um teorema.

Teorema 6.9. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade fixado. Se* $\mathcal{C}_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$ *é uma coleção (não vazia) de* **eventos** *tais que*

1. $\mathcal{C}_i$ *é um* π*-sistema;*

2. $\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ *são independentes,*

então $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ *são independentes.*

Demonstração. A prova deste teorema será feita por indução no número de coleções. Primeiro mostramos que a tese do teorema se verifica para o caso $n = 2$. Fixe $A_2 \in \mathcal{C}_2$ e defina

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \cap A_2) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2)\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{L}$ é um λ-sistema. De fato, primeiramente temos que $\Omega \in \mathcal{L}$ pois, $\mathbb{P}(\Omega \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(A_2)$. A coleção $\mathcal{L}$ é fechada para complementação pois, para qualquer $A \in \mathcal{L}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c \cap A_2) &= \mathbb{P}((\Omega \setminus A) \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2 \setminus (A \cap A_2)) \\
&= \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2)(1 - \mathbb{P}(A))
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A^c).$$

O que mostra que $A^c \in \mathcal{L}$. Para encerrar a prova da afimarção resta mostrar que se $\{B_n\}$ uma coleção dois a dois disjunta em $\mathcal{L}$ então $\cup_{i=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$. Este fato segue das seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_2 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_2 \cap B_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_2 \cap B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}(A_2) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).
\end{aligned}$$

Por hipótese $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{L}$ e é um π-sistema. Como mostramos que $\mathcal{L}$ é um λ-sistema podemos aplicar o Teorema de Dynkin para concluir que $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{L}$. Como A_2 é arbitrário em $\mathcal{C}_2$ temos mostrado neste momento que as coleções $\sigma(\mathcal{C}_1)$ e $\mathcal{C}_2$ são independentes.

Agora fixamos $A_1 \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. De maneira análoga definimos

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \cap A_1) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_1)\}$$

e podemos verificar que está coleção é um λ-sistema. Como vimos acima, $\sigma(\mathcal{C}_1)$ e $\mathcal{C}_2$ são independentes logo $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{K}$. Usando novamente o Teorema de Dynkin completamos a prova do caso $n = 2$.

Claramente o passo de indução pode ser feito utilizando a técnica apresentada acima e assim o teorema está provado. ■

Definição 6.10 (Coleções Independentes)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* I *um conjunto de índices arbitrário. As coleções (de eventos)* $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ *são independentes se para todo* $J \subset I$ *finito, temos que as coleções* $\{\mathcal{C}\}_{j \in J}$ *são independentes.*

Corolário 6.11. *Se* $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ *é uma coleção de* π*-sistemas não-vazios e independentes, então* $\{\sigma(\mathcal{C}_i)\}_{i \in I}$ *são* σ*-álgebras independentes.*

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

Nesta seção apresentamos um dos conceitos mais importantes deste curso que é o de v.a.'s independentes. Também são apresentados nesta seção alguns critérios para independência de v.a.'s.

Definição 6.12 (σ-álgebra Induzida por uma v.a.)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de mensurável e X uma v.a. definida Ω. A σ-álgebra induzida por X, notação, $\sigma(X)$ é definida como sendo a sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ dada por*

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})\}.$$

Definição 6.13 (Variáveis Aleatórias Independentes)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado e T um conjunto arbitrário de índices. Uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t\in T}$ é dita independente se a coleção de σ-álgebras $\{\sigma(X_t)\}_{t\in T}$ é independente.*

Segundo nossa definição uma coleção de v.a.'s é independente se as σ-álgebras induzidas por elas são independentes. Um caso particular interessante deste conceito é dado por uma coleção de funções indicadoras de determinados eventos. Primeiro observe, para qualquer evento A, que

$$\sigma(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}.$$

Assim as v.a.'s $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ são independentes, se e somente se, $A_1, \ldots, A_n$ são eventos independentes.

Apresentamos abaixo um critério para independência de v.a.'s em termos de suas funções distribuição. Antes porém, vamos introduzir algumas notações.

Fixe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, um conjunto de índices T e uma família de v.a.'s $\{X_t\}_{t\in T}$. Para cada $J \subset T$ finito definimos

$$F_J(x_j, j \in J) \equiv \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j \le x_j\}\right).$$

Teorema 6.14. *Fixe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um conjunto arbitrário de índices T. Uma família de v.a.'s $\{X_t\}_{t\in T}$ é independente se, e somente se, para todo subconjunto $J \subset T$ finito temos que*

$$F_J(x_j, j \in J) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j \le x_j) \qquad \forall x_j \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Demonstração. Para demonstrar o teorema é suficiente provar que para todo subconjunto **finito** $J \subset T$ temos que as v.a.'s $\{X_j\}_{j\in J}$ são independentes se, e somente se, vale a condição (6.1).

Para cada $j \in J$, defina

$$\mathcal{C}_j = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{X_j \le x\}.$$

É imediato verificar que $\mathcal{C}_j$ é um π-sistema e que $\sigma(\mathcal{C}_j) = \sigma(X_j)$. Observe que a condição (6.1) é equivalente a dizer que $\{\mathcal{C}_j\}_{j\in J}$ é uma coleção de eventos independentes e portanto segue do Teorema 6.9 que as σ-álgebras $\{\sigma(\mathcal{C}_j) = \sigma(X_j)\}_{j\in J}$ são independentes. ∎

Corolário 6.15. *Uma coleção finita de v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é independente se, e somente se,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j\}\right) \equiv \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 6.16 (Variável Aleatória Discreta)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma v.a. X é discreta se $X(\Omega)$ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$.*

Corolário 6.17. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X_1, \ldots, X_n$ uma coleção de v.a.'s* **discretas** *com conjunto imagem comum igual a $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. Sob estas condições a coleção $X_1, \ldots, X_n$ é independente se, e somente se,*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n. \tag{6.2}$$

Demonstração. Supondo que $X_1, \ldots, X_n$ é uma família de v.a.'s independentes temos que $\sigma(X_i), i = 1, \ldots, n$ é uma coleção de σ-álgebras independentes. Já que $\{X_i = x_i\} \in \sigma(X_i)$ temos que $\{X_i = x_i\}, i = 1, \ldots, n$ são eventos independentes e assim a condição 6.2 é satisfeita.

Por questão de simplicidade vamos mostrar a recíproca para o caso $n = 2$. A prova para o caso geral é obtida de maneira análoga. Sejam (z_1, z_2) e (x_1, x_2) vetores em $\mathbb{R}^2$. Considere a seguinte relação de ordem parcial em $\mathbb{R}^2$, $(z_1, z_2) \preceq (x_1, x_2)$ se $z_1 \leq x_1$ e $z_2 \leq x_2$. Usando a condição 6.2 temos para qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \leq x_1,\, X_2 \leq x_2) &= \sum_{\substack{(z_1,z_2) \preceq (x_1,x_2) \\ (z_1,z_2) \in \mathcal{R}^2}} \mathbb{P}(X_1 = z_1,\, X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{(z_1,z_2) \preceq (x_1,x_2) \\ (z_1,z_2) \in \mathcal{R}^2}} \mathbb{P}(X_1 = z_1)\mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{z_1 \leq x_1 \\ z_1 \in \mathcal{R}}} \sum_{\substack{z_2 \leq x_2 \\ z_2 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_1 = z_1)\mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{z_1 \leq x_1 \\ z_1 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_1 = z_1) \sum_{\substack{z_2 \leq x_2 \\ z_2 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1)\mathbb{P}(X_2 \leq x_2).
\end{aligned}$$

Usando o corolário anterior segue que X_1 e X_2 são independentes. ∎

6.4 O Teorema de Renyi

O objetivo desta seção é apresentar um exemplo interessante onde aparecem variáveis aleatórias independentes bem como alguns cálculos explícitos de eventos associados a elas. Este exemplo é conhecido como Teorema de Renyi e antes de passarmos à sua prova vamos provar um lema sobre v.a.'s iid com distribuição contínua, em seguida introduzimos algumas notações e depois enunciamos e provamos o Teorema de Renyi

Lema 6.18. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $\{X_n\}$ *uma sequência de variáveis aleatórias iid com função distribuição* **contínua** *comum dada por* F*. Então para todo* $i \neq j$ *temos que*

$$\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0.$$

Demonstração. Para fixar as ideias vamos provar o lema para o caso $i = 1$ e $j = 2$, isto é, $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$. Primeiro observe que temos para todo $n \in \mathbb{N}$ a seguinte continência de conjuntos

$$\{X_1 = X_2\} \subset \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k-1}{2^n} < X_1 \leq \frac{k}{2^n} \right\} \cap \left\{ \frac{k-1}{2^n} < X_2 \leq \frac{k}{2^n} \right\}$$

Usando a monotonicidade e subaditividade da medida de probabilidade $\mathbb{P}$ e a independência de X_1 e X_2 temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = X_2) &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{k-1}{2^n} < X_1 \leq \frac{k}{2^n} \right\} \cap \left\{ \frac{k-1}{2^n} < X_2 \leq \frac{k}{2^n} \right\} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{ \frac{k-1}{2^n} < X_1 \leq \frac{k}{2^n} \right\} \right)^2.\end{aligned}$$

Como X_1 tem função distribuição F o lado direito da desigualdade acima é igual

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right)^2$$

que por sua vez é cotado superiormente por

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right)$$

Usando um argumento telescópico e que F é uma função de distribuição podemos verificar que a soma acima é majorada por 1. Juntando todas estas estimativas temos

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right).$$

Usando novamente que F é uma função distribuição e contínua podemos afirmar que F é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$, daí dado $\varepsilon > 0$ para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$ temos que

$$F\left(\frac{k}{2^n}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^n}\right) < \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

e portanto segue que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, o lema está provado. ∎

Considere uma sequência $\{X_n\}$ de v.a.'s iid com distribuição contínua F em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que há um "empate" entre estas v.a.'s em $\omega \in \Omega$ se temos que $X_i(\omega) = X_j(\omega)$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Vamos usar a notação simplificada

$$\{\text{Empate}\} = \bigcup_{i \neq j} \{X_i = X_j\}.$$

Usando o lema anterior e a subaditividade de $\mathbb{P}$ podemos ver imediatamente que $\mathbb{P}(\{\text{Empate}\}) = 0$. Fixado $\omega \in \Omega$ vamos dizer que $X_n(\omega)$ é um recorde (entre $X_1(\omega), \ldots, X_{n-1}(\omega)$) se

$$X_n(\omega) > \max\{X_1(\omega), \ldots, X_{n-1}(\omega)\}.$$

Para facilitar vamos denotar o evento

$$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) > \max\{X_1(\omega), \ldots, X_{n-1}(\omega)\}\}$$

por $\{X_n$ é um recorde $\}$ ou simplesmente A_n. O Teorema de Renyi entre outras coisas afirma que os eventos $\{A_n\}$ são independentes e também que

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{j} \qquad \forall\ j \geq 2.$$

De maneira mais geral, podemos definir o ranque relativo de X_n que é v.a. dada por

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_j \geq X_n\}}.$$

Note que $R_n = 1$ se, e somente se, X_n é um recorde. Quando $R_n = 2$ temos que X_n é o segundo maior valor entre $X_1, \ldots, X_n$ e assim por diante.

Teorema 6.19. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Suponha que $\{X_n\}$ seja uma sequência iid com distribuição contínua F.*

a) A sequência de v.a's $\{R_n\}$ é independente e

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 2 \ e \ k = 1, \ldots, n.$$

b) A sequência de eventos $\{A_n\}$ é independente e

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 2.$$

Demonstração. Observe que o item b) é uma consequência imediata do item a) já que $A_n = \{R_n = 1\}$.

Seguimos com a prova do item a). Usando o Lema 6.18 temos, com probabilidade um, que existem exatamente $n!$ ordenamentos das v.a.'s $X_1, \dots, X_n$, isto é, se $\omega \in \Omega$ é escolhido no conjunto de probabilidade um dado pelo Lema 6.18 então uma das $n!$ alternativas ocorrem $X_{\sigma(1)}(\omega) < X_{\sigma(2)}(\omega) < \dots < X_{\sigma(n)}(\omega)$, onde σ é uma permutação arbitrária do conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Exercício 6.20. *Sob as hipóteses do teorema prove que*

$$\mathbb{P}(X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \dots < X_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!} \qquad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n,$$

onde $\mathbb{S}_n$ *é o grupo de permutações de* n *símbolos.*

Observamos que cada realização de $R_1, \dots, R_n$ determina uma ordenação, por exemplo, se $n = 3$ e $R_1(\omega) = 1$, $R_2(\omega) = 1$ e $R_3(\omega) = 1$ temos que $X_1(\omega) < X_2(\omega) < X_3(\omega)$. Se $R_1(\omega) = 1$, $R_2(\omega) = 2$ e $R_3(\omega) = 3$, então temos que $X_3(\omega) < X_2(\omega) < X_1(\omega)$. Por causa da correspondência citada acima para todo $r_i = 1, \dots, i$, com $i = 1, \dots, n$ temos

$$\mathbb{P}(R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n) = \frac{1}{n!}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_n = r_n) &= \sum_{r_1,\dots,r_{n-1}} \mathbb{P}(R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n)\\ &= \sum_{r_1,\dots,r_{n-1}} \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Já que cada $i = 1, \dots, n$ temos $1 \leq r_i \leq i$, segue que a soma acima possui exatamente $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n - 1 = (n-1)!$ termos. Logo

$$\mathbb{P}(R_n = r_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Esta igualdade juntamente com o Corolário 6.17 implica que as variáveis aleatórias $\{R_i\}$ são independentes, pois para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 = r_1, \dots R_n = r_n) &= \frac{1}{n!}\\ &= \mathbb{P}(R_1 = r_1)\mathbb{P}(R_2 = r_2)\mathbb{P}(R_3 = r_3) \dots \mathbb{P}(R_n = r_n).\end{aligned}$$

■

Aula 7

Independência e Leis Zero-Um

7.1 Expansões Diádicas de Números Aleatórios Distribuídos Uniformemente

Apresentamos nesta seção outro exemplo interessante de v.a.'s independentes. Desta vez nosso espaço de probabilidade será $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \Big((0,1], \mathscr{B}((0,1]), \lambda\Big)$, onde λ é a medida de Lebesgue em $(0,1]$.

Para definir a v.a.'s que estamos interessados, precisamos fazer primeiro algumas observações. Para cada $\omega \in (0,1]$ existem números $d_n(\omega) \in \{0,1\}$, com $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n}.$$

Observamos que os números $d_n(\omega)$ na igualdade acima não são unicamente determinados por ω. Por exemplo, para $\omega = 1/2$ temos

$$\frac{1}{2} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \ldots.$$

Um fato importante é que este é o único tipo de não unicidade que ocorre na expansão diádica de um número no intervalo $(0,1]$. Este fato permite fazer uma escolha apropriada de forma que $d_n : \Omega \to \{0,1\}$ seja de fato uma função. Esta escolha é feita da seguinte maneira: sempre que ω admitir mais de uma expansão diádica, seja $d_n(\omega)$ o n-ésimo digito da expansão diádica de ω que termina em uma sequência infinita de uns consecutivos. Esta escolha no exemplo acima determina uma única expansão diádica para $1/2$ que é dada por $d_1(1/2) = 0$ e $d_n(1/2) = 1$, para todo $n \geq 2$.

Proposição 7.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $d_n : \Omega \to \{0,1\}$ como definida acima é uma variável aleatória.*

Demonstração. Como d_n assume apenas dois valores, para provar a proposição basta mostrar que

$$\{d_n = 0\} \in \mathscr{B}((0,1]) \qquad \text{e} \qquad \{d_n = 1\} \in \mathscr{B}((0,1]),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Já que $\{d_n = 0\} = \{d_n = 1\}^c$, é suficiente mostrar que $\{d_n = 1\} \in \mathscr{B}((0,1])$.

Para ajudar na compreensão do argumento mostramos qual é a ideia da prova em um caso mais simples, onde $n = 1$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}\{d_n = 1\} &= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \dots \quad , \quad \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}, 1\right] \in \mathscr{B}((0,1]).\end{aligned}$$

Observe que o intervalo acima é aberto no extremo esquerdo por causa da escolha que fizemos da expansão e portanto $1/2 \in \{d_1 = 0\}$.

Para $n \geq 2$ temos que

$$\begin{aligned}\{d_n = 1\} = \bigcup_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} &\left(\frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{0}{2^{n+1}} + \frac{0}{2^{n+2}} + \dots\right. \\ &\left., \frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots\right].\end{aligned}$$

O lado direito da igualdade acima é uma união disjunta de 2^{n-1} intervalos e portanto este conjunto pertence a $\mathscr{B}((0,1])$.

Por exemplo,

$$\{d_2 = 1\} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right].$$

■

Proposição 7.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\lambda(\{d_n = 1\}) = 1/2$.*

Demonstração. Usando a representação obtida na proposição acima e a aditividade de λ temos que

$$\begin{aligned}\lambda(\{d_n = 1\}) = \lambda\Bigg(\bigcup_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} &\left(\frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{0}{2^{n+1}} + \dots\right. \\ &\left., \frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots\right]\Bigg).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= \sum_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} \lambda\Bigg(&\left(\frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{0}{2^{n+1}} + \dots\right. \\ &\left., \frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \dots + \frac{u_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots\right]\Bigg)\end{aligned}$$

$$= \sum_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{(u_1,\dots,u_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} \frac{1}{2^{n+1}(1 - 1/2)} = \frac{1}{2}.$$

■

Proposição 7.3. *A sequência $\{d_n\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid no espaço de probabilidade* $\Big((0,1], \mathscr{B}((0,1]), \lambda\Big)$.

Demonstração. Já que d_n assume apenas os valores 0 e 1 segue da proposição anterior que $\{d_n\}$ é identicamente distribuída. Portanto basta provar que esta sequência é independente. Para isto é suficiente mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ as variáveis aleatórias $\{d_1, \ldots, d_n\}$ são independentes.

Note que para qualquer $(u_1, \ldots, u_n) \in \{0,1\}^n$ temos

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{d_i = u_i\} = \Bigg(\frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \ldots + \frac{u_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{0}{2^{n+2}} + \frac{0}{2^{n+3}} + \ldots \\ , \frac{u_1}{2^1} + \frac{u_2}{2^2} + \ldots + \frac{u_n}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \ldots\Bigg].$$

Como a medida de Lebesgue de um intervalo é seu comprimento temos que

$$\lambda\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{d_i = u_i\}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} = \prod_{i=1}^{n} \lambda(\{d_i = u_i\}),$$

onde na última igualdade usamos o lema anterior. Agora para concluir que $d_1, \ldots, d_n$ são independentes basta aplicar o Corolário 6.17. Como n é arbitrário segue que a sequência $\{d_n\}$ é independente. ∎

7.2 Agrupamentos de v.a.'s Independentes

É possível agrupar variáveis aleatórias independentes e eventos independentes, criando partições no conjunto que indexa estas variáveis ou eventos. Está é uma propriedade muito útil da independência.

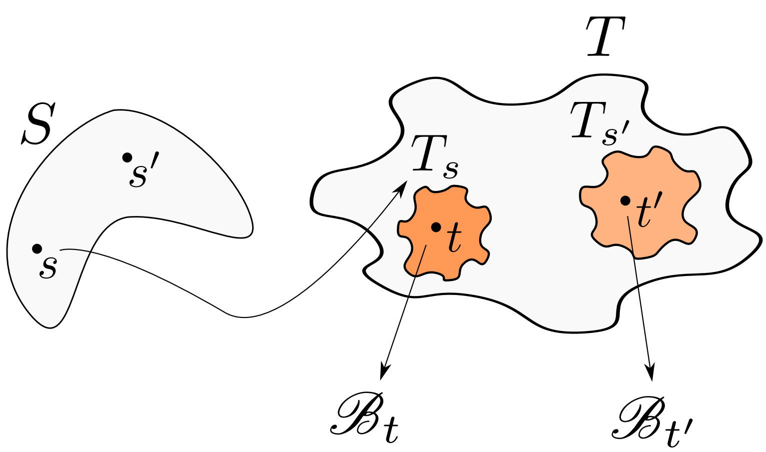

Figura 7.1: Lema do Agrupamento.

Lema 7.4 (Lema do Agrupamento)**.** *Sejam T um conjunto arbitrário de índices e $\{\mathscr{B}_t,\ t \in T\}$ uma família de σ-álgebras independentes. Seja S um conjunto de índices e suponha que para cada $s \in S$ temos $T_s \subset T$ e $\{T_s,\ s \in S\}$ seja uma coleção mutuamente disjunta. Defina*

$$\mathscr{B}_{T_s} = \sigma\left(\bigcup_{t \in T_s} \mathscr{B}_t\right).$$

Então $\{\mathscr{B}_{T_s},\ s \in S\}$ é uma família independente de σ-álgebras.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que S é finito. Defina

$$\mathcal{C}_{T_s} \equiv \left\{\bigcap_{t \in K} B_t :\ B_t \in \mathscr{B}_t,\ K \subset T_s,\ K \text{ finito}\right\}.$$

Por definição temos que $\mathcal{C}_{T_s}$ é um π-sistema para cada $s \in S$ e além do mais estes π-sistemas $\{\mathcal{C}_{T_s}, s \in S\}$ são independentes.

Observe que $\mathcal{C}_{T_s} \subset \mathscr{B}_{T_s}$ e por definição de σ-álgebra gerada que $\sigma(\mathcal{C}_{T_s}) \subset \mathscr{B}_{T_s}$. Segue da definição de $\mathcal{C}_{T_s}$, tomando $K = \{t\}$, que para todo $t \in T_s$, é verdadeira a seguinte continência $\mathscr{B}_t \subset \mathcal{C}_{T_s}$. Daí segue que $\mathscr{B}_t \subset \sigma(\mathcal{C}_{T_s})$, para todo $t \in T_s$. Assim podemos concluir que

$$\bigcup_{t \in T_s} \mathscr{B}_t \subset \sigma(\mathcal{C}_{T_s}).$$

O que implica novamente pela definição de σ-álgebra gerada que

$$\mathscr{B}_{T_s} \equiv \sigma\left(\bigcup_{t \in T_s} \mathscr{B}_t\right) \subset \sigma(\mathcal{C}_{T_s}).$$

Usando a observação do início do paragrafo temos que $\sigma(\mathcal{C}_{T_s}) = \mathscr{B}_{T_s}$. Para finalizar a prova basta agora aplicar o Teorema 6.9. ■

7.3 Lema de Borel Cantelli

O Lema de Borel-Cantelli é um resultado muito simples de ser obtido mas é uma ferramenta básica na obtenção de convergência quase certa em várias situações.

Lema 7.5 (Lema de Borel-Cantelli)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência arbitrária de eventos. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ então*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0.$$

Demonstração. Usando a definição de $\limsup$, a continuidade de $\mathbb{P}$, a subaditividade e a hipótese de convergência da série, obtemos

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \to \infty} \bigcup_{j \geq n} A_j\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geq n} A_j\right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 7.6. *Suponha que $\{X_n\}$ sejam v.a.'s de Bernoulli com $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$. Observe que não estamos supondo que $\{X_n\}$ é uma sequência independente e nem identicamente distribuídas. Afirmamos que se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ então*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1.$$

De fato, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty,$$

então segue do Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(\limsup\{X_n = 1\}) = 0$. Tomando complementar ficamos com

$$1 = \mathbb{P}(\liminf\{X_n = 1\}^c) = \mathbb{P}(\liminf\{X_n = 0\}).$$

Por definição do $\liminf$ *temos para todo*

$$\omega \in \liminf_{n\to\infty}\{X_n = 0\} = \bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{X_n = 0\}$$

que existe $k = k(\omega)$ tal que $\omega \in \bigcap_{n\geq k(\omega)}\{X_n = 0\}$, isto é, $X_n(\omega) = 0$ para todo $n \geq k(\omega)$ mostrando que $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$. Como este fato vale para ω em um conjunto de probabilidade um, a afirmação está provada.

7.4 Lei Zero-Um de Borel

Uma importante característica do Lema de Borel-Cantelli, provado na seção anterior, é não exigir a hipótese de independência dos eventos $\{A_n\}$. Nesta seção adicionando a hipótese de independência vamos provar vamos caracterizar completamente o valor de $P(\limsup A_n)$ em termos da série de $\mathbb{P}(A_n)$. Antes de provar este resultado de caracterização, vamos apresentar uma desigualdade básica envolvendo funções reais. Esta desigualdade é formulada no seguinte lema.

Lema 7.7. *Para todo $x \in (0,1)$ temos que*

$$1 - x \leq e^{-x}.$$

Demonstração. Para todo $x \in (0,1)$ podemos obter através da integração termo a termo da série geométrica $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 1/(1-x)$ a seguinte igualdade

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Já que $0 < x < 1$ podemos desprezar os termos da série acima de ordem maior ou igual que dois obtendo a seguinte desigualdade

$$x \leq -\ln(1-x) \Longrightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x} \Longrightarrow 1 - x \leq e^{-x}.$$

■

Teorema 7.8 (Lei Zero-Um de Borel)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência de eventos independentes, então*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \begin{cases} 0, & \text{se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty; \\ 1, & \text{se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Do Lema de Borel-Cantelli segue que se $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ então $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_n^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_n^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\lim_{m\to\infty} \bigcap_{k=n}^{m} A_n^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_n^c\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_n)),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a independência. Resta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = 0. \tag{7.1}$$

Do Lema 7.7 e da hipótese de divergência, temos, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_n)} &= \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_n)} \\
&= e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)} \\
&= e^{-\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como o limite acima é independente de n podemos concluir que (7.1) é verdadeiro e portanto o teorema está provado. ■

Exemplo 7.9 (Continuação)**.** *Suponha que* $\{X_n\}$ *sejam v.a.'s de Bernoulli independentes com* $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$*. Afirmamos que*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Para verificar que a afirmação é verdadeira basta notar que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Aula 8

Lei Zero-Um de Komolgorov

8.1 Uma Propriedade de Sequências de v.a.'s Exponenciais Independentes

Nesta seção vamos assumir que $\{X_n\}$ é uma sequência de v.a.'s iid com distribuição exponencial de parâmetro 1, isto é, $X_n \geq 0$ e

$$\mathbb{P}(X_n > x) = e^{-x}.$$

O objetivo desta seção é provar que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1. \tag{8.1}$$

Este resultado é as vezes considerado surpreendente. Esta tendência está associada ao erro comum que alguns matemáticos cometem pensando que sequências iid são "moralmente constantes" e portanto a divisão por $\log n$ deveria fazer com que o limite fosse zero. Entretanto muito frequentemente a sequência $\{X_n\}$ toma valores que vão aumentando com o índice e este aumento é aproximadamente dado por $\log n$.

Para provar este resultado vamos precisar de um fato bastante simples que se $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ então $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$, veja Lista 1 de exercícios.

Prova de (8.1) . Se $\omega \in \Omega$ é tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n(\omega)}{\log n} = 1,$$

isto significa que

a) para todo $\varepsilon > 0$ temos que se $n \geq n_0 \equiv n_0(\omega)$ então $\dfrac{X_n(\omega)}{\log n} \leq 1 + \varepsilon$.

b) para todo $\varepsilon > 0$ para infinitos valores de n temos que $1 - \varepsilon < \dfrac{X_n(\omega)}{\log n}$.

Observe que o item a) diz que não existe nenhuma subsequência com limite maior que $1+\varepsilon$ enquanto b) diz que sempre existe uma subsequência limitada inferiormente por $1-\varepsilon$.

Para qualquer sequência $\varepsilon_k \downarrow 0$, note que temos a seguinte igualdade de conjuntos

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right\}$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{X_n}{\log n} \leq 1+\varepsilon_k\right\}\right] \quad \bigcap \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{X_n}{\log n} > 1-\varepsilon_k\right\}\right].$$

Para provar que o lado direito acima tem probabilidade um, basta mostrar que cada um dos eventos entre colchetes tem probabilidade um.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ fixado temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1-\varepsilon_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n > (1-\varepsilon_k)\log n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-(1-\varepsilon_k)\log n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\varepsilon_k}} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que k está fixado. Assim segue da Lei Zero-Um de Borel que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{X_n}{\log n} > 1-\varepsilon_k\right\}\right) = 1.$$

De maneira análoga podemos verificar que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{\log n} > 1+\varepsilon_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X_n > (1+\varepsilon_k)\log n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-(1+\varepsilon_k)\log n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon_k}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente a Lei Zero-Um de Borel temos que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{X_n}{\log n} > 1+\varepsilon_k\right\}\right) = 0.$$

Tomando complementar obtemos

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{X_n}{\log n} \leq 1+\varepsilon_k\right\}\right) = 1.$$

O que encerra a demonstração.

8.2 Vetores Aleatórios em $\mathbb{R}^n$

Se consideramos $\mathbb{R}^n$ como um espaço munido de uma topologia τ então a σ-álgebra de Borel é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos, isto é, $\sigma(\tau)$. Nos interessa apenas o caso onde τ é induzida pela métrica euclidiana e neste caso a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}^n$ é σ-álgebra gerada pela coleção dos retângulos da forma

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \equiv \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; a_i < x_i < b_i, \; i = 1, \ldots, n\},$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Esta σ-álgebra será denotada por $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 8.1 (Vetor Aleatório)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Um vetor aleatório é uma aplicação $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, tal que para todo boreliano $E \in \mathbb{R}^n$ temos que $\mathbf{X}^{-1}(E) \in \mathcal{F}$.*

Exercício 8.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathbf{X}$ um vetor aleatório em $\mathbb{R}^n$. Mostre que para qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que $\mathbf{X}^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathbf{X}^{-1}(\mathcal{C}))$*

Segue do exercício acima que uma aplicação $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se, e somente se, $\mathbf{X}^{-1}(R) \in \mathcal{F}$ para todo retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$.

Proposição 8.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma aplicação $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ é um vetor aleatório, se e somente se, $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots n$ é uma v.a. real.*

Demonstração. Vamos supor que $\mathbf{X}$ é um vetor aleatório. Considere as projeções $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ e seja $I = (-\infty, a)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Já que $X_i = \pi_i \circ \mathbf{X}$, temos que

$$X_i^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \mathbf{X}^{-1}\Big(\pi_i^{-1}\big((-\infty, a)\big)\Big).$$

Já que $\pi_i^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times (-\infty, a) \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{X}^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{F}$ temos que que X_i é variável aleatória.

Para provar a recíproca primeiro lembramos que a σ-álgebra dos gerada pelos retângulos abertos é igual a $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Portanto segue do comentário que está logo acima do enunciado desta proposição que é suficiente provar que $\mathbf{X}^{-1}(R) \in F$ para todo retângulo R em $\mathbb{R}^n$.

Supondo que $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias e fixando um retângulo aberto R da forma $R = I_1 \times \ldots \times I_n$, onde $I_j = (a_j, b_j)$ com $a_j < b_j$ temos que

$$\mathbf{X}^{-1}(R) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(I_j).$$

Já que estamos assumindo que X_j para todo $j = 1, \ldots, n$ é v.a. então $X_j^{-1}(I_j) \in \mathcal{F}$, logo $\mathbf{X}^{-1}(R) \in \mathcal{F}$, como R é um retângulo arbitrário segue da observação feita acima que a prova está concluída. ∎

8.3 Caracterização de $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$

Teorema 8.4. *Sejam $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X_1,\ldots,X_n$ variáveis aleatórias* **simples**. *Então*

a) A σ-álgebra $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ consiste exatamente dos conjuntos da forma

$$\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}\equiv\{\omega\in\Omega;(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))\in H\},$$

onde $H\subset\mathbb{R}^n$. Observamos que nesta representação, podemos considerar apenas H's finitos.

b) Uma variável aleatória Y é mensurável segundo $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ se, e somente se, $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$ para alguma função $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Demonstração. Prova do item a). Seja $\mathcal{C}$ a coleção de todos os conjuntos da forma $\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}$, quando H varia sobre todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Dentre este subconjuntos estão todos da forma $\{(X_1,\ldots,X_n)=(x_1,\ldots,x_n)\}=\cap_{i=1}^n\{X_i=x_i\}$, que certamente pertencem a $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$. Como $X_1,\ldots,X_n$ são v.a.'s simples, segue que os conjuntos da forma $\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}$, com $H\in\mathbb{R}^n$ são uniões finitas de elementos de $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$. Portanto $\mathcal{C}\subset\sigma(X_1,\ldots,X_n)$.

Por outro lado, temos que $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra, pois:

- $\{(X_1,\ldots,X_n)\in\mathbb{R}^n\}=\Omega$;
- $\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}^c=\{(X_1,\ldots,X_n)\in H^c\}$;
- $\big\{(X_1,\ldots,X_n)\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n\big\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(X_1,\ldots,X_n)\in H_n\}$.

Observamos que cada X_i é mensurável com respeito a $\mathcal{C}$. De fato, $\{X_i=x\}$ pode ser expresso como uma união finita de conjuntos da forma $\{(X_1,\ldots,X_n)=(x_1,\ldots,x_n)\}$, com $x_i=x$. Logo $\sigma(X_1,\ldots,X_n)\subset\mathcal{C}$, o que junto com a continência demonstrada acima implica que $\sigma(X_1,\ldots,X_n)=\mathcal{C}$.

A última observação do item a) segue do seguinte fato. A coleção formada por $\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}$, onde H varia sobre todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ é igual a coleção $\cup_{j=1}^r\{(X_1,\ldots,X_n)\in H_j\}$, onde $H_1,\ldots,H_r$ são todos os pontos do conjunto imagem do vetor $(X_1,\ldots,X_n)$. Por isto basta considerar H's finitos.

Prova do item b). Suponha, para todo $\omega\in\Omega$, que $Y(\omega)=f(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$ para alguma função $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Já $\{Y=y\}$ pode ser escrito na forma $\{(X_1,\ldots,X_n)\in H\}$, onde $H=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ f(x_1,\ldots,x_n)=y\}$ segue que Y é mensurável segundo $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$.

Reciprocamente, assuma que Y é $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$-mensurável. Seja $y_1,\ldots,y_r$ todos os valores que a variável aleatória Y assume. Pelo item a) podemos afirmar que existem $H_1,\ldots,H_r\subset\mathbb{R}^n$ tais que

$$\{\omega\in\Omega;\ Y(\omega)=y_i\}=\{\omega\in\Omega;\ (X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))\in H_i\}.$$

Agora defina a seguinte função $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^r y_i 1_{H_i}(x_1,\ldots,x_n).$$

Embora *a priori* não seja claro que $H_1, \ldots, H_r$ são mutuamente disjuntos, temos que se $\omega \in \Omega$ é tal que $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in H_i \cap H_j$ para $i \neq j$, então $Y(\omega) = y_i$ e $Y(\omega) = y_j$ o que é impossível. Portanto cada ponto da forma $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ pertence a exatamente um dos conjuntos H_i's e deste fato segue que $f(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = Y(\omega)$. ■

Teorema 8.5. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias, então*

a) A σ-álgebra $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ consiste exatamente dos conjuntos da forma

$$\{(X_1, \ldots, X_n) \in E\} \equiv \{\omega \in \Omega; (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in E\},$$

onde $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

b) Uma variável aleatória Y é mensurável segundo $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ se, e somente se, $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ para alguma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borel mensurável, isto é, $f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Prova do item a). A coleção $\mathcal{C}$ de todos os subconjuntos de Ω da forma $\{(X_1, \ldots, X_n) \in E\}$, onde $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ é uma σ-álgebra. A prova deste fato é análoga a dada na prova do item a) do teorema anterior. Pela Proposição 8.3 temos que a aplicação $\omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ é mensurável segundo a σ-álgebra $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Logo $\mathcal{C} \subset \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Como $\omega \mapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ é claramente mensurável segundo $\mathcal{C}$ segue que $\sigma(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathcal{C}$ e portanto o item a) está provado.

Prova do item b). Se $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ então $Y = f \circ \mathbf{X}$, onde $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. Desta forma para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos que $Y^{-1}(B) = \mathbf{X}^{-1}(f^{-1}(B)) = \mathbf{X}^{-1}(E)$ que pelo item a) implica imediatamente que a v.a. Y é $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-mensurável.

Para provar a recíproca, suponha inicialmente que Y é uma variável aleatória simples assumindo os valores $y_1, \ldots, y_m$. Por hipótese temos que $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Pelo item a) temos que $A_i = \{(X_1, \ldots, X_n) \in E_i\}$ para algum boreliano E_i de $\mathbb{R}^n$. Defina a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} y_i 1_{E_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Note que f é Borel mensurável. Já que os conjuntos A_i's são disjuntos nenhum ponto de $\mathbb{R}^n$ da forma $\mathbf{X}(\omega)$ pertence a mais de um E_i (observe que não estamos afirmando que os conjuntos E_i's são mutuamente disjuntos) e portanto temos $f(\mathbf{X}(\omega)) = Y(\omega)$.

Para provar o teorema no caso geral lembramos que se Y é uma v.a. então existe uma sequência de v.a.'s $\{Y_n\}$ simples tal que $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$ (para provar este fato basta aplicar o Teorema 5.21 às partes positiva e negativa de Y). Para cada $n \in \mathbb{N}$ segue do argumento acima que existe $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Y_n = f_n(\mathbf{X})$. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que a sequência $\{f_n(x)\}$ converge. Uma vez que

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \right\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

a seguinte função

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_1,\ldots,x_n), & \text{se } (x_1,\ldots,x_n)\in M;\\ 0, & \text{se } (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus M.\end{cases}$$

é Borel mensurável pois $\lim_{n\to\infty} f_n 1_M$ e $f_n 1_M$ são Borel mensuráveis. Observe que para cada $\omega\in\Omega$ temos que $Y(\omega)=\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{X}(\omega))$. Logo $\mathbf{X}(\omega)\in M$ e portanto temos finalmente que

$$Y(\omega)=\lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{X}(\omega))=f(\mathbf{X}(\omega)).$$

■

8.4 Lei Zero-Um de Komolgorov

Seja $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}$ uma sequência de v.a.'s. Para cada $n\in\mathbb{N}$ defina

$$\mathcal{F}'_n=\sigma(X_{n+1},X_{n+2},\ldots).$$

A σ-álgebra caudal $\mathcal{T}$ é definida como sendo

$$\mathcal{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}'_n=\lim_{n\to\infty}\sigma(X_n,X_{n+1},\ldots).$$

Um evento $A\in\mathcal{T}$ é chamado de evento caudal. Uma variável aleatória mensurável com respeito a $\mathcal{T}$ é chamada de variável aleatória caudal. No que segue apresentamos alguns exemplos de eventos e v.a.'s caudais.

Exemplo 8.6. *Sejam $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}$ uma sequência de v.a.'s. Então o evento*

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)<\infty\right\}$$

é um evento caudal. Para prova este fato primeiro observamos que para todo $m\in\mathbb{N}$ temos a seguinte igualdade de conjuntos

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)<\infty\right\}=\left\{\omega\in\Omega:\sum_{n=m}^{\infty}X_n(\omega)<\infty\right\}.$$

Fixado $m\in\mathbb{N}$ temos que

$$\sum_{n=m}^{\infty}X_n(\omega)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{m+k}X_n(\omega).$$

Pelo Teorema 8.5 para qualquer $m\in\mathbb{N}$ temos que $\sum_{n=m}^{m+k}X_n\in\sigma(X_m,\ldots,X_{m+k})\subset\sigma(X_m,X_{m+1},\ldots)$. Logo $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{m+k}X_n\in\sigma(X_m,X_{m+1},\ldots)$, para todo $m\in\mathbb{N}$. Daí segue que

$$\left\{\omega\in\Omega:\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)<\infty\right\}\in\mathcal{F}'_m\qquad\forall m\in\mathbb{N}.$$

O que implica imediatamente pela definição que o evento acima é um evento caudal.

Exemplo 8.7. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}$ uma sequência de v.a.'s. Então as seguintes v.a.'s são mensuráveis segundo a σ-álgebra caudal.*

- $\limsup_{n\to\infty} X_n$.
- $\liminf_{n\to\infty} X_n$.

A prova de ambos os itens são semelhantes, portanto vamos mostrar apenas o argumento no primeiro caso. Pela definição de $\limsup$ *temos que*

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} X_k.$$

Para todo $n \geq 2$ fixado, afirmamos que $\sup_{k\geq n} X_k \in \mathcal{F}'_{n-1}$. De fato,

$$\sup_{k\geq n} X_k = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\leq k\leq m} X_k.$$

Pelo Teorema 8.5 temos que $\sup_{n\leq k\leq m} X_k \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots, X_m) \subset \mathcal{F}'_{n-1}$. Tomando o limite quando $m \to \infty$ a afirmação está provada. Defina

$$Y_n = \sup_{k\geq n} X_k.$$

Pela afirmação acima temos que Y_n é $\mathcal{F}'_{n-1}$ mensurável. Já que $Y_{n+r} \leq Y_n$, para todo $r \in \mathbb{N}$ temos que $\inf_n Y_n = \inf_n Y_{n+r}$. Escrevendo o ínfimo a direita novamente como limite é fácil ver que $\inf_n Y_{n+r} \in \mathcal{F}'_{n+r-1}$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\inf_n Y_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n.$$

Exemplo 8.8. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}$ uma sequência de v.a.'s. Então*

$$\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} X_n\right\} \in \mathcal{T}.$$

Para provar este fato vamos usar o exemplo anterior. Pela definição de limite temos que

$$\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} X_n\right\}^c = \left\{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\right\}$$
$$= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n \leq r\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} X_n > r\right\} \right).$$

Como ambas v.a.'s $\limsup X_n$ e $\liminf X_n$ são $\mathcal{T}$-mensuráveis segue que o lado esquerdo da igualdade acima é um evento pertencente a σ-álgebra caudal e portanto seu complementar, o que desejamos, também é um evento caudal.

Exemplo 8.9. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $\{X_n\}$ uma sequência de v.a.'s. e $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Então*

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} \in \mathcal{T}.$$

De fato, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=m+1}^n X_i}{n} \in \mathcal{F}'_m.$$

Segue dos exemplos anteriores que o conjunto de pontos de Ω *para o qual existe* $\lim_{n\to\infty} S_n/n$ *é mensurável segundo* $\mathcal{T}$. *Portanto*

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right\} \cap \left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right\} \in \mathcal{T}.$$

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Chamamos uma sub-σ-álgebra $\mathcal{B}$ de **quase trivial** se todos seus eventos têm probabilidade zero ou um. Um exemplo de sub-σ-álgebra quase trivial é $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Lema 8.10 (σ-Álgebras quase-triviais)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade,* $\mathcal{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{F}$ *quase-trivial e* X *uma v.a.* $\mathcal{B}$*-mensurável. Então existe uma constante* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Demonstração. Seja $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Como já sabemos F é uma função monótona não-decrescente e já que $\{X \leq x\} \in \sigma(X) \subset \mathcal{B}$ temos que $F(x) \in \{0, 1\}$, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Seja $c = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\}$. Pelas propriedades de função distribuição segue que $c < \infty$. Pela definição de c e pelo fato de $F(x)$ assumir apenas os valores 0 ou 1 temos para todo $\varepsilon > 0$ que $F(c + \varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq c + \varepsilon) = 1$. Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$ segue da continuidade a direita de F que $F(c) = 1$. Já que $1 = F(c) = \mathbb{P}(X < c) + \mathbb{P}(X = c)$ e $P(X < c) = 0$ temos que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. ■

Teorema 8.11 (Lei Zero-Um de Kolmogorov)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $\{X_n\}$ *é uma sequência de v.a.'s independentes com* σ*-álgebra caudal* $\mathcal{T}$, *então para todo evento* $E \in \mathcal{T}$ *temos que* $\mathbb{P}(E) = 0$ *ou* 1, *isto é,* $\mathcal{T}$ *é uma* σ*-álgebra quase-trivial.*

Demonstração. A ideia da prova é mostrar que se $E \in \mathcal{T}$ então E é independente de si mesmo, ou seja, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap E) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E)$. Desta igualdade temos que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E)^2$ e logo $\mathbb{P}(E)$ é solução da equação quadrática $x = x^2$ e portanto só pode assumir os valores zero ou um.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Como $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ temos que

$$\mathcal{F}_\infty \equiv \sigma(X_1, X_2, \ldots) \equiv \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_n)\right) = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right).$$

Observamos que

$$E \in \mathcal{T} \subset \mathcal{F}'_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \subset \mathcal{F}_\infty. \tag{8.2}$$

Em particular, $E \in \mathcal{F}'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Já que a sequência $\{X_n\}$ é independente temos que as σ-álgebras $\mathcal{F}_n$ e $\mathcal{F}'_n$ são claramente independentes e assim E é independente de qualquer evento em $\mathcal{F}_n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Isto implica que E é independente de $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. Considere as seguintes coleções $\mathcal{C}_1 = \{E\}$ e $\mathcal{C}_2 =$

$\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. Claramente $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são π-sistemas e além do mais este π-sistemas são independentes, então pelo Teorema 6.9 segue que as σ-álgebras

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \{\emptyset, E, E^c, \Omega\} \qquad \text{e} \qquad \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}_\infty$$

são independentes. Da primeira igualdade acima temos que $E \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ e de (8.2) segue que $E \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{C}_2)$, portanto E é independente de si mesmo. ∎

Corolário 8.12. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{X_n\}$ é uma sequência de v.a.'s independentes, então*

a) O evento $\{\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge$\}$ tem probabilidade zero ou um.

b) As v.a.'s $\liminf X_n$ e $\limsup X_n$ são contantes quase certamente.

c) O evento $\{S_n/n \to 0\}$ tem probabilidade zero ou um.

Demonstração. Basta usar os exemplos desta seção para concluir que os eventos em a) e c) são caudais e para b) usar também os exemplos desta seção junto com o Lema 8.10. ∎

8.5 A Medida Produto em $\{0, 1, 2, \ldots, s\}^{\mathbb{N}}$

Seja $s \geq 1$ um número natural fixado. Denote por $S = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$, o conjunto dos primeiros $s+1$ inteiros não negativos e seja $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, isto é, o produto cartesiano de infinitas cópias de S. Este produto cartesiano pode ser definido de várias formas. Por simplicidade vamos adotar nesta seção a seguinte definição

$$S^{\mathbb{N}} \equiv \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in S \ \forall\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Note que podemos pensar em Ω como o conjunto de todas as sequências tomando valores em S. O conjunto Ω é muitas vezes chamado na literatura de espaço simbólico.

Será de grande utilidade considerar algumas funções de "projeção". Tais funções são definidas de maneira mais precisa da seguinte forma: para cada inteiro $n \geq 1$

$$\pi_n : S^{\mathbb{N}} \to S \quad \text{é definida por} \quad \pi_n\big((\omega_1, \omega_2, \ldots)\big) = \omega_n.$$

As aplicações π_n's são chamadas de **funções coordenadas** ou **projeções naturais**. De maneira usual denotamos por S^n o produto cartesiano de n cópias de S, isto é, $S^n = S \times S \times \ldots \times S$.

Um cilindro n-dimensional em $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ é um conjunto $\mathcal{C}$ da forma

$$\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}, \quad \text{onde} \quad H \subset S^n.$$

Note que $\mathcal{C}$ é um conjunto não-vazio se H é não vazio. Um conjunto $\mathcal{C}$ é chamado de um cilindro finito dimensional se $\mathcal{C}$ é um cilindro n-dimensional para algum $n \in \mathbb{N}$.

Lema 8.13. *A coleção $\mathscr{C}_0$ de todos os cilindros finito dimensionais de $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ é uma álgebra de conjuntos.*

Demonstração. Para ver que Ω e $\emptyset$ pertencem a $\mathscr{C}_0$ basta observar que $\Omega = \{\omega \in \Omega : \pi_1(\omega) \in S\} \in \mathscr{C}_0$ e $\emptyset = \{\omega \in \Omega : \pi_1(\omega) \in \emptyset\} \in \mathscr{C}_0$. Seja $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_0$ um cilindro finito dimensional da forma $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\Omega \setminus \mathcal{C} \in \mathscr{C}_0$. De fato, temos que $\Omega \setminus \mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in S^n \setminus H\}$. Resta mostrar que a coleção $\mathscr{C}_0$ é fechada para uniões finitas. Para fazer isto é suficiente mostrar que dados quaisquer dois cilindros finito dimensionais $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathscr{C}_0$ temos que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \in \mathscr{C}_0$. Suponha que $\mathcal{C}$ é um cilindro n-dimensional da forma $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$ e $\mathcal{D}$ é um cilindro m-dimensional da forma $\mathcal{D} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_m(\omega)) \in J\}$, onde $J \subset S^m$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $m \leq n$. Vamos considerar primeiro o caso $m = n$. Neste caso temos que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in G \cup J\}$. Caso $m < n$, podemos olhar para o cilindro $\mathcal{D}$ como um cilindro n-dimensional, pois $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \equiv \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_m(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in J \times S^{n-m}\}$. Usando a igualdade acima e o caso anterior segue que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \in \mathscr{C}_0$. ■

Definição 8.14. *Sejam $s \geq 1$ um inteiro positivo fixado, $S = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ e $\Omega = S^{\mathbb{N}}$. A σ-álgebra gerada pela coleção dos cilindros finito dimensionais $\mathcal{F} = \sigma(\mathscr{C}_0)$ é chamada de σ-álgebra gerada pelos cilindros.*

Em seguida, vamos mostrar como construir diversas medidas de probabilidade definidas em $(\Omega, \mathcal{F}) \equiv (S^{\mathbb{N}}, \sigma(\mathscr{C}_0))$ tendo várias propriedades interessantes. A ideia é definir estas medidas inicialmente na coleção dos cilindros finito dimensionais e em seguida usar o Teorema da Extensão de Carathéodory.

Proposição 8.15. *Sejam $s \geq 1$ inteiro positivo fixado, $\mathscr{C}_0$ a coleção dos cilindros finito dimensionais de $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ e fixe um vetor de probabilidades, i.e., $(p_1, \ldots, p_s) \in [0, 1]^s$ tal que $p_1 + \ldots + p_s = 1$. Se para cada $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_0$ da forma $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$ definimos*

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}) = \sum_{(u_1, \ldots, u_s) \in H} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_s},$$

então $\widetilde{\mathbb{P}} : \mathscr{C}_0 \to [0, 1]$ é uma função de conjuntos bem definida e além do mais para qualquer coleção finita $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \in \mathscr{C}_0$ de cilindros dois a dois disjuntos temos que

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_j). \tag{8.3}$$

Demonstração. Já que um elemento em $\mathscr{C}_0$ pode admitir infinitas representações distintas, temos que mostrar primeiro que $\widetilde{\mathbb{P}}$ esta bem definida, isto é, seu valor é independente da escolha da representação de um cilindro. Para verificar que esta afirmação é verdadeira seja $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_0$ e sejam $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$ e $\mathcal{C}' = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_m(\omega)) \in H'\}$, onde $H' \subset S^m$ duas representações deste cilindro. Podemos assumir por simetria que $m \leq n$. No caso $m = n$, note que teremos $H = H'$ e claramente $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}) = \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}')$. Vamos supor que

$m < n$. Neste caso, para qualquer $\omega \in \mathcal{C}'$ não existe nenhuma restrição para os valores $\pi_{m+1}(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)$ desta forma podemos verificar que $\mathcal{C}' = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_m(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H' \times S^{n-m}\}$, donde segue (como no caso $m = n$) que $H' \times S^{n-m} = H$. Portanto temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}}(C) &= \sum_{(u_1,\ldots,u_n)\in H} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_n} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_m,\ldots,u_n)\in H'\times S^{n-m}} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_m} \cdot \ldots \cdot p_{u_n} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_m)\in H'} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_m} \sum_{(u_{m+1},\ldots,u_n)\in S^{n-m}} p_{u_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{u_n} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_m)\in H'} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_m} \prod_{i=m+1}^{n} \left(\sum_{u_i\in S} p_{u_i} \right) \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_m)\in H'} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_m} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}').
\end{aligned}$$

Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ cilindros disjuntos. Suponha que $\mathcal{C}_1$ é um cilindro n_1-dimensional da forma $\mathcal{C}_1 = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{n_1}(\omega)) \in H_1\}$, onde $H_1 \subset S^{n_1}$ e analogamente $\mathcal{C}_2$ é um cilindro n_2-dimensional da forma $\mathcal{C}_2 = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{n_2}(\omega)) \in H_2\}$. Suponha por simetria que $n_1 \leq n_2$. Vamos analisar primeiramente o caso $n_1 = n_2$. Neste caso já que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ segue que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e também (como vimos no lema acima) $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{n_1}(\omega)) \in H_1 \cup H_2\}$, logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) &= \sum_{(u_1,\ldots,u_{n_1})\in H_1\cup H_2} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_{n_1}} \\
&= \sum_{(u_1,\ldots,u_{n_1})\in H_1} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_{n_1}} + \sum_{(u_1,\ldots,u_{n_1})\in H_2} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_{n_1}} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_1) + \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_2).
\end{aligned}$$

No caso $n_1 < n_2$ usamos a representação n_2-dimensional de $\mathcal{C}_1$ dada por $\mathcal{C}_1 = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{n_1}(\omega), \ldots, \pi_{n_2}(\omega)) \in H_1 \times S^{n_2-n_1}\}$ e procedemos como no caso anterior. Para concluir que (8.3) é válida, basta proceder uma indução formal. ∎

Lema 8.16. *Seja $\widetilde{\mathbb{P}} : \mathscr{C}_0 \to [0,1]$ é uma função de conjuntos satisfazendo* (8.3)*. Suponha que para qualquer sequência $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{C}_0$ tal que $\mathcal{C}_n \downarrow \emptyset$ temos que $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}_n) \downarrow 0$. Então $\widetilde{\mathbb{P}}$ é uma medida sobre a álgebra $\mathscr{C}_0$.*

Demonstração. É suficiente provar que $\widetilde{\mathbb{P}}$ é contavelmente aditiva. Seja $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção dois a dois disjunta de elementos de $\mathscr{C}_0$ e suponha que $\mathcal{D} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}_n \in \mathscr{C}_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\mathcal{E}_n \equiv \mathcal{D} \setminus \cup_{k\leq n}\mathcal{D}_k$. Observe que $\{\mathcal{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathscr{C}_0$ tal que $\mathcal{E}_n \downarrow \emptyset$. Usando a propriedade (8.3) e a hipótese do lema temos que $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{D}) - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{D}_k) = \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E}_n) \to 0$ e portanto concluímos que $\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{D}_k)$. ■

O lema a seguir pode ser obtido como uma consequência do Teorema da Tychonof e da propriedade de interseção de conjuntos compactos. A prova apresentada abaixo é um pouco mais elementar e independente destes conceitos topológicos e baseada simplesmente em um processo de diagonal de Cantor.

Lema 8.17. *Sejam $S = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de cilindros finito dimensionais não-vazios em $S^{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{C}_n \downarrow \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ é não-vazio.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{C}_j$ é um cilindro d_j dimensional da forma

$$\mathcal{C}_j = \{\omega \in \Omega : \big(\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{d_j}(\omega)\big) \in H_j, \text{ onde } H_j \subset S^{d_j}\}.$$

Já que estamos assumindo que todos os cilindros da coleção $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são não-vazios, podemos para cada $n \in \mathbb{N}$ escolher um ponto $\omega_n \in \mathcal{C}_n$. Escrevendo em linha as coordenadas dos pontos ω_n's temos

$$\begin{array}{cccc} \pi_1(\omega_1) & \pi_1(\omega_2) & \pi_1(\omega_3) & \ldots \\ \pi_2(\omega_1) & \pi_2(\omega_2) & \pi_1(\omega_3) & \ldots \\ \pi_3(\omega_1) & \pi_2(\omega_2) & \pi_1(\omega_3) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Agora procedemos com uma pequena modificação do método diagonal de Cantor. Já que S é um conjunto finito, algum elemento $u_1 \in S$ aparece infinitas vezes na primeira linha. Seja $n_{1,k}$ uma sequência crescente infinita de índices tal que $\pi_1(\omega_{n_{1,k}}) = u_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizando o mesmo raciocínio podemos garantir a existência de uma sequência infinita crescente $\{n_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ contida em $\{n_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $u_2 \in S$ tais que $\pi_2(\omega_{n_{2,k}}) = u_2$. Procedendo uma indução formal podemos garantir que para todo $r \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{n_{r,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $u_r \in S$ tais que $\{n_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \supset \{n_{2,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \supset \ldots \supset \{n_{r-1,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \supset \ldots \supset \{n_{r,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\pi_r(\omega_{n_{r,k}}) = u_r$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta forma temos para todo $1 \leq r \leq k$ que $\pi_r(\omega_{n_{k,k}}) = u_r$. Portanto temos

$$\big(\pi_1(\omega_{n_{k,k}}), \pi_2(\omega_{n_{k,k}}), \ldots, \pi_r(\omega_{n_{k,k}})\big) = (u_1, u_2, \ldots, u_r), \quad \text{para } r \leq k.$$

Considere o ponto $\omega \in \Omega$ dado por $\omega = (u_1, u_2, \ldots)$. Vamos mostrar que o ponto $\delta = (u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{C}_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Lembramos que por hipótese temos a seguinte sequência de continências: $\ldots \subset \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{C}_1$. Portanto para todo $k \in \mathbb{N}$ temos por definição que $\omega_{n_{k,k}} \in \mathcal{C}_{n_{k,k}} \subset \ldots \subset \mathcal{C}_1$. Tomando $k \geq d_1$ temos por definição de $\mathcal{C}_1$ que

$$\big(\pi_1(\omega_{n_{k,k}}), \pi_2(\omega_{n_{k,k}}), \ldots, \pi_{d_1}(\omega_{n_{k,k}})\big) \in H_1 \quad \Longrightarrow \quad (u_1, \ldots, u_{d_1}) \in H_1.$$

Já que $(\pi_1(\delta), \ldots, \pi_{d_1}(\delta)) = (u_1, \ldots, u_{d_1})$ podemos concluir que $\delta \in \{\omega \in \Omega : \big(\pi_1(\omega), \ldots, \pi_{d_j}(\omega)\big) \in H_1, \text{ onde } H_1 \subset S^{d_1}\} \equiv \mathcal{C}_1$. Analogamente podemos provar que $\delta \in \mathcal{C}_j$ para todo $j \geq 1$ e daí segue que $\mathcal{C} \neq \emptyset$. ■

Teorema 8.18. *Seja $\mathscr{C}_0$ a álgebra dos cilindros finito dimensionais de $S^{\mathbb{N}}$. Toda medida $\widetilde{\mathbb{P}} : \mathscr{C}_0 \to [0, 1]$ finitamente aditiva (satisfazendo* (8.3)*) é de fato σ-aditiva sobre $\mathscr{C}_0$.*

Demonstração. Para provar este teorema basta mostrar que são válidas as hipóteses do Lema 8.16. Seja $\{\mathcal{C}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de cilindros em $\mathscr{C}_0$ tal que $\mathcal{C}_j \downarrow \emptyset$. Usando o Lema 8.17 podemos concluir que a sequência $\{\mathcal{C}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ não pode ser composta apenas de cilindros não-vazios. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_{n_0} = \emptyset$. Mas como a sequência de cilindros é decrescente então temos obrigatoriamente que $\mathcal{C}_j = \emptyset$ para todo $j \geq n_0$ e portanto $\widetilde{\mathbb{P}}(C_j) \downarrow 0$. Deste fato segue que as hipóteses do Lema 8.16 são válidas e portanto podemos concluir que $\widetilde{\mathbb{P}}$ é uma medida sobre $\mathscr{C}_0$. ■

Teorema 8.19 (Existência da Medida Produto em $S^{\mathbb{N}}$)**.** *Sejam $s \geq 1$ inteiro positivo fixado, $S = \{0, 1, 2, \ldots, s\}$, $\mathscr{C}_0$ a coleção dos cilindros finito dimensionais de $\Omega = S^{\mathbb{N}}$. Para qualquer $(p_1, \ldots, p_s) \in [0, 1]^s$ tal que $p_1 + \ldots + p_s = 1$ (vetor de probabilidades) fixado, existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P} : \sigma(\mathscr{C}_0) \to [0, 1]$ tal que para todo $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_0$ da forma $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$, temos*

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}) = \sum_{(u_1,\ldots,u_s)\in H} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_s},$$

Demonstração. Pela Proposição 8.15 podemos definir uma função de conjuntos $\widetilde{\mathbb{P}}$ aditiva, definida sobre $\mathscr{C}_0$ tal que a imagem do cilindro $\mathcal{C} = \{\omega \in \Omega : (\pi_1(\omega), \ldots, \pi_n(\omega)) \in H\}$, onde $H \subset S^n$, é dada por

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{C}) = \sum_{(u_1,\ldots,u_s)\in H} p_{u_1} \cdot p_{u_2} \cdot \ldots \cdot p_{u_s}.$$

Pelo Teorema 8.18 temos que $\widetilde{\mathbb{P}}$ é de fato uma medida σ-aditiva sobre $\mathscr{C}_0$. Invocando o Teorema da Extensão de Carathéodory podemos estender $\widetilde{\mathbb{P}}$ a uma medida $\mathbb{P}$ definida sobre $\sigma(\mathscr{C}_0)$ de forma que $\mathbb{P}\big|_{\mathscr{C}_0} = \widetilde{\mathbb{P}}$ o que encerra a prova do teorema. ■

Lista de Exercícios

1. Sejam $B_1, \ldots, B_n$ eventos independentes. Mostre que
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - \mathbb{P}(B_i)].$$

2. Qual é a quantidade mínima de pontos que um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ deve ter para que possa existir n eventos independentes $B_1, \ldots, B_n$ que não tenham probabilidade zero ou um.

3. Se $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos independentes, mostre que
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

4. Considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Seja $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ a v.a. dada por $X(\omega) = \omega$.
   a) Existe alguma variável aleatória que é independente de X e não constante quase certamente ?
   b) Defina a v.a. $Y = X(1-X)$. Construa uma v.a. Z tal que Z e Y sejam independentes.

5. Suponha que X seja uma variável aleatória.
   a) Mostre que a v.a. X é independente de si mesma se, e somente se, existe uma constante c tal que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.
   b) Se existe uma função mensurável $g : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ tal que X e $g(X)$ são independentes, então prove que existe uma constante c tal que $\mathbb{P}(g(X) = c) = 1$.

6. * Seja $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de v.a's iid com distribuição comum F. Seja π uma permutação de $\{1, \ldots, n\}$. Mostre que
$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}),$$
onde $\stackrel{d}{=}$ significa que os dois vetores têm a mesma distribuição conjunta.

7. Se A, B, C são eventos independentes, mostre que ambos $A \cup B$ e $A \setminus B$ são independentes de C.

8. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis porque $f(X)$ e $g(Y)$ são independentes ?
(Nenhuma conta é necessária).

9. Suponha que $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos independentes satisfazendo $\mathbb{P}(A_n) < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

Dê um exemplo mostrando que a condição $\mathbb{P}(A_n) < 1$ não pode ser removida.

10. Suponha que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ seja uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > M) < \infty, \quad \text{para algum } M > 0.$$

11. Use o Lema de Borel-Cantelli para mostrar que dada qualquer sequência de v.a.'s $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, tomando valores reais, existe pelo menos uma sequência $\{c_n\}$ (que depende da sequência $\{X_n\}$) tal que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{c_n} = 0\right) = 1.$$

Dê uma descrição precisa das possíveis escolhas da sequência c_n.

12. O seguinte resultado é útil para ser usado juntamente com a Lei Zero-Um de Borel: suponha que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sejam duas sequências de números reais não-negativos, satisfazendo $a_n \sim b_n$, isto é, $a_n/b_n \to 1$, quando $n \to \infty$. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

13. Seja $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de v.a.'s iid com

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Qual é a probabilidade que o padrão $1, 0, 1$ apareça infinitas vezes ?
(Dica. Considere os eventos $A_k = \{X_k = 1, X_{k+1} = 0, X_{k+2} = 1\}$ e olhe para a sequência $A_1, A_4, A_7, \ldots$).

14. Em uma sequência de v.a.'s de Bernoulli $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ com

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Seja A_n o evento ocorrem n uns consecutivos entre as observações 2^n e 2^{n+1}. Mostre que se $p \geq 1/2$, então A_n ocorre infinitas vezes com probabilidade 1.
Dica. Prove algo como

$$\mathbb{P}(A_n) \geq 1 - (1 - p^n)^{\frac{2^n}{n}} > 1 - e^{-\frac{(2p)^n}{2n}}.$$

15. A probabilidade da convergência de uma sequência de v.a's independentes é igual a zero ou um. Se a sequência $\{X_n\}$ é iid e não constante com probabilidade 1, temos que
$$\mathbb{P}(X_n \text{ converge}) = 0.$$

16. Este exercício está relacionado a Seção 8.1 **(Comportamento de v.a.'s com distribuição exponencial)**.

    a) Suponha que $\{X_n, n \geq 1\}$ são v.a.'s iid e suponha que $\{a_n\}$ é uma sequência de números reais. Mostre que
    $$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > a_n\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > a_n) < \infty; \\ 1, & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 > a_n) = \infty; \end{cases}$$

    b) Suponha que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ são v.a.'s iid com distribuição normal padrão $N(0,1)$. Mostre que
    $$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}} = \sqrt{2}\right) = 1$$
    Dica: Reveja ou prove que
    $$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_n > x)}{n(x)/x} = 1,$$
    onde $n(x)$ denota a densidade de uma v.a. normal padrão.

    c) Suponha que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ seja uma sequência de v.a.'s iid com distribuição de Poisson com parâmetro λ. Prove que
    $$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \leq \mathbb{P}(X_1 \geq n) \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$
    e portanto
    $$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log(\log n)} = 1\right) = 1.$$

17. Se um evento A é independente de um π-sistema $\mathcal{C}$ e $A \in \sigma(\mathcal{C})$, então $\mathbb{P}(A)$ é igual a zero ou um.

18. Dê um exemplo simples mostrando que duas variáveis aleatórias X e Y podem ser independentes em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$, mas dependentes em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$.

19. Exemplos e Contra-exemplos.

    a) Seja $\Omega = \{1,2,3,4\}$ com cada um de seus pontos tendo probabilidade $1/4$. Seja $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ e $A_3 = \{1,4\}$. Mostre que quaisquer pares de eventos de A_1, A_2 e A_3 são independentes mas A_1, A_2 e A_3 não são independentes.

b) Seja $\{A_i, 1 \leq i \leq 5\}$ uma partição mensurável de Ω tal que $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 15/64$, $P(A_4) = 1/64$, $\mathbb{P}(A_5) = 18/64$. Defina $B = A_1 \cup A_4$, $C = A_2 \cup A_4$ e $D = A_3 \cup A_4$. Mostre que

$$\mathbb{P}(B \cap C \cap D) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$$

mas que B, C e D não são independentes.

c) Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes assumindo apenas os valores $+1$ e -1 com probabilidade $1/2$. As variáveis aleatórias X_1, X_2 e X_1X_2 são dois-a-dois independentes ? A coleção X_1, X_2, X_1X_2 é independente ?

20. Suponha que $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos

a) Se $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, quando $n \to \infty$, mostre que existe uma subsequência $\{n_k\}$ tendendo a infinito tal que $\mathbb{P}(\cap_k A_{n_k}) > 0$.
(Dica. Use o Lema de Borel-Cantelli).

b) Mostre que o seguinte é falso. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(A_n) \geq \varepsilon$ segue que existe uma subsequência $\{n_k\}$ tendendo a infinito tal que $\mathbb{P}(\cap_k A_{n_k}) > 0$.

21. Suponha que $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos independentes tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\min\{\mathbb{P}(A_n), 1 - \mathbb{P}(A_n)\}) = \infty.$$

Mostre que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade não atômica.

22. Suponha que $\{A_n\}$ são eventos independentes.

a) Se para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=k}^{n-1} A_i^c \right) = \infty$$

Mostre que

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

b) Para o item anterior é suficiente assumir apenas que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c \right) = \infty \quad ?$$

c) Mostre que

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) = \infty,$$

para todo evento A tal que $\mathbb{P}(A) > 0$.

23. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{A_n\}$ uma sequência arbitrária de eventos satisfazendo $\mathbb{P}(A_n) \geq \varepsilon > 0$. Mostre que $\mathbb{P}(\limsup A_n) \geq \varepsilon$.

24. Use o Teorema de Renyi para mostrar que se $\{X_n, n \geq 1\}$ é uma sequência iid com função distribuição comum contínua então

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{X_n = \max_{1\leq i\leq n}\{X_i\}\right\}\right) = 1.$$

25. (Barndorff-Nielson) Suponha que $\{A_n\}$ é uma sequência de eventos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}^c) < \infty.$$

Prove que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
(Dica. Decomponha $\cup_{j=n}^m A_j$ para $m > n$.)

26. Se $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ são v.a.'s independentes, mostre que o **raio de convergência** de uma série de potências aleatória da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n$$

é constante (possivelmente infinito) com probabilidade um.
Dica. O raio de convergência de uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ é dado por

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}.$$

27. Mostre que $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ são independentes se $\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})$ é independente de $\sigma(X_n)$ para cada $n \geq 2$.

28. Seja $\Omega = \{1, \ldots, r\}^n$ o produto cartesiano de n cópias de $\{1, \ldots, r\}$. Podemos pensar em Ω como

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_r) : x_i \in \{1, \ldots r\} \ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Suponha que seja $\mathbb{P}$ seja uma medida de probabilidade neste espaço tal que todo ponto de Ω tem a mesma probabilidade. Defina as seguintes variáveis aleatórias (projeção na i-ésima coordenada)

$$X_i\Big((x_1, \ldots, x_n)\Big) = x_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Prove que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes.

29. Este exercício é sobre o Exemplo de Expansões Diádicas.

    a) Defina $A = \limsup\{d_{2n} = 0\}$ e $B = \limsup\{d_{2n+1} = 1\}$. Mostre que A e B são independentes.

    b) Denote por $l_n(\omega)$ o comprimento da sequência consecutiva de zeros, da expansão diádica de ω, começando do dígito $d_n(\omega)$, isto é,

$$l_n(\omega) = \begin{cases} k, & \text{se } k \geq 1 \text{ e } d_n(\omega) = 0, \ldots, d_{n+k}(\omega) = 1. \\ 0, & \text{se } d_n(\omega) = 1. \end{cases}$$

    Mostre que

$$\mathbb{P}(l_n = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad \mathbb{P}(l_n \geq r) = \frac{1}{2^r}.$$

c) Mostre que $\{l_n = 0, n \geq 1\}$ são eventos independentes.

d) Mostre que $\mathbb{P}(\limsup\{l_n = 0\}) = 1$.

e) Mostre que os eventos $\{l_n = 1, n \geq 1\}$ não são independentes, mas os eventos $\{l_{2n} = 1, n \geq 1\}$ são. Em seguida, prove que

$$\mathbb{P}(\limsup\{l_{2n} = 1\}) = 1, \qquad \text{logo} \qquad \mathbb{P}(\limsup\{l_n = 1\}) = 1,$$

f) Seja $\log_2 n$ o logaritmo de n na base 2. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{l_n}{\log_2 n} \leq 1\right) = 1.$$

Dica. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(l_n > (1+\varepsilon)\log_2 n) < \infty$$

e use o Lema de Borel-Cantelli. Então substitua ε por $\varepsilon_k \downarrow 0$.

g) Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{l_n}{\log_2 n} \geq 1\right) = 1.$$

Dica. Seja $r_n = \log_2 n$ e defina uma sequência de inteiros não negativos n_k como segue: $n_1 = 1$, $n_2 = 1 + r_1, \ldots, n_{k+1} = n_k + r_{n_k}$, com $n_{k+1} - n_k = r_{n_k}$. Observe que

$$\{l_{n_k} \geq r_{n_k}\} \in \mathscr{B}(d_i, n_k \leq i < n_{k+1})$$

e assim os eventos $\{l_{n_k} \geq r_{n_k}\}$ para $k \geq 1$ são independentes. Use a Lei Zero-Um de Borel para mostrar que

$$\mathbb{P}(\limsup\{l_{n_k} \geq r_{n_k}\}) = 1$$

e consequentemente

$$\mathbb{P}(\limsup\{l_n \geq r_n\}) = 1.$$

30. Suponha que $\{A_n, n \geq 1\}$ é uma sequência de eventos tais que para algum $\delta > 0$ temos

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \delta > 0, \ \forall n \geq 1.$$

Mostre que $\limsup A_n \neq \emptyset$. Use este fato para mostrar com poucos cálculos que em uma sequência infinita de experimentos de Bernoulli i.i.d., existe um número infinito de sucessos com probabilidade um.

31. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e suponha que A, B são dois eventos independentes. Se $\mathbb{P}(B) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(A)$ mostre que $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 1/4$.

32. **Truque da Raíz Quadrada**. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Suponha que $\preceq$ seja uma ordem parcial em Ω. Dizemos que $A \in \mathcal{F}$ é um evento crescente, se para todo par ω, ω' tal que $\omega \preceq \omega'$, temos $1_A(\omega) \leq 1_A(\omega')$. De maneira análoga, defina o conceito de eventos decrescentes.

Assuma que a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ é tal que para todo par de eventos crescentes $A, B \in \mathcal{F}$ temos

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \geq 0. \tag{8.4}$$

Mostre que

a) se A e B são crescentes então seus complementares são eventos decrescentes e que
$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) \geq 0; \tag{8.5}$$

b) se $A_1, \ldots, A_n$ são eventos crescentes e equiprováveis, tais que $A = \cup_{i=1}^n A_i$, então
$$\mathbb{P}(A_i) \geq 1 - [1 - \mathbb{P}(A)]^{\frac{1}{n}}.$$

33. **Os Números de Ramsey**. O objetivo deste exercício é usar o "Método Probabilístico" para obter cotas inferiores para os números de Ramsey da diagonal.

Grafo. Um grafo é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto arbitrário (chamado conjunto de vértices de G) e E é um conjunto formado por pares não-ordenados de V, (chamado conjunto de arestas de G). Um exemplo de grafo é o grafo completo em n vértices, chamado de K_n, neste grafo $V \equiv V_n = \{1, \ldots, n\}$ e $E \equiv E_n = \{\{i, j\} : i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j\}$. Abaixo temos uma representação de K_7

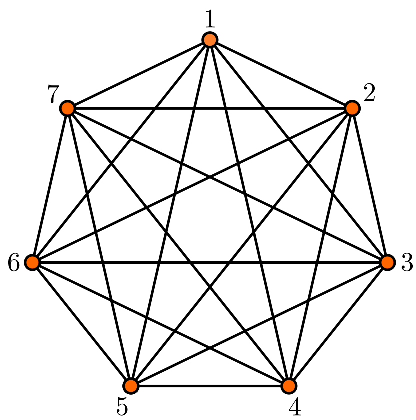

Figura 8.1: Uma representação de K_7.

Colorações de K_n. Uma coloração de $K_n = (V_n, E_n)$ em duas cores é uma função $c : E_n \to \{0, 1\}$. Seja $e \in E_n$ uma aresta de K_n. Dizemos que e está colorida de azul se $c(e) = 0$, caso $c(e) = 1$ vamos dizer que e está colorida de vermelho.

Fixada uma coloração c de K_n e um número natural $2 \leq k \leq n$, dizemos que K_n possui um subgrafo monocromático **azul** K_k, se existem k vértices $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ tais que $c(\{v_i, v_j\}) = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$ com $i \neq k$. Analogamente definimos K_k monocromático **vermelho**.

O número de Ramsey $R(k,l)$ é o menor inteiro n tal que qualquer coloração $c : E_n \to \{0,1\}$ de K_n possui pelo menos um subgrafo K_k monocromático azul ou um subgrafo K_l monocromático vermelho.

Em 1929 Ramsey mostrou que $R(k,l)$ é finito para quaisquer inteiros k e l. Nosso objetivo neste exercício será exibir cotas inferiores para os números de Ramsey da diagonal, isto é, $R(k,k)$.

a) Construa um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e defina o que é uma coloração aleatória de K_n.

b) Mostre que existe uma coloração aleatória de K_n, onde cada aresta de E_n é colorida aleatoriamente de azul ou vermelho com igual probabilidade.

c) Para qualquer conjunto R possuindo k ($k \leq n$) vértices em K_n, seja A_R o evento o subgrafo de K_n induzido por R é monocromático, isto é, todas as arestas de vértices em R estão pintadas com a mesma cor. Mostre que

$$\mathbb{P}(A_R) = \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}}$$

d) Mostre que a probabilidade de pelo menos um evento do tipo A_R ocorrer é no máximo

$$\binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}}.$$

e) Mostre que se n e k satisfazem

$$\binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}} < 1$$

então $R(k,k) > n$.

f) Mostre que se $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ então

$$\binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}-1}} < 1.$$

Conclua que $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ para todo $k \geq 3$.

g) Leia. É fácil mostrar que $R(3,3) = 6$. O valor de $R(4,4) = 18$ foi determinado apenas em 1979 por Evans, Pulham e Sheehan. O valor de $R(k,k)$ para $k \geq 5$ não é conhecido ainda. Em uma entrevista o famoso matemático Paul Erdös explica usando a seguinte anedota, o grau de dificuldade de se calcular exatamente tais números com a tecnologia matemática disponível atualmente:
“ Suponha que uma civilização alienígena muito mais desenvolvida e poderosa que a nossa, pouse sobre a Terra e exija que façamos o cálculo do valor exato de $R(5,5)$ ou caso contrário, eles destruirão nosso planeta. Neste caso, na minha opinião, a melhor estratégia é pegar todos os matemáticos e todos os computadores do mundo e tentar encontrar este valor. Mas, se os alienígenas exigirem o valor exato de $R(6,6)$, eu acredito que a melhor estratégia seja destruí-los.”

Parte II

Segundo Terço do Curso

Aula 9

A Integral de Lebesgue

9.1 A Integral de Funções em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$

A principal diferença filosófica entre as integrais de Riemann e Lebesgue é que na construção da integral de Riemann fazemos uma partição do dominío da função, enquanto que na construção da integral de Lebesgue é feita uma partição do conjunto imagem. Esse nova abordagem permite construir um conceito de integral em espaços muito mais gerais do que podíamos fazer e com a integral de Riemann e ainda por cima tendo a vantegem de que esta integral tem propriedades muito mais fortes que a integral de Riemman.

Vamos ver nesta seção a construção desta integral e mais a frente, que a integral própria de Riemann coincide com a integral de Lebesgue, fazendo desta última (em alguns casos) uma extensão da integral de Riemann.

O objeto que desempenha um papel fundamental na construção da integral de Lebesgue é a função simples cuja definição recordamos abaixo:

Definição 9.1. *Uma função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita uma função simples se sua imagem $f(\Omega)$ possui apenas um número finito de elementos.*

Observação 9.2. *Quando estamos trabalhando com espaços de probabilidade frequentemente chamamos uma função simples de v.a. discreta.*

Definição 9.3. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. O conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mensuráveis e positiva é denotado por $M^+(\Omega, \mathcal{F})$.*

Toda função $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ pode ser escrita na forma

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j} \tag{9.1}$$

onde 1_{E_j} é a função característica de um conjunto $E_j \in \mathcal{F}$. Não é difícil ver que existem várias maneiras de escrever uma mesma função simples na forma (9.1). Entretanto existe uma maneira de representar tais funções que será nossa preferida e que é chamada de ***representação padrão*** de f, que é caracterizada do seguinte modo: em (9.1) todos os a_j's devem ser distintos e os E_j's devem ser disjuntos, não vazios e tais que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = \Omega$. Observe que na representação padrão pode ser necessário considerar $a_j = 0$. Por exemplo, no caso da função $f = 1_E$, onde E é um conjunto $\mathcal{F}$-mensurável tal que $E \subsetneq \Omega$, sua representação padrão é $f = 1_E + 0 \cdot 1_{E^c}$.

Exercício 9.4. *Mostre que a representação padrão de uma função simples $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é única.*

Definição 9.5 (Integral de Funções Simples não-negativas)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\varphi : \Omega \to [0, +\infty]$ uma função simples cuja representação padrão é dada por $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j}$. Definimos a integral de φ com respeito a μ sendo o número real estendido*

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mu(E_j).$$

Na definição acima deve ser lembrada nossa convenção que $0 \cdot (+\infty) = 0$. Portanto a integral da função identicamente nula é zero independentemente do espaço Ω ter medida finita ou não.

Devemos observar que a integral de qualquer função simples **não-negativa** está bem definida em $\overline{\mathbb{R}}$.

Passamos agora à prova de alguma propriedades básicas desta integral.

Lema 9.6. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, $\varphi, \psi \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ funções simples e $c \in [0, +\infty)$, então*

a) $\displaystyle\int_\Omega c\varphi \, d\mu = c \int_\Omega \varphi \, d\mu.$

b) $\displaystyle\int_\Omega (\varphi + \psi) \, d\mu = \int_\Omega \varphi \, d\mu + \int_\Omega \psi \, d\mu.$

c) A aplicação $\lambda : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\lambda(E) = \displaystyle\int_\Omega 1_E \cdot \varphi \, d\mu$ é uma medida em $\mathcal{F}$.

Demonstração. Prova do item a). Se $c = 0$ então $c\varphi$ é a função identicamente nula e portanto a igualdade é válida. Se $c > 0$ e $\varphi \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ tem representação padrão dada por

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j}$$

então temos que $c\varphi \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ tem representação padrão dada por

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j 1_{E_j}.$$

Portanto temos que

$$\int_\Omega c\varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int_\Omega \varphi \, d\mu.$$

Prova do item b). Suponha que φ e ψ tenham as seguintes representações padrões

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j} \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k 1_{F_k}.$$

Usando as representações padrão dadas acima, temos que a soma destas duas funções é dada por

$$\varphi+\psi=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)1_{E_j\cap F_k}.$$

Apesar da coleção $\{E_j\cap F_k\}$, com $j=1,\ldots,n$ e $k=1,\ldots,m$, ser disjunta, não é sempre possível garantir que a representação acima é a representação padrão de $\varphi+\psi$. Pois, não é garantido que $E_j\cap F_k\neq\emptyset$ e nem que a coleção $\{a_j+b_k\}$ seja uma coleção de números reais distintos. Para obter a representação padrão procedemos da seguinte maneira. Seja c_h, com $1\leq h\leq p\leq nm$ a coleção de todos os número distintos da coleção $\{a_j+b_k : j=1,\ldots,n;\ k=1,\ldots,m\}$. Para cada $h=1,\ldots,p$ defina

$$G_h=\bigcup_{\substack{j,k:E_j\cap F_k\neq\emptyset\\ a_j+b_k=c_h}}E_j\cap F_k.$$

Já que μ é uma medida e a coleção $\{E_j\cap F_k\}$ é mutuamente disjunta temos que

$$\mu(G_h)=\sum_{\substack{j,k:E_j\cap F_k\neq\emptyset\\ a_j+b_k=c_h}}\mu(E_j\cap F_k). \tag{9.2}$$

Afirmamos que a representação padrão de $\varphi+\psi$ é dada por

$$\varphi+\psi=\sum_{h=1}^{p}c_h 1_{G_h}.$$

Pela definição da integral e pela igualdade (9.2) temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega(\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{h=1}^{p}c_h\mu(G_h)\\
&= \sum_{h=1}^{p}c_h\sum_{\substack{j,k:E_j\cap F_k\neq\emptyset\\ a_j+b_k=c_h}}\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{h=1}^{p}\sum_{\substack{j,k:E_j\cap F_k\neq\emptyset\\ a_j+b_k=c_h}}c_h\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{h=1}^{p}\sum_{\substack{j,k:E_j\cap F_k\neq\emptyset\\ a_j+b_k=c_h}}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j\mu(E_j\cap F_k)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(E_j\cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}a_j\mu(E_j)+\sum_{k=1}^{m}b_k\mu(F_k)
\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \varphi \, d\mu + \int_\Omega \psi \, d\mu$$

Prova do item c). Usando os itens a), b) e a representação

$$1_E \cdot \varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j \cap E}$$

temos que

$$\lambda(E) = \int_\Omega 1_E \cdot \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_\Omega 1_{E_j \cap E} \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E).$$

Já que aplicação $E \mapsto \mu(E_j \cap E)$ define uma medida em $\mathcal{F}$, a_j's são não negativos e combinações lineares de medidas com coeficientes não negativos são medidas então o lema está provado. ■

Agora estamos preparados para introduzir a definição de integral para qualquer função em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Como no caso de funções simples não-negativas está integral estará sempre bem definida como um número em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 9.7 (Integral de Função Não-Negativa)**.** *A integral de Lebesgue de uma função $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ com respeito a medida μ é definida pela seguinte número real estendido*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \begin{array}{c} \varphi \in M^+(\Omega, \mathcal{F}), \ \varphi \text{ simples e} \\ 0 \leq \varphi(\omega) \leq f(\omega), \ \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\}.$$

Observe que se $f \in M^+(\Omega, F)$ então para todo $E \in \mathcal{F}$ temos que $1_E \cdot f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ e definimos a integral de f com respeito a μ sobre E sendo o número real estendido

$$\int_E f \, d\mu = \int_\Omega 1_E f \, d\mu.$$

Vamos mostrar a seguir que a integral é monótona com respeito a ambos, o integrando e o conjunto sobre o qual a integral é realizada.

Lema 9.8. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.*

a) Se $f, g \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ e $f \leq g$, então

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu.$$

b) Se $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ para qualquer par $E, F \in \mathcal{F}$, com $E \subset F$ temos que

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

Demonstração. Prova do item a). Como $f \leq g$ para toda função simples φ tal que $0 \leq \varphi \leq f$ temos que $0 \leq \varphi \leq g$. Assim segue das propriedades do supremo e da definição de integral que o item a) é verdadeiro.

Prova do item b). Já que $1_E f \leq 1_F f$ a prova segue do item anterior. ■

Já temos tudo preparado para apresentar um dos resultados mais importantes desta seção que é um teorema de B. Levi conhecido hoje em dia como Teorema da Convergência Monótona. Ele será fundamental na determinação de várias propriedades da integral de Lebesgue bem como base para outros teoremas de convergência de integrais.

9.2 O Teorema da Convergência Monótona e Lema de Fatou

Teorema 9.9 (Teorema da Convergência Monótona). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência monótona não decrescente em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Se f_n converge para uma função f, então temos que $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ e além do mais*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $f(\omega) < +\infty$, para todo $\omega \in \Omega$. Já que $f_n \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ e $f = \lim f_n \geq 0$ segue do Corolário 5.17 que $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Da monotonicidade da sequência $\{f_n\}$ e da integral de Lebesgue, temos que $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ e

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_{n+1} \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$ da sequência de números reais estendidos $\int_\Omega f_n \, d\mu$ e ele satisfaz a seguinte desigualdade

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu. \tag{9.3}$$

Para estabelecer a desigualdade oposta, seja $\alpha \in (0, 1)$ e φ uma função mensurável simples satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Defina a seguinte sequência de conjuntos

$$A_n = \{\omega \in \Omega : \alpha\varphi(\omega) \leq f_n(\omega)\}$$

Claramente $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também podemos observar que $A_n \subset A_{n+1}$. De fato, se $\omega \in A_n$ então temos que $\alpha\varphi(\omega) \leq f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ o que mostrar que $\omega \in A_{n+1}$. Afirmamos que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$. Para verificar que esta afirmação é verdadeira fixado $\omega \in \Omega$ seja $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < f(\omega) - \alpha\varphi(\omega)$. Para tal $\varepsilon > 0$ segue da desigualdade anterior e da convergência de f_n para f que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (que pode depender de ω) tal que se $n \geq N_0$ então $\alpha\varphi(\omega) < f(\omega) - \varepsilon < f_n(\omega)$, logo $\omega \in A_n$. Pelo lema anterior temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leq \int_{A_n} f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{9.4}$$

Já que $A_n \uparrow \Omega$ segue dos item c) do Lema 9.6 e da continuidade da medida que

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu.$$

Da desigualdade acima e de (9.4) temos

$$\alpha \int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $\alpha \in (0,1)$ podemos afirmar que

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Observando que φ é uma função simples arbitrária em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$, podemos concluir que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \begin{array}{c} \varphi \in M^+(\Omega, \mathcal{F}), \ \varphi \text{ simples e} \\ 0 \leq \varphi(\omega) \leq f(\omega), \ \forall \omega \in \Omega \end{array} \right\} \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Esta desigualdade junto com (9.3) encerra a prova do teorema para o caso em que $f(\omega) < +\infty$.

O caso em que existe pelo menos um $\omega \in \Omega$ tal que $f(\omega) = +\infty$ se reduz a provar que

$$\int_\Omega 1_{\{f=+\infty\}} \cdot f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\{f=+\infty\}} \cdot f_n \, d\mu. \tag{9.5}$$

Note que lado esquerdo da igualdade acima assume apenas os valores: zero ou $+\infty$, pois esta integral é dada por $\mu(\{f = +\infty\}) \cdot (+\infty)$. Já o limite que aparece na igualdade acima satisfaz para qualquer $k \geq 1$, a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\{f=+\infty\}} \cdot f_n \, d\mu &\geq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\{f=+\infty\}} \cdot 1_{\{f_n \geq k\}} \cdot f_n \, d\mu \\
&\geq k \cdot \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\{f=+\infty\}} \cdot 1_{\{f_n \geq k\}} \, d\mu \\
&\geq k \cdot \liminf_{n\to\infty} \mu\big(\{f = +\infty\} \cap \{f_n \geq k\}\big) \\
&\geq k \cdot \mu\Big(\liminf_{n\to\infty} (\{f = +\infty\} \cap \{f_n \geq k\})\Big) \\
&= k \cdot \mu(\{f = +\infty\}),
\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos o Lema de Fatou para funções indicadoras (Lema 4.4). Se $\mu(\{f = +\infty\}) > 0$ a igualdade (9.5) é imediata das desigualdades acima, já que são válidas para todo $k \in \mathbb{N}$. Caso $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$, basta observar que $f_n \leq +\infty$ e usar a monotonicidade da integral para ver que o lado direito de (9.5) é zero. ■

Observação 9.10. *Na prova do Teorema da Convergência Monótona, em nenhum dos casos analisados, foi assumido que ambos os lados da igualdade*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

eram finitos. O que usamos, principalmente no caso em que $f(\omega) < +\infty$ para todo $\omega \in \Omega$, foi na verdade que a sequência de número reais estendido $\{\int_\Omega f_n\, d\mu\}$ é uma sequência monótona não-decrescente de números reais estendido e que a mesma sempre tem limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que pode eventualmente não pertencer a $\mathbb{R}$.

Corolário 9.11. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, $f, g \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ e $c \in [0, +\infty)$, então*

a) $\displaystyle\int_\Omega cf\, d\mu = c \int_\Omega f\, d\mu.$

b) $\displaystyle\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$

Demonstração. Prova do item a). Se $c = 0$ então o resultado é imediato. Se $c > 0$, seja $\{\varphi_n\}$ uma sequência monótona não-decrescente de funções simples em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$ que converge para f. A existência de tal sequência é garantida pelo Teorema 5.21. Já que $c\varphi_n \uparrow cf$ podemos aplicar o item a) do Lema 9.6 e o Teorema da Convergência Monótona para verificar que são válidas as seguintes igualdades

$$\int_\Omega cf\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega c\varphi_n\, d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n\, d\mu = c \int_\Omega f d\mu$$

Prova do item b). Sejam $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ sequências monótonas não-decrescentes de funções simples em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$ que convergem para f e g, respectivamente. Claramente temos que $(\varphi_n + \psi_n) \uparrow (f+g)$. Segue do item b) do Lema 9.6 e do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int_\Omega f+g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n+\psi_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$$

∎

O próximo resultado é uma consequência do Teorema da Convergência Monótona e é um resultado muito importante para lidarmos com integrais de sequências de funções não-negativas que não são monótonas.

Lema 9.12 (Lema de Fatou)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}$ uma sequência arbitrária de funções em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Então*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Pela definição de ínfimo temos para qualquer $m \in \mathbb{N}$ fixado que $g_m \leq f_n$ para todo $n \geq m$. Portanto é válida a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega g_m\, d\mu \leq \int_\Omega f_n\, d\mu,$$

desde que $n \geq m$. Daí temos que

$$\int_\Omega g_m\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu. \tag{9.6}$$

Já que $g_m \leq g_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e que

$$\lim_{m\to\infty} g_m(\omega) \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega,$$

segue do Teorema da Convergência Monótona e da Desigualdade (9.6) que

$$\int_\Omega \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

■

Observação 9.13. *Será visto na Lista 3 que a conclusão do Lema de Fatou pode não ser verdadeira se não assumimos que $f_n \geq 0$.*

Corolário 9.14. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Então a aplicação $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ dada por*

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$$

é uma medida.

Demonstração. Já que $f \geq 0$ temos para todo $E \in \mathcal{F}$ que $\lambda(E) \geq 0$. Para verificar que $\lambda(\emptyset) = 0$, basta observar que $1_\emptyset \cdot f \equiv 0$. Para mostrar que λ é σ-aditiva, seja $\{E_n\}$ uma sequência em $\mathcal{F}$ mutuamente disjunta e defina

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} 1_{E_j} \cdot f.$$

Pelo Corolário **??** item b) temos que

$$\int_\Omega f_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega 1_{E_j} f\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j).$$

Observe que $f_n \uparrow 1_E f$, onde $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Pelo Teorema da Convergência Monótona temos que

$$\lambda(E) = \int_\Omega 1_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_E f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega 1_{E\cap E_j} f\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j),$$

onde na última igualdade usamos que a sequência $\{E_j\}$ é mutuamente disjunta para garantir que $E \cap E_j = E_j$. ■

Corolário 9.15. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Então $f = 0$ μ-quase certamente se, e somente se,*

$$\int_\Omega f\, d\mu = 0. \tag{9.7}$$

Demonstração. Suponha que vale a igualdade (9.7) e seja

$$E_n = \left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n} < f(\omega).\right\}$$

Da definição de E_n segue que $(1/n)1_{E_n} \leq f$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim

$$0 \leq \frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_\Omega f \, d\mu = 0.$$

O que implica que $\mu(E_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Já que o conjunto

$$\{\omega \in \Omega : 0 < f(\omega)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

tem medida μ zero, segue que $f = 0$ μ-quase certamente.

Reciprocamente, suponha que $f(\omega) = 0$ μ-quase certamente, então o conjunto $E = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}$ é tal que $\mu(E) = 0$. Seja $f_n = n \cdot 1_E$. Já que $f(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$ segue do Lema de Fatou que

$$0 \leq \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = 0.$$

■

Corolário 9.16. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Se $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ então a medida λ é absolutamente contínua com respeito a μ, ou seja, para todo $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$ temos que $\lambda(E) = 0$.*

Demonstração. Se $E \in \mathcal{F}$ é tal que $\mu(E) = 0$, então $f \cdot 1_E = 0$ μ-quase certamente. Pelo Corolário 9.15 temos que

$$\lambda(E) = \int_\Omega f \cdot 1_E \, d\mu = 0.$$

■

No que segue mostramos que o Teorema da Convergência Monótona contínua verdadeiro se a convergência da sequência f_n para f se verifica em quase certamente. O enunciado preciso deste resultado é enunciado abaixo.

Corolário 9.17. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência monótona não decrescente em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Se $f_n \to f$ μ-quase certamente e $f \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$ então*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $N \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(\omega) \to f(\omega)$ para todo $\omega \in M \equiv \Omega \setminus N$. Pela definição de M segue que a sequência $\{f_n \cdot 1_M\}$ converge (em todo Ω) para $f \cdot 1_M$, além do mais $f_n \cdot 1_M \uparrow f \cdot 1_M$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona temos

$$\int_\Omega f \cdot 1_M \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \cdot 1_M \, d\mu.$$

Por outro lado, como $\mu(N) = 0$ temos que as funções $f \cdot 1_N$ e $f_n \cdot 1_N$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) são nulas μ-quase certamente e pelo Corolário 9.15 temos que

$$\int_\Omega f \cdot 1_N \, d\mu = 0 = \int_\Omega f_n \cdot 1_N \, d\mu, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notando que $f = f \cdot 1_M + f \cdot 1_N$ e que $f_n = f_n \cdot 1_M + f_n \cdot 1_N$, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot 1_M \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \cdot 1_M \, d\mu. = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

■

Corolário 9.18. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $\{g_n\}$ uma sequência de funções em $\in M^+(\Omega, \mathcal{F})$. Então*

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Demonstração. Defina a sequência $f_n = g_1 + \ldots + g_n$. Claramente $f_n \in M^+(\Omega, \mathcal{F})$, $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n \to \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona obtemos o resultado desejado. ■

9.3 Integrais de Funções em $M(\Omega, \mathcal{F})$

Na seção anterior definimos a integral de uma função mensurável não-negativa em $M^+(\Omega, \mathcal{F})$ com respeito a uma medida μ definida sobre $\mathcal{F}$ e permitimos que este valor fosse $+\infty$. Nesta seção vamos discutir o conceito de integral de funções que podem tomar valores reais positivos e negativos. Neste contexto é mais conveniente exigir que os valores tanto das funções quanto da integrais sejam números reais.

Definição 9.19 (Integral de Lebesgue de Função Real)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Denotamos por $L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a coleção de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que são $\mathcal{F}$-mensuráveis e tais que ambas partes positiva e negativa de f são integráveis, ou seja,*

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty \quad e \quad \int_\Omega f^- \, d\mu < \infty.$$

Neste caso definimos a integral f com respeito a μ por

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu$$

e dizemos que f **é integrável**. *Analogamente à seção anterior, se $E \in \mathcal{F}$ então definimos*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Observação 9.20. *Embora a integral de uma função $f \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ seja definida como sendo a diferença entre as integrais de f^+ e f^- é fácil ver que se $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções não-negativas com integrais finitas, então*

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f_1\,d\mu - \int_\Omega f_2\,d\mu.$$

De fato, já que $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$ então $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Desta igualdade e do item b) do Corolário 9.11 segue que

$$\int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f_2\,d\mu = \int_\Omega f_1\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu$$

Já que todas os termos da igualdade acima são finitos obtemos

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu = \int_\Omega f_1\,d\mu - \int_\Omega f_2\,d\mu.$$

Cargas em $(\Omega, \mathcal{F})$

Se $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável uma função $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ é chamada de uma **carga** se $\lambda(\emptyset) = 0$ e λ é σ-aditiva, isto é, se $\{E_n\}$ é uma sequência de conjuntos mutuamente disjuntos de $\mathcal{F}$ então

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Existe uma sutileza muito grande nesta definição que está relacionada ao seguinte fato. Já que o lado esquerdo da igualdade acima é independente de qualquer reordenamento que se faça da coleção $\{E_n\}$ a igualdade acima requer no fundo que a série que aparece a direita seja incondicionalmente somável para todas as sequências disjuntas de conjuntos mensuráveis.

Exercício 9.21. *Mostre que o espaço de todas as cargas de um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde a soma de duas cargas λ_1 e λ_2 é definida por $(\lambda_1 + \lambda_2)(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E)$, $\forall E \in \mathcal{F}$ e a multiplicação de uma carga λ por um escalar real α é definida por $(\alpha \cdot \lambda)(E) = \alpha \cdot \lambda(E)$.*

Lema 9.22. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}\,\mu)$ um espaço de medida, $f \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Então a aplicação $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\lambda(E) = \int_E f\,d\mu \tag{9.8}$$

é uma carga.

Demonstração. Já que f^+ e f^- pertencem a $M^+(\Omega, \mathcal{F})$ segue do Corolário 9.14 que as funções λ^+ e λ^- definidas em $\mathcal{F}$ por

$$\lambda^+(E) \equiv \int_E f^+\,d\mu \qquad \text{e} \qquad \lambda^-(E) \equiv \int_E f^-\,d\mu$$

são medidas definidas sobre $\mathcal{F}$. Note que ambas são medidas finitas pois $f \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Já que $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ segue do Exercício 9.21 que λ é uma carga. ■

A função λ definida em (9.8) é frequentemente chamada de **integral indefinida de** f. Uma vez que λ é uma carga se $\{E_n\}$ é uma sequência mutuamente disjunta em $\mathcal{F}$ cuja união é E, então temos que

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

Nos referimos a esta igualdade dizendo que a *integral de uma função em* $L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *é contavelmente aditiva.*

O próximo resultado é as vezes chamado de *propriedade da integrabilidade absoluta* da integral de Lebesgue. Aqui vale mencionar que embora o valor absoluto de uma função Riemann integrável seja Riemann integrável em intervalos compactos, isto não é necessariamente verdadeiro para funções que possuem integral de Riemann imprópria, por exemplo considere a função $f(x) = x^{-1}\mathrm{sen}\, x$, definida no intervalo $1 \leq x < +\infty$.

Outra diferença importante que deve ser destacada é quanto ao uso da expressão *integrável* no contexto de integrais de Riemann e Lebesgue. No contexto de integral de Riemann integrabilidade de uma dada função se refere meramente a existência da integral de Riemann de tal função podendo ser $\pm\infty$. Na teoria de integração segundo Lebesgue, esta expressão é usada para dizer que tal função tem integral é finita.

Teorema 9.23. *Uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se, e somente se, $|f| \in L(\Omega,\, F, \mu)$. Além do mais é válida a seguinte desigualdade*

$$\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

Demonstração. Por definição temos que $f \in L(\Omega,\, F, \mu)$ se, e somente, se f^+ e $f^- \in L(\Omega,\, F, \mu)$. Já que $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$ a prova de que $|f| \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ segue do item b) do Corolário 9.11 e do Corolário 9.15. Para provar a desigualdade do enunciado basta observar que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f\,d\mu\right| &= \left|\int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu\right| \\
&\leq \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu \\
&= \int_\Omega |f|\,d\mu
\end{aligned}$$

■

Corolário 9.24. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis com $g \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e $|f| \leq |g|$ então $f \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.*

Demonstração. A prova segue da monotonicidade da integral e do teorema acima. ■

Nosso próximo passo é mostrar que a integral é linear no espaço $L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ no seguinte sentido.

Teorema 9.25. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço de medida,* $f, g \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu \quad e \quad \int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu.$$

Demonstração. Se $\alpha = 0$, então $\alpha f = 0$ em todo ponto e portanto

$$\int_\Omega \alpha f \, d\mu = 0 = \alpha \int_\Omega f \, d\mu.$$

Se $\alpha > 0$, então $(\alpha f)^+ = \alpha \cdot f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha \cdot f^-$, assim $\alpha \cdot f \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e também temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha \cdot f \, d\mu &= \int_\Omega \alpha \cdot f^+ \, d\mu - \int_\Omega \alpha \cdot f^- \, d\mu \\ &= \alpha \left(\int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_\Omega f \, d\mu. \end{aligned}$$

O caso $\alpha < 0$ pode ser tratado de maneira similar.

Vamos verificar agora que que $f + g \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Para isto basta notar que pelo teorema anterior temos $|f|$ e $|g| \in L(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Da desigualdade triangular segue que $|f + g| \leq |f| + |g|$. Aplicando corolário anterior temos que $f + g$ é integrável. Observe que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Já que $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ são funções não-negativas segue da Observação 9.20 que

$$\int_\Omega f + g \, d\mu = \int_\Omega (f^+ + g^+) \, d\mu - \int_\Omega (f^- + g^-) \, d\mu.$$

Aplicando o Corolário 9.11 e rearranjando os termos, no lado esquerdo da igualdade acima, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_\Omega f + g \, d\mu &= \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu + \int_\Omega g^- \, d\mu - \int_\Omega g^- \, d\mu \\ &= \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu. \end{aligned}$$

■

Vamos encerrar esta seção estabelecendo um dos teoremas de convergência mais importantes sobre funções integráveis.

9.4 Teorema da Convergência Dominada

Teorema 9.26 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}\ \mu)$ *um espaço de medida,* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis que converge* μ*-quase certamente para uma função mensurável* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Demonstração. A menos de redefinir as funções f_n e f em um conjunto de medida nula, podemos assumir que $f_n(\omega) \to f(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$. Já que $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que $|f| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leq g$ e do Corolário 9.24 que f é integrável. Já que $g + f_n \geq 0$ podemos aplicar o Teorema 9.25 Lema de Fatou para obter

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g\, d\mu + \int_\Omega f\, d\mu &= \int_\Omega (g+f)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (g+f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega g\, d\mu + \int_\Omega f_n\, d\mu \right) \\
&= \int_\Omega g\, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.
\end{aligned}$$

Já que g é integrável segue da desigualdade acima que

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Observando que $g - f_n \geq 0$ outra aplicação do Teorema 9.25 e do Lema de Fatou nos fornece a desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g\, d\mu - \int_\Omega f\, d\mu &= \int_\Omega (g-f)\, d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (g-f_n)\, d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega g\, d\mu - \int_\Omega f_n\, d\mu \right) \\
&= \int_\Omega g\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.
\end{aligned}$$

Usando novamente que g é integrável podemos concluir da desigualdade acima que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu.$$

Combinado as duas estimativas obtidas para a integral de f obtemos finalmente que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

∎

Aula 10

Medida Produto e o Teorema de Fubini

10.1 Espaço Produto

Considere $(X, \mathscr{X})$ e $(Y, \mathscr{Y})$ espaços mensuráveis. Já que o produto cartesiano de σ-álgebras não é necessariamente uma σ-álgebra, a construção mais simples que nos resta é considerar em $X \times Y$ a σ-álgebra gerada pelos *retângulos mensuráveis*, isto é, a σ-álgebra gerada pela coleção $\mathscr{R} = \{A \times B : \ A \in \mathscr{X}, B \in \mathscr{Y}\}$. A σ-álgebra gerada por $\mathscr{R}$ é conhecida como σ-álgebra produto e usamos a seguinte notação $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ para nos referirmos a esta σ-álgebra.

Proposição 10.1. *Sejam $(X, \mathscr{X})$ e $(Y, \mathscr{Y})$ espaços mensuráveis e $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ a sigma-álgebra produto em $X \times Y$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) Se $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ então, para cada $x \in X$ fixado, o conjunto $[y : (x, y) \in E] := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ é $\mathscr{Y}$-mensurável. De modo análogo, fixado $y \in Y$, o conjunto $[x : (x, y) \in E] := \{x \in X : (x, y) \in E\}$ é $\mathscr{X}$-mensurável.

b) Se $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ mensurável então, para cada $x \in X$ fixado, a função $y \mapsto f(x, y)$ é $\mathscr{Y}$-mensurável. De modo análogo, para cada $y \in Y$ fixo, a função $x \mapsto f(x, y)$ é $\mathscr{X}$-mensurável.

Demonstração. *Prova do item a).* Fixe $x \in X$ e considere a aplicação $T_x : Y \to X \times Y$ dada por $T_x(y) = (x, y)$. Note que se $E = A \times B \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ é um retângulo mensurável então $T_x^{-1}E = B$ ou $\varnothing$ dependendo apenas se A contém ou não o ponto x.

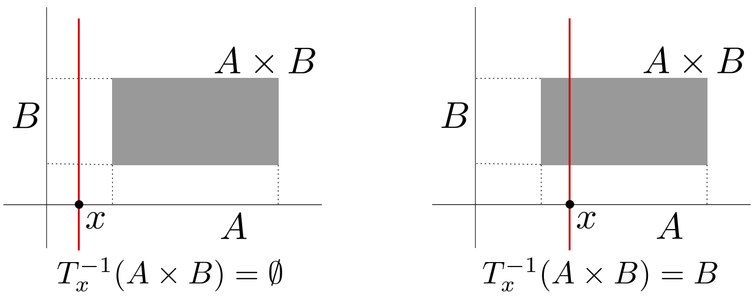

Figura 10.1

De qualquer forma em ambas situações temos que $T_x^{-1}E \in \mathscr{Y}$. Para mostrar que a afirmação também é válida para um conjunto E arbitrário de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, basta notar que $[y : (x, y) \in E] = T_x^{-1}(E)$ e usar o seguinte exercício

Exercício 10.2. *Sejam $(\Omega', \mathcal{F}')$ e $(\Omega, \mathcal{F})$ dois espaços mensuráveis e $T : \Omega' \to \Omega$ uma função. Suponha que $\mathcal{F} = \sigma(\mathscr{R})$ para alguma coleção $\mathscr{R}$ de subconjuntos de Ω. Se para todo $R \in \mathscr{R}$ temos $T^{-1}(R) \in \mathcal{F}'$ então $T^{-1}(E) \in \mathcal{F}'$ para todo $E \in \mathcal{F}$.*

A prova de que $[x : (x, y) \in E]$ é $\mathscr{X}$-mensurável é feita de forma completamente análoga considerando a aplicação $T_y : X \to X \times Y$, dada por $T_y(x) = (x, y)$.

Prova do item b). Fixado $x \in X$ podemos observar que a aplicação $y \mapsto f(x, y)$ é dada por $f \circ T_x$, onde $T_x : Y \to X \times Y$ é a aplicação definida na prova do item a). Já que f é $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurável temos do item a) para qualquer boreliano $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ que $(f \circ T_x)^{-1}(B) = T_x^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathscr{Y}$. Mostrando que $y \mapsto f(x, y)$ é $\mathscr{Y}$-mensurável para qualquer $x \in X$ fixado. A prova de que $x \mapsto f(x, y)$ é $\mathscr{X}$-mensurável para qualquer $y \in Y$ fixado é feita de maneira análoga. ■

Observação 10.3. *Os conjunto $[y : (x, y) \in E]$ e $[x : (x, y) \in E]$ são chamados de seções de E determinadas por x e por y, respectivamente. Do mesmo modo as funções $f(x, \cdot)$ e $f(\cdot, y)$ são chamadas as seções de f determinadas por x e por y respectivamente.*

10.2 Medida Produto

Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de medida. O objetivo nesta seção é definir uma medida π no produto cartesiano $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ tal que para todo retângulo mensurável $E = A \times B$ temos $\pi(E) = \mu(A)\nu(B)$. A seguir vamos ver que se μ e ν são medidas σ-finitas então existe uma única medida com a propriedade mencionada acima, que será chamada de *medida produto* e além do mais ela é a única medida em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ com tal propriedade.

Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de medida com μ e ν finitas. Segue da Proposição (10.1) que dado $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ a função $x \mapsto \nu([y : (x, y) \in E])$ está bem definida para todo $x \in X$ e assume valores no intervalo $[0, \infty)$. Analogamente para todo $y \in Y$ temos que a aplicação $y \mapsto \mu([x : (x, y) \in E])$ está bem definida e também toma valores em $[0, \infty)$. Seja $\mathscr{L}$ a coleção de todos os subconjuntos $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ para os quais as funções acima são $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$-mensuráveis, respectivamente.

Proposição 10.4. *A coleção $\mathscr{L}$, definida no parágrafo acima, coincide com a σ-álgebra $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que $\mathscr{L}$ é um λ-sistema. Primeiro vamos mostrar que $E = X \times Y \in \mathscr{L}$. Para verificar que a afirmação é verdadeira basta observar que $\nu([y : (x, y) \in X \times Y]) = \nu(Y) < \infty$, para todo $x \in X$. Já que a função $x \mapsto \nu([y : (x, y) \in X \times Y]) \equiv \nu(Y)$ é constante ela é claramente $\mathscr{X}$-mensurável.

Vamos mostrar agora que a coleção $\mathscr{L}$ é fechada para complementação. Seja $E \in \mathscr{L}$. Usando propriedades elementares de medida podemos afirmar que

$$\nu([y : (x, y) \in E^c]) = \nu(Y) - \nu([y : (x, y) \in E]).$$

Já que o lado direito da igualdade acima define uma função mensurável com respeito a $\mathscr{X}$ pois, qualquer função constante é $\mathscr{X}$-mensurável e $\nu([y : (x, y) \in E)$ é $\mathscr{X}$-mensurável por hipótese, segue que $x \to \nu([y : (x, y) \in E^c])$ é $\mathscr{X}$-mensurável. Este fato mostra que $\mathscr{L}$ é uma coleção fechada para complementação.

Vamos mostrar agora que se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita de conjuntos mutuamente disjuntos em $\mathscr{L}$, então $\cup_{n\geq 1}E_n \in \mathscr{L}$. Para provar este fato primeiro observamos que $[y : (x, y) \in \cup_{n\geq 1}E_n] = \cup_{n\geq 1}[y : (x, y) \in E_n]$, sendo a sequência de conjuntos que aparece no lado direito desta igualdade mutuamente disjunta. Daí segue da σ-aditividade de ν que

$$\nu\big([y : (x, y) \in \cup_{n\geq 1}E_n]\big) = \sum_{n\geq 1} \nu([y : (x, y) \in E_n])$$

Por hipótese temos que, para cada $n \geq 1$, a aplicação $x \mapsto \nu([y : (x, y) \in E_n])$ é $\mathscr{X}$-mensurável. Assim segue do Lema 5.16 (olhando para a série acima, como limite da sequência das somas parciais) que $x \mapsto \nu\big([y : (x, y) \in \cup_{n\geq 1}E_n]\big)$ é $\mathscr{X}$-mensurável. Este fato encerra a prova de que $\mathscr{L}$ é um λ-sistema.

Agora vamos provar que $\mathscr{L}$ contém o π-sistema dos retângulos mensuráveis $\mathscr{R}$. De fato, se $E = A \times B \in \mathscr{R}$ vimos na prova da Proposição 10.1 que

$$[y : (x, y) \in A \times B] = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } x \notin A; \\ B, & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

Desta igualdade segue que $\nu([y : (x, y) \in A \times B]) = 1_A(x)\nu(B)$ e desta forma a função $x \mapsto \nu([y : (x, y) \in A \times B])$ é $\mathscr{X}$-mensurável, para qualquer $A \times B \in \mathscr{R}$ mostrando que este π-sistema está contido em $\mathscr{L}$.

Pelo Teorema π-λ de Dynkin temos finalmente que $\mathscr{X} \times \mathscr{Y} = \sigma(\mathscr{R}) \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ concluindo a demonstração. ∎

Contrução da Medida Produto - Caso de Medidas Finitas

Vamos apresentar a seguir a construção da medida produto no caso em que ambos espaços $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ são espaços de medida finita. Primeiro observamos que a mensurabilidade garantida pela Proposição 10.1, junto com a não-negatividade das funções $x \mapsto \nu([y : (x, y) \in E])$ e $y \mapsto \mu([x : (x, y) \in E])$ nos permite definir as seguintes funções de conjunto π_1 e π_2, como segue

$$\pi_1(E) = \int_X \nu([y : (x, y) \in E])\, d\mu(x), \qquad E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \tag{10.1}$$

e

$$\pi_2(E) = \int_Y \mu([x : (x, y) \in E])\, d\nu(y), \qquad E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}. \tag{10.2}$$

Como estamos assumindo que $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ são espaços de medida finita é imediato verificar que tanto π_1 quanto π_2 são funções de conjunto finitas em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Afirmamos que π_1 e π_2 definem medidas sobre $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y})$. Vamos apresentar apenas a prova de que π_1 é uma medida, já que a prova deste fato para π_2 é completamente análoga.

É fácil ver que $\pi_1(\emptyset) = 0$ e que $\pi_1(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Para provar que π_1 é σ-aditiva, considere $\{E_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ de conjuntos mutuamente disjuntos. Usando que ν é uma medida em Y temos que

$$\nu([y : (x,y) \in \cup_{j=1}^{n} E_j]) = \sum_{j=1}^{n} \nu([y : (x,y) \in E_j]) := \varphi_n(x).$$

Pela continuidade da medida ν podemos afimar que $\varphi_n(x) \to \nu([y : (x,y) \in \cup_{j\geq 1} E_j])$, para todo $x \in X$. Já que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções monótona, $\mathscr{X}$-mensuráveis e não-negativas segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\begin{aligned}
\pi_1(\cup_{j\geq 1} E_j) &= \int_X \nu([y : (x,y) \in \cup_{j\geq 1} E_j])\, d\mu(x) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j=1}^{n} \nu([y : (x,y) \in E_j])\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_X \nu([y : (x,y) \in E_j])\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi_1(E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_1(E_j).
\end{aligned}$$

Para o caso especial em que $E = A \times B \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ é um retângulo mensurável, temos que $\nu([y : (x,y) \in E]) = 1_A(x)\nu(B)$ e $\mu([x : (x,y) \in E]) = 1_B(y)\mu(A)$, e desta forma temos

$$\pi_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \pi_2(A \times B).$$

Assim as medidas π_1 e π_2 coincidem no π-sistema $\mathscr{R}$. A menos de uma normalização por um fator de $\mu(X)\nu(Y)$, podemos supor que ambas π_1 e π_2 são medidas de probabilidade e aplicar o Corolário 2.16 que garante a igualde $\pi_1 = \pi_2$ em $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Construção da Medida Produto - Caso de Medidas σ-finitas

Próximo passo é generalizar a construção feita acima para o caso que ambos espaços $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ são espaços de medida σ-finitos.

Como estamos assumindo que os espaços $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ são σ-finitos, sabemos que existem sequências $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, respectivamente tais que $\cup_{m\geq 1} A_m = X$ e $\cup_{m\geq 1} B_n = Y$ e além do mais $\mu(A_m) < \infty$ e $\nu(B_n) < \infty$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que ambas sequências são crescentes, i.e., $A_m \subset A_{m+1}$ e $B_n \subset B_{n+1}$. Defina para cada $m, n \in \mathbb{N}$ as seguintes medidas $\mu_m(A) = \mu(A \cap A_m)$ e $\nu_n(B) = \nu_n(B \cap B_n)$.

Pelos resultados da seção anterior podemos definir em $(X \times Y, \mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ as seguintes medidas

$$\pi_1^{m,n}(E) = \int_X \nu_n([y : (x, y) \in E])\, d\mu_m(x), \qquad E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \tag{10.3}$$

e

$$\pi_2^{m.n}(E) = \int_Y \mu_m([x : (x, y) \in E])\, d\nu_n(y), \qquad E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \tag{10.4}$$

e vimos que ambas medidas coincidem em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. A ideia é mostrar que existem os seguintes limites:

$$\lim_{m\to\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \pi_1^{m,n}(E) \Big) := \pi_1(E) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{m\to\infty} \pi_2^{m,n}(E) \Big) := \pi_2(E),$$

onde π_1 e π_2 são medidas σ-finitas com $\pi_1 = \pi_2$ em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Vamos apresentar o argumento da existência do primeiro limite acima. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixado. Por definição temos que

$$\pi_1^{m,n}(A) = \int_X \nu_n([y : (x, y) \in E])\, d\mu_m(x)$$

Procedendo como na seção anterior podemos ver que para qualquer $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ a aplicação $x \mapsto \nu_n([y : (x, y) \in E])$ define uma função $\mathscr{X}$-mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar esta aplicação por φ_n. Note que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) := \nu_n([y : (x, y) \in E]) &= \nu([y : (x, y) \in E] \cap B_n) \\
&= \nu([y : (x, y) \in E \cap X \times B_n]) \\
&\le \nu([y : (x, y) \in E \cap X \times B_{n+1}]) \\
&= \nu([y : (x, y) \in E] \cap B_{n+1}) \\
&= \varphi_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Já que $\cup_{n\ge1} B_n = Y$ segue da continuidade da probabilidade que $\varphi_n(x) \uparrow \nu([y : (x, y) \in E])$, para todo $x \in X$. Fixado $m \in \mathbb{N}$ segue do Teorema da Convergência Monótona que o seguinte limite existe

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \pi_1^{m,n}(E) &= \lim_{n\to\infty} \int_X \nu_n([y : (x, y) \in E])\, d\mu_m(x) \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} \nu_n([y : (x, y) \in E \cap X \times B_n])\, d\mu_m(x) \\
&= \int_X \nu([y : (x, y) \in E])\, d\mu_m(x)
\end{aligned}$$

É fácil ver para qualquer função $\mathscr{X}$-mensurável $g : X \to [0, +\infty]$ que

$$\int_X g\, d\mu_n = \int_{A_m} g\, d\mu.$$

Usando este fato na igualdade obtida acima, conjuntamente com o Teorema da Convergência Monótona concluímos que existe o seguinte limite

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\pi_1^{m,n}(E) &= \lim_{m\to\infty}\int_X \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu_m(x)\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_{X\cap A_m} \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x)\\ &= \int_X \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x).\end{aligned}$$

De forma análoga temos que

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\pi_2^{m,n}(E) = \int_Y \mu([x:(x,y)\in E])\,d\nu(x).$$

Da seção anterior segue que $\pi_1^{m,n}(E) = \pi_2^{m,n}(E)$. Portanto resta mostrar apenas que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\pi_1^{m,n}(E) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\pi_1^{m,n}(E). \tag{10.5}$$

O lado esquerdo da última igualdade foi avaliado logo acima. Para verificar que a última igualdade é válida basta aplicar duas vezes o Teorema da Convergência Monótona como segue

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\pi_1^{m,n}(E) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_X \nu_n([y:(x,y)\in E])\,d\mu_m(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{X\cap A_m} \nu_n([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X \nu_n([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x)\\ &= \int_X \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Usando a igualdade (10.5) e os valores calculados destes limites segue que

$$\begin{aligned}\int_X \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\pi_1^{m,n}(E)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\pi_2^{m,n}(E)\\ &= \int_Y \mu([x:(x,y)\in E])\,d\nu(x).\end{aligned}$$

Desta forma podemos definir uma medida $\pi : \mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to[0,\infty]$ tal que para qualquer conjunto $E\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ temos

$$\pi(E) := \pi_1(E) = \pi_2(E)$$

e além do mais

$$\int_X \nu([y:(x,y)\in E])\,d\mu(x) = \pi_1(E) = \pi_2(E) = \int_Y \mu([x:(x,y)\in E])\,d\nu(x).$$

A medida π possui a seguinte propriedade. Para qualquer retângulo mensurável $A \times B \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ temos que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Uma vez que $\{A_m \times B_m : m \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura de $X \times Y$ segue da propriedade acima que π é uma medida σ-finita. Para verificar que π é a única medida com esta propriedade basta notar que qualquer medida λ satisfazendo $\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$ necessariamente coincide com π na álgebra dos retângulos mensuráveis $\mathscr{R}$. Logo ambas, pelo Teorema de Carathéodory, admitem extensão única a $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ e portanto temos que $\pi = \lambda$.

A medida π é comumente chamada de **medida produto** e usamos a notação $\pi = \mu \times \nu$ para indicar esta medida.

10.3 Teorema de Fubini-Tonelli

Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de medida com μ e ν medidas σ-finitas. Considere na σ-álgebra produto $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ a medida produto $\pi = \mu \times \nu$ e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurável. O objetivo nesta seção é encontrar condições suficientes sobre a função f que garantam a validade das seguintes igualdades:

$$\int_{X\times Y} f d\pi = \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) \tag{10.6}$$

e

$$\int_{X\times Y} f\, d\pi = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y). \tag{10.7}$$

Seria desejável que as expressões (10.6) e (10.7) fossem válidas para todas as funções $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ mensuráveis. Em geral, isto não será verdadeiro. Mas podemos provar a validade destas igualdades se adicionamos à hipotese de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurabilidade a condição de f ser não-negativa. Este resultado é conhecido na literatura como Teorema de Tonneli. Se permitimos que f tome valores positivos e negativos é possível garantir a validade de (10.6) e (10.7) assumindo a integrabilidade de f. Este resultado é o conhecido como Teorema de Fubini.

Teorema 10.5 (Tonelli)**.** *Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de medida. Suponha que μ e ν sejam medidas σ-finitas. Considere na σ-álgebra produto $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ a medida produto $\pi = \mu \times \nu$ e seja $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurável* ***não-negativa****. Nestas condições as funções*

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad e \quad y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x) \tag{10.8}$$

são $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$-mensuráveis, respectivamente e além do mais valem (10.6) e (10.7).

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que o teorema é válido para funções da forma 1_E, $E \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Neste caso as funções em (10.11) são dadas por $x \mapsto \nu([y : (x,y) \in E])$ e $y \mapsto \mu([x : (x,y) \in E])$, respectivamente e a mensurabilidade destas funções com respeito as σ-álgebras $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ é garantida pelo Proposição 10.4.

Agora vamos calcular separadamente os lados direito e esquerdo de (10.6) e (10.7) e mostrar que eles coincidem. O lado esquerdo de (10.6) foi obtido na seção anterior e é dado por

$$\int_{X\times Y} 1_E \, d\pi = \mu \times \nu(E) = \int_X \nu([y : (x, y) \in E]) d\mu(x). \tag{10.9}$$

Por outro lado, note que para cada $x \in X$ fixado

$$1_E(x, \cdot) = 1_{[y:(x,y)\in E]}(\cdot)$$

e além disto segue da Proposição 10.1 que esta função é $\mathscr{Y}$-mensurável. Por outro lado, temos diretamente da definição da integral de Lebesgue que

$$\int_X \left[\int_Y 1_E(x, y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_X \nu([y : (x, y) \in E]) d\mu(x) \tag{10.10}$$

e portanto (10.6) está provada. De modo análogo verificamos que vale (10.7).

Da linearidade da integral e do exposto acima concluímos a mensurabilidade das funções em (10.11) com respeito a suas respectivas σ-álgebras e também que as igualdades (10.6) e (10.7) são válidas para quaisquer funções simples desde que sejam $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensuráveis. O próximo passo é "aproximar" f por uma sequência monótona não-decrescente de funções simples. Como estamos assumindo que f é não-negativa, esta aproximação pode ser feita via o Teorema (5.21). Já que o limite pontual de funções mensuráveis é uma função mensurável (Corolário 5.17) basta usar o Teorema de Convergência Monótona para verificar a mensurabilidade de 10.11 e a validade de (10.6) e (10.7) para qualquer função f não-negativa e $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurável. ■

Teorema 10.6 (Fubini). *Sejam $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ espaços de medida com μ e ν medidas σ finitas. Seja $\pi = \mu \times \nu$ a medida produto definida em $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$-mensurável tal que $|f|$ seja integrável. Nestas condições as funções*

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad e \quad y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \tag{10.11}$$

são $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$-mensuráveis, respectivamente e além do mais valem (10.6) e (10.7).

Demonstração. Já que $|f|$ é uma função não-negativa e integrável, temos pelo Teorema de Tonelli que

$$\int_X \left[\int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int_{X\times Y} |f| \, d\pi < \infty. \tag{10.12}$$

Observe que a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \int_Y |f(x, y)| d\nu(y)$ satisfaz $\varphi(x) < \infty$ μ-q.t.p. Seja $A_0 = \{x \in X : \varphi(x) < \infty\}$. Então temos que $\mu(X \backslash A_0) = 0$ e para todo $x \in A_0$ vale a seguinte igualdade

$$\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) = \int_Y f^+(x, y) \, d\nu(y) - \int_Y f^-(x, y) \, d\nu(y). \tag{10.13}$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
&\int_X \left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) \\
&\qquad = \int_{A_0} \left[\int_Y f(x,y) d\nu\right] d\mu(x) + \underbrace{\int_{X\setminus A_0} \left[\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) d\mu(x)\right]}_{=0} \\
&\qquad = \int_{A_0} \left[\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) - \int_{A_0} \left[\int_Y f^-(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) \\
&\qquad = \int_X \left[\int_Y f^+(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) - \int_X \left[\int_Y f^-(x,y) d\nu(y)\right] d\mu(x) \\
&\qquad = \int_{X\times Y} f^+\,d\pi - \int_{X\times Y} f^-\,d\pi \\
&\qquad = \int_{X\times Y} f\,d\pi,
\end{aligned}$$

onde da antepenúltima para a penúltima linha usamos o Teorema de Tonelli. ∎

Contra-exemplos

Contra-exemplo 1. Sejam ambos $(X, \mathscr{X}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{Y}, \nu)$ iguais ao espaço de probabilidade (portanto σ-finitos) $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue no intervalo $[0,1]$. Vamos mostrar que não podemos remover do enunciado do Teorema de Fubini a hipótese de $|f|$ ser integrável. Para isso considere uma sequência $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ com $0 = \delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n < \cdots$ e $\delta_n \to 1$. Seja (g_n) uma sequência de funções reais contínuas **não-negativas** definidas em $[0,1]$ de forma que cada g_n tem suporte em (δ_n, δ_{n+1}) e satisfaz $\int_0^1 g_n(t)dt = 1$. Considere a função $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)] g_n(y).$$

Note que f está bem definida pois, para cada par $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ no máximo um dos termos da série que define f é não nulo. Também não temos problemas quanto à mensurabilidade de f uma vez que f é limite pontual de funções contínuas e portanto $\mathscr{B}([0,1])$-mensuráveis.

Primeiro vamos mostrar que a integral iterada

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx = 1. \tag{10.14}$$

De fato, da definição de f segue que a aplicação $\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy$ é dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{se } x < \delta_2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando definição de g_1 verificamos que a igualdade 10.15 é verdadeira. Vamos mostrar agora que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dx \right] dy = 0. \tag{10.15}$$

Esta integral iterada é bem mais simples de ser calculada do que a anterior, já que para cada $y \in [0,1]$ fixado apenas uma parcela temos diretamente da definição de f que $\int_0^1 f(x,y)\, dx = 0$. Desta forma a conclusão do Teorema de Fubini falha, embora ambas integrais iteradas existam. Neste exemplo f é contínua em $[0,1] \times [0,1] \backslash \{(1,1)\}$ mas não satisfaz a hipótese de integrabilidade. De fato, pelo Teorema de Tonelli e pela definição de f temos

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x,y)|\, dy \right] dx = +\infty.$$

Contra-exemplo 2. Neste contraexemplo, vamos mostrar que não podemos remover também a hipótese de σ-finitude das medidas no Teorema de Fubini e Tonelli.

Sejam $X = Y = [0,1]$, $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{B}([0,1])$, λ medida de Lebesgue em $[0,1]$ e μ medida da contagem em $[0,1]$. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então para todo $y \in [0,1]$ temos $\int_0^1 f(x,y)\, d\lambda(x) = 0$. Por outro lado, para todo $x \in [0,1]$ temos que $\int_0^1 f(x,y)\, d\mu(y) = \mu(\{y\}) = 1$. Portanto teremos

$$\int_{[0,1]} \left[\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\mu(y) \right] d\lambda(x) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \left[\int_{[0,1]} f(x,y)\, d\lambda(x) \right] d\mu(y).$$

Aula 11

Teorema da Existência de Kolmogorov

11.1 Regularidade de Medidas Definidas em $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Seja (Ω, τ) um espaço topológico e $\mathscr{B}(\tau)$ a σ-álgebra gerada pela topologia τ, em outras palavras a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos. Nesta seção vamos estar interessados no caso especial em que $\Omega = \mathbb{R}^n$ e τ é a topologia usual do espaço Euclideano n-dimensional, isto é, a topologia induzida pela norma Euclideana. Neste caso teremos $\mathscr{B}(\tau) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 11.1 (Medidas de Borel Regular)**.** *Seja (Ω, τ) um espaço topológico. Uma medida de Borel em Ω é uma medida definida sobre a σ-álgebra de Borel de Ω, i.e., $\mu : \mathscr{B}(\tau) \to [0, +\infty]$. Uma medida de Borel μ em Ω é dita* **regular** *quando satisfaz as seguintes condições para todo $E \in \mathscr{B}(\tau)$:*

1. $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subseteq A,\ \text{com } A \text{ aberto em } \Omega\}$;
2. $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E,\ \text{com } K \text{ compacto em } \Omega\}$;
3. $\mu(K) < +\infty$ *para todo K compacto em Ω.*

No que segue mostramos que toda medida de Borel finita definida sobre $\mathbb{R}^n$ é regular. Na verdade esta afirmação pode ser provada em um contexto um pouco mais geral, onde consideramos medidas definidas sobre espaços métricos completos com a σ-álgebra e topologias adequados.

Teorema 11.2. *Se μ é uma medida de Borel sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(\mathbb{R}^n) < +\infty$ então μ é regular.*

Demonstração. Considere a seguinte coleção

$$\mathscr{C} := \{E \subset \mathbb{R}^n : \text{ as condições 1-3 da Definição 11.1 são satisfeitas } \}.$$

Vamos mostrar que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra e também que $\mathscr{C}$ contém a coleção de todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ o que nos permite concluir que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{C}$.

Começamos provando que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra. Claramente $\emptyset \in \mathscr{C}$. Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de subconjuntos de $\mathscr{C}$. Vamos mostrar que $E = \cup_{n\geq 1} E_n \in \mathscr{C}$. Fixe $\varepsilon > 0$. Usando que μ é uma medida finita e a definição de regularidade, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um aberto A_n, com $E_n \subseteq A_n$ e um compacto K_n, com $K_n \subseteq E_n$ tais que

$$\mu(A_n - K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

A sequência $F_n = \cup_{m=1}^{n} E_m$ é uma sequência crescente tal que $\cup_{n\geq 1} F_n = E$, portanto segue da continuidade da medida μ que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} E_m\right) = \mu(E).$$

Já que $\mu(E) < +\infty$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(E) - \mu(F_N) < \varepsilon.$$

Seja $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_N$. Pela definição de $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos que K é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e também que $K \subseteq E$. Usando propriedades das operações de conjuntos, a σ-aditividade de μ e a definição de A_n e K_n temos que

$$\mu(F_N - K) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{N} (E_m - K_m)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{N} (A_m - K_m)\right) \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^m} < \varepsilon.$$

Usando as duas estimativas em destaque acima podemos verificar que

$$\mu(E) - \mu(K) = \mu(E) - \mu(F_N) + \mu(F_N) - \mu(K) < 2\varepsilon.$$

Já que $K \subset E$, a desigualdade acima que mostra a condição 2 da Definição 11.1 é satisfeita para E. Como μ é uma medida finita sobre $\mathbb{R}^n$ segue que E satisfaz a condição 3 da Definição 11.1.

Vamos verificar que a condição 2 também satisfeita. Para isto defina $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. O conjunto A é aberto, A contém E e além do mais pela definição de A_n e K_n temos a seguinte desigualdade

$$\mu(A) - \mu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n - K_n) < \varepsilon,$$

o que implica que a condição 2 é satisfeita. Portanto podemos concluir que $E \in \mathscr{C}$.

Vamos verificar agora que $\mathscr{C}$ é fechada para complementação. Sejam $E \in \mathscr{C}$ e $\varepsilon > 0$. Então existe um compacto K e um aberto U tais que $K \subseteq E \subseteq A$ com $\mu(A - K) < \varepsilon$. Tomando complementares temos $A^c \subseteq E^c \subseteq K^c$. Note que $K^c - A^c = A - K$ e portanto $\mu(K^c - A^c) = \mu(A - K) < \varepsilon$. Claramente K^c é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e portanto podemos concluir da estimativa acima que $\mu(K^c) - \mu(E^c) = \mu(K^c - E^c) < \mu(K^c - A^c) < \varepsilon$ e assim que a condição 1 da Definição 11.1 é satisfeita para E^c.

Por outro lado não é possível afirmar que o conjunto A^c seja compacto, embora seja fechado. Para corrigir este problema observamos que $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como união de uma sequencia crescente de bolas fechadas, $\{\overline{B(0,n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que são compactos. Portanto temos da continuidade da medida μ que $\mu(\overline{B(0,n)}) \to \mu(\mathbb{R}^n)$, quando $n \to \infty$. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\mathbb{R}^n) - \mu(\overline{B(0,N)}) < \varepsilon$. Definimos $\widetilde{K} = A^c \cap \overline{B(0,N)}$. Já que $\widetilde{K}$ é dado como interseção de um fechado com um compacto segue que $\widetilde{K}$ é compacto. Além do mais temos que $\widetilde{K} \subseteq A^c$. Já que o conjunto $A^c - \widetilde{K}$ está contido no complementar de $\overline{B(0,N)}$ temos que $\mu(A^c - \widetilde{K}) < \varepsilon$. No parágrafo anterior já havíamos observado que $A^c \subseteq E^c \subseteq K^c$ e $\mu(K^c - A^c) = \mu(A - K) < \varepsilon$. Portanto podemos concluir que $\mu(E^c - A^c) < \varepsilon$ e

$$\mu(E^c) - \mu(\widetilde{K}) = \mu(E^c - \widetilde{K}) = \mu(E^c - A^c) + \mu(A^c - \widetilde{K}) < 2\varepsilon.$$

Como a desigualdade acima implica na condição 2 da Definição 11.1 para E^c segue que $\mathscr{C}$ é fechada para complementação e isto completa a prova de que $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra.

Vamos mostrar que todo aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ pertence a coleção $\mathscr{C}$. Claramente a condição 3 da Definição 11.1 é satisfeita pois, μ é finita. A condição 1 da Definição 11.1 também é satisfeita pois, podemos tomar $A = E$. Resta mostrar que a condição 2 da Definição 11.1 é satisfeita. Já que E é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que o conjunto

$$F_n = \left\{ x \in E : d(E^c, x) \geq \frac{1}{n} \right\}, \text{ onde } d(E^c, x) = \inf\{\|y - x\| : y \in E^c\}$$

é um um fechado de $\mathbb{R}^n$. Note que $F_n \subset F_{n+1}$ e também que $\cup_{n\geq 1} F_n = E$. Pela continuidade de μ podemos afirmar que $\mu(F_n) \uparrow \mu(E)$. Se fosse possível garantir que F_n é compacto para todo $n \in \mathbb{N}$ então teríamos provado a condição 2. Isto é de fato verdadeiro quando E é um conjunto limitado. Para o caso geral, tomamos $K_n = F_n \cap \overline{B(0,n)}$. Note que K_n é compacto para todo $n \in \mathbb{N}$ e também que $K_n \subset K_{n+1}$ e $\cup_{n\geq 1} K_n = E$. Assim segue da continuidade de μ que $\mu(K_n) \uparrow \mu(E)$ e portanto a condição 2 da Definição 11.1 se verifica para todo E aberto. Isto conclui a prova de que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ pertence a $\mathscr{C}$.

Como $\mathscr{C}$ é uma σ-álgebra que contém os abertos, segue que $\mathscr{C}$ contém $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ e isto completa a prova que toda medida de Borel finita em $\mathbb{R}^n$ é regular. ■

11.2 Teorema de Kolmogorov para Produtos Cartesianos Enumeráveis

Na Aula 8 apresentamos a prova do Teorema da Existência de Kolmogorov em uma de suas versões mais simples. Isto foi feito na seção chamada *A Medida Produto em* $\{0, 1, \ldots, n\}^{\mathbb{N}}$. Nesta seção vamos mostrar como estender a construção apresentada na seção mencionada acima, para o espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. O produto cartesiano infinito $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pode ser pensado como o espaço de todas as sequências de números reais $(x_1, x_2, \ldots)$ ou equivalentemente como o espaço $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}$. É muito comum também denotar este espaço por $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ fixados considere o seguinte subconjunto $E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Os conjuntos desta forma serão chamados de conjuntos cilíndricos ou cilindros finito dimensionais. A coleção de todos os conjuntos desta forma é chamada de coleção dos conjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. A σ-álgebra gerada pelo conjuntos cilíndricos será chamada de σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e será denotada por $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

As famílias de medidas de probabilidade que aparecem no Teorema de Kolmogorov são tais que para cada $n \geq 1$ temos uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo a seguinte condição de consistência

$$\mathbb{P}_{n+1}(E \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}_n(E), \ \forall \ E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

Nossa tarefa é mostrar que podemos construir uma medida $\mathbb{P}$ definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para qualquer Boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$ temos

$$\mathbb{P}(E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots) = \mathbb{P}_n(E).$$

Vamos usar a notação $\mathcal{F}_n$ para indicar a coleção de todos os conjuntos cilíndricos da forma $E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ com $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. É fácil ver que $\mathcal{F}_n$ é uma álgebra de conjuntos para cada $n \in \mathbb{N}$. Também podemos verificar que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots$

Uma vez que a coleção $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ é uma união crescente de σ-álgebras podemos concluir que esta união tem estrutura de **álgebra**, mas certamente **não** é uma σ-álgebra.

Qualquer σ-álgebra que contém a álgebra $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ contém todos os cilindros da forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ para qualquer $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e por esta razão chamamos $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = \sigma\big(\cup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\big)$ da σ-álgebra produto no produto cartesiano infinito $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Antes de passarmos ao enunciado e a prova do Teorema de Kolmogorov propriamente dito, vamos apresentar, na sequência, um resultado (Teorema 11.3) de natureza técnica que será crucial na prova do Teorema de Existência de Kolmogorov no caso de produtos infinitos enumeráveis.

Interseção de Cilindros Encaixantes em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Um dos ingredientes chaves na prova do Teorema de Kolmogorov é um fato técnico que será usado durante a prova do teorema de Kolmogorov para garantir que a interseção de uma certa sequência decrescente de cilindros de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é não-vazia. Enunciamos este resultado de maneira precisa abaixo.

Teorema 11.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja C_n um conjunto compacto não-vazio de $\mathbb{R}^n$. Suponha que estes conjuntos satisfaçam as seguintes condições: para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in C_{n+1}$ implica $(x_1, \ldots, x_n) \in C_n$. Então existe uma sequência $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Fixados dois números naturais m e n satisfazendo $1 \leq m \leq n$ defina a projeção $\pi_m^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $\pi_m^n(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Já que π_m^n é uma aplicação contínua e C_n é um compacto não-vazio (por hipótese) podemos concluir que $\pi_m^n(C_n)$ é um subconjunto compacto não-vazio de $\mathbb{R}^m$.

Afirmamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, a coleção de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$ dada por $\{\pi_m^k(C_k) : k \geq m\}$, determina uma sequência decrescente de compactos de $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\ldots \subseteq \pi_m^{m+2}(C_{m+2}) \subseteq \pi_m^{m+1}(C_{m+1}) \subseteq \pi_m^m(C_m). \tag{11.1}$$

Vamos provar a afirmação. Fixe naturais m, n tais que $m \leq n$ e tome um ponto qualquer $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in C_{n+1}$. Por hipótese podemos afirmar que $x' =$

$(x_1,\ldots,x_n) \in C_n$. Logo $\pi_m^{n+1}(x) = (x_1,\ldots,x_m) = \pi_m^n(x') \subseteq \pi_m^n(C_n)$. Portanto todo ponto de $\pi_m^{n+1}(C_{n+1})$ pertence a $\pi_m^n(C_n)$ e isto prova a afirmação.

Pelo Teorema de Cantor a sequência de subconjuntos compactos encaixantes da reta dada por

$$\ldots \subseteq \pi_1^3(C_3) \subseteq \pi_1^2(C_2) \subseteq \pi_1^1(C_1) = C_1 \tag{11.2}$$

tem interseção não vazia. Seja x_1 um ponto arbitrário nesta interseção. Por construção $x_1 \in \pi_1^n(C_n)$ para todo $n \geq 1$. Pela definição da projeção π_1^n sabemos que existe pelo menos um ponto $(y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $(x_1,y_2,\ldots,y_n) \in C_n$. Esta observação mostra que o conjunto $C_n(x_1) \equiv \{(y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1,y_2,\ldots,y_n) \in C_n\}$ é não vazio. Note que $C_n(x_1) = (\pi_n^1)^{-1}(x_1) \cap C_n$. Já que o conjunto unitário $\{x_1\}$ é fechado segue da continuidade de π_n^1 que o conjunto $C_n(x_1) = (\pi_n^1)^{-1}(x_1) \cap C_n$ é a interseção de um fechado com um compacto e portanto $C_n(x_1)$ é compacto. Além do mais $C_2(x_1), C_3(x_1), \ldots$ satisfaz a mesma condição que satisfaz a sequência original $C_1, C_2, \ldots$, isto é, para todo $(y_2,\ldots,y_{n+1}) \in C_{n+1}(x_1)$ temos que $(y_2,\ldots,y_n) \in C_n(x_1)$. De fato, se $(y_2,\ldots,y_{n+1}) \in C_{n+1}(x_1)$ segue da definição de $C_{n+1}(x_1)$ que $(x_1,y_2,\ldots,y_{n+1}) \in C_{n+2}$. De (11.1) segue que $(x_1,y_2,\ldots,y_n) \in C_n$ logo $(y_2,\ldots,y_n) \in C_n(x_1)$. Já que $\{C_n(x_1)\}_{n\geq 2}$ possui a propriedade de $\{C_n\}_{n\geq 1}$ usada para provar a continência (11.2), então podemos garantir que (11.2) é também verdadeira para a sequência $\{C_n(x_1)\}_{n\geq 2}$ no lugar de $\{C_n\}_{n\geq 1}$. Segue desta sequência de continências, da compacidade dos elementos da sequência $\{C_n(x_1)\}_{n\geq 2}$ e do Teorema de Cantor que existe pelo menos um ponto $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_1,x_2) \in \pi_2^n(C_n)$ para todo $n \geq 2$. Procedendo uma indução formal é fácil ver que podemos definir uma sequência $x_1, x_2, x_3 \ldots$ tal que para todo $1 \leq m \leq n$ temos $(x_1,x_2,\ldots,x_m) \in \pi_m^n(C_n)$. Em particular, $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \pi_n^n(C_n) = C_n$ para todo $n \geq 1$. ■

O Teorema de Existência de Kolmogorov - Caso Enumerável

Teorema 11.4. *Seja $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de medidas de probabilidade, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $\mathbb{P}_n$ definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Suponha que a família $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz as **condições de consistência de Kolmogorov**, i.e.,*

$$\mathbb{P}_{n+k}(E \times \mathbb{R}^k) = \mathbb{P}_n(E) \qquad \textit{para todo } n,k \in \mathbb{N} \textit{ e todo boreliano } E \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Então existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que para qualquer que seja $n \geq 1$ e $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ temos a seguinte igualdade

$$\mathbb{P}(E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots) = \mathbb{P}_n(E). \tag{11.3}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_n$ a coleção de todos os conjuntos cilíndricos da forma $E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ com $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ e considere a função de conjuntos $\mathbb{P}' : \cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n \to [0,1]$ tal que para cada $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{P}'(E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots) = \mathbb{P}_n(E).$$

A hipótese de consistência da família $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ garante que $\mathbb{P}'$ está bem definida.

A ideia da prova é primeiro mostrar que $\mathbb{P}'$ é uma medida na álgebra $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$. Em seguida, aplicar o Teorema de Extensão de Carathéodory para estender $\mathbb{P}'$ a toda σ-álgebra produto, de forma que esta extensão coincida com $\mathbb{P}'$ nos conjuntos cilíndricos e portanto garantindo a validade de (11.3).

Primeiro observamos que $\mathbb{P}'(\emptyset) = 0$ e que $\mathbb{P}'(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = 1$. Afirmamos que $\mathbb{P}'$ é finitamente aditiva. De fato, para quaisquer $E', F' \in \cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E', F' \in \mathcal{F}_k$ e portanto E' e F' são da forma

$$E' = E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots F' = F \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

para alguns $E, F \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$. Supondo que E' e F' são disjuntos, podemos concluir que E e F são disjuntos e portanto

$$\mathbb{P}'(E' \cup F') = \mathbb{P}_k(E \cup F) = \mathbb{P}_k(E) + \mathbb{P}_k(F) = \mathbb{P}'(E') + \mathbb{P}'(F').$$

Já que $\mathbb{P}'$ é finitamente aditiva, para provar que esta medida é σ-aditiva na álgebra $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ é suficiente mostrar que se $E'_1, E'_2, \ldots$ forma uma sequência decrescente de conjuntos cilíndricos com $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}'(E'_n) > 0$ então $\cap_{n\geq 1} E'_n \neq \emptyset$.

Já que estamos assumindo que a sequência $E'_1, E'_2, \ldots$ é monótona decrescente a existência do número real positivo α tal que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}'(E'_n)$ está garantida pela monotonicidade de $\mathbb{P}'$.

A menos de repetição e renumeração de alguns conjuntos cilíndricos na coleção $E'_1, E'_2, \ldots$ podemos, sem perda de generalidade, assumir que $E'_n \in \mathcal{F}_n$, isto é, $E'_n = E_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$, para algum Boreliano $E_n \subset \mathbb{R}^n$. A condição $E'_{n+1} \subseteq E'_n$ implica que se $(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in E_{n+1}$ então $(y_1, \ldots, y_n) \in E_n$. Por monotonicidade temos que

$$\mathbb{P}'(E'_n) = \mathbb{P}_n(E_n) \geq \alpha.$$

Já que $\mathbb{P}_n$ são medidas de probabilidade em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ segue da regularidade das medidas de probabilidade $\mathbb{P}_n$ (Teorema 11.2) que existe um conjunto compacto $K_n \subset E_n$, tal que $\mathbb{P}_n(E_n - K_n) < \alpha 2^{-n-1}$. Defina $K'_n = K_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ e seja $C'_n = K'_1 \cap K'_2 \cap \ldots \cap K'_n$. Para todo $n \geq 1$ temos que $C'_n \in \cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ e

$$\ldots \subseteq C'_3 \subseteq C'_2 \subseteq C'_1.$$

Usando a monotonicidade da sequência $\{E'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos que

$$\mathbb{P}'(E'_n - C'_n) = \mathbb{P}'\left(\bigcap_{k=1}^{n} E'_k - \bigcap_{k=1}^{n} K'_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_k(E_k - K_k) < \frac{\alpha}{2}.$$

Já que $\mathbb{P}'(E'_n) \geq \alpha$ segue da desigualdade acima que $\mathbb{P}'(C'_n) \geq \alpha/2$.

Para cada $n \geq 1$, o conjunto cilíndrico $C'_n \in \mathcal{F}_n$ e portanto pode ser escrito da seguinte forma $C'_n = C_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ e além do mais, temos

$$C_n = (K_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap (K_2 \times \mathbb{R}^{n-2}) \cap \ldots \cap K_n.$$

Note que C_n é subconjunto compacto e é também um conjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$ pois, sua medida $\mathbb{P}_n(C_n) = \mathbb{P}'(C'_n) \geq \alpha/2 > 0$. As inclusões $\ldots \subseteq C'_3 \subseteq C'_2 \subseteq C'_1$ implicam que se $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in C_{n+1}$ então $(y_1, \ldots, y_n) \in C_n$. Também temos que $C_n \subseteq E_n$ pois, $C_n \subseteq K_n$. Com estes fatos estabelecidos temos provado que todas as hipóteses do Teorema 11.3 são satisfeitas e assim podemos afirmar que existe $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $(x_1, \ldots, x_n) \in C_n$ para cada $n \geq 1$. Desta forma segue que $x \in E'_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ o que permite concluir que $\cap_{n\geq 1} E'_n \neq \emptyset$. ■

11.3 Teorema de Kolmogorov para Produtos Cartesianos Não-Enumeráveis

O Teorema de Existência de Kolmogorov provado na seção anterior não vale apenas para produtos cartesianos enumeráveis este resultado na verdade pode ser obtido também para produtos cartesianos não-enumeráveis. Este é um resultado fundamental e muito importante na teoria de Processos Estocásticos. Nesta seção vamos dar a prova deste teorema para o caso $\mathbb{R}^T$, onde T é um conjunto de índices arbitrário.

Seja T um conjunto não-vazio de índices, possivelmente não-enumerável. Para facilitar a compreensão do argumento em toda esta seção vamos reservar as letras I e J para denotar **subconjuntos finitos** de T.

O conjunto $\mathbb{R}^T$ é formalmente o espaço de funções $\{f : T \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}$, mas é mais comum denotar seus elementos por $\{x_t\}_{t\in T}$, onde para cada $t \in T$ temos $x_t \in \mathbb{R}$. Da forma análoga a que fizemos nas seções anteriores, para cada $t \in T$, definimos a projeções $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ por $\pi_t(\{x_s\}_{s\in T}) = x_t$. O conjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^T$ são os conjuntos da forma

$$\pi_{t_1}^{-1}(E_1) \cap \pi_{t_2}^{-1}(E_2) \cap \ldots \cap \pi_{t_n}^{-1}(E_n),$$

onde $t_1, \ldots, t_n \in T$ e $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. O cilindro definido acima é o subconjunto de $\mathbb{R}^T$ formado pelos pontos $\{x_t\}_{t\in T}$ tais que as coordenadas $x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}$ pertencem aos conjuntos $E_1, \ldots, E_n$, respectivamente.

Se $I, J \subset T$ são dois subconjuntos finitos tais que $I \subset J$ definimos a projeção natural $\pi_I^J : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^I$ como sendo a aplicação $\{x_t\}_{t\in J} \mapsto \{x_t\}_{t\in I}$. As projeções $\pi_I^T : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^I$ são definidas de forma análoga e por questão de facilidade vamos denotá-las simplesmente por π_I. Desta forma qualquer conjunto cilíndrico pode ser escrito como $\pi_I^{-1}(E)$, para algum $I \subset T$ (finito) e $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$.

Observamos que a coleção de todos os conjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^T$ forma uma álgebra de conjuntos. No caso em que $|T| < +\infty$ esta coleção é também uma σ-álgebra e coincide com a σ-álgebra produto que definimos nas seções anteriores. No caso geral, a σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^T$, notação $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$, é definida como sendo a σ-álgebra gerada pela coleção de todos os cilindros finito dimensional, isto é,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^T) = \sigma\left(\pi_I^{-1}(E) :\ I \subset T, |I| < +\infty \text{ e } E \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^I\big)\right).$$

Antes de apresentarmos o principal teorema desta seção, vamos provar um lema que será utilizado no final da demonstração do teorema.

Lema 11.5. *Seja Ω um conjunto e $\mathscr{C}$ uma coleção não-vazia de subconjuntos de Ω e $\sigma(\mathscr{C})$ a σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$. Então para cada $E \in \sigma(\mathscr{C})$, existe uma subcoleção enumerável $\mathscr{Q} := \mathscr{Q}(E)$ contida em $\mathscr{C}$ tal que $E \in \sigma(\mathscr{Q})$. Em particular, se $\{\pi_i\}_{i\in T}$ é uma família não vazia de funções definidas em Ω, então para cada $E \in \sigma(\pi_i : i \in T)$, existe um conjunto enumerável $Q := Q(E) \subset T$ tal que $E \in \sigma(\pi_i : i \in Q)$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{P}$ a coleção de todos os subconjuntos $E \in \Omega$ tal que $E \in \sigma(\mathscr{Q})$ para alguma subcoleção enumerável $\mathscr{Q}$ contida em $\mathscr{C}$. É imediato verificar que $\mathscr{P}$ é uma σ-álgebra. Obviamente $\mathscr{P}$ contém cada elemento de $\mathscr{C}$. Portanto $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{P}$ e assim todo elemento em $\sigma(\mathscr{C})$ satisfaz a condição desejada.

O argumento para a versão de funções deste resultado é essencialmente o mesmo. ■

Teorema 11.6 (Teorema da Existência de Kolmogorov)**.** *Seja T um conjunto arbitrário de índices. Suponha que para todo subconjunto finito $I \subset T$ temos uma medida de probabilidade $\mathbb{P}_I$ definida sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$. Suponha que a condição de consistência de Kolmogorov seja satisfeita, isto é, para todo $I, J \subset T$ tais que $I \subseteq J$, temos*

$$\mathbb{P}_J\big((\pi_I^J)^{-1}(E)\big) = \mathbb{P}_I(E),\ \forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I).$$

Então existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ tal que para todo subconjunto finito $I \subset T$ temos

$$\mathbb{P}\big(\pi_I^{-1}(E)\big) = \mathbb{P}_I(E),\ \forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I).$$

Demonstração. Grande parte das ideias envolvidas na prova deste teorema para o caso não-enumerável já foram apresentadas no caso enumerável. A novidade neste caso é a prova de que a medida na álgebra dos cilindros é contínua no vazio. Entretanto, devido a importância deste resultado vamos apresentar a prova em todos os detalhes.

Para facilitar a notação, para cada subconjunto finito $I \subset T$ definimos $\mathcal{F}_I$ como sendo a σ-álgebra dada pela coleção $\{\pi_I^{-1}(E) : E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)\}$. É simples verificar que $\mathcal{F}_I$ é de fato uma σ-álgebra. Esta é na verdade a menor σ-álgebra para o qual $\pi_I : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^I$ é mensurável. Para auxiliar vamos listar algumas propriedades relacionadas as projeções π_I^J $(I \subseteq J)$ e π_I

1. Cada elemento de $\mathcal{F}_I$ é dado de maneira única por $\pi_I^{-1}(E)$, para algum $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$. De fato, se $\pi_I^{-1}(E) = \pi_I^{-1}(F)$, então $E = F$. Este fato é consequência direta da sobrejetividade de $\pi_I : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^I$.

2. Se $I \subset J$ então $\pi_I^J \circ \pi_J = \pi_I$.

A coleção de todos os conjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^T$ é dada por $\cup_{I:|I|<+\infty}\mathcal{F}_I$. Afirmamos que esta coleção forma uma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^T$. De fato, o conjunto vazio está nesta coleção, pois $\emptyset \in \mathcal{F}_I$ qualquer que seja $I \subset T$ não vazio. Se $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_I$ então $\mathcal{C}^c \in \mathcal{F}_I$ e logo pertence a coleção dos conjuntos cilíndricos. Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são dois conjuntos cilíndricos arbitrários então existem conjuntos finitos $I, J \subset T$ tais que $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{F}_I$ e $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_J$. Já que $I \cup J$ também é um conjunto finito temos que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_{I\cup J}$. De fato, pela propriedade 1, citada acima, temos que $\mathcal{C}_1 = \pi_I^{-1}(E)$ para algum $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$. Pela propriedade 2 temos que $\pi_I^{I\cup J} \circ \pi_{I\cup J} = \pi_I$, logo

$$\mathcal{C}_1 = \pi_I^{-1}(E) = \pi_{I\cup J}^{-1}\Big((\pi_I^{I\cup J})^{-1}(E)\Big) \in \mathcal{F}_{I\cup J}.$$

De maneira análoga provamos que $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_{I\cup J}$. Já que $\mathcal{F}_{I\cup J}$ é uma σ-álgebra temos que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_{I\cup J}$ e portanto $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ é também um conjunto cilíndrico.

Uma vez que cada conjunto cilíndrico $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_I$ pode ser escrito de maneira única como $\mathcal{C} = \pi_I^{-1}(E)$ para um único $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$, temos bem definida a seguinte função de conjuntos $\mathbb{P}'_I : \mathcal{F}_I \to [0, 1]$ dada por

$$\mathbb{P}'_I(\mathcal{C}) := \mathbb{P}'_I(\pi_I^{-1}(E)) := \mathbb{P}_I(E).$$

Raciocinando como feito acima podemos mostrar que se $I \subseteq J$ então $\mathcal{F}_I \subseteq \mathcal{F}_J$ e usando as condições de consistência que é válida a seguinte igualdade

$$\mathbb{P}'_J\big|_{\mathcal{F}_I} = \mathbb{P}'_I.$$

Para provar a igualdade acima, considere $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_I$ arbitrário. Como sabemos existe um único conjunto $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$ tal que $\mathcal{C} = \pi_I^{-1}(E)$. Usando a definição de $\mathbb{P}'_I$, propriedade 2, e as condições de consistência temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'_J(\mathcal{C}) := \mathbb{P}'_J(\pi_I^{-1}(E)) = \mathbb{P}'_J((\pi_I^J \circ \pi_J)^{-1}(E)) &= \mathbb{P}'_J(\pi_J^{-1} \circ (\pi_I^J)^{-1}(E)) \\
&= \mathbb{P}_J((\pi_I^J)^{-1}(E)) \\
&= \mathbb{P}_I(E) \\
&= \mathbb{P}'_I(\pi_I^{-1}(E)) \\
&:= \mathbb{P}'_I(\mathcal{C}).
\end{aligned}$$

A última igualdade nos mostra que está bem definida a função de conjuntos

$$\mathbb{P}' : \bigcup_{I:|I|<+\infty} \mathcal{F}_I \to [0,1]$$

dada por $\mathbb{P}'(\mathcal{C}) = \mathbb{P}'_I(\mathcal{C})$, onde I é um subconjunto finito qualquer de T tal que $\mathcal{C} = \pi_I^{-1}(E)$ para algum $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$.

Vamos verificar que $\mathbb{P}'$ é finitamente aditiva. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dois cilindros disjuntos. Sejam $I_1, I_2 \subset T$ finitos tais que $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{F}_{I_1}$ e $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_{I_2}$. Como vimos acima, podemos considerar que $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{F}_I$, onde $I = I_1 \cup I_2$. Como $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são disjuntos, existem conjuntos disjuntos E_1 e E_2 em $\mathscr{B}(\mathbb{R}^I)$ tais que $\mathcal{C}_1 = \pi_I^{-1}(E_1)$ e $\mathcal{C}_2 = \pi_I^{-1}(E_2)$. Pela definição de $\mathbb{P}'$ temos que

$$\mathbb{P}'(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \mathbb{P}'_I(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \mathbb{P}_I(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}_I(E_1) + \mathbb{P}_I(E_2) = \mathbb{P}'(\mathcal{C}_1) + \mathbb{P}'(\mathcal{C}_2).$$

Pelo Teorema da Extensão de Carathéodory, para encerrar a prova, basta mostrar que $\mathbb{P}'$ é σ-aditiva na álgebra dos conjuntos cilíndricos. Isto como já vimos duas vezes é equivalente a continuidade de $\mathbb{P}'$ no vazio. Para provar este fato vamos tomar uma sequência arbitrária de conjuntos cilíndricos $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente, i.e., $\ldots \subseteq \mathcal{C}_3 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}'(\mathcal{C}_n) = \alpha > 0$ e mostrar que $\cap_{n\geq 1}\mathcal{C}_n \neq \emptyset$.

Pelo Lema 11.5 sabemos que dado um conjunto mensurável arbitrário $\mathcal{C} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^T)$ existe um subconjunto enumerável $Q \subset T$ tal que

$$\mathcal{C} \in \sigma\left(\pi_i^{-1}(E) :\ i \in Q \text{ e } E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\right).$$

Portanto cada conjunto $\mathcal{C}_n$ pertence uma σ-álgebra gerada por uma coleção enumerável de projeções π_k com $k \in Q_n$. A enumerabilidade de Q_n implica que $\cup_{n\geq 1} Q_n$ é também um subconjunto enumerável de T. A menos de uma bijeção podemos supor que esta união é o conjunto dos números naturais. Desta forma temos essencialmente a situação que tínhamos na prova do Teorema de Existência de Kolmogorov no caso enumerável. Usando então argumento semelhante ao do caso enumerável podemos concluir que $\cap_{n\geq 1}\mathcal{C}_n \neq \emptyset$ e isto encerra a prova. ■

Lista de Exercícios

1. Suponha que X e Y são duas v.a.'s independentes tendo distribuição $\mathbb{P}_X$ e $\mathbb{P}_Y$, respectivamente. Prove que a distribuição de $X+Y$ é dada pela convolução $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ definida por

$$\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_X(B-x) d\mathbb{P}_Y(x),$$

   onde $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ e $B - x = \{b - x \in \mathbb{R}; b \in B\}$.

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma coleção de v.a.'s iid. definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que estas variáveis aleatórias tenha distribuição comum Q.

   i) denote por m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e suponha que a derivada de Radon-Nykodin
   $$\frac{dQ}{dm}(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x).$$
   para algum $\lambda > 0$. Mostre que $X_1 + \ldots + X_n$ tem distribuição determinada pela medida de probabilidade Q^{*n} definida em $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ por
   $$Q^{*n}(B) = \int_B \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty)}(x)\, dm(x).$$
   (OBS: A distribuição Q^{*n} determinada acima é conhecida como distribuição Gama de parâmetros n, λ.)

   ii) Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Suponha que
   $$\frac{dQ}{dm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right).$$
   Mostre que $X_1 + \ldots + X_n$ tem distribuição dada por
   $$Q^{*n}(B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-n\mu)^2}{n\sigma^2}\right) dm(x).$$
   (OBS: A distribuição determinada por Q neste item é conhecida como distribuição Gaussiana ou Normal com parâmetros μ e σ^2, notação $N(\mu, \sigma^2)$. Note que a distribuição determinada por Q^{*n} é também uma Normal com parâmetros $n\mu$ e $n\sigma^2$.)

iii) Suponha que X seja uma v.a. com distribuição $N(0,1)$. Encontre a distribuição de X^2 e calcule $Q * Q$. Dica: $\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\,du = \pi$

3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Inicialmente mostre que para todo $p > 0$ e $x \geq 0$ temos
$$x^p = p\int_0^x y^{p-1}\,dy.$$
Em seguida, usando o resultado acima e o Teorema de Tonelli mostre que para qualquer v.a. X temos
$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}(\{|X| > y\})\,dy.$$
(OBS: Em alguns casos a igualdade acima pode significar simplesmente $+\infty = +\infty$.)

4. Suponha que $X_1, X_2, \ldots$ seja uma sequência de v.a.'s cada uma tendo distribuição $Q = \mathbb{P} \circ X_n^{-1}$.

   i) Mostre que se $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ então $\mathbb{P}(\limsup\{X_n > n\}) = 0$. Dica. Use o exercício anterior e o Lema de Borel-Cantelli.

   ii) Assuma que a sequência de v.a.'s $\{X_n\}$ é independente e que $\mathbb{E}[|X_n|] = +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\mathbb{P}(\limsup\{X_n > n\}) = 1$.

5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ espaços de probabilidade. Suponha que a aplicação $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ seja Borel mensurável, isto é, $T^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ uma sub-σ-álgebra. Defina $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{F} : E = T^{-1}(A)$ para algum $A \in \mathscr{A}\}$. Mostre que

   i) para qualquer $A \in \mathscr{A}$ que
$$\mathbb{P}(T^{-1}A|\mathcal{E})(\omega) = \mu(A|\mathscr{A})(T(\omega)), \quad \mathbb{P} - \text{quase certamente.}$$

   ii) Considere $n = 2$ e seja μ a distribuição de um vetor aleatório (X, Y) definido em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que (X, Y) tem densidade f, isto é, para todo Boreliano $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ temos que
$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \mu(A) = \int_A f(x,y)\,dxdy.$$
   Mostre para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ que é válida a seguinte igualdade $\mathbb{P}$-quase certamente
$$\mathbb{P}(Y \in B|X)(\omega) = \frac{\int_B f(X(\omega),y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} f(X(\omega),y)\,dy}.$$

6. Suponha que μ e ν_x são medidas de probabilidade na reta. Para qualquer qualquer Boreliano da reta B fixado, suponha que $x \mapsto \nu_x(B)$ é uma função borel mensurável.

i) Mostre que

$$\eta(E) = \int_{\mathbb{R}} \nu_x(\{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in E\})\, d\mu(x).$$

define uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$

ii) Suponha que o vetor (X,Y) tenha distribuição η. Mostre que ν_X é uma versão da distribuição condicional de Y dado X.

7. Mostre que se X e Y são duas v.a. independentes então $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ e conclua que $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

8. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathscr{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Prove que para quaisquer variáveis aleatórias limitadas X e Y que

$$\mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathscr{B}]] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathscr{B}]].$$

9. Suponha que X e Z são v.a. independentes com distribuição normal. Seja $Y = X + bZ$, isto é, X com adição de um termo de "ruído" independente bZ. Calcule $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

10. Seja k um inteiro positivo e $\Omega = \{0,1,2,\ldots,k-1\}^{\mathbb{N}}$. Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra gerada pelas v.a.'s $\{X_n\}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ a v.a. X_n é definida por $X_n(\omega) = \omega_n$. Sejam ν uma medida de probabilidade definida no conjunto das partes de $\{0,1,2,\ldots,k-1\}$ e $\mathbb{P} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \nu$ a medida produto dada pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov. Considere a aplicação $\sigma : \Omega \to \Omega$ dada pelo "shift" para esquerda, isto é,

$$\sigma(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) = (\omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots).$$

Mostre que $\mathbb{P}$ é invariante pelo "shift", isto é, para todo $E \in \mathcal{F}$ temos que

$$\mathbb{P}(\sigma^{-1}(E)) = \mathbb{P}(E).$$

11. Seja $\Omega = \{-1,1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\kappa : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ a medida de contagem em Ω. Mostre que para toda constante $m \in \mathbb{R}$ que

$$\int_{\{-1,1\}} e^{m\omega}\, d\kappa(\omega) = 2\cosh(m).$$

12. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Considere produto cartesiano $\Omega_n = \{-1,1\}^n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega)$.

i) Mostre que $\kappa_n = \prod_{i=1}^n \kappa$, onde κ é a medida de contagem em $\{-1,1\}$, é a medida de contagem em Ω_n.

ii) Defina a função

$$H_n(\omega) \equiv H_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) = -\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \omega_{i+1}$$

Calcule

$$Z_n(\beta) = \int_{\Omega_n} e^{-\beta H_n(\omega)}\, d\kappa_n(\omega).$$

Dica. Use o Teorema de Fubini.

13. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $\beta > 0$. Sejam Ω_n, $\mathcal{F}_n$ e $Z_n(\beta)$, como definidos no exercício anterior. Mostre que $\mu_{n,\beta} : \mathcal{F}_n \to \mathbb{R}$ definida para cada $A \in \mathcal{F}_n$ por
$$\mu_{n,\beta}(A) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \int_{\Omega_n} 1_A(\omega) e^{-\beta H_n(\omega)}\, d\kappa_n(\omega)$$
define uma medida de probabilidade.

14. Sejam n um inteiro positivo e $\beta > 0$ fixados. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mu_{n,\beta})$ definido nos dois exercícios anteriores. Seja $\{X_i, i = 1, \ldots, n\}$ uma coleção de v.a.'s definidas neste espaço de probabilidade por $X_i(\omega) = \omega_i$. Mostre para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ que
$$\mathbb{E}[X_i] \equiv \int_{\Omega_n} X_i(\omega)\, d\mu_{n,\beta}(\omega) = 0.$$

15. (Percolação em dimensão 1.) Considere o grafo $G = (V, E)$, onde $V = \mathbb{Z}$ e $E = \{i, j \in \mathbb{Z} : |i - j| = 1\}$. Seja $\Omega = \{0, 1\}^E$. Para cada $e \in E$ defina $X_e(\omega) = \omega_e$. Mostre que para cada $p \in [0, 1]$ fixado, existe um medida de probabilidade $\mathbb{P}_p$ definida em $\mathcal{F} = \sigma(\{X_e, e \in E\})$ tal que para todo $e \in E$ temos que $\mathbb{P}(\{X_e = 1\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{X_e = 0\})$ e além do mais as v.a's $\{X_e\}_{e \in E}$ são independentes no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$.

16. Sejam $G = (V, E)$ e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ o grafo e o espaço de probabilidade definido no exercício anterior, respectivamente. Dados dois vértices $x, y \in V$ dizemos que $\gamma = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é um caminho conectando x a y se
    - $e_i \in E, \forall i = 1, \ldots n$;
    - $e_i \neq e_j$ se $i \neq j$;
    - $e_1 = \{x, x_1\}$ e $e_n = \{x_{n-1}, y\}$.

    Dada uma configuração $\omega \in \Omega$ dizemos que um caminho $\gamma = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é um caminho aberto em ω, se $X_{e_1}(\omega), X_{e_2}(\omega), \ldots, X_{e_n}(\omega) = 1$. Denote por $\{x \longleftrightarrow y\} = \{\omega \in \Omega : \exists\ \gamma$ caminho aberto em ω conectando x a $y\}$. Mostre que $\{x \longleftrightarrow y\} \in \mathcal{F}$ e calcule $\mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow y\})$.

17. Sejam $G = (V, E)$ e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ o grafo e o espaço de probabilidade definido no exercício anterior, respectivamente. Para cada $x \in V$ e $\omega \in \Omega$ defina a componente conexa aberta de x em ω por
$$C_\omega(x) \equiv \{y \in V : \exists\ \gamma \text{ caminho aberto em } \omega \text{ ligando } x \text{ a } y\}.$$
    Mostre que
    i) para cada $x \in V$ fixado que $\omega \mapsto \#C_\omega(x)$ é uma v.a. a valores em $\overline{\mathbb{R}}$;
    ii) o conjunto $\{x \longleftrightarrow \infty\} \equiv \{\omega \in \Omega : \#C_\omega(x) = +\infty\} \in \mathcal{F}$;
    iii) generalize o exercício sobre invariância por translação da medida produto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e em seguida, mostre que $\mathbb{P}_p(\{x \longleftrightarrow \infty\}) = \mathbb{P}_p(\{0 \longleftrightarrow \infty\})$;
    iv) para cada $p \in [0, 1]$ calcule $\theta(p) \equiv \mathbb{P}_p(\{0 \longleftrightarrow \infty\})$. Dica: use Borel-Cantelli.
    v) se $p \neq 1$, para todo $x \in V$ mostre que $\#C_\omega(x) < \infty$, $\mathbb{P}_p$-q.c..

Lista de Exercícios

1. Uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é chamada *definida positiva* se para todo $n = 1, 2, \ldots,$ e toda n-úpla $(c_1, \ldots, c_n)$ de números complexos temos

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0, \quad \forall\ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

   Mostre que toda função característica é definida positiva.

2. Sejam X e Y v.a. com mesma distribuição. Mostre que:

   a) se X e Y são independentes, então $X - Y$ tem distribuição simétrica em torno de zero;

   b) se X e Y assumem apenas dois valores, então $X - Y$ tem distribuição simétrica em torno de zero.

3. Sejam $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências independentes tais que $X_n \overset{\mathscr{D}}{\to} N(0,1)$ e $Y_n \overset{\mathscr{D}}{\to} N(0,1)$. Mostre que $X_n + Y_n \overset{\mathscr{D}}{\to} N(0,2)$.

4. Mostre que é possível uma sequência de funções de distribuição convergir em todo ponto sem o limite ser uma função distribuição. (Dica: considere a v.a. constante $X_n \equiv n$)

5. Prove que se $F_n \to F$ fracamente e F é contínua, então F_n converge uniformemente para F em toda reta.

6. Suponha que $X_n \overset{\mathscr{D}}{\to} N(0,1)$ e $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais tal que $a_n \to a$. Mostre que $X_n + a_n \overset{\mathscr{D}}{\to} N(a,1)$

7. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s tendo distribuição simétrica em torno de zero, isto é, $\mathbb{P}(0 \leq X_n \leq t) = \mathbb{P}(-t \leq X_n \leq 0), \forall\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $X_n \overset{\mathscr{D}}{\to} X$

8. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s iid tais que $X_n \sim U[0,\theta]$ (uniforme no intervalo $[0,\theta]$), onde $\theta > 0$. Mostre que

$$Y_n = \sqrt{n}\left[\log\left(2\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \log\theta\right)\right]$$

   converge em distribuição para $N(0, 1/3)$.

9. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s iid, com $\mathbb{E}[X_1] = 0$ e $\mathbb{E}[X_1^2] = 2$. Encontre o limite em distribuição das seguintes sequências:

   a) $Y_n = \sqrt{n}\,\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1^2 + \ldots X_n^2}$;

   b) $Z_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots X_n^2}}$.

10. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a.'s iid tais que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ e $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, onde $0 < \sigma^2 < +\infty$. Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a.'s iid tais que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} + \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} N(\mu, \sigma^2).$$

11. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de v.a.'s independentes e X uma v.a. discreta com $\mathbb{P}(X = n) = p_n$, $n \geq 1$. Seja F_n a distribuição de X_n e φ_n sua função característica. Mostre usando a esperança condicional que a v.a.

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X=n\}} X_n$$

   tem função característica dada por $\varphi = \sum_{n\geq 1} p_n \varphi_n$.

12. Suponha que $\{(X_n, Y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de vetores aleatórios tomando valores em $\mathbb{R}^2$ que converge em distribuição para (X, Y). Mostre que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X + Y$.

13. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e (M, d) um espaço métrico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $X_n : \Omega \to M$ uma aplicação aleatória, mensurável segundo as σ-álgebras $\mathcal{F}$ e $\mathscr{B}(M)$.

   a) Mostre que X_n converge em probabilidade para uma v.a. constante c quase certamente se, e somente se, a sequência de medidas probabilidade $Q_n \equiv \mathbb{P} \circ X_n^{-1}$ converge fracamente para a medida de probabilidade $\delta_c : \mathscr{B}(M) \to [0, 1]$, definida para cada mensurável $E \in \mathscr{B}(M)$ por

$$\delta_c(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } c \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   [Convergência em probabilidade neste contexto significa que para todo $\varepsilon > 0$ dado, temos $\mathbb{P}(d(X_n, c) > \varepsilon) \to 0$, quando $n \to \infty$.]

   b) Mostre que se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de v.a.'s em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que converge em probabilidade para X, então $\mathbb{P} \circ X_n^{-1}$ converge fracamente para $\mathbb{P} \circ X$.

14. Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|v_i\| = 1$, onde $\| \cdot \|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

   a) Mostre que existem $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tais que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$$

b) Mostre que também existem $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ tais que

$$\sqrt{n} \leq \|\delta_1 v_1 + \ldots + \delta_n v_n\|$$

(Dica: Calcule a esperança da v.a. $X = \|X_1 v_1 + \ldots + X_n v_n\|^2$, onde as v.a.'s X_i são independentes e uniformemente distribuídas em $\{-1, 1\}$)

15. Seja $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ uma medida de probabilidade e φ a função característica associada a μ. Suponha que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x) < \infty.$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostre que φ tem derivadas contínuas até ordem n e além do mais que

$$\varphi^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n \ e^{itx} \ \ d\mu(x).$$

16. Use o exercício anterior e a expansão em série de Taylor de $\exp(-t^2/2)$ para mostrar que se $X \sim N(0, 1)$ então

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \equiv (2n-1)!!$$

17. (Cotas do tipo Chernoff) Seja $\{X_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ uma coleção de v.a.'s mutuamente independentes tais que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Denote por $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mostre que para todo $a > 0$ temos

$$\mathbb{P}(\{S_n > a\}) < e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

(Dica: Observe que para todo $\lambda > 0$ temos

$$\mathbb{P}(\{S_n > a\}) = \mathbb{P}(\{\exp(\lambda S_n) > \exp(\lambda a)\})$$

aplique a desigualdade de Markov e use que $\cosh^n(\lambda) \leq \exp(\lambda^2 n/2)$.)

18. Usando as ideias do exercício anterior mostre que se $X \sim N(0, 1)$ então

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Note que esta cota é semelhante aquela que podemos obter no limite quando $a \to \infty$, usando explicitamente a forma da densidade da normal como mostrado abaixo

$$\mathbb{P}(X > a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} \, dt \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)$$

CONTINUA ...