

**Modelagem Matemática do Conjunto
ESC-Motor-Hélice de um VANT Utilizando
Identificação de Sistemas**

por

Augusto Ost

Dissertação de Mestrado

Ijuí, RS – Brasil

2015

UNIJUÍ - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
DCEEng - Departamento de Ciências Exatas e Engenharias

**Modelagem Matemática do Conjunto
ESC-Motor-Hélice de um VANT Utilizando
Identificação de Sistemas**

por

Augusto Ost

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Ijuí, RS – Brasil

2015

UNIJUÍ - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
DCEEng - Departamento de Ciências Exatas e Engenharias

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação.

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO CONJUNTO
ESC-MOTOR-HÉLICE DE UM VANT UTILIZANDO
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Elaborada por

AUGUSTO OST

Como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Comissão Examinadora



Prof. Dr. Manuel Martín Pérez Reibold (Orientador)

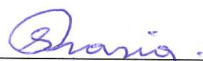
DCEEng/UNIJUÍ



Prof. Dr. Antonio Carlos Valdiero – DCEEng/UNIJUÍ



Prof. Dr. Humber Furlan – FATEC/SP



Prof. Dr. Luiz Antônio Rasia – DCEEng/UNIJUÍ

Ijuí, RS, 31 de Março de 2015.

*“Se não chegar há ver vai nascer de mim quem vem pra ver!
Plantei uma árvore que dá fruto,
Fiz uma canção pra se cantar,
Eu vou caminhando dizendo:
Queira ou não queria eu chego lá!*

Eu chego lá, queira ou não queria eu chego lá!”

Marínês - Eu Chego Lá

*“Walk on
Walk on
With hope
In your heart
And you'll never walk alone
You'll never walk alone”*

Gerry & The Pacemakers - You'll Never Walk Alone

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a minha família e a Deus por ter conseguido chegar até aqui. Não posso deixar de lembrar do apoio do meu tio Roque e minha tia Gertrudes pela acolhida que me proporcionaram no início do curso. Deixo aqui registrado a minha gratidão a Tanisia por ter me informado a respeito do curso.

O apoio dos colegas de curso sempre é importante. Marlon, Marina, Marcelo e Luana; lembrarei de vocês. Desde o auxílio prestado até o momento que serviram de ouvidos para escutar os desabafos e os meus relatos a respeito da pesquisa, o Marlon que o diga. Fiz novos amigos: Ricardo, Alana e Saul. Cito só alguns, pois não será possível citar todos. Também agradeço o apoio de uma pessoa que entrou a pouco na minha vida e vem me motivando a crescer, a minha gratidão a você Stephannie.

Agradeço ao meu orientador pelo apoio prestado e pela motivação nos momentos de dificuldade.

Não posso me esquecer da Geni e dos incontáveis mates bebidos no final da tarde, bem como o carinho e atenção que sempre prestou.

Destaco o apoio financeiro da CAPES, sem o qual a realização deste trabalho não seria possível.

Resumo

Os multirrotores vêm sendo usados como plataforma padrão para a pesquisa de mobilidade e percepção tridimensional. Seu baixo custo e facilidade para sua construção destacam-se. Eles são utilizados no setor agrícola, em pesquisas climáticas, exploração de minérios, guarda costeira e policiamento urbano, telecomunicações, energia, televisão e cinema e entretenimento. Os multirrotores são compostos por braços, onde todos os movimentos da aeronave são dependentes do conjunto ESC (Controle Eletrônico de Velocidade) – Motor – Hélice. No entanto, boa parte dos trabalhos abordam sistemas de controle, deixando de lado a modelagem matemática da estrutura da aeronave. Este trabalho aborda a modelagem matemática do conjunto ESC-Motor-Hélice, a fim de obter um modelo que descreva de forma satisfatória a dinâmica do conjunto. Foi realizado o estudo de cada um dos componentes do conjunto e apresentadas as suas principais características e funcionalidade dentro do conjunto. Construiu-se uma plataforma de testes, a qual possibilitou obter os dados necessários para a modelagem matemática. Os dados foram coletados em forma de uma série temporal. Sendo usados testes de estacionariedade, função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial, os quais possibilitaram determinar a estrutura e a ordem dos modelos autoregressivos. Para a estimação dos parâmetros foi escolhida a metodologia da identificação de sistemas. A comparação de resultados experimentais e de simulação computacional ilustraram as características do modelo proposto.

Palavras-Chave: ADF; kpss; Econometria; Quadrirrotor

Abstract

The multirotors have been used as a standard platform for research mobility and three-dimensional perception. The low cost and ease construction stand out. The use of the multirotors lies in the agricultural sector, in climate research, exploitation of minerals, coast guard and urban policing, telecommunications, energy, television and film and entertainment. The multirotors have arms, where all aircraft movements are dependent of the joint ESC (Electronic Speed Control) – Motor – Propeller. However, the aim of a lot of works is based on the study of the control system instead de math modeling of the aircraft. The aim of this dissertation is the math modeling of the joint ESC-Motor-Propeller, in order to obtain a math model that describes satisfactorily the dynamics of the system. Each components of the joint are discussed in separately, where are showed the main characteristics and how they work in the joint. With base in this study, a test platform was build, which made possible to obtain the data necessary for the mathematical model. The data sample was collected in the form of a time series. As used stationarity test, autocorrelation function and partial autocorrelation function, which enabled to determine the structure and the order of the autoregressive modell. For the parameter estimation the system identification methodology was chosen. The comparison between experimental results and computer simulation illustrated the features of the proposed model.

Keywords: ADF; KPSS; Econometrics; Quadrirotor

Lista de símbolos

A – Amperes

w – Amplitude do intervalo

γ – Ângulo da força resultante

α – Ângulo de ataque do aerofólio

ϕ – Ângulo de deslizamento da pá

β – Ângulo geométrico da pá

r_t – Caminho aleatório

B_V – Coeficiente de atrito viscoso

C_T – Coeficiente de empuxo

K_T – Coeficiente de torque

C_Q – Coeficiente de torque

C_D – Coeficientes de *drag*

C_L – Coeficientes de *lift*

r – Comprimento radial

λ – Conjunto de parâmetros

c – Corda do elemento

\hat{y}_k – Dado estimado

y_k – Dado obtido da plataforma

ρ – Densidade do ar

D – Diâmetro da hélice

$h()$ – Distribuição marginal de x_t

$u(k)$ – Entrada externa no sistema

$SE(\hat{\alpha})$ – Erro padrão de $\hat{\alpha}$

$F(0,1)$ – Estatística F

e^* - Estimação de forma iterativa pelo método de EMQ

X_t – Exógenas atuais ou tempo corrente

$X_{(t-1)}$ – Exógenas defasadas

f – Frequência dada em (Hz)

f_a – Frequência de amostragem

f_s – Frequência do sinal a ser amostrado

$\rho(k)$ – Função de autocorrelação

$H(q)$ – Função de transferência do processo
 $G(q)$ – Função de transferência do ruído
 dT – Incremento de força propulsiva
 dF – Incremento de força resistiva
 dL – Incremento de sustentação
 dQ – Incremento de torque resistivo
 L_a – Linha de indutância
 P_k^* – Matriz P_k com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações
 P_k – Matriz de autocorrelação
 φ – Matriz de regressores
 μ – Média
 \bar{y} – Média amostral
 J – Momento de inércia do rotor
 k – Número de observações
 T_α – O tempo de amostragem
 Δy_t – Operador das diferenças
 Δ – Operador de primeira diferença
 p, d, q, r – Ordem do modelo
 n_a, n_b, n_c, n_d e n_f – Ordens dos respectivos polinômios
 T – Período
 $A(q), B(q), C(q), D(q)$ e $F(q)$ – Polinômios arbitrários
 ε_t – Processo de covariância estacionário com média zero
 $y(k-i)$ – Regressores
 $\xi(k)$ – Resíduos
 r_a – Resistência do enrolamento
 dD – Resultante de forças
 dR – Resultante de forças
 N – Rotação da hélice
 $v(k)$ – Ruído branco
 y_t – Série de saída
 N – Tamanho da amostra.
 T_{ON} – Tempo que a carga é mantida ativa
 T_{OFF} – Tempo que a carga está desativada

$U_d(s)$ - Tensão de entrada da corrente

u_t - Termo de erro de ruído branco

n_p - Termos do processo

n_e - Termos do ruído

$t(1)$ - Teste t

$T_L(s)$ - Torque de carga

p_{\max} - Valor máximo de p para o teste ADF

σ^2 - Variância

$\gamma(k)$ - Variância dos k primeiros elementos da série

Ω_c - Velocidade angular constante

Ω_v - Velocidade angular variável

V - Velocidade da aeronave

V_0 - Velocidade de voo da aeronave

V_R - Velocidade resultante

V_r - Velocidade resultante

n - Velocidade rotacional

$\frac{2\pi}{60}rN$ - Velocidade tangencial

V_t - Velocidade tangencial da pá

$\hat{\theta}$ - Vetor de parâmetros

$e(k)$ - Vetor de resíduos

D_t - Vetor dos termos determinísticos

Lista de abreviaturas

ACF - Função de autocorrelação
ADF - *Augmented Dickey & Fuller*
AR – Autoregressivo
ARARMAX - Ruído Autoregressivo em um modelo ARMAX
ARARX - Ruído Autoregressivo em um modelo ARX
ARMA – Autoregressivo com Média Móvel
ARMAX - Autoregressivo com Média Móvel e Entradas Exógenas
ARX - Autoregressivo com Entradas Exógenas
BJ - Box-Jenkins
BLDC - *Brushless Direct Current Motor with Permanent Magnet*
CC - Corrente contínua
CCW - Rotação em sentido anti-horário
CW - Rotação em sentido horário
DC - *Duty cycle*
DMA - Desvio Médio Absoluto
EMQ - Estimador estendido de mínimos quadrados
EP - Erro Percentual
EPAM - Erro Percentual Absoluto Médio
EPM - Erro Percentual Médio
ESC - *Electronic Speed Control*
FIR - Resposta ao impulso finito
GMQ - Estimador generalizado de mínimos quadrados
GPS - *Global Positioning System*
KPSS - Kwiatkowski, Philips, Schmidt e Shin
LQR - Regulador Quadrático Linear
MQ - Mínimos quadrados
OE - Erro na Saída
PACF - Função de autocorrelação parcial
PID - Proporcional Integral Derivativo
PP - Philips & Perron
PWM - *Pulse Width Modulation*

RMSE - Raiz do Erro Quadrático Médio

STARMAC - *The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control*

UAV - *Unmanned Aerial Vehicle*

VANT - Veículo aéreo não tripulado

VHDL - *Hardware Design Language*

VI - Estimador das variáveis instrumentais

VTOL - *Vertical take-off and landing*

Lista de Figuras

Figura 1.1: SUV Kwid	2
Figura 1.2: <i>The Flying Machine Arena</i> na ETH em Zürich	3
Figura 1.3: (a) Quadrirrotor STARMAC I e (b) STARMAC II produzido na Universidade de Stanford, CA/EUA	6
Figura 1.4: Quadrirrotor OS4	7
Figura 1.5: X4 <i>Flyer</i>	8
Figura 1.6: Quadrirrotor Helio-copter	9
Figura 1.7: (a) O quadrirrotor e (b) o simulador construído por (SOUSA, 2011)	10
Figura 1.8: Diagrama representativo do conjunto ESC-Motor-Hélice.....	13
Figura 2.1: Diferentes configurações de multirrotores.....	15
Figura 2.2: Tricóptero.....	16
Figura 2.3: Sentido da rotação dos motores	17
Figura 2.4: Quadrirrotor comercial <i>Phantom</i>	18
Figura 2.5: Pentacóptero.....	19
Figura 2.6: Sentido de rotação dos rotores	20
Figura 2.7: (a) Hexacóptero MK Hexa XL e (b) octocóptero MK ARF da empresa alemã Mikrokopter	20
Figura 2.8: Configuração com rotores coaxiais para um hexacóptero com o <i>design</i> de um tricóptero.	21
Figura 2.9: (a) Movimentos de guinada, arfagem e rolagem realizados pelo quadrirrotor e (b) Distribuição dos motores.....	25
Figura 3.1: Diagrama estrutural de um motor BLDC com torque de carga.....	29
Figura 3.2: Força resultante no aerofólio da pá de uma hélice	30
Figura 3.3: Componentes de velocidade e ângulos do escoamento na pá.....	31
Figura 3.4: Forças atuantes em um elemento de pá	31
Figura 3.5: Forma de onda de corrente gerada para cada fase e suas defasagens.....	36
Figura 3.6: Diagrama de blocos simplificado de um ESC	36
Figura 3.7: Sistema simplificado para um controle de velocidade usando PWM.....	37

Figura 3.8: Forma de onda PWM.....	37
Figura 3.9: Diagrama ilustrativo de um circuito de controle de uma carga	38
Figura 3.10: Formas de onda com variação no <i>duty cycle</i>	39
Figura 3.11: <i>Duty cycle</i> necessário de acordo com a rotação do motor	39
Figura 3.12: Sensor óptico e motor	40
Figura 3.13: Tela inicial do software desenvolvido	41
Figura 3.14: Dispositivo desenvolvido.....	41
Figura 3.15: Plataforma de testes	42
Figura 4.1: Representação da estrutura do modelo ARX (a) e ARMAX (b)	58
Figura 4.2: Representação da estrutura dos modelos ARIMAX (a) e ARMA (b)	59
Figura 4.3: Representação das diferentes estruturas partindo de uma estrutura ARIMAX	59
Figura 4.4: Diagrama da ACF e PACF para um AR de ordem 1	63
Figura 4.5: Diagrama da ACF e PACF para um MA de ordem 1 e um ARMA (1,1) ..	63
Figura 4.6: Diagrama de um sistema estudado pela identificação de sistemas	65
Figura 5.1: Gráfico da rotação do motor dependendo da corrente de entrada	74
Figura 5.2: Gráfico da corrente dado pelo tamanho do pulso PWM (<i>Duty Cycle</i>)	75
Figura 5.3: Gráfico da rotação x corrente da 2ª amostra.....	76
Figura 5.4: Tela inicial do <i>software R</i>	77
Figura 5.5: Gráfico resultante da análise proposta por (MORETTIN e TOLOI, 2006)	81
Figura 5.6: Gráfico resultante após serem tomadas as diferenças.....	82
Figura 5.7: Gráfico da ACF gerado no software R	84
Figura 5.8: Gráfico da PACF gerado no software R.....	85
Figura 5.9: Resultado obtido ao se estimar os parâmetros utilizando um ARMAX (7, 5,4) com a diferenciação dos dados.....	86
Figura 5.10: Resultado obtido ao se estimar os parâmetros utilizando um ARMAX (7, 5, 4) sem diferenciação dos dados	87
Figura 5.11: Análise da correlação residual para a estimação sem diferenciação nos dados.....	88
Figura 5.12: Gráfico com o erro percentual calculado entre os dados observados e estimados	89
Figura 5.13: Gráfico com o erro percentual calculado entre os dados observados e estimados, ao se desconsiderar o momento em que o conjunto é desligado	90

Lista de Tabelas

Tabela 1.1: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção das aeronaves do projeto STARMAC	6
Tabela 1.2: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do OS4.....	8
Tabela 1.3: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do <i>X-4 Flyer</i>	9
Tabela 1.4: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do Helio-copter.....	10
Tabela 1.5: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção da aeronave.....	11
Tabela 2.1: Vantagens e desvantagens das diferentes configurações de multirrotores .	22
Tabela 2.2: Variação da velocidade dos motores para se obter o movimento desejado	25
Tabela 3.1: Parâmetros geométricos e aerodinâmicos utilizados na Teoria elementar de pás	32
Tabela 4.1: Análise de resultados para teste conjunto KPSS e ADF (NUSAIR, 2003)	46
Tabela 4.2: Tabela adaptada de (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, et al., 1992) com os valores críticos para o teste kpss.....	51
Tabela 4.3: Representações de modelos discretos utilizando Identificação de Sistemas	55
Tabela 5.1: Resultado do teste kpss.....	80
Tabela 5.2: Resultado do teste kpss após os dados serem diferenciados.....	83
Tabela 5.3: Comandos utilizados para a o calculo da ACF e PACF.....	84
Tabela 5.4: Resultado obtido para um ARMAX (7, 5, 4).....	87

Lista de Anexos

ANEXO A: Quadro com o resultado para o teste ADF com 13 <i>lags</i>	100
ANEXO B: Quadro com resultado do teste ADF para 12 lags.....	101
ANEXO C: Quadro com o resultado do teste ADF após os dados serem diferenciados	103

Sumário

Introdução	1
Os VANTs (Veículos Aéreos não tripulados)	1
1.1.1. O uso do quadrirrotor no meio civil e em arena de demonstração	2
1.2. O desenvolvimento do quadrirrotor no meio científico e os problemas destacados na literatura técnica	3
1.2.1. Projeto STARMAC - <i>The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control</i>	5
1.2.2. O Quadrirrotor OS4	7
1.2.3. O X-4 <i>Flyer</i>	8
1.2.4. Helio-copter	9
1.2.5. Quadrirrotor de (SOUSA, 2011)	10
1.3. Estudos que abordam a Modelagem matemática.....	11
1.4. Objetivos	13
1.5. Contribuição.....	13
1.6. Estrutura da dissertação	13
2. Diferentes tipos de Multirotores.....	15
2.1. Diferentes configurações de multirrotor: Características, vantagens e desvantagens	15
2.2.1. O tricoptero	16
2.2.2. O quadrirrotor	17
2.2.3. O Pentacoptero	19
2.2.4. Hexacoptero e Octocoptero	19
2.2.5. Os rotores coaxiais	20
2.2. Porque o quadrirrotor?	21
2.3. História do quadrirrotor	23

2.4.	A dinâmica da atitude do quadricóptero e suas principais características	24
3.	Conjunto Motor-Hélice-ESC e PWM	27
3.1.	O braço do quadricóptero.....	27
3.2.	Motor Brushless	27
3.3.	Hélice	29
3.4.	O ESC – <i>Electronic Speed Control</i>	35
3.5.	PWM – <i>Pulse Width Modulation</i>	37
3.6.	Plataforma de testes	40
4.	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	43
4.1.	Introdução a Modelagem matemática.....	43
4.2.	Análise de séries temporais.....	44
4.3.	Estacionariedade	44
4.3.1.	O teste ADF	46
4.3.2.	Teste Kpss	49
4.3.3.	Tornando os dados estacionários	52
4.4.	Modelos autorregressivos	53
4.4.1.	Representação matemática dos modelos autorregressivos	55
4.4.2.	Exogeneidade nos dados.....	55
4.4.3.	A representação ARX e ARMAX	57
4.4.4.	Representação ARMA e ARIMAX.....	58
4.4.5.	Determinação da ordem do modelo (p, d, q, r).....	60
4.5.	Identificação de sistemas	65
4.5.1.	Seleção de testes dinâmicos e coleta de dados	66
4.5.1.1.	Escolha do tempo de amostragem	66
4.5.2.	Estimação dos parâmetros	67
4.5.3.	O estimador estendido de mínimos quadrados	68
4.6.	Validação do modelo	70

4.6.1.	Ferramentas subjetivas	70
4.6.2.	Métodos quantitativos	72
5.	Resultados e discussões.....	74
5.1.	Plataforma de testes e coleta de dados	74
5.2.	Amostras	75
5.3.	Análise dos dados	76
5.3.1.	Estacionariedade.....	77
5.3.2.	Diferenciando os dados	80
5.3.3.	Testando novamente a estacionariedade dos dados.....	82
5.4.	Análise da ACF e PACF.....	84
5.5.	Estimação de parâmetros	86
5.6.	Validação do modelo	88
	Conclusões do trabalho.....	92
6.1.	Sugestões para trabalhos futuros.....	93
	Referências Bibliográficas.....	94
	Anexos.....	100

INTRODUÇÃO

Neste capítulo é realizada uma introdução a respeito dos VANTs (veículos aéreos não tripulados), destacando-se o quadrirrotor. São abordados estudos que utilizam o quadrirrotor como base, onde se apresenta os problemas encontrados na literatura. Os objetivos deste trabalho bem como sua estrutura são descritos no final do capítulo.

Os VANTs (Veículos Aéreos não tripulados)

Um VANT ou UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*) se constitui em uma aeronave que não necessita de um piloto embarcado para pilotá-la (PAULA, 2012). Os VANTs têm o seu surgimento na Primeira Guerra Mundial (1917), e devido às dificuldades técnicas da época, eram pouco confiáveis e imprecisos. Por não ter tido um forte impacto militar, as suas capacidades não foram reconhecidas pelas autoridades militares e políticas da época. Apenas tiveram seu valor reconhecido no campo de batalha durante a operação *Desert Storm*, na Península Balcânica em 1991 (VALAVANIS, 2007).

Na atualidade os VANTs são usados em tarefas que colocam em risco a vida humana como a visualização de locais de difícil acesso e vigilância (tanto para cidades quanto no seu uso militar). No futuro pretende-se usar esse tipo de aeronave para o transporte de pessoas (BOUABDALLAH, 2007). As vantagens dos VANTs sobre os pilotados por humanos é o menor custo de fabricação, sua resistência para missões de longa duração (ausência da fadiga do piloto) e a descartabilidade (apenas perda material), que foram testadas e comprovadas em conflitos militares recentes.

O mercado dos VANTs tende a crescer. Segundo a empresa (MARKTESANDMARKETS, 2014), o valor da receita com as vendas aumentará de \$ 7,098 bilhões registrados em 2013 para \$8,351 bilhões até o ano de 2018. O aumento do seu uso militar e civil são fatores que levam a esse crescimento. Isso se deve principalmente a sua utilização no setor agrícola, em pesquisas climáticas, exploração de minérios, guarda costeira e policiamento urbano, telecomunicações, energia, televisão e cinema e entretenimento (PAULA, 2012).

Dentre os diversos VANTs desenvolvidos, um que vem ganhando destaque é o quadrirrotor. Segundo Mahony apud (GUIMARÃES, 2012), da mesma forma que os robôs com rodas foram utilizados como plataforma para o estudo da robótica móvel nos

anos 90, o quadrirrotor está se tornando a plataforma padrão para a pesquisa de mobilidade e percepção tridimensional. Isso se deve ao fato desse tipo de veículo ser uma das plataformas mais flexíveis no campo da robótica aérea. O seu aumento no uso civil e no meio acadêmico para pesquisas se deve principalmente aos avanços tecnológicos que possibilitam a miniaturização dos dispositivos (giroscópios, acelerômetros, baterias, motores, entre outros). Essa miniaturização gera uma maior mobilidade e uma diminuição nos custos para a sua comercialização (POUNDS, MAHONY e HYNES, 2002).

1.1.1. O uso do quadrirrotor no meio civil e em arena de demonstração

Um exemplo do uso no meio civil do quadrirrotor é o carro conceito (experimental) Kwid da montadora Renault, ilustrado na **Figura 1.1**, que foi apresentado no Salão de Nova Déli, na Índia. Ele vem acompanhado de um quadrirrotor capaz de tirar fotos da paisagem, verificar se há ruas bloqueadas ou congestionadas (REVISTA AUTO ESPORTE, 2014).

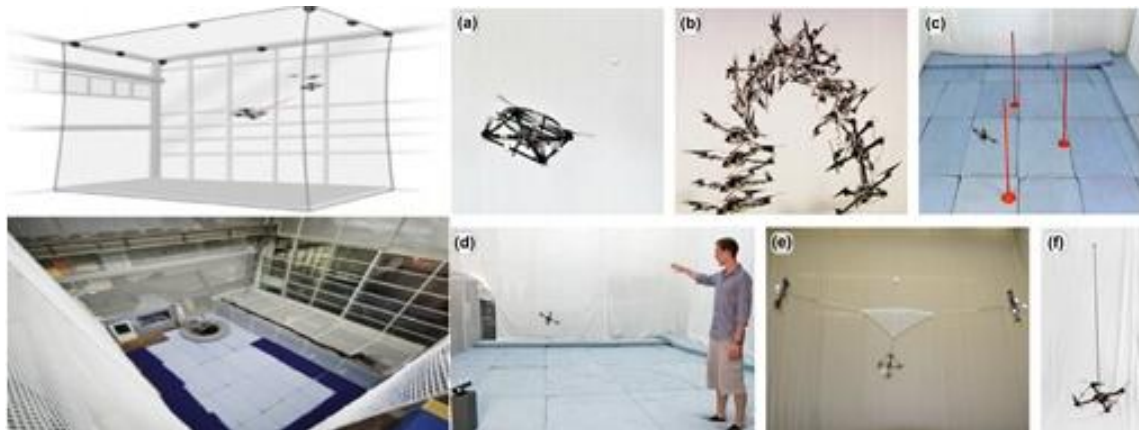
Figura 1.1: SUV Kwid



Fonte: (REVISTA AUTO ESPORTE, 2014).

Um projeto que demonstra as capacidades do quadrirrotor é o *The Flying Machine Arena*, que consiste em um espaço onde são demonstrados novos conceitos de controle. A **Figura 1.2** apresenta os movimentos e a forma como foi construída. Ela é equipada com câmeras, que por meio de um processamento das imagens obtidas estima a posição das aeronaves.

Figura 1.2: *The Flying Machine Arena* na ETH em Zürich



Fonte: (LUPASHIN, HEHN, *et al.*, 2014).

A Arena tem uma grande capacidade de processamento, envolvendo de 4 a 6 computadores, possibilitando que os quadrrrotores realizem movimentos com um maior grau de dificuldade, como: (a) rebater a bola de volta para quem a arremessou, (b) acrobacias, (c) movimento interativo de aprendizagem, (d) uso do sensor *Kinect* do console *Xbox 360* para o controle da aeronave por meio de gestos, (e) três aeronaves que pegam a bola utilizando uma rede e a arremessam de volta para a pessoa que jogou e em (f) o pêndulo invertido (LUPASHIN, HEHN, *et al.*, 2014).

1.2. O desenvolvimento do quadrrrotor no meio científico e os problemas destacados na literatura técnica

O quadrrrotor vem sendo utilizado como a plataforma padrão para investigação da mobilidade e percepção tridimensional. Esse destaque resulta em mais pesquisas que o utilizam como base. Com isso, se faz necessário uma revisão de literatura a fim de ressaltar os estudos realizados e problemas que ainda se encontram em aberto.

Na literatura técnica, os trabalhos pesquisados têm como objetivo principal:

- Voo de várias aeronaves em um mesmo espaço. No projeto *The Stanford Testbed of Autonomus Rotorcraft for multi Agent Control* foram construídas duas aeronaves, o STARMAC I (HOFFMANN, RAJNARAYAN, *et al.*, 2004) e o STARMAC II (HOFFMANN, HUANG, *et al.*, 2007);
- Desenvolver *softwares* para definir os componentes a serem usados na construção da aeronave (BOUABDALLAH, 2007);

- Construir aeronaves para uso comercial (POUNDS, 2007);
- Realizar voos autônomos por meio do sistema Vision (FOWERS, 2008);
- Combinar três giroscópios, três acelerômetros e três magnetômetros de uma IMU (*Inertial Measurement Unit*) com sensores infravermelhos a fim de obter dados mais precisos do sistema (WIEREMA, 2008);
- Construir uma aeronave para ser usada em missões de busca e salvamento (NAIDOO, RIANN e BRIGHT, 2011);
- Controlar e construir um quadricóptero e também desenvolver um simulador virtual em VRSINK (SOUSA, 2011);
- Modelar tanto a dinâmica como a aerodinâmica para servirem de base ao desenvolvimento e controle na execução de manobras mais agressivas sem a necessidade de métodos de aprendizagem (BANGURA e MAHONY, 2012);
- Projetar e desenvolver aeronaves com uma boa capacidade de carga (GUIMARÃES, 2012).

Apesar de terem um objetivo específico, boa parte desses trabalhos científicos são dedicados ao sistema de controle da aeronave, não dando tanta ênfase para o projeto da sua estrutura. No entanto, alguns trabalhos, contemplam a modelagem matemática da estrutura ou de parte dela. Entre estes se destacam:

- Proposta de um modelo físico para o motor e a hélice (MARTÍNEZ, 2007);
- Modelagem matemática do conjunto motor-caixa de marcha-hélice (BRESCIANI, 2008);
- Modelagem matemática do motor (BANGURA e MAHONY, 2012);
- A modelagem do conjunto ESC-motor-hélice utilizando a ferramenta polyfit do *software* MatLab (PAULA, 2012).

Também há trabalhos que abordam o sistema de controle da aeronave. Em (ORSAG e POROPAT, 2010) é abordada a criação de um controle híbrido envolvendo o controle PDI (Proporcional Integral Derivativo) e LQ (Linear Quadrático).

Em (BOUABDALLAH, 2007), é feita referência a problemas originados pela redução de tamanho e custos nos sistemas necessários para a construção dos quadricópteros, ocasionando algumas limitações em seu desempenho e controle. Alguns problemas destacados são:

- Complexidade no projeto de controle de atitude (Hoffmann et al, 2004); (BOUABDALLAH, 2007); (POUNDS, 2007);

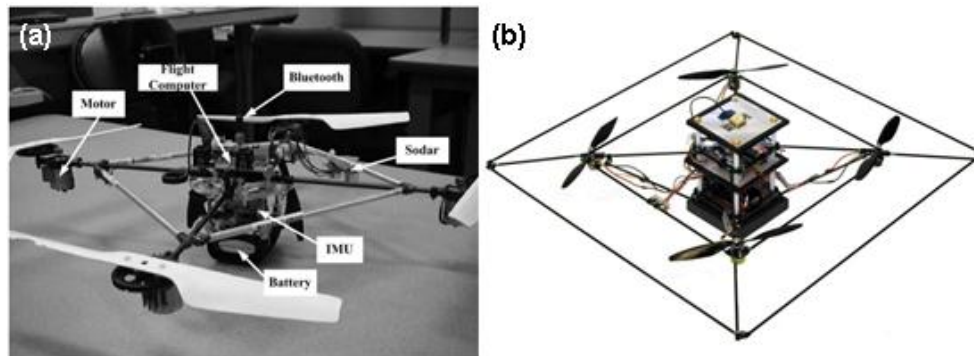
- Dificuldade na obtenção de dados precisos dos sensores, tais como altitude, posição e velocidade, devido ao ruído causado pelos motores (HOFFMANN, RAJNARAYAN, *et al.*, 2004), (POUNDS, 2007);
- Limitações de desempenho geradas pela miniaturização dos atuadores (BOUABDALLAH, 2007);
- Evasão de obstáculos em voos autônomos (BOUABDALLAH, 2007); (MARTÍNEZ, 2007);
- Miniaturização de toda a estrutura, ocasionando a diminuição da carga útil e a aplicação de leis físicas de forma diferente das aplicadas em aeronaves de grande porte (BOUABDALLAH, 2007); (POUNDS, 2007); (GUIMARÃES, 2012);
- Elevado consumo de energia (BOUABDALLAH, 2007); (POUNDS, 2007); (BRESCIANI, 2008); (GUIMARÃES, 2012).

Alguns dos trabalhos citados anteriormente são apresentados de forma mais na próxima seção.

1.2.1. Projeto STARMAC - *The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control*

No trabalho de (HOFFMANN, RAJNARAYAN, *et al.*, 2004) é apresentado o projeto STARMAC, que é um sistema de controle onde mais de uma aeronave pode voar dentro de um determinado ambiente, tanto externo como interno, sem que colidam. As aeronaves podem executar de maneira autônoma, tanto tarefas simples (seguir uma rota) ou complexas (pesquisa cooperativa e salvamento). O controle das coordenadas é feito de maneira *online*, por uma estação de controle situada no solo. As aeronaves se comunicam com a central, onde recebem novos *waypoints*, ou seja, a central fica responsável pela trajetória que a aeronave deve seguir. Para esse projeto foram construídas duas aeronaves. A primeira foi o STARMAC I, apresentado na **Figura 1.3(a)**, onde o quadrirrotor utilizado como base é o *Draganflyer III*.

Figura 1.3: (a) Quadrirrotor STARMAC I e (b) STARMAC II produzido na Universidade de Stanford, CA/EUA



Fonte: (a) (HOFFMANN, RAJNARAYAN, *et al.*, 2004) e (b) (HOFFMANN, HUANG, *et al.*, 2007)

A segunda aeronave construída é o STARMAC II (HOFFMANN, HUANG, *et al.*, 2007), **Figura 1.3(b)**, uma evolução do STARMAC I. Ela foi baseada em cinco aspectos: Simplicidade e segurança para ser operada tanto em ambiente interno quanto externo; controle autônomo de posição e do sistema de trajetória; percepção do ambiente por meio da utilização de vários sensores; comunicação com vários veículos e com uma estação base; implementação *onboard* de um algoritmo capaz de coordenar vários veículos. Diferente do STARMAC I, a aeronave foi totalmente construída na universidade, não se baseando em um modelo fabricado. A **Tabela 1.1** apresenta um resumo dos componentes embarcados e da técnica de controle utilizada na construção da aeronave.

Tabela 1.1: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção das aeronaves do projeto STARMAC (HOFFMANN, RAJNARAYAN, *et al.*, 2004)

Nome da aeronave ou projeto	STARMAC
Comunicação	Bluetooth Class II
Controlador	PIC18F6520
Massa estimada	-----
Técnica de controle	LQR
Sensores inerciais	MicroStrain 3DM-G
(HOFFMANN, HUANG, <i>et al.</i> , 2007)	
Nome da aeronave ou projeto	STARMAC II
Comunicação	Wi-fi
Controlador	Robotics microcontroller board31; Advanced Digital Logic; ADL855 PC104+

Massa estimada	1600g
Técnica de controle	PID
Sensores inerciais	IMU: Microstrain 3DMG-X1. Sonar: Devantech SRF08. GPS: Novatel Superstar II

Fonte: Próprio autor

1.2.2. O Quadrirrotor OS4

A **Figura 1.4** mostra a proposta de construção do quadrirrotor OS4 cuja a escolha dos componentes foi feita via um *software* (BOUABDALLAH, 2007). A seleção das peças de um banco de dados visava obter o máximo desempenho, de acordo com os parâmetros inseridos pelo usuário.

Figura 1.4: Quadrirrotor OS4



Fonte: (BOUABDALLAH, 2007)

Nesse caso o OS4 ficou equipado com o processador Geode 1200, os sensores inerciais foram a IMU MT9-B, a comunicação era feita via *Wi-Fi* e para seu controle foi utilizado tanto a técnica PID (Proporcional Integral Derivativo) quanto a técnica LQR (Regulador Quadrático Linear). Também foi feita a comparação entre as diferentes técnicas de controle como a Teoria de Lyapunov, a técnica PID, LQR e *Backstepping*. Na sequência de seu trabalho foi proposto um novo modelo de controle híbrido com o nome de “*Integral Backstepping*”, que consistia na união da técnica de controle PID com a *Backstepping*. Um resumo dos componentes embarcados e das técnicas de controle utilizadas é mostrado na **Tabela 1.2**.

Tabela 1.2: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do OS4

(BOUABDALLAH, 2007)

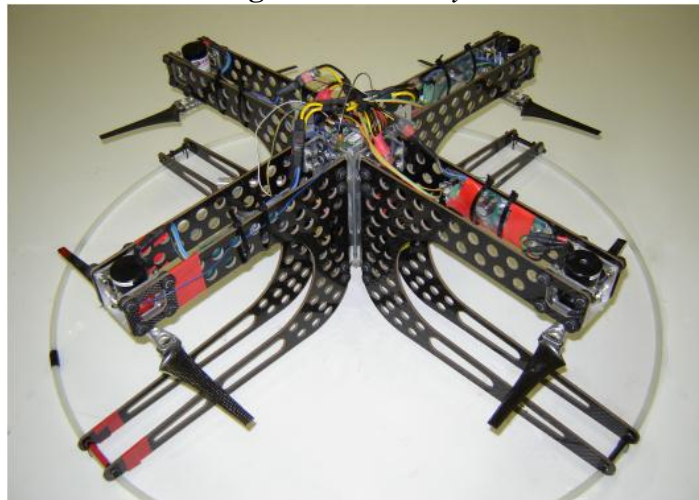
Nome da aeronave ou projeto	OS4
Comunicação	Wi-fi
Controlador	Geode 1200
Massa estimada	650 g
Técnica de controle	PID e LQR
Sensores inerciais	IMU (MT9-B)

Fonte: Próprio autor

1.2.3. O X-4 Flyer

A **Figura 1.5** mostra um quadirrotor com massa superior a 2 kg construído para uso comercial. Neste trabalho é apresentado um estudo detalhado dos principais problemas a serem resolvidos, tais como, a geração de empuxo, controle de velocidade dos rotores e o controle da atitude (POUNDS, 2007).

Figura 1.5: X4 Flyer



Fonte: (POUNDS, 2007)

O controle da aeronave era feito por uma estação base que dispunha de uma interface para o usuário, onde também se tinha os dados da telemetria. A comunicação do X-4 Flyer era feita via *bluetooth*, mas em caso de emergência ou falhas do sistema

era possível controlar a aeronave via rádio frequência utilizando um controle. Informações adicionais do *X-4 Flyer* são apresentadas na **Tabela 1.3**.

Tabela 1.3: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do *X-4 Flyer*
(POUNDS, 2007)

Nome da aeronave ou projeto	<i>X-4 Flyer</i>
Comunicação	<i>Bluetooth</i>
Controlador	HC12D60A
Massa estimada	4340 g
Técnica de controle	-----
Sensores inerciais	EiMU/CSIRO

Fonte: Próprio autor

1.2.4. Helio-copter

Em (FOWERS, 2008) é proposto a construção do Helio-copter. A **Figura 1.6** apresenta este tipo de VANT, cuja principal característica é a capacidade de realizar voos autônomos por meio do sistema *Vision*. Nesse caso, não há a necessidade de uma estação base ou algum tipo de transmissão de dados via *wireless*. O sistema *Vision* consiste na obtenção de dados da posição da aeronave por meio da análise das imagens obtidas por câmeras de vídeo. Os dados são processados e a posição da aeronave pode ser corrigida. O processador de imagens VHDL (*Hardware Design Language*), desenvolvido pelo *Robotic Vision Lab* da *Brigham Young University*, foi utilizado nessa pesquisa.

Figura 1.6: Quadrirrotor Helio-copter



Fonte: (FOWERS, 2008)

Primeiramente, foi usado como base o quadrirrotor *Draganflyer*, que se mostrou incapaz de atender as demandas do projeto, sendo necessária a construção de uma aeronave customizada. A técnica de controle adotada foi a PID. A **Tabela 1.4** apresenta um resumo da técnica de controle e dos componentes embarcados utilizados na construção da aeronave.

Tabela 1.4: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção do Helio-copter

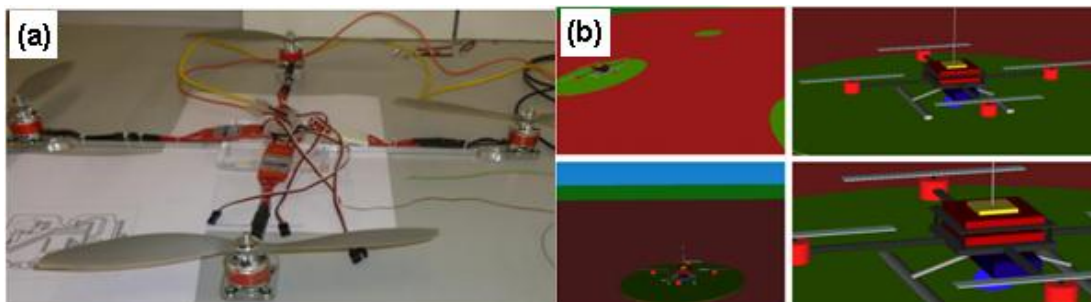
(FOWERS, 2008)	
Nome da aeronave ou projeto	Helio-copter
Comunicação	<i>Wireless</i>
Controlador	Rabbit 3400 CPU
Massa estimada	1130 g
Técnica de controle	PID
Sensores inerciais	<i>Kestrel Auto Pilot</i>

Fonte: Próprio autor

1.2.5. Quadrirrotor de (SOUSA, 2011)

Em seu trabalho é ressaltado que os principais desafios na construção do quadrirrotor apresentado na **Figura 1.7(a)**, se devem a sua natureza instável e ao grau de complexidade na implementação do sistema de controle. Para um melhor funcionamento do sistema de controle, (SOUSA, 2011) utilizou filtros complementares. Em testes ocorreu a medição de ruídos que podem prejudicar o sistema de controle, visto que são necessárias medições corretas para o seu bom funcionamento.

Figura 1.7: (a) O quadrirrotor e (b) o simulador construído por (SOUSA, 2011)



Fonte: (SOUSA, 2011)

A aeronave também podia ser operada pelo usuário por meio de uma estação base com uma interface. Ela foi desenvolvida em *Visual Studio* utilizando a linguagem de programação *VB.Net*. Por meio dela também era possível realizar a telemetria do voo. Adicionalmente foi implementado um simulador em VRSINK, que é apresentado na **Figura 1.7(b)**, utilizando a ferramenta *Simulink* do *software MatLab*. Diversos blocos foram desenvolvidos e interligados, a fim de representar a dinâmica e as partes mecânicas do quadricóptero. Um resumo da técnica de controle e dos componentes embarcados utilizados na construção da aeronave é apresentado na **Tabela 1.5**.

Tabela 1.5: Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção da aeronave
(SOUSA, 2011)

Resumo da técnica de controle e componentes embarcados utilizado na construção da aeronave (SOUSA, 2011)	
Nome da aeronave ou projeto	-----
Comunicação	<i>Wireless</i>
Controlador	NXP LPC1768
Massa estimada	-----
Técnica de controle	PD, PID e Fuzzy
Sensores inerciais	Acelerômetro: ADXL335 Giroscópios: modelos LPR530AL e LY530ALH Bússola digital: HMC6352 Sonar: LV-MaxSonar-EZ1 /MaxBotix

Fonte: Próprio autor

1.3. Estudos que abordam a Modelagem matemática

O desenvolvimento de um modelo físico para o motor e a hélice é apresentado por (MARTÍNEZ, 2007). A forma como calcular os parâmetros do motor e a explicação teórica do seu funcionamento é abordada, assim como a modelagem das hélices. O estudo objetiva obter modelos mais precisos para serem usados na construção de um simulador, utilizando o *Matlab/Simulink*. A obtenção dos modelos visa resultados mais acurados em relação à dinâmica da aeronave. Posteriormente o simulador construído será utilizado para testar o potencial de novos algoritmos de controle.

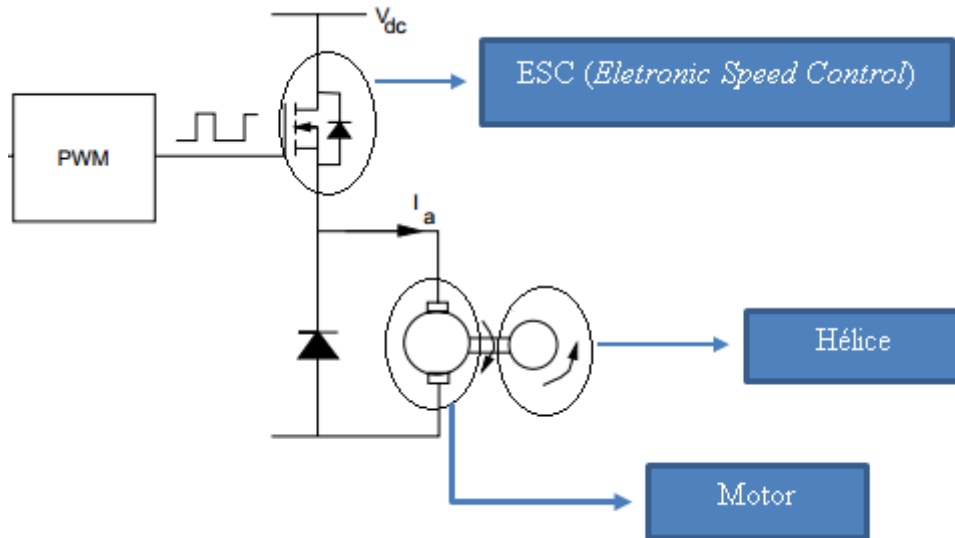
Um modelo detalhado da dinâmica e da aerodinâmica do quadrrorotor é desenvolvido por (BANGURA e MAHONY, 2012). Os modelos podem ser usados para servir como base na elaboração de sistemas de controle de alto desempenho, complexos e para manobras agressivas, sem a necessidade de algoritmo de aprendizagem. Esses modelos mais detalhados possibilitam a redução dos erros de modelagem durante manobras agressivas. Equações que descrevem a utilização de energia mecânica na geração de forças exógenas (empuxo e torque), derivaram do uso da Teoria do Momento e das propriedades elétricas dos motores. Segundo (BANGURA e MAHONY, 2012) a maioria dos trabalhos sobre a modelagem do quadrrorotor usa o mesmo modelo introduzido no final dos anos noventa e cita os trabalhos de (POUNDS, MAHONY e GRESHAM, 2004) e (BOUABDALLAH, MURRIERI e SIEGWART, 2004).

Em sua dissertação de mestrado, (PAULA, 2012), construiu um quadrrorotor, com o objetivo de obter imagens em alta definição. Também foi realizada a modelagem matemática dos motores por meio da ferramenta *polyfit* do *MatLab*, sendo que foi utilizado a modelagem caixa preta e encapsulados o sistema Esc-Motor-Hélice. Para obtenção dos modelos foi empregado o método de estimação ARX (*Autoregressive model with exogenous inputs*). Os modelos de controle adotados foram a técnica PID e a Lógica Fuzzy, que obteve melhores resultados para a estabilização da aeronave. O autor propôs alguns métodos que possibilitam a diminuição dos ruídos mecânicos nos sensores que são causados principalmente pela vibração dos motores.

Os modelos podem ser usados para servir como base na elaboração de sistemas de controle de alto desempenho, complexos e para manobras agressivas, sem a necessidade de algoritmo de aprendizagem. Portanto, utilizando-se modelos matemáticos é possível obter sistemas de controle mais precisos e com menor complexidade (BANGURA e MAHONY, 2012).

Por isso, se faz necessário o estudo do conjunto ESC – Motor – Hélice, apresentado na **Figura 1.8**, a fim de obter o seu modelo matemático, visto que toda a dinâmica da aeronave é dependente dele.

Figura 1.8: Diagrama representativo do conjunto ESC-Motor-Hélice



Fonte: Adaptado de (PHILIPS SEMICONDUCTORS APPLICATIONS LABORATORY, 1994)

Ao aprimorar o conhecimento a respeito desse conjunto, conseqüentemente melhora-se o conhecimento a respeito da dinâmica da aeronave.

1.4. Objetivos

Propor um modelo matemático utilizando técnicas de Identificação de Sistemas para o conjunto ESC-Motor-Hélice empregado em um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) do tipo quadrirrotor com capacidade VTOL (*vertical take-off and landing*).

1.5. Contribuição

O modelo encontrado visa obter um melhor conhecimento da dinâmica do conjunto ESC-Motor-Hélice. O conjunto em estudo é parte fundamental na construção de multirrotores.. Tal modelo poderá ser utilizado futuramente em sistemas de controle.

1.6. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos, onde cada um aborda os aspectos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão de literatura a respeito das diferentes configurações de multirrotores, mostrando suas vantagens e desvantagens. Juntamente é realizado um estudo da dinâmica do quadrrroto e justificada a sua escolha.

No capítulo 3 é feito um estudo envolvendo componentes do braço do quadrrroto (PWM, ESC, hélice e motor). Nele são abordados aspectos técnicos e teóricos. Tais conhecimentos são usados na construção da plataforma de teste, utilizada para a coleta dos dados.

O capítulo 4 trata dos conhecimentos teóricos usados para o tratamento dos dados e a modelagem matemática do conjunto ESC-motor-hélice por meio da identificação de sistemas. São abordados os conceitos de testes de estacionariedade, estimação da ordem e estrutura dos modelos utilizando a função de autocorrelação e autocorrelação parcial. Também são apresentados métodos usados para a sua validação.

No capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos por meio da modelagem matemática caixa preta, onde utilizou-se a identificação de sistemas, sendo feita a validação do modelo encontrado, fazendo uso dos conceitos abordados no capítulo 4.

Na sequência, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões deste trabalho e feitas propostas para trabalhos futuros.

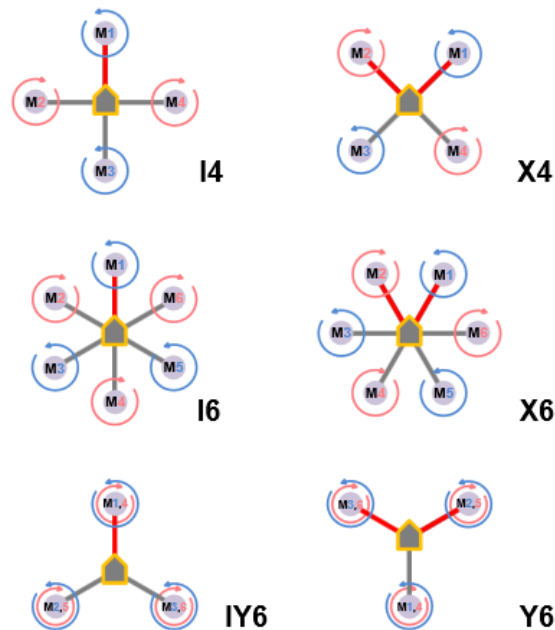
2. DIFERENTES TIPOS DE MULTIROTORES

Nesse capítulo são apresentadas aeronaves com três até oito rotores, expondo suas respectivas vantagens e desvantagens. Na sequência é feito uma breve exposição da história do quadrirrotor e seu princípio de funcionamento. Isso visa justificar a escolha do quadrirrotor como a plataforma de estudo para a obtenção do modelo matemático do conjunto ESC-Motor-Hélice.

2.1. Diferentes configurações de multirrotor: Características, vantagens e desvantagens

Diferentes modelos de aeronaves foram projetadas, desde com três (tricoptero), quatro (quadrirrotor), cinco (pentacoptero), seis (hexacoptero), oito rotores (hectacoptero), entre outros modelos. Nesses diferentes modelos, a colocação dos rotores pode variar, ou seja, o funcionamento da aeronave é dependente dessa distribuição. As configurações em “I”, a parte frontal da aeronave é definida por um motor. Para as configurações em “X” a parte frontal é definida por dois rotores. Tal característica pode ser visualizada na **Figura 2.1**.

Figura 2.1: Diferentes configurações de multirrotores



Fonte:(COPTERCRAFT, 2014)

Além disso, existem também as aeronaves com configuração coaxial, que é formada por um rotor na parte superior e outro na parte inferior. Essa configuração é apresentada pelas configurações IY6 e Y6 na **Figura 2.1**.

Não é apresentada a configuração com dois rotores, pois segundo (BÜCHI, 2011) para que a aeronave voe de forma estável são necessários no mínimo três rotores.

Cada um dessas configurações possui suas peculiaridades, vantagens e desvantagens, que são apresentadas a seguir.

2.2.1. O tricóptero

Quando se pensa em construir um multirrotor com uma quantidade mínima de rotores para voar de forma estável, a resposta é três. Essa aeronave recebe o nome de tricóptero (BÜCHI, 2011), conforme **Figura 2.2**.

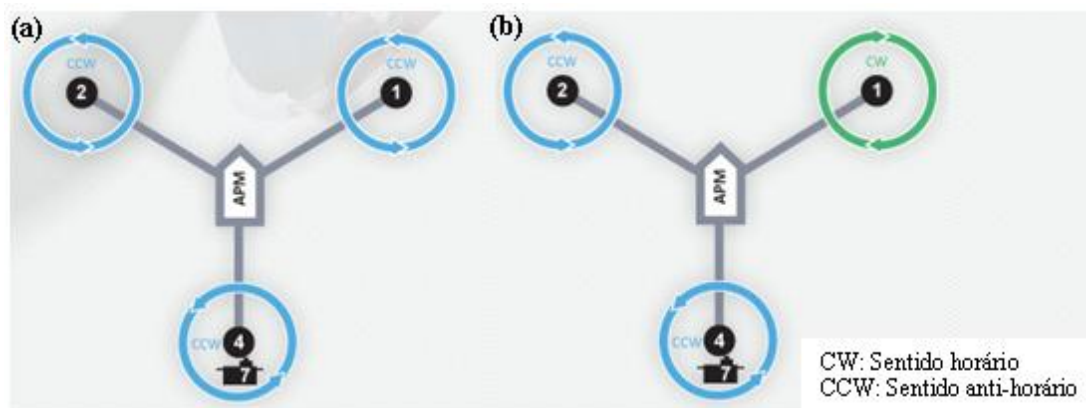
Figura 2.2: Tricóptero



Fonte: (RCGROUPS.COM, 2011)

Na construção do tricóptero, usualmente utilizam-se todas as hélices girando em sentido anti-horário, **Figura 2.3(a)**. Também há propostas onde um rotor frontal gira em sentido horário e outro em sentido anti-horário **Figura 2.3(b)**. Na sua construção, a forma de Y é a preferida (BÜCHI, 2011).

Figura 2.3: Sentido da rotação dos motores



Fonte: (ARDUCOPTER, 2012)

Utilizando a configuração mostrada na **Figura 2.3(b)** existe uma vantagem ao cancelar os efeitos giroscópios derivados dos motores frontais. Isso acarreta em um melhor controle do movimento de guinada. Para realizar a sua movimentação é necessário que o motor traseiro seja projetado de forma que consiga deslocar-se para esquerda ou direita. Esse movimento é executado utilizando um servo motor.

O trípode envolve baixo custo em sua construção, pois necessita apenas de três rotores. No entanto enfrenta problemas devido a sua baixa capacidade de carga e instabilidade. Outro fator negativo que deve ser levado em conta é que em caso de falha em um dos motores ocorrerá a queda da aeronave. Com a queda existe a possibilidade de danificar o equipamento embarcado.

2.2.2. O quadripotador

O quadripotador, onde um exemplo é apresentado na **Figura 2.4**, deriva do helicóptero e os meios utilizados para a sua propulsão são quatro rotores de empuxo vertical. Os rotores geralmente são colocados na extremidade da estrutura em forma de cruz e no centro são embarcados os dispositivos necessários para realizar o seu controle.

Figura 2.4: Quadrirrotor comercial *Phantom*



Fonte: (PHANTOM BRASIL, 2015)

Todos os movimentos realizados dependem apenas da variação da velocidade das hélices. Portanto não há a necessidade de variar o ângulo de ataque das pás, como ocorre no helicóptero. Com isso, o quadrirrotor, possui um maior grau de manobrabilidade e por utilizar quatro rotores, o diâmetro das hélices pode ser menor. Dessa forma, diminui a sua energia cinética e possibilita que a aeronave atinja lugares com menor acessibilidade (PAULA, 2012).

No quadrirrotor as hélices são acopladas diretamente ao rotor, resultando em uma maior simplicidade mecânica e na redução de custos. Com aos avanços ocorridos nos equipamentos eletrônicos, motores elétricos e semicondutores, é fácil de ser controlado e estabilizado (FORBES, 2013).

O quadrirrotor possui a capacidade VTOL (*vertical take-off and landing*), que permite pouso e decolagem de forma vertical, não necessitando de uma pista para isso. Veículos que possuem essa capacidade apresentam vantagem sobre outras aeronaves, pois são capazes de executar manobras difíceis ou impossíveis para aeronaves que não a têm (BOUABDALLAH, 2007).

Todos os seus rotores são usados para realizar os seus movimentos. No entanto, devido à necessidade de variar as suas velocidades se perde uma considerável quantidade de energia. Ao ser considerada a energia cinética, é possível concluir que para mover uma determinada massa ao dobro de sua velocidade é necessário quatro

vezes mais energia. Caso se queira mover o dobro da massa se necessita o dobro da energia (FORBES, 2013).

2.2.3. O Pentacoptero

O pentacoptero, que é apresentado na **Figura 2.5**, é uma aeronave com cinco rotores. Uma de suas principais vantagens é o fato de ter um bom ângulo de abertura na sua parte frontal. Isso facilita as filmagens, evitando que os rotores ou hélices apareçam na câmera. Além disso, possuindo mais rotores tem mais empuxo que aeronaves que possuem menos. No entanto, com o aumento no número de rotores, o custo para sua construção é maior.

Figura 2.5: Pentacoptero



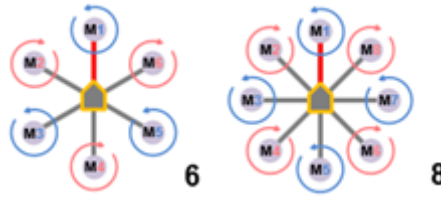
Fonte: (ROBOT KINGDOM, 2013)

O rotor traseiro fica responsável por balancear o peso da câmera que se encontra na parte frontal. Ainda não se encontra literatura técnica disponível a respeito deste tipo de aeronave.

2.2.4. Hexacoptero e Octocoptero

Ao se construir uma aeronave que tenha um número par de rotores, o cancelamento dos efeitos giroscópios é realizado utilizando os torques dos mesmos (BÜCHI, 2011). Desta forma, metade dos motores tem sua rotação em sentido horário e outra metade em sentido anti-horário. Isso pode ser visualizado na **Figura 2.6**.

Figura 2.6: Sentido de rotação dos rotores

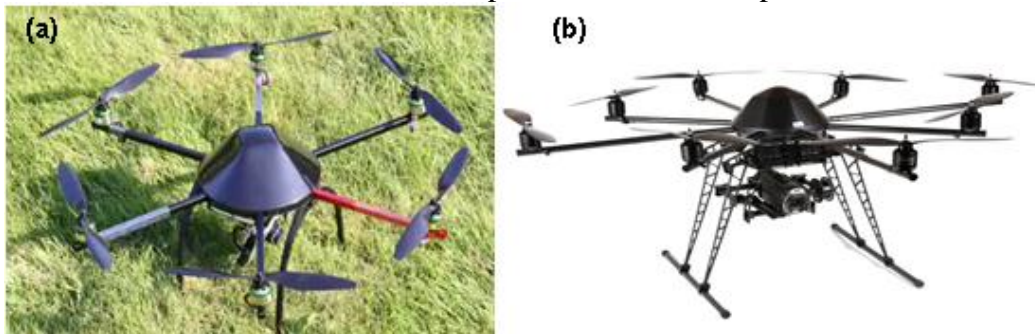


Fonte: (COPTERCRAFT, 2014)

Caso ocorra alguma falha mecânica em um dos rotores, a aeronave conseguirá voar normalmente. Essas falhas são raras e geralmente deve-se a uma inadequada combinação entre os rotores e hélices (BÜCHI, 2011).

Ao aumentar a quantidade de rotores também aumentará o empuxo da aeronave. O hexacoptero apresentado na **Figura 2.7(a)**, possui 1,5 vezes mais empuxo que o quadricóptero e por sua vez o octocóptero, **Figura 2.7(b)**, possui 2 vezes mais empuxo.

Figura 2.7: (a) Hexacoptero MK Hexa XL e (b) octocoptero MK ARF da empresa alemã Mikrokopter



Fonte: (MIKROKOPTER, 2015)

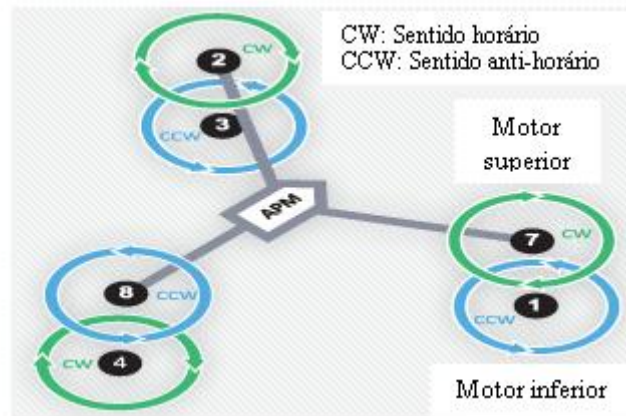
No entanto, ao se aumentar a quantidade de rotores, consequentemente o preço para sua construção também aumenta. Outro fato a ser considerado, é que com o aumento da quantidade de componentes embarcados a sua construção e manutenção se torna mais complexa (BÜCHI, 2011).

2.2.5. Os rotores coaxiais

Outra proposta que existe na construção de um multirrotor é a configuração coaxial. Esta configuração, mostrada na **Figura 2.8**, é formada por um motor na parte

superior e outro na parte inferior, tendo suas rotações em sentidos opostos (COLEMAN, 1997).

Figura 2.8: Configuração com rotores coaxiais para um hexacoptero com o *design* de um tricóptero.



Fonte: Adaptado de (ARDUCOPTER, 2012)

A configuração coaxial apresenta algumas vantagens, onde uma delas é o *design* da aeronave, pois possui mais rotores em um menor espaço. Os componentes embarcados podem ser realocados, visando o aumento da sua capacidade de carga. A aeronave decola de forma mais estável e também se torna um veículo mais ágil, devido a maior quantidade de rotores. A diminuição do seu tamanho e redução de ruídos são outras vantagens citadas (LAKSHMINARAYAN e BAEDER, 2009).

No entanto, na configuração coaxial, os dois rotores interagem entre si, produzindo um escoamento de ar mais complexo (LAKSHMINARAYAN e BAEDER, 2009). A separação entre a hélice superior e inferior é de suma importância. Caso não seja feita de forma correta a hélice inferior irá enfrentar um fluxo de ar bem maior, o que acaba exigindo mais potência do motor (BOUABDALLAH, 2007).

2.2. Porque o quadrirrotor?

A sua simplicidade e os baixos custos envolvidos em sua construção são fatores importantes e que são levados em conta ao se escolher essa aeronave como plataforma para a realização deste estudo. Mesmo possuindo algumas limitações, apresenta o melhor custo benefício entre os multirrotores apresentados nesse trabalho, conforme **Tabela 2.1.**

Tabela 2.1: Vantagens e desvantagens das diferentes configurações de multirrotores

TIPO	QUANTIDADE DE ROTORES	COAXIAL	VANTAGENS	DESVANTAGENS
* Y	3	Não	Baixo custo	Sem proteção contra falhas
I4	4	Não	Simplicidade e baixo custo	Sem proteção contra falhas
X4	4	Não	Simplicidade e baixo custo	Sem proteção contra falhas
I6	6	Não	Limitada proteção contra falhas e grande capacidade de carga	Grandes dimensões e preço elevado
X6	6	Não	Limitada proteção contra falhas e grande capacidade de carga	Grandes dimensões e preço elevado
Y6	6	Sim	Pequeno, boa estabilidade e resistência ao vento	Baixa eficiência e mecanismos complexos
IY6	6	Sim	Pequeno, boa estabilidade e resistência ao vento	Baixa eficiência e mecanismos complexos
I8	8	Não	Proteção contra falhas e potente	Grandes e caros
V8	8	Não	Proteção contra falhas e potente	Grandes e caros
X8	8	Sim	Atinge grandes altitudes e resistência ao vento.	Ineficiente

Fonte: (COPTERCRAFT, 2014); *: inserido pelo autor.

Alguns conceitos de aeronaves, citando como exemplo o pentacoptero, ainda não possuem muitos estudos ao seu respeito. No entanto o quadrirrotor foi e continua sendo objeto de estudo em vários trabalhos. Dessa forma, seus problemas foram

expostos pela literatura. Uma breve apresentação do desenvolvimento do quadrirrotor durante a história é apresentada na próxima seção.

2.3. História do quadrirrotor

O quadrirrotor tem sua origem no ano de 1907, com a construção do Bréguet-Richet Gyroplane Nº 1 pelos irmãos Bréguet. Devido ao seu tamanho e a sua grande massa, ele não teve força suficiente para atingir uma elevada altitude, chegando a apenas 1,5 m de altura (LEISHMAN, 2002). Em 1920, Etienne Oemichen, desenvolveu uma aeronave com quatro motores e oito hélices. Oemichen obteve estabilidade e controlabilidade que possibilitaram voar por aproximadamente 1 km. Dois anos depois, Bothezat, com o apoio do exército americano, construiu o primeiro quadrirrotor a transportar um passageiro, realizando vários voos com baixa altitude e velocidade. Com desempenho insuficiente o projeto foi cancelado (LEISHMAN, 2000). Segundo (WIEREMA, 2008), devido às dificuldades de controle apresentadas, os pesquisadores focaram no helicóptero de uma hélice, aguardando a obtenção de maiores conhecimentos na área de controle.

Um novo projeto surgiu no ano de 1956, com a construção do *Conterawings Model A*. A aeronave foi baseada nas ideias de Oemichen e Bothezat, executando vários voos com sucesso. No ano de 1963 foi construído o *Curtis X-19* com o objetivo de ser uma aeronave para o transporte de passageiros. Para sua decolagem os motores se encontravam na posição vertical e após decolar deveriam ir para a posição horizontal. Porém a sua mecânica não era capaz de transpor com segurança e rapidez os motores da posição de decolagem para a de voo (WIEREMA, 2008).

A marinha americana requisitou da empresa Bell Helicopter, por meio de dois projetos, a construção de aeronaves com a capacidade de decolagem vertical. Em 1966, o Bell X-22, realizou seu primeiro voo. Diferente do Curtis X-19 a transição entre decolagem e voo foi um sucesso, mas não atingiu a velocidade máxima solicitada de 525 km/h, sendo cancelado o projeto.

Outros modelos de quadrirrotor foram desenvolvidos posteriormente, mas sem novas soluções. O avanço da tecnologia e o consequente desenvolvimento dos componentes microeletrônicos, fabricação de sensores de melhor qualidade e a criação do GPS (*Global Positioning System*), possibilitaram a criação dos VANTs (Veículo aéreo não tripulado). Com o crescente uso dos VANTs para a vigilância, principalmente

utilizando aeronaves de asa fixa, aviões, de pequeno porte e indetectáveis, surge a necessidade de realizar voos pairados. Dessa forma ressurgem o quadrirrotor, que a partir de 2004 teve vários modelos criados e apresentados, tanto no meio militar quanto no civil (FERNANDES, 2011).

Partindo desse fato, em 2005, a Bell Helicopter, em parceria com a Boeing, assinou um contrato com a marinha americana tendo por objetivo a construção do Quad Tilt Rotor, que deveria ter grande capacidade de carga e com elevada velocidade de voo e alcance (SOUSA, 2011). O uso do quadrirrotor pela indústria ainda não ocorreu devido ao fato de grande parte dos objetos transportados poderem ser alçados utilizando aeronaves com um ou dois rotores (MARTÍNEZ, 2007).

Atualmente, com o avanço da tecnologia e a capacidade de miniaturização dos dispositivos, gerando uma maior mobilidade e uma diminuição nos custos para a sua comercialização (POUNDS, MAHONY e HYNES, 2002), e também por estar se tornando a plataforma padrão para investigação de mobilidade tridimensional, as pesquisas com o quadrirrotor vêm crescendo. A seguir, é apresentada a dinâmica da atitude do quadrirrotor, ou seja, a forma como são realizados os seus movimentos, em conjunto com suas principais características.

2.4. A dinâmica da atitude do quadrirrotor e suas principais características

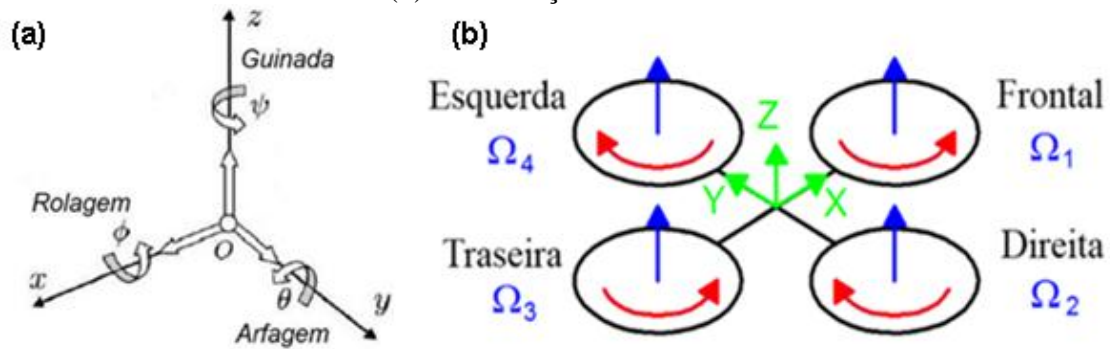
O quadrirrotor tem a habilidade de realizar os seguintes movimentos de atitude e que são: arfagem, guinada, rolagem e altitude. Um movimento de atitude pode ser definido como a orientação da aeronave, determinada pela mudança na inclinação do eixo em relação ao um ponto de referência. Também será explicado o voo pairado.

Todos os movimentos de atitude, mostrados na **Figura 2.9(a)**, do quadrirrotor derivam da variação da velocidade dos motores. Um exemplo disso, ao realizar um voo pairado a velocidade em todos os motores é a mesma e caso o operador queira que a aeronave ganhe altitude, ele deve aumentar a velocidade em todos os motores. Para caracterizá-los, será considerada a **Figura 2.9(b)**, a fim de especificar a localização dos pontos frontal, traseira, esquerda e direita.

- **Arfagem:** Se caracteriza por ser realizado em torno do eixo y, ou seja, é a movimentação que faz o quadrirrotor mover-se para frente ou para trás.
- **Rolagem:** Ocorre em torno do eixo x, fazendo com que a aeronave se desloque para a esquerda ou direita.

- **Guinada:** Incide em torno do eixo z, dessa forma o quadrirrotor irá se encontrar com uma inclinação de zero grau em relação ao plano xy, realizando um movimento de rotação em torno do seu eixo.
- **Altitude:** Movimento em que a aeronave ganha altura. Para realizar este movimento é necessário aumentar a velocidade de rotação em todos os motores.
- **Voo Pairado:** Se caracteriza pela aeronave se encontrar “parada” no ar, isto é, não realiza nenhum movimento. Esse fato ocorre quando a velocidade de rotação é igual em todos os motores, de forma que o empuxo gerado seja o suficiente para manter a aeronave voando.

Figura 2.9: (a) Movimentos de guinada, arfagem e rolagem realizados pelo quadrirrotor e (b) Distribuição dos motores



Fonte: (PAULA, 2012)

A variação na velocidade dos rotores para realizar os diferentes movimentos de atitude é apresentado na **Tabela 2.2**.

Tabela 2.2: Variação da velocidade dos motores para se obter o movimento desejado

Movimento	Velocidade angular para cada hélice			
	Frontal Ω_1	Direita Ω_2	Traseira Ω_3	Esquerda Ω_4
Pairado	Ω_c	Ω_c	Ω_c	Ω_c
Altitude (Z)	$\Omega_c + \Omega_v$	$\Omega_c + \Omega_v$	$\Omega_c + \Omega_v$	$\Omega_c + \Omega_v$
Arfagem (θ)	$\Omega_c + \Omega_v$	Ω_c	$\Omega_c - \Omega_v$	Ω_c
Rolagem (ϕ)	Ω_c	$\Omega_c + \Omega_v$	Ω_c	$\Omega_c - \Omega_v$
Guinada (ψ)	$\Omega_c + \Omega_v$	$\Omega_c - \Omega_v$	$\Omega_c + \Omega_v$	$\Omega_c - \Omega_v$

Fonte: (PAULA, 2012)

Onde Ω_c representa uma velocidade angular constante que é capaz de contrabalancear a aceleração da gravidade e Ω_v representa uma velocidade angular variável, que pode ser tanto negativa quanto positiva e que respeita os limites de saturação dos motores.

Os movimentos do quadrirrotor são dependentes da variação na velocidade de rotação dos rotores. Assim, é possível perceber que o funcionamento adequado do quadrirrotor está diretamente ligado ao conjunto em estudo neste trabalho (ESC-Motor-Hélice). Portanto, um estudo mais aprofundado de cada componente se faz necessário, a fim de entender o seu funcionamento individual e construir uma plataforma de testes. Cada um destes componentes é apresentado no capítulo seguinte.

3. CONJUNTO MOTOR-HÉLICE-ESC E PWM

Este capítulo apresenta os componentes que compõem o elemento fundamental do quadricóptero e fazem parte do conjunto, que é objeto de estudo nesta investigação. É apresentada a teoria a respeito desses componentes, bem como seu funcionamento.

3.1. O braço do quadricóptero

O quadricóptero é formado por quatro braços e cada um destes é constituído por um ESC, motor e hélice. Como visto no capítulo 2, a dinâmica de atitude da aeronave é dependente da variação de velocidade que ocorre em cada um desses braços. Cada um dos componentes possui uma função específica, assim como, características próprias de funcionamento.

Um melhor conhecimento de cada um dos componentes se faz necessário, a fim de compreender sua funcionalidade no conjunto. O funcionamento mais detalhado de cada uma dessas partes é descrito a seguir.

3.2. Motor Brushless

O uso dos motores elétricos se difundiu pelas mais diversas áreas, sendo o principal conversor de energia elétrica em mecânica há mais de um século. De forma a adaptar o seu uso nas mais diversas áreas, diferentes tipos de motores foram desenvolvidos dentro da necessidade e tecnologia disponíveis na época. Entre eles se encontra o motor síncrono (XIA, 2012).

No motor síncrono o campo magnético do rotor é independente do campo magnético do estator. No momento em que o campo magnético do rotor busca o alinhamento com o campo magnético girante do estator, a velocidade de rotação é proporcional a frequência de alimentação do estator. Essa velocidade de rotação acompanha o campo magnético girante estabelecido, de onde deriva o nome síncrono.

Esse motor caracteriza-se por sua elevada capacidade de torque, resistência mecânica, precisão e eficiência. Há problemas em se regular sua velocidade de rotação, o que acaba por limitar o seu uso. Nos dias atuais, motores CC (corrente contínua) de pequena capacidade são amplamente usados em sistemas de controle automação (XIA, 2012).

Os motores CC com escovas atuais tem sua base desenvolvida por Ernst Werner Von Siemens no ano de 1856. As escovas (*brushes*) são as responsáveis pela comutação nos motores CC tradicionais. Elas conduzem a energia do comutador para o rotor. Por ser pressionada contra o comutador, resulta em problemas mecânicos. Cita-se o atrito, que diminui a vida útil do motor; ruído; faíscas elétricas; e rádio interferência. Pensando em melhorar essas características negativas surge o motor *brushless*, ou seja, o motor sem escovas.

O motor *brushless* foi desenvolvido tendo como base o motor *brushes*. Ele é um motor de corrente contínua de ímãs permanentes e sem escovas. O motor *Brushless* ou BLDC (*Brushless Direct Current Motor with Permanent Magnet*) é o mais utilizado ao se tratar de motores de baixa potência. Isso se deve ao fato de ser eficiente, silencioso, confiável, compacto e com um baixo custo de manutenção (RAMBABU, 2007). Acrescenta-se a redução da interferência magnética (EMI) e uma melhor proporção de torque fornecido em relação ao tamanho do motor, o que os torna úteis para aplicações aeroespaciais (REAL, SÁNCHEZ e GIL, 2010).

Seu princípio básico de funcionamento está na substituição de um comutador mecânico por um circuito elétrico. Em motores tradicionais, as trocas são realizadas pelas escovas, sendo que a direção do campo magnético e do estator são alterados de forma perpendicular um com o outro, enquanto o motor está em funcionamento. Em motores BLDC foi colocado um ímã permanente nas laterais do estator e do rotor. Ele geralmente usa três fases, que durante seu funcionamento, onde por meio de sensores de efeito Hall integrados no estator, detectam qual o polo magnético está mais próximo. Ao combinar os sinais dos sensores é possível obter a posição atual do rotor, e assim fornecer a sequência certa de acionamento. Os motores utilizados nesse trabalho não possuem o sensor de efeito Hall. Nesse caso, o controle é realizado por um dispositivo externo.

Cada sequência de comutação necessita de um enrolamento com alimentação positiva, outro com alimentação negativa e o último terá alimentação nula. Desta forma, ocorre a interação entre o campo magnético gerado pelo estator e os ímãs. Esta alteração do polo magnético faz com que o motor continue em rotação.

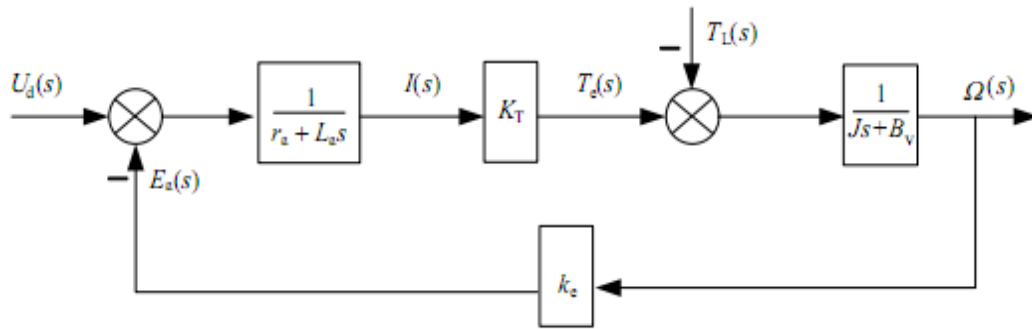
A modelagem matemática de um motor BLDC, com torque de carga por meio de uma função de transferência entre o torque de carga e a velocidade é apresentada por (XIA, 2012) e é dada por:

$$G_L(s) = \frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = -\frac{r_a + L_a s}{L_a J s^2 + (r_a J + L_a B_V) s + (r_a B_V + k_e K_T)} \quad (3.1)$$

Onde r_a é a resistência do enrolamento ($r_a = 2R$), L_a é a linha de indutância equivalente do enrolamento ($L_a = 2(L - M)$), k_e é o coeficiente de força eletromotriz inversa, K_T é o coeficiente de torque, J momento de inércia do rotor e B_V o coeficiente de atrito viscoso.

A equação (3.1) pode ser descrita pelo diagrama apresentado na **Figura 3.1**:

Figura 3.1: Diagrama estrutural de um motor BLDC com torque de carga



Fonte: (Xia, 2012)

A equação de transferência de um motor BLDC onde a velocidade é afetada pela voltagem e pelo torque de carga é dada por:

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= G_u(s)U_d(s) + G_L(s)T_L(s) \\ &= \frac{K_T U_d(s)}{L_a J s^2 + (r_a J + L_a B_V) s + (r_a B_V + k_e K_T)} \\ &\quad - \frac{(r_a + L_a s) T_L(s)}{L_a J s^2 + (r_a J + L_a B_V) s + (r_a B_V + k_e K_T)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Onde $U_d(s)$ é a tensão de entrada da corrente e $T_L(s)$ é o torque de carga.

Para o estudo em questão o torque de carga a ser considerado é a hélice.

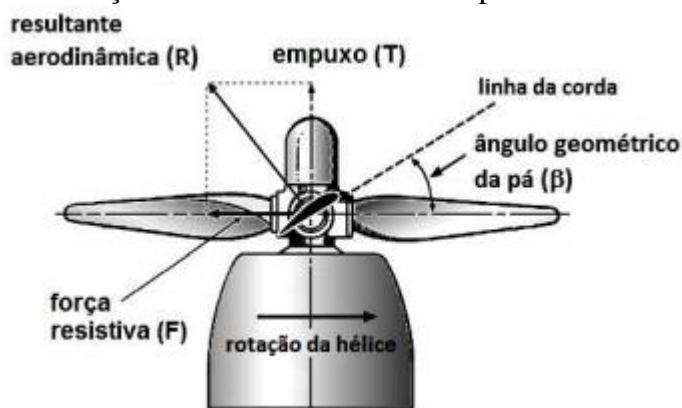
3.3. Hélice

As hélices, juntamente com os motores, são responsáveis pela propulsão da aeronave. Ela pode ser descrita como um aerofólio rotativo que durante sua rotação gera

um movimento do ar em forma helicoidal, reagindo aerodinamicamente como um aerofólio convencional, e assim gerando uma força aerodinâmica resultante (NELSON, 1944). Portanto, uma parte de suma importância no conjunto é a hélice. A eficiência do conjunto Motor – Hélice está diretamente ligada a uma escolha adequada da hélice (MCCORMICK, 1979).

Ao se decompor essa resultante aerodinâmica, a parcela decomposta na direção do voo é a sua força propulsiva, também conhecida como empuxo. As hélices são formadas por pás, com o número mínimo de duas, e são conectadas em uma estrutura central, que é o cubo da hélice, conforme apresentado na **Figura 3.2** (PINTO, MARTINS e VENSON, 2012).

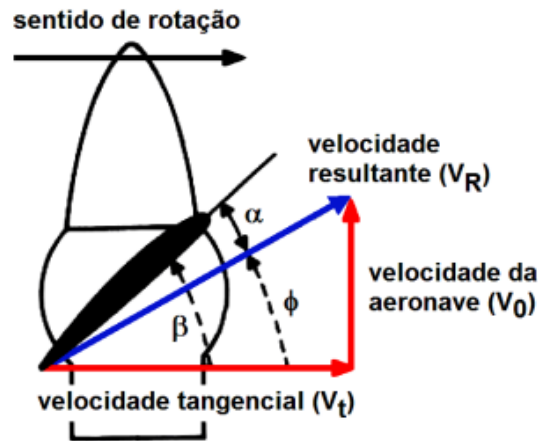
Figura 3.2: Força resultante no aerofólio da pá de uma hélice



Fonte: (PINTO, MARTINS e VENSON, 2012)

O aerofólio das pás realiza dois movimentos combinados, o de rotação (em torno do eixo) e o de translação (no sentido do deslocamento da aeronave). Com isso, surge uma velocidade resultante (V_R) do vento relativo sobre o aerofólio, que é função da velocidade tangencial da pá (V_t) (rotação), e da velocidade de voo da aeronave (V_0) (translação). Essa velocidade resultante altera o ângulo de ataque do aerofólio (α) em relação ao ângulo geométrico da pá (β). O ângulo formado entre a velocidade resultante e o plano de rotação da hélice é chamado de ângulo de deslizamento da pá (ϕ) (NELSON, 1944).

Figura 3.3: Componentes de velocidade e ângulos do escoamento na pá

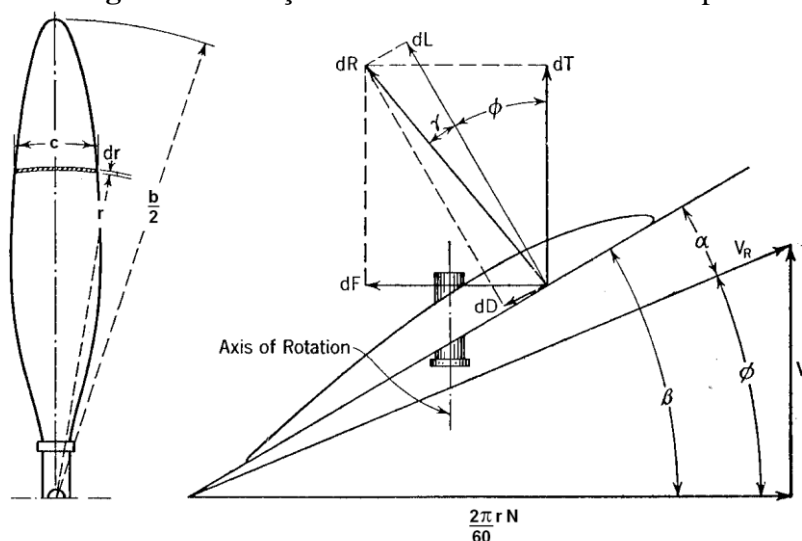


Fonte: (PINTO, MARTINS e VENSON, 2012)

O desempenho de uma hélice pode ser descrito por meio da teoria de elementos de pá. Nesta teoria as pás da hélice são divididas no sentido do seu comprimento em finitos elementos bidimensionais. Cada um desses elementos aerodinâmicos possui características geométricas e aerodinâmicas específicas (curvatura aerodinâmica, corda, espessura relativa, coeficientes de sustentação e arrasto e ângulo geométrico de pá).

Essas divisões de pá são definidas partindo de um comprimento em relação a linha de centro da hélice, e por meio delas é possível determinar o incremento de força propulsiva (dT) e incremento de força resistiva (dF), gerados por cada elemento, conforme **Figura 3.4**, em função dos ângulos geométricos e aerodinâmicos (ROSKAM e LAN, 1997).

Figura 3.4: Forças atuantes em um elemento de pá



Fonte: (NELSON, 1944)

A **Tabela 3.1**, apresenta o significado dos parâmetros geométricos e aerodinâmicos apresentados na **Figura 3.4** e utilizados na Teoria elementar de pás.

Tabela 3.1: Parâmetros geométricos e aerodinâmicos utilizados na Teoria elementar de pás

Parâmetro	Descrição (unidade)
dT	Tração (N)
dF	Força resistiva (N)
dL	Incremento de sustentação (N)
dD	Incremento de arrasto (N)
dR	Resultante de forças (N)
R	Comprimento radial (m)
C	Corda do elemento (m)
V	Velocidade da aeronave (m/s)
V_r	Velocidade resultante (m/s)
N	Rotação da hélice (rpm)
$\frac{2\pi}{60}rN$	Velocidade tangencial (m/s)
β	Ângulo geométrico da pá
α	Ângulo de ataque da pá
ϕ	Ângulo de deslizamento da pá
γ	Ângulo da força resultante
ρ	Densidade do ar (kgm^{-3})

Para cada elemento de pá em movimento rotativo, também estão associados o incremento de sustentação (dL) e de arrasto (dD), que são gerados pelo aerofólio e definidos como:

$$dL = \frac{1}{2} C_L \rho V_R^2 dA = \frac{1}{2} C_L \rho V_R^2 c dr \quad (3.3)$$

$$dD = \frac{1}{2} C_D \rho V_R^2 dA = \frac{1}{2} C_D \rho V_R^2 c dr \quad (3.4)$$

Os coeficientes de *lift* e *drag*, C_L e C_D , são funções do ângulo de ataque e forma do aerofólio.

A velocidade resultante do escoamento sobre a pá depende da velocidade de voo da aeronave e é dada por:

$$V_R = \frac{V}{\sin(\phi)} \quad (3.5)$$

Decompondo dL na direção do incremento da força aerodinâmica resultante (dR), tem-se:

$$dR = \frac{dL}{\cos(\gamma)} \quad (3.6)$$

Decompondo dR na direção do incremento de força propulsiva (dT), tem-se:

$$dT = dR \cos(\phi + \gamma) \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) em (3.7):

$$dT = \frac{dL}{\cos(\gamma)} \cos(\phi + \gamma) \quad (3.8)$$

Substituindo (3.3) e (3.5) em (3.8):

$$dT = \frac{1}{2} C_L \rho V_R^2 c \, dr \frac{\cos(\phi + \gamma)}{\cos(\gamma)} = \frac{1}{2} C_L \rho \left(\frac{V}{\sin(\phi)} \right)^2 c \, dr \frac{\cos(\phi + \gamma)}{\cos(\gamma)} \quad (3.9)$$

A distribuição de tração gerada por qualquer elemento de pá pode ser obtida a partir do reagrupamento de (3.9):

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} C_L \rho V^2 c \frac{\cos(\phi + \gamma)}{\cos(\gamma) \sin^2(\phi)} \quad (3.10)$$

Decompondo dR na direção do incremento de força resistiva de rotação (dF), tem-se:

$$dF = dR \sin(\phi + \gamma) = \frac{dL}{\cos \gamma} \sin(\phi + \gamma) \quad (3.11)$$

O incremento de torque resistivo (dQ), necessário para acionamento da hélice, é $dQ = r dF$, ou seja, é o produto entre o incremento da força resistiva e a posição radial do elemento da pá.

$$dQ = r dF = dR \sin(\phi + \gamma) = \frac{dL}{\cos \gamma} \sin(\phi + \gamma) \quad (3.12)$$

Substituindo (3.3) em (3.12) e a seguir (3.5), tem-se:

$$dQ = \frac{1}{2} C_L \rho V_R^2 c r \, dr \frac{\sin(\phi + \gamma)}{\cos \gamma} = \frac{1}{2} C_L \rho V^2 c r \, dr \frac{\sin(\phi + \gamma)}{\cos(\gamma) \sin^2(\phi)} \quad (3.13)$$

A distribuição de torque resistivo gerado por qualquer elemento da pá pode ser obtido por meio da reescrita de (3.13):

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{1}{2} C_L \rho V^2 c r \frac{\sin(\phi + \gamma)}{\cos(\gamma) \sin^2(\phi)} \quad (3.14)$$

Os valores representados de tração $\left(\frac{dT}{dr}\right)$ e de torque $\left(\frac{dQ}{dr}\right)$, calculados pela equação (3.10) e equação (3.14), referem-se a valores de tração e torque por posição radial de um elemento e é representada por N/m e $N.m/m$ respectivamente. Para determinar o valor total de tração e o torque gerados pela pá, $\frac{dT}{dr}$ e $\frac{dQ}{dr}$ devem ser integrados ao longo de todo o comprimento radial da pá. Tanto a tração gerada pela hélice, quanto o torque de acionamento, são obtidos multiplicando os valores obtidos pelo número de pás.

A tração gerada pela hélice representa a força propulsiva que é utilizada para movimentar a aeronave. O torque de acionamento da hélice corresponde a quantidade de torque que o motor deve entregar para a hélice, a fim de gerar a sua rotação.

A corda, c , é usualmente uma função do raio r . O coeficiente C_d é uma função de C_l . Ele também pode depender dos números de Reynolds e Mach. C_l pode ser calculado por meio da função:

$$C_l = a(\beta - \phi - \alpha) \quad (3.15)$$

No entanto é necessário saber o valor de α , que é função de V_r , que por sua vez depende de dQ . A fim de solucionar esse problema surge a teoria do Momento-Elemento de pá, de onde são obtidos os coeficientes C_T (coeficiente de empuxo) e C_Q (coeficiente de torque), e dados por:

$$C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \quad (3.16)$$

$$C_P = \frac{P}{\rho n^3 D^5} \quad (3.17)$$

Onde n é a velocidade rotacional em rotações por segundo (rps) e D é o diâmetro da hélice. Ambos os coeficientes não são constantes, pois dependem da taxa de avanço da hélice, descrita pela equação:

$$J = \frac{V}{nD} \quad (3.18)$$

No entanto, o estudo para hélices com um número de Reynolds baixo ainda é escasso, mas vem ganhando importância devido ao seu uso nos VANTs. De acordo com (BRAND e SELIG, 2011), testes mostraram que o desempenho dessas hélices teve resultados diferentes ao comparar-se com hélices de maior porte. Com isso, eles

apresentaram um estudo com 79 diferentes hélices, variando seus tamanhos entre 9 – 11 polegadas, descrevendo suas características. Desse estudo surgiu um banco de dados, sob a responsabilidade da Universidade de Illinois/EUA, disponível em <http://m-selig.ae.illinois.edu/props/propDB.html>.

Para o cálculo desses coeficientes é necessário estimar algumas condições que sejam favoráveis ao voo da aeronave. Essas condições podem ser definidas por meio das características que a aeronave possui, sendo determinadas por componentes utilizados em sua construção e finalidade de uso. Também por meio desse estudo é possível determinar uma hélice de maior eficiência. Tal cálculo não será apresentado nessa dissertação devido há necessidade de obter o empuxo.

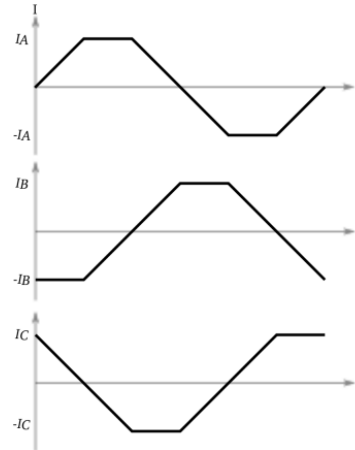
3.4. O ESC – *Eletronic Speed Control*

No motor utilizado nesse trabalho, o dispositivo que controla a alteração entre os polos é o ESC, ou seja, é quem determina a velocidade de rotação do motor.

O ESC é o responsável por consumir a maior parte da potência entregue pela bateria, a fim de alimentar os motores. Ao serem construídos, devem possuir uma boa eficiência energética, evitando assim a perda de energia da bateria.

Seu princípio de funcionamento é mostrado na **Figura 3.5** e está baseado na criação de três sinais defasados em 120° que irão alimentar as três fases do motor. No interior do motor cria-se um campo magnético que gira conforme o sinal aplicado a cada uma das fases. Portanto o aumento da velocidade de rotação depende da rapidez com que é feita a troca desse campo magnético. Da mesma forma, o sentido de rotação está ligado com o sentido de giro do campo magnético.

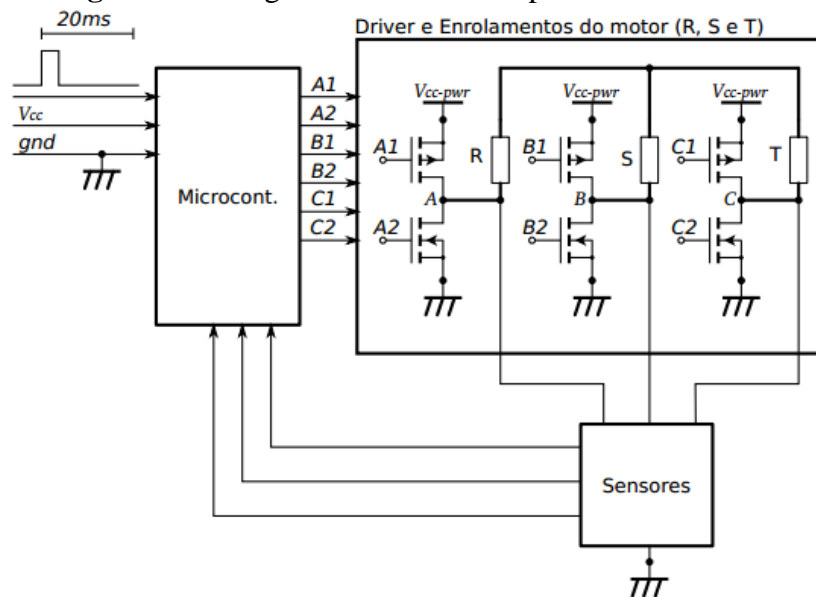
Figura 3.5: Forma de onda de corrente gerada para cada fase e suas defasagens



Fonte: (MELO, 2010)

De acordo com a **Figura 3.6**, um ESC pode ser dividido em duas partes: Uma de controle e outra de potência.

Figura 3.6: Diagrama de blocos simplificado de um ESC



Fonte: (MELO, 2010)

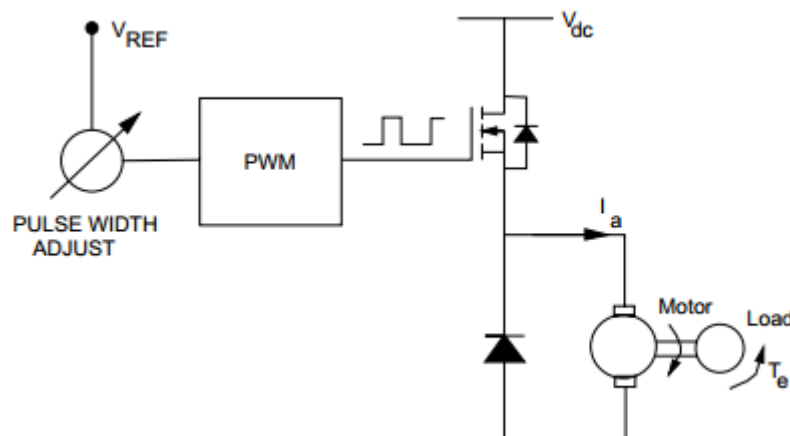
A primeira parte, geralmente é constituída por um microcontrolador, que partindo de um sinal PWM gera três outros sinais, normalmente trapezoidais e defasados entre si em 120°. A entrada da segunda parte são os sinais gerados pela primeira e são amplificados. Esses sinais possuem capacidade de corrente suficiente para alimentar os enrolamentos do motor *brushless*. Além disso, funcionam como chave

para ligar e desligar o enrolamento, conforme o sinal PWM gerado pelo microcontrolador. (MELO, 2010).

3.5. PWM – *Pulse Width Modulation*

O controle de velocidade de motores CC pode ser feita de duas formas: variando a tensão de alimentação do motor de forma contínua ou variando a potência aplicada em função do tempo. A segunda técnica é conhecida como PWM, onde um sistema simplificado é apresentado na **Figura 3.7**. Essa técnica é amplamente aplicada no controle de potência, decorrendo daí o controle de velocidade. A vantagem ao se usar o PWM é a possibilidade de se ter um *hardware* para o controle da potência, não necessitando de um circuito mais sofisticado para isso (MARTINS, 2009).

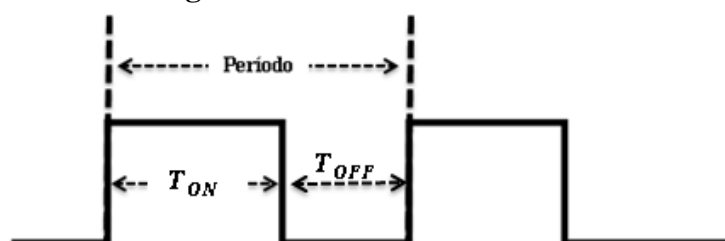
Figura 3.7: Sistema simplificado para um controle de velocidade usando PWM



Fonte: (PHILIPS SEMICONDUCTORS APPLICATIONS LABORATORY, 1994)

O formato de onda da corrente elétrica para motores BLDC é trapezoidal (REAL, SÁNCHEZ e GIL, 2010). Tal formato de onda proporciona um maior torque. A **Figura 3.8** apresenta a forma de um pulso PWM.

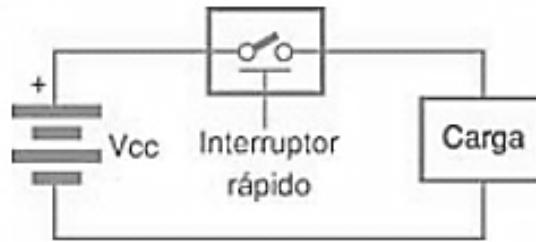
Figura 3.8: Forma de onda PWM



Fonte: Próprio autor

Cada pulso é composto por um período, que se divide em *ON* e *OFF*. A fim de exemplificar esse controle, poderia ser dito que é feito por meio de um interruptor de ação muito rápida, conforme o circuito da **Figura 3.9**. Na prática esse interruptor é substituído por algum dispositivo que possua a capacidade de abrir e fechar o circuito rapidamente (BRAGA, 2012).

Figura 3.9: Diagrama ilustrativo de um circuito de controle de uma carga



Fonte: (BRAGA, 2012)

Um período desse pulso é composto pelo tempo em que a carga é mantida ativa (interruptor fechado), mais o tempo que a carga se encontra desativada (interruptor aberto), e é representado por:

$$T = T_{on} + T_{off} \quad (3.19)$$

Onde T é o período, T_{ON} é o tempo que a carga é mantida ativa e T_{OFF} é o tempo que a carga está desativada. Quanto maior for T_{ON} maior será a energia entregue. A frequência, representada por f dada em (Hz), do sinal é dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.20)$$

O ciclo ativo do sistema é conhecido como *duty cycle* e é dado por:

$$DC = \frac{T_{ON}}{T_{ON} + T_{OFF}} = \frac{T_{ON}}{T} \quad (3.21)$$

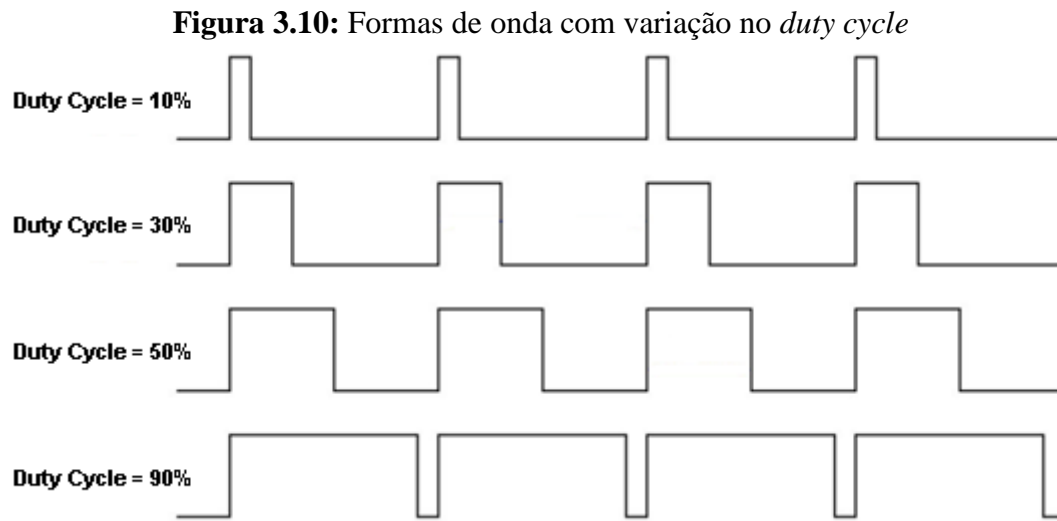
$$DC = \frac{T_{ON}}{T} \cdot 100 \quad (3.22)$$

Nesse caso o *duty cycle* (DC), da equação (3.22) é dado como uma porcentagem do período em que a corrente está ativa.

A velocidade de rotação do motor está diretamente ligada com a quantidade de voltagem fornecida, ou seja, quanto mais amplo for o tamanho do pulso maior será a energia transferida para o motor, aumentando a sua velocidade de rotação. O tempo que o motor leva para aumentar ou diminuir sua velocidade está ligado com a inércia do

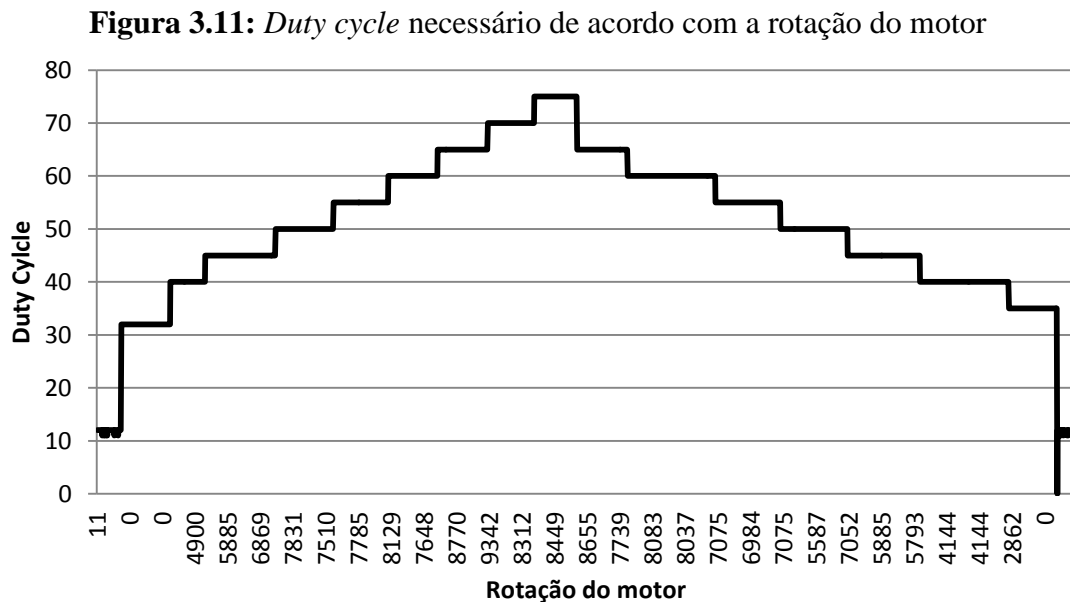
rotor, a quantidade de atrito e o torque de carga existente (GUPTA e TIWARI, 2013). A

Figura 3.10 mostra formas de onda com variação no *duty cycle*.



Fonte: Próprio autor

O gráfico apresentado na **Figura 3.11** mostra a forma como a rotação varia conforme o *duty cycle* aplicado no motor utilizado neste trabalho.



Fonte: Próprio autor

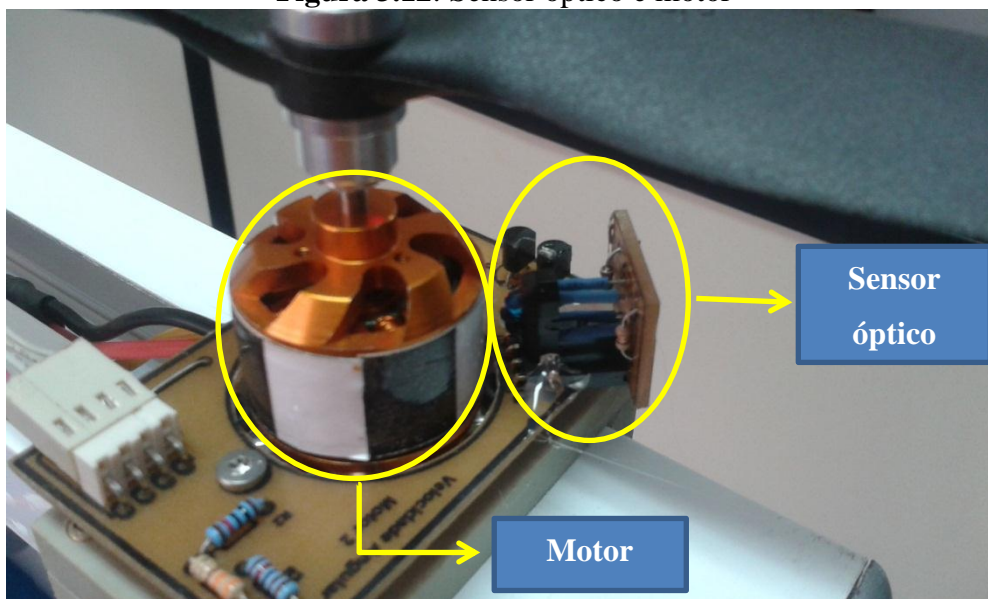
O motor em estudo possui uma zona morta de 36% de *duty cycle*, ou seja, ele começa sua rotação no momento em que o pulso PWM tem um ciclo ativo de 37%. O estudo desses componentes possibilita a construção da plataforma.

3.6. Plataforma de testes

Para modelar o sistema em estudo é necessário obter os dados. Para atingir tal objetivo, nesse caso, foi construída uma plataforma de testes pelos alunos de graduação do curso de engenharia elétrica. Em sua construção, foram utilizados os componentes descritos anteriormente nesse capítulo.

Com a finalidade de obter a rotação é usado um sensor óptico TCRT5000, ilustrado na **Figura 3.12**. O sensor gera uma onda que deriva da alternância entre faixas coladas na lateral do motor (faixas brancas e pretas). O sensor foi acoplado a um conversor de frequência para tensão a partir do conversor LM331. A sua função é converter a onda quadrada em um sinal analógico, que varia linearmente de acordo com a frequência da onda. A conversão para rpm (rotações por minuto) é feita a partir da leitura do sinal analógico, que é convertida em Hertz e posteriormente em rpm.

Figura 3.12: Sensor óptico e motor

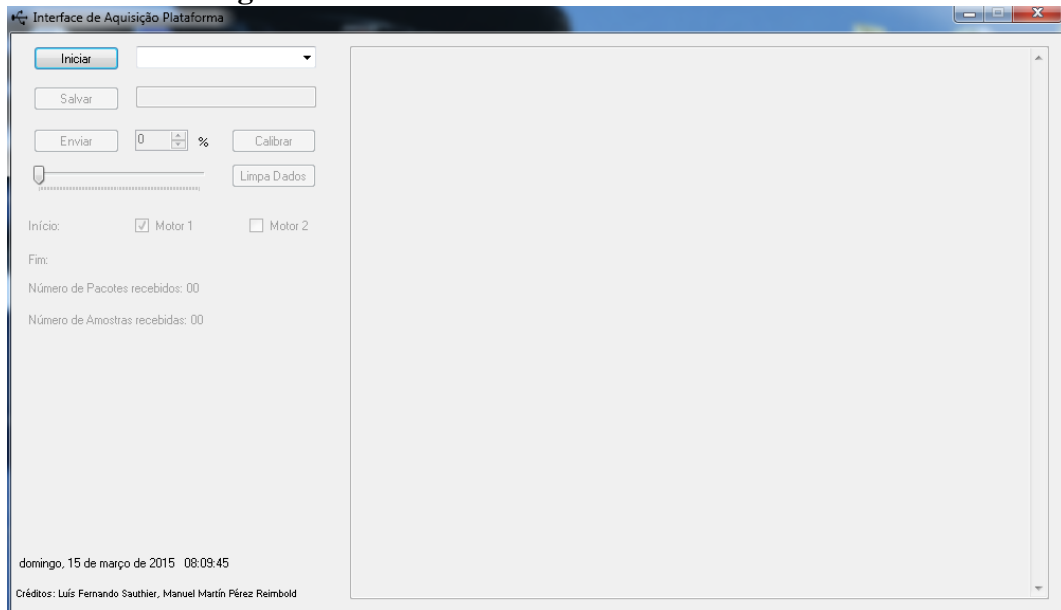


Fonte: Próprio autor

Na extremidade do braço, é alocado o motor *brushless* da marca Turnigy, modelo 2830 de 1000 kv. A hélice utilizada tem as dimensões de 9 x 3.8”.

Para o controle e a aquisição dos dados, foi desenvolvido um *software*, ilustrado na **Figura 3.13**, que permite o controle do *duty cycle* e a interpretação dos dados, armazenando-os em um arquivo txt.

Figura 3.13: Tela inicial do software desenvolvido



Fonte: Próprio autor

O controle do *duty cycle*, realizado via *software*, possibilita um maior controle na aquisição dos dados. Além disso, tanto a zona morta do motor como o ponto de saturação, podem ser determinados com maior facilidade e precisão.

Além do *software*, foi construído um dispositivo que engloba uma placa para controle, o ESC e um sensor de corrente, apresentado na **Figura 3.14**.

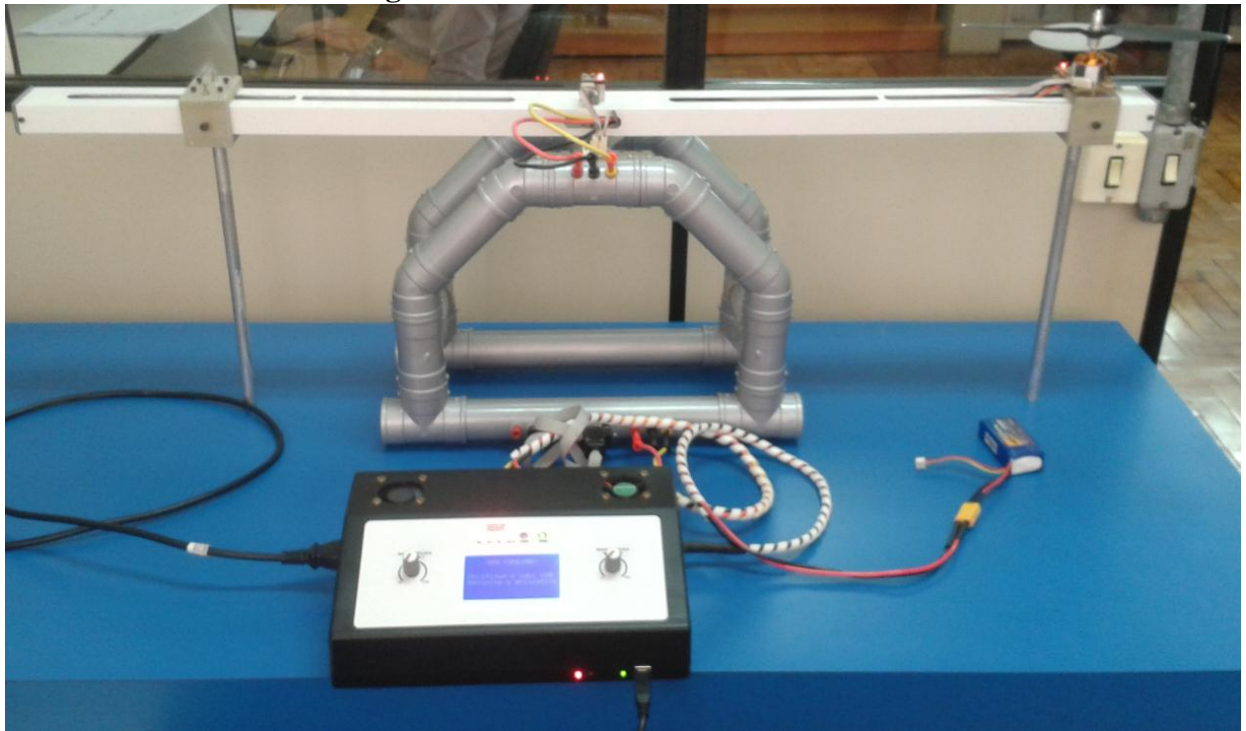
Figura 3.14: Dispositivo desenvolvido



Fonte: Próprio autor

O ESC utilizado no dispositivo possui 28A (amperes) e é da marca *Red Brick*. O sensor de corrente LA25NP da marca Lem, está conectado em série entre a bateria e o ESC. Sua função é fazer a leitura da corrente consumida pelo motor. O controle do PWM também pode ser feito diretamente no dispositivo. A aquisição dos dados feita via USB é outra facilidade apresentada pela plataforma.

Figura 3.15: Plataforma de testes



Fonte: Próprio autor

Com a plataforma construída, **Figura 3.15**, é possível obter os dados, e assim modelar o sistema, por meio da teoria que é apresentada no capítulo a seguir.

4. MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo são apresentados os conceitos teóricos usados neste trabalho. Primeiramente é apresentada uma breve introdução a modelagem matemática e o estudo de séries temporais. Na sequência é feita uma introdução a respeito da estacionariedade de uma série, que leva ao estudo da existência ou não de raiz unitária (ADF (*Augmented Dickey & Fuller*)) e o uso do teste de hipóteses para a estacionariedade (KPSS (Kwiatkowski, Philips, Schmidt e Shin)). Além disso, é apresentada a teoria para a realização da modelagem matemática, via identificação de sistemas, e para a posteriori validação do modelo.

4.1. Introdução a Modelagem matemática

Modelos matemáticos têm sido usados com diferentes finalidades durante a história, como por exemplo: entender e explicar modelos observados na natureza quanto em sistemas sociais, biomédicos, equipamentos, projetos de sistemas de monitoramento e controle, predição, estimação de estados, simulação e treinamento, sendo um exemplo disso os simuladores de voo (AGUIRRE, 2007).

A modelagem matemática é considerada como uma área do conhecimento que estuda uma forma de construir e implementar modelos matemáticos de sistemas reais, ou seja, descrever por meio de equações matemáticas fenômenos naturais ou físicos.

Obtendo os modelos matemáticos é possível realizar uma simulação do sistema estudado. Segundo (GARCIA, 2005), a simulação é a obtenção da resposta temporal das variáveis dependentes de um modelo, ao se excitar as variáveis de entrada com sinais desejados e se definir os valores das condições iniciais das variáveis dependentes.

As técnicas de modelagem matemática podem ser classificadas em três grupos distintos: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza.

Ao se utilizar a técnica de modelagem caixa branca, é necessário conhecer bem o sistema com o qual se está trabalhando. Desta forma existe o conhecimento das leis físicas que descrevem o sistema. Este tipo de modelagem também é conhecido como modelagem pela física do processo ou também por modelagem conceitual.

A técnica de modelagem caixa preta, ao contrário da caixa branca, se caracteriza por não se ter nenhum conhecimento a respeito do sistema que se trabalha. Portanto não há um conhecimento prévio das leis físicas que descrevem o sistema.

A técnica caixa cinza encontra-se no meio termo entre a caixa branca e a caixa preta. Nessa técnica são usadas informações auxiliares.

Nesse trabalho será dada ênfase a modelagem matemática de séries temporais, utilizando-se a modelagem caixa preta.

4.2. Análise de séries temporais

Uma série temporal é um conjunto de observações geradas sequencialmente no tempo, ou em outras unidades. Se o conjunto de dados é contínuo a série temporal será contínua. Caso os dados sejam discretos a série temporal será discreta. Ela também pode ser determinística quando é possível representar os dados por meio de uma função matemática. Além da classificação anterior, ela também pode ser classificada como um processo estocástico. Este processo é caracterizado por ser um fenômeno estatístico que envolve leis da probabilidade (BOX, JENKINS e REINSEL, 1994).

As técnicas de séries temporais baseiam-se em identificar padrões existentes nos dados, para uma posterior utilização em cálculos de valores futuros. Estes padrões podem ser representados por modelos probabilísticos ou estocásticos, devendo ser simples e parcimoniosos (o menor número de parâmetros possível).

A modelagem matemática pode descrever uma série temporal por meio de equações matemáticas. No entanto, ao se realizar a regressão de séries temporais pode ocorrer um problema denominado de regressão espúria, ou seja, uma regressão “sem sentido” (GUJARATI, 2006). Isso está diretamente ligado com a estacionariedade da série em estudo.

4.3. Estacionariedade

A estacionariedade é um conceito amplamente trabalhado na econometria. Ela pode ser caracterizada como um ruído branco de média zero e variância constante $(0, \sigma^2)$.

Pode ser obtida de um processo onde todos os parâmetros relevantes para a dinâmica do sistema sejam fixos e constantes durante o período de medição. Desta forma, os parâmetros externos conduzem a um processo estacionário (KANTZ e SCHREIBER, 2004).

No entanto, na maioria dos casos não se tem acesso direto ao sistema e assim não é possível saber se os parâmetros são realmente constantes. Devido a isso é necessário formular uma segunda noção de estacionariedade, tendo como base os dados (KANTZ e SCHREIBER, 2004). Segundo Silva (2010) apud (MOREIRA, 2013) uma condição menos restritiva é a estacionariedade em sentido lato ou de segunda ordem (estacionariedade fraca) na qual se considera como sendo estacionário um processo com valor médio constante, variância constante e autocovariâncias dependentes apenas do intervalo de tempo (lag) k entre as observações.

$$\text{Média: } E(\gamma_t) = \mu$$

$$\text{Variância: } \text{var}(\gamma_t) = E(\gamma_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

$$\text{Covariância: } \gamma_k = E[(\gamma_t - \mu)(\gamma_{t+k} - \mu)]$$

No entanto foram propostos alguns testes para verificar a estacionariedade de uma série temporal. Um teste de estacionariedade que se tornou popular é fundamentado na existência da raiz unitária (GUJARATI, 2006). Neste caso, cita-se o teste PP de Philips & Perron (1988) e ADF (*Augmented Dickey & Fuller*) de Dickey & Fuller (1979). O teste PP e ADF possuem como hipótese nula a presença de raiz unitária. Caso se constate a existência da raiz unitária a série temporal não é estacionária. Neste trabalho será utilizado o teste ADF.

Há também o teste de hipótese Kpss, que possui como hipótese nula a estacionariedade dos dados. O teste Kpss leva esse nome em homenagem a seus criadores: Kwiatkowski, Philips, Schmidt e Shin. Ele foi apresentado no trabalho (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, *et al.*, 1992).

O uso dos testes ADF e KPSS pode ser feito em conjunto. Tal uso visa aumentar a certeza das afirmações feitas a respeito da estacionariedade ou da não-estacionariedade da série, especialmente quando os resultados dos testes corroboram entre si. Esse teste conjunto recebe o nome de “Análise confirmatória” (“*Confirmatory Analysis*”). Consequentemente, não será possível ter uma confirmação se ambas hipóteses nulas forem aceitas ou rejeitadas. As possíveis respostas do teste conjunto são apresentadas na **Tabela 4.1**, adaptada de (NUSAIR, 2003).

Tabela 4.1: Análise de resultados para teste conjunto KPSS e ADF (NUSAIR, 2003)

Teste KPSS ²	Teste ADF ¹	
	Aceita	Rejeita
Aceita	Decisão inconclusiva (Informações insuficientes)	Decisão conclusiva (Estacionário)
Rejeita	Decisão conclusiva (Não estacionário)	Decisão inconclusiva (Integração fracionária)

¹ Hipótese nula: existência da raiz unitária (não estacionário); ² Hipótese nula: estacionariedade da série

Em seu trabalho, (NUSAIR, 2003), também faz uso do teste PP. A seguir é apresentado a teoria a respeito do teste ADF e KPSS. A utilização desses testes visa utilizar na engenharia conceitos que são trabalhados na econometria.

4.3.1. O teste ADF

Como mencionando anteriormente, o teste da raiz unitária se tornou popular para verificar a estacionariedade ou não-estacionariedade de uma série temporal.

O teste parte do processo estocástico de raiz unitária:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \quad -1 \leq \rho \leq 1 \quad (4.1)$$

Onde u_t é um termo de erro de ruído branco.

Quando $\rho = 1$ ocorre o caso da raiz unitária, a equação (4.1) se torna um modelo de passeio aleatório, ou seja, um processo estocástico não-estacionário. A ideia do teste apresentado por Dickey & Fuller é baseada no fato de realizar uma regressão de y_t defasado em um período e verificar se o ρ estimado é estatisticamente igual a um (GUJARATI, 2006).

Ao subtrairmos Y_{t-1} em (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-1} &= \rho y_{t-1} - y_{t-1} + u_t \\ y_t - y_{t-1} &= (\rho - 1)y_{t-1} + u_t \end{aligned} \quad (4.2)$$

Que pode ser escrita como:

$$\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + u_t \quad (4.3)$$

Onde $\alpha = (\rho - 1)$ e Δ é o operador de primeira diferença. Caso $\alpha = 0$, de (4.3) resulta que $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = u_t$. Como u_t é um ruído branco, ele é estacionário, implicando que as primeiras diferenças de uma série temporal de passeio aleatório são estacionárias (GUJARATI, 2006).

De uma forma direta, basta realizar uma regressão de (4.3) e verificar o valor de α . Se for negativo o processo é estacionário. Se for igual a zero o processo é não-estacionário. Para verificar o valor de α é utilizado um teste estatístico de significância. Tendo por objetivo apresentar a estatística utilizada por Dickey e Fuller, considera-se a seguinte equação (MADDALA, 1992):

$$\begin{cases} y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t \\ u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t \end{cases} \quad (4.4)$$

Onde ε_t é um processo de covariância estacionário com média zero. A forma reduzida do modelo é:

$$y_t = \gamma + \delta t + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.5)$$

Onde $\gamma = \beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\alpha$ e $\delta = \beta_1(1 - \alpha)$. Esta equação, (4.5), terá uma raiz unitária se $\alpha = 1$, caso $\delta = 0$.

O teste está baseado em testar a hipótese nula $\alpha = 1$ em (4.5) e conforme mencionado anteriormente, assume-se que o erro ε_t seja branco. Para isso são apresentados três testes:

$$K(1) = T(\hat{\alpha} - 1) \quad t(1) = \frac{(\hat{\alpha} - 1)}{SE(\hat{\alpha})} \quad F(0,1)$$

Onde $\hat{\alpha}$ é o valor estimado de α de (4.5) utilizando o método dos mínimos quadrados ordinários, $SE(\hat{\alpha})$ é o erro padrão de $\hat{\alpha}$ e $F(0,1)$ é a estatística F usual que testa a hipótese conjunta de $\delta = 0$ e $\alpha = 1$ em (4.5). O teste utilizado poderia ser o teste t , mas o seu uso esbarra no fato de que sob a hipótese nula ($\delta = 0$), o valor t do coeficiente estimado de y_{t-1} não segue a distribuição t (GUJARATI, 2006).

Com a finalidade de contornar esse problema, Dickey e Fuller, mostraram que sob a hipótese nula, o valor t estimado do coeficiente de y_{t-1} em (4.3), segue a estatística τ (tau). Os valores críticos da estatística *tau* foram calculados em (DICKEY e FULLER, 1979), por meio de simulações de Monte Carlo. Essa estatística também é conhecida como Dickey-Fuller (DF) (GUJARATI, 2006). Da mesma forma não é possível utilizar os valores padrões da estatística F. Os valores para $F(0,1)$ são apresentados em (FULLER, 1996).

No entanto, um processo, apresentado em (4.5) pode ter várias representações, como ser um passeio aleatório sem deslocamento ($\gamma = 0$; $\delta = 0$ e $\alpha = 0$) ou com deslocamento ($\gamma \neq 0$; $\delta = 0$ e $\alpha = 1$) e ainda pode ter tendências determinísticas ou estocásticas. Considera-se como tendência determinística a série temporal que é

totalmente previsível e não variável. Caso não seja previsível é denominada tendência estocástica (GUJARATI, 2006).

Ao se levar em conta esses diferentes processos e estimar os parâmetros, foi suposto que o termo de erro u_t era não correlacionado. Para os casos em que u_t apresenta correlação e o processo não pode ser bem caracterizado por um AR(1), Said e Dickey desenvolveram um novo teste, o ADF (Augmented Dickey-Fuller).

(SAID e DICKEY, 1984) aumentaram o teste autoregressivo de raiz unitária, de forma a acomodar um processo ARMA (p, q), sendo representado por:

$$y_t = \beta' D_t + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (4.6)$$

Onde D_t é um vetor dos termos determinísticos (constante, tendência, etc). O p representa os atrasos da diferença dos termos, Δy_{t-j} , são usados para aproximar a estrutura ARMA dos erros, e p é definido de forma que o erro ε_t é serialmente descorrelacionado. O termo referente aos erros é considerado homocedástico, ou seja, os erros possuem variância estatisticamente idêntica (ZIVOT e WANG, 2006)

Após serem estimados os coeficientes da equação (4.6), os mesmos testes de significância estatística apresentados anteriormente podem ser usados. Isso se deve ao fato de possuírem a mesma distribuição assintótica do teste DF, possibilitando o uso das mesmas tabelas de significância (MADDALA, 1992).

Um fator a ser levado em conta ao se implementar o teste ADF é a escolha correta do tamanho do lag p . Caso p seja pequeno a correlação serial nos erros irá afetar o teste. Escolhendo um p grande o poder do teste irá diminuir. (Ng & Perron, 1995) apud (ZIVOT e WANG, 2006) sugere que o processo de escolha do tamanho do lag p que resulte em um tamanho estável do teste e tenha perda mínima de poder, deve ser feita da seguinte forma: Primeiro, defina um valor máximo para p . Na sequência, estime o teste ADF com o p máximo definido. Se o valor absoluto do teste t da última defasagem é maior que 1,6; então defina p como o valor máximo de p e faça o teste. Caso contrário, refaça o teste em uma defasagem e repita o processo.

Uma forma de determinar o p máximo é apresentado por (SCHWERT, 1989) e é dado por:

$$p_{\max} = \left\lceil 12 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil \quad (4.7)$$

Desta forma, a escolha de p_{\max} cresce juntamente com o tamanho da amostra, assim o teste ADF é válido se os erros seguem um processo ARMA de ordem desconhecida.

No entanto, os testes de raiz unitária com hipótese nula de não estacionariedade têm sido questionados por (SCHWERT, 1989) e (DEJONG e WHITEMAN, 1991). De acordo com os autores, os testes tendem aceitar a hipótese nula com maior frequência do que a rejeitar. Isso ocorre principalmente pelo fato de terem um baixo poder em processos autoregressivos estáveis e com raízes próximas a um. Visando resolver os problemas apresentados pelo teste ADF surge um novo teste, o Kpss.

4.3.2. Teste Kpss

O teste Kpss surge como uma forma de diminuir a incerteza a cerca do baixo poder do teste ADF. Segundo os autores ele é uma forma de complementar a análise dos testes tradicionais de raiz unitária. Segundo (HOBIIJN, FRANCES e OOMS, 2004), o teste Kpss é o melhor teste de estacionariedade. As explicações a seguir foram retiradas de (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, *et al.*, 1992) e (ZIVOT e WANG, 2006).

No trabalho de (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, *et al.*, 1992) é usada uma parametrização que fornece uma representação plausível das variáveis estacionárias e não-estacionárias, o que naturalmente leva a um teste de hipóteses da estacionariedade. Essa representação é escrita na forma de uma soma da tendência determinística, caminho aleatório e de um erro de estacionariedade.

$$y_t = \xi D_t + r_t + \epsilon_t \quad (4.8)$$

Onde $r_t = r_{t-1} + \mu_t$ e $\mu_t \sim IID N(0, \sigma_\mu^2)$ (Normal e Independentemente distribuído)

A hipótese nula da tendência estacionária a ser testada é que a variância do caminho aleatório r_t é igual a zero. Com isso, o caminho aleatório é normal e o erro de estacionariedade é branco. Entretanto, a suposição de que o erro é branco não é válida em muitas aplicações, onde sob a hipótese nula, implica que a variável tem desvios i.i.d (independentes e identicamente distribuídos) da tendência. Uma variável ser i.i.d. implica que todas as suas características definidas por meio da probabilidade (média, variância, etc) são idênticas para variáveis distribuídas identicamente. Com a variância de r_t sendo zero, o caminho aleatório da equação (4.8) torna-se constante, e a série y_t é estacionária com tendência.

A distribuição assintótica da estatística é derivada sob a hipótese nula e alternativa com condições gerais sobre o erro estacionário, sendo o teste de hipótese baseado na estatística LM:

$$LM = \left(\frac{1}{N^2} \right) \left(\sum_{t=1}^N \frac{S_t^2}{\sigma_k^2} \right) \quad (4.9)$$

Onde $S_t = \sum_{i=1}^t e_i$, para $t = 1, 2, \dots, N$

Considera-se $e_t, t = 1, 2, \dots, N$, os resíduos da regressão de y_t com intercepto, e σ_k^2 é a estimativa do erro da variância dessa regressão, dado pela equação:

$$\sigma^2(p) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2 + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^p w_j(p) \sum_{t=j+1}^N e_t e_{t-j} \quad (4.10)$$

(1)

Onde p é o lag de truncamento, $w_j(p)$ é uma função de pesos que é opcional e corresponde a escolha especial da janela de Bartlett dada por $w_j(p) = 1 - \frac{j}{p+1}$, que é um filtro FIR.

Sob a hipótese nula de que y_t é estacionária, foi mostrado por (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, *et al.*, 1992) que o teste kpss converge para uma função de movimento browniano padrão que depende do termo determinístico D_t , mas não dos valores do coeficiente ξ , caso $t = 1$ então

$$KPSS \xrightarrow{d} \int_0^1 V_1(r) dr \quad (4.11)$$

Onde $V_1(r) = W(r) - rW(1)$ e $W(r)$ é um movimento browniano padrão para $r \in [0, 1]$. Caso $D_t = (1, t)'$ então

$$KPSS \xrightarrow{d} \int_0^1 V_2(r) dr \quad (4.12)$$

Onde $V_2(r) = W(r) + r(2 - 3r)W(1) + 6r(r^2 - 1) \int_0^1 W(s) ds$. Ser um movimento browniano implica que o processo estocástico possui incrementos independentes e estacionários.

O teste é um teste de cauda superior direita, ou seja, unilateral que visa rejeitar a hipótese nula para valores maiores que os valores críticos estabelecidos. Os valores críticos, **Tabela 4.2**, são apresentados em (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, *et al.*, 1992) e foram calculados da distribuição assintótica das equações (4.11) e (4.12), usando simulação direta.

Tabela 4.2: Tabela adaptada de (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, et al., 1992) com os valores críticos para o teste kpss

$\int_0^1 V_1(r)^2 dr$				
η_u : Estacionariedade em torno de um valor				
$H_u: y_t = a + e_t$				
Nível crítico (α)	0,10	0,05	0,025	0,01
Valor crítico	0,347	0,463	0,574	0,739
$\int_0^1 V_2(r)^2 dr$				
η_τ : Estacionariedade em torno de uma tendência determinística linear				
$H_\tau: y_t = a + bt + e_t$				
Nível crítico (α)	0,10	0,05	0,025	0,01
Valor crítico	0,119	0,146	0,176	0,216

Fonte: (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, et al., 1992)

Um fator importante na implementação do teste kpss, assim como apresentado anteriormente para o teste ADF, é a especificação do lag p de truncagem da equação (4.10) (WANG, 2006).

O teste kpss é sensível a essa escolha. Valores grandes para p afetarão a eficiência do teste, de modo que a hipótese nula terá uma menor chance de ser rejeitada. Para valores pequenos a correlação serial nos erros irá influenciá-lo, causando a rejeição da hipótese nula (WANG, 2006). Para determinar um valor para p (SCHWERT, 1989) e (KWIATKOWSKI, PHILLIPS, et al., 1992) propuseram a escolha do valor por meio da equação

$$p = \text{int}\left[x \left(\frac{N}{100}\right)^{\frac{1}{4}}\right] \quad (4.13)$$

Onde foi proposto $x = 4$ e $x = 12$. A escolha de $x = 12$ se mostrou melhor para amostras grandes, mais de 500 observações (SCHWERT, 1989). Caso seja confirmada a não estacionariedade é necessário torná-los estacionários.

4.3.3. Tornando os dados estacionários

Após verificar a não estacionariedade dos dados, é necessário diferenciá-los a fim de torná-los estacionários. A principal razão para efetuar tal procedimento é estabilizar a variância, ou seja, fazer com que os resíduos do modelo ajustado tenham uma variância constante (MORETTIN e TOLOI, 2006). Para isso, toma-se as diferenças $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, assim diferencia-se uma vez a série. Uma série temporal pode ser diferenciada d vezes ($\Delta^d y_t$) até se tornar estacionária.

Nem sempre tomar diferenças pode ser suficiente para tornar a série estacionária. Uma transformação não linear de y_t e $y_t^* = \log y_t$ é muitas vezes suficiente para se obter a homogeneidade (MORETTIN e TOLOI, 2006). Desta forma, podemos utilizar a transformação logarítmica que é dada por:

$$\Delta \log y_t = \log y_t - \log y_{t-1} \quad (4.14)$$

Segundo (WANG, 2006), a utilização da transformação logarítmica pode converter uma tendência exponencial presente nos dados em uma tendência linear.

Para definir qual transformação usar, (MORETTIN e TOLOI, 2006) propõem o seguinte método. Primeiramente, dividir os dados em n subconjuntos de observações da série original. Logo se tem um subconjunto y_{t_1}, \dots, y_{t_k} , com k observações, e para ele calculamos:

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{t_i} \quad (4.15)$$

$$w = \max(y_{t_i}) - \min(y_{t_i}) \quad (4.16)$$

Que são medidas de posição e variabilidade, respectivamente. Calculado \bar{y} e w , plota-se o gráfico que traz no eixo das abcissas as médias dos subconjuntos e no eixo das ordenadas a amplitude de cada um desses subconjuntos. Dessa forma plota-se os pontos (\bar{y}, w) de cada subconjunto. Caso w seja diretamente proporcional a \bar{y} , a transformação logarítmica é apropriada.

Na econometria, a estacionariedade é um pré-requisito para a determinação da estrutura e ordem dos modelos. Esta teoria ainda não é muito difundida em outras áreas. Um dos motivos deve-se ao fato de que por muito tempo ocorreu pouca comunicação entre econometristas e analistas de séries temporais. Os econometristas enfatizaram a teoria econométrica e o estudo de relações contemporâneas. Variáveis defasadas foram introduzidas, mas não de maneira sistemática, sem serem feitas sérias tentativas de

estudar a estrutura temporal dos dados. Teorias foram propostas, mesmo sem estar de acordo com a estrutura dos dados.

Por outro lado, os analistas de séries temporais não acreditavam na teoria proposta pelos econometristas, acreditando que conseguiam descrever de forma mais correta o modelo a partir dos dados. Desde metade de 1970, ambas se aproximaram e seus estudos começaram a convergir. Desta forma, econometristas usam os elementos básicos da análise de séries temporais e algumas teorias econométricas influenciaram o direcionamento do trabalho com séries temporais (MADDALA, 1992). Com isso, o uso de conceitos utilizados na econometria podem ser úteis ao se trabalhar com problemas da área de engenharia.

Com isso, ao se realizar uma análise prévia da série temporal em estudo, por meio de testes específicos, é possível saber se há estacionariedade ou não nos dados. A estacionariedade é um requisito para a utilização da função de autocorrelação e autocorrelação parcial. Ambas são apresentadas mais adiante, e utilizadas para determinar a ordem e estrutura de modelos autoregressivos.

4.4. Modelos autorregressivos

Dentro da análise de séries temporais, existem dois enfoques. No primeiro, a análise é feita no domínio do tempo, onde os modelos propostos são modelos paramétricos, com um número finito de parâmetros. Um segundo enfoque é conduzido no domínio da frequência e os modelos propostos são não paramétricos (GUILART, 2007).

Os modelos paramétricos podem ser considerados modelos probabilísticos ou estocásticos. Devem ser simples e parcimoniosos, ou seja, possuir o menor número de parâmetros possível. Tais métodos têm sua aplicação por décadas nas áreas da economia, sendo que recentemente iniciou-se sua aplicação no processamento digital de sinais (MOREIRA, 2013).

Um destaque dentre dos modelos paramétricos são os modelos autoregressivos (MOREIRA, 2013). Os modelos paramétricos autorregressivos visam ajustar os dados de uma série temporal estacionária, univariada, por meio de uma combinação linear de valores passados (SOUZA, SOUZA, *et al.*, 2011). Além disso, séries temporais não estacionárias também podem ser modeladas, partindo do princípio que por meio de diferenciações torne-se estacionária. Casos não-estacionários podem ser modelados por

meio da metodologia Box e Jenkins, representada pelo modelo ARIMA. Essa classe é capaz de descrever de maneira satisfatória tanto séries temporais estacionárias como não-estacionárias, desde que não apresentem comportamento explosivo (MORETTIN e TOLOI, 2006).

A estrutura geral de modelos paramétricos pode ser definida pelo conjunto de equações a seguir (AGUIRRE, 2007):

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k) \quad (4.17)$$

(1)

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v(k) \quad (4.18)$$

$$y(k) = H(q)u(k) + G(q)v(k) \quad (4.19)$$

Onde $H(q)$ é a função de transferência (FT) do processo, $G(q)$ a FT do ruído, $v(k)$ é um ruído branco. A FT se constitui de uma das representações mais importantes na modelagem de sistemas dinâmicos lineares. Elas modelam o comportamento dinâmico de um par, entrada-saída, de um sistema. Em outras palavras, descrevem a forma como uma entrada é dinamicamente “transferida” para a saída do sistema (AGUIRRE, 2007).

Os polinômios $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ são definidos como:

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_y}q^{-n_y} \quad (4.20)$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_u}q^{-n_u} \quad (4.21)$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_v}q^{-n_v} \quad (4.22)$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d} \quad (4.23)$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f} \quad (4.24)$$

Sendo q^{-1} o operador de atraso definido por $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, e n_a, n_b, n_c, n_d e n_f são as ordens dos respectivos polinômios. $A(q)$ corresponde aos pólos que são comuns entre a modelagem dinâmica do sistema e a modelagem do ruído (útil quando o ruído entra no sistema junto com a entrada). $F(q)$ e $B(q)$ representam pólos e zeros que afetam somente a entrada, e $D(q)$ e $C(q)$ os pólos e zeros que afetam somente o ruído. Assim, é possível elaborar uma família de modelos discretos lineares, que dependem apenas de (4.17).

Dentro do estudo desses modelos, a escolha da ordem do modelo como de sua representação é de suma importância.

4.4.1. Representação matemática dos modelos autorregressivos

Conforme mencionado anteriormente, as representações dos modelos autorregressivos derivam da equação (4.17), e são apresentados na **Tabela 4.3**:

Polinômio no Modelo Geral	Nome do Modelo
$B(q)$	FIR (Resposta ao impulso finito)
$A(q)$	AR (autorregressivo)
$A(q) B(q)$	ARX (Autoregressivo com Entradas Exógenas)
$A(q) B(q) C(q)$	ARMAX (Autoregressivo com Média Móvel e Entradas Exógenas)
$A(q) C(q)$	ARMA (Autoregressivo com Média Móvel)
$A(q) B(q) D(q)$	ARARX (Ruído Autoregressivo em um modelo ARX)
$A(q) B(q) C(q) D(q)$	ARARMAX (Ruído Autoregressivo em um modelo ARMAX)
$B(q) F(q)$	OE (Erro na Saída)
$B(q) C(q) D(q) F(q)$	BJ (Box-Jenkins)

Fonte: (LJUNG, 1999)

Algumas representações consideram uma entrada externa, denominada de exógena. Tanto (AGUIRRE, 2007) quanto (LJUNG, 1999), consideram $u(k)$ uma entrada extra no sistema (representa por X). A econometria possui uma visão diferente a respeito da exogeneidade dos dados. Tal entendimento é apresentado a seguir.

4.4.2. Exogeneidade nos dados

Durante os anos da década de 40 a 50, econometristas da Universidade de Chicago realizaram um estudo a respeito de equações simultâneas, que ficou conhecido como “*Cowles Foundation approach*”. Na abordagem principal, assumia-se que os dados eram gerados por um sistema de equações simultâneas. A classificação das variáveis em “endógenas” e “exógenas”, e a estrutura causal do sistema eram determinadas a priori sendo não testáveis. Alguns métodos para estimar os parâmetros

foram idealizados pelos pesquisadores (métodos de informação limitada e com informação completa) (MADDALA, 1992).

No entanto, segundo (MADDALA, 1992), esta aproximação recebeu diversas críticas por vários motivos, tais como: a arbitrariedade na classificação de variáveis endógenas e exógenas; variáveis que são excluídas para realizar a identificação, mas que deveriam pertencer ao modelo (“*Liu critique*”) e a independência entre as variáveis endógenas e exógenas (“*Lucas critique*”).

É possível compreender as variáveis entrada de um modelo de equações simultâneas como sendo endógenas ou predeterminadas. As variáveis endógenas são determinadas dentro do modelo. As predeterminadas se dividem em duas categorias: exógenas atuais ou tempo corrente (X_t) e defasadas ($X_{(t-1)}$) e endógenas defasadas (y_{t-1}) (GUJARATI, 2006).

(MADDALA, 1992) apresenta duas concepções distintas de exogeneidade:

- a) Predeterminada: Uma variável é predeterminada em uma determinada equação se ela é independente dos erros atuais e futuros da equação.
- b) Exogeneidade estrita: Uma variável é estritamente exógena se ela é independente dos erros atuais, futuros e passados da equação em questão.

Não satisfeitos com as concepções de exogeneidade, Engle, Hendry e Richard, sugeriram três novos conceitos: exogeneidade fraca, exogeneidade forte e super exogeneidade.

Ao se referir a uma exogeneidade fraca, considera-se que uma variável x_t é dita com exogeneidade fraca para estimar um determinado conjunto de parâmetros λ , se a inferência em λ condicionada a x_t não envolve perda de informação. Portanto, se escrever a distribuição conjunta de y_t e x_t

$$f(y_t, x_t) = g(y_t|x_t)h(x_t) \quad (4.25)$$

Onde $g(y_t|x_t)$ envolve os parâmetros λ , a exogeneidade fraca implica que a distribuição marginal $h(x_t)$ não envolve o parâmetro λ . A exogeneidade fraca é um requerimento para uma estimação eficiente (MADDALA, 1992).

Para que ocorra a superexogeneidade, x_t deve ser fracamente estacionária e os parâmetros em $f(y_t|x_t)$, devem permanecer invariantes as mudanças realizadas na distribuição marginal de x_t . A superexogeneidade é uma condição requerida para propósitos políticos.

A Exogeneidade forte é caracterizada pelo fato de x_t ter exogeneidade fraca e não ser precedido por uma variável endógena no sistema, ou seja, x_t não depende de y_{t-1} . Em outras palavras x_t não sofre com uma “ação” de y_{t-1} . Esse fato é melhor explicado pela causalidade de Granger.

Granger partiu da premissa que o futuro não pode causar o presente ou passado. Se o evento A ocorre depois do evento B, entende-se que A não pode causar B. Ao mesmo tempo, se A ocorre antes de B, não implica que A cause B. Na prática ao se observar A e B em uma série temporal, se deseja saber se A precede B ou B precede A, ou ambos ocorrem ao mesmo tempo.

Alguns testes de causalidade foram desenvolvidos por Granger. Em um deles se considera duas series temporais, $\{y_t\}$ e $\{x_t\}$. A série x_t falha para a causalidade de Granger y_t , se em uma regressão de y_t em atraso $y's$ e atrasos $x's$, o coeficiente da última é zero. Para isso considere

$$y_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{t-i} + u_t \quad (4.26)$$

Então, se $\beta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$), x_t falha em causar y_t . O tamanho de atraso k é extenso e arbitrário.

De certa forma as compreensões apresentadas por (LJUNG, 1999) e (AGUIRRE, 2007), seguem o mesmo principio da causalidade proposto pela econometria. Ao se aplicar um sinal de entrada no sistema, de alguma maneira ele irá causar um efeito nesse sistema, afetando a saída.

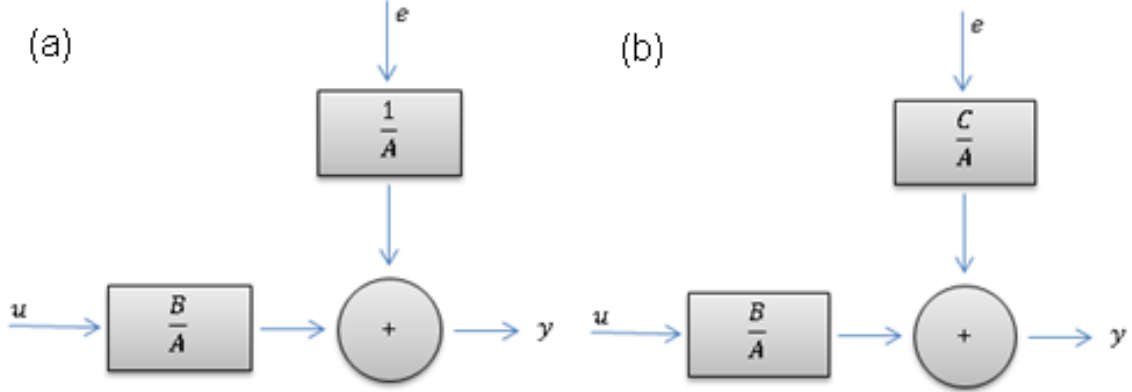
Contudo ainda cabe ao pesquisador a responsabilidade de escolher as variáveis endógenas e exógenas. Tal escolha depende diretamente da informação a priori que o pesquisador tiver do sistema. Portanto há representações que envolvem uma entrada exógena e outras que não a consideram.

4.4.3. A representação ARX e ARMAX

Ao se considerar um processo ARX, conforme ilustra a **Figura 4.1(a)**, assume-se que o erro branco passa pela dinâmica do denominador do sistema antes de ser adicionado a saída. No entanto, para um processo ARMAX é adicionado um filtro,

ilustrado na **Figura 4.1(b)**, que visa fornecer uma maior flexibilidade ao se descrever o erro branco por meio de médias móveis (LJUNG, 1999).

Figura 4.1: Representação da estrutura do modelo ARX (a) e ARMAX (b)



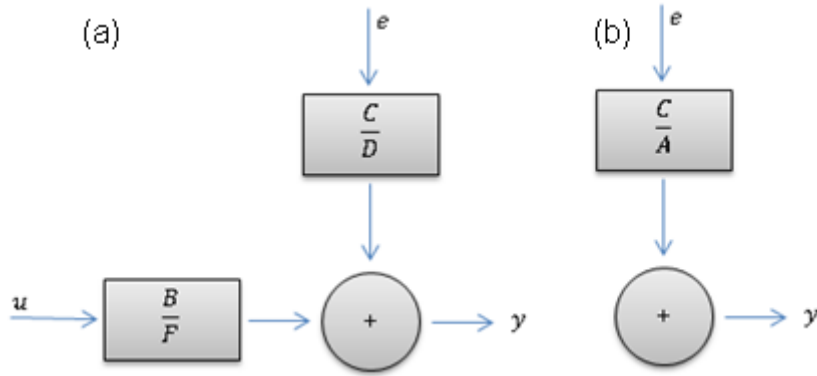
Fonte: Adaptados de (LJUNG, 1999) e (AGUIRRE, 2007)

O modelo ARMAX tornou-se uma ferramenta padrão em controle e econometria, tanto para a descrição do sistema quanto para o projeto de controle. Para modelar sistemas com pouco distúrbio pode ser usada a metodologia proposta por Box – Jenkins, mediante o modelo ARIMA(X), apresentado na **Figura 4.2(a)**, podendo ser usado com ou sem entradas exógenas. Ele é obtido ao se substituir $y(k)$ e $u(k)$ por suas diferenças.

4.4.4. Representação ARMA e ARIMAX

A **Figura 4.2** ilustra a representação ARIMAX (a) e ARMA (b). Ao se conceber um processo ARMA toma-se $u(k) = 0$. Com isso a entrada do sistema pode ser tomada como $v(k)$, e $y(k)$ é considerada uma versão filtrada da entrada $v(k)$. Geralmente um processo ARMA é usado em casos que só se possui o sinal de saída $y(k)$. Nesses casos, estima-se $G(q)$ de (4.19), usando tal sinal e mais uma realização de $v(k)$ tomada de uma distribuição de probabilidade ou dos resíduos $\xi(k)$ do modelo estimado (AGUIRRE, 2007).

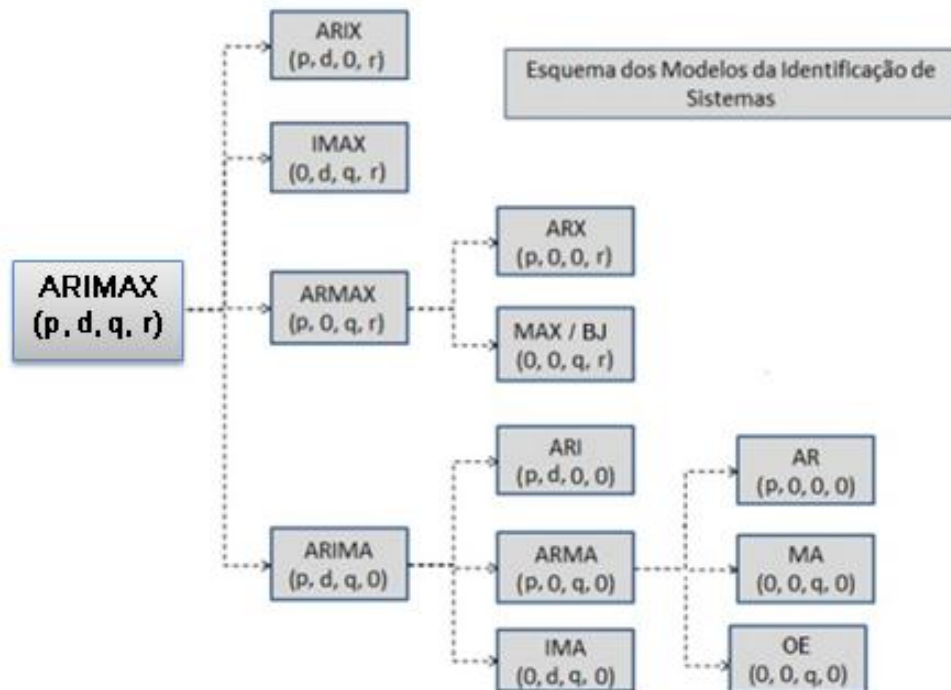
Figura 4.2: Representação da estrutura dos modelos ARIMAX (a) e ARMA (b)



Fonte: Adaptados de (LJUNG, 1999) e (AGUIRRE, 2007)

É possível apresentar a estrutura dos modelos como uma derivação da metodologia Box-Jenkins, ou seja, por meio da estrutura ARIMAX, conforme é mostrado na **Figura 4.3**:

Figura 4.3: Representação das diferentes estruturas partindo de uma estrutura ARIMAX



Fonte: Adaptado de (MACHADO, 2014)

Onde (p, d, q, r) representam a ordem dos polinômios $A(q)$, $F(q)$ e $D(q)$, $C(q)$ e $B(q)$ respectivamente. A ordem de um modelo ARMA com polinômios $A(q)$ e $C(q)$,

frequentemente são consideradas p e q respectivamente. Também pode ser indicada por ARMA (p, q), correspondendo a ARMA (n_y, n_v).

4.4.5. Determinação da ordem do modelo (p, d, q, r)

Esta fase é importante, pois uma escolha inadequada da ordem do modelo pode resultar em um modelo que não represente toda sua complexidade estrutural. Da mesma maneira, também pode torná-lo mal condicionado (BEDENDO, 2012).

A escolha da ordem do modelo deve ser baseada nos dados. Portanto um método que possibilite a escolha adequada tanto da ordem do modelo bem como de sua representação é de grande valia. Tais informações podem ser obtidas por meio da análise conjunta da função de autocorrelação (ACF) e da função de autocorrelação parcial (PACF) (BOX, JENKINS e REINSEL, 1994). Esses métodos foram apresentados por (MOREIRA, 2013). Neste trabalho realizou-se um estudo mais aprofundado e se reutilizou esta metodologia.

4.4.5.1. A função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial

A escolha da ordem do modelo pode ser feita utilizando a função de autocorrelação parcial (PACF), parte AR (Autoregressivo) do modelo, e a função de autocorrelação (ACF), parte MA (Médias Móveis). De forma geral, os testes de autocorrelação têm como objetivo analisar a relação entre variáveis defasadas e variáveis posteriores, utilizando diferentes intervalos de defasagem. Esse teste evidencia se os coeficientes de autocorrelação são significativamente diferentes de zero (BRUNI, 2004). No passado, a função de autocorrelação também era conhecida como correlograma (BOX, JENKINS e REINSEL, 1994).

Segundo (FULLER, 1996), as propriedades básicas de uma série temporal podem ser comparadas usando a função de autocorrelação, pois ela não é influenciada pelas unidades de medida. Para isso a função de autocorrelação de uma série estacionária é definida como:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (4.27)$$

Onde

$$\gamma(h) = \frac{\sum_{t=1}^{k-1} (Y_t - \bar{y}_k)(Y_{t+1} - \bar{y}_k)}{k} \quad (4.28)$$

e

$$\gamma(0) = \frac{\sum_{t=1}^k (Y_t - \bar{y}_k)^2}{k} \quad (4.29)$$

que é a variância dos k primeiros elementos da série.

De acordo com (BOX, JENKINS e REINSEL, 1994), caso a série temporal originária de um processo estocástico seja estacionária, a média \bar{y} , neste caso a média amostral, e a variância σ^2 pode ser calculadas da seguinte forma:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t \quad (4.30)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \quad (4.31)$$

onde N é o tamanho da amostra. Para o cálculo da função de autocorrelação são necessários no mínimo 50 observações (BOX, JENKINS e REINSEL, 1994).

A função de autocorrelação (ACF) é uma sequência de correlações entre $(y_t \text{ e } y_{t-1})$, $(y_t \text{ e } y_{t-2})$, $(y_t \text{ e } y_{t-3})$ e assim sucessivamente, onde os efeitos de defasagens intermediários são mantidos constantes. O diagrama que representa a ACF possui limites de significância estatística. Caso as defasagens ultrapassem esse limite de significância, considera-se que as autocorrelações são significativamente diferentes de zero. A ordem da parte MA do modelo é a mais alta defasagem com autocorrelação significativa. De maneira semelhante se faz a escolha da ordem da parte AR do processo, agora usando a função de autocorrelação parcial (PACF).

Para a PACF considera-se um processo AR(k) de tal modo que ϕ_{kk} seja o último coeficiente, portanto:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.32)$$

Partindo de (4.32), obtêm-se as equações de Yule-Walker (MORETTIN e TOLOI, 2006)

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Resolvendo sucessivamente estas equações, com $k = 1, 2, 3, \dots$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= \rho_1 \\
\phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\
\phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

De forma geral,

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \tag{4.35}$$

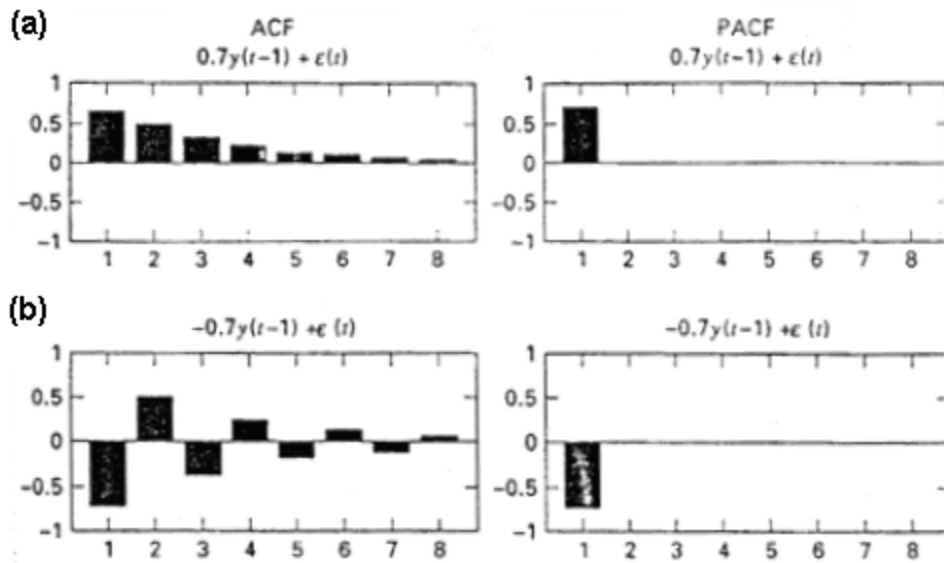
Onde P_k é a matriz de autocorrelação e P_k^* é a matriz P_k com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações. A função de autocorrelação parcial pode ser dita como a quantidade ϕ_{kk} tomada em função de k .

A função de autocorrelação parcial também considera a sequência de correlações entre $(y_t \text{ e } y_{t-1})$, $(y_t \text{ e } y_{t-2})$, $(y_t \text{ e } y_{t-3})$, só que neste caso os efeitos de defasagem anteriores não são mantidos. O diagrama é apresentado de forma semelhante ao da ACF e a escolha da ordem é realizada da mesma forma, optando-se pela mais alta defasagem com autocorrelação parcial significativa. O primeiro valor da ACF quanto da PACF são iguais (CINCA, 1993).

Para obter o diagrama, também conhecido como correlograma, é necessário plotar cada ϕ_{kk} em relação a k . A série sendo estacionária, o diagrama irá convergir para zero. Sendo os coeficientes a_1 da parte AR positivo, ele irá convergir diretamente, sendo negativo irá convergir como um sistema oscilatório amortecido em torno de zero. (ENDERS, 1995).

Segue o diagrama apresentado por (ENDERS, 1995) para um AR(1), onde a função considerara é $y_t = 0,7y(t-1) + \epsilon(t)$, para o primeiro diagrama, **Figura 4.4(a)**, e $y_t = -0,7y(t-1) + \epsilon(t)$, para o segundo diagrama, **Figura 4.4(b)**.

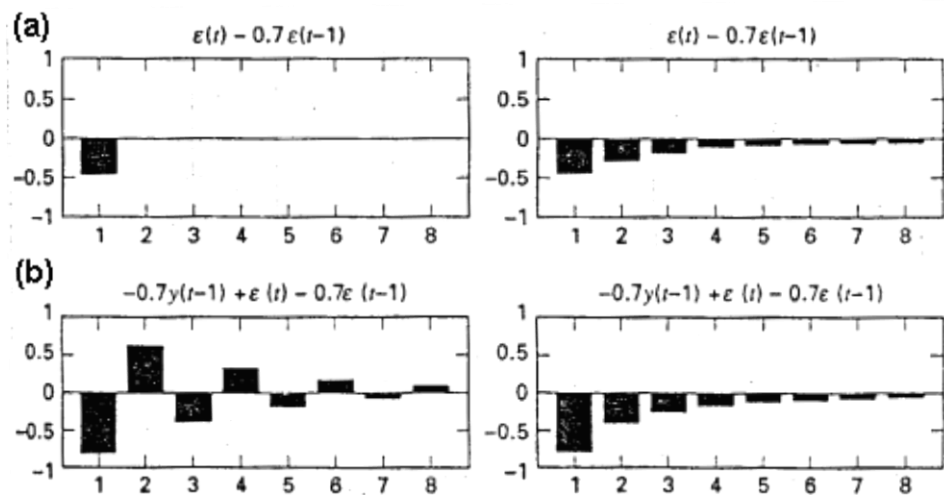
Figura 4.4: Diagrama da ACF e PACF para um AR de ordem 1



Fonte: (ENDERS, 1995)

Em seu livro, (ENDERS, 1995) também apresenta os diagramas para um processo MA(1) com $y_t = \varepsilon(t) - 0,7\varepsilon(t-1)$, **Figura 4.5(a)**, e um ARMA(1,1) com $y_t = -0,7y(t-1) + \varepsilon(t) - 0,7\varepsilon(t-1)$, **Figura 4.5(b)**.

Figura 4.5: Diagrama da ACF e PACF para um MA de ordem 1 e um ARMA (1,1)



Fonte: (ENDERS, 1995)

A função de autocorrelação de um processo ARMA nos mostra a dependência que $\rho(k)$ tem em relação aos coeficientes a_k e β_k (ENDERS, 1995).

(MORETTIN e TOLOI, 2006) descrevem as características que ACF assume, a fim de determinar a representação adequada. Para um processo AR a ACF decai exponencialmente e/ou como senóides amortecidas, infinitas em extensão. Um processo MA tem ACF finita, apresentando um corte após o lag q . Ao se considerar um processo ARMA, a ACF é infinita em extensão e decai exponencialmente e/ou como senóides amortecidas após o lag $q-p$.

Ao se tratar da PACF, um processo AR tem PACF $\phi_{kk} \neq 0$, para $k \leq p$ e $\phi_{kk} = 0$, para $k > p$. O processo MA possui uma PACF com o comportamento similar a um processo AR, apresentado pela ACF. O comportamento da PACF para um processo ARMA ocorre por meio de um processo MA puro (MORETTIN e TOLOI, 2006).

Portanto, o estudo conjunto da ACF e PACF fornece a representação do modelo a ser utilizada, que pode ser um AR, ARMA ou MA, assim como a ordem a ser utilizada. Também se consegue determinar a estacionariedade ou não-estacionariedade da série. Para os casos não-estacionários utiliza-se a metodologia Box-Jenkins, por meio da representação ARIMA. A inclusão da parte exógena fica sob a responsabilidade do pesquisador, que usando os critérios mencionados anteriormente pode utilizar as representações ARX, ARMAX ou ARIMAX.

Cabe ressaltar que a ACF e a PACF apenas analisam a relação entre as saídas do sistema, não levando em conta as suas entradas. Após se definir a estrutura e a ordem do modelo, o próximo passo é estimar os seus parâmetros.

A estimação dos parâmetros e a consequente busca de um modelo matemático podem ser feitas por meio da identificação de sistemas. Esta técnica possibilita realizar a modelagem caixa preta, ou seja, não é necessário possuir um conhecimento da física do processo.

Segundo (AGUIRRE, 2007),

A identificação de sistemas é uma área de modelagem matemática que estuda técnicas alternativas à modelagem caixa branca. Uma das características dessas técnicas é que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário e, consequentemente, tais métodos são também referidos como modelagem (ou identificação) caixa preta ou modelagem empírica.

A motivação para o estudo das técnicas de identificação de sistema surge do fato de não se ter nenhum conhecimento das equações envolvidas no funcionamento de

determinado sistema e pelo grande tempo que seria necessário o levantamento de tais equações e a estimação de seus respectivos parâmetros (AGUIRRE, 2007).

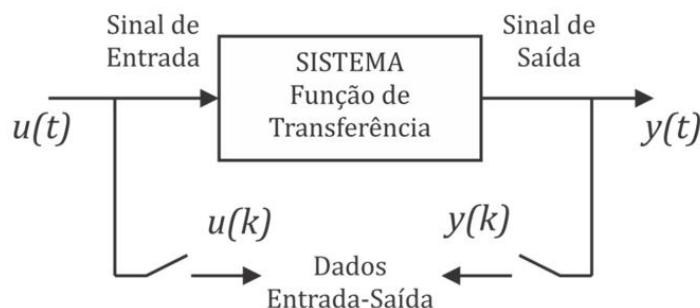
4.5. Identificação de sistemas

Ao se referir a um sistema, pode-se dizer que são objetos agrupados por alguma interação ou interdependência. Esse agrupamento se dá de forma que ocorram relações entre a causa e o efeito dos fenômenos representados pelos elementos deste conjunto (MONTEIRO, 2002). Portanto busca-se encontrar a relação entre os dados que constituem a série temporal em estudo.

O levantamento e a formulação matemática de todas as características e fenômenos que caracterizam o comportamento do sistema não é uma tarefa simples. Portanto, a reprodução de um sistema real de forma exata é praticamente impossível, buscando-se assim, modelos que o descrevam de forma aproximada (BEDENDO, 2012). Ainda, ao se fazer uso da modelagem caixa branca, a complexidade nas equações físicas envolvidas ou o seu desconhecimento, assim como seus parâmetros e o tempo despendido em suas análises, constituem as principais desvantagens desta técnica. Além disso, se necessita de um conhecimento prévio do sistema a ser modelado (AGUIRRE, 2007).

A identificação de sistemas é um processo alternativo, onde se tem disponível um sinal de entrada $u(k)$ e um sinal de saída $y(k)$, de um sistema qualquer. Com isso, a identificação de sistemas se propõe a obter um modelo matemático que explique, pelo menos em partes ou de maneira aproximada, a relação de causa e efeito existente entre $u(k)$ e $y(k)$ (AGUIRRE, 2007), conforme é apresentado na **Figura 4.6**.

Figura 4.6: Diagrama de um sistema estudado pela identificação de sistemas



Fonte: (REIMBOLD, 2008) apud (MOREIRA, 2013)

Como mencionado anteriormente, o processo de modelagem usado nesse trabalho é a modelagem caixa preta. Ele pode ser dividido em cinco etapas principais que são: testes dinâmicos e coletas de dados, escolha da representação matemática a ser usada, determinação da estrutura do modelo, estimação dos parâmetros e validação do modelo (AGUIRRE, 2007). A representação matemática e a determinação da estrutura foram estudadas anteriormente. As demais etapas são descritas a seguir.

4.5.1. Seleção de testes dinâmicos e coleta de dados

A identificação de sistemas é realizada utilizando-se os dados obtidos a partir de um sistema dinâmico. Por meio de um sinal de entrada, sinal de excitação, o sistema irá produzir um sinal de saída (resposta do sistema), onde se espera que ocorra uma correlação significativa entre as variáveis (BEDENDO, 2012). Os dados obtidos devem conter as informações necessárias para que o sistema seja modelado. Três aspectos fundamentais em identificação de sistemas e destacadas por (AGUIRRE, 2007) são: onde excitar a planta, a escolha do tipo de sinal a ser usado e que seja capaz de gerar e fornecer dados representativos a respeito da dinâmica do sistema e como amostrar tais dados.

4.5.1.1. Escolha do tempo de amostragem

O tempo de amostragem (T_α) é definido por (AGUIRRE, 2007) como sendo o período entre duas amostras. Necessariamente o tempo de amostragem deve ser definido, visto que o tamanho da amostra será finito.

A escolha do tempo de amostragem é importante, considerando que tempos de amostragem diferentes geram modelos diferentes. Ao adotar um valor para T_α muito pequeno, tende a ocorrer a obtenção de dados superamostrados, resultando em uma estimação de parâmetros mal condicionada. Caso se adote um valor muito grande para T_α , sujeita-se a obtenção de dados subamostrados com perda de informação entre as amostras e, por consequente, reduzindo a qualidade do modelo estimado (BEDENDO, 2012).

Uma forma de reter as características fundamentais do sinal original é utilizar o teorema de Shannon/Nyquist, que é definido por

$$f_a \geq 2f_s \quad (4.36)$$

Assim a frequência de amostragem (f_a) deve ser o dobro da maior frequência do sinal a ser amostrado (f_s). Isso visa evitar o falseamento do sinal amostrado (SHANNON, 1949).

4.5.2. Estimação dos parâmetros

Após realizar a escolha da estrutura e da ordem do modelo é necessário estimar os seus parâmetros, fazendo uso dos estimadores. Para determinar os parâmetros utiliza-se os dados coletados previamente, ajustando-os por meio de um algoritmo de estimação. De forma resumida, a estimação de parâmetros consiste em um problema de otimização, ou seja, se determina um conjunto de parâmetros que minimize certa função custo (BEDENDO, 2012).

Os parâmetros são estimados usando-se algoritmos, sendo esses modelos denominados de modelos paramétricos. Dado um vetor com as observações de entrada e saída do processo, objetiva-se estimar os parâmetros que melhor o descrevem (BEDENDO, 2012).

A literatura apresenta diversos métodos, algoritmos e técnicas de estimação de parâmetros. Cita-se os mínimos quadrados (MQ) e suas extensões, máxima verossimilhança e filtro de Kalman. Dentre os estimadores, o mais utilizado é o estimador dos mínimos quadrados (AGUIRRE, 2007).

O estimador dos mínimos quadrados pode se tornar polarizado ou tendencioso em certas situações. A polarização se caracteriza pelo desvio entre o valor esperado de uma determinada variável aleatória (variável estimada) e uma variável determinística (valor real). Uma das situações em que isso ocorre é quando o ruído ou erro na equação de regressão não é branco. Portanto o ruído é autocorrelacionado (colorido) e o modelo inclui regressores da saída (AGUIRRE, 2007).

(AGUIRRE, 2007) cita três estimadores que contornam esse problema: o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ), o estimador generalizado de mínimos quadrados (GMQ) e o estimador das variáveis instrumentais (VI). Ele também os nomeia como *estimadores não polarizados* ou *não tendenciosos*.

4.5.3. O estimador estendido de mínimos quadrados

Ao se trabalhar com o estimador de mínimos quadrados estendidos, assume-se que as estruturas dos modelos são da forma ARMAX. A simples implementação através MQ causaria a polarização dos parâmetros estimados (BEDENDO, 2012). A implantação do EMQ consiste na extensão da matriz de regressores, ou seja, a matriz inclui os regressores da entrada do sistema, saída e também os regressores do ruído (MOREIRA, 2013). Ele também se mostra eficiente quando a existência de correlação nos erros (GREENE, 2003).

Essa polarização provém da existência de correlação no vetor de resíduos e por existirem regressores da forma $y(k-i)$ no modelo. Com isso, a matriz de regressores se correlaciona com $e(k)$. Para evitar a polarização, partindo da equação (4.37), uma alternativa é a de estender tanto a matriz de regressores (φ), como o vetor de parâmetros ($\hat{\theta}$) a serem estimados. Esses novos termos consideram a modelagem do erro correlacionado.

$$\hat{\theta} = [\varphi^T \varphi]^{-1} \varphi^T x \quad (4.37)$$

Primeiramente será considerado um modelo ARX, sendo estimado os seus parâmetros. A partir deste modelo são estendidos os regressores e o vetor de parâmetros, a fim de incluir o erro. Considera-se que os resíduos de identificação sejam modelados como um processo de média móvel, conforme a equação (4.38), e o sistema a ser modelado tem sua representação por equações a diferenças, dada pela equação (4.39), da seguinte forma:

$$e(k) = c_i v(k-1) + v(k) \quad (4.38)$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) + c_i v(k-i) + v(k) \quad (4.39)$$

Onde $v(k)$ é ruído branco, os termos $v(k-i)$ podem ser incorporados à matriz de regressores e seus respectivos parâmetros. A equação (4.39) pode ser reescrita na forma matricial conforme (4.40):

$$y^* = \varphi^{*T} \hat{\theta} + e_k^* \quad (4.40)$$

Onde $y^* = y$, e $*$ indica a estimação de forma iterativa pelo método de EMQ, e

$$\varphi^{*T}(k) = [y(k-1) \dots x(k-n_y) \quad u(k-1) \dots u(k-n_u) \dots v(k-i)] \quad (4.41)$$

Ou

$$\varphi^{*T}(k) = \begin{bmatrix} \vdots & v(k-1) \\ \vdots & v(k) \\ \varphi_{MQ} & v(k+1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & v(k+N-2) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\hat{\theta}^* = [\hat{\theta} : c_i]^T \quad (4.43)$$

Onde, se o modelo a ser estimado possuir n_p termos do processo e n_e termos do ruído, então $\varphi^* \in \mathbb{R}^{n_p+n_e}$ e $\theta^* \in \mathbb{R}^{n_p+n_e}$. Da equação (4.39), tem-se a expressão (4.44)

$$e_k = y - \varphi^{*T} \hat{\theta}^* \quad (4.44)$$

Logo,

$$e_k^* = \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \\ v(k+2) \\ \vdots \\ v(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Percebe-se que a parte parametrizada de (4.38) é inserida na matriz de regressores. Assim, e_k^* é uma variável aleatória “branca”, de forma que em (4.38), e_k^* não se correlaciona com φ^* (BEDENDO, 2012). Vale salientar que os termos $v(k-i)$ não são medidos e precisam ser estimados. Portanto, a partir deste ponto, a estimação do modelo ARMAX torna-se um processo iterativo.

No entanto para se conhecer $v(k)$ é necessário conhecer o modelo, e para isso (AGUIRRE, 2007) propõem o seguinte procedimento iterativo:

1. A partir da equação de regressão $y(k) = \varphi^T(k-1)\hat{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $y = \varphi\theta + e$, como método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\theta}_{MQ} = [\varphi^T \varphi]^{-1} \varphi^T y$;
2. É calculado o vetor de resíduos $\delta_1 = y_k - \varphi_k^* \hat{\theta}_{MQ}$;
3. Faça $i = 2$, onde i indica o número da iteração;
4. Com δ_{i-1} , monte a matriz estendida de regressores, φ_i^* , e estima-se $\hat{\theta}_i^* = [\varphi_i^{*T} \varphi_i^*]^{-1} \varphi_i^{*T} y$;
5. Determine o vetor de resíduos $\delta_i = y - \varphi^* \hat{\theta}_{EMQi}^*$;
6. Faça $i = i + 1$ e retorne ao passo 4. O procedimento deve ser repetido até convergir.

A convergência pode ser observada ao se monitorar a variância dos resíduos $(\sigma_{\delta_i}^2)$, ou por meio do vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{EMQi}^*$. Geralmente, $3 \leq i \leq 10$ é suficiente

para atingir a convergência. O estimador EMQ estima tanto os parâmetros do modelo do processo, como os parâmetros do modelo de ruído, representados por c_i da equação (4.39) (AGUIRRE, 2007).

Percebe-se que caso o modelo do ruído na equação (4.38), tivesse n_e parâmetros, todos deveriam ser estimados. Com isso surge uma dificuldade de como determinar a estrutura do modelo do ruído de (4.38). Caso objetiva-se apenas minimizar os erros de polarização, a ordem desse modelo não é crítica e pode ser escolhida de forma que se garanta que os resíduos sejam brancos (AGUIRRE, 2007). O modelo final deve conter apenas os termos do processo, sendo desprezada a parte estocástica (BEDENDO, 2012).

4.6. Validação do modelo

Por meio da estimação de parâmetros obtemos o modelo de acordo com a estrutura escolhida. Agora cabe verificar se o modelo encontrado é válido ou não. Este é um problema solucionado pela validação do modelo. Para tal, (LJUNG, 1999) descreve alguns aspectos para serem levados em conta, tais como:

1. O modelo representa de forma satisfatória os dados observados?
2. O modelo é suficientemente bom para o seu propósito de uso?
3. O modelo descreve o sistema real?

É válido ressaltar que nenhum modelo incorporará todos os aspectos do sistema real. Portanto, a validade do modelo passa pelo fato de incorporar as características que sejam fundamentais para a aplicação que se deseja fazer (AGUIRRE, 2007).

Para responder a essas perguntas, a fim de verificar sua validade e qualidade, é possível utilizar algumas ferramentas. Elas podem ser divididas em subjetivas e quantitativas e passam a ser descritas nas próximas subseções.

4.6.1. Ferramentas subjetivas

Uma forma usual, de caráter subjetivo, de se validar um modelo é comparar a simulação do modelo com os dados obtidos. Desta forma é possível visualizar como o modelo reproduz ao longo do tempo os dados estimados. Mas para realizar tal procedimento é necessário um cuidado básico: os dados de estimação não devem ser os

mesmos usados na validação. Com isso, verifica-se como o modelo descreve outro conjunto de dados gerado pelo sistema.

Também é levado em conta que o sistema deve ser operado de forma semelhante para a obtenção de diferentes conjuntos de dados. Como grande parte dos sistemas reais são não-lineares, a obtenção de dados em diferentes condições poderá revelar diferenças entre os dados utilizados para a identificação e para a sua validação. Tal problema pode surgir do fato de se modelar um sistema não-linear em um linear, pois assim a dinâmica do sistema estará representada em torno de um ponto de operação (AGUIRRE, 2007).

Outra ferramenta subjetiva é a análise gráfica residual. A vantagem ao se fazer uso de métodos gráficos está diretamente ligada com o fato de apresentar os aspectos do modelo, em relação aos dados, de forma visual. Ele também informa se os parâmetros do modelo identificado foram estimados de forma correta ou incorreta (AGUIRRE, 2007). O ponto de partida é a definição do vetor de resíduos

$$e = y - \varphi \hat{\theta} \quad (4.46)$$

Onde y são os dados observados, φ é o vetor de regressores e $\hat{\theta}$ é o vetor de parâmetros estimados. Os resíduos são obtidos da diferença entre os dados observados e o modelo estimado, para cada instante. Em outras palavras o vetor de resíduos depende dos parâmetros estimados, assim como dos regressores que compõem o modelo.

Ao se utilizar o estimador dos mínimos quadrados, sabe-se que a soma do quadrado dos erros deve ser mínima para o vetor de regressores escolhido. De certa forma a variância dos resíduos não é um indicador adequado para validar modelos dinâmicos. No entanto, cabe lembrar que para que não ocorra a polarização ou tendência nos regressores, é necessário que o erro na equação de regressão seja ruído branco. Portanto, a análise de resíduos é composta por um conjunto de testes que verificam se os resíduos são aleatórios ou não (AGUIRRE, 2007). Estas análises partem do pressuposto que, caso os erros sejam autocorrelacionados, então podem ser detectados por meio da ACF dos resíduos gerados pelos MQ (GREENE, 2003).

Portanto, para verificar se o resíduo, e , é um ruído branco, utiliza-se a função de autocorrelação. Caso a ACF seja nula para todos os valores de atraso maiores ou iguais a um ($r_{ee}(k) = 0, \forall k \neq 0$), o ruído será branco.

Partindo do ponto de vista da validação de modelos, os resíduos são a parte que não foi explicada pelo modelo. Caso o modelo englobe toda parte explicável dos dados, por consequente o ruído será branco, ou seja, ele é uma variável aleatória branca, sem

informação útil, pois tudo já foi explicado pelo modelo. Não sendo um ruído branco, uma maneira de contornar o problema é escolhendo um novo conjunto de regressores e estimando-se os parâmetros novamente. Sendo os novos regressores mais adequados para explicar os dados, o novo vetor de resíduos será mais aleatório (AGUIRRE, 2007).

4.6.2. Métodos quantitativos

Os métodos quantitativos de validação do modelo proporcionam um índice numérico de comparação, com isso, o erro é quantificado, possibilitando a avaliação da eficiência do modelo encontrado. Um deles é o Erro Percentual (EP), que tem por objetivo medir a porcentagem de erro entre os dados estimados e reais, e é definido por:

$$PE = 100 \left(\frac{y_k - \hat{y}_k}{y_k} \right) \quad (4.47)$$

Onde y_k é o dado obtido da plataforma e \hat{y}_k é o dado estimado, ambos para o instante de tempo k . Um erro positivo indica que o valor estimado é menor que o valor real, ocorrendo o contrário para um erro negativo.

Também é possível encontrar a média dos erros, por meio do Erro Percentual Médio (EPM). Se os erros positivos compensarem os negativos, seu resultado deve ser praticamente nulo, indicando que o modelo possui um comportamento semelhante ao sistema. O Erro Percentual Médio é dado por:

$$EPM = \frac{100}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k - \hat{y}_k}{y_k} \right) \quad (4.48)$$

onde y_k é o dado obtido da plataforma e \hat{y}_k é o dado estimado, ambos para o instante de tempo k e n é a quantidade de dados analisados.

Com a finalidade de calcular quanto o modelo divergiu dos dados obtidos, calcula-se o Erro Percentual Absoluto Médio (EPAM). Primeiramente é necessário calcular o Desvio Médio Absoluto (DMA), dado por:

$$DMA = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{y_k - \hat{y}_k}{y_k} \right| \quad (4.49)$$

Para o calculo do EPAM, basta multiplicar o DMA por 100, obtendo assim o resultado percentual:

$$EPAM = \frac{100}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{y_k - \hat{y}_k}{y_k} \right| \quad (4.50)$$

Dentre os critérios destacados pela literatura como forma de quantificar o desempenho de um modelo é o da Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE – *Root Mean Square Error*). O índice RMSE calcula os desvios de \hat{y} (estimado) em relação a y (real). Este índice é dado pela equação:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (4.51)$$

Quanto menor for o valor de RMSE, melhor será considerado o modelo. Com o uso dos conhecimentos apresentados é feita a modelagem matemática e a validação do modelo.

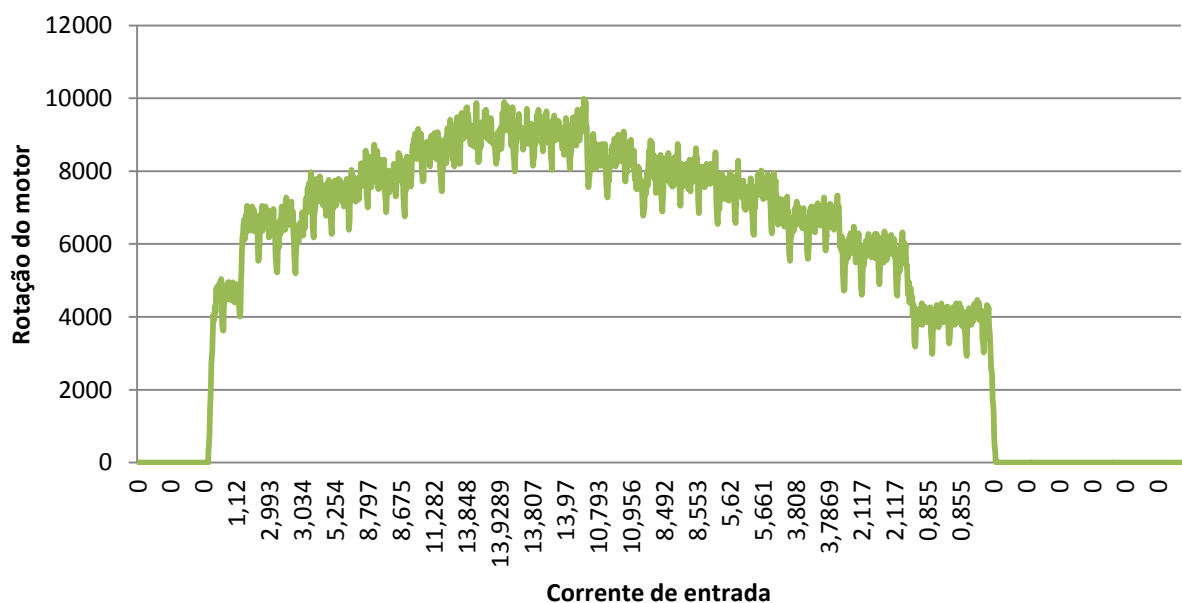
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são aplicados os conceitos apresentados no capítulo anterior. Mostrando os resultados obtidos e a discussão a respeito dos mesmos, juntamente com a descrição dos *softwares* utilizados.

5.1. Plataforma de testes e coleta de dados

Como mencionado no capítulo anterior, uma parte importante na identificação de sistemas é a coleta de dados. Por meio deles é possível modelar o sistema em estudo. Para isso foram coletados dados da plataforma de testes, apresentada no capítulo 3. Para tanto, utilizou-se como sinal de entrada a corrente, produzindo como saída a rotação do motor. Também foi averiguado o *duty cycle* do PWM.

Figura 5.1: Gráfico da rotação do motor dependendo da corrente de entrada

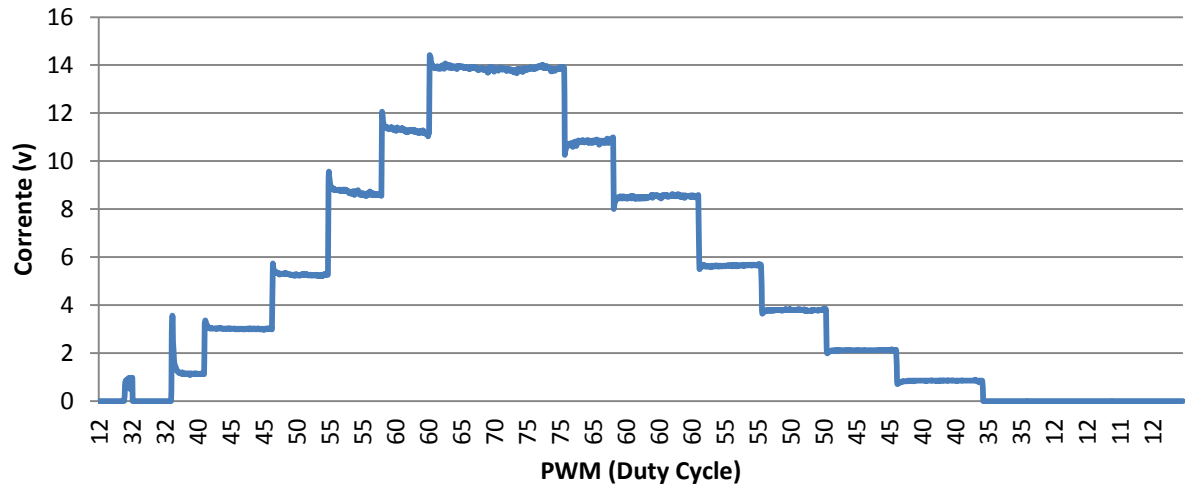


Fonte: Próprio autor

Os dados gerados foram coletados ao se variar a corrente de entrada que resultava em uma determinada rotação. Assim, o *duty cycle* era aumentado de forma gradual, até se obter a rotação máxima que ficou próxima a 10.000 rpm (rotações por minuto). As amostras utilizadas seguiram um mesmo padrão em sua coleta, no entanto a forma como o *duty cycle* foi variado é diferente em ambas. Ao analisar os gráficos dos

resultados obtidos, verifica-se que há uma limitação nos componentes utilizados e que pode ser verificado na **Figura 5.2**.

Figura 5.2: Gráfico da corrente dado pelo tamanho do pulso PWM (*Duty Cycle*)



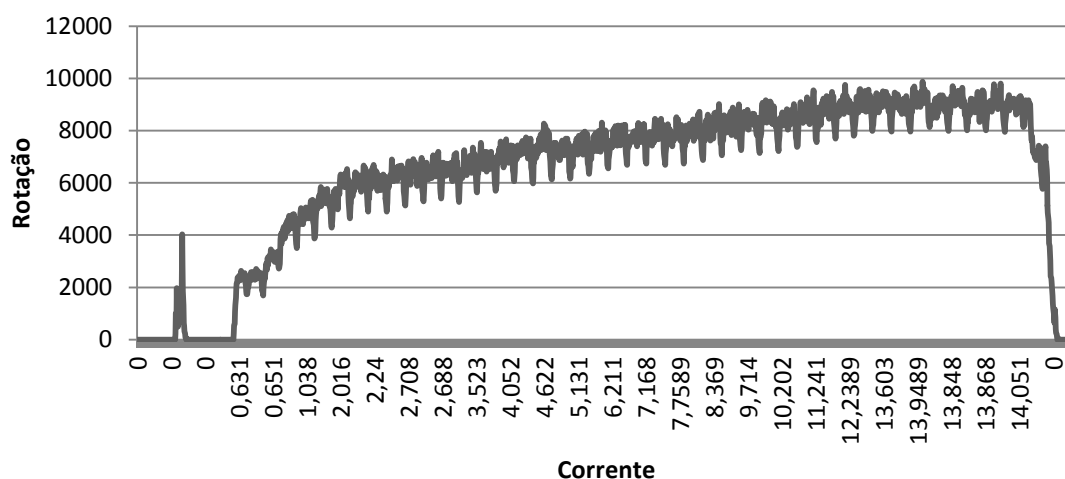
Fonte: Próprio autor

Por meio da **Figura 5.2**, é possível notar que mesmo ao se variar o duty cycle de 70% para 75%, a corrente máxima entregue é de aproximadamente 14 v. Portanto o *duty cycle* máximo é de 70-75%. Acredita-se que tal limitação está ligada com o motor, devido ao mesmo ter um ponto de saturação, ou seja, ele atinge a rotação máxima dentro desse intervalo.

5.2. Amostras

A partir da plataforma de testes foram coletadas duas amostras, uma para a estimação e outra para a validação do modelo obtido. Uma das amostras é apresentada na **Figura 5.1** e outra na **Figura 5.3**.

Figura 5.3: Gráfico da rotação x corrente da 2ª amostra



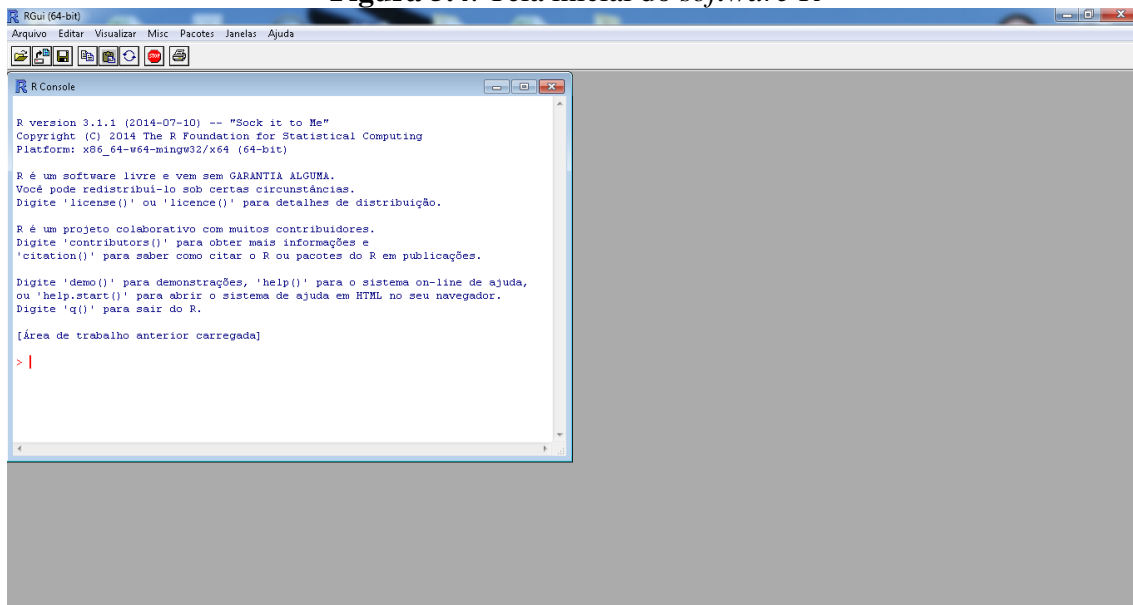
Fonte: Próprio autor

As amostragens foram obtidas seguindo um padrão para sua coleta (aumento da corrente, realizando a medição da rotação). Da mesma forma, procurou-se criar duas amostras com características semelhantes, ou seja, o sistema operando de forma equivalente. Como mencionado anteriormente, a maneira como o *duty cycle* foi variado, é diferente nas duas amostras coletadas.

5.3. Análise dos dados

Após a coleta dos dados, é realizada a sua análise por meio do *software* R. O *software* R, ilustrado na **Figura 5.4**, é um *software* estatístico livre. Ele pode ser descrito como um conjunto integrado de ferramentas computacionais que possibilitam a análise e manipulação dos dados, o cálculo numérico e a produção de gráficos de qualidade. Ele utiliza uma linguagem própria que é simples e bem desenvolvida, a linguagem R, que é uma linguagem orientada a objetos. Seu funcionamento se dá por meio de do uso de pacotes. Esses pacotes são bibliotecas que contém funções e dados específicos, que variam de acordo com a necessidade do usuário. Mais detalhes a respeito desse *software*, bem como algumas de suas funcionalidades e pacotes, são apresentadas em (R CORE TEAM, 2014).

Figura 5.4: Tela inicial do *software* R



Fonte: Próprio autor

A análise dos dados é feita com o *software* R. Essa análise baseia-se na verificação da estacionariedade dos dados, seguindo com a análise da ACF e PACF, para a determinação da estrutura e ordem do modelo.

5.3.1. Estacionariedade

A análise da estacionariedade é feita utilizando-se o pacote Urca (PFAFF, 2008), contido no *software* R. O pacote contém ambos os testes mencionados (ADF e kpss) e que são utilizados para o estudo em questão. O conjunto de dados escolhido para o estudo foi apresentado na **Figura 5.3**.

5.3.1.1. Resultados do teste ADF

Primeiramente é utilizado o teste ADF para a verificação da estacionariedade da série. Para isso, alguns parâmetros necessitam ser especificados. A linha de comando para o teste ADF com todos os parâmetros é:

```
ur.df(y, type = c("none", "drift", "trend"), lags = 1, selectlags = c("Fixed", "AIC", "BIC")).
```


Onde y é a série a ser testada. O comando *type* possibilita a escolha do modelo a ser utilizado. *Lags* se refere ao número máximo de parâmetros que o modelo irá possuir. Sua escolha é feita em conjunto com o parâmetro *selectlags* que pode ser definido como AIC (*Akaike Information Criterion*) ou BIC (*Bayesian Information Criterion*).

Ao selecionar o parâmetro *type* como sendo “*trend*”, tem-se uma estrutura conforme a equação (4.6), baseando-se na equação (4.7):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

Caso a escolha seja por “*drift*”, é adotada a estrutura representada na equação (5.2):

$$y_t = \beta_0 + \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (5.2)$$

Se a estrutura adotada é “*none*” a estrutura usada é baseada na equação (5.3):

$$y_t = \phi y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \psi_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (5.3)$$

Para o cálculo do valor do *lag p* é usada a equação (4.8)

$$p_{\max} = \left\lceil 12 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil = \left\lceil 12 \cdot \left(\frac{2250}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right\rceil = 12,76 \cong 13 \quad (5.4)$$

Para a verificação da existência de raiz unitária é considerada uma estrutura “*trend*”, com 13 lags, gerando a seguinte linha de comando:

`ur.df(y, type = "trend", lags = 13, selectlags = "Fixed")`, obtendo o resultado apresentado no **ANEXO A**.

O valor encontrado para a última defasagem, nesse caso 13 (`z.diff.lag13`), é menor que 1,6. Como sugere (Ng & Perron, 1995) apud (ZIVOT e WANG, 2006), o teste deve ser refeito, diminuindo-o em uma defasagem. Portanto, agora o teste é feito com 12 lags.

O valor calculado para a última defasagem é apresentado no **ANEXO B**. Esse valor é representado por `z.diff.lag12`, e é de 5,508. Portanto o valor é maior que 1,6; seguindo assim as recomendações para a escolha dos lags. A escolha da estrutura “*trend*” se deve ao fato de considerar que os dados possuem uma tendência linear e não são um passeio aleatório.

Um fator a ser lembrado é que a estatística a ser usada é a estatística τ (tau). Os valores críticos foram apresentados no **ANEXO B** como “tau3”, para os níveis de 1%, 5% e 10%. A fim de verificar a existência da raiz unitária o valor do teste t (*t value*) a ser considerado é de 0,293; que representa $z.lag1$.

Ao se utilizar um nível de confiança de 95%, a hipótese nula da existência da raiz unitária não pode ser rejeitada, pois o valor do teste t é maior que o valor crítico apresentado ($0,293 > -3,41$). Portanto a série é não-estacionária. Com a finalidade de realizar o teste conjunto proposto por (NUSAIR, 2003), também é feito o estudo da estacionariedade da série utilizando-se o teste kpss.

5.3.1.2. Resultados para o teste kpss

O estudo da estacionariedade da série é feito de forma semelhante para o teste kpss. Também é necessário definir alguns parâmetros da linha de comando a ser usada no *software R*, e apresentados a seguir:

ur.kpss(y, type = c("mu", "tau"), lags = c("short", "long", "nil"), use.lag = NULL)

Novamente *y* representa a série temporal. A variável *type* pode ser representada por “mu”, significando a estacionariedade em torno de um valor, ou “tau”, onde é considerada a existência de uma tendência determinística. São representados na **Tabela 4.2** por n_μ e n_τ , respectivamente. Os termos utilizados para *lags* podem ser definidos como “short” (escolha de $x = 4$ na equação (4.14)), “long” (escolha de $x = 12$ na equação (4.14)) ou “nil” que acarreta na não realização da correção dos erros. O parâmetro *use.lag* também serve para a definição do número de *lags*, sendo estes fixados pelo usuário.

O número de *lags* a ser usado é definido pela equação (4.14) e é dado por:

$$p = \text{int} \left[x \left(\frac{N}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right] = \text{int} \left[12 \left(\frac{2250}{100} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \cong 13$$

O uso de $x = 12$ se deve ao fato da amostra ultrapassar as 500 observações. Com isso, após calcular o número de lags, obtém-se o valor de 13. Portanto, a linha de comando utilizada no R foi:

ur.kpss(y, type="tau", use.lag=13)

O resultado do teste é apresentado na **Tabela 5.1**.

Tabela 5.1: Resultado do teste kpss

#####

KPSS Unit Root Test

#####

Test is of type: tau with 13 lags.

Value of test-statistic is: 2.0644

Critical value for a significance level of:

	10pct	5pct	2.5pct	1pct
critical values	0.119	0.146	0.176	0.216

Fonte: Próprio autor

O valor do teste é 2,0644. Portanto ao nível de 1% podemos rejeitar a hipótese nula e aceitar a hipótese alternativa da existência da raiz unitária e a consequente não-estacionariedade da série. E pela **Tabela 4.1**, ao ser aceita a hipótese nula para o teste ADF e rejeitada para o teste kpss é possível concluir que a série é não estacionária. Tal conclusão está baseada na análise confirmatória proposta por (NUSAIR, 2003).

Como objetiva-se obter a estacionariedade da série temporal, é necessário diferenciar os dados. A escolha da diferenciação a ser usada foi feita conforme propõem (MORETTIN e TOLOI, 2006).

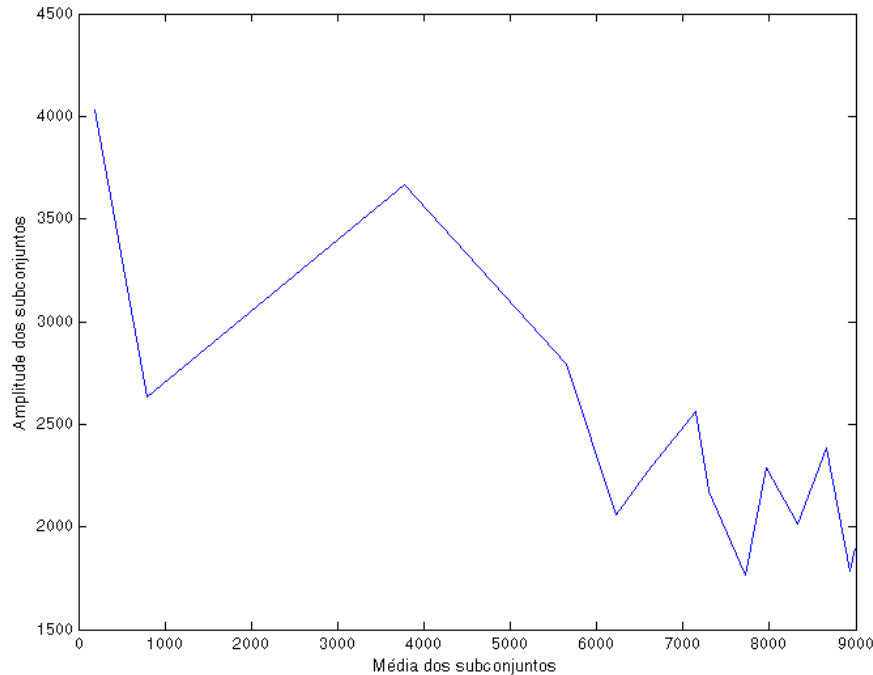
5.3.2. Diferenciando os dados

Ao se diferenciar os dados visa-se tornar a série temporal estacionária, ou seja, um processo de média zero e variância constante, resultando em um ruído branco. Para isso, primeiramente será feita uma análise com a finalidade de definir qual a diferenciação deve ser usada entre as apresentadas nesse trabalho. Tal estudo segue a

proposta de (MORETTIN e TOLOI, 2006) e é apresentada na seção 4.3.3. O gráfico resultante é mostrado na **Figura 5.5**. Para que seja utilizada a transformação logarítmica, equação (4.15), o gráfico deve ser diretamente proporcional. Caso contrário, deve-se tomar as diferenças, equação (5.5)

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad (5.5)$$

Figura 5.5: Gráfico resultante da análise proposta por (MORETTIN e TOLOI, 2006)

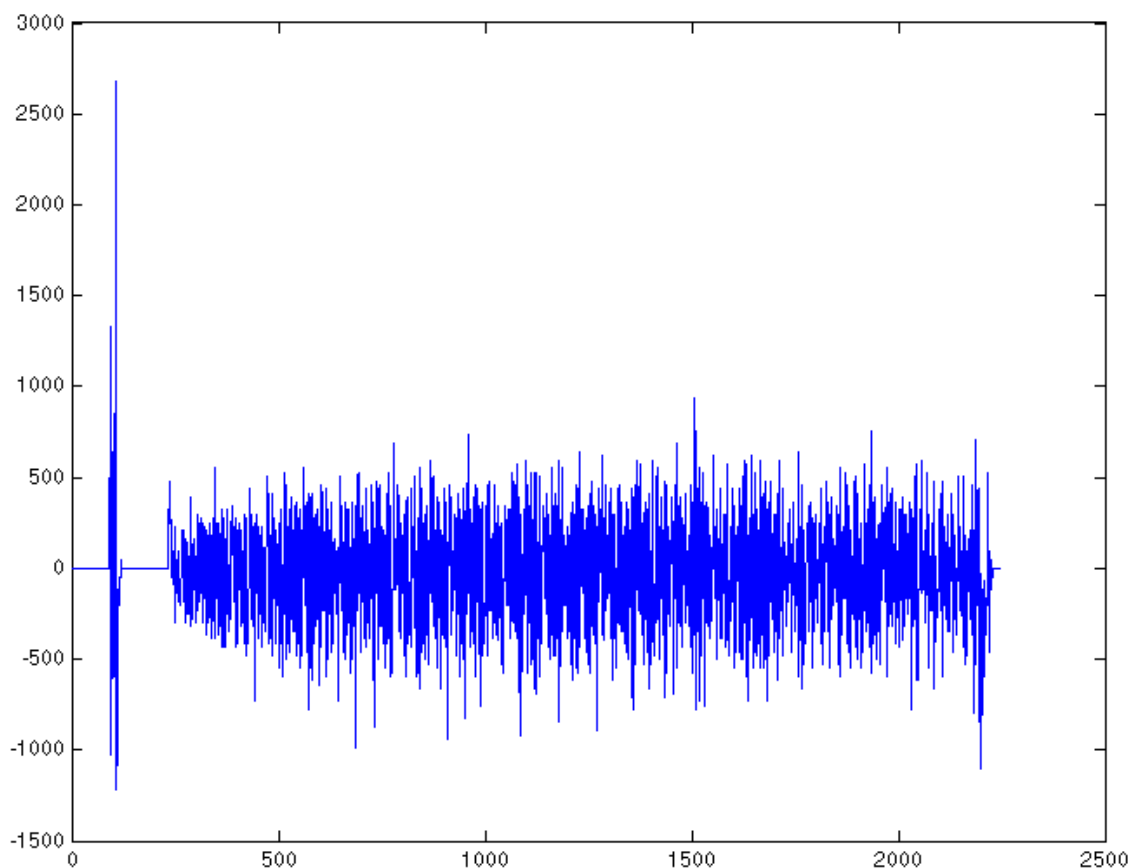


Fonte: Próprio autor

Fica visível que a amplitude dos subconjuntos não é diretamente proporcional a média dos mesmos. Com isso, rejeita-se o fato de usar a transformação logarítmica. Portanto foi tomada as diferenças.

Antes de serem tomada as diferenças, a média do conjunto de dados era de 5.011,9. Após ser diferenciado, a média calculada foi zero, apresentando um dos requisitos para a série ser estacionária. O conjunto de dados resultante da diferenciação é apresentado na **Figura 5.6**.

Figura 5.6: Gráfico resultante após serem tomadas as diferenças



Fonte: Próprio autor

Examinando a **Figura 5.6**, foi possível perceber que os valores estão variando em torno da média, nesse caso zero. Com os dados diferenciados, os testes ADF e kpss foram reaplicados, a fim de verificar se a série temporal se tornou estacionária.

5.3.3. Testando novamente a estacionariedade dos dados

Com os dados diferenciados, a estacionariedade da série é testada novamente. Neste caso, o número de *lags* e linhas de comando são os mesmos utilizados anteriormente. O resultado para o teste ADF é apresentado no **ANEXO C**.

O valor do teste *t* para o *lag* 13 (*z.diff.lag13*) é maior que 1,6; portanto não há a necessidade de se refazer o teste. O valor do teste *t* a ser considerado é -15,9142 (*z.lag.1*). Ao examinar os valores críticos (“*tau3*”), verifica-se que o valor do teste *t* é menor que o valor crítico estabelecido. Portanto, rejeita-se a hipótese nula da existência da raiz unitária, ou seja, a série é estacionária. Para o teste ADF a diferenciação dos

dados se mostrou efetiva. Continuando no propósito da utilização do teste conjunto, a série também foi testada utilizando-se o teste kpss.

Seguindo o procedimento adotado anteriormente, o número de *lags* foi calculado em 13, com isso, a mesma linha de comando foi utilizada. A **Tabela 5.2** apresenta os resultados do teste kpss.

Tabela 5.2: Resultado do teste kpss após os dados serem diferenciados

#####

KPSS Unit Root Test

#####

Test is of type: tau with 13 lags.

Value of test-statistic is: 0.0662

Critical value for a significance level of:

	10pct	5pct	2.5pct	1pct
critical values	0.119	0.146	0.176	0.216

Fonte: Próprio autor

Ao ser comparado o valor do teste, calculado em 0.0662, com os valores críticos, é possível concluir que a hipótese nula deve ser aceita. Por meio disso, conclui-se que a série é estacionária. Portanto, a diferenciação dos dados também se mostrou efetiva para o teste kpss.

Rejeitando a existência da raiz unitária, por meio do teste ADF, e aceitando a hipótese nula da estacionariedade para o teste kpss, os resultados corroboram entre si, levando a conclusão de que a série é estacionária após a primeira diferença. Tal conclusão se baseia na análise confirmatória proposta por (NUSAIR, 2003).

A busca pela estacionariedade da série visa o calculo e análise da ACF e PACF. Por meio da análise confirmatória, verifica-se que a estacionariedade da série foi atingida. Com isso, a continuação do estudo é possível, passando para o calculo ACF e PACF.

5.4. Análise da ACF e PACF

A análise conjunta da ACF e PACF possibilita determinar a estrutura do modelo a ser usado, bem como, a sua ordem. Para tanto, a série deve ser estacionária. Portanto para a continuidade deste estudo, visa-se extrair mais informações contidas na série temporal e presente nos dados. Para essa análise utilizou-se o *software* estatístico R (R CORE TEAM, 2014). Os comandos utilizados para o calculo da ACF e PACF são apresentados na **Tabela 5.3**:

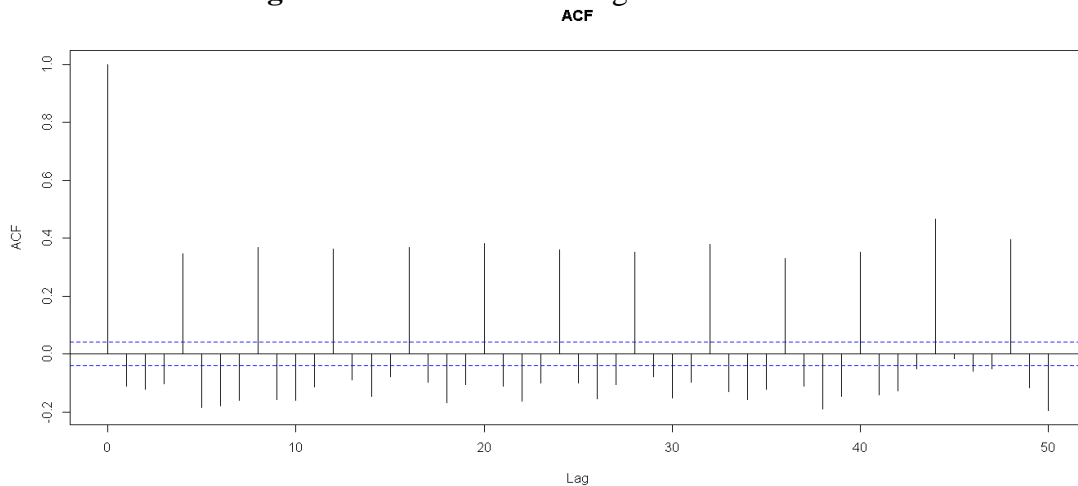
Tabela 5.3: Comandos utilizados para a o calculo da ACF e PACF

	Linha de comando utilizada
ACF	acf(y.dif, lag.max=50, plot="TRUE")
PACF	pacf(y.dif, lag.max=50, plot="TRUE")

Fonte: Próprio autor

Onde *y.dif* é a série de dados diferenciados e *lag.max* é o número de *lags* utilizados. Os gráficos apresentados na **Figura 5.7** e **Figura 5.8**, apresentam os resultados obtidos.

Figura 5.7: Gráfico da ACF gerado no software R

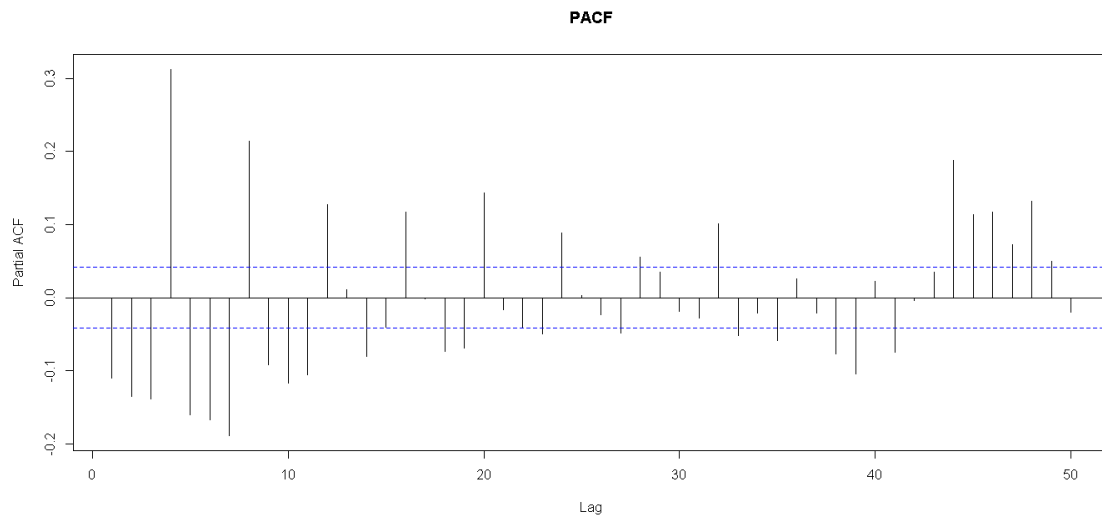


Fonte: Próprio autor

Ao se analisar o gráfico da ACF, apresentado na **Figura 5.7**, percebe-se que na parte positiva existe alguma interferência nos dados, que aparenta ser cíclica. No entanto a parte negativa apresenta uma forma senoidal. Portanto é considerada a parte negativa, visto que a parte positiva pode ter sido gerada por um ruído ou por

interferência de algum componente da plataforma de testes. Nesse caso é considerada a menor defasagem com maior significância, conforme sugere (GREENE, 2003), que se encontra no *lag* 5. A análise segue com a PACF.

Figura 5.8: Gráfico da PACF gerado no software R



Fonte: Próprio autor

A PACF, mostrada na **Figura 5.8**, segue um padrão parecido da ACF. A sua parte negativa apresenta como característica uma função senoidal amortecida. Percebe-se que há uma queda após o *lag* 7.

De acordo com as características apresentadas pela ACF e PACF, e ao compara-se com a descrição apresentada por (MORETTIN e TOLOI, 2006), foi possível concluir que é um processo ARMA. Devido à existência de uma entrada externa (exógena), de acordo a definição de (AGUIRRE, 2007) e (LJUNG, 1999), tem-se um processo ARMAX (p, q, r).

Na definição da ordem da parte AR, representada por p , foi utilizado o resultado obtido do cálculo da PACF, portanto a ordem da parte AR foi estabelecida em 7. A ordem MA da estrutura encontra-se na ACF, dada por q , e fixada em 5. No entanto, a ordem da entrada exógena, definida por r , fica a critério do pesquisador, sendo definida em 4. Desta forma, tem-se um modelo ARMAX (7, 5, 4).

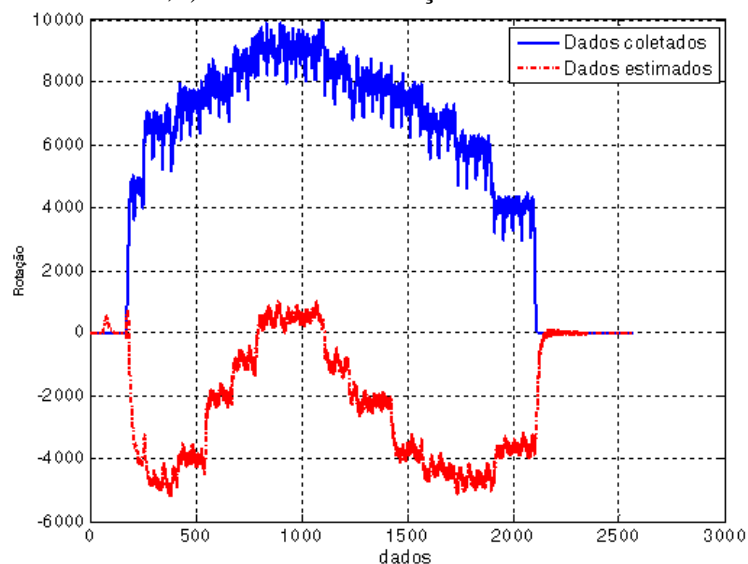
Com a estrutura do modelo definida e a sua respectiva ordem definida, é necessário estimar os parâmetros.

5.5. Estimação de parâmetros

Para a estimação dos parâmetros foi utilizado a *Toolbox UNIT* para o *software* MatLab, apresentado em (NINNESS, WILLS e MILLS, 2013) e desenvolvido pela Universidade de Newcastle, situada na Austrália. É um Toolbox de fácil uso e que possibilita utilizar as diferentes estruturas apresentadas nesse trabalho.

Primeiramente foi utilizado os dados diferenciados, os mesmos usados para a definição da ordem e estrutura. Após inserir a estrutura desejada e a sua respectiva ordem, obteve-se o seguinte resultado, ilustrado na **Figura 5.9**:

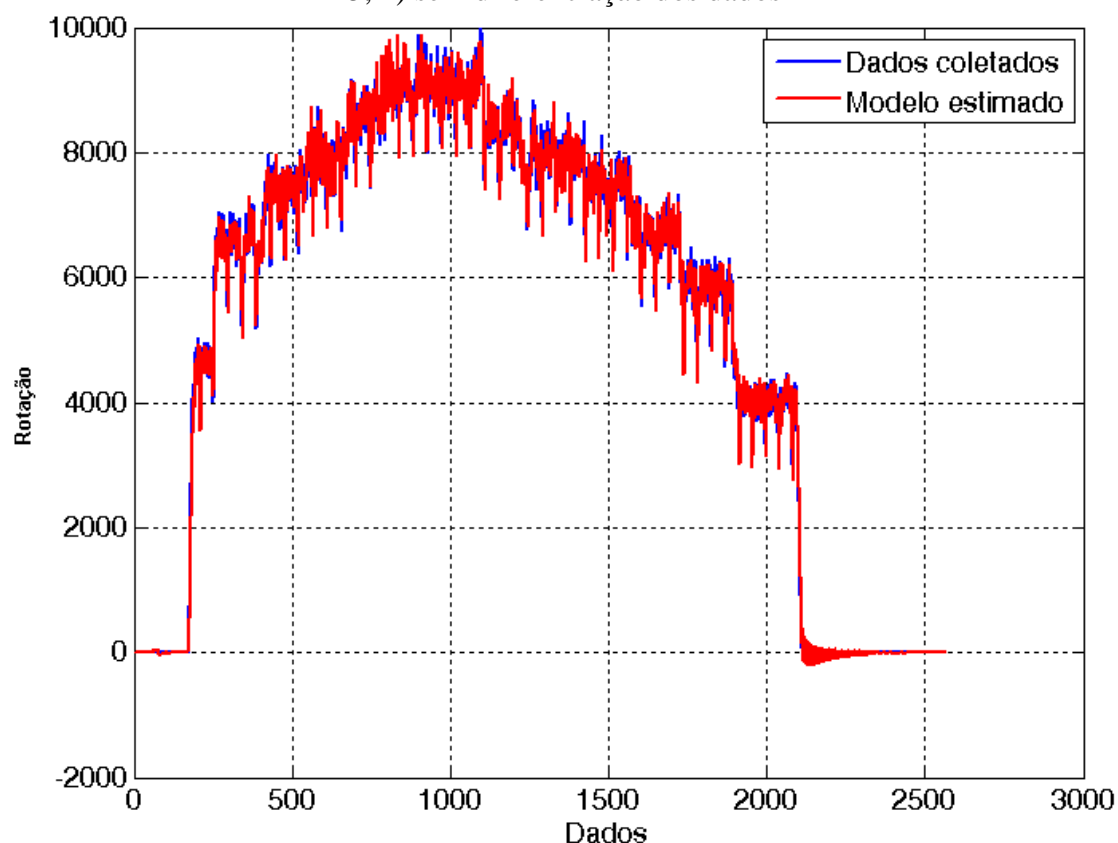
Figura 5.9: Resultado obtido ao se estimar os parâmetros utilizando um ARMAX (7, 5,4) com a diferenciação dos dados



Fonte: Próprio autor

Conforme é possível visualizar, o resultado obtido não foi satisfatório. Para isso, pensou-se em estimar o modelo sem a diferenciação dos dados. O resultado obtido é apresentado na **Figura 5.10**:

Figura 5.10: Resultado obtido ao se estimar os parâmetros utilizando um ARMAX (7, 5, 4) sem diferenciação dos dados



Fonte: Próprio autor

O resultado obtido apresentou ser satisfatório. Acredita-se que tal diferença ocorra devido ao fato da diferenciação causar perda de informação do sistema. O sistema em estudo aparenta ser não-linear, e tal fato, por meio da diferenciação pode gerar problemas em sua identificação. Visto que se tenta descrever um sistema não-linear por meio de equações lineares. Alterações no ponto de operação do sistema podem gerar tal erro.

O modelo estimado, apresentado na **Figura 5.10**, onde foi considerada uma estrutura $y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}v(k)$ é:

Tabela 5.4: Resultado obtido para um ARMAX (7, 5, 4)

	1	q^{-1}	q^{-2}	q^{-3}	q^{-4}	q^{-5}	q^{-6}	q^{-7}
$A(q) =$	1.0000	-1.4162	0.4309	0.0699	-0.9991	1.4146	-0.4299	-0.0700
$B(q) =$	16.4094	18.6509	-1.9120	4.0735	-37.0155			
$C(q) =$	1.0000	-0.4638	0.0358	0.0415	-0.9271	0.4778		

Fonte: Próprio autor

Visualmente, o modelo apresenta um desempenho satisfatório na reprodução da dinâmica do sistema em estudo. Com a finalidade de ter maior certeza a respeito do resultado obtido, é necessário validar o modelo. Os métodos quantitativos possibilitam uma visão mais ampla a respeito da acurácia do modelo.

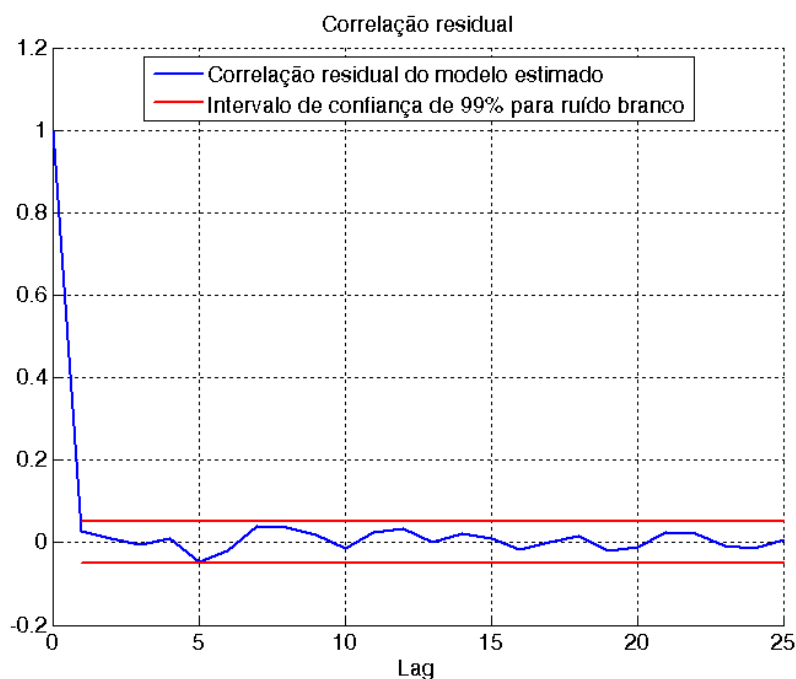
5.6. Validação do modelo

A validação do modelo pode ser feita tanto por meios subjetivos, onde se destaca a visualização gráfica dos resultados, ou por métodos quantitativos, que visam o fornecimento de índices para a validação do modelo.

Por meio dos métodos subjetivos, é possível visualizar o resultado na **Figura 5.10**. O modelo encontrado descreve de forma satisfatória o sistema modelado, aparentemente englobando a sua dinâmica.

Dando continuidade a validação do modelo, uma análise a ser feita é a respeito dos ruídos. A **Figura 5.11**, apresenta a correlação residual.

Figura 5.11: Análise da correlação residual para a estimação sem diferenciação nos dados.



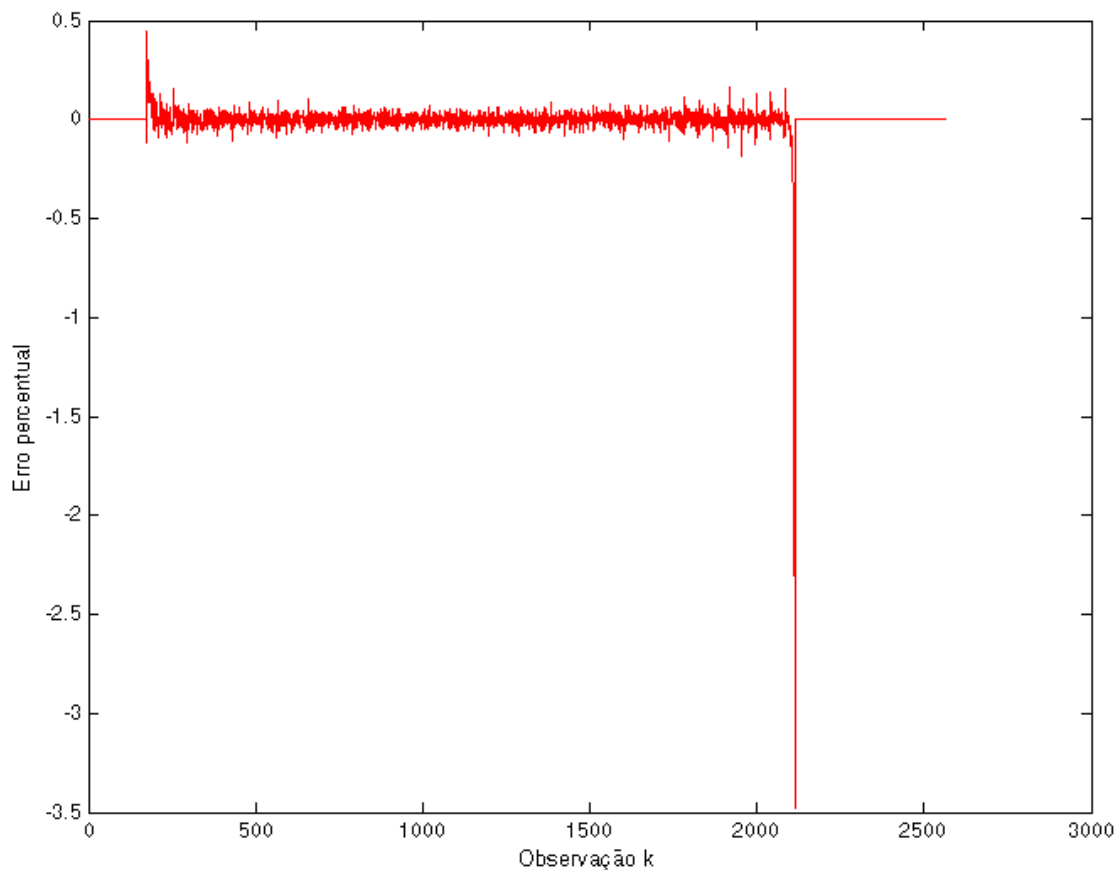
Fonte: Próprio autor

O resíduo, ao ser considerado a parte que não foi explicada no modelo, deve ser um ruído branco. Dessa forma, ao ser um ruído branco, não possui mais nenhuma

informação útil, sendo todas características importantes englobadas pelo modelo (AGUIRRE, 2007). Com a análise residual do modelo encontrado, visualiza-se que o mesmo é um ruído branco. Portanto, considera-se que o sistema foi explicado pelo modelo proposto. No entanto, também se faz uso dos métodos quantitativos a fim de aumentar a certeza a respeito dos resultados.

Com os métodos quantitativos, os resultados são apresentados por meio de índices numéricos. Tais métodos são trabalhados na seção 4.6.2. Primeiramente será calculado o erro percentual EP (equação (4.47)). O resultado obtido é apresentado na **Figura 5.12**.

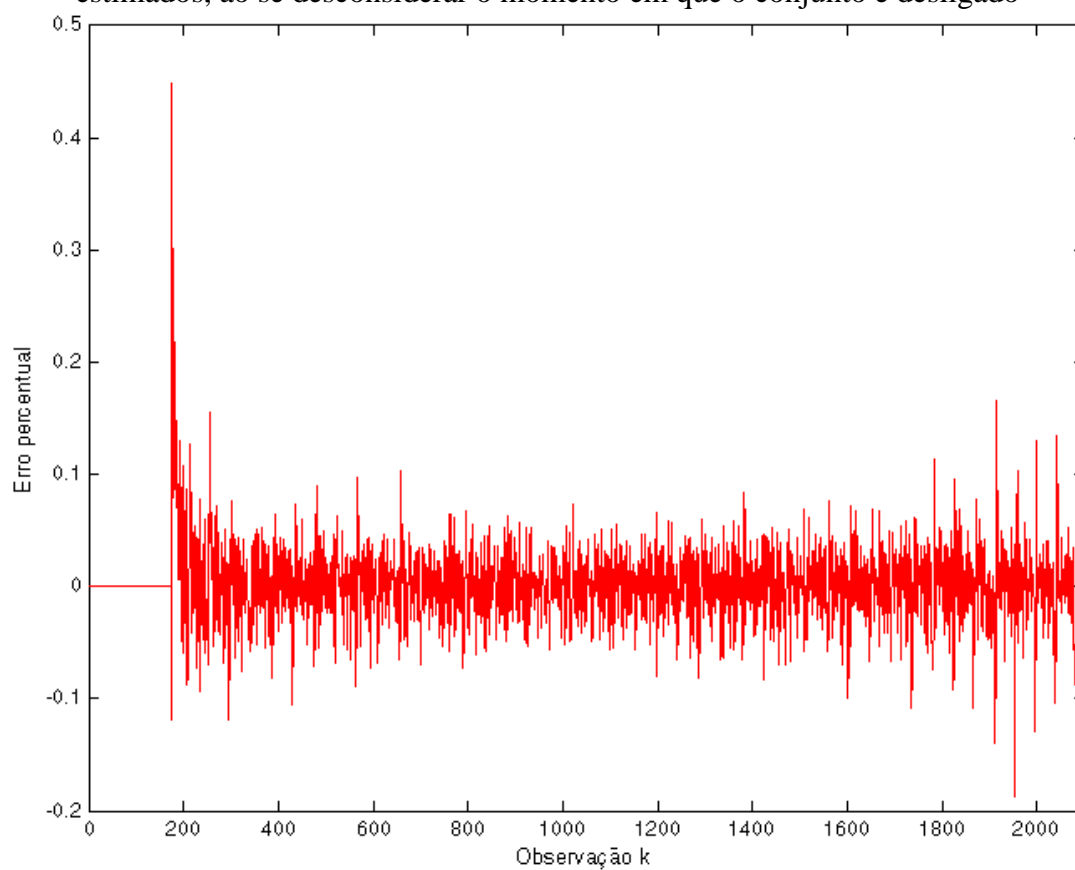
Figura 5.12: Gráfico com o erro percentual calculado entre os dados observados e estimados



Fonte: Próprio autor

Como é possível perceber por meio da análise da **Figura 5.12** o erro percentual tem uma brusca variação no momento, que se caracteriza pelo desligamento do sistema. A **Figura 5.13** mostra o erro percentual ao se desconsiderar o momento em que o conjunto é desligado.

Figura 5.13: Gráfico com o erro percentual calculado entre os dados observados e estimados, ao se desconsiderar o momento em que o conjunto é desligado



Fonte: Próprio autor

Por meio da análise da **Figura 5.13**, é possível perceber que o erro percentual está próximo a zero. O que caracteriza um bom resultado, mostrando que não há grande diferença entre os dados do modelo e os observados.

Outro índice usado é o erro percentual médio (EPM, equação (4.48)). O valor calculado é de $EPM = -0,2691 \%$. Como é um valor próximo a zero, conclui-se que o modelo possui um comportamento semelhante ao sistema.

O Erro Percentual Absoluto Médio (EPAM, equação (4.49)), tem como finalidade apresentar o quanto o modelo divergiu dos dados obtidos. O valor encontrado é $EPAM = 2,3988 \%$, mostrando uma baixa divergência entre os dados observados e calculados. Novamente, este resultado, vem de encontro com os índices calculados anteriormente, apresentando um bom ajuste do modelo.

Mais um índice que foi usado é o Erro Quadrático Médio (RMSE, equação (4.51)). O valor calculado é $RMSE = 197,9$. Aparentemente o valor é alto, no entanto

vale lembrar que o sistema trabalha com rotações, onde seu valor varia entre 4000 rpm até 10.000 rpm. Portanto o resultado condiz com os índices apresentados anteriormente.

Com a validação realizada por meios subjetivos e quantitativos, é possível afirmar que o modelo encontrado representa de forma satisfatória o sistema estudado.

CONCLUSÕES DO TRABALHO

Neste trabalho foi possível observar o crescimento do uso dos VANTs. A busca pela automatização e maior segurança passam por um melhor conhecimento da estrutura da aeronave. Alguns estudos são desenvolvidos visando atingir tal objetivo, no entanto priorizam os sistemas de controle em detrimento da modelagem matemática da aeronave. Este estudo deu enfoque a modelagem matemática do conjunto ESC – motor – hélice, descrevendo o conjunto por meio de um modelo matemático, onde foi utilizada a técnica de identificação de sistemas. Além disso, o estudo é válido não somente para o quadricóptero, mas sim para os diversos tipos de multirrotóres.

A coleta das amostras apresentou ruído. Possivelmente o problema foi originado devido as limitações no *hardware* usado na construção da plataforma. Verificou-se então, que é necessário realizar mudanças na plataforma de testes. Tais mudanças visarão obter dados com melhor qualidade, bem como novos conjuntos de dados envolvendo outras variáveis, tais como o empuxo.

O sistema estudado apresentou características não lineares. Uma vez que as amostragens foram realizadas em diferentes condições e apresentaram comportamento distinto entre si. Tal fato pode estar diretamente ligado ao ponto de operação do sistema.

As aplicações de teorias usadas na econometria e representada pelos testes ADF e kpss, mostraram-se eficientes para determinar a não estacionariedade da série. A análise da ACF e PACF mostrou-se válida, apesar do erro apresentando. Com tal análise foi possível determinar a estrutura e ordem do modelo.

A diferenciação dos dados foi efetiva para o cálculo da ACF e PACF, visto que os dados não diferenciados produziram resultados inconclusivos e após sua diferenciação foi possível obter a estrutura e ordem do modelo. No entanto, ao se estimar os parâmetros, o modelo encontrado não foi satisfatório. Acredita-se que tal fato tenha ocorrido devido a não-linearidade do sistema e a perda de informação ao ser diferenciado. Finalmente, a estimação dos parâmetros utilizando dados não diferenciados resultou em um modelo capaz de englobar de forma satisfatória a dinâmica do sistema em estudo. Tal resultado está justificado pelos métodos quantitativos e qualitativos usados para validar o modelo.

6.1. Sugestões para trabalhos futuros

- Definição de uma metodologia para determinar de forma mais precisa o padrão a ser escolhido ao realizar a coleta de dados.
- Reformulação da plataforma de testes, a fim de diminuir os ruídos e obter dados de outras variáveis, como empuxo.
- Uso da função de autocorrelação estendida e teoria proposta por (MÜLLER e WEI, 1997) para a identificação da ordem dos modelos.
- Uso da teoria apresentada para mais de um motor.
- Verificar o uso dos modelos em sistemas de controle.
- Implementação da identificação de sistemas online recursivos.
- Modelagem individual dos componentes estudados (ESC, motor, hélice).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução a identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. Terceira Ed. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007. 730 p. ISBN 978-85-7041-584-4.
- ARDUCOPTER, 2012. Disponível em: <https://code.google.com/p/arducopter/wiki/AC2_Props_2>. Acesso em: 20 Janeiro 2015.
- BANGURA, M.; MAHONY, R. **Nonlinear Dynamic Modeling for High Performance Control of a Quadrotor**. Proceedings of Australasian Conference on Robotics and Automation. New Zealand: [s.n.]. 2012.
- BEDENDO, A. L. **Modelagem Matemática da Dinâmica Linear de MEMS Baseados em Deformação Elástica e Ação Eletrotática**. 2012. 146f. (Dissertação de Mestrado) Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande Do Sul - UNIJUÍ. Ijuí, RS. 2012.
- BOUABDALLAH, S. **Design and control of quadrotors with application to autonomous flying**. Tese de doutorado. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Lausanne, França. 2007.
- BOUABDALLAH, S.; MURRIERI, P.; SIEGWART, R. . Design and Control of an Indoor Quadrotor. **Robotics and Automation**, 2004.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis, Forecasting and Control**. 3ª. ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- BRAGA, N. O que é PWM? **Mecatrônica Fácil**, n. 45, p. 40, 2012. ISSN 16760980.
- BRAND, J.; SELIG, M. **Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers**. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Orlando, Flórida: [s.n.]. 2011.
- BRESCIANI, T. **Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter**. 2008. 180 f. Dissertação (Mestrado em Automação de controle) - Lund University. Lund, Suécia. 2008.
- BRUNI, A. L. A EFICIÊNCIA INFORMACIONAL DO MERCADO DE ADRS BRASILEIROS: UMA ANÁLISE COM TESTES DE AUTO-CORRELAÇÃO, RAIZ UNITÁRIA. **Revista Gestão e Planejamento**, Salvador, v. 9, p. 53-65, Jan./jun. 2004.
- BÜCHI, R. **Fascination Quadrocopter**. USA: Books on Demand, 2011.
- CINCA, A. N. **Econometria**. 2ª. ed. Madrid: McGRAW-HILL, 1993.
- CNN. The Art of Movement. **Volocopter**: 18-propeller electric helicopter takes flight, 2013. Disponível em: <<http://edition.cnn.com/2013/11/27/tech/innovation/volocopter-18-propeller-electric/index.html?iref=allsearch>>. Acesso em: 27 jan. 2015.
- COLEMAN, C. P. **A Survey of Theoretical and Experimental Coaxial Rotor Aerodynamic Research**. NASA. Moffett Field, Califórnia, p. 25. 1997.
- COPTERCRAFT. Multirotor frame configurations, 2014. Disponível em: <<http://www.coptercraft.com/multirotor-frame-configurations>>. Acesso em: 20 Janeiro 2015.

- DEJONG, D. N.; WHITEMAN, C. H. Reconsidering 'Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series'. **Journal of Monetary Economics**, n. 28, 221-254 1991. ISSN 0304-3932.
- DICKEY, D. A.; FULLER, W. A. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. **Journal of the American Statistical Association**, v. 74, p. 427-431, Junho 1979.
- ENDERS, W. **Applied Econometric time series**. New York: Wiley, 1995.
- FERNANDES, N. D. S. **Design and construction of a multi-rotor with various degrees of freedom**. 2011. 100f. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa. 2011.
- FORBES. What Makes The Quadcopter Design So Great For Small Drones? **Quora**, 2013. Disponível em: <<http://www.forbes.com/sites/quora/2013/12/23/what-makes-the-quadcopter-design-so-great-for-small-drones/>>. Acesso em: 27 jan. 2015.
- FOWERS, S. G. **Stabilization and control of a quad-rotor micro-uav using vision sensors**. 2008. 111 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Brigham Young University. Provo, Estados Unidos da América. 2008.
- FULLER, W. A. **Introduction to Statistical Time Series**. 2ª. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- GARCIA, C. **Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos**. 2ª ed. ed. São Paulo: EDusp, 2005.
- GREENE, W. H. **Econometric Analysis**. 5ª. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- GUILART, M. H. **Metodologia para a interpretação do monitoramento de escavações**. Tese (Doutorado em Engenharia Mineral). Universidade de São Paulo, S. São Paulo. 2007.
- GUIMARÃES, J. P. F. **Controle de atitude e altitude para um veículo aéreo não tripulado do tipo quadrirrotor**. 2012. 67f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Brasil. 2012.
- GUJARATI, D. **Econometria Básica**. 4ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- GUPTA, A.; TIWARI, U. PWM Based Speed Control of DC Motor. **International Journal of Advanced Scientific and Technical Research**, Janeiro-Fevereiro 2013. 648-658.
- HOBIN, B.; FRANCES, P. H.; OOMS, M. Generalizations of the KPSS-Test for Stationarity. **Statistica Neerlandica**, Oxford, v. 58, n. 4, p. 483-502, 2004.
- HOFFMANN, G. et al. **The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for multi-agent control (STARMAC)**. Proceedings of the 23rd Digital Avionics System Conference. Salt Lake City: [s.n.]. 2004. p. 12E4 1-10.
- HOFFMANN, G. M. et al. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. **Citeseer**, 2007. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.77.9015>>. Acesso em: 27 jan. 2015.
- KANTZ, H.; SCHREIBER, T. **Nonlinear Time Series Analysis**. 2ª. ed. Cambridge: Cambridge, 2004.

- KWIATKOWSKI, D. et al. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. **Journal of Econometrics**, North-Holland, n. 54, p. 159-178, 1992.
- LAKSHMINARAYAN, V. K.; BAEDER, J. D. High-Resolution Computational Investigation of Trimmed Coaxial Rotor Aerodynamics in Hover. **JOURNAL OF THE AMERICAN HELICOPTER SOCIETY**, v. 54, p. 042008-1 - 042008-21, Julho 2009.
- LEISHMAN, J. G. **Principles of helicopter aerodynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- LEISHMAN, J. G. (2002), The bréget-richet quad-rotor helicopter of 1907. , **Página na internet.**, 2002. Disponível em: <<http://aero.umd.edu/~leishman/Aero/Breguet.pdf>>. Acesso em: 27 jan. 2015.
- LJUNG, L. **System Identification: Theory for the User**. 2ª. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- LUPASHIN, S. et al. A platform for aerial robotics research and demonstration: The Flying Machine Arena. **Mechatronics: The Science of Intelligent Machines**, Amsterdam, v. 24, n. 1, p. 41-54, fevereiro 2014.
- MACHADO, M. V. **Modelagem Matemática do Tempo de Vida de Baterias utilizando modelos Autoregressivos**. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí. Ijuí, RS. 2014.
- MADDALA, G. S. **Introduction to Econometrics**. 2ª. ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1992.
- MARKTESANDMARKETS. Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Market (2013 - 2018), 2014. Disponível em: <<http://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/unmanned-aerial-vehicles-uav-market-662.htm>>.
- MARTÍNEZ, V. M. **Modelling of the flight dynamics of a quadrotor helicopter**. 2007. Dissertação (Mestrado em engenharia). CRANFIELD UNIVERSITY. Cranfield, Reino Unido. 2007.
- MARTINS, E. E. Controle fuzzy através de sistema de supervisão. **Controle & Instrumentação**, São Paulo, SP, n. 151, 2009.
- MCCORMICK, B. W. **Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- MELO, A. S. D. **Implementação de um Quadrotor como Plataforma de Desenvolvimento para Algoritmos de Controle**. Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico. Vitória, ES, p. 113. 2010.
- MIKROKOPTER, 2015. Disponível em: <<http://www.mikrokopter.de/>>. Acesso em: 20 Janeiro 2015.
- MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2002.
- MOREIRA, C. J. M. **Identificação de Modelos Lineares para Dinâmica de Elastomassas MEMS Utilizando Critérios da Modelagem Caixa Preta**. 2013. 100f. (Dissertação de Mestrado) Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ. Ijuí, RS. 2013.

- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. D. C. **Modelos Para Previsão de séries Temporais**. 2^a. ed. São Paulo: Blucher, 2006.
- MÜLLER, D.; WEI, W. W. Iterative least-squares estimation and identification of the transfer function model. **Journal of Time Series Analysis**, v. 18, n. 6, p. 579-592, 1997.
- NAIDOO, Y.; RIANN, S.; BRIGHT, G. . Quad-Rotor Unmanned Aerial Vehicle Helicopter Modelling & Control. **Int. J. Adv Robotic Sy**, v. 8, n. 4, p. 139-149, 2011.
- NELSON, W. C. **Airplane Propeller Principles**. New-York: Jonh Wiley & Sons Inc. , 1944.
- NINNESS, B.; WILLS, A.; MILLS, A. UNIT: A freely available system identification toolbox. **Control Engineering Practice**, v. 21, p. 631-644, 2013. ISSN 0967-0661.
- NUSAIR, S. A. Testing the Validity of Purchasing Power Parity for Asian Countries During the Current Float. **Journal of Economic Development**, v. 28, n. 2, p. 129-147, Dezembro 2003.
- ORSAG, M.; POROPAT, S. B. Hybrid Fly-by-Wire Quadroter Controller. **Automatika: Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing & Communications**, v. 51, n. 1, p. 19-32, 2010.
- PAULA, J. C. **Desenvolvimento de um VANT do tipo Quadrirrotor para obtenção de imagens aéreas em alta definição**. 2012. 103 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná. Curitiba. 2012.
- PFAFF, B. **Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R**. 2^a. ed. New York: Springer, 2008. ISBN ISBN 0-387-27960-1.
- PHANTOM BRASIL, 2015. Disponível em: <<http://www.phantombrasil.com.br/>>. Acesso em: 20 Janeiro 2015.
- PHILIPS SEMICONDUCTORS APPLICATIONS LABORATORY. **Power Semiconductor Applications**. Eindhoven, Hamburgo: [s.n.], 1994.
- PINTO, P. M. A. F.; MARTINS, C. A.; VENSON, G. G. **Numerical Modeling of Propeller Performance Using Blade Element Theory With Experimental Validation**. 14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. Rio de Janeiro, RJ: [s.n.]. 2012.
- POUNDS, P. E. I. **Design, construction and control of a large quadroter micro air vehicle**. 2007. 171 p. Dissertação (Doutorado em Filosofia) - Australian National University. Canberra, Austrália. 2007.
- POUNDS, P.; MAHONY, R.; GRESHAM, J. **Towards Dynamically-Favourable Quad-Rotor Aerial Robots**. Australasian Conference on Robotics and Automation. [S.l.]: ACRA. 2004.
- POUNDS, P.; MAHONY, R.; HYNES, P. A. R. J. **Design of a four rotor aerial robot**. Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation,. Auckland, Australia: [s.n.]. 2002.
- R CORE TEAM. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria., 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 09 Fevereiro 2015.

RAMBABU, S. **MODELING AND CONTROL OF A BRUSHLESS DC MOTOR**. 2007. 55f. (Dissertação de Mestrado) National Institute of Technology Rourkela. Rourkela. 2007.

RCGROUPS.COM, 2011. Disponível em: <<http://www.rcgroups.com/forums/showthread.php?t=1563379>>. Acesso em: 01 Março 2015.

REAL, J. C. G.; SÁNCHEZ, E. V.; GIL, J. G. Position and Speed Control of Brushless DC Motors Using Sensorless Techniques and Application Trends. **Sensors**, v. 10, p. 6901-6947, 2010. ISSN 1424-8220.

REVISTA AUTO ESPORTE. Renault revela conceito kwid: Veículo com drone de reconhecimento foi apresentado no salão de Nova Déli, 2014. Disponível em: <<http://revistaautoesporte.globo.com/Noticias/noticia/2014/02/renault-revela-conceito-kwid.htm>>. Acesso em: 27 jan. 2015.

ROBOT KINGDOM. Five-Rotor Flying Drone, 2013. Disponível em: <<http://robot-kingdom.com/five-rotor-flying-drone-pentacopter/>>. Acesso em: 20 Janeiro 2015.

ROSKAM, J.; LAN, C.-T. E. **Airplane Aerodynamics and Performance**. Lawrence, Kansas: DAR Corporation, 1997.

SAID, S. E.; DICKEY, D. A. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. **Biometrika**, v. 3, n. 71, p. 599-607, 1984.

SCHWERT, W. Test for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation. **Journal of Business and Economic Statistics**, n. 7, p. 147-159, 1989.

SHANNON, C. E. **Communications in the presence of noise**. Proceedings of IRE. [S.l.]: [s.n.]. 1949. p. 10-21.

SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S. **Time Series Analysis and Its Applications**. 3ª. ed. New York: Springer, 2011.

SOUSA, J. D. A. **Simulação e desenvolvimento de um veículo aéreo autónomo de quatro rotores**. 2011. 150 f. Dissertação (Mestrado em Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores Major Automação) - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto. 2011.

SOUZA, G. D. S. E. et al. Previsões para o mercado de carnes. **Revista de Economia e Sociologia Rural**, Brasília, v. 49, n. 2, abril/junho 2011. ISSN 0103-2003.

VALAVANIS, K. **Advances in Unmanned Aerial Vehicles: State of the Art and the Road to Autonomy**. Dordrecht: Springer, 2007.

VALAVANIS, K.; KONTITSIS, M. A Historical Perspective on Unmanned Aerial Vehicles. In: VALAVANIS, K. P. **Advances in Unmanned Aerial Vehicles: State of the Art and the Road to Autonomy**. Dordrecht: Springer, 2007. p. 15-46.

WANG, W. **Stochastic, Nonlinearity and Forecasting of Streamflow**. Amsterdam: Delft University Press, 2006.

WIEREMA, M. **Design, implementation and flight test of indoor navigation and control system for a quadrotor uav**. 2008. Monografia (Mestrado em Aerospace Engineering) - Delft University of Technology. Delft, Holanda. 2008.

XIA, C.-L. **Permanent Magnet Brushless DC Motor Drives and Controls**. 1ª. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 2012.

ZIVOT, E.; WANG, J. **Modeling Financial Time Series with S-Plus**. Second Edition.
ed. New York: Springer, 2006.

ANEXOS

ANEXO A: Quadro com o resultado para o teste ADF com 13 lags

#####

Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test

#####

Test regression trend

Call:

lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1357.53	-142.08	-10.46	146.34	3086.53

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	24.0583345	13.3261462	1.805	0.07116	.
z.lag.1	0.0005977	0.0022839	0.262	0.79360	
Tt	-0.0246419	0.0100309	-2.457	0.01410	*
z.diff.lag1	-0.0640634	0.0213557	-3.000	0.00273	**
z.diff.lag2	-0.0526136	0.0212633	-2.474	0.01342	*
z.diff.lag3	-0.0411732	0.0211668	-1.945	0.05188	.
z.diff.lag4	0.1172380	0.0210138	5.579	2.71e-08	***
z.diff.lag5	-0.1647117	0.0210330	-7.831	7.43e-15	***
z.diff.lag6	-0.1425434	0.0210437	-6.774	1.60e-11	***
z.diff.lag7	-0.1405673	0.0210259	-6.685	2.90e-11	***
z.diff.lag8	0.1701541	0.0209983	8.103	8.74e-16	***
z.diff.lag9	-0.1020165	0.0209958	-4.859	1.26e-06	***
z.diff.lag10	-0.1186870	0.0209764	-5.658	1.73e-08	***
z.diff.lag11	-0.1005372	0.0211039	-4.764	2.02e-06	***

z.diff.lag12	0.1231391	0.0211757	5.815	6.93e-09	***
z.diff.lag13	0.0071885	0.0212855	0.338	0.73561	

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 245.3 on 2221 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2913, Adjusted R-squared: 0.2865

F-statistic: 60.86 on 15 and 2221 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: 0.2617 2.692 4.038

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	6.09	4.68	4.03
phi3	8.27	6.25	5.34

Fonte: Próprio autor

ANEXO B: Quadro com resultado do teste ADF para 12 lags

#####

Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test

#####

Test regression trend

Call:

lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1364.9	-142.2	-10.9	145.9	3093.6

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	23.9603117	13.3007213	1.801	0.07177	.
z.lag.1	0.0006663	0.0022745	0.293	0.76959	
Tt	-0.0249538	0.0099805	-2.500	0.01248	*
z.diff.lag1	-0.0632520	0.0212101	-2.982	0.00289	**
z.diff.lag2	-0.0534050	0.0211258	-2.528	0.01154	*
z.diff.lag3	-0.0420891	0.0209845	-2.006	0.04501	*
z.diff.lag4	0.1164548	0.0208774	5.578	2.73e-08	***
z.diff.lag5	-0.1635613	0.0207451	-7.884	4.91e-15	***
z.diff.lag6	-0.1436187	0.0207936	-6.907	6.44e-12	***
z.diff.lag7	-0.1416498	0.0207721	-6.819	1.18e-11	***
z.diff.lag8	0.1689361	0.0206780	8.170	5.12e-16	***
z.diff.lag9	-0.1012278	0.0208562	-4.854	1.30e-06	***
z.diff.lag10	-0.1190359	0.0209422	-5.684	1.49e-08	***
z.diff.lag11	-0.1009647	0.0210571	-4.795	1.74e-06	***
z.diff.lag12	0.1226439	0.0211160	5.808	7.23e-09	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 245.2 on 2223 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2913, Adjusted R-squared: 0.2868

F-statistic: 65.26 on 14 and 2223 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: 0.2929 2.7475 4.1212

Critical values for test statistics:

1pct	5pct	10pct
------	------	-------

tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	6.09	4.68	4.03
phi3	8.27	6.25	5.34

Fonte: Próprio autor

ANEXO C: Quadro com o resultado do teste ADF após os dados serem diferenciados

```
#####
```

```
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
```

```
#####
```

Test regression trend

Call:

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1280.43	-141.47	-10.66	144.27	3084.36

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	28.404389	10.584939	2.683	0.007340	**
z.lag.1	-1.628694	0.102342	-15.914	< 2e-16	***
Tt	-0.025103	0.008163	-3.075	0.002129	**
z.diff.lag1	0.565902	0.097865	5.782	8.40e-09	***
z.diff.lag2	0.524398	0.092975	5.640	1.91e-08	***
z.diff.lag3	0.475433	0.086707	5.483	4.65e-08	***
z.diff.lag4	0.583300	0.080749	7.224	6.92e-13	***
z.diff.lag5	0.410573	0.075638	5.428	6.32e-08	***

z.diff.lag6	0.283052	0.070638	4.007	6.35e-05	***
z.diff.lag7	0.131254	0.063370	2.071	0.038453	*
z.diff.lag8	0.289959	0.056638	5.119	3.33e-07	***
z.diff.lag9	0.174543	0.050768	3.438	0.000597	***
z.diff.lag10	0.066291	0.045813	1.447	0.148042	
z.diff.lag11	-0.037178	0.038752	-0.959	0.337463	
z.diff.lag12	0.082049	0.030871	2.658	0.007921	**
z.diff.lag13	0.084326	0.021148	3.987	6.90e-05	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 244.5 on 2220 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.6831, Adjusted R-squared: 0.681

F-statistic: 319.1 on 15 and 2220 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -15.9142 84.4207 126.631

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau3	-3.96	-3.41	-3.12
phi2	6.09	4.68	4.03
phi3	8.27	6.25	5.34

Fonte: Próprio autor