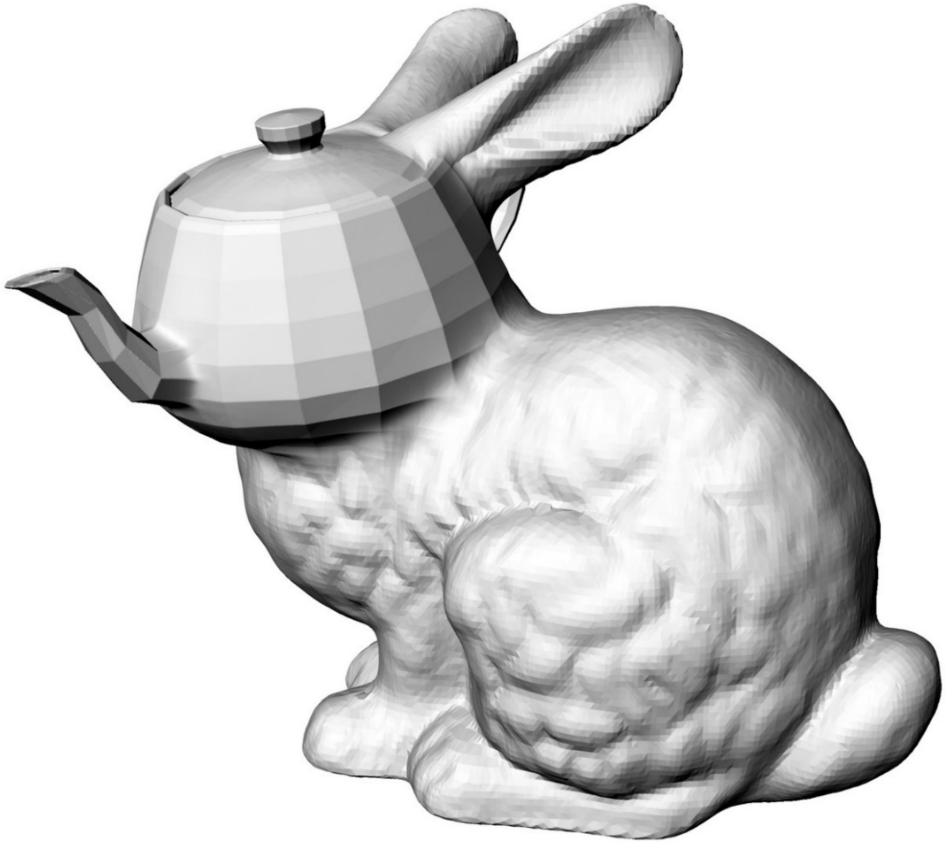


Transformações

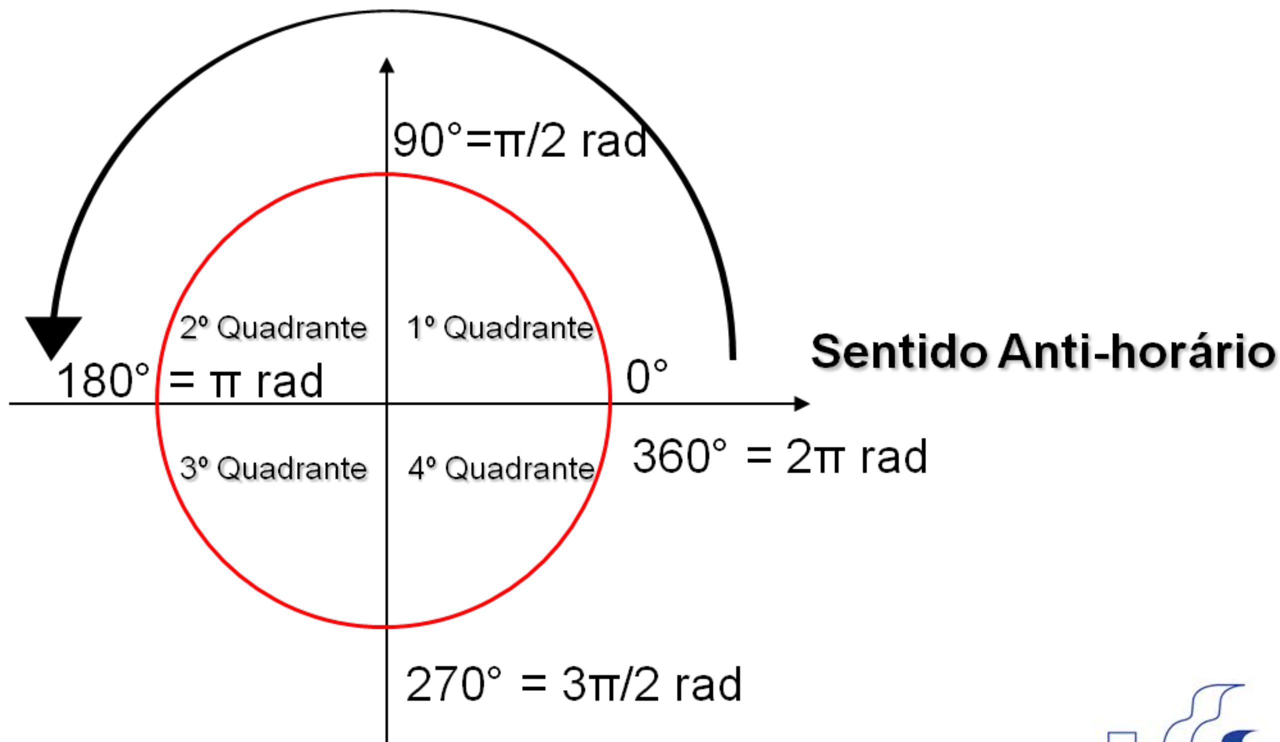
por Rossana B Queiroz

Matemática

UMA RÁPIDA REVISÃO

Trigonometria

- Círculo Trigonométrico



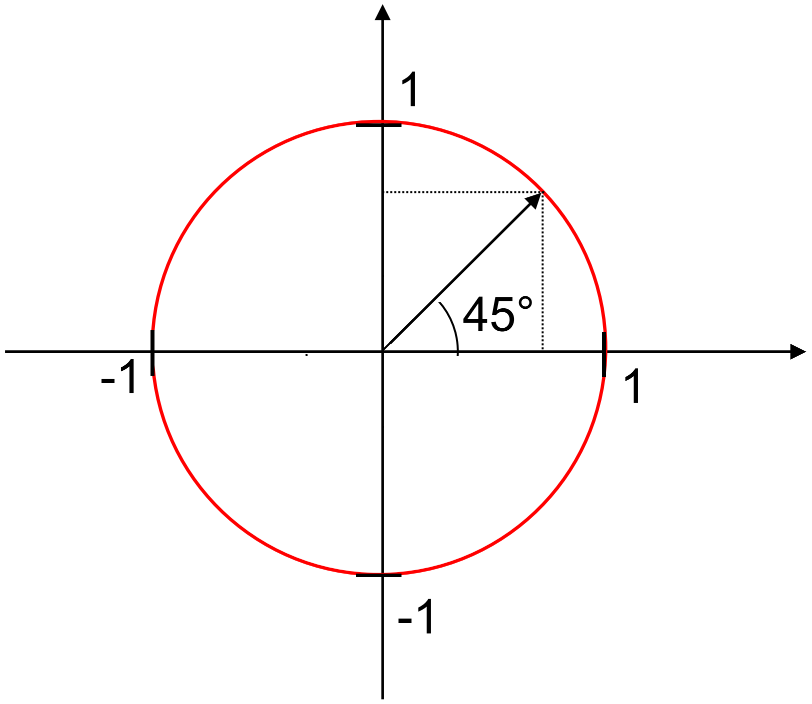
Unidades de medida

Grau: divisão da circunferência em 360 partes.

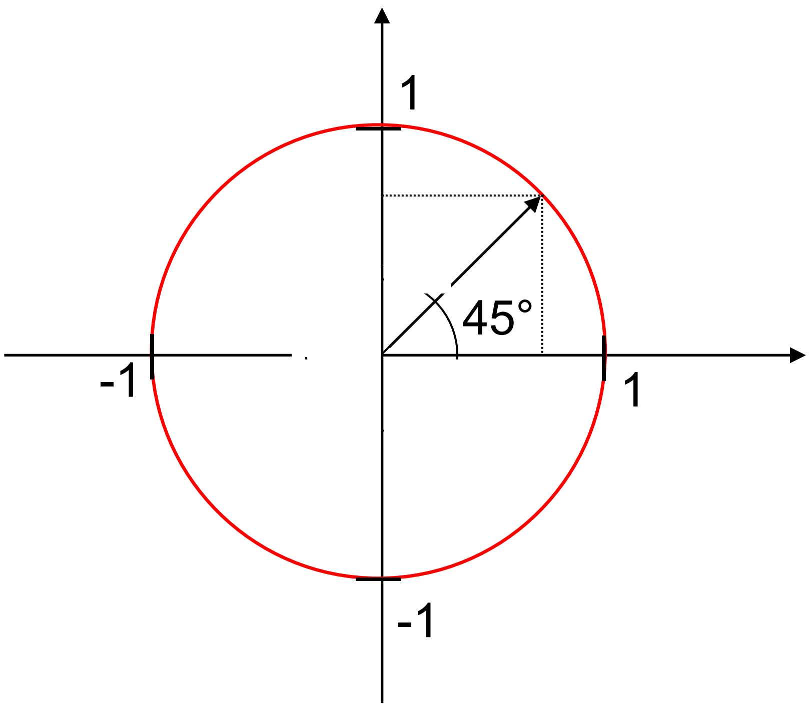
Radiano: um arco de um rad é igual ao raio

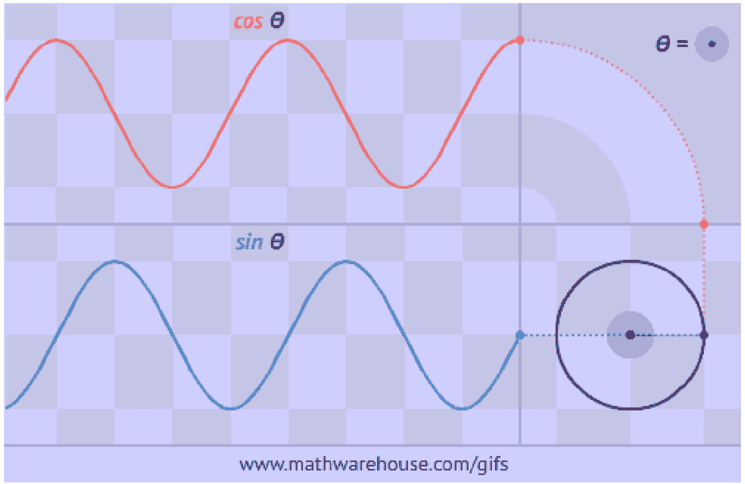
Trigonometria

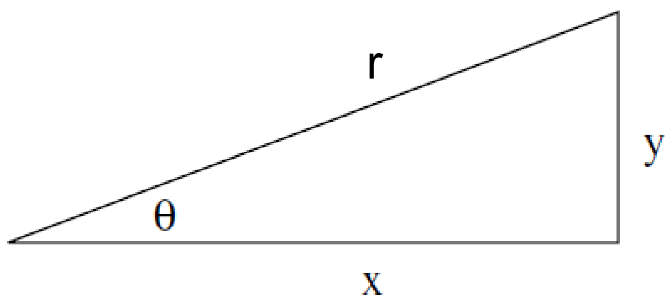
- Círculo canônico



Trigonometria







$$\sin\theta = y/r \qquad x = r\cos\theta = y/\tan\theta \qquad \sin^{-1}(y/r) = \theta$$

$$\cos\theta = x/r \qquad y = r\sin\theta = x\tan\theta \qquad \cos^{-1}(x/r) = \theta$$

$$\tan\theta = y/x \qquad r = y/\sin\theta = x/\cos\theta \qquad \tan^{-1}(y/x) = \theta$$

Matrizes

Linhas

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Colunas

Operações com Matrizes

Adição

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{b_{12}} & \boxed{b_{13}} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{b_{22}} & \boxed{b_{23}} \\ \boxed{b_{31}} & \boxed{b_{32}} & \boxed{b_{33}} \end{bmatrix} \qquad C = A + B$$

$$C = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Obs: A e B devem ser do mesmo tamanho.

Operações com Matrizes

Multiplicação de matriz por escalar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = 3 * A \qquad B = 3 * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 * a_{11} & 3 * a_{12} & 3 * a_{13} \\ 3 * a_{21} & 3 * a_{22} & 3 * a_{23} \\ 3 * a_{31} & 3 * a_{32} & 3 * a_{33} \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Multiplicação de matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$C_{m \times n} = A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$$

$$C_{2 \times 2} = A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Obs: A_n e B_m devem ser do mesmo tamanho.

Operações com Matrizes

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta

Ocorre a troca entre os elementos m e n das matrizes.

$$\boxed{A_{m\times n} = A^{t}{}_{n\times m}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Resumo de Operações com Matrizes

Adição

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

Subtração

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}$$

Obs: A e B devem ser do mesmo tamanho.

Multiplicação de matriz por escalar

$$B = n * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

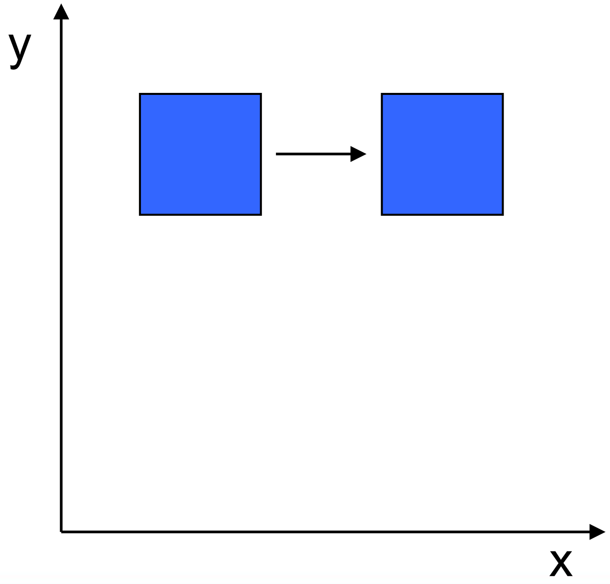
$$C = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C_{m\times n} = A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}}$$

Transformações Geométricas

Translação

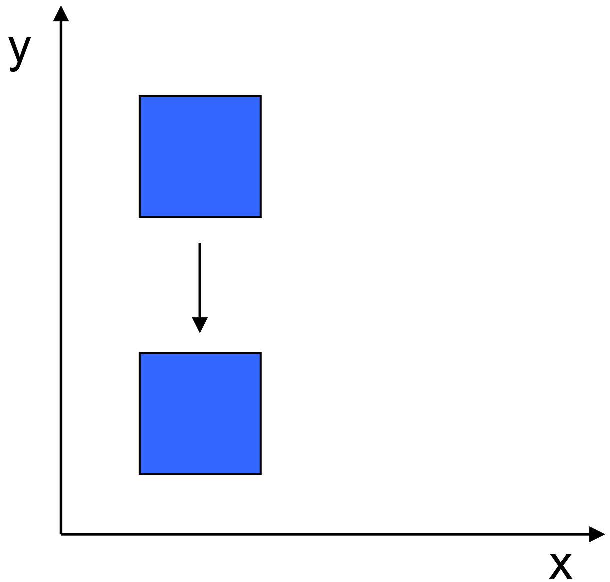
- A operação de translação movimenta todos os pontos de um polígono.
  - Ex.: translação no eixo x



Transformações Geométricas

Translação

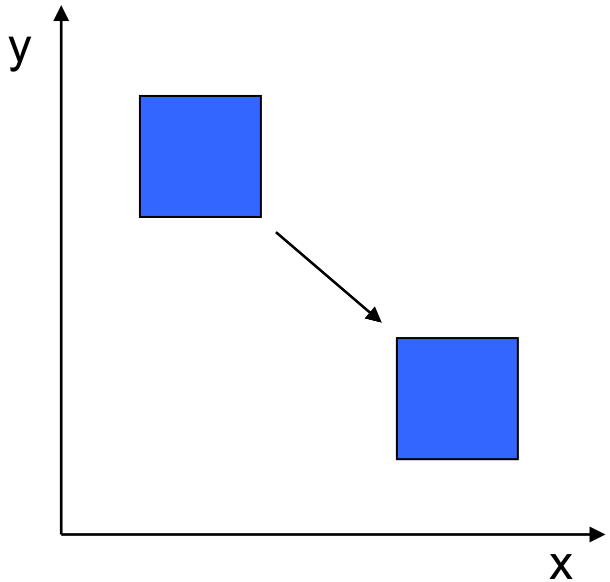
- A operação de translação movimenta todos os pontos de um polígono.
  - Ex.: translação no eixo y



Transformações Geométricas

Translação

- A operação de translação movimenta todos os pontos de um polígono.
  - Ex.: translação nos eixos x e y



Transformações Geométricas

Translação

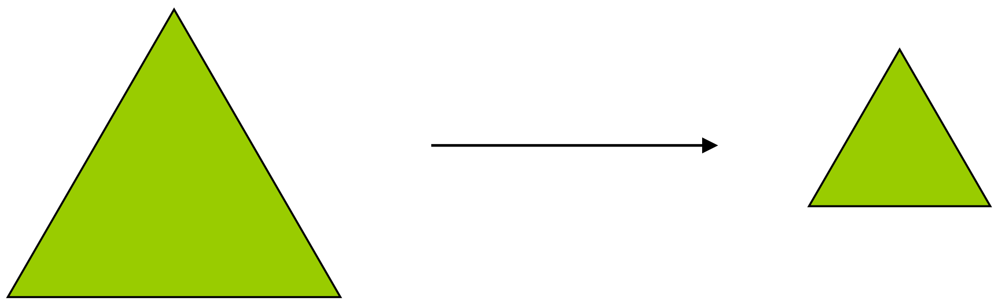
- Adição de um deslocamento às coordenadas dos vértices

$$\boxed{\begin{aligned} xt &= x + Tx \\ yt &= y + Ty \end{aligned}}$$

Transformações Geométricas

Escala

- A operação de escala muda as dimensões de um polígono.
  - Ex.: escala uniforme

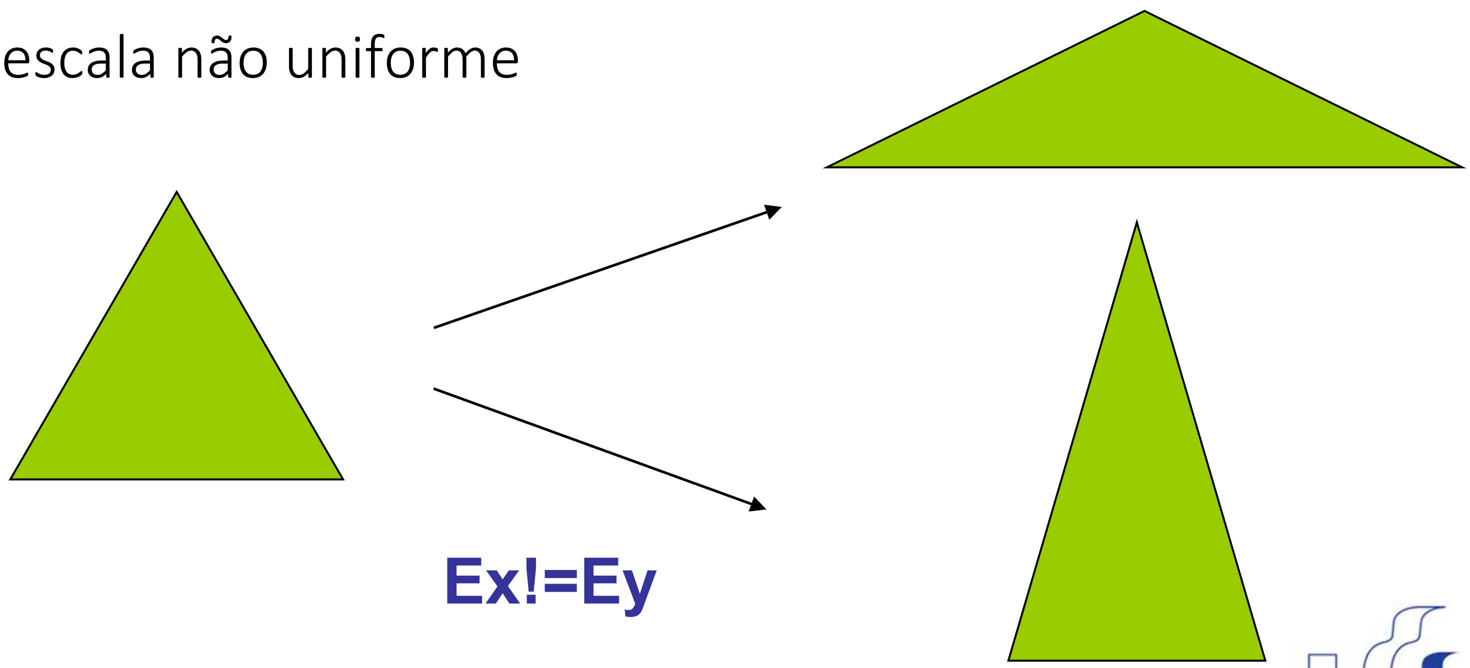


$$Ex = Ey$$

Transformações Geométricas

Escala

- A operação de escala muda as dimensões de um polígono.
  - Ex.: escala não uniforme



Transformações Geométricas

Escala

- Multiplica-se um fator de escala às coordenadas

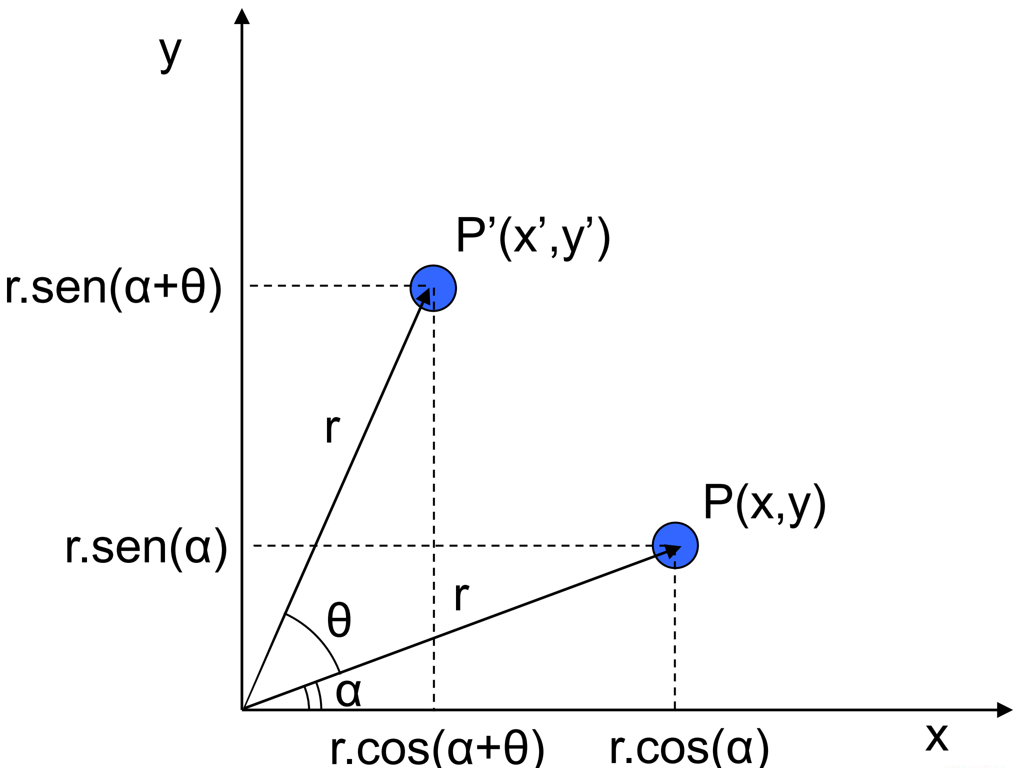
$$xe = x * Ex$$
$$ye = y * Ey$$

Transformações Geométricas

Rotação

$$(x,y)$$
$$r=(x^2+y^2)^{1/2}$$
$$x = r.\cos(\alpha)$$
$$y = r.\mathrm{sen}(\alpha)$$
$$x' = r.\cos(\alpha+\theta)$$
$$y' = r.\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$$

$$x' = r.\cos(\alpha+\theta)$$
$$y' = r.\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$$

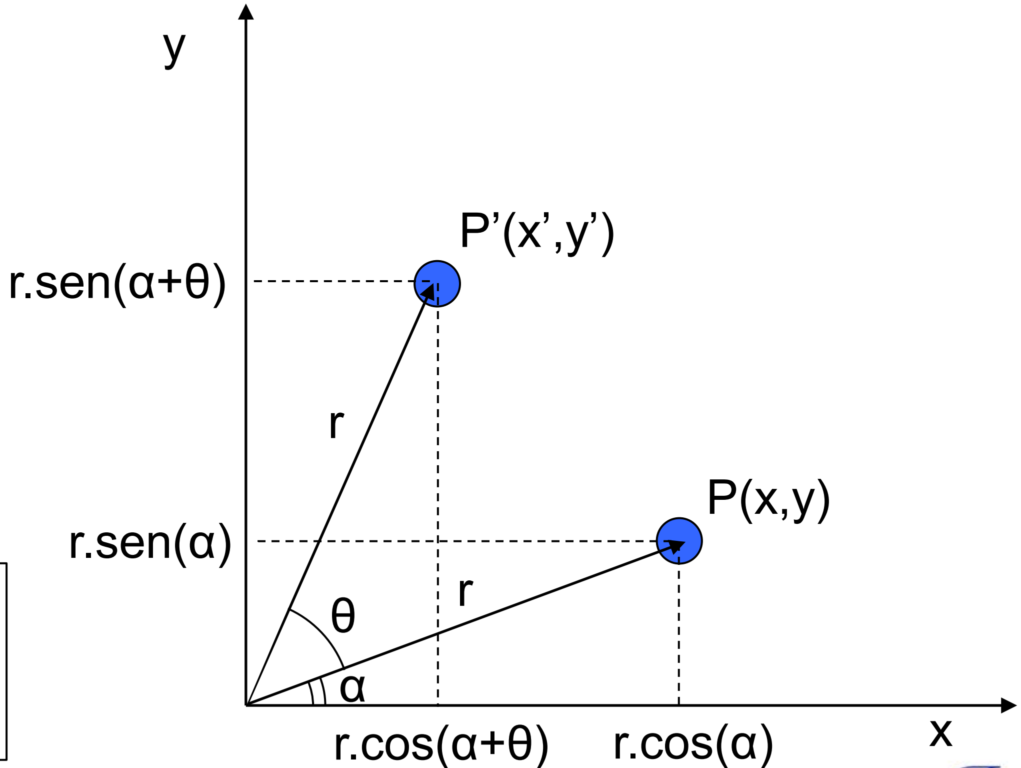


Transformações Geométricas

Rotação

$$(x,y)$$
$$r=(x^2+y^2)^{1/2}$$
$$x = r.\cos(\alpha)$$
$$y = r.\mathrm{sen}(\alpha)$$
$$x' = r.\cos(\alpha+\theta)$$
$$y' = r.\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$$

$$x' = r.\cos(\alpha).\cos(\theta) - r.\mathrm{sen}(\alpha).\mathrm{sen}(\theta)$$
$$y' = r.\mathrm{sen}(\alpha).\cos(\theta) + r.\cos(\alpha).\mathrm{sen}(\theta)$$

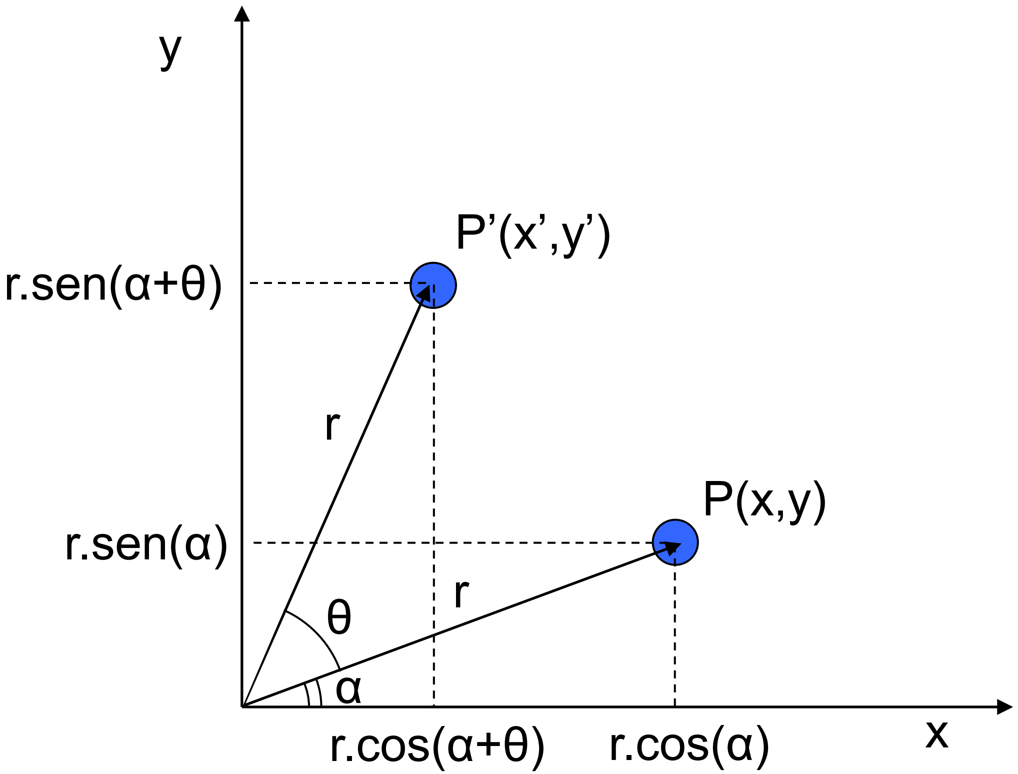


Transformações Geométricas

Rotação

$$(x,y)$$
$$r=(x^2+y^2)^{1/2}$$
$$x = r.\cos(\alpha)$$
$$y = r.\mathrm{sen}(\alpha)$$
$$x' = r.\cos(\alpha+\theta)$$
$$y' = r.\mathrm{sen}(\alpha+\theta)$$

$$x' = x.\cos(\theta) - y.\mathrm{sen}(\theta)$$
$$y' = y.\cos(\theta) + x.\mathrm{sen}(\theta)$$



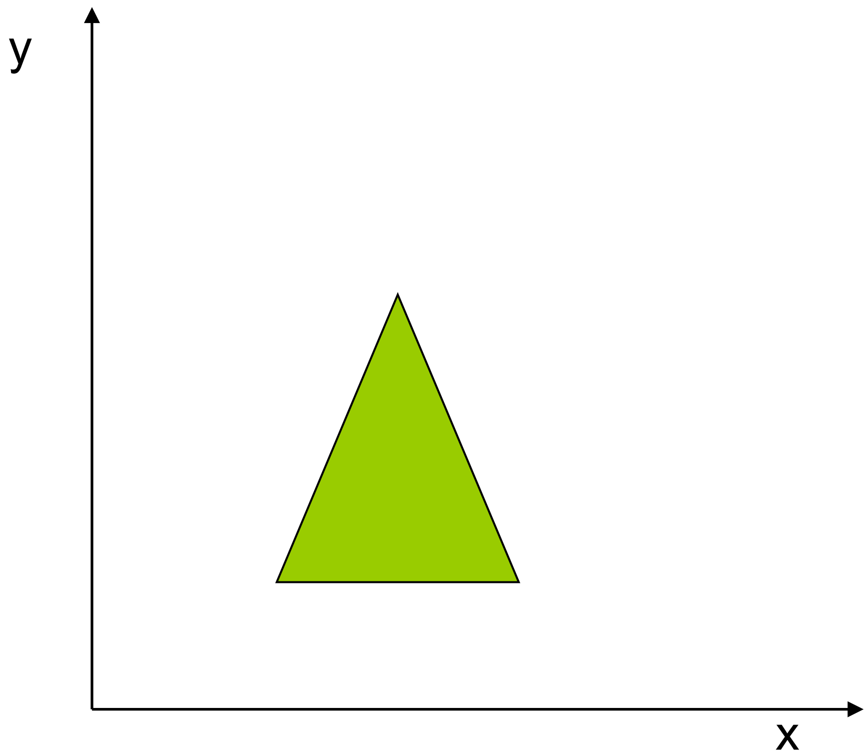
Transformações Geométricas

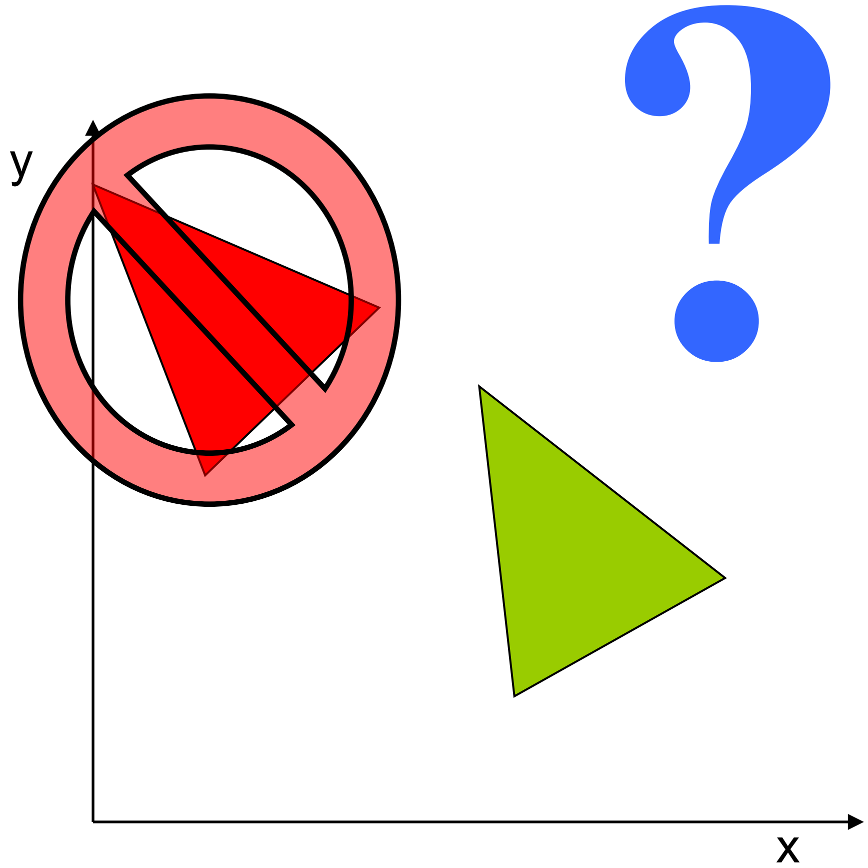
Rotação

- Faz o uso da trigonometria
- Os pontos formam um ângulo α em **relação à origem**. Quando aplicamos uma rotação, adicionamos um ângulo θ à α, e com isso precisamos recalcular a posição dos pontos conforme esse novo ângulo $\alpha+\theta$

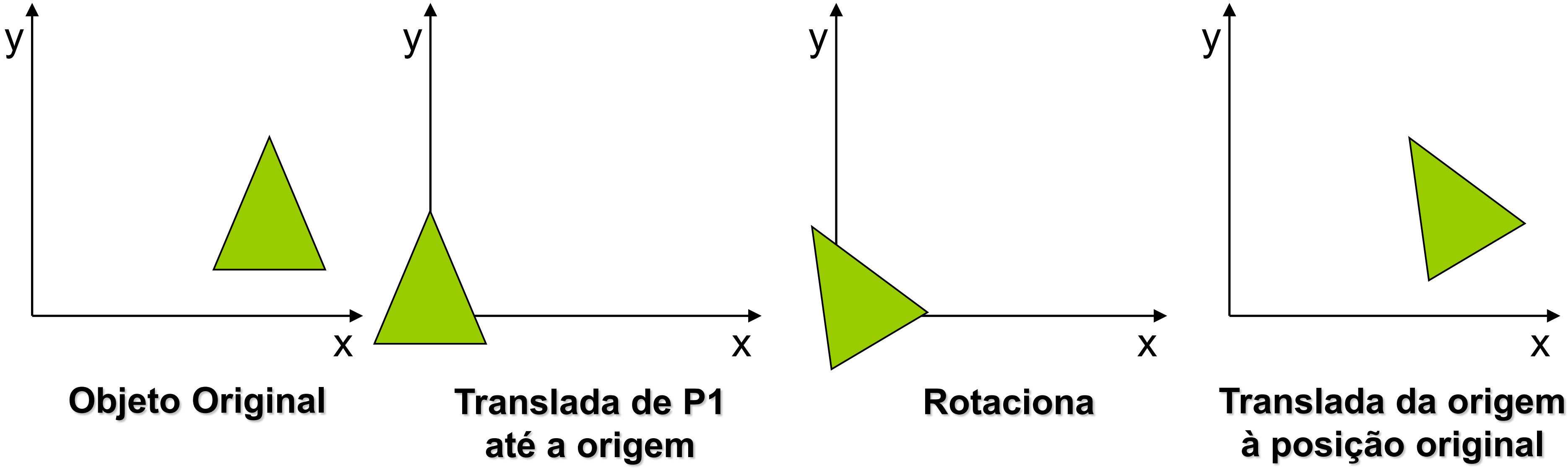
$$\boxed{\begin{array}{c} xr = x.\cos(\theta) - y.\mathrm{sen}(\theta) \\ yr = y.\cos(\theta) + x.\mathrm{sen}(\theta) \end{array}}$$

Pivot da Rotação





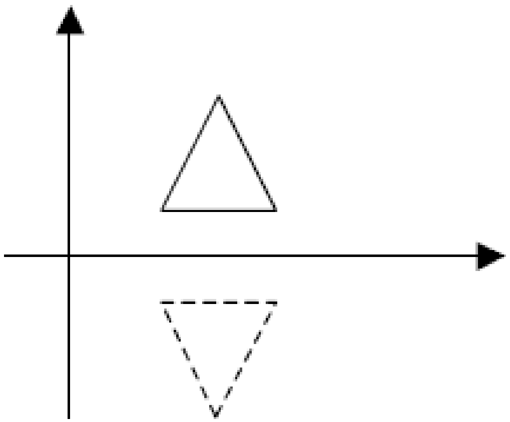
Pivot da Rotação



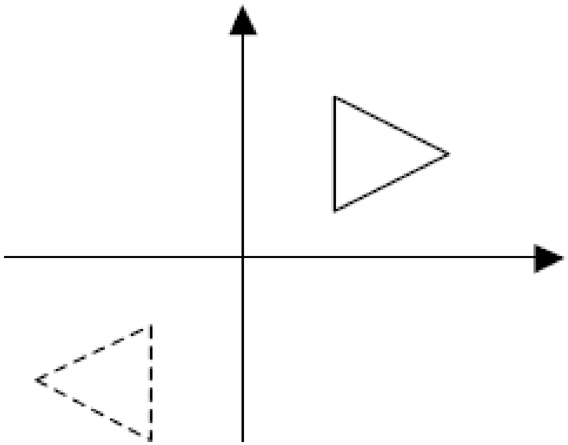
$$x' = (x - xp).\cos(\theta) - (y - yp).\sin(\theta) + xp$$
$$y' = (x - xp).\sin(\theta) + (y - yp).\cos(\theta) + yp$$

Outras transformações

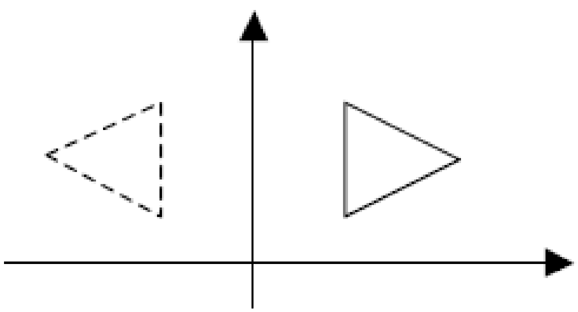
Reflexão



<u>Eixo X</u>
x' = x
y' = -y



<u>Origem</u>
x' = -x
y' = -y

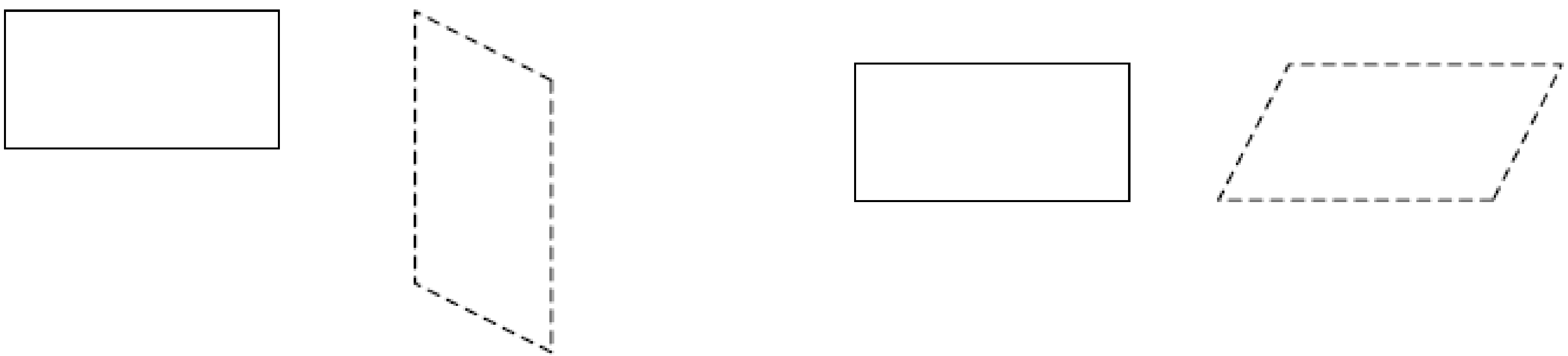


<u>Eixo Y</u>
x' = -x
y' = y

Outras transformações

Deslizamento (Shearing)

$$xs = x + Sx$$
$$ys = y + Sy$$



Resumo das Transformações

Translação	Escala	Rotação
xt = x + Tx yt = y + Ty	xe = x * Ex ye = y * Ey	xr = x.cos(θ) - y.sen(θ) yr = y.cos(θ) + x.sen(θ)

Forma Matricial

Translação

$$P' = P + T = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Tx & Ty \end{bmatrix}$$

Escala

$$P' = P \cdot S = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

Rotação

$$P' = P \cdot S = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Adiciona uma terceira coordenada: w
- O ponto 2D vira um vetor com 3 coordenadas: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$
- Homogeneizar: dividir x, y e w por w, sendo w = 1.
- Pontos homogeneizados: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Transformações (2D) Homogêneas

- Matrizes 3x3
- Ponto: matriz 3x1

$$T(Tx, Ty) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E(Ex, Ey) = \begin{bmatrix} Ex & 0 & 0 \\ 0 & Ey & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vetores e Matrizes

- Podem representar **Pontos 2D/3D**, **Distâncias** ou **Direções**

- Podem ser multiplicados por uma **matriz de transformação**
  - Rotação
  - Escala
  - Translação

- Após a multiplicação, um novo vetor **transformado** é criado

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

Matrizes Homogêneas

- Matriz que combina várias transformações numa única **matriz 4x4**
- Também chamada de Matriz de Modelo: **Model Matrix**
  - Antiga GL_MODELVIEW
- A 4ª linha/coluna é usada para a **translação**

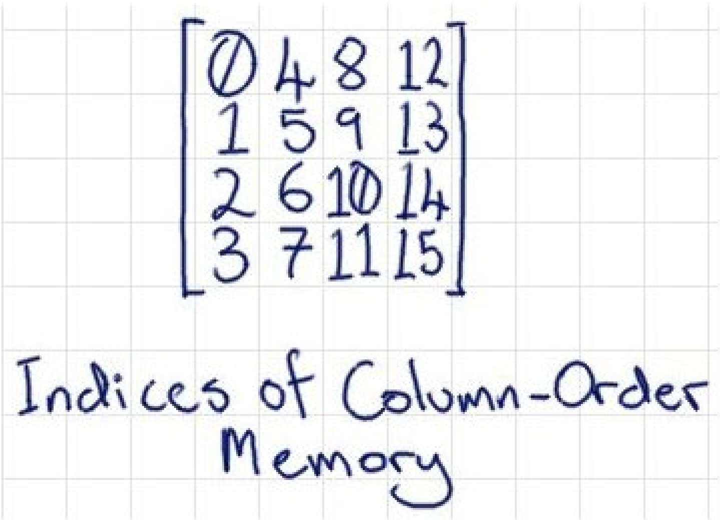
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipos de Vetores

- **vec2**: ponto 2D (x,y) ou coordenada de textura (s,t)
- **vec3**: ponto ou direção 3D (x,y,z)
- **vec4**: ponto 4D (x,y,z,1.0) ou direção 4D (x,y,z,0.0)

- Lembre-se que uma **matriz 4x4** só pode ser transformada por um **vetor 4D** e uma **matriz 3x3** por um **vetor 3D**

Matrizes



- Armazena-se a matriz 4x4 como um array **unidimensional**

  Ex: `float matrix[16];`

- O shader espera receber os valores nesta ordem: **ordem de colunas**

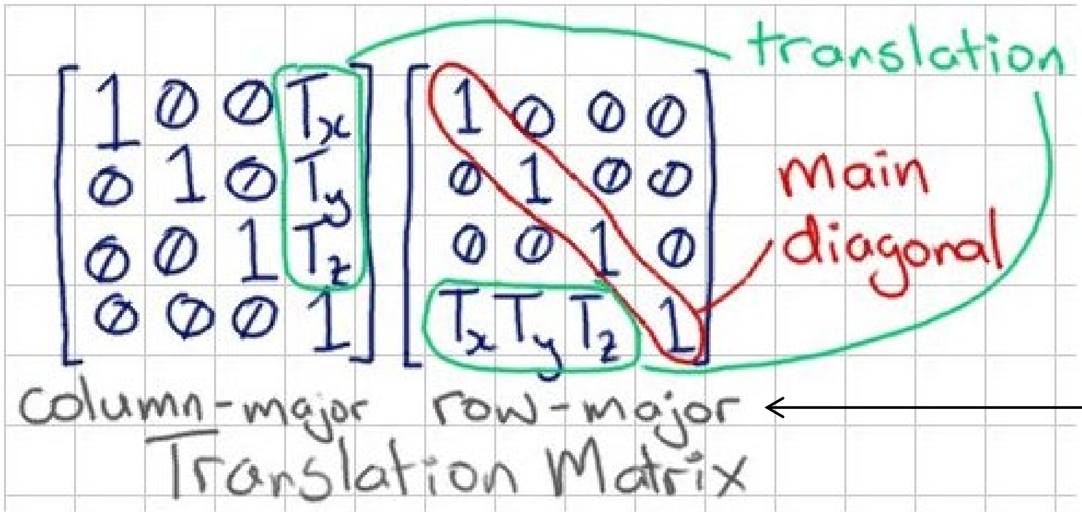
- Podemos enviar esse array ao shader usando o método **`glUniform`**, onde ele aparecerá como **`uniform mat4`**

[Anton's 2014]

Ordenação por Linhas x Colunas

- Existem 2 layouts de matrizes:
  - Ordenados por **linhas**
  - Ordenados por **colunas**

OpenGL4 →



← DirectX

[Anton's 2014]

Multiplicação Matriz x Vetor

Matrix * Vector

$$
\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} ax + by + cz + dw \\ ex + fy + gz + hw \\ ix + jy + kz + lw \\ mx + ny + oz + pw \end{bmatrix}
$$

[Anton's 2014]

Composição de Transformações

- Para realizar uma composição de transformações, basta efetuar uma multiplicação de matrizes.
  - Ex.: Composição de uma rotação com uma translação

  M = R.T

- Multiplicação das matrizes não é comutativa:

  A ordem das operações influencia diretamente.
  - Rotação seguida de translação é diferente de translação seguida de rotação.

Transformações (3D) Homogêneas

Translation, Scaling, and Rotation

$$\text{column order } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (column-order)}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (column-order)}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (column-order)}$$

Disponível em:
antongerdelan.net/teaching/3dprog1/maths_cheat_sheet.pdf

[Anton's 2014]

GLM

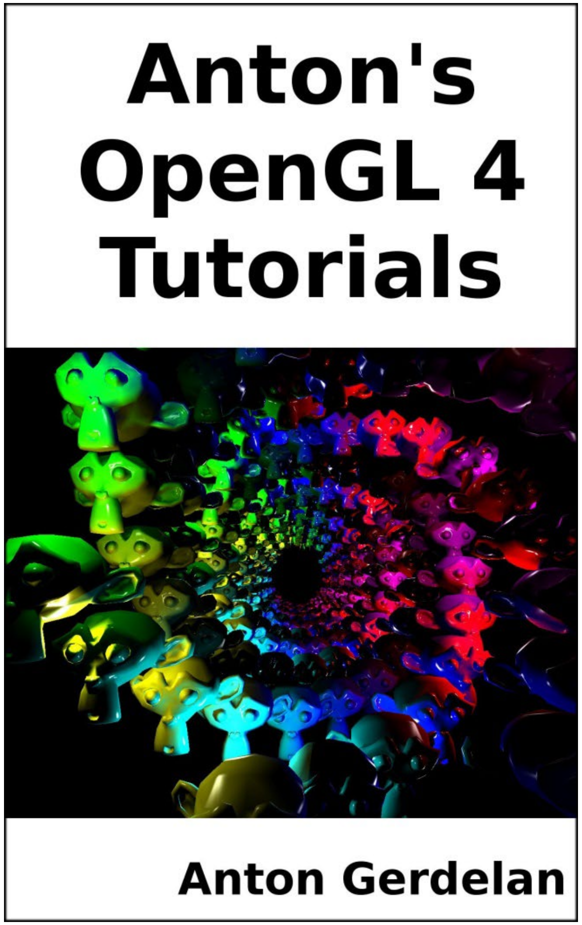
- Biblioteca auxiliar para trabalhar com matemática (*header-only*)
  - https://glm.g-truc.net/0.9.8/index.html

```
#include <glm/glm.hpp>
#include <glm/gtc/matrix_transform.hpp>
#include <glm/gtc/type_ptr.hpp>
```

Referências

- https://learnopengl.com/#!Getting-started/Transformations

Referências



Ebook para Kindle

Muitos materiais online disponíveis em:

http://antongerdelan.net/opengl/

UNISINOS DESAFIE O AMANHÃ.

Referências bibliográficas

- Slides sobre CG dos professores: Christian Hofsetz, Cristiano Franco, Marcelo Walter, Soraia Musse, Leandro Tonietto e Rafael Hocevar.