

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

DISEÑO DE FILTROS DIGITALES RECURSIVOS

Existen diversos procedimientos para diseñar filtros digitales (FD), ya sea utilizando métodos directos, en los cuales se parte del diseño de un filtro digital pasa-bajos prototipo y mediante transformaciones espectrales adecuadas, se obtienen otras características pasa-bajos (LP), pasa-altos (HP), pasa-banda (BP) o atenúa-banda (SB), o métodos indirectos, los cuales involucran transformaciones en el dominio de las frecuencias para obtener filtros digitales a partir de filtros analógicos (FA).

Ambos procedimientos implican el pasaje de una función transferencia racional, a otra de iguales características por medio de transformaciones de tipo bilineal o bicuadrática.

Dadas las características de las transformaciones, es viable la realización de estos métodos de diseño por medios computacionales. Es posible obtener los coeficientes de la función transferencia racional del FD resultante, a partir de otra de iguales características a la cual se aplica una transformación, esto es, se reemplaza la variable por una función bicuadrática, o cualquier otro tipo de función de transformación derivada de ésta (bilineal, inversión, cambio de escala, etc, dependiendo de los coeficientes en la bicuadrática).

I. METODO INDIRECTO

TRANSFORMACIÓN BILINEAL

Rabiner & Gold

La primera técnica que hemos discutido para la derivación de un filtro digital a partir de un filtro analógico, esto es, el reemplazar las diferenciales por diferencias finitas, tiene la ventaja de que la Transformada Z del filtro digital fue derivada trivialmente a partir de la Transformada de Laplace del filtro analógico mediante una sustitución algebraica. La desventaja de este mapeo es que el eje $j\omega$ en el plano s generalmente no mapea dentro del círculo unitario del plano Z, y (para el caso de las diferencias anterior) los filtros analógicos estables no siempre mapean en filtros digitales estables.

Hay un mapeo conforme simple del plano s en el plano Z que elimina las desventajas mencionadas anteriormente y que preserva la forma algebraica de la transformación bilineal definido por:

$$s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad (4.59)$$

y la transformación inversa, del plano z^{-1} al plano s, es: $z^{-1} \rightarrow \frac{\frac{2}{T} - s}{\frac{2}{T} + s}$ ó del plano z al plano s: $z \rightarrow \frac{\left(\frac{2}{T}\right) + s}{\left(\frac{2}{T}\right) - s}$

La naturaleza del mapeo es mejor entendida a partir de la Fig. 4-10, la cual muestra cómo el plano s es mapeado en el plano Z. Como se ve en la figura, el eje $j\omega$ en el plano s es íntegramente mapeado sobre el círculo unitario en el plano Z; la mitad izquierda en el plano s es mapeada dentro del círculo unitario en el plano Z, y la mitad derecha en el plano s es mapeada fuera del círculo unitario en el plano Z.

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

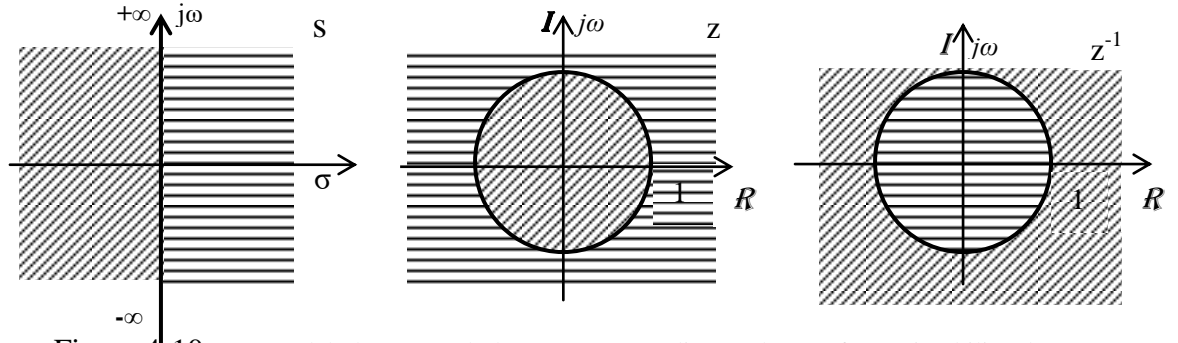


Figura 4-10 Mapeo del plano s en el plano z correspondiente a la transformación bilineal

Estas propiedades son fácilmente demostradas resolviendo para Z en términos de S a partir de la ecuación (4.59), dando

$$z \rightarrow \frac{\left(\frac{2}{T}\right) + s}{\left(\frac{2}{T}\right) - s} \quad (4.60)$$

Cuando $s = j\omega$, encontramos

$$z \rightarrow \frac{\left(\frac{2}{T}\right) + j\omega}{\left(\frac{2}{T}\right) - j\omega} \quad (4.61)$$

A partir de (4.61) encontramos $|z| = 1$. Cuando $\omega = 0$, $z = 1$; cuando $\omega = \infty$, $z = -1$; entre los límites, el ángulo de z varía monótonamente desde 0° a π . Si hacemos $s = \sigma + j\omega$ en la ecuación (4.60), obtenemos

$$z \rightarrow \frac{\left(\frac{2}{T}\right) + \sigma + j\omega}{\left(\frac{2}{T}\right) - \sigma - j\omega} \quad (4.62)$$

y cuando $\sigma < 0$ (la mitad izquierda del plano s), encontramos que $|z| < 1$ (dentro del círculo unitario).

La función transferencia del filtro digital $H(z)$ se obtiene a partir de la transformación bilineal haciendo la sustitución algebraica de la ecuación (4.59), esto es

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]} \quad (4.63)$$

Se demuestra rápidamente que los órdenes de los denominadores de $H(z)$ y $H(s)$ son los mismos; sin embargo, los órdenes de los numeradores pueden diferir. Luego, como un ejemplo, consideremos

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

la que tiene un numerador de grado cero y un denominador de primer grado. Entonces, $H(z)$ obtenida a partir de la transformación bilineal es

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

$$H(s) = \frac{1}{(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] + a} = \frac{(1+z^{-1})}{(2/T)(1-z^{-1}) + a(1+z^{-1})} = \frac{(1+z^{-1})}{[(2/T)+a] + z^{-1}[a-(2/T)]}$$

la que tiene un numerador y un denominador de primer grado.

La razón de que esto ocurra es que $H(s)$ tiene un cero en $s = \infty$; la transformación bilineal mapea este cero en $z = -1$.

Puesto que el eje $j\omega$ del plano s es mapeado entero sobre el círculo unitario en el plano z , los errores de aliasing (solapamiento) inherentes a las transformaciones de invarianza del impulso son eliminadas. Sin embargo hay una relación altamente no lineal entre la frecuencia analógica ω_a y la frecuencia digital ω_d . La naturaleza de esta no-linealidad se ve evaluando la Ec.(4.59) para $z = e^{j\omega T}$ y $s = j\omega_a$, dando:

$$j\omega_a \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1 - e^{-j\omega_d T})}{(1 + e^{-j\omega_d T})} \quad (4.64)$$

la cual se puede escribir como

(Multiplico y divido por $e^{j\omega_d T/2}$)

$$j\omega_a \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(e^{j\omega_d T/2} - e^{-j\omega_d T/2})}{(e^{j\omega_d T/2} + e^{-j\omega_d T/2})}$$

Esto es

$$j\omega_a \rightarrow \frac{2}{T} j \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T}{2}\right)$$

$$\omega_a \rightarrow \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \quad (4.65) \quad \text{o bien: } \frac{\omega_a T}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\omega_d T}{2}$$

La forma de esta no linealidad se ve en la Fig. 4-11 para el caso $T=2$. Para valores pequeños de ω_d , el mapeo es al menos lineal. Para la mayor parte de la escala de frecuencias, sin embargo, el mapeo es altamente no-lineal. Esto impone una fuerte restricción sobre cuándo puede ser utilizada la transformación bilineal. Esto implica que la respuesta de amplitud de un sistema continuo que es transformado debe ser constante por partes. Si éste no es el caso, la Ec. (4.65) muestra que la respuesta en frecuencia digital será una versión deformada de la respuesta en frecuencia analógica.

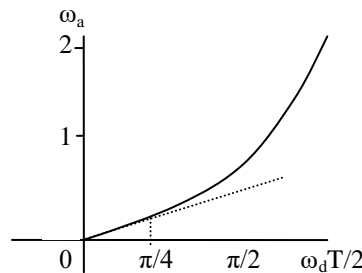


Figura 4-11 Relación entre las escalas de frecuencias analógica y digital para la transformación bilineal

En consecuencia, la transformación bilineal no puede ser usada para transformar un diferenciador analógico en un filtro digital. Afortunadamente hay una amplia clase de filtros para los cuales se puede compensar para la distorsión en frecuencia de la Ec. (4.65). Esta clase incluye importantes filtros tales como los filtros pasabajos, pasa altos, pasabandas y eliminador de bandas. La compensación usada es directa y se ilustra en la Fig. 4.12. El conjunto crítico de frecuencias de corte de filtros digitales está determinado, como se muestra en el ángulo inferior derecho de la Fig. 4-12. En este ejemplo suponemos que hay cuatro de tales frecuencias (ω_{d1} , ω_{d2} , ω_{d3} , ω_{d4}). Usando

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

la relación de la distorsión en frecuencias [Ec. (4.65)] entre las escalas de frecuencias analógica y digital, las frecuencias de corte del filtro son convertidas a un nuevo conjunto de frecuencias de corte analógicas (ω_{a1} , ω_{a2} , ω_{a3} , ω_{a4}) como se muestra en la parte superior derecha de la figura. Finalmente un filtro analógico es diseñado con la distorsión apropiada de las frecuencias de corte como se muestra en el lado superior izquierdo de la Figura.

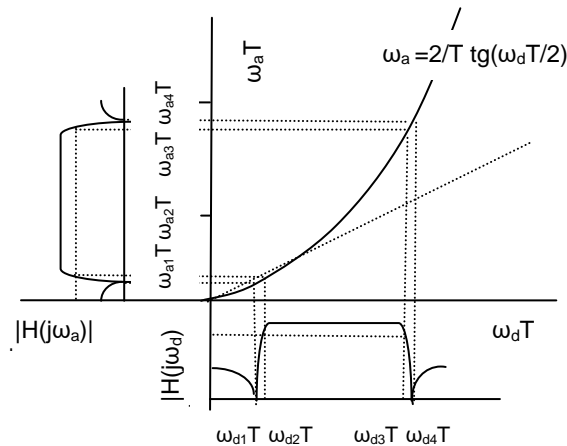


Figura 4-12 Técnica para compensar la distorsión de frecuencia no lineal de la transformación bilineal.

Aplicando la transformación bilineal a este filtro analógico da un filtro digital con las frecuencias de corte deseadas. Ejemplos para el uso de la transformación bilineal en el diseño de filtros pasa bajos y pasa banda se darán más tarde en este capítulo.

En resumen, la transformación bilineal provee un simple mapeo entre los filtros continuo y digital el cual es algebraico en naturaleza y el que mapea el eje $j\omega$ en el plano S íntegro en el círculo unitario en el plano Z . Este también tiene la propiedad de que, sistemas continuos realizables, estables, son mapeados en sistemas digitales realizables, estables. Además, filtros continuos con banda ancha de corte abrupto pueden ser mapeados en filtros digitales de banda ancha con corte abrupto sin el solapamiento en la respuesta en frecuencia, que es inherente con filtros obtenidos en la transformación Invarianza del Impulso. Una desventaja de esta técnica es que la respuesta en frecuencias de los sistemas continuos debe ser constante por tramos para compensar los efectos de la relación no lineal entre las frecuencias analógica y digital. Además, ni la respuesta al impulso ni la respuesta de fase del filtro analógico son preservadas en un filtro digital obtenido mediante la transformación bilineal.

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

Técnica de Diseño Indirecto

Transformación Bilineal (Mapeo Conforme)

A partir de un FA estable descrito por la función transferencia $H(s)$ obtenemos un FD mediante el reemplazo de la variable s por una función racional de la variable z^{-1} , la cual mapea el eje imaginario del plano s sobre el círculo unitario del plano z^{-1} ; entonces la función resultante $H(z^{-1})$ evaluada alrededor del círculo unitario, tomará el mismo juego de valores de $H(s)$ evaluada a lo largo del eje imaginario. Esto no significa que las funciones sean las mismas, ya que sus escalas de frecuencias están distorsionadas como se verá a continuación.

La transformación bilineal, que fue utilizada con buen resultado, da el mapeo entre las variables s y z^{-1} en la expresión:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})}; \quad z^{-1} \rightarrow \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2} \quad (1)$$

Puesto que: $s = j\omega$ y $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ (2), y sabiendo que $\operatorname{tg} x = -j \frac{e^{j2x} - 1}{e^{j2x} + 1}$

reemplazando se obtiene: $\frac{\omega_A T}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\omega_D T}{2}$ (3)

Vemos entonces que existe una distorsión entre ω_A y ω_D dada por la función tangente que las relaciona.

El diseño de cualquiera de los cuatro tipos de filtros definidos (LP, HP, BP y SB) se basa en la aplicación de (1) y (3) en las Transformaciones en Frecuencias (F. Kuo, Ch.13) que se muestran en la Tabla siguiente (F.Kuo, Ch.13) Table 13.10, obteniéndose una ecuación de transformación del filtro analógico prototipo LP, con función de transferencia $H(s)$, en el filtro digital deseado con función de transferencia $H(z^{-1})$.

TABLE 13.10

Table of Various Frequency Transformations

Transformation Low-Pass to	Equation
High-pass	$s_n = \frac{\omega_0}{s}$
Band-pass	$s_n = \frac{\omega_0}{BW} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$
Band-elimination	$s_n = \frac{BW}{\omega_0 \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)}$

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

La transformación analógica **LP-LP** está dada por $s \rightarrow \frac{s}{\omega_{Ac}}$ (4)

Esta expresión, combinada con las anteriores, nos da la transformación $s \rightarrow \frac{(1-z^{-1})}{K_L(1+z^{-1})}$ (5)

con $K_L = tg \frac{\omega_{dc}T}{2}$ y $\omega_c = 2\pi f_{dc}$

Simultáneamente, la transformación **LP-HP** está dada por: $s \rightarrow \frac{K_L(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}$ (6)

Se debe notar que, donde los FA están normalizados en 1 rad/seg, los FD están normalizados respecto a la frecuencia de muestreo $f_s = 1/T_s$ ya que las frecuencias críticas aparecen divididas por esta frecuencia de muestreo.

Las transformaciones **LP-BP** y **LP-SB** utilizan una transformación **bicadrática** del filtro analógico pasa bajos prototipo, y está dada por $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{AB_A \cdot s}$ (7)

siendo $AB_A = \omega_2 - \omega_1$ el ancho de banda de la banda de paso (LP-BP) o de rechazo (LP-SB), y ω_1 y ω_2 las frecuencias de corte inferior y superior respectivamente.

Combinando esta expresión con la transformación bilineal (3), la transformación pasabajos – pasa banda **LP-BP** es:

$$s \rightarrow \frac{1 - 2(\cos \omega_{d0}T)z^{-1} + z^{-2}}{K_B(1 - z^{-2})} \quad (8),$$

$$\text{con } K_B = tg \frac{\omega_{d2} - \omega_{d1}T}{2} \quad (9)$$

De manera similar, la transformación pasabajos – rechazabanda LP-SB es:

$$s \rightarrow \frac{K_B(1 - z^{-2})}{1 - 2(\cos \omega_{d0}T)z^{-1} + z^{-2}} \quad (10)$$

Nota: Los parámetros están normalizados respecto a la frecuencia central f_o .

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

GUIA PARA EL DISEÑO DE FILTROS DIGITALES A PARTIR DE FILTROS ANALOGICOS

A continuación daremos una síntesis del procedimiento que debe seguirse para el diseño de un filtro digital pasabajos, pasa-altos, pasabanda o atenuador de banda, teniendo como datos sus frecuencias y rangos críticos.

Diseño de un filtro digital pasabajos Butterworth

1. Por medio de la expresión $\frac{\omega_A T}{2} \rightarrow tg \frac{\omega_D T}{2}$ obtener las frecuencias analógicas vinculadas con las frecuencias digitales críticas ω_d (frecuencia de corte, frecuencia a la cual se desea un determinado valor de atenuación, etc.).
2. Encuentre el orden n el filtro analógico de Butterworth por medio de la expresión que da la atenuación en decibels: $A|_{dB} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$, donde el valor de n (orden del filtro) se supone conocido, y las frecuencias ω y ω_c ya fueron calculadas en el punto 1.

O, si se conoce la atenuación A y se requiere el orden del filtro:
$$n = \frac{1}{2} \frac{\log \left(10^{\frac{A}{10}} - 1 \right)}{\log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)}$$

3. Obtener de una tabla o manual los coeficientes de un filtro analógico de Butterworth normalizado, correspondiente al orden n encontrado en el punto 2., o bien obtener los polos de $H(s)$ por medio de la ecuación:
$$s_k = \exp \left[j \frac{(2k + n - 1)\pi}{2n} \right], \quad k=1, 2, \dots, 2n$$
4. Reemplazar $s = \frac{1 - z^{-1}}{K_L(1 + z^{-1})}$ en la función transferencia $H(s)$ y operar algebraicamente para expresar $H(z^{-1})$ como un cociente de polinomios. Este es el filtro digital deseado.

Diseño de un filtro digital pasabajos Chebyshev

1. A partir de las frecuencias digitales críticas, obtener una nueva serie de frecuencias analógicas ω_A por medio de la expresión: $\frac{\omega_A T}{2} \rightarrow tg \frac{\omega_D T}{2}$
2. De la expresión $ripple|_{dB} = 10 \log (1 + \epsilon^2)$ obtener el parámetro ϵ que controla el ancho del ripple.
3. Encontrar el orden n del filtro analógico de Chebyshev por medio de la ecuación $A|_{dB} = 20 \log \epsilon + 20 \log C_n(\omega/\omega_c)$, donde A es la atenuación en decibels y $C_n(x)$ son los polinomios cosenoidales de Chebyshev, los cuales siguen la recurrencia

DISEÑO DE FILTROS DIGITLES

$$C_n(x) = 2x C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x), \quad \text{con } C_0(x) = 1; \quad C_1(x) = x; \quad C_2(x) = 2x^2 - 1$$

4. Encontrar el valor del parámetro β_k por medio de la ecuación $\beta_k = (1/n) \operatorname{Senh}^{-1} (1/\epsilon)$

5. Obtener los polos de la función de transferencia $H(s)$ por medio de la expresión:

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k, \quad \text{donde}$$

$$\sigma_k = \left[\operatorname{Tgh} \beta_k \operatorname{sen} \left(\frac{2k-1}{n} \right) \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{Ch} \beta_k; \quad \omega_k = \left[\cos \left(\frac{2k-1}{n} \right) \frac{\pi}{2} \right] \operatorname{Ch} \beta_k$$

con $k = 1, 2, \dots, 2n$

6) Reemplazar $s = \frac{1 - z^{-1}}{K_L(1 + z^{-1})}$ en la función transferencia $H(s)$, y operar algebraicamente para expresar $H(z^{-1})$ como cociente de polinomios. Este es el filtro digital deseado.

Diseño de un filtro digital pasabanda o Atenuador de Banda

1. Determinar la frecuencia central $\omega_{do}T$ para el filtro digital. Esta puede estar dada por las especificaciones, o puede elegirse de manera de simplificar el cálculo de otros parámetros.
2. Luego obtener las frecuencias críticas del filtro analógico a partir de las frecuencias críticas dadas en las especificaciones del filtro digital, usando la ecuación

$$\omega_a = \frac{\cos \omega_{do}T - \cos \omega_dT}{\operatorname{sen} \omega_dT} \quad \text{para el filtro pasabanda}$$

$$\omega_a = \frac{\operatorname{sen} \omega_dT}{\cos \omega_dT - \cos \omega_{do}T} \quad \text{para el filtro atenuador de banda}$$

3. Utilizando las ecuaciones de diseño dadas anteriormente, obtener un filtro analógico pasabajos normalizado $H(s)$ de la variedad Butterworth o Chebyshev, según se desee.

4. Reemplazar $s = \frac{1 - 2(\cos \omega_{do}T)z^{-1} + z^{-2}}{K_B(1 - z^{-2})}$ para obtener un filtro digital pasabanda, o:

$$s = \frac{K_B(1 - z^{-2})}{1 - 2(\cos \omega_{do}T)z^{-1} + z^{-2}} \quad \text{para el atenuador de banda, con } K_B = \operatorname{tg} \frac{\omega_{d2} - \omega_{d1}}{2} T,$$

en la función transferencia $H(s)$, y operar algebraicamente para expresar $H(z^{-1})$ como un cociente de polinomios. Este es el filtro digital requerido.