

# **Sistema de Transmisión AM con Codificación DTMF**

Informe de Trabajo Integrador



**Procesamiento Digital de Señales**

**Ingeniería en Computación**

**Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología**

**Universidad Nacional de Tucumán**

**Autores:**

Boeri, Benjamin  
Campero, Leandro  
Villafañe, Cristian

7 de julio de 2023

## **Resumen**

El procesamiento digital de señales se refiere a la manipulación, análisis y transformación de señales utilizando algoritmos y técnicas computacionales. En este proyecto, el procesamiento digital de señales se aplica para generar y decodificar los tonos DTMF, así como para simular la transmisión y detección de los dígitos enviados.

Este proyecto presenta la implementación de un sistema de Modulación en Amplitud (AM) y Codificación DTMF utilizando MATLAB/SIMULINK. Se busca transmitir dígitos numéricos codificados en DTMF a través de un enlace cableado simulado. El sistema involucra la generación de tonos DTMF, el diseño de filtros digitales pasa bandas para el decodificador, la configuración de la frecuencia de portadora RF y la modelización del canal de transmisión como un filtro analógico pasa banda.

Un filtro digital es un componente esencial en el procesamiento digital de señales que permite modificar las características de una señal. En este proyecto, se utilizan filtros digitales pasa bandas implementados mediante la técnica del filtro Butterworth. Estos filtros permiten seleccionar y aislar las frecuencias específicas asociadas a los tonos DTMF.

La implementación de los filtros digitales se logra mediante la transformación de los coeficientes del filtro en una representación numérica que se aplica a la señal de entrada. Esto puede lograrse utilizando algoritmos y técnicas de programación, así como también herramientas como MATLAB y SIMULINK.

El resultado de este proyecto demuestra la viabilidad y efectividad de la implementación del sistema propuesto. El procesamiento digital de señales y el uso de filtros digitales son fundamentales en diversas aplicaciones, incluyendo las comunicaciones y el procesamiento de señales de audio.

En resumen, este proyecto combina el procesamiento digital de señales, la modulación AM, el diseño de filtros digitales y la codificación DTMF para lograr la transmisión y detección de dígitos numéricos. La implementación exitosa de este sistema contribuye al avance y comprensión de las técnicas de procesamiento y transmisión de señales en el ámbito de las comunicaciones.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Problema propuesto . . . . .	3
1.2. Objetivo . . . . .	3
1.3. Enunciado . . . . .	4
1.4. Lineamientos Generales . . . . .	4
<b>2. Planteamiento</b>	<b>6</b>
2.1. Sistema . . . . .	6
2.2. Decodificación . . . . .	7
2.3. Simulación . . . . .	7
<b>3. Filtros Digitales</b>	<b>9</b>
3.1. Diseño . . . . .	10
3.2. Conversión a digital . . . . .	12
3.3. Análisis . . . . .	12
3.4. Conclusiones . . . . .	12
<b>4. Desarrollo</b>	<b>13</b>
4.1. Análisis . . . . .	13
4.2. Diseño . . . . .	14
4.3. Especificaciones . . . . .	14
4.4. Prototipo . . . . .	15
<b>5. Conclusiones</b>	<b>18</b>
5.1. Resultados . . . . .	18
5.2. Aplicaciones . . . . .	18
5.3. Problemas en la práctica . . . . .	18
<b>Bibliografía</b>	<b>19</b>
<b>Siglas</b>	<b>20</b>

<b>Índice de figuras</b>	<b>21</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>22</b>
<b>Índice de bloques de código fuente</b>	<b>23</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Problema propuesto

La modulación en amplitud o Amplitud Modulada (AM), permite la transmisión de una señal de baja frecuencia superpuesta a una onda de alta frecuencia. Este sistema de modulación permite enviar mensajes en la forma de envoltorios de la onda portadora, ya sea por un canal de aire o físico utilizando un enlace cableado.

El sistema de codificación Doble Tonos Múltiples Frecuencias (DTFM), utiliza una combinación de tonos de frecuencia audibles para representar el conjunto de números del 0 al 9 disponible en el teclado telefónico, con lo cual es posible enviar una codificación numérica por la línea telefónica.

El modelo de trabajo está representado en la Figura 1.1, correspondientes al Modulador y Demodulador AM, el canal de cable telefónico, y las etapas de codificación y decodificación DTFM.

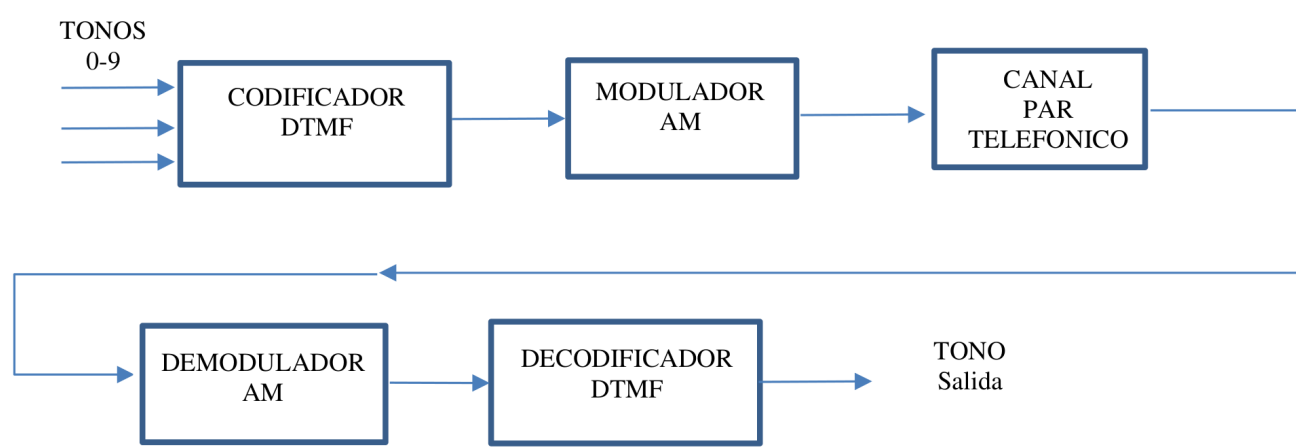


Figura 1.1: Diagrama de bloques general

### 1.2. Objetivo

El objetivo principal de este proyecto integrador es la implementación del sistema mostrado en la Figura 1.1, utilizando MATLAB, SIMULINK, o la combinación de ambos recursos de modelado computacional, para el envío de números (0-9) codificados en DTFM bajo modulación AM, y la detección del número enviado a la salida (uno número cada por vez).

A modo de referencia, el Cuadro 1.1, muestra la combinación de tonos audibles asociados al conjunto numérico, y en el enlace indicado se encuentra la información ampliada sobre la codificación DTFM.

Frecuencia Baja	Frecuencia Alta	Digito	Frecuencia Final
697	1209	1	1906
697	1336	2	2033
697	1477	3	2174
770	1209	4	1979
770	1336	5	2106
770	1477	6	2247
852	1209	7	2061
852	1336	8	2188
852	1477	9	2329
941	1336	0	2277

Cuadro 1.1: Combinación de tonos audibles (medido en [Hz])

### 1.3. Enunciado

- A nivel simulación se deberán sintetizar los tonos asociados a cada dígito numérico seleccionando una Frecuencia de Muestreo ( $f_s$ ) apropiada (Teorema de Nyquist-Shannon).
- El demodulador DTFM deberá ser implementado mediante filtros digitales pasa bandas, con un orden y respuestas apropiadas. El modo de indicar cuál fue el dígito enviado queda a criterio del grupo de trabajo.
- Para el modelo de transmisión AM (enlace cableado) se deberán establecer y sintetizar la frecuencia de portadora  $RF$  el índice de modulación apropiados (recordando que  $f_s$  es única en todo el sistema).
- El canal de transmisión se corresponde al de un filtro analógico (transformado a digital) pasa banda con un rango de 300 Hz a 3400 Hz, respuesta plana y orden apropiado. Se considera el rango útil asignado a la frecuencia telefónica, aunque el cable telefónico de cobre tipo AWG-24, por ejemplo, supera este ancho de banda a 1Mz en distancias inferiores a 200 Mts.

### 1.4. Lineamientos Generales

- El grupo de trabajo deberá cumplir con las especificaciones del proyecto, utilizando criterios de diseños justificados para cada bloque del sistema.
- Se deberán indicar el paso a paso para el diseño de los filtros digitales utilizados en las diferentes etapas.
- El criterio de selección para el filtro analógico representativo del canal ( Bessel, Butterworth, etc.), y el método de transformación analógico a discreto escogido, brindando una gráfica comparativa de la respuesta en frecuencia resultantes en ambos planos (Laplace y Z).

- d) Se pide 3 aplicaciones posibles del sistema desarrollado en aplicaciones de tele comando (por ejemplo, aplicación de sistema de riego por comando telefónico de 3 zonas), y como se imprimiría en la práctica (no el desarrollo, solo la propuesta).
- e) Problema de análisis: para el caso de que ocurran fallos en el canal de comunicación (por ejemplo, una atenuación en determinadas frecuencias), analizar la robustez del código detector para al menos 3 zonas atenuadas de frecuencias diferentes. Utilizar el código adjunto en Matlab para el diseño del canal con fallas. Justificar los resultados.
- f) Escribir el informe, Incluir conclusiones, observaciones y sugerencias sobre los resultados obtenidos

## Capítulo 2

# Planteamiento

### 2.1. Sistema

Lo que se busca es simular un sistema DTFM cuya señal se transmite a través de un canal telefónico con modulación AM. Tal simulación debe comprender cada uno de los bloques intervinientes en el sistema, como se muestra en la Figura 2.1. Antes de diseñar y planificar la simulación hay que tener en cuenta las frecuencias intervinientes, particularmente hablando de la Frecuencia de Portadora ( $f_p$ ) (que determina la frecuencia de la señal a ser modulada en la transmisión) y la  $f_s$  (que determina la cantidad de muestras por segundo para la simulación).

Ya que esta simulación trata de la transmisión en AM a través de un canal telefónico, podemos tomar una  $f_s$  utilizada universalmente en sistemas de audio, y esta equivale a 44 [kHz], y podemos ver que claramente cumple con el Teorema de Nyquist-Shannon ya que es mayor al doble de la señal de mayor frecuencia (1477 [Hz], componente alta de los dígitos 3, 6 y 9). Para la  $f_p$  tomamos 15 [kHz] ya que es 10 veces mayor a la señal antes mencionada y es menor a la mitad de  $f_s$  (para poder seguir cumpliendo con el teorema).

A continuación enumeramos el tratamiento de la señal en cada bloque del sistema:

1. Codificador DTMF: Se suman las señales sinusoidales correspondientes a las frecuencias que componen cada dígito
2. Modulador AM: Se modula la señal portadora con la señal codificada
3. Cable Telefónico: La señal modulada pasa por un filtro pasa-banda para simular el canal de voz [300-3300][Hz]
4. Demodulador AM: Se bate la señal recibida con la misma portadora para obtener la moduladora
5. Decodificador DTMF: La señal pasa por un banco de filtros pasa-banda para determinar qué señales de la matriz fueron enviadas

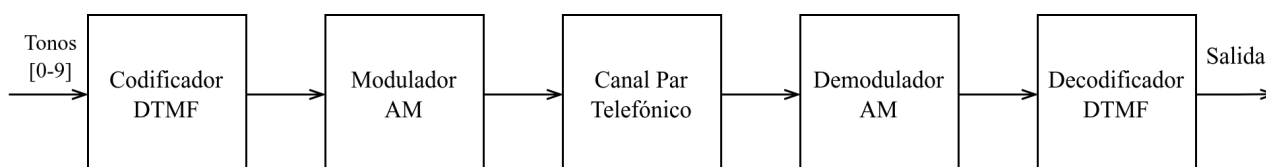


Figura 2.1: Diagrama de bloques a simular



## 2.2. Decodificación

Para decodificar la señal del tono se tiene que implementar un banco de filtros en base a la matriz de señales del sistema DTFM. Esto es, las filas se corresponden con las frecuencias bajas y las columnas con las frecuencias altas. La sumatoria de las señales se corresponde con la codificación del tono propuesto; esta señal llega a la matriz para devolver el tono correspondiente. El bloque decodificador se compone de filtros pasa-banda para cada frecuencia y el bloque detector como muestra la Figura 2.2. La razón de usar un filtro para cada frecuencia baja y alta, en lugar de un filtro por cada frecuencia resultante, se debe a que de esta forma usamos 7 filtros en lugar de 9 (uno por cada tono); además, estas frecuencias (altas y bajas) están más separadas en el espectro que las frecuencias resultantes, lo cual es provechoso a la hora de diseñar un filtro.

La matriz será un bloque lógico que devolverá el dígito correspondiente en base a las señales que hayan logrado activarse luego pasar por el banco de filtros.

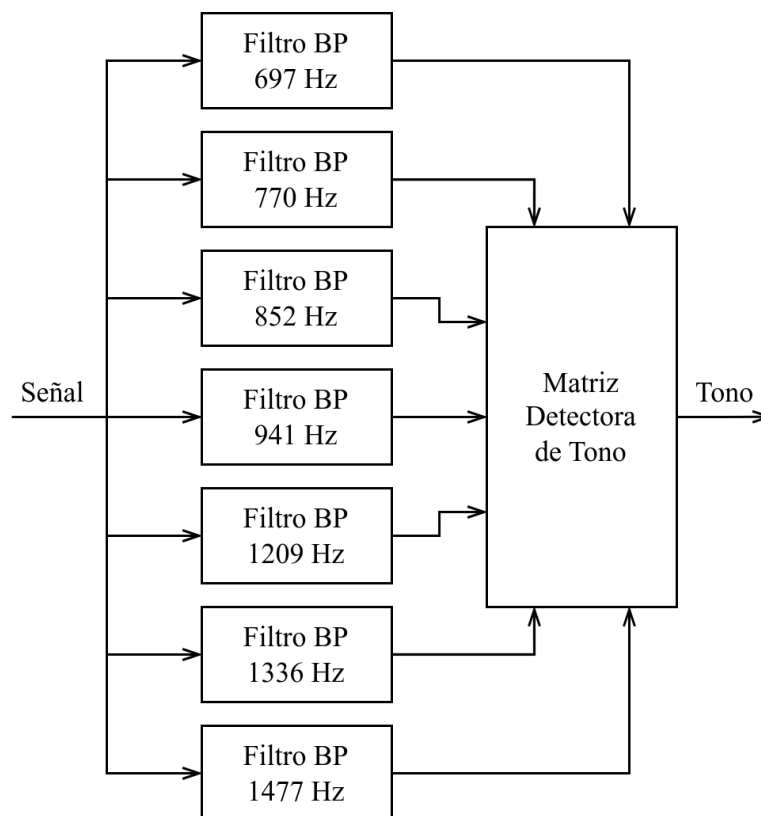


Figura 2.2: Composición del bloque decodificador

## 2.3. Simulación

La simulación de este sistema, que es el objetivo de este proyecto, se logrará a través del uso de distintas herramientas dentro del software MATLAB. Estas herramientas son fdatool (para diseñar cada filtro del banco) y simulink (para realizar el estudio en el tiempo y frecuencia de las señales a través de cada bloque del sistema).

Cada señal de entrada al sistema será simulada a través de generadores de sinusoidales, mientras que los filtros serán bloques que actúen en base a polinomios obtenidos anteriormente de fdatool. El resto

de las herramientas serán provistas por simulink (sumadores, multiplicadores, analizadores de espectro, etc.)

La razón de usar una herramienta para el diseño de los filtros es que estos se presumen de alto orden, lo cual es engorroso de calcular de manera analítica. Sin embargo, con el objetivo de comprender cómo es el diseño de filtros digitales, se explicará en el siguiente capítulo cómo es el proceso de diseño y análisis correspondiente.

## Capítulo 3

# Filtros Digitales

En este capítulo veremos como es el diseño de un filtro digital a partir de uno analógico, y para ello utilizaremos lo que se conoce como **Transformación Bilineal**. Esta transformación mapea el plano complejo del dominio de frecuencia analógico al dominio de frecuencia digital utilizando una relación no lineal.

Es importante tener en cuenta que la transformación bilineal introduce distorsiones en la respuesta en frecuencia del filtro analógico original al convertirlo en un filtro digital, como se muestra en la Figura 3.1. Estas distorsiones son inevitables debido a la naturaleza no lineal de la transformación. Sin embargo, en muchos casos, estas distorsiones son aceptables y se pueden compensar mediante técnicas de diseño adicionales. Una de estas técnicas es el **Pre-Warping**.

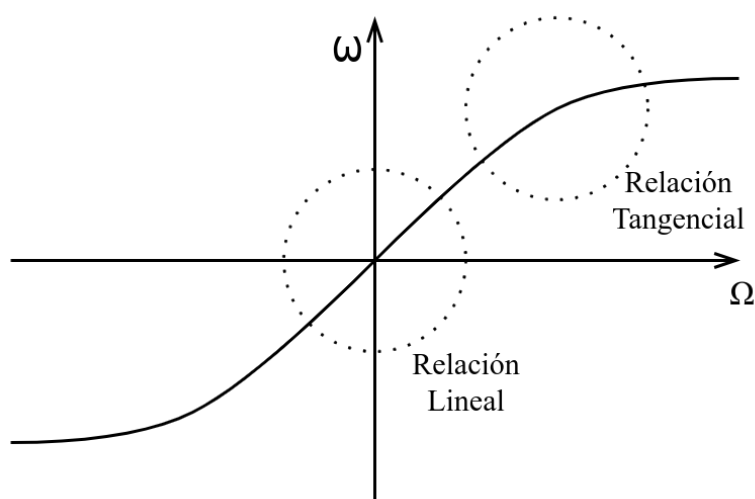


Figura 3.1: Distorsión de frecuencia introducida por la Transformación Bilineal

El pre-warping es un ajuste realizado a la frecuencia de corte del filtro analógico antes de aplicar la transformación. Se hace con el fin de compensar la distorsión introducida por la transformación bilineal en las frecuencias más altas, esto es debido a la no linealidad de la función tangente utilizada en la transformación.

El pre-warping ajusta la frecuencia de corte del filtro analógico antes de aplicar la transformación bilineal para compensar esta distorsión. Se utiliza una función que aproxima la inversa de la función tangente hiperbólica para ajustar la frecuencia de corte en el dominio analógico.

Para más información acerca de la Transformación Bilineal se pueden consultar en las siguientes bibliografías: [PM96], [OS89] y [OS99].

### 3.1. Diseño

Primero, se diseña el filtro analógico deseado utilizando un método de diseño como el filtro Butterworth, Chebyshev o el filtro elíptico. En este caso usaremos el filtro Butterworth. Este se caracteriza por tener una respuesta en frecuencia lo más plana y suave posible en la banda de paso, lo que significa que atenúa las frecuencias no deseadas de manera gradual y sin oscilaciones abruptas.

El filtro de Butterworth más típico es el filtro pasa bajo de primer orden, el cual puede ser modificado a un filtro pasa alto o añadir en serie otros formando un filtro pasa banda o elimina banda y filtros de mayores órdenes; esta composición de filtros es la que se busca, como describe la Figura 3.2. Este filtro será el utilizado para demostrar el proceso de diseño.

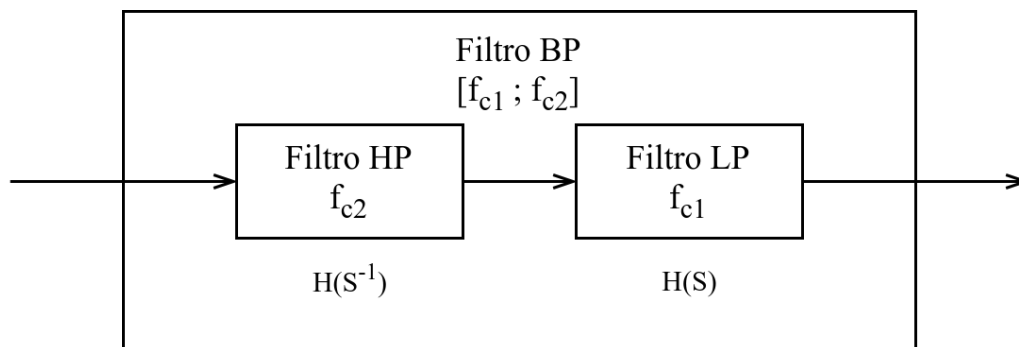


Figura 3.2: Filtro pasa-banda a partir de filtros pasa-alto y pasa-bajo de Butterworth

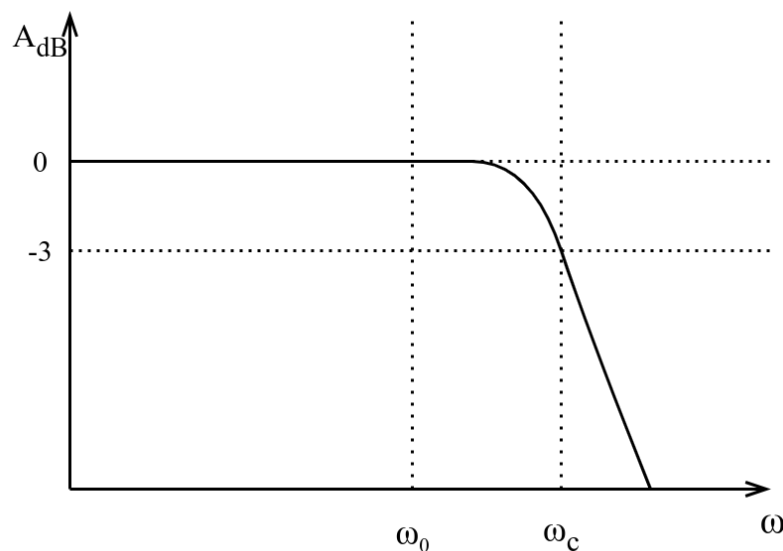


Figura 3.3: Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos

El siguiente paso es elegir las frecuencias con las que va a operar el filtro. Para ello tomamos la frecuencia baja de los dígitos 1, 2 y 3 (ver Cuadro 1.1), que resulta ser la frecuencia más baja del espectro de este dominio. Esta elección no es arbitraria, ya que al ser la frecuencia más baja, podemos usar un filtro pasa-bajos para filtrar el resto de señales que son mayores, como describe la Figura 3.3. Para este caso, la frecuencia de corte será 60 [Hz] por encima de la frecuencia entrante, es decir,  $f_c = f_0 + 60[\text{Hz}] =$

757 [Hz]. Recordemos que para pasar frecuencia angular analógica debemos realizar el pre-warping. Entonces la frecuencia angular de corte analógica está dada por la Ecuación 3.1, donde  $f_s$  es igual a 44 [kHz].

$$\omega_c = 2f_s \tan \frac{\pi f_c}{f_s} = 4761,01 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (3.1)$$

Lo siguiente será encontrar los coeficientes del filtro pasa-bajos Butterworth, y para eso utilizaremos los polinomios normalizados de Butterworth. Los coeficientes de estos polinomios son valores tabulados para filtro de frecuencia de 1 radian por segundo. Para un filtro de primer orden la función transferencia está dada por la Ecuación 3.2. Sin embargo esta función está normalizada, es decir que es un filtro con frecuencia de corte de 1 rad/s. Para poder obtener la función transferencia correcta debemos desnormalizarla, y esto se logra reemplazando  $s$  por  $\frac{s}{\omega_c}$ . En la Ecuación 3.3 obtenemos la función transferencia correcta para una  $\omega_c = 4761,01 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (3.2)$$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (3.3)$$

Con esto sería suficiente si el objetivo fuera diseñar un filtro pasa-bajos, sin embargo se busca es diseñar un filtro pasa-banda, cuya respuesta en frecuencia sea como en la Figura 3.4. Como se puede ver, la parte derecha del gráfico es referente al filtro pasa-bajos, la de la izquierda es del filtro pasa-altos, el cual procedemos a diseñar.

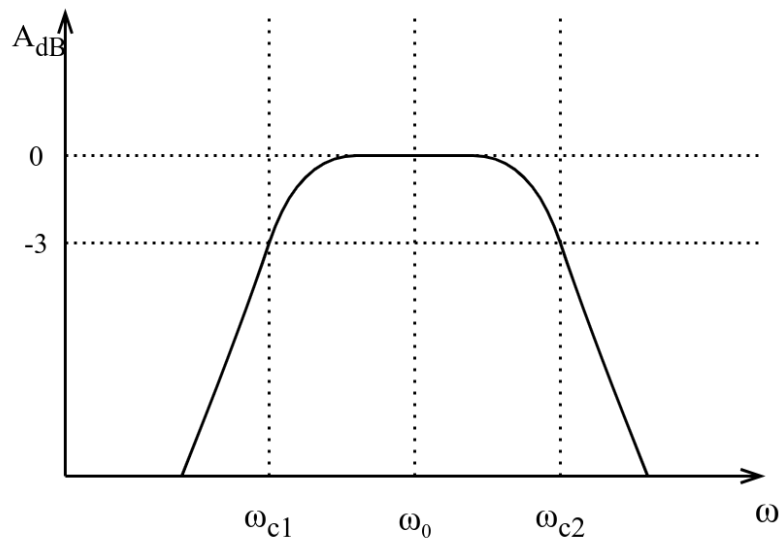


Figura 3.4: Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-banda

Al igual que el filtro pasa-bajos, necesitamos establecer la frecuencia de corte analógica teniendo en cuenta el pre-warping. Como la frecuencia de corte superior es 60 [Hz] por encima de la frecuencia central, análogamente la frecuencia de corte inferior será 60 [Hz] por debajo de la frecuencia central (637 [Hz]). A estas frecuencias angulares de corte analógicas las llamaremos  $\omega_{c1}$  (inferior) y  $\omega_{c2}$  (superior). En la Ecuación 3.4 vemos como se obtiene  $\omega_{c1}$ , luego en la Ecuación 3.5 vemos la forma

de la función transferencia de un filtro pasa-alto normalizado<sup>1</sup>. Para encontrar la función transferencia desnormalizada el procedimiento es similar al del filtro pasa-bajos solo que ahora la frecuencia de corte angular será diferente, como se muestra en la Ecuación 3.6.

$$\omega_{c1} = 2f_s \tan \frac{\pi f_{c1}}{f_s} = 4000,15 \left[ \frac{\text{rad}}{s} \right] \quad (3.4)$$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{s} + 1} = \frac{s}{s + 1} \quad (3.5)$$

$$H(s) = \frac{\frac{s}{\omega_{c1}}}{\frac{s}{\omega_{c1}} + 1} = \frac{s}{s + \omega_{c1}} \quad (3.6)$$

Ahora que tenemos  $H(s)$  para cada filtro podemos calcular la función transferencia del filtro pasa-banda que resulta del producto de ambas  $H(s)$ , como se muestra en la Ecuación 3.11 Al trabajarlo algebraicamente llegamos a la  $H(s)$  del filtro pasa-banda.

$$H(s) = H_{HP}(s)H_{LP}(s) \quad (3.7)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_{c1}} \frac{\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}} \quad (3.8)$$

$$H(s) = \frac{\omega_{c2} s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}} \quad (3.9)$$

$$H(s) = \frac{4761,01 s}{s^2 + 8766,16 s + 19,07 \times 10^6} \quad (3.10)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_{c1}} \frac{\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}} \quad (3.11)$$

## 3.2. Conversión a digital

## 3.3. Análisis

## 3.4. Conclusiones

<sup>1</sup>En el caso de los filtros pasa-altos, no existen una función transferencia determinada, sin embargo podemos calcularlo reemplazando  $s$  por  $\frac{1}{s}$  en la función transferencia del filtro pasa-bajos.

## Capítulo 4

# Desarrollo

### 4.1. Análisis

El análisis de un filtro digital es el proceso de determinar la respuesta de un filtro ante una dada excitación. El presente informe tiene como objetivo documentar los pasos que serán necesarios para realizar el diseño de un filtro digital a partir de un prototipo con determinadas características o especificaciones.

En el contexto de la problemática comentada en el capítulo anterior, disponemos de 10 señales a analizar las cuales se corresponden con los dígitos del 0 al 9. De esto concluimos que se necesitan 10 bandas de paso para filtrar las 10 señales. Dada la cercanía de las frecuencias centrales por dígito (ver Cuadro 1.1) se propone un Ancho de Banda (AB) de 20Hz por frecuencia. De esta forma la distribución bandas de paso queda determinado por el Cuadro 4.1.

Los límites de frecuencia de cada AB corresponden a los puntos de media potencia (0.707) del valor máximo de transferencia. Además, establecemos como criterio de diseño que debe atenuar a 20dB en la banda de transición o paso.

<b>Dígito</b>	$f_{c1}$	$f_0$	$f_{c2}$
1	1896	1906	1916
4	1969	1979	1989
2	2023	2033	2043
7	2051	2061	2071
5	2096	2106	2116
3	2164	2174	2184
8	2178	2188	2198
6	2237	2247	2257
0	2267	2277	2287
9	2319	2329	2339

Cuadro 4.1: Distribución de bandas de paso (medido en [Hz])

## 4.2. Diseño

Para el desarrollo de los filtros pasa banda usaremos el método directo con un filtro prototipo pasabajos Butterworth.

### Método Directo

El método directo, también conocido como método de diseño de coeficientes, es uno de los métodos más simples y directos para diseñar filtros digitales. Este método se basa en la especificación directa de los coeficientes del filtro en función de los parámetros deseados, como la respuesta de frecuencia, la Frecuencia de Corte ( $f_c$ ) y las características de atenuación.

### Filtro Butterworth

El filtro Butterworth es un tipo de filtro digital diseñado utilizando la aproximación de Butterworth, que es una de las aproximaciones clásicas para la respuesta de frecuencia de filtros analógicos y digitales. Se caracteriza por tener una respuesta en frecuencia lo más plana y suave posible en la banda de paso, lo que significa que atenúa las frecuencias no deseadas de manera gradual y sin oscilaciones abruptas.

El filtro de Butterworth más típico es el filtro pasa bajo de primer orden, el cual puede ser modificado a un filtro pasa alto o añadir en serie otros formando un filtro pasa banda o elimina banda y filtros de mayores órdenes.

### Consideraciones

Como podemos observar en el Cuadro 4.1 la región espectral más comprometida es la que corresponde a los dígitos 3 y 8 debido su cercanía en frecuencia, por lo que procederemos a calcular el filtro para el dígito 8. Luego, lo usaremos como base para los demás filtros, ya que si cumple las especificaciones para la región entre frecuencias más cercanas, se cumplirá en las demás frecuencias. Realizamos el cálculo del orden del filtro Butterworth prototipo pasa-bajo. El filtro pasa-banda será el doble del orden calculado para el prototipo pasa-bajos.

## 4.3. Especificaciones

Definimos la  $f_s$  apropiada utilizando el Teorema de Nyquist-Shannon, teniendo en cuenta la banda de frecuencias de interés. La frecuencia máxima del sistema es 2339Hz (banda lateral superior del dígito 9). Entonces el cálculo de  $f_s$  está dado por la siguiente expresión:

$$f_s \geq 2f_{MAX} = 2 \times 2339[\text{Hz}] = 4678[\text{Hz}] \quad (4.1)$$

Por cuestiones de diseño tomamos  $f_s = 5000[\text{Hz}]$ . Además también debemos establecer la Frecuencia de Atenuación o Paso ( $f_a$ ), la cual será 4[Hz] mayor que  $f_c$ . Todos los datos necesarios para el diseño del filtro pasa bajos se detalla en el Cuadro 4.2.



Magnitud	Valor
$f_0$	2188[Hz]
$f_c$	2198[Hz]
$f_a$	2022[Hz]
$f_s$	5000[Hz]
Atenuación	10[dB]

Cuadro 4.2: Características de prototipo de filtro pasa bajos

Ahora necesitamos obtener el orden ( $n$ ) del filtro. A partir de la Ecuación 4.4, podemos despejar  $n$  y obtenemos la Ecuación 4.5. Para poder encontrar el valor de  $n$  primero debemos convertir las frecuencias digitales a analógicas, cuyos resultados son obtenidos de las Ecuaciones 4.2 e 4.3.

$$\omega_{aA} = 2f_s \tan \frac{2\pi f_a}{2f_s} = 52066,281 \text{ [rad/s]} \quad (4.2)$$

$$\omega_{cA} = 2f_s \tan \frac{2\pi f_c}{2f_s} = 52782,106 \text{ [rad/s]} \quad (4.3)$$

$$A_{dB} = 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega_{aA}}{\omega_{cA}} \right)^{2n} \right] \quad (4.4)$$

$$n = \frac{1}{2} \frac{\log \left( 10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 \right)}{\log \left( \frac{\omega_{cA}}{\omega_{aA}} \right)} = 80,457 \approx 81 \quad (4.5)$$

Como se puede observar en el resultado de la Ecuación 4.5, el orden es de aproximadamente 81 (porque tiene que ser un número entero positivo). Dado el alto orden que tiene este filtro, el cálculo analítico de los valores se hace sumamente complejo, debido a este problema procederemos a realizar de manera ilustrativa el cálculo para un filtro de **orden 2**.

#### 4.4. Prototipo

Para el desarrollo analítico del prototipo consideraremos un filtro pasa-bajos de orden 2 (justificado en la sección anterior). Las frecuencias involucradas se describen en el Cuadro 4.2. Como se trata un filtro Butterworth, los polos estables se encontrarán distribuidos sobre el círculo de Butterworth (círculo unitario). Aquellos valores que se encuentren por fuera del mismo, serán los polos inestables. Para este análisis solo consideraremos los estables. Por otro lado, obtendremos los ceros ubicados en  $z = -1$  como se muestra en la Figura 4.1.

Para obtener los polos correspondientes al plano  $z$  utilizamos la función transferencia, de ella obtenemos la ecuación para obtener los polos (usando la Ecuación 4.6 para obtener las partes reales, y la Ecuación 4.7 para las partes imaginarias).

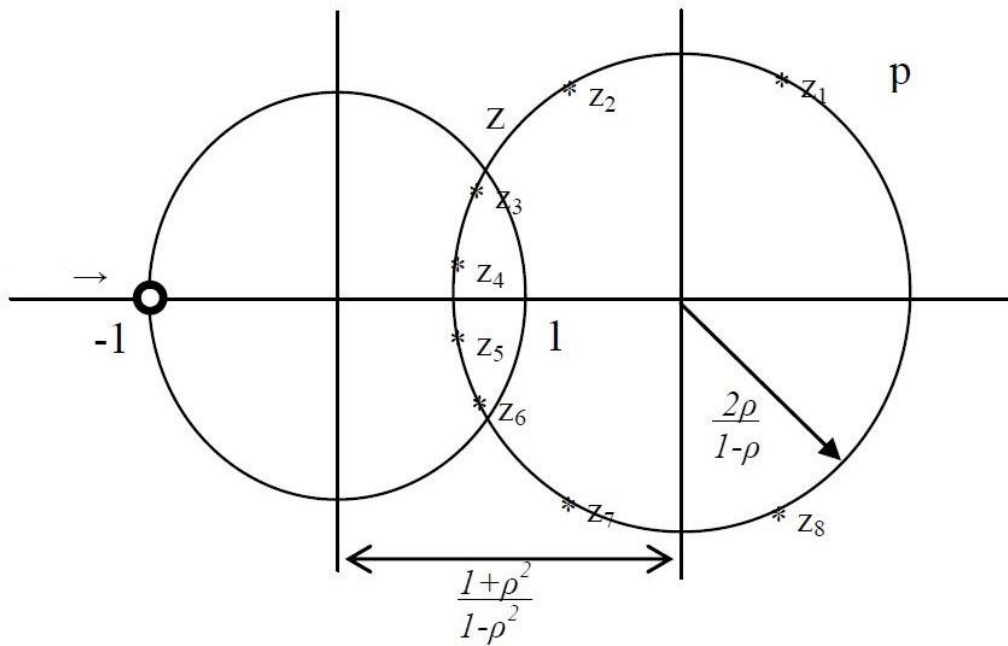


Figura 4.1: Diagrama de Polos y Ceros

$$u_m = \frac{1 - \tan^2 \left( \frac{\omega_c T}{2} \right)}{1 - 2 \tan \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \cos \left( \frac{2m+1}{2n} \pi \right) + \tan^2 \left( \frac{\omega_c T}{2} \right)} \quad (4.6)$$

$$v_m = \frac{2 \tan \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \sin \left( \frac{2m+1}{2n} \pi \right)}{1 - 2 \tan \left( \frac{\omega_c T}{2} \right) \cos \left( \frac{2m+1}{2n} \pi \right) + \tan^2 \left( \frac{\omega_c T}{2} \right)} \quad (4.7)$$

$m$	$u_m$	$v_m$	<b>Modulo</b>	<b>Argumento</b>
0	-1,259	0,355i	1,308	2,867
1	-0,736	0,208i	0,765	2,866
2	-0,736	-0,208i	0,765	-2,866
3	-1,259	-0,355i	1,308	-2,867

Cuadro 4.3: Polos del filtro prototipo

Luego para  $m = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , se obtienen 4 polos (ver Cuadro 4.3). Del resultado, se puede ver que los polos 0 y 3 se encuentran fuera del círculo unitario, entonces vamos a considerar los polos 1 y 2 para armar la función transferencia del filtro prototipo.

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-p_1)(z-p_2)} \quad (4.8)$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2u_1z + u_1^2 + v_1^2} \quad (4.9)$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 + 1,472z + 0,585} \quad (4.10)$$

Para trabajar en el plano de  $z^{-1}$  se multiplica y divide la expresión por  $z^{-2}$ . Luego obtenemos la Ecuación 4.11 la cual nos indica los coeficientes de la función transferencia.

$$H(z^{-1}) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1,472z^{-1} + 0,585z^{-2}} \quad (4.11)$$

A partir de los coeficientes del polinomio anterior podemos graficar respuesta en frecuencia del filtro utilizando el Código 4.1 en MATLAB. La función que calcula la respuesta en frecuencia es: `freqz (N, D)`, donde `N` son los coeficientes del numerador, y `D` son los coeficientes del denominador. El resultado se puede apreciar en la Figura 4.2.

```

1 num=[1 2 1];
2 den=[1 1.472 0.585];
3 [h,w]=freqz(num,den);
4 plot (w*2500/pi, abs(h)/max(abs(h))) % 2500 representa la máxima frecuencia
5 title('Gráfica del filtro prototipo')
6 xlabel ('Frecuencia'), ylabel ('Amplitud'), grid on
7
8 x = abs(h)
```

Código fuente 4.1: Graficar respuesta en frecuencia

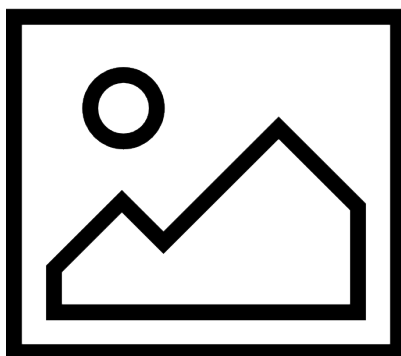


Figura 4.2: Respuesta en frecuencia del filtro

## Capítulo 5

# Conclusiones

### 5.1. Resultados

Aquí explicas tu metodología de investigación.

### 5.2. Aplicaciones

### 5.3. Problemas en la práctica

# Bibliografía

- [OS89] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1989.
- [OS99] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [PM96] John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

# Siglas

$f_a$  Frecuencia de Atenuación o Paso. 9, 10

$f_c$  Frecuencia de Corte. 9, 10

$f_p$  Frecuencia de Portadora. 6

$f_s$  Frecuencia de Muestreo. 4, 6, 9, 10

**AB** Ancho de Banda. 8

**AM** Amplitud Modulada. 3, 6, 7

**DTFM** Doble Tonos Múltiples Frecuencias. 3, 4, 6

# Índice de figuras

1.1. Diagrama de bloques general . . . . .	3
2.1. Diagrama de bloques a simular . . . . .	6
2.2. Composición del bloque decodificador . . . . .	7
3.1. Distorsión de frecuencia introducida por la Transformación Bilineal . . . . .	9
3.2. Filtro pasa-banda a partir de filtros pasa-alto y pasa-bajo de Butterworth . . . . .	10
3.3. Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajos . . . . .	10
3.4. Respuesta en frecuencia de un filtro pasa-banda . . . . .	11
4.1. Diagrama de Polos y Ceros . . . . .	16
4.2. Respuesta en frecuencia del filtro . . . . .	17

# Índice de cuadros

1.1. Combinación de tonos audibles (medido en [Hz]) . . . . .	4
4.1. Distribución de bandas de paso (medido en [Hz]) . . . . .	13
4.2. Características de prototipo de filtro pasa bajos . . . . .	15
4.3. Polos del filtro prototipo . . . . .	16



# Índice de bloques de código fuente

4.1. Graficar respuesta en frecuencia . . . . .	17
---	----