

Construcción de un banco de filtros digitales para notas musicales

PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

Pablo Leonel Páez Costilla

Paula María Fernández

INDICE

1. INTRODUCCIÓN
2. DESARROLLO
 - 2.1 DISEÑO DEL FILTRO PROTOTIPO PASABAJOS
 - 2.2 OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA BANDA
 - 2.3 ESTRUCTURA DE REALIZACIÓN PROPUESTA
 - 2.4 RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL PASABANDA
 - 2.5 RESPUESTA TEMPORAL DEL PASABANDA
 - 2.6 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER
 - 2.6.1 $N=16$
 - 2.6.2 $N=32$
 - 2.6.3 $N=6$
 - 2.7 USO DE LA HERRAMIENTA FDATAOL
 - 2.7.1 NOTA DO
 - 2.7.2 NOTA RE
 - 2.7.3 NOTA MI
 - 2.7.4 NOTA FA
 - 2.7.5 NOTA SOL
 - 2.7.6 NOTA LA
 - 2.7.7 NOTA SI
 - 2.8 VERIFICACIÓN DEL DISEÑO MEDIANTE SIMULINK
3. EFECTO DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO EN EL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS
4. CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN

Los filtros son herramientas muy útiles para el procesamiento digital de señales (PDS). Sirven principalmente para separar señales y restaurar. Podemos diferenciar dos grandes tipos: analógicos y digitales. Remarcando algunas diferencias, los filtros analógicos son más rápidos mientras que los digitales presentan mucho mejor desempeño.

Los filtros digitales son sistemas lineales e invariantes en el tiempo que permiten el paso de las componentes de la señal existentes en un determinado intervalo de frecuencia, y elimina las demás.

OBJETIVOS

Se desea construir un banco de filtros digitales para cubrir un rango de 50 a 150 Hz, destinado a un instrumento utilizado para seleccionar las notas musicales básicas de la primera octava. Para ello se divide el entorno 50 a 150 Hz en 7 bandas angostas muy selectivas centradas en las frecuencias correspondientes a cada nota:

- Do 1: 65,406 Hz (Do# 1: 69,296)
- Re 1: 73,416 Hz (Re# 1: 77,782)
- Mi 1: 82,407 Hz
- Fa 1: 87,307 Hz (Fa# 1: 92,499)
- Sol 1: 97,999 Hz (Sol#1: 103,826)
- La 1: 110 Hz (La# 1: 116,541)
- Si 1: 123,471 Hz

DESARROLLO

DISEÑO DEL FILTRO PROTOTIPO PASABAJOS

Método directo – Butterworth

Para el diseño de filtros digitales partiremos de un filtro prototipo y luego aplicando las transformaciones correspondientes obtendremos el filtro digital con las características deseadas.

La banda de paso define el contenido frecuencial que se desea seleccionar y en el caso ideal, es la zona en la cual las señales no se verán atenuadas por el filtro. Se encuentra delimitada por la frecuencia de corte, que normalmente valdrá uno en el caso que haya sido normalizada. El margen frecuencial que contiene la banda de paso se denomina ancho de banda del filtro, que para el caso de un filtro paso bajo coincide con la frecuencia de corte. La banda suprimida es en el caso ideal la zona en la cual el filtro ya no deja pasar ninguna componente frecuencial. En realidad, la atenuación que ofrece es muy alta pero no llega a ser infinito.

El diseño de todos los filtros pasa bandas se realiza a partir de un único prototipo pasa bajos. Para determinar sus parámetros, se tiene en cuenta la banda que demanda más selectividad en el espectro de trabajo: en este caso de estudio se adopta la nota Mi, ya que presenta el menor margen de frecuencia con respecto a su nota contigua (Fa).

Al comenzar con el diseño se fijan los siguientes parámetros: frecuencia central (f_0), frecuencia de atenuación superior (f_{aD}), frecuencia de corte superior (f_{cD}), frecuencia máxima (f_{max}) y frecuencia de muestreo (f_s).

-La frecuencia máxima en el espectro de trabajo es de 150[Hz].

-Teniendo en cuenta la proximidad de la nota Fa (87,307 Hz) se adopta $f_{cD} = 84$ [Hz] y $f_{aD} = 86$ [Hz].

-Para la frecuencia de muestreo se debe considerar como mínimo el doble de la frecuencia máxima, adoptamos $f_s = 300$ [Hz]. Esto último se concluye del criterio de Nyquist para tener un correcto muestro de la señal y evitar la pérdida de información.

Con esto calcularemos las frecuencias analógicas del prototipo pasa bajos y luego determinaremos el orden fijando un nivel de atenuación deseado.

$$f_0 = 82,407[\text{Hz}]$$

$$f_{max} = 150[\text{Hz}]$$

$$f_{cD} = 84[\text{Hz}]$$

$$f_{aD} = 86[\text{Hz}]$$

$$\omega_{cA} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\omega_{cD} \frac{T}{2}\right) = 725,2754 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_{aA} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\omega_{aD} \frac{T}{2}\right) = 757,0116 \text{ [rad/s]}$$

Considerando una atenuación de 10 dB calculamos el orden.

$$n = \frac{1}{2} \frac{\log\left(10^{At/10} - 1\right)}{\log\left(\frac{\omega_{aA}}{\omega_{cA}}\right)} = 25,65$$

Entonces se obtiene $n = 26$.

Dado que el cálculo de un filtro con esta característica es demasiado complejo y sumado a que el filtro pasa banda final tendrá un orden igual al doble del prototipo, se optó por disminuir el requerimiento de atenuación y de esta manera reducir el orden. De esta manera, tomando una atenuación de 5 dB aproximadamente, el orden del filtro es 9.

Filtro prototipo simplificado para el análisis

El anunciado pide realizar el diseño a través del método directo y del tipo Butterworth. Para el desarrollo analítico del prototipo consideraremos un filtro de orden 2 con la intención de simplificar los cálculos.

- $f_s = 300 \text{ [Hz]}$
- $f_{cD} = 84 \text{ [Hz]}$
- $f_{aD} = 86 \text{ [Hz]}$

Como se trata un filtro Butterworth, los polos estables se encontrarán distribuidos sobre el círculo de Butterworth. Aquellos valores que se encuentren por fuera del mismo, serán los polos inestables. Solo consideraremos los estables. Por otro lado, obtendremos los ceros ubicados en $z = -1$. Esto podemos observarlo en la siguiente imagen:

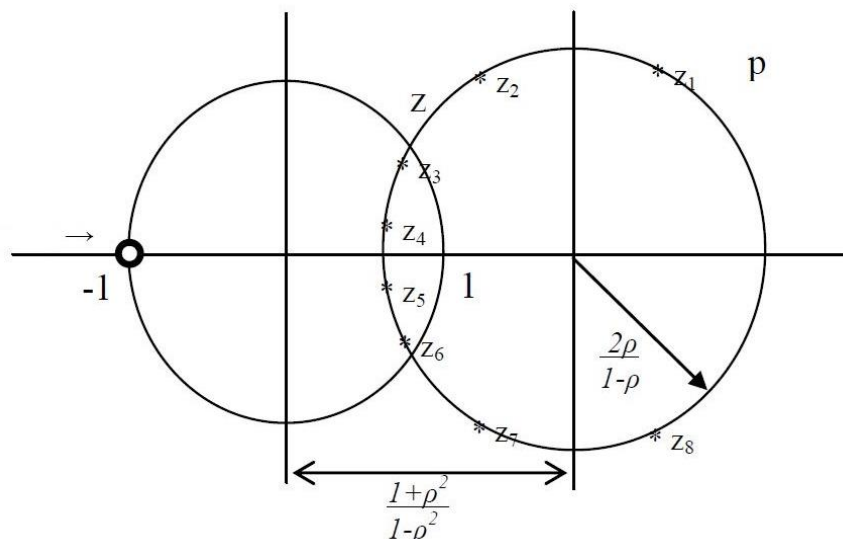


Fig. 1 Ejemplo de diagrama de polos y ceros.

Calculamos los polos de la función de transferencia del filtro:

$$\mu_m = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right)}{1 - 2 \cdot \tan\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right) \cos\left(\frac{2 \cdot m+1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) + \tan^2\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right)}$$

$$v_m = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot m+1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right)}{1 - 2 \cdot \tan\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right) \cos\left(\frac{2 \cdot m+1}{2 \cdot n} \cdot \pi\right) + \tan^2\left(\frac{\omega_{cD}-T}{2}\right)}$$

- $\mu_0 = -0,6135$; $v_0 = 2,2742$
- $\mu_1 = -0,1105$; $v_1 = 0,4098$
- $\mu_2 = -0,1105$; $v_2 = -0,4098$
- $\mu_3 = -0,6135$; $v_3 = -2,2743$

En forma Polar

1. $2,3554 \angle 1,8342$
2. $0,4244 \angle 1,8341$
3. $0,4244 \angle -1,8341$
4. $2,3554 \angle -1,8342$

Los polos 2 y 3 se encuentran fuera del círculo unitario, entonces consideramos solo los polos 1 y 2 para armar la función de transferencia del filtro:

- ✓ $P_1(-0,1105; 0,4098)$
- ✓ $P_2(-0,1105; -0,4098)$

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{(z-P_1) \cdot (z-P_2)} = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 1}{z^2 - 2 \cdot u_1 \cdot z + u_1^2 + v_1^2}$$

$$H(z) = \frac{z^2 + 2 \cdot z + 1}{z^2 + 0,221 \cdot z + 0,1801}$$

Para trabajar en el plano de Z^{-1} se multiplica y divide la expresión por Z^{-2} .

$$H(z^{-1}) = \frac{z^{-2} + 2 \cdot z^{-1} + 1}{1 + 0,221 \cdot z^{-1} + 0,1801 \cdot z^{-2}}$$

En Matlab, la función que calcula la respuesta en frecuencia es: freqz (N,D) ,donde N son los coeficientes del numerador, y D son los coeficientes del denominador

```
%1- GRAFICAR EL FILTRO PROTOTIPO
num=[1 2 1];
den=[1 0.221 0.1801];
[h,w]=freqz(num,den);
plot (w*150/pi, abs(h)/max(abs(h)))
title('Gráfica del filtro prototipo')
xlabel ('Frecuencia'), ylabel ('Amplitud'), grid on
```

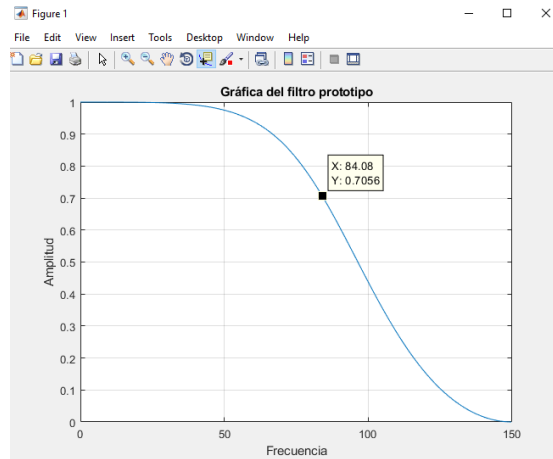


Fig. 2 Respuesta de magnitud del PB prototipo.

OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN TRANSFERENCIA DEL FILTRO PASA BANDA

A partir de la función de transferencia $G(z^{-1})$ de un pasa bajos digital prototipo con frecuencia de corte β , la función de un filtro digital pasa bandas que tenga las mismas características de amplitud, frecuencia centran ω_0 y frecuencia de corte superior e inferior ω_2 y ω_1 se obtiene remplazando Z^{-1} por lo siguiente:

$$z^{-1} = \frac{\frac{k-1}{k+1} - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{k}{k+1} \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{k}{k+1} \cdot z^{-1} + \frac{k-1}{k+1} \cdot z^{-2}}$$

Donde

$$\beta = \omega_{cD}$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot T\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot T\right)}$$

$$k = \cot\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cdot T\right) \cdot \tan\left(\frac{\beta \cdot T}{2}\right)$$

El filtro pasabanda a diseñar tendrá las siguientes especificaciones:

- $\omega_1 = 507,7693 \text{ [rad/s]}$
- $\omega_2 = 527,7875 \text{ [rad/s]}$
- $\alpha = -0,1545$
- $\beta = 527,7875 \text{ [rad/s]}$
- $k = 36,2173$

$$z^{-1} = \frac{0,9462 + 0,3006 \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 + 0,3006 \cdot z^{-1} + 0,9462 \cdot z^{-2}}$$

De esta manera llegamos a la expresión correspondiente al filtro pasa banda digital:

$$H(z^{-1}) = \frac{0,0028 + 0,0057 \cdot z^{-2} + 0,0028 \cdot z^{-4}}{0,9521 + 0,5744 \cdot z^{-1} + 1,901 \cdot z^{-2} + 0,5478 \cdot z^{-3} + 0,8662 \cdot z^{-4}}$$

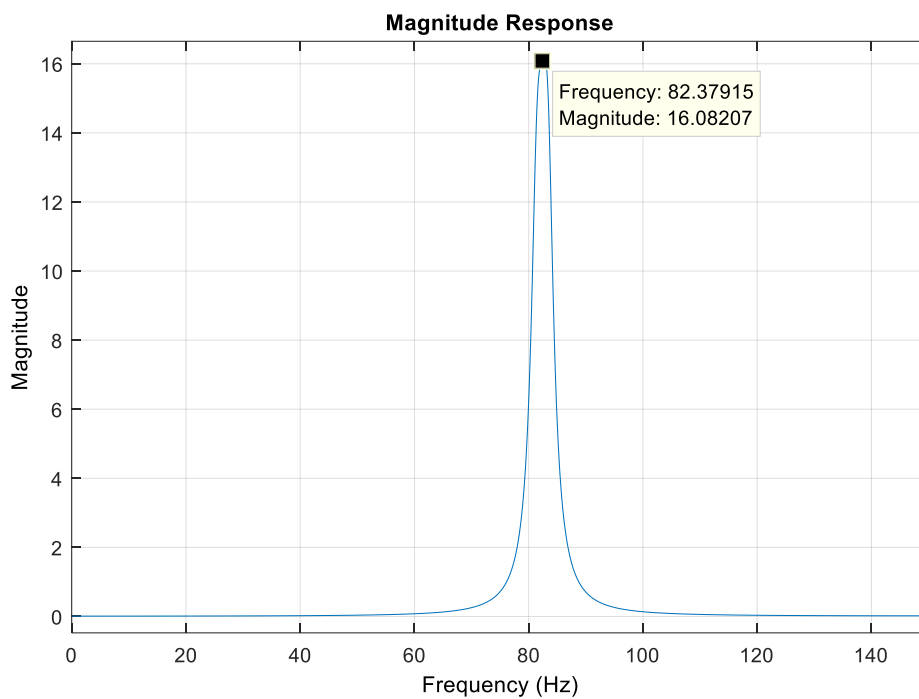


Fig. 3 Respuesta de magnitud pasa banda digital

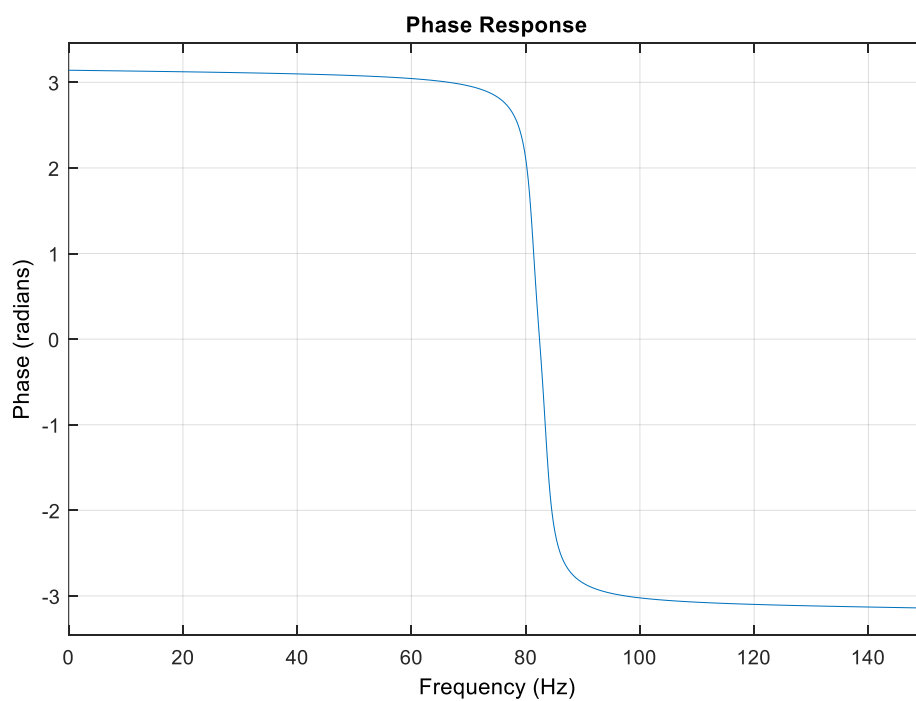


Fig. 4 Respuesta de fase de pasa bandas digital

Se puede observar que la fase es no lineal, en correspondencia con el concepto de un filtro con respuesta al impulso infinita o IIR.

% 2- POLOS Y CEROS DEL PASA BANDA


```
num1=[0.0028 0 -0.057 0 0.0028];
den1=[0.9521 0.5744 1.901 0.5478 0.8662];
fvtool(num1, den1, 'Analysis', 'polezero');
```

```
zeros= roots(num1)
```

```
polos= roots(den1)
```

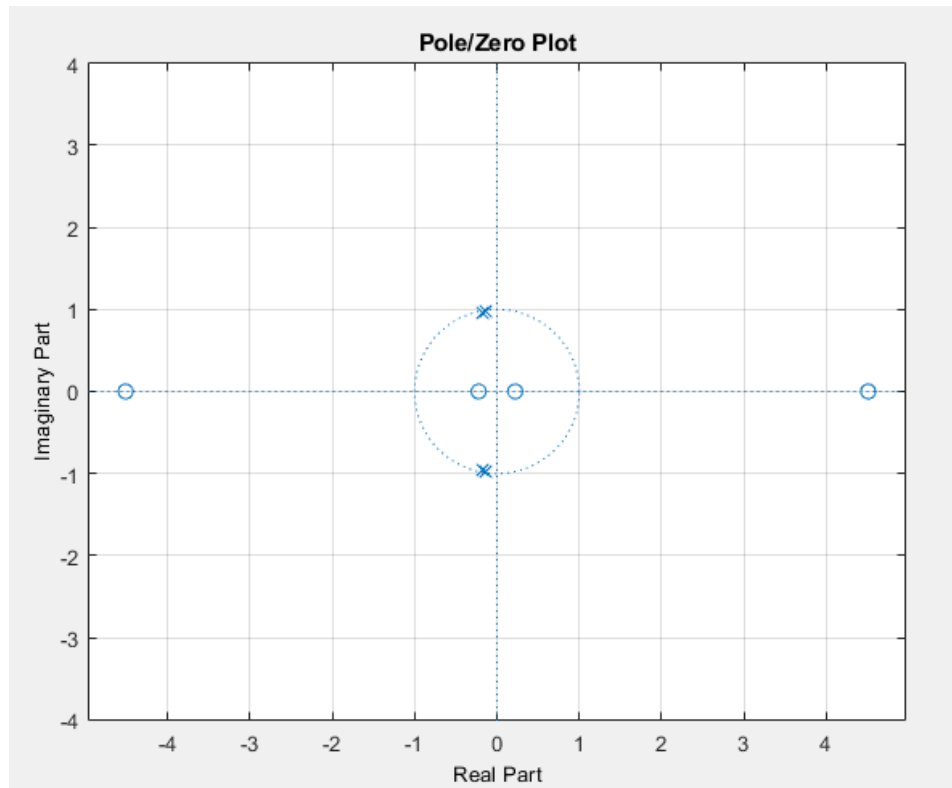


Fig. 5 Diagrama de polos y ceros pasa bandas digital

ESTRUCTURA DE REALIZACIÓN PROPUESTA

La representación de un sistema mediante bloques básicos conectados entre sí se denomina REALIZACIÓN O ESTRUCTURA. Ésta proporciona la relación entre la entrada y salida y algunas variables intermedias necesarias para su implementación.

Usando una implementación basada en un diagrama a bloques tiene varias ventajas:

- Es fácil de escribir el algoritmo computacional por simple inspección del diagrama.
- Es fácil analizar el diagrama a bloques para determinar la relación explícita entre la salida y la entrada.
- Facilidad de manipular el diagrama a bloques para poder derivar otros diagramas a bloques equivalentes que conducen a diferentes algoritmos computacionales.
- Facilidad de determinar los requerimientos de hardware.

- Es mucho más fácil desarrollar una representación de diagramas a bloques directamente de la función de transferencia.

A su vez, una estructura se define como canónica si el número de retardos presentes en el diagrama de bloques dado coincide con el orden del sistema; caso contrario es no canónico.

Se puede observar en la figura a continuación que posee cuatro retardos y, como el orden del filtro pasa banda es cuatro, la realización siguiente es canónica:

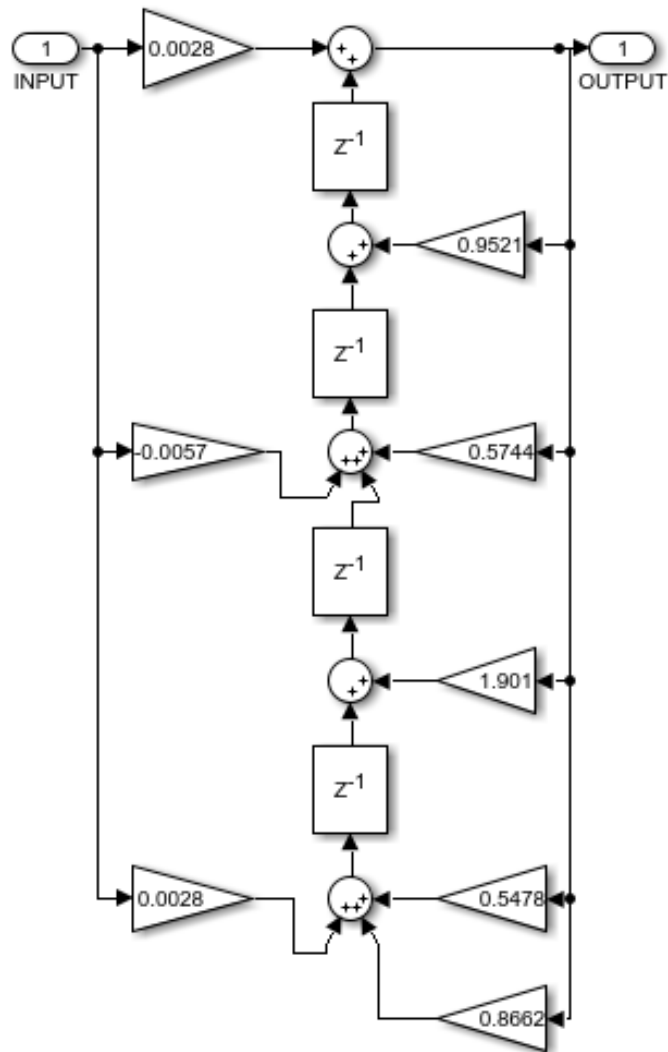


Fig. 6 Estructura de realización pasa bandas digital

RESPUESTA EN FRECUENCIA DEL PASABANDA

```
% 4- RESPUESTA EN FRECUENCIA- AMPLITUD Y FASE- FPASA BANDA
num1=[0.0028 0 -0.057 0 0.0028];
den1=[0.9521 0.5744 1.901 0.5478 0.8662];
[h,w]=freqz(num1,den1);
plot (w*150/pi, abs(h)/max(abs(h)))
title('Gráfica del filtro pasabanda')
xlabel ('Frecuencia'), ylabel ('Amplitud'), grid on
```

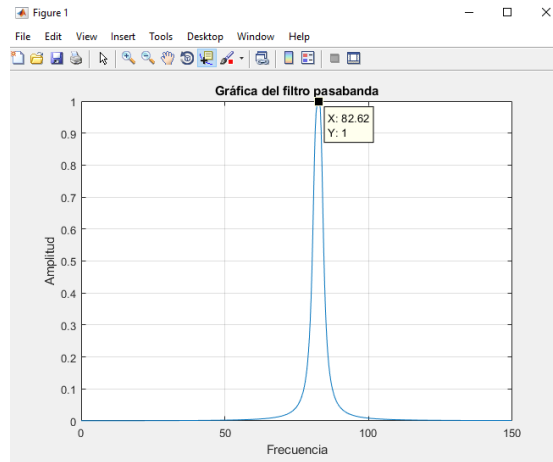


Fig. 7 Respuesta de magnitud con freqz

RESPUESTA TEMPORAL DEL PASABANDA

Al ser un filtro IIR, su respuesta al impulso es infinita, pero por otro lado es un filtro estable, lo que da como resultado una respuesta al impulso decreciente alternada (alterna entre valores positivos y negativos como vemos en el gráfico obtenido).

```
%RESPUESTA TEMPORAL- RESPUESTA AL IMPULSO
fvtool(num1,den1,'Analysis','impulse')
```

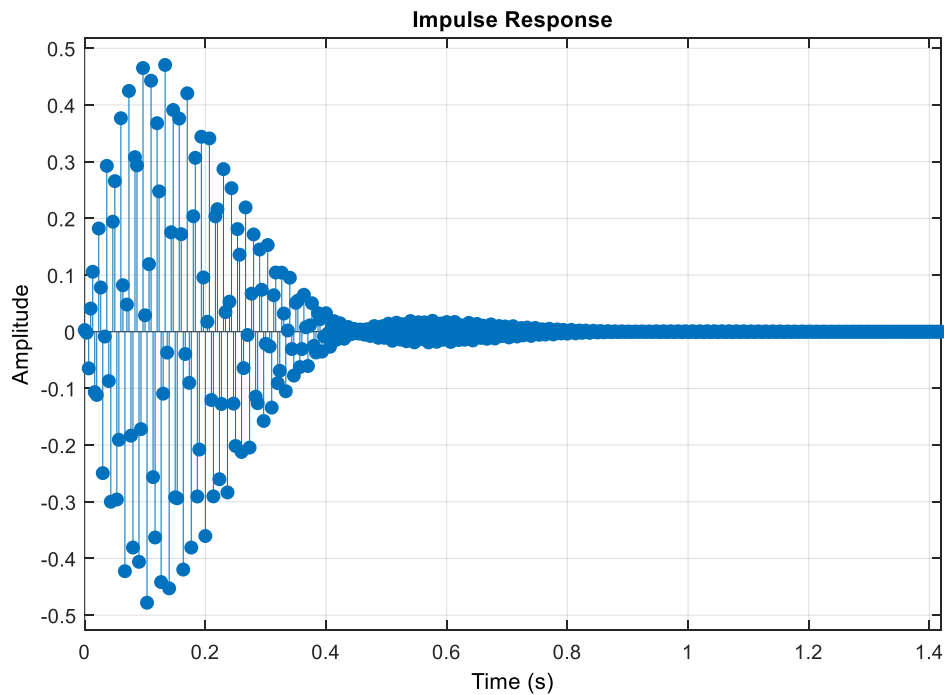


Fig. 8 Respuesta al impulso de pasa banda digital

TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

La transformada rápida de Fourier FFT es un algoritmo que reduce el tiempo de cálculo de n^2 pasos a $n \cdot \log_2(n)$. El único requisito es que el número de puntos en la serie tiene que ser una potencia de 2 (2^n puntos), por ejemplo 32, 1024, 4096, etc.

Trabajando en Matlab.

```
%FFT RESPUESTA AL IMPULSO
```

```
x = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]; %genero la señal impulso  
y = filter(num1,den1,x); %aplico el filtro a la señal x y obtengo la  
señal y
```

```
%N=16
```

```
n = 16; %número de muestras  
fs = 4500;  
f = [-n/2 : n/2-1]*(fs/n); %normalizo el eje para ponerlo en frecuencia  
[h] = fft(y); %calculo la fft de y  
plot(f,abs(h)/max(abs(h))) %grafico la fft
```

```
%N=32
```

```
x2=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];  
y2=filter(num1,den1,x2);  
[h] = fft(y2); %calculo la fft de y  
plot(f,abs(h)/max(abs(h))) %grafico la fft
```

```
n = 32; %número de muestras
```

```
fs = 4500;  
f = [-n/2 : n/2-1]*(fs/n); %normalizo el eje para ponerlo en frecuencia
```

```
%N=64
```

```
n = 64; %número de muestras  
fs = 4500;  
f = [-n/2 : n/2-1]*(fs/n); %normalizo el eje para ponerlo en frecuencia  
[h] = fft(y); %calculo la fft de y  
plot(f,abs(h)/max(abs(h))) %grafico la fft
```

$N=16$

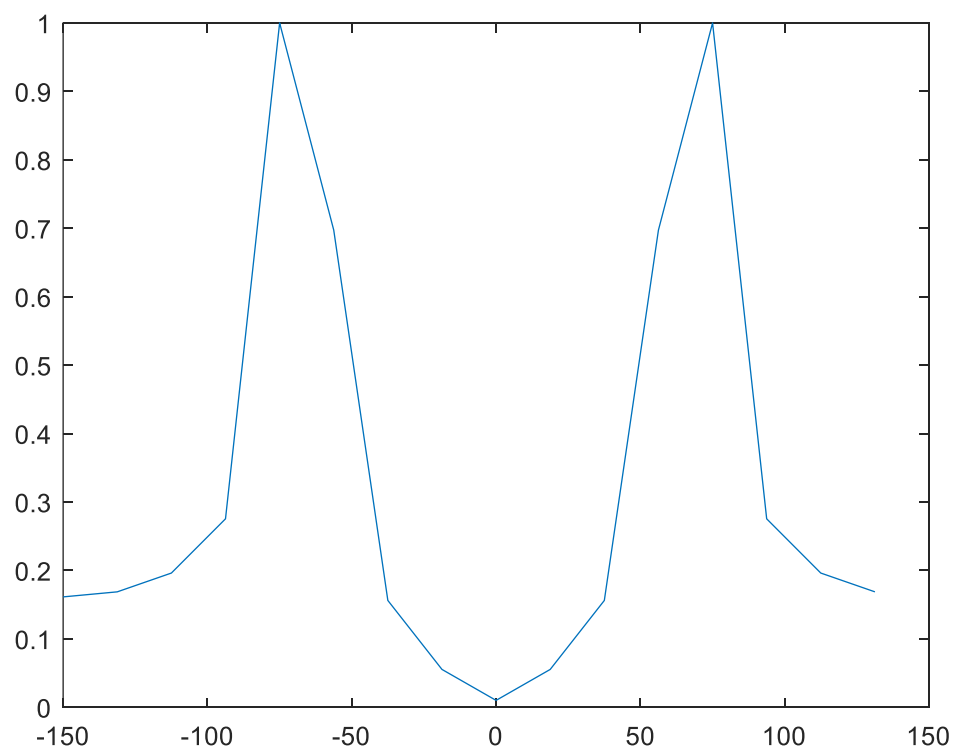


Fig. 9 Transformada de Fourier para $N=16$

$N=32$

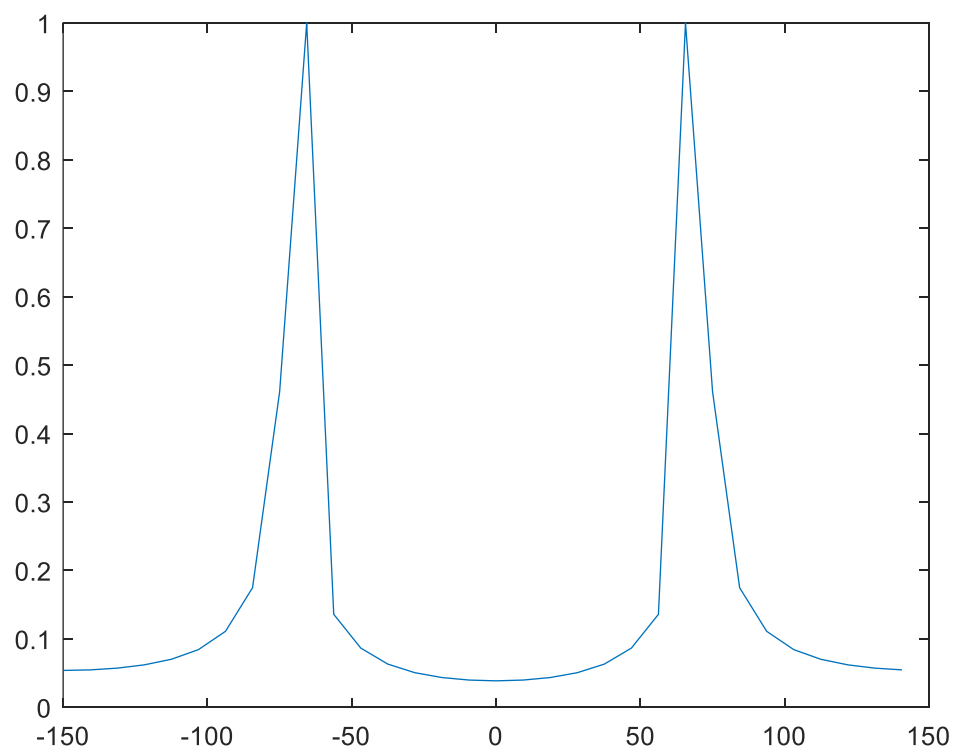


Fig. 10 Transformada de Fourier para $N=32$

$N=64$

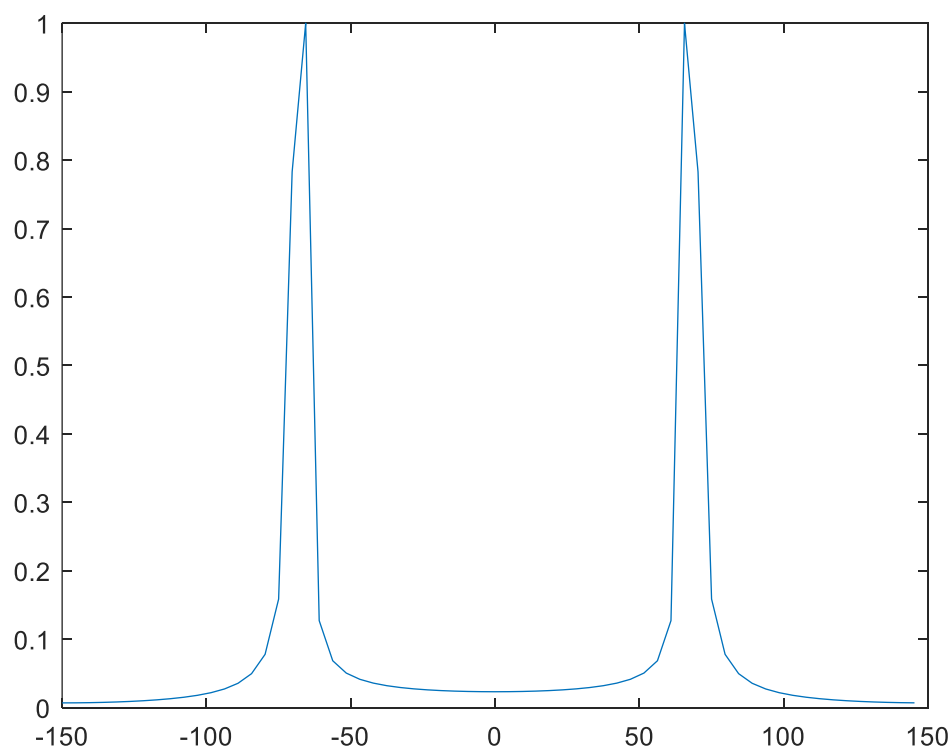


Fig. 11 Transformada de Fourier para $N=64$

Se puede observar que al aumentar el número de muestras tomadas para realizar la transformada de Fourier, la exactitud y resolución de la misma aumenta. Esto se debe a que tomamos mayor cantidad de datos de la señal analizada.

Comparando la respuesta de la FFT y la respuesta en frecuencia de nuestro filtro pasa banda, observamos que hay correspondencia entre los resultados obtenidos.

USO DE LA HERRAMIENTA FDATOOL

Para el diseño de cada uno de los filtros correspondientes a las siete notas musicales, se hará uso de la herramienta “fdatool” “FilterDesigner” del programa MatLab. La misma es una interfaz gráfica de usuario con herramientas de procesamiento de señales para analizar y diseñar filtros.

Permite diseñar rápidamente filtros FIR o IIR digitales estableciendo especificaciones de rendimiento de filtros, importando filtros desde su espacio de trabajo MATLAB o agregando, moviendo o eliminando polos y ceros. El Diseñador de filtros también proporciona herramientas para analizar filtros, como gráficas de respuesta de magnitud y fase y gráficas de polo-cero. En nuestro caso se usa como verificación de los cálculos realizados con anterioridad.

En el uso de la herramienta, se especificará

- TIPO DE RESPUESTA: Pasa banda o bandpass
- MÉTODO DE DISEÑO: IIR o respuesta al impulso finita- Butterworth
- FRECUENCIA DE MUESTREO: $f_s=300$ Hz según el criterio de Nyquist
- FRECUENCIA CENTRAL: dependerá de cada nota musical.
- ORDEN: Como se mencionó, se busca justificar y verificar los cálculos del orden del prototipo antes de tomar la simplificación del orden 2. Por ello se considera al prototipo pasa bajos de orden “9” y la transformación bilineal de pasa bajo a pasa banda (aumenta el orden al doble) por lo que en la herramienta se usará orden 18.

Finalmente, y en base a lo obtenido, se concluirá con respecto a los cálculos analíticos.

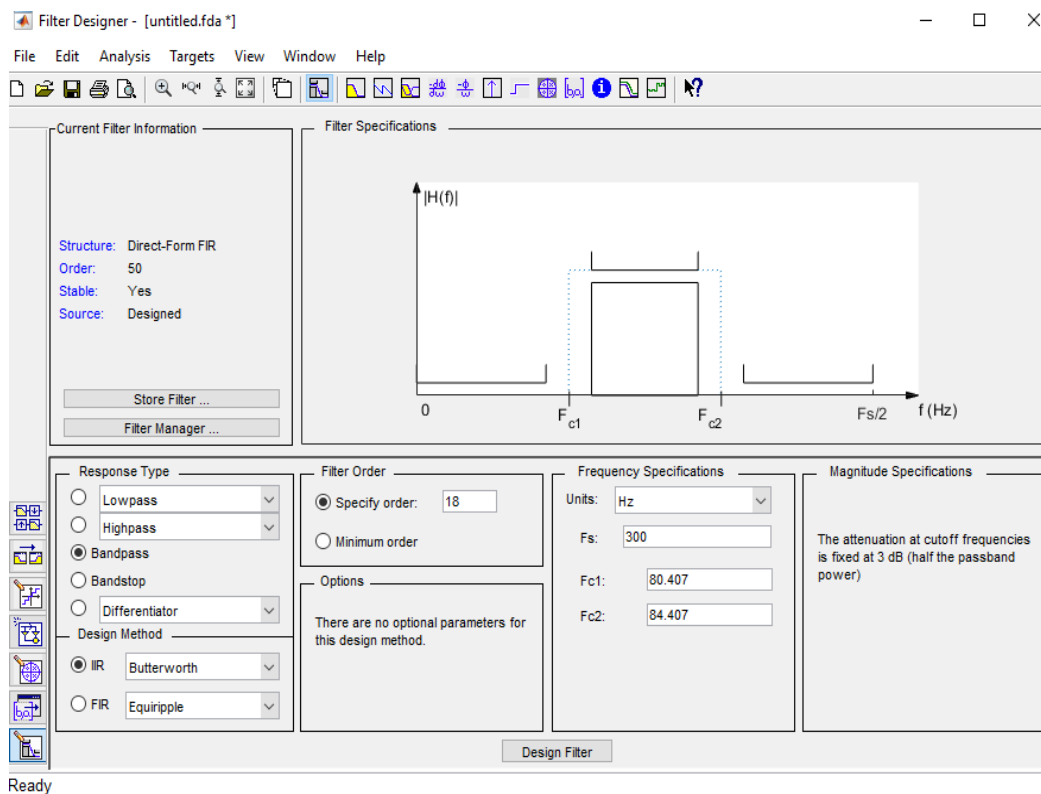


Fig. 12 Herramienta fdatool

Por otro lado, se encuentran especificadas las frecuencias de corte superior e inferior de cada filtro a diseñar, en la tabla a continuación:

NOTA	Frecuencia		
	Corte inferior	Central	Corte superior
DO	63.406	65.406	67.406
RE	71.416	73.416	75.416
MI	80.407	82.407	84.407
FA	85.307	87.307	89.307
SOL	95.99	97.999	99.99
LA	108	110	112
SI	121.471	123.471	125.471

NOTA DO

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

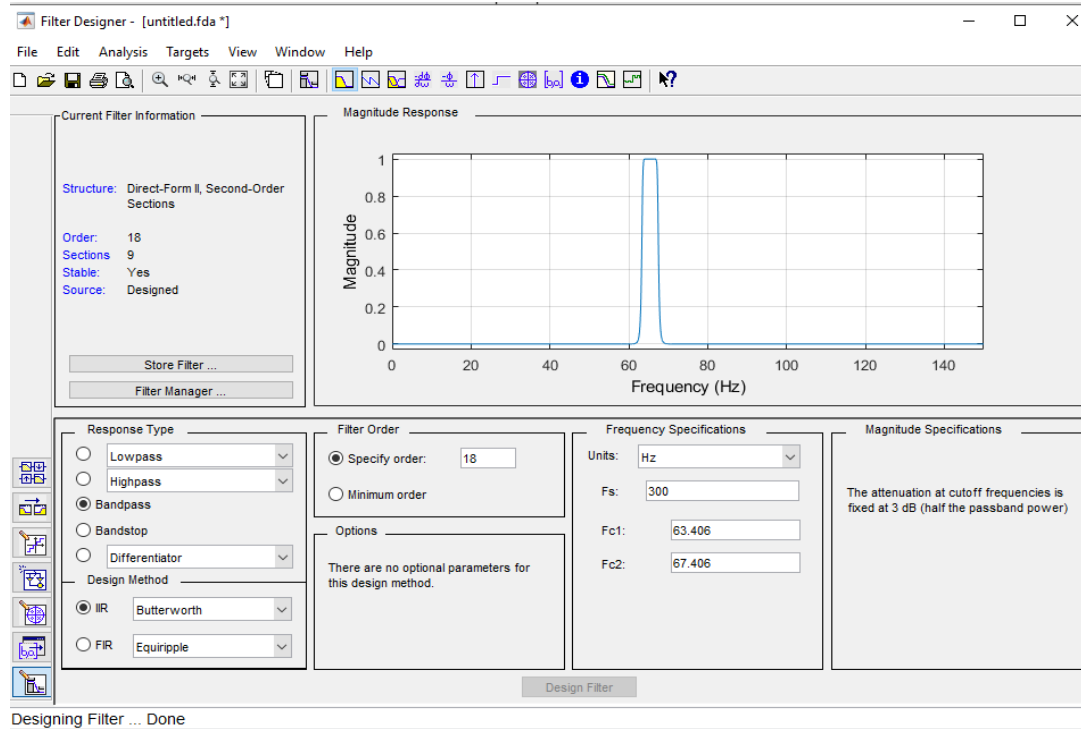


Fig. 13 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

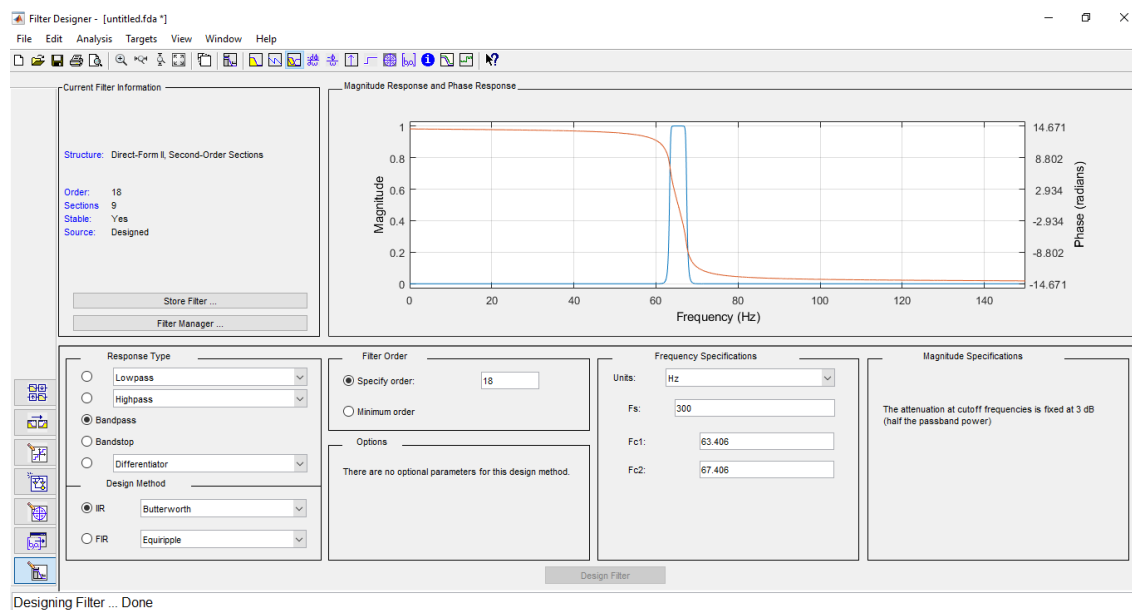


Fig. 14 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

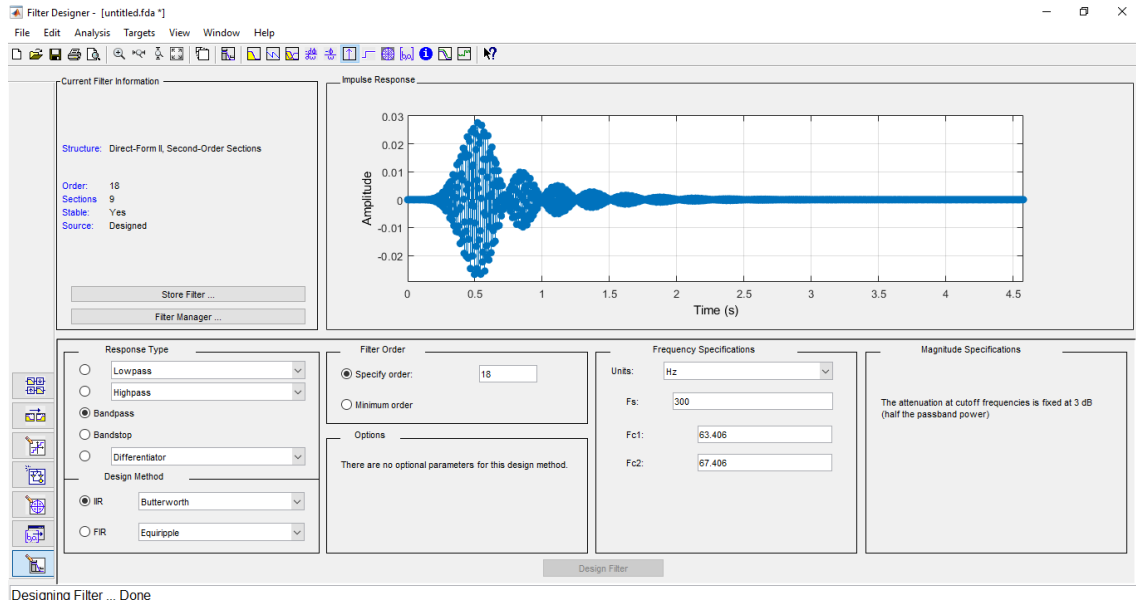


Fig. 15 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

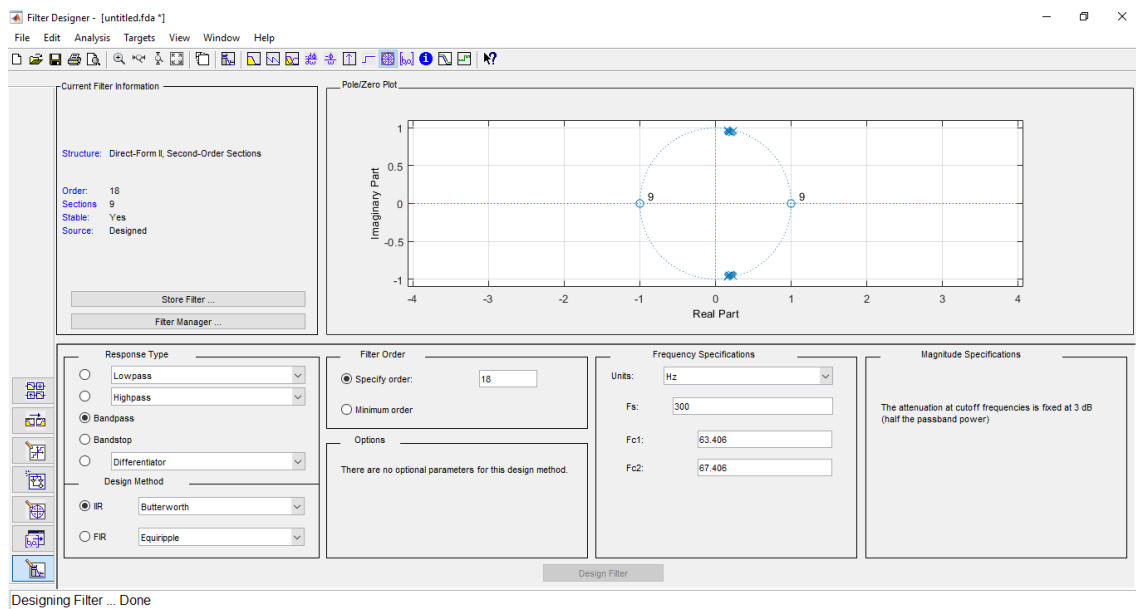


Fig. 16 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende, todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO DO			
SECCIÓN	NUMERADOR	DENOMINADOR	GANANCIA

	A ₂	A ₁	A ₀	B ₂	B ₁	B ₀	
I	1	0	-1	1	-0.315	0.985	0.041
II					-0.476	0.985	0.041
III					-0.460	0.959	0.041
IV					-0.312	0.958	0.041
V					-0.438	0.938	0.040
VI					-0.335	0.937	0.040
VII					-0.411	0.954	0.040
VIII					-0.357	0.924	0.040
IX					-0.383	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatoool.

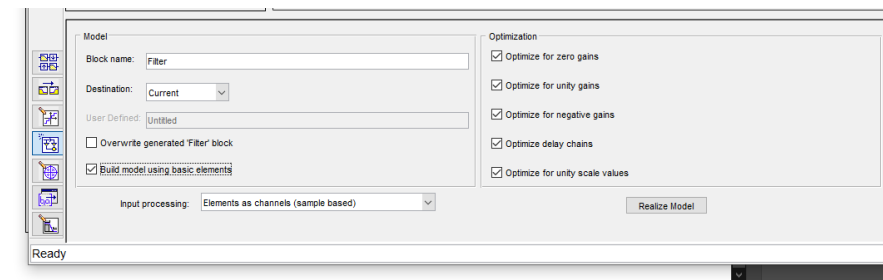


Fig. 17 Realize model

NOTA RE

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

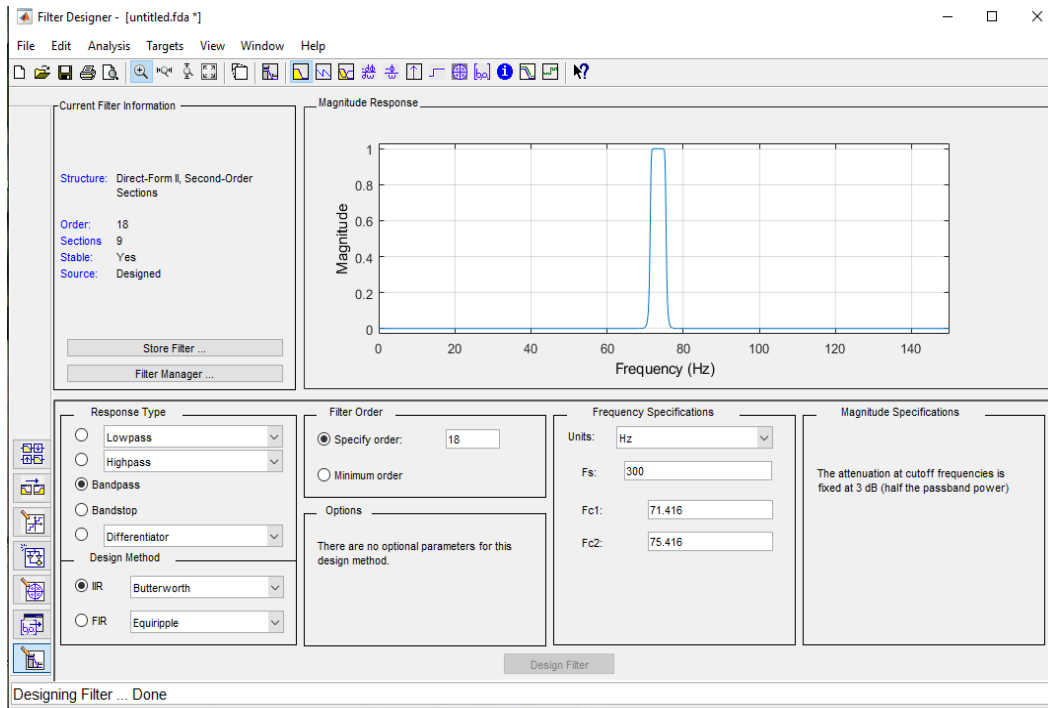


Fig. 18 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

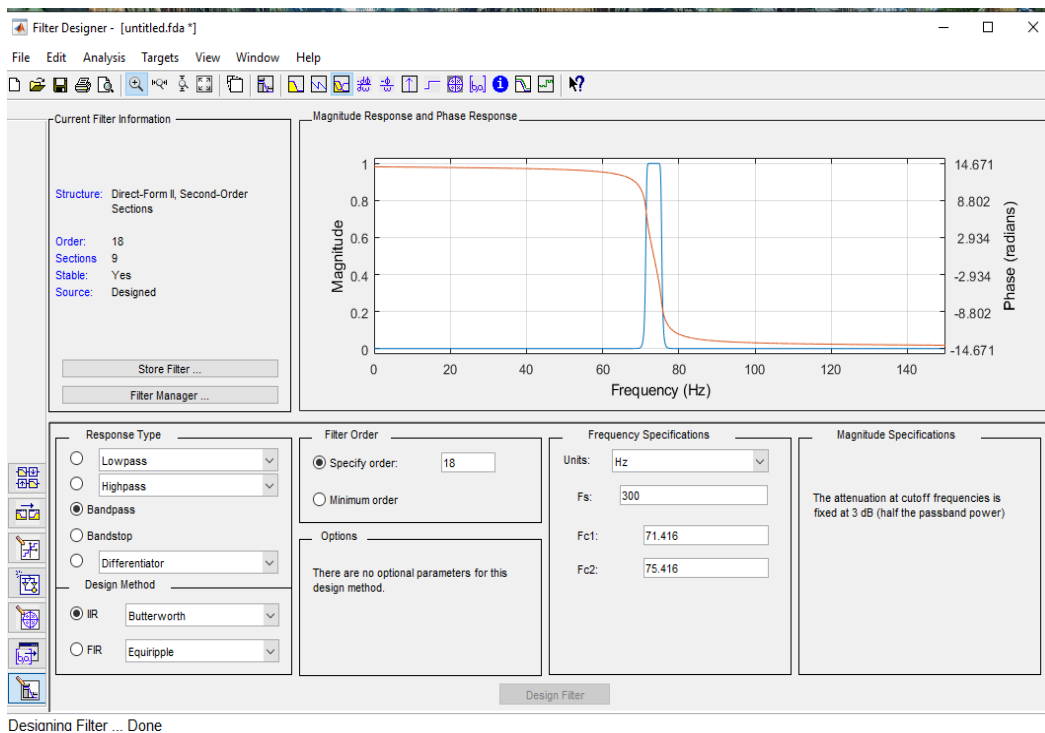


Fig. 19 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

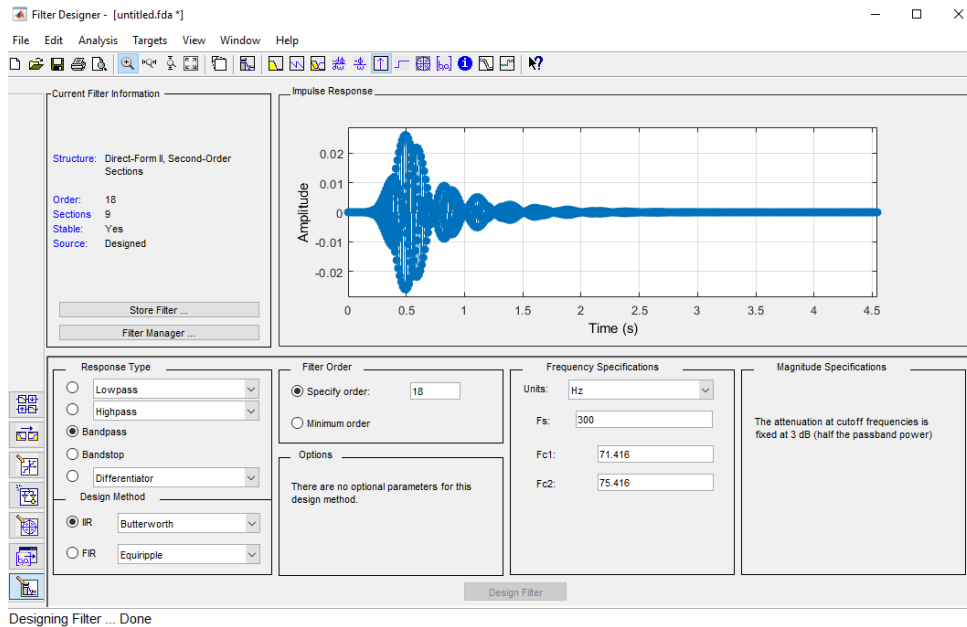


Fig. 20 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

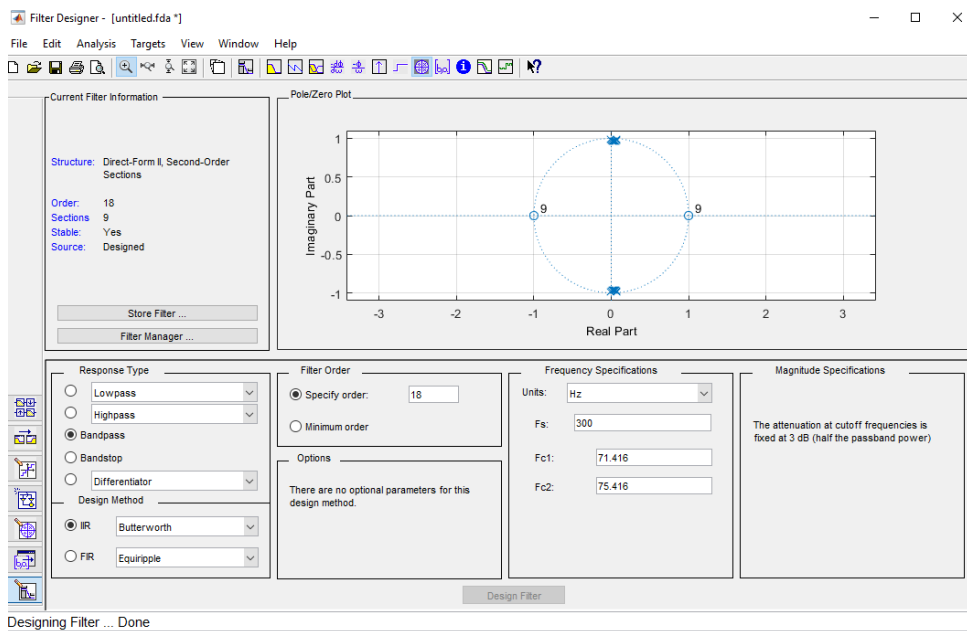


Fig. 21 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatoool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en $-+1$, es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende, todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO RE							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A ₂	A ₁	A ₀	B ₂	B ₁	B ₀	
I	1	0	-1	1	-0.147	0.985	0.041
II					0.01	0.985	0.041
III					-0.135	0.959	0.040
IV					0.006	0.958	0.040
V					-0.116	0.937	0.040
VI					-0.012	0.937	0.040
VII					-0.091	0.924	0.040
VIII					-0.036	0.924	0.040
IX					-0.063	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando SIMulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatool.

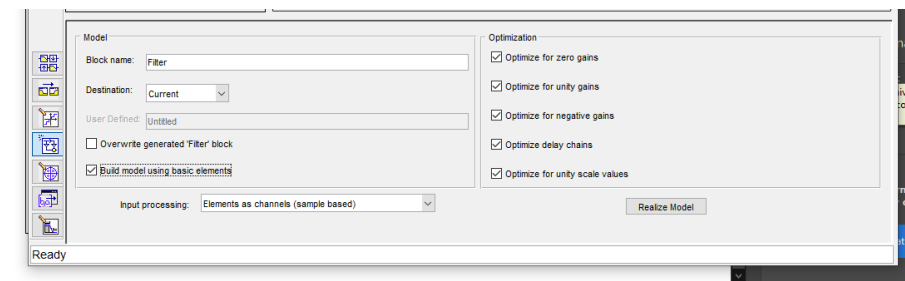


Fig. 22 Realize model

NOTA MI

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

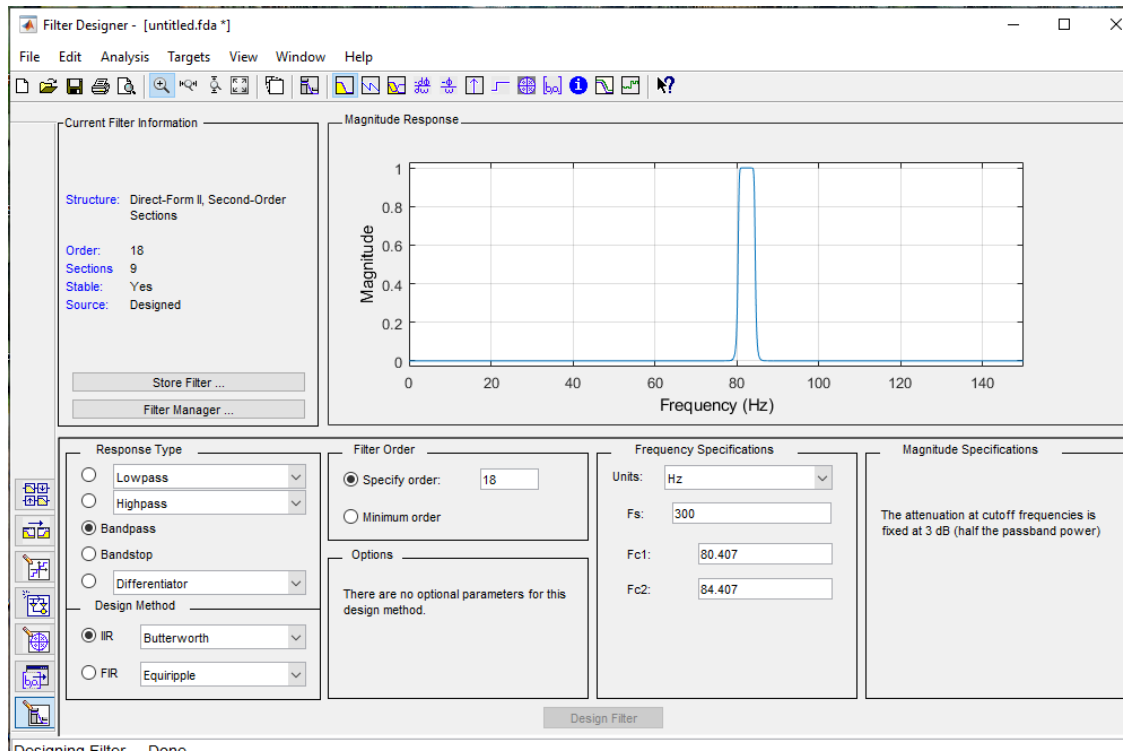


Fig. 23 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

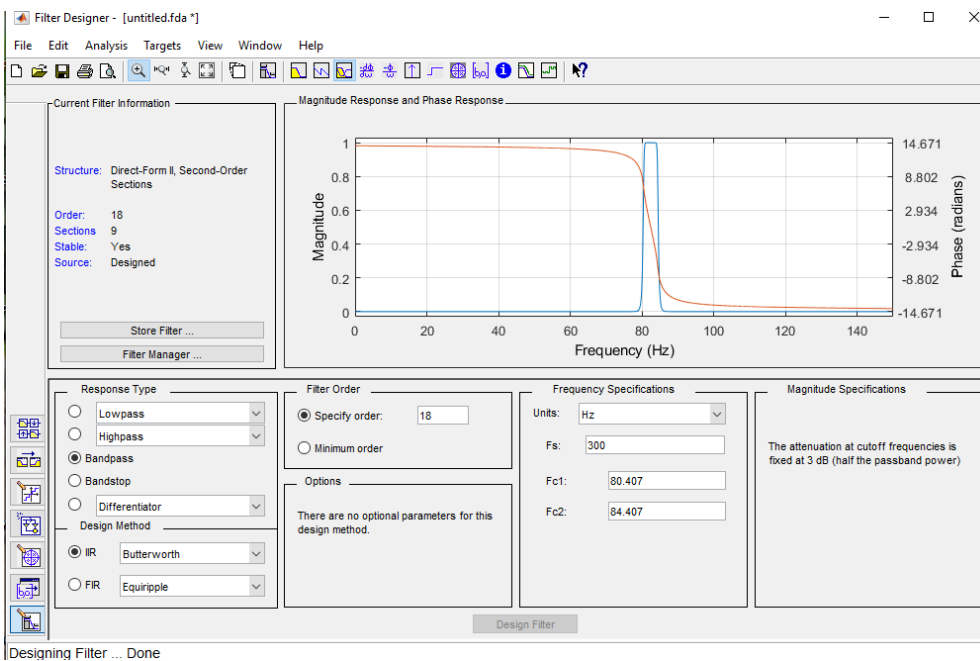


Fig. 24 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

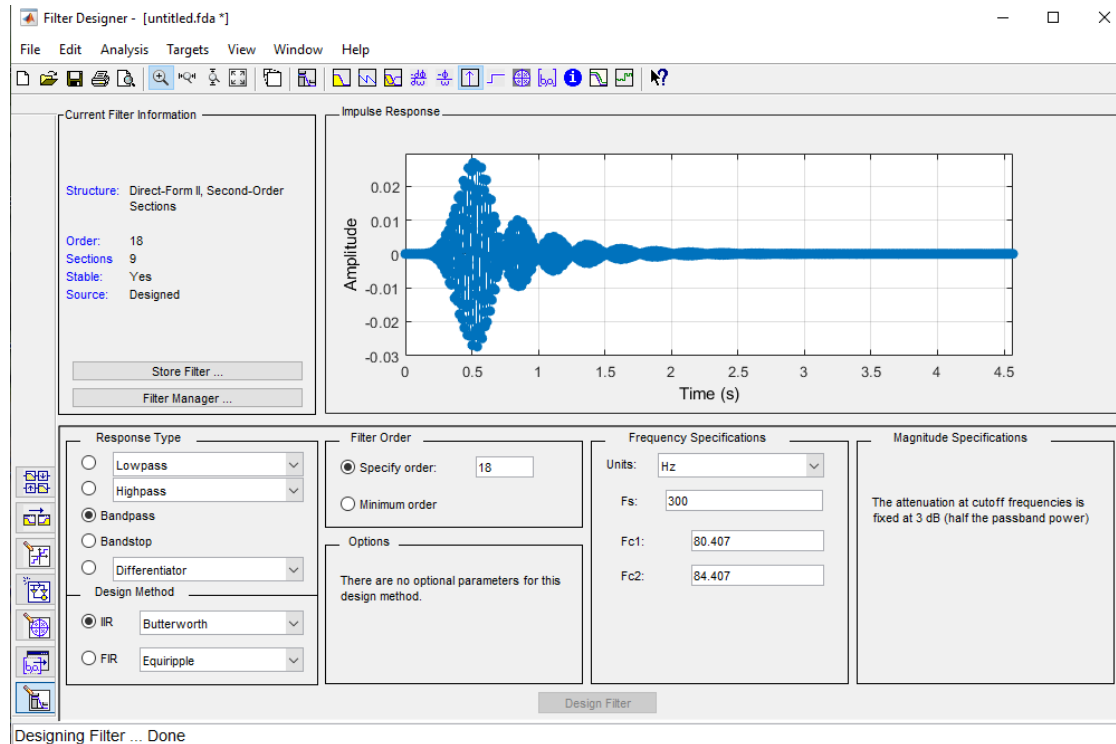


Fig. 25 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

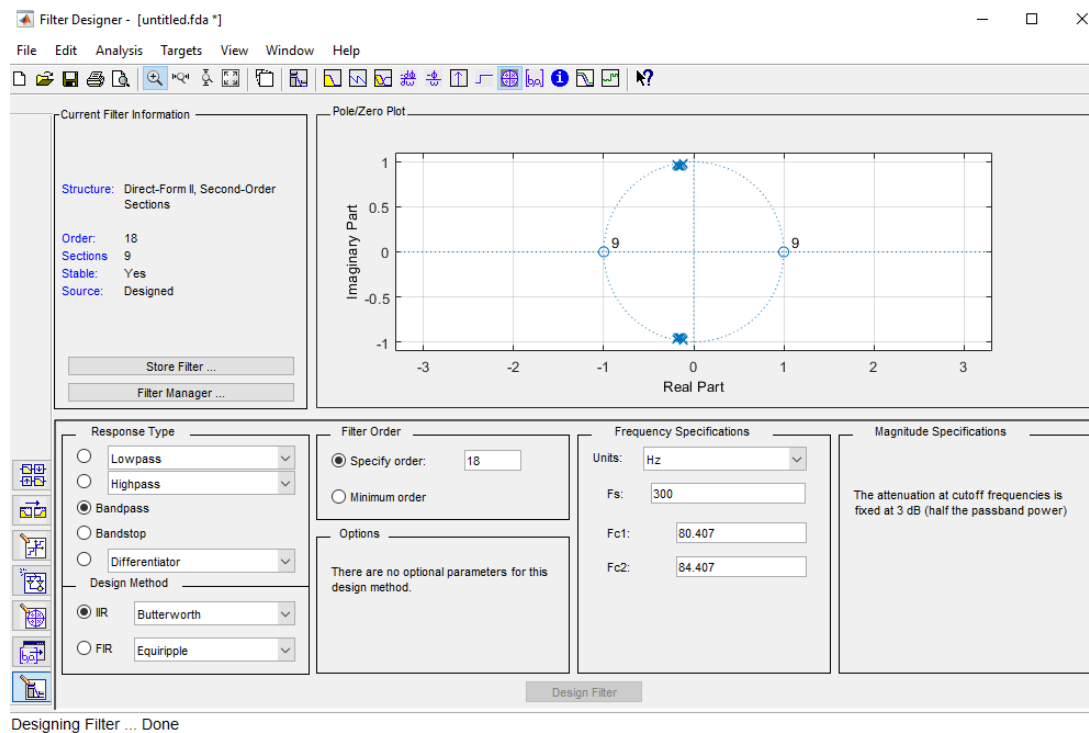


Fig. 26 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende, todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO MI							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A ₂	A ₁	A ₀	B ₂	B ₁	B ₀	
I	1	0	-1	1	0.387	0.985	0.041
II					0.225	0.985	0.041
III					0.372	0.959	0.041
IV					0.232	0.958	0.041
V					0.351	0.938	0.040
VI					0.247	0.937	0.040
VII					0.324	0.924	0.040
VIII					0.270	0.924	0.040
IX					0.296	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatool

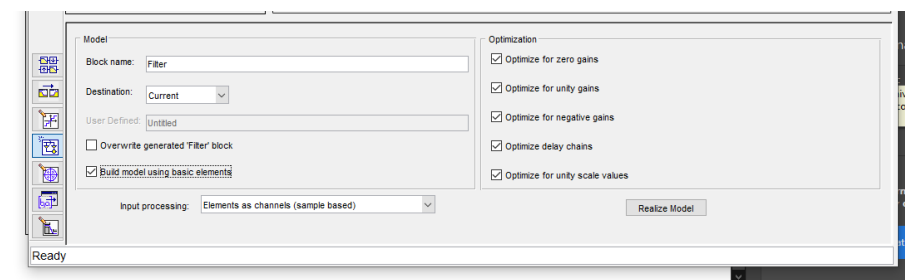


Fig. 27 Realize model

NOTA FA

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

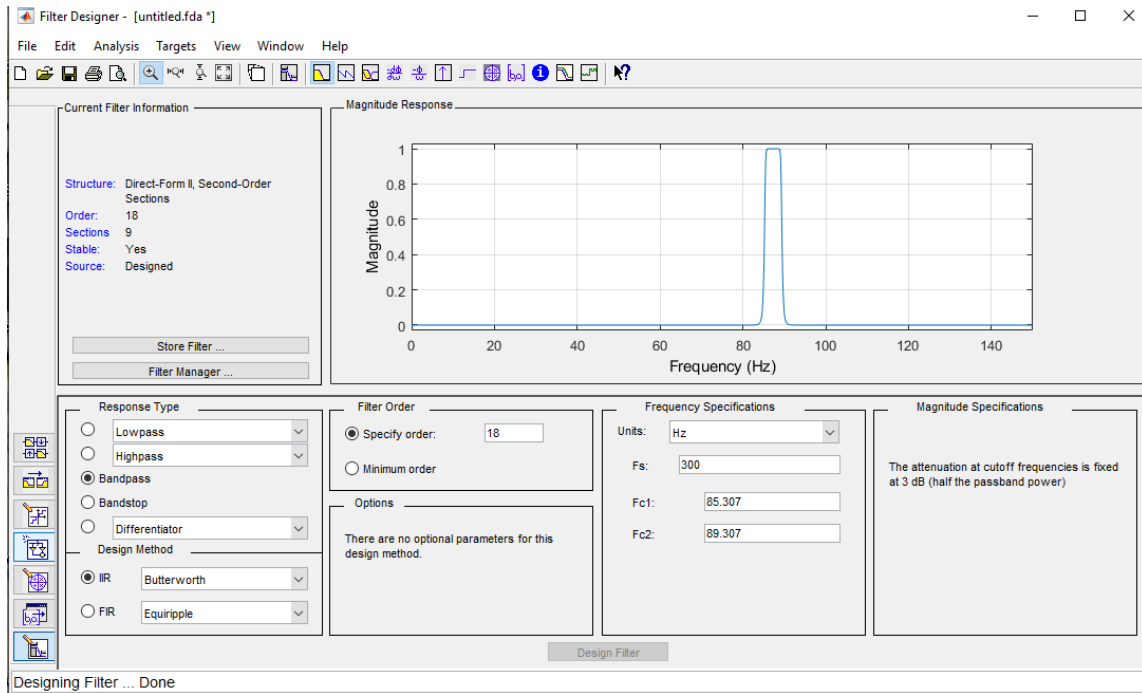


Fig. 28 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

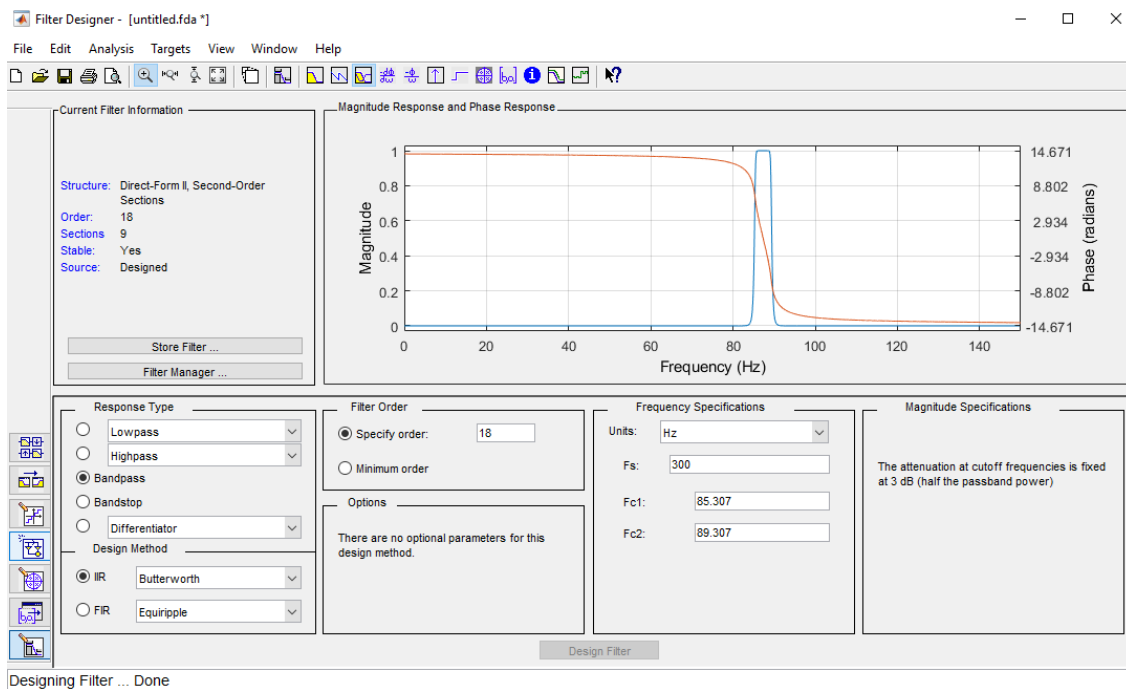


Fig. 29 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

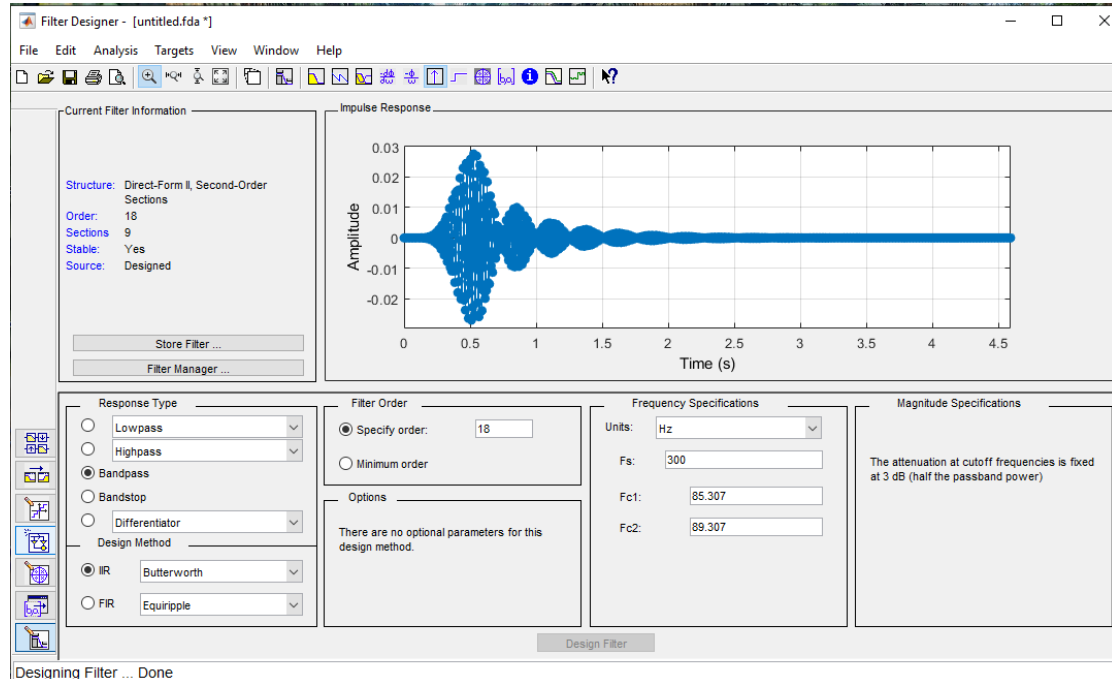


Fig. 30 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

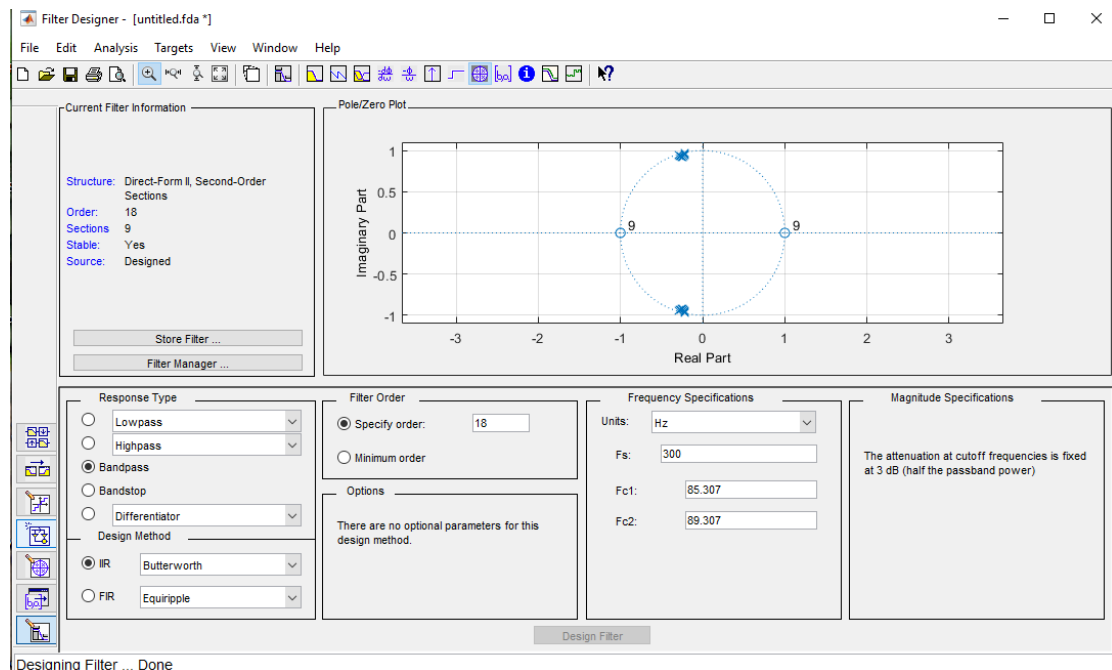


Fig. 31 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta "fdatoool" brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos

los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende, todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO FA							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A ₂	A ₁	A ₀	B ₂	B ₁	B ₀	
I	1	0	-1	1	-0.426	0.985	0.041
II					0.584	0.985	0.041
III					0.430	0.958	0.041
IV					0.567	0.959	0.041
V					0.443	0.937	0.040
VI					0.544	0.937	0.040
VII					0.517	0.954	0.040
VIII					0.464	0.924	0.040
IX					0.489	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatool

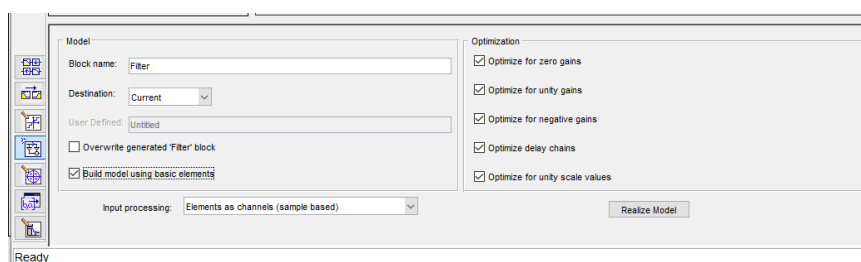


Fig. 32 Realize model

NOTA SOL

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

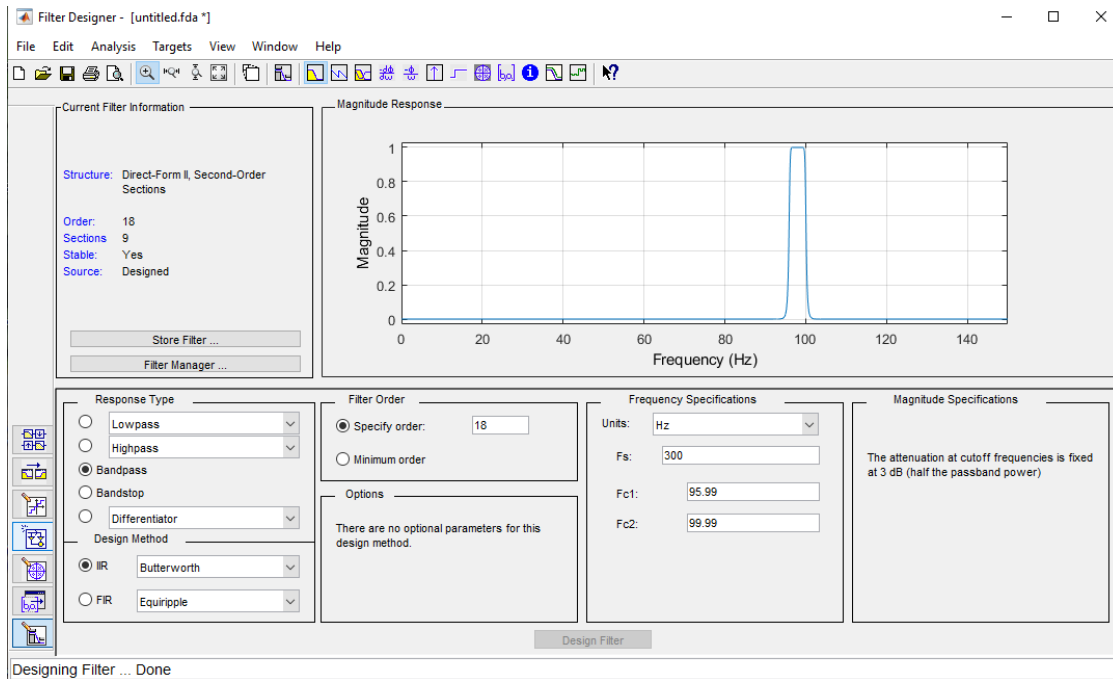


Fig. 33 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

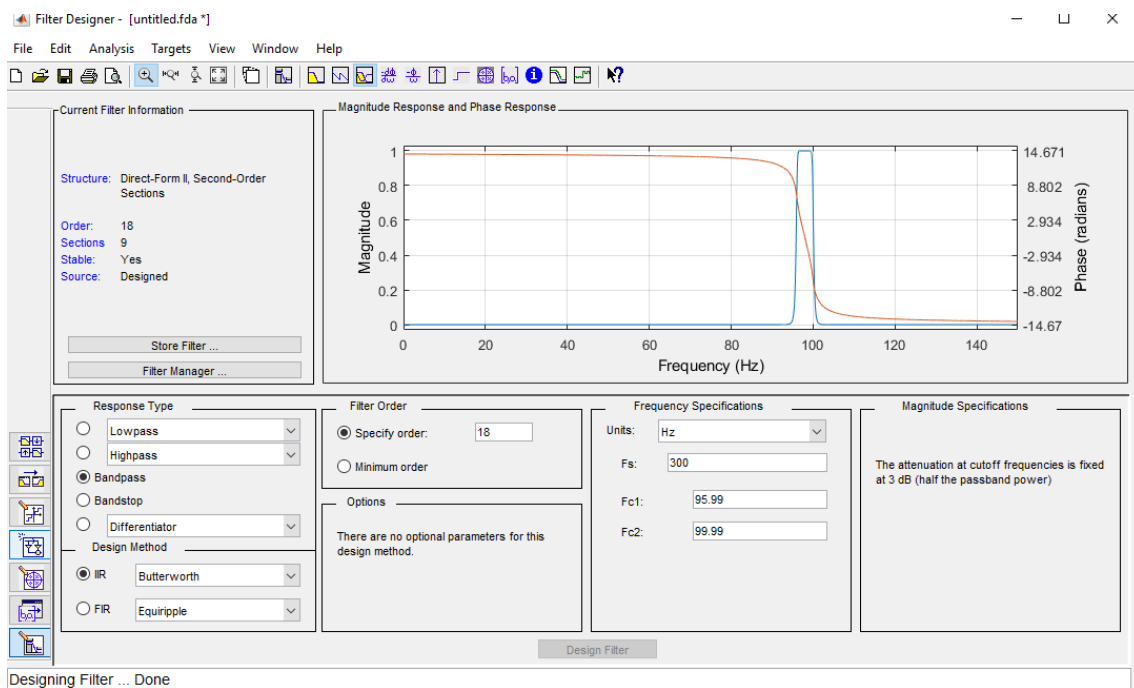


Fig. 34 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

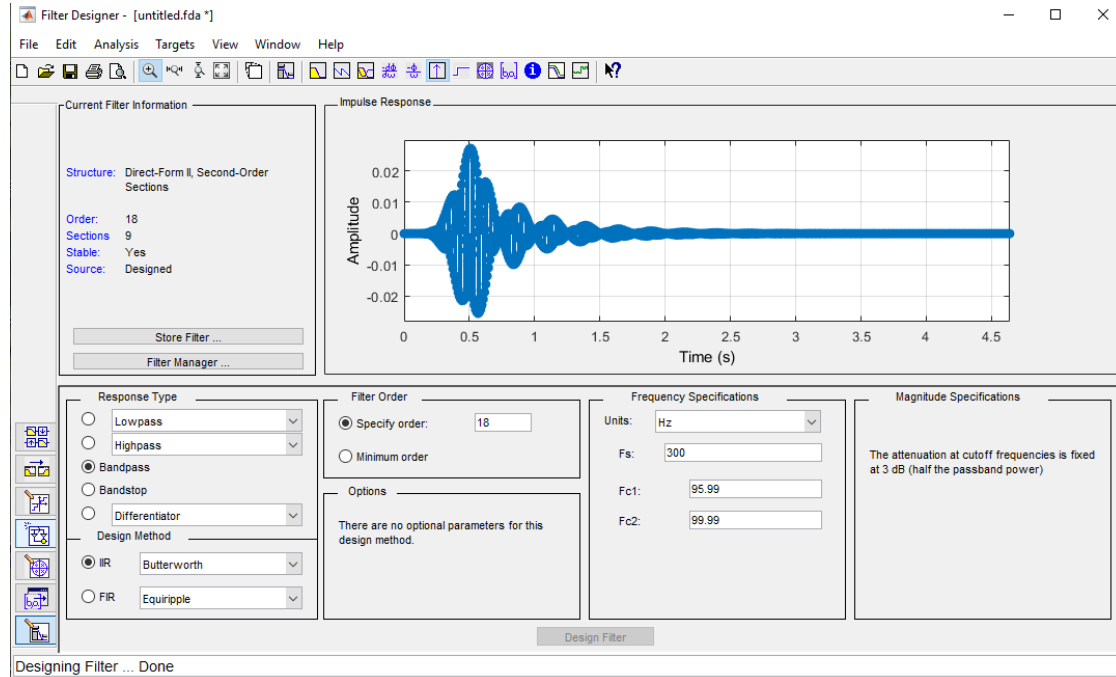


Fig. 35 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

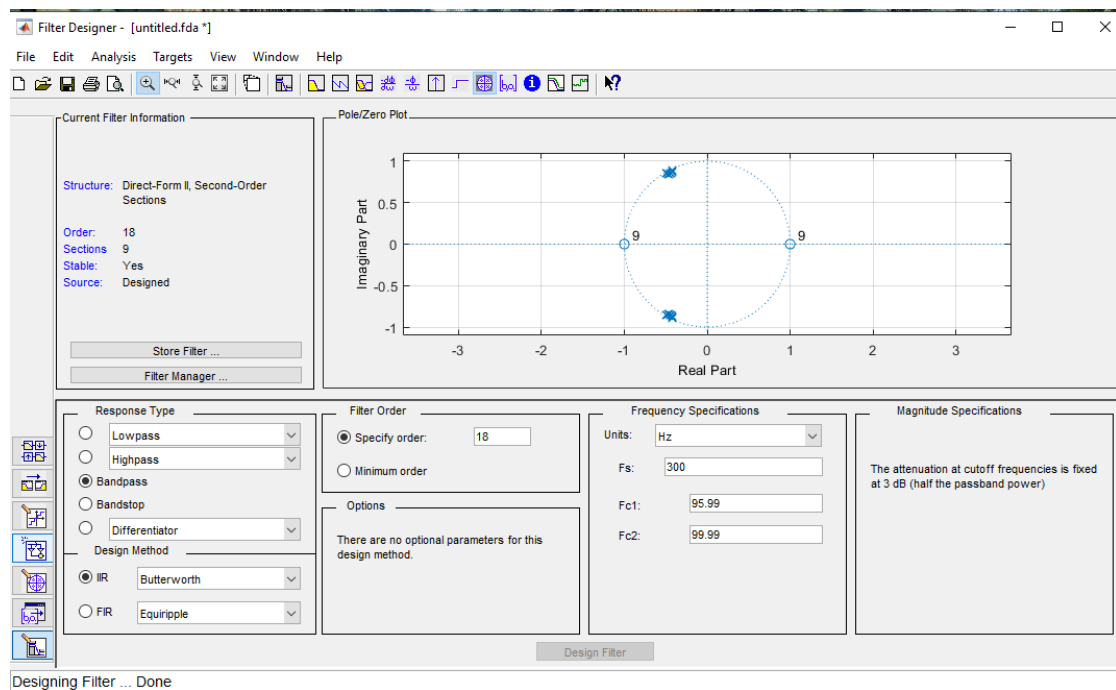


Fig. 36 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende, todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO SOL							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A ₂	A ₁	A ₀	B ₂	B ₁	B ₀	
I	1	0	-1	1	0.846	0.985	0.041
II					0.991	0.985	0.041
III					0.846	0.959	0.041
IV					0.970	0.958	0.041
V					0.950	0.938	0.040
VI					0.944	0.938	0.040
VII					0.867	0.923	0.040
VIII					0.916	0.924	0.040
IX					0.889	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatool.

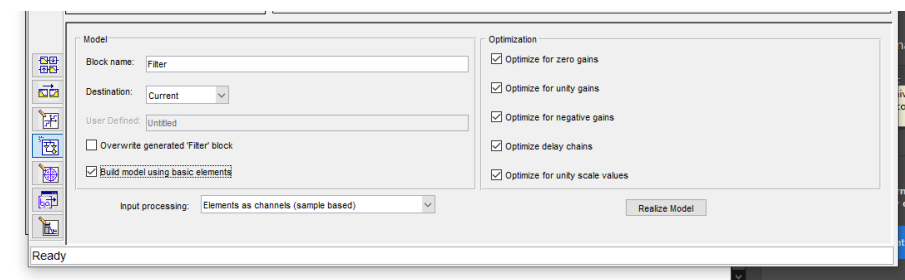


Fig. 37 Realize model

NOTA LA

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

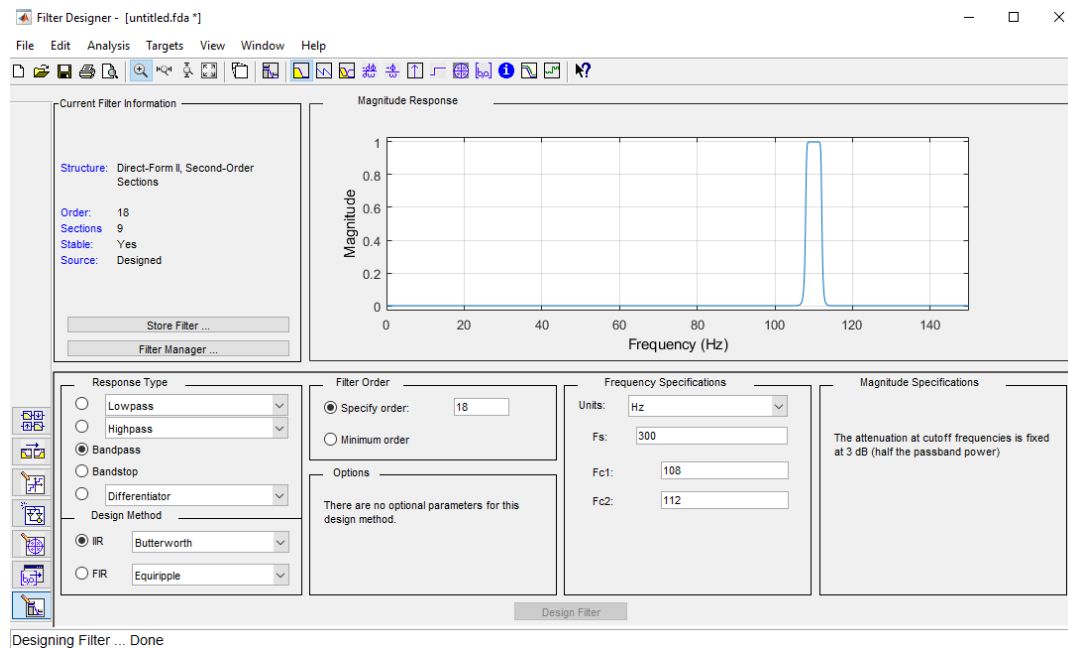


Fig. 38 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

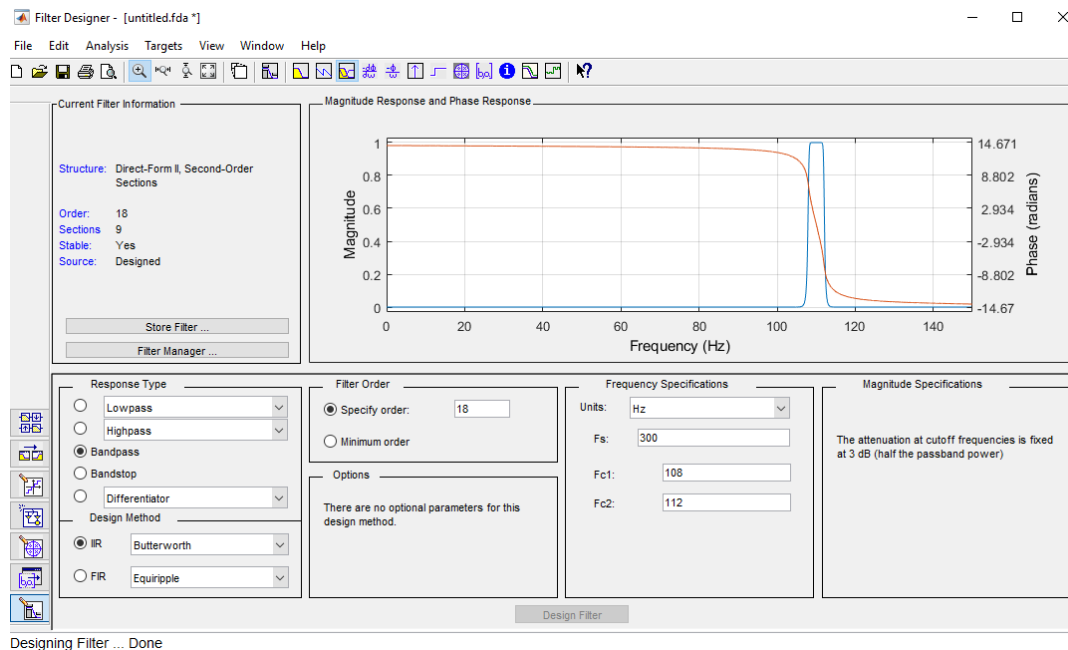


Fig. 39 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

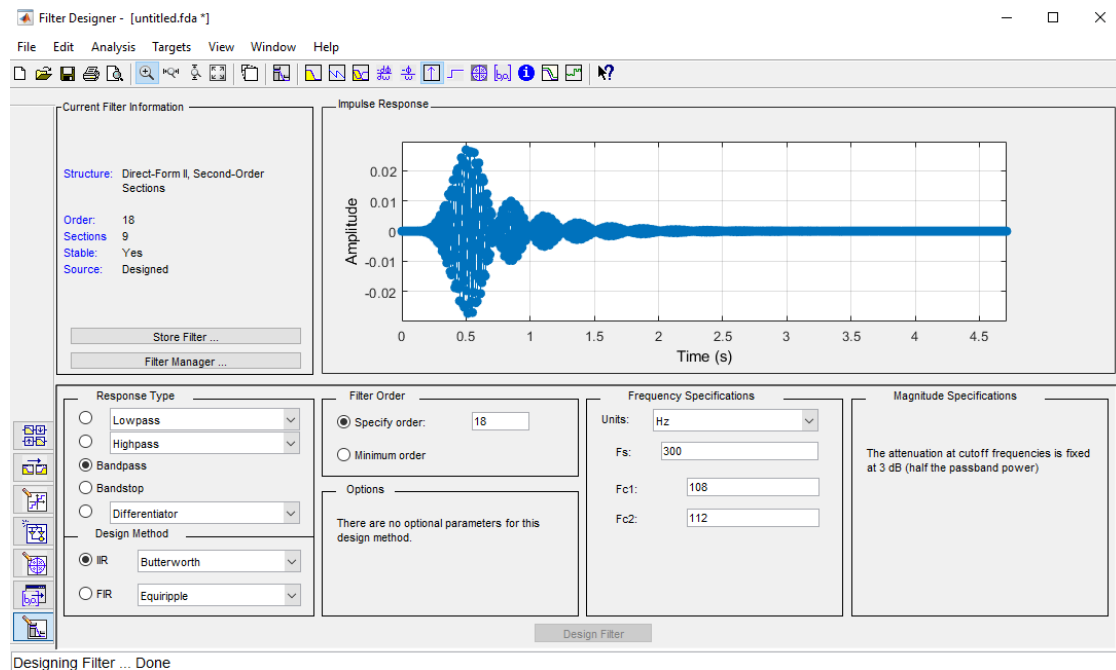


Fig. 40 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

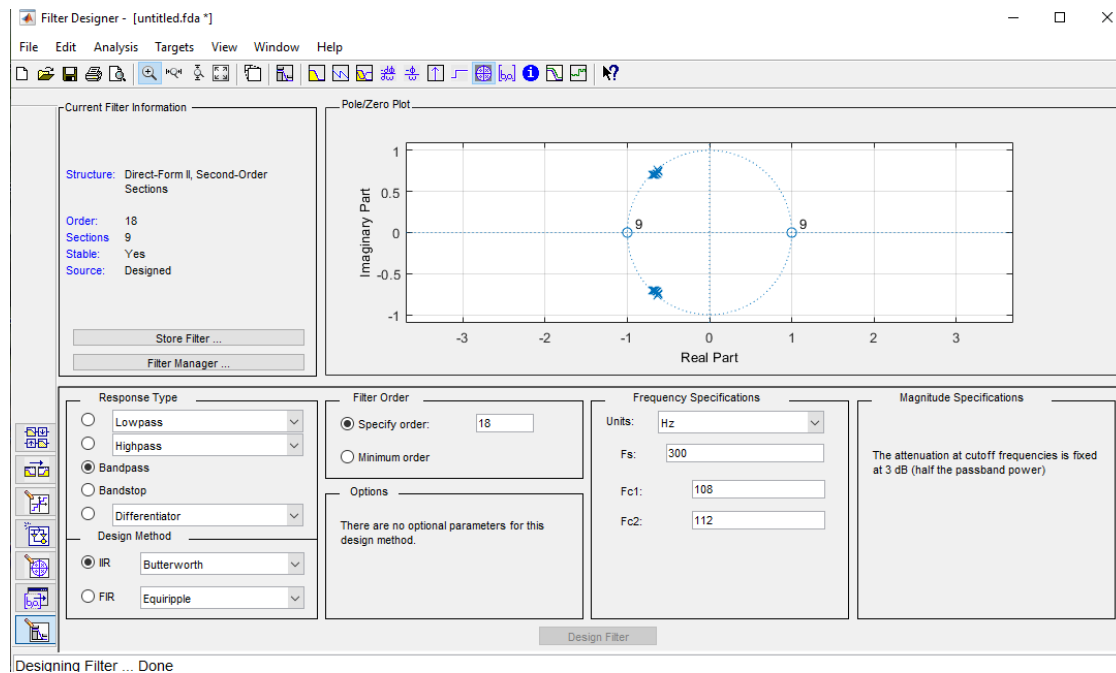


Fig. 41 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO LA							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A2	A1	A0	B2	B1	B0	
I	1	0	-1	1	1.266	0.985	0.041
II					1.388	0.985	0.041
III					1.256	0.959	0.041
IV					1.363	0.958	0.041
V					1.257	0.938	0.040
VI					1.336	0.937	0.040
VII					1.267	0.954	0.040
VIII					1.309	0.924	0.040
IX					1.285	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatool.

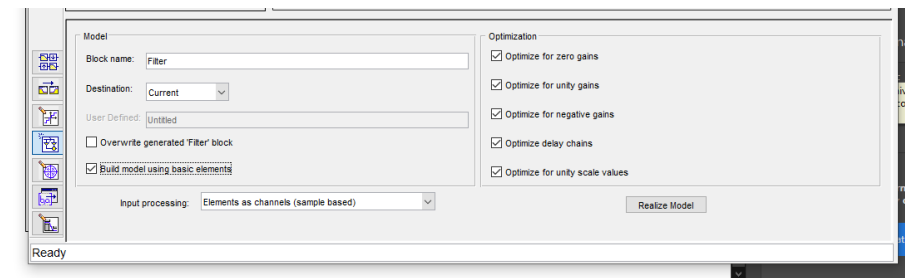


Fig. 42 Realize model

NOTA SI

Se trata de un filtro realizado por método directo de orden 19 y nueve secciones. El programa afirma que es estable y sus gráficas son las siguientes:

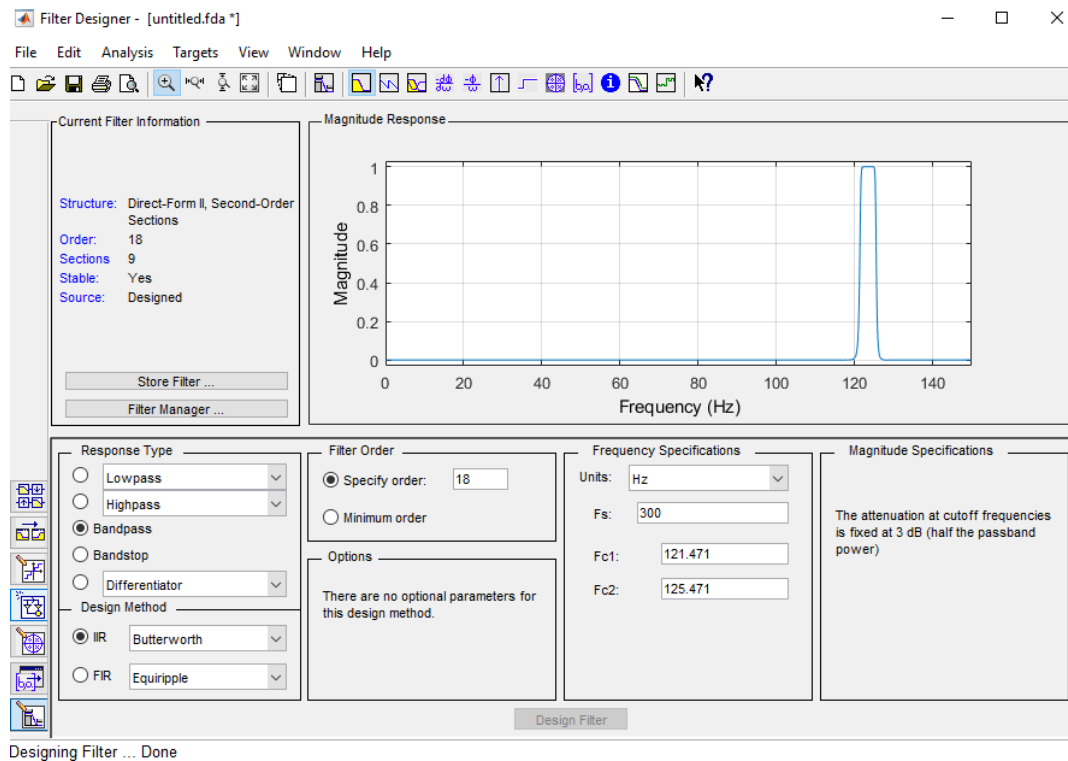


Fig. 43 Respuesta de magnitud

MAGNITUD Y FASE

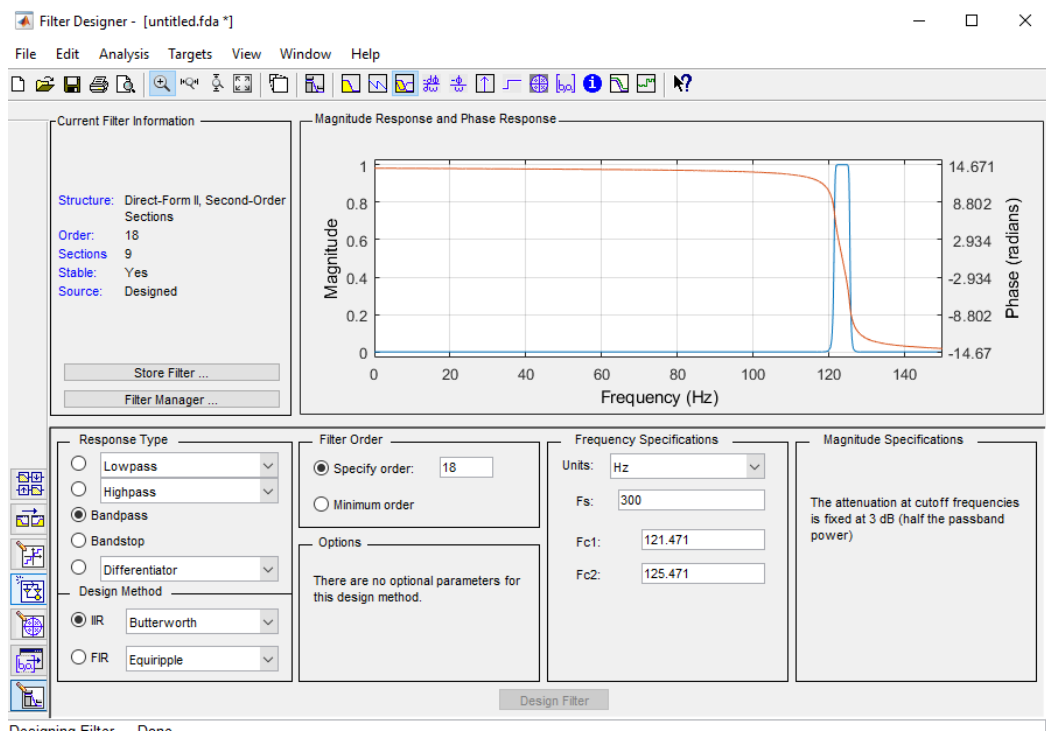


Fig. 44 Respuesta de fase y magnitud

RESPUESTA AL IMPULSO

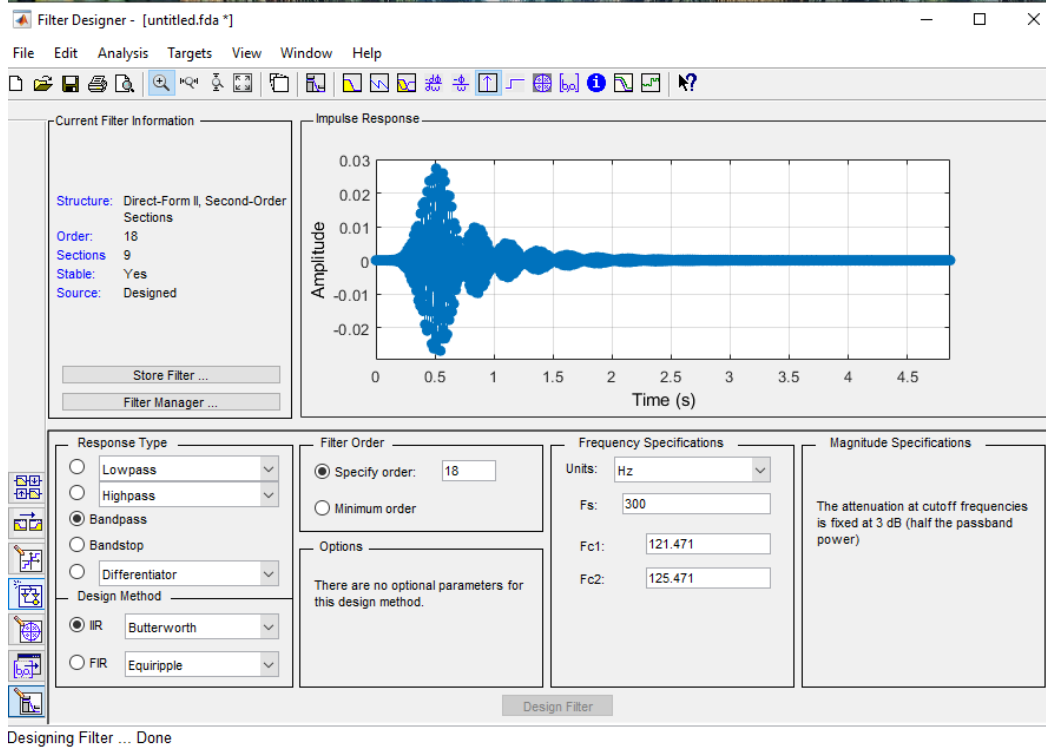


Fig. 45 Respuesta al impulso

POLOS Y CEROS

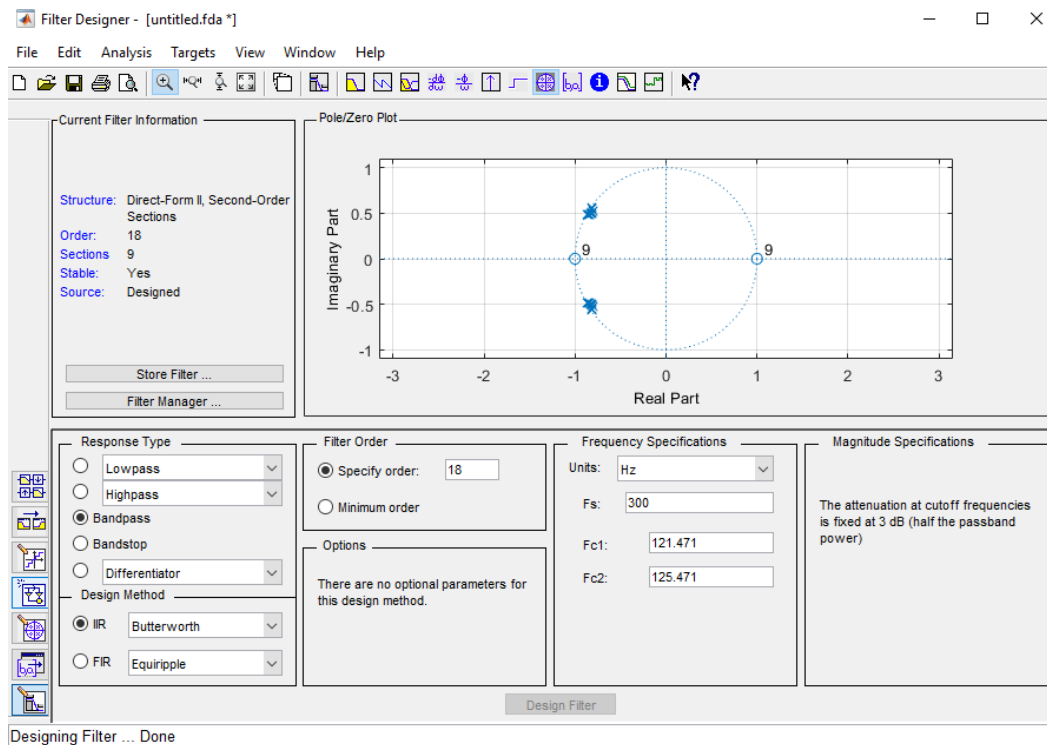


Fig. 46 Diagrama de polos y ceros

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La herramienta “fdatool” brinda al usuario las funciones transferencia de segundo orden de las nueve secciones. Como en el diseño del prototipo usamos Butterworth entonces todos los ceros estarán en -1 y al hacer la transformación bilineal, todos los ceros estarán en -1 , es decir, posicionados sobre el círculo unitario; por ende todas las secciones tendrán el mismo numerador.

FILTRO SI							
SECCIÓN	NUMERADOR			DENOMINADOR			GANANCIA
	A2	A1	A0	B2	B1	B0	
I	1	0	-1	1	1.641	0.985	0.041
II					1.729	0.985	0.041
III					1.624	0.959	0.041
IV					1.703	0.958	0.041
V					1.616	0.938	0.040
VI					1.676	0.937	0.040
VII					1.619	0.922	0.040
VIII					1.651	0.925	0.040
IX					1.632	0.919	0.040

GANANCIA DE SALIDA =1.

REALIZACIÓN

Para la realización usando Simulink se usó la opción “RealizeModel” del panel de control izquierdo de fdatoool.

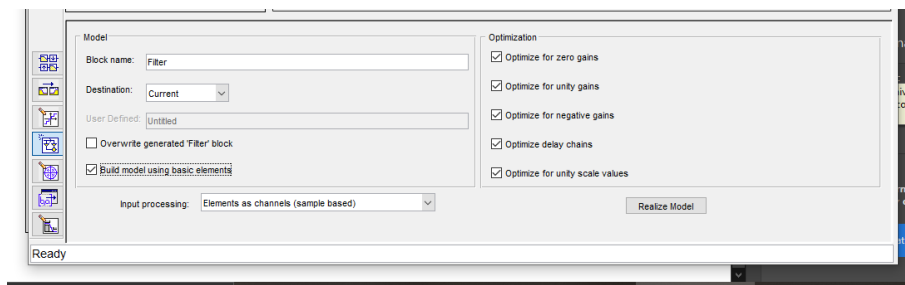
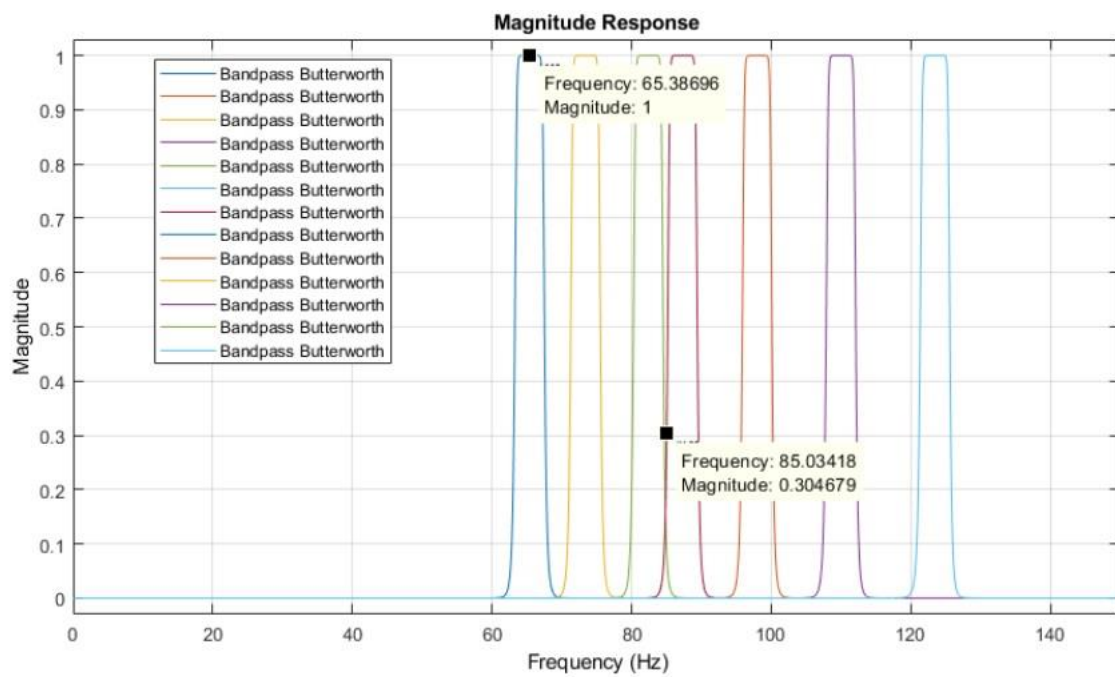


Fig. 47 Realize model

GRÁFICO DE LOS SIETE FILTROS JUNTOS



ig. 48 Espectro del banco de filtros digitales pasa banda

VERIFICACIÓN DEL DISEÑO MEDIANTE SIMULINK

Desde la herramienta fdatool, como se explicó antes, es posible migrar el diseño de cada uno de los filtros en modo de bloques o funciones transferencias con la opción “RealizeModel” para analizar la salida del sistema utilizando una señal de excitación sinusoidal en el rango de frecuencias permitidas por el diseño.

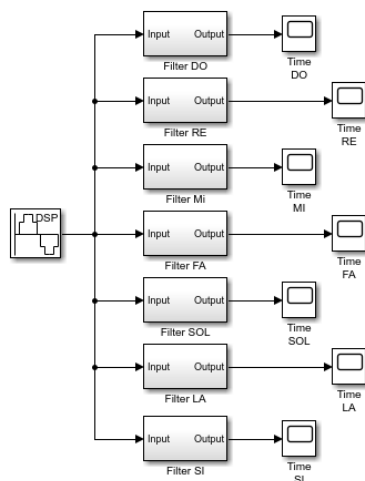


Fig. 49 Banco de filtros en simulink

Se usó una excitación senoidal con frecuencia variable a la de los siete filtros definidos y se armó la siguiente tabla:

FRECUENCIA	AMPLITUD DE SALIDA EN EL OSCILOSCOPIO						
	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI
65.406	1	0.08	0.04	0.03	0.018	0.015	0.013
73.416	0.1	1	0.07	0.05	0.025	0.018	0.015
82.407	0.04	0.065	1	0.13	0.04	0.025	0.018
87.307	0.023	0.042	0.13	1	0.06	0.03	0.02
97.999	0.018	0.023	0.035	0.06	1	0.06	0.03
110	0.01	0.013	0.02	0.025	0.05	1	0.055
123.471	0.008	0.007	0.01	0.015	0.018	0.04	1

Estas mediciones se analizaron en el máximo nivel de amplitud luego de que pasa el transitorio. La forma de las ondas es una envolvente debido a que cada filtro en sí, es la suma de las secciones de segundo orden.

Para concluir y comparar, se analizará en detalle los filtros más comprometidos por su cercanía en frecuencia, la nota MI y FA.

Filtro MI

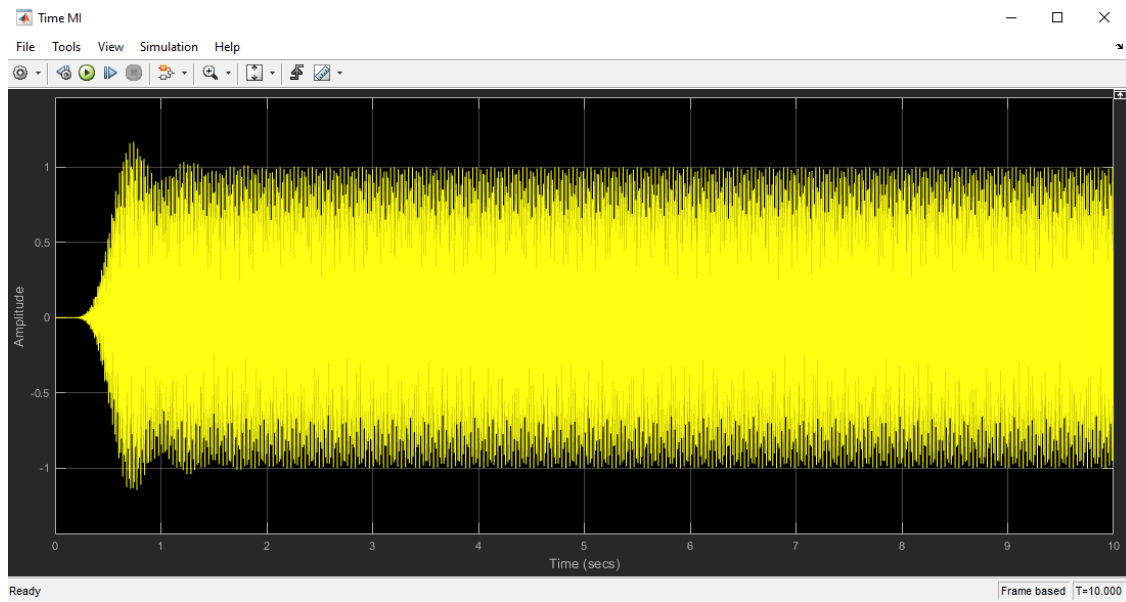


Fig. 50 Salida de señal en el filtro Mi

Filtro FA

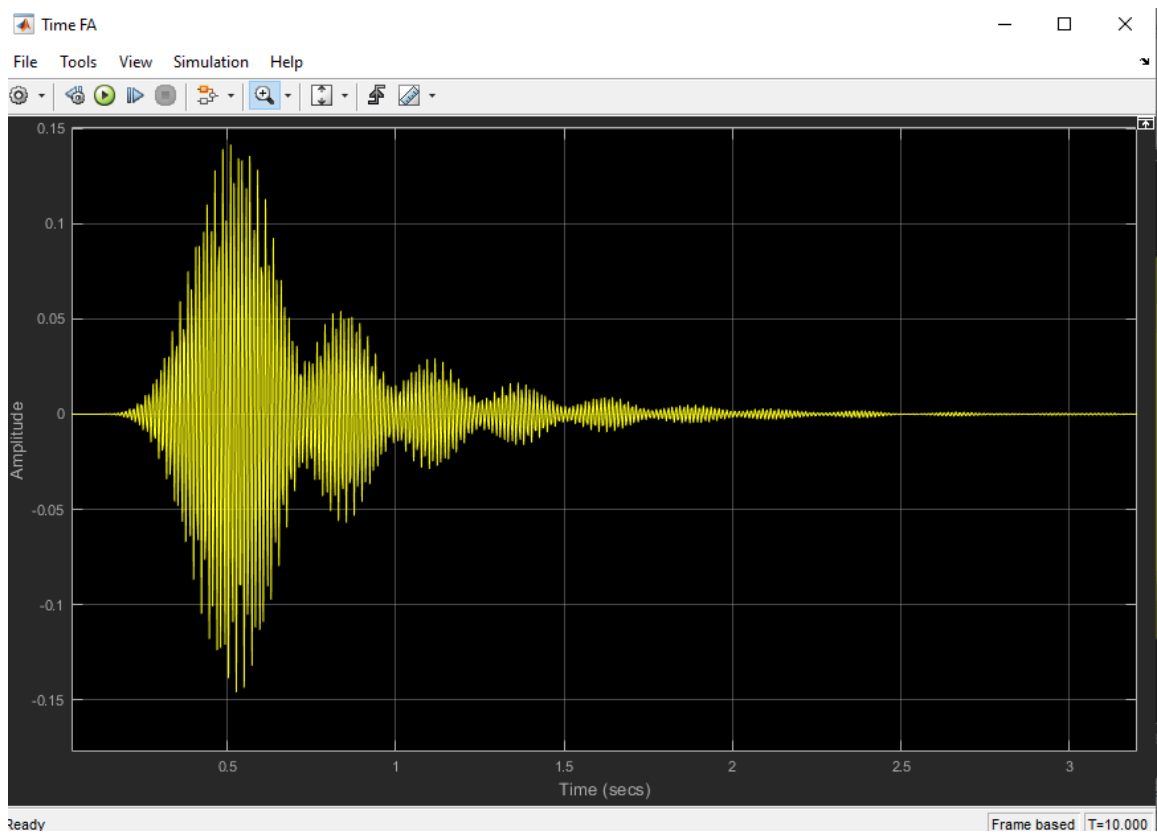


Fig. 51 Salida de señal en el filtro Fa

Si consideramos a la nota FA de amplitud igual a la unidad, podemos comparar por una regla de tres simple, cuál es el porcentaje de amplitud que deja pasar el filtro consiguiendo, el MI.

Según lo observado en el osciloscopio, el valor de amplitud máximo MI= 0.14

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 100\% \\ 0.14 \longrightarrow 1.4\% \end{array}$$

Por ende, podemos afirmar que se trata de filtros muy selectivos del orden y respuesta en amplitud esperado conformando un banco de filtros de muy buena calidad y comportamiento en frecuencia.

EFFECTO DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO EN EL DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

A continuación, y con el objetivo de analizar como varia la disposición de los polos y ceros cuando cambiamos la frecuencia de muestreo con la herramienta “fdatool” de Matlab.

En primer lugar, se analizó y diseño nuevamente el filtro correspondiente a la nota Mi dónde $f_{c1}= 80.407$ y $f_{c2}= 84.407$, igual que en caso anterior, pero cambiando la frecuencia de muestreo a **$f_s=1000$ Hz.**

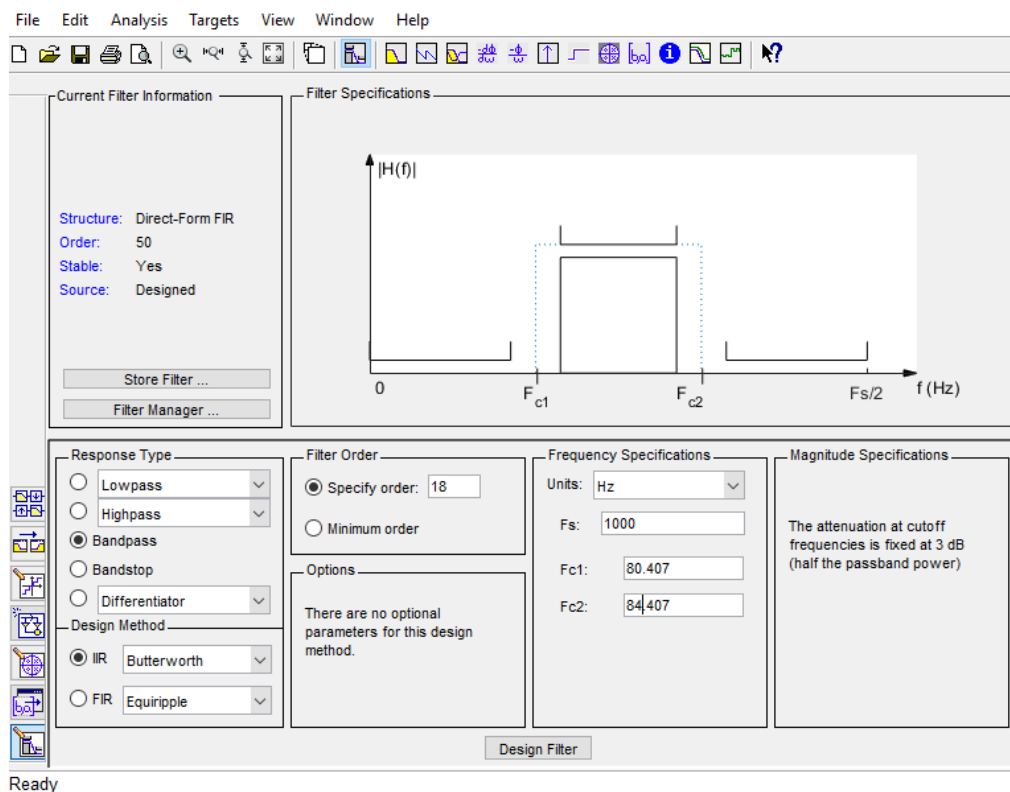


Fig. 52 . Entorno fdatool

Su configuración de polos y ceros es:

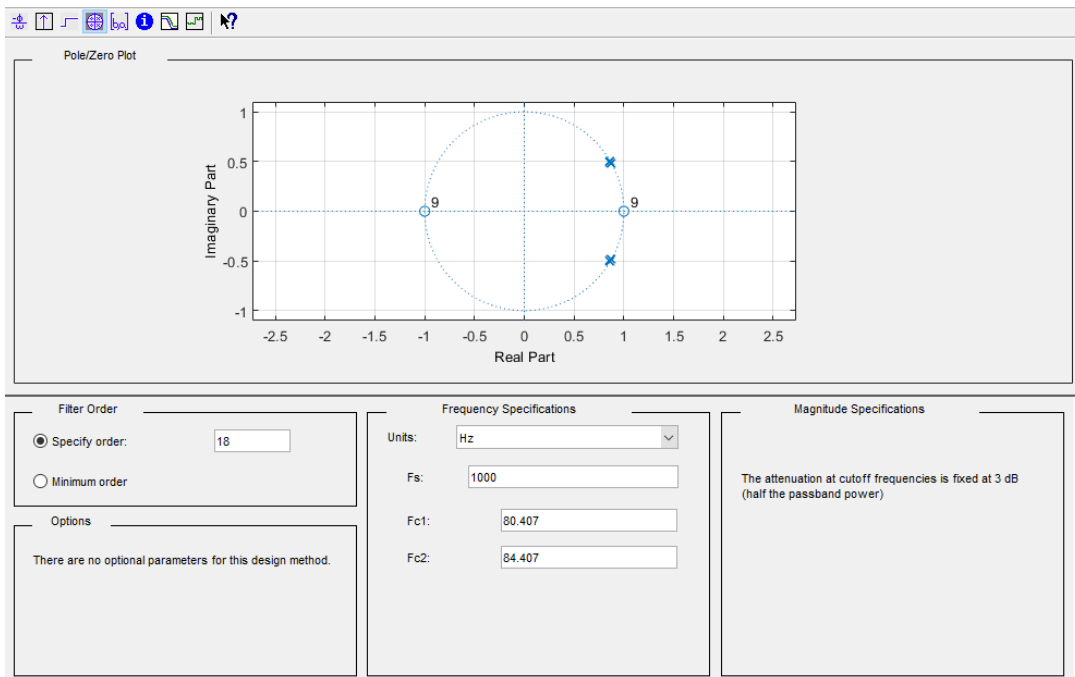


Fig. 53. Diagrama de polos y ceros cuando $f_s = 1000$ Hz

En la figura se puede observar que los ceros siguen estando ubicados en 1 y -1, como corresponde al modelo de Butterworth pero los polos migraron al otro semiplano; en el caso cuando $f_s = 300$ Hz se encontraban del lado negativo o izquierdo y ahora se desplazaron hacia la parte derecha.

Se analizó la ubicación de los polos cuando:

1. $f_s = 350$ Hz

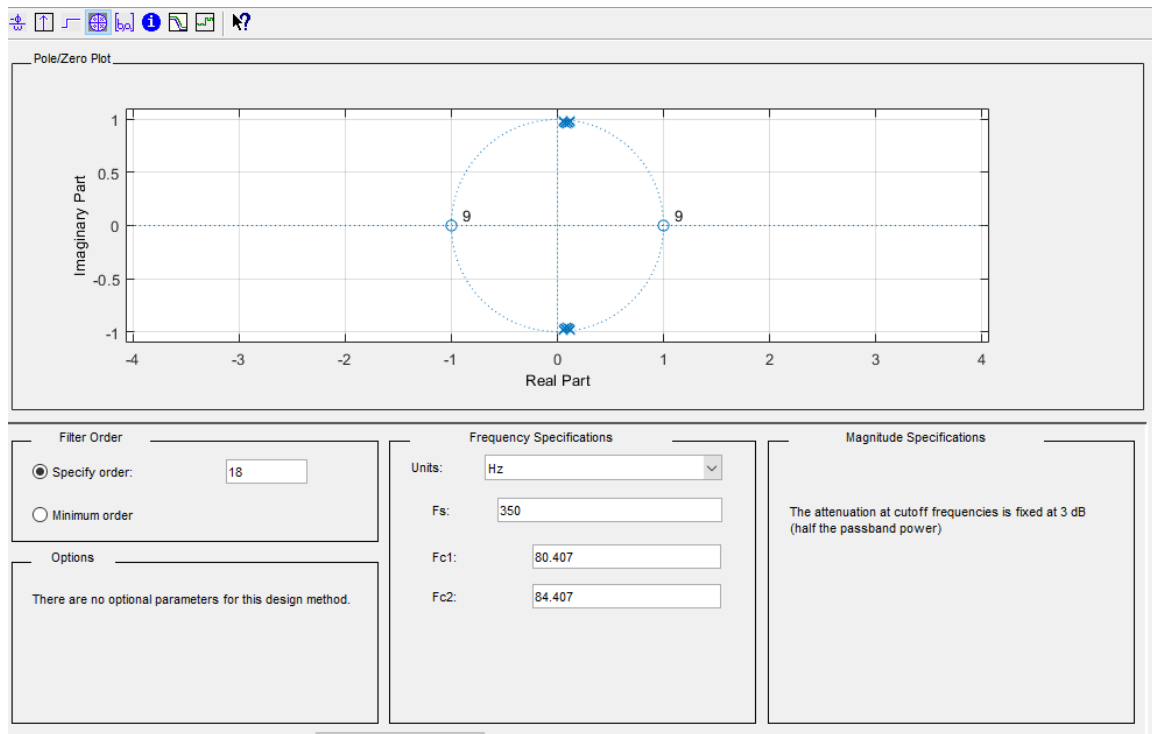


Fig. 54. Diagrama de polos y ceros cuando $f_s = 350$ Hz

2. $f_s = 400$ Hz

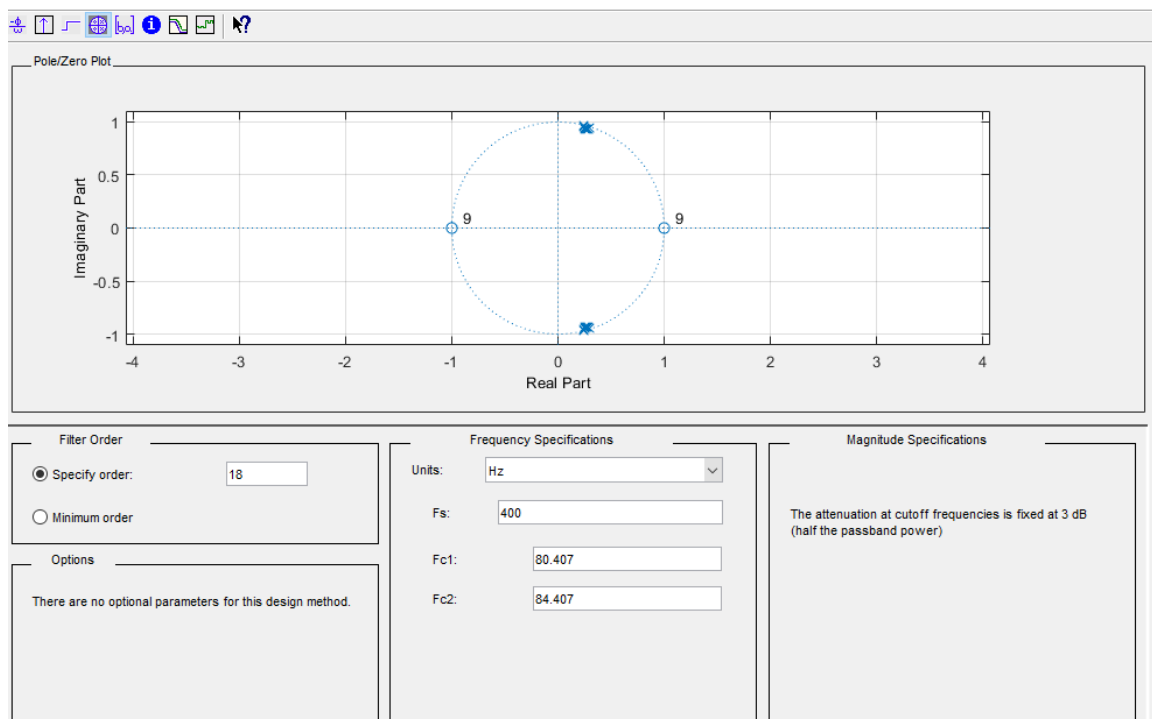


Fig. 55. Diagrama de polos y ceros cuando $f_s = 400$ Hz

Se puede afirmar que a medida que aumenta la frecuencia de muestreo, los polos del sistema se van desplazando hacia el semiplano derecho.

Al aumentar la frecuencia de muestreo el rango de frecuencia crece, entonces la distribución de los polos se corre a frecuencias menores, quedando mas comprimidos en frecuencias bajas y dejando liberado el rango de frecuencias más altas.



CONCLUSIONES

- Luego de haber realizado el diseño, implementación y verificación de los filtros para las el rango de frecuencias deseado, podemos concluir que presentan una respuesta aceptable en la banda de paso y banda de rechazo.
- Pese a la cercanía en los rangos de frecuencias de algunas notas contiguas, los filtros cumplen de manera adecuado su función de atenuar aquellas frecuencias que no correspondan a los rangos especificados.
- En cuanto al grado de atenuación para aquellas frecuencias que están fuera de la banda de paso, registramos niveles de amplitud de alrededor del 1,4% de su valor máximo. Por lo que consideramos filtros altamente selectivos.
- Por otro lado, no se debe descuidar analizar el lugar de los polos y ceros y a que semiplano pertenecen para determinar si el sistema es estable o no.

BIBLIOGRAFÍA

- Tratamiento Digital de Señales, John G. Proakis & Dimitris G. Manolakis.
- Digital Signal Processing, Rabiner & Rader. Proceedings of the IEEE Press
- Digital Filters Design Techniques, Rader and Gold.
- Páginas web