Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática Estatística e Física - IMEF

Programa de Incentivo à Matemática

P R I M A

Apostila de Pré-Cálculo

Alessandro da Silva Saadi
Felipe Morais da Silva

2019

Sobre os autores:

Alessandro da Silva Saadi

Graduado, especialista e mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG), atuou como professor de Matemática Financeira e Matemática Aplicada nos cursos de Administração de Empresas, Matemática, Ciências Econômicas e Ciências Contábeis na FURG. Atualmente é matemático da FURG e professor da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas (ETEGV) em Rio Grande.

Felipe Morais da Silva

Estudante do curso de Matemática Aplicada da FURG, atuou como bolsista no Programa de Incentivo à Matemática - PRIMA de 2013 a 2018.

SAADI, Alessandro da Silva, SILVA, Felipe Morais da. **Apostila de Pré-Cálculo**. Rio Grande: Gráfica da FURG, 2019.

Sumário

1 Conjuntos Numéricos **10**
1.1 Conjunto dos Números Naturais . . . 10
1.1.1 MDC e MMC de Números Naturais . . . 10
1.2 Conjunto dos Números Inteiros . . . 11
1.2.1 Números Inteiros Positivos e Números Inteiros Negativos . . . 11
1.2.2 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$ . . . 11
1.2.3 A Reta Numérica Inteira . . . 11
1.3 Conjunto dos Números Racionais . . . 12
1.3.1 Números Racionais Positivos e Negativos . . . 12
1.3.2 Números Decimais . . . 12
1.3.3 Representação Geométrica dos Números Racionais . . . 12
1.3.4 O Conjunto $\mathbb{Q}$ e Seus Subconjuntos . . . 13
1.4 Conjunto $\mathbb{I}$ dos Números Irracionais . . . 13
1.5 Conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais . . . 13
1.6 Módulo ou Valor Absoluto . . . 14
1.7 Números Opostos ou Simétricos . . . 15
1.8 Operações com Números Inteiros . . . 15
1.8.1 Adição . . . 15
1.8.2 Subtração . . . 17
1.8.3 Adição Algébrica . . . 17
1.8.4 Multiplicação . . . 19
1.8.5 Divisão . . . 20
1.9 As Frações . . . 21
1.9.1 Tipos de Frações . . . 21
1.9.2 Frações Equivalentes . . . 21
1.9.3 Simplificação de Frações . . . 22
1.9.4 Redução de Frações a um Mesmo Denominador . . . 23
1.9.5 Operações com Frações . . . 24
1.9.6 Multiplicação . . . 26
1.9.7 Divisão de Números Racionais . . . 26
1.10 Operações com Números Decimais . . . 27
1.10.1 Adição . . . 27
1.10.2 Substração . . . 28
1.10.3 Multiplicação . . . 28
1.10.4 Divisão . . . 29
1.11 Potenciação e Radiciação . . . 30
1.11.1 Potenciação de Números Inteiros e Racionais . . . 30
1.11.2 Raiz Quadrada Exata . . . 31
1.11.3 Raiz Quadrada de Números Racionais . . . 32
1.12 Expressões Numéricas . . . 32

2 Equações do 1° Grau **34**
2.1 Sentenças Matemáticas . . . 34
2.2 Sentenças Matemáticas Abertas . . . 34
2.3 Igualdade . . . 34
2.3.1 Princípios de Equivalência . . . 35
2.4 Equação . . . 35
2.5 Variável ou Incógnita de uma Equação . . . 35
2.6 Conjunto-Universo e Conjunto-Solução de uma Equação . . . 36
2.7 Como Verificar se um Número é Raiz de uma Equação . . . 37
2.8 Equações Equivalentes . . . 37
2.9 Princípios de Equivalência das Equações . . . 37
2.9.1 Princípio Aditivo . . . 37
2.9.2 Princípio Multiplicativo . . . 38

2.10 Resolução de uma Equação do 1° Grau com uma Variável . . . 39
2.10.1 Método Prático para Resolver Equações . . . 39
2.11 Casos Particulares de Equações do 1° Grau . . . 41

3 Sistemas de Equações do 1° Grau 42
3.1 Introdução . . . 42
3.2 Resolução de Sistema pelo Processo da Substituição . . . 43
3.3 Resolução de Sistema pelo Processo da Adição . . . 43
3.4 Resolução de Sistema pelo Processo da Comparação . . . 45
3.5 Problemas Envolvendo Sistemas de Equações de 1° Grau . . . 45

4 Razão, Proporção e Regra de Três 47
4.1 Razão . . . 47
4.1.1 Definição . . . 47
4.1.2 Termos de uma Razão . . . 47
4.1.3 Aplicações e Razões Especiais . . . 47
4.1.4 Mais Exemplos sobre Razões . . . 48
4.2 Proporção . . . 49
4.2.1 Definição . . . 49
4.2.2 Propriedade Fundamental das Proporções . . . 50
4.2.3 Cálculo do Termo Desconhecido Numa Proporção . . . 50
4.2.4 Propriedade da Soma . . . 51
4.2.5 Propriedade da Diferença . . . 51
4.2.6 Aplicação das Propriedades . . . 51
4.3 Regra de Três . . . 52
4.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais . . . 52
4.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais . . . 53
4.3.3 Regra de Três Simples . . . 53
4.3.4 Regra de Três Composta . . . 54
4.4 Porcentagem . . . 56
4.4.1 Problemas de Porcentagem . . . 57

5 Polinômios 59
5.1 Monômios . . . 59
5.1.1 Definição . . . 59
5.1.2 Grau do Monômio: . . . 59
5.1.3 Monômios Semelhantes . . . 59
5.1.4 Operações com Monômios . . . 59
5.2 Polinômios . . . 60
5.2.1 Classificação: . . . 61
5.2.2 Operações com Polinômios . . . 62

6 Produtos Notáveis 66
6.1 Quadrado da Soma de Dois Termos . . . 66
6.2 Quadrado da Diferença de Dois Termos . . . 66
6.3 Produto da Soma Pela Diferença de Dois Termos . . . 67
6.4 Produtos da Forma:$(x-p)(x-q)$ . . . 67
6.5 Outros Produtos Notáveis . . . 68

7 Fatoração de Polinômios 69
7.1 Colocação de um Fator Comum em Evidencia: . . . 69
7.2 Por Agrupamento . . . 70
7.3 Trinômio Quadrado Perfeito (TQP) . . . 71
7.4 Diferença de Dois Quadrados . . . 72
7.5 Trinômio do 2° Grau do tipo $x^2 - Sx + P$ . . . 73
7.6 Fatoração de expressões combinadas . . . 74
7.7 Soma ou Diferença de Dois Cubos . . . 75

8 Frações Algébricas 76
8.1 M.d.c e M.m.c de Polinômios . . . 76
8.1.1 M.d.c e M.m.c de Números Naturais . . . 76
8.1.2 M.d.c e M.m.c de Monômios . . . 76
8.1.3 M.d.c e M.m.c de Polinômios . . . 77
8.2 Frações Algébricas . . . 77
8.2.1 Simplificação de Frações Algébricas . . . 77
8.2.2 Operações com Frações Algébricas . . . 78

9 Potenciação e Radiciação **82**
9.1 Potenciação . . . 82
9.1.1 Definição . . . 82
9.1.2 Propriedades da Potenciação . . . 84
9.2 Radiciação . . . 86
9.2.1 Definição . . . 86
9.2.2 Raiz de Um Número Real . . . 86
9.2.3 Propriedades da Radiciação . . . 87
9.2.4 Simplificação de Radicais . . . 87
9.2.5 Potenciação com Expoente Racional . . . 89
9.2.6 Introdução de um Fator no Radical . . . 89
9.2.7 Redução de Radicais ao Mesmo Índice . . . 90
9.2.8 Operações com Radicais . . . 90
9.2.9 Racionalização de Denominadores . . . 93

10 Equações de 2° Grau **95**
10.1 Equações de 2° Grau . . . 95
10.1.1 Definição . . . 95
10.1.2 Coeficientes da Equação do 2° Grau . . . 95
10.2 Equações Completas e Equações Incompletas . . . 96
10.2.1 Forma Normal . . . 96
10.3 Raízes de uma Equação do 2° Grau . . . 97
10.4 Resolução de Equações Incompletas . . . 97
10.5 Resolução de Equações Completas . . . 100
10.5.1 Fórmula Resolutiva e Discriminante . . . 100
10.5.2 Resolução de Equações Completas por Meio da Fórmula Resolutiva . . . 101
10.5.3 Equação Literal Completa . . . 104
10.5.4 Relações Entre os Coeficientes e as Raízes da Equação do 2° Grau . . . 104
10.6 Equações Irracionais . . . 106
10.6.1 Introdução . . . 106
10.6.2 Definição . . . 107
10.6.3 Resolução . . . 107

11 Intervalos Numéricos **109**
11.1 Intervalos Numéricos . . . 109
11.1.1 Intervalo Aberto . . . 109
11.1.2 Intervalo Fechado . . . 109
11.1.3 Intervalos Semi-Abertos . . . 109
11.1.4 Intervalos Infinitos . . . 110
11.1.5 Operações com Intervalos . . . 110

12 Introdução à Funções **112**
12.1 Função . . . 112
12.1.1 Definição: . . . 112
12.1.2 Notação e Valor Numérico . . . 113
12.1.3 Domínio, Imagem e Contradomínio de uma Função . . . 113
12.1.4 Função Crescente e Função Decrescente . . . 115

13 Função Afim **118**
13.1 Definição . . . 118
13.2 Gráfico de Uma Função Afim . . . 119
13.3 Coeficientes a e b da função $y = ax + b$ . . . 121
13.3.1 Coeficiente a . . . 121
13.3.2 Coeficiente b . . . 121
13.4 Raiz ou Zero da Função Afim . . . 122
13.5 Sinal da Função Afim . . . 124
13.6 Resolução de Inequações . . . 127
13.7 Aplicações da Função Afim . . . 131

14 Função Quadrática **133**
14.1 Definição . . . 133
14.2 Raízes, Gráfico, Vértice e Sinal . . . 133
14.2.1 Raízes ou Zeros da Função Quadrática . . . 133
14.2.2 Gráfico da Função Quadrática . . . 135
14.2.3 Vértice da Parábola . . . 136
14.2.4 Ponto de intersecção da parábola com o eixo y . . . 138
14.2.5 Forma Prática para Construção do Gráfico de uma Função Quadrática . . . 139

14.2.6 Estudo do Sinal da Função Quadrática . . . 141
14.2.7 Exercícios Resolvidos . . . 145

15 Função Modular **147**
15.1 Módulo, Equações e Inequações Modulares e a Função . . . 147
15.1.1 Módulo ou Valor Absoluto . . . 147
15.1.2 Equação Modular . . . 147
15.1.3 Inequação Modular: . . . 148
15.1.4 Função Modular . . . 148
15.1.5 Gráfico: . . . 148
15.1.6 Exercícios Resolvidos . . . 150

16 Função Exponencial **153**
16.1 Introdução . . . 153
16.2 Definição . . . 155
16.3 Gráficos . . . 156
16.4 Comparação de Potências de Mesma Base . . . 156
16.4.1 Caso $a > 1$ . . . 156
16.4.2 Caso $0 < a < 1$ . . . 157
16.5 Equações Exponenciais . . . 157
16.6 Inequações Exponenciais . . . 158
16.7 A Constante de Euler e . . . 159
16.8 Aplicações: Crescimento e Decrescimento Exponencial . . . 159
16.9 Exercícios Resolvidos . . . 160

17 Função Logarítmica **165**
17.1 Introdução aos Logaritmos . . . 165
17.2 Definição . . . 165
17.3 Bases Especiais . . . 166
17.4 Consequências da Definição . . . 166
17.5 Propriedades Operatórias dos Logaritmos . . . 167
17.6 Função Logarítmica . . . 168
17.6.1 Definição: . . . 168
17.6.2 Gráficos: . . . 168
17.7 Exercícios Resolvidos . . . 168

18 Trigonometria **171**
18.1 Estudo do Triângulo Retângulo . . . 171
18.2 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo . . . 173
18.3 Ângulos Notáveis . . . 175
18.3.1 As Razões Trigonométricas de 30°, 45° e 60° . . . 175
18.4 Arcos e Ângulos . . . 177
18.4.1 Arcos de Circunferência . . . 177
18.4.2 Medida de um Arco . . . 177
18.4.3 Conversão de Unidades de Medidas de Ângulos . . . 178
18.4.4 Ciclo Trigonométrico . . . 179
18.4.5 Quadrante . . . 179
18.4.6 Arcos Côngruos . . . 179
18.5 Funções Trigonométricas . . . 181
18.5.1 A Função Seno . . . 181
18.5.2 Função Seno . . . 182
18.5.3 A Função Cosseno . . . 184
18.5.4 Função Cosseno . . . 184
18.5.5 Redução ao 1° Quadrante . . . 185
18.5.6 A Função Tangente . . . 188
18.5.7 Função Tangente . . . 189
18.6 Outras Relações Trigonométricas . . . 190
18.7 Relações Trigonométricas Fundamentais . . . 191
18.8 Identidades Trigonométricas . . . 192
18.9 Arcos Trigonométricos . . . 193
18.9.1 Soma e Diferença . . . 193
18.9.2 Arco Duplo . . . 195

19 Matrizes **197**
19.1 Matrizes: Introdução e Notação Geral . . . 197
19.1.1 Introdução . . . 197
19.1.2 Notação Geral . . . 198
19.1.3 Exercícios Resolvidos . . . 198
19.2 Tipos de Matrizes . . . 198
19.3 Igualdade de Matrizes e Operações . . . 200
19.3.1 Igualdade de Matrizes . . . 200
19.3.2 Operações Simples Envolvendo Matrizes . . . 200
19.3.3 Multiplicação de Matrizes . . . 203
19.4 Matriz Inversa . . . 204

20 Determinantes **207**
20.1 Introdução . . . 207
20.2 Determinantes: Regra de Sarrus . . . 208

21 Sistemas Lineares **210**
21.1 Sistemas Lineares . . . 210
21.1.1 Resolução de Sistemas Lineares . . . 210
21.1.2 Classificação dos Sistemas Lineares . . . 211
21.1.3 Matrizes e Resoluções de Sistemas . . . 212
21.1.4 Discussão de um Sistema Linear . . . 215
21.1.5 Algumas Aplicações de Sistemas Lineares . . . 218

Apresentação

Sobre o Programa de Incentivo à Matemática

O Programa de Incentivo à Matemática - **PRIMA** é um programa que tem o intuito de colaborar com os estudantes de graduação da FURG, incentivando as ações que contribuam no aprendizado da Matemática.

O curso de Pré-Cálculo é um curso de Matemática básica modalidade à distância com duração de até 10 semanas, onde o próprio estudante organiza seus horários de estudos.

Objetivos: Retomar os conteúdos de Matemática Básica de nível fundamental e médio indispensáveis para as disciplinas que envolvem Matemática em nível superior a fim de promover as condições necessárias à formação acadêmica do(a) estudante.

Contato:

- Site: www.prima.furg.br
- E-mail: prima@furg.br
- E-mail: alessandrosaadi@furg.br

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1 Conjunto dos Números Naturais

Os números: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$ são chamados de **números naturais.**

Esses números formam uma coleção, que chamamos de **conjunto dos números naturais**.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Observação: Alguns livros e autores de Matemática definem o conjunto dos números naturais iniciando com o zero (0).

Os números naturais formam uma **sequência** na qual cada número, a partir do 1, é **um a mais do que o anterior**.

Os números naturais formam uma sequência que "*não tem fim*", ou seja, **existem infinitos números naturais**. Usamos reticências para indicar esse fato.

1.1.1 MDC e MMC de Números Naturais

Definição MDC: O *máximo divisor comum* **MDC** de dois ou mais números é igual ao produto dos fatores comuns a esses números, cada um deles elevado ao menor de seus expoentes.	**Definição MMC:** O *mínimo múltiplo comum* **MMC** de dois ou mais números é igual ao produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao maior de seus expoentes.

Para calcular o **MDC** e o **MMC** de dois ou mais números naturais, aplicamos as seguintes técnicas:

1º) Decompõem-se os números em fatores primos (pode-se utilizar o algoritmo prático).

2º) Aplicam-se as definições de MDC e MMC.

Exemplo: Calcular o MDC e o MMC dos números 24, 36 e 60.

24	2	36	2	60	2	--→ Algoritmo prático: divide-se o número pelo menor número primo possível
12	2	18	2	30	2	--→ O resultado da divisão é colocado na próxima linha
6	2	9	3	15	3	--→ Repete-se o procedimento até chegar ao quociente 1
3	3	3	3	5	5	--→ A forma fatorada do número é o produto dos fatores primos que estão
1		1		1		à direita

$24 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
Aplicando as definições de MDC e MMC, temos:

$\boxed{\text{MDC}(24;36;60) = 2^2 \cdot 3 = 12}$ $\boxed{\text{MMC}(24;36;60) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360}$

As mesmas regras se aplicam para determinação do MDC ou MMC de **monômios** e de **polinômios.**

1.2 Conjunto dos Números Inteiros

Observe que, no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, a operação de subtração nem sempre é possível.

Exemplos:

a) $5 - 3 = 2$ (é possível: $2 \in \mathbb{N}$)

b) $9 - 8 = 1$ (é possível: $1 \in \mathbb{N}$)

c) $3 - 5 =?$ (é impossível em $\mathbb{N}$)

Para tornar possível a subtração, foi criado o conjunto dos números inteiros negativos.

1.2.1 Números Inteiros Positivos e Números Inteiros Negativos

Para todo número natural n, foi criado:

- Um número $+n$ (lê-se: mais n) chamado **número inteiro positivo**.
  Exemplo:
  $+1, +2, +3, +4, +5,...$ são números inteiros positivos.

- Um número $-n$ (lê-se: menos n) chamado **número inteiro negativo**.
  Exemplo:
  $-1, -2, -3, -4, -5,...$ são números inteiros negativos.
  Reunindo os números inteiros negativos, o número zero e os números inteiros positivos obtém-se o **conjunto dos números inteiros,** que se representa pela letra $\mathbb{Z}$ e é escrito:
  $\mathbb{Z} = \{... - 5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$

1.2.2 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Sabemos que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é subconjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Existem outros subconjuntos importantes:

- Conjunto dos números inteiros diferentes de zero $= \mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, +1, +2, +3, ...\}$.
- Conjunto dos números inteiros não negativos $= \mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos $= \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros positivos $= \mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, ...\}$
- Conjunto dos números inteiros negativos $= \mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, ...\}$

1.2.3 A Reta Numérica Inteira

- Cada ponto é a **imagem geométrica** de um número inteiro.
- O número inteiro chama-se **abscissa** do ponto correspondente.
- O ponto O é chamado de **origem** e sua abscissa é zero.
- A reta r é chamada **reta numérica inteira**.

1.3 Conjunto dos Números Racionais

Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde:

- a e b são números inteiros;
- $b \neq 0$

1.3.1 Números Racionais Positivos e Negativos

Então, são números racionais:

Os números inteiros positivos:	Os números inteiros negativos:	Os números fracionários positivos:	Os números fracionários negativos:
Exemplos: $1 = \frac{1}{1}$ e $2 = \frac{2}{1}$	**Exemplos:** $-1 = -\frac{1}{1}$ e $-2 = -\frac{2}{1}$	**Exemplos:** $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$	**Exemplos:** $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{4}$

Observação: O número 0 também é racional pois $0 = \frac{0}{1}$.

Os números $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{10}{3}, ...$ são chamados **números racionais positivos**.

Os números $-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{10}{3}, ...$ são chamados **números racionais negativos**.

1.3.2 Números Decimais

Um número racional também pode ser representado por um número decimal exato ou periódico.
Exemplos:

a) $\frac{7}{2} = 3,5$ --→ divide-se o numerador pelo denominador da fração e obtém-se o número na forma decimal.

b) $-\frac{4}{5} = -0,8$

c) $\frac{1}{3} = 0,333...$

d) $\frac{4}{9} = 0,444...$

e) $\frac{23}{99} = 0232323...$

Os itens *c, d* e *e* são chamados de **dízimas periódicas** e podem ser representados ainda por: $0,\overline{3}$; $0,\overline{4}$ e $0,\overline{23}$ respectivamente.

1.3.3 Representação Geométrica dos Números Racionais

Observe que os números inteiros e racionais podem ser representados por pontos de uma reta.

- Os pontos que estão à direita do *zero* chamam-se **positivos.**
  Os pontos **negativos** estão à esquerda do *zero.*
- Dados dois números quaisquer, o que está mais à direita é o **maior** deles, e o que está mais à esquerda, o **menor** deles.

Exemplos:

a) $+2 > -3$ --→ ($+2$ está à direita de -3).

b) $-2 < +1$ --→ (-2 está à esquerda de $+1$).

c) $-\frac{3}{2} < \frac{1}{5}$ --→ ($-\frac{3}{2}$ está à esquerda de $\frac{1}{5}$).

d) $\frac{5}{3} > -\frac{5}{2}$ --→ ($\frac{5}{3}$ está à direita de $-\frac{5}{2}$).

1.3.4 O Conjunto $\mathbb{Q}$ e Seus Subconjuntos

O conjunto formado pelos números racionais positivos, pelo número zero e pelos números racionais negativos chama-se **conjunto dos números racionais**, que se representa pela letra $\mathbb{Q}$.

Subconjuntos de $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}$ - $\{0\}$;
- $\mathbb{Q}_+$ = conjunto dos números racionais não negativos (formado por zero e por todos os positivos);
- $\mathbb{Q}_-$ = conjunto dos números racionais nao positivos (formado pelo zero e por todos os negativos);
- $\mathbb{Q}^*_+$= conjunto dos números racionais positivos;
- $\mathbb{Q}^*_-$= conjunto dos números racionais negativos.

1.4 Conjunto $\mathbb{I}$ dos Números Irracionais

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como fraçóes com numerador e denominador inteiro - os números racionais que acabamos de estudar -, há os que não admitem tal representação. Trata-se dos números decimais que possuem representação infinita não periódica.
Vejamos alguns exemplos

- O número 0,21211211121111... não é dízima periódica, pois os algarismos apósa virgula não repetem periodicamente.
- O número 1,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é dizima periódica.
- Os números $\sqrt{2} = 1,4142135...$, $\sqrt{3} = 1,7320508...$ e $\pi = 3,141592...$, por não apresentarem representação infinita periódica, tamém não são números racionais. Lembre-se de que o número π representa o quociente entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro.

Um número cuja representação decimal infinita é não periodica é chamado **número irracional**,e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$. A representação decimal do número $\sqrt{2}$, apresentada anteriormente, não garante, aparentemante, que $\sqrt{2}$ seja irracional.

1.5 Conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais

O conjunto formado pela reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é chamado **conjunto dos númeors reais** e é representado por $\mathbb{R}$.
Assim, temos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

Temos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
Observe: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
Além desses ($\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

- O conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

- O conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$$

- O conjuto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

- O conjunto dos números reais não positivos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant 0\}$$

- O conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$$

Observe que cada um desses cinco conjuntos contém números racionais e números irracionais.

Observação: Operações com os números irracionais será vista nas próximas aulas.

1.6 Módulo ou Valor Absoluto

O **módulo ou valor absoluto de um número inteiro ou racional** é a distância do número até a origem, isto é, é a distância do número até o zero (0). Assim, o módulo de um número é sempre positivo.

Um número, com exceção do zero, é formado de dois elementos:

- um sinal ($+$ *ou* $-$).
- um número natural ou um número fracionário ou um número decimal.

Exemplos:

1. O módulo do número inteiro $+4$ é 4.
   Indica-se: $|+4| = 4$
2. O módulo do número inteiro -6 é 6.
   Indica-se: $|-6| = 6$
3. O módulo do número racional $+\dfrac{3}{7}$ é $\dfrac{3}{7}$.
   Indica-se: $\left|+\dfrac{3}{7}\right| = \dfrac{3}{7}$
4. O módulo do número racional $-\dfrac{2}{5}$ é $\dfrac{2}{5}$.
   Indica-se: $\left|-\dfrac{2}{5}\right| = \dfrac{2}{5}$
5. O módulo do número decimal $-0,232$ é $0,232$.
   Indica-se: $|-0,232| = 0,232$

Observa-se que $|0| = 0$.

1.7 Números Opostos ou Simétricos

Observe os seguintes números:

a) 5 e -5 possuem módulos iguais e sinais diferentes.

b) -8 e 8 possuem módulos iguais e sinais diferentes.

c) $+\frac{3}{8}$ e $-\frac{3}{8}$ possuem módulos iguais e sinais diferentes.

d) $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ possuem módulos iguais e sinais diferentes.

Dois números (inteiros ou racionais) que possuem módulos iguais e sinais diferentes são chamados **números opostos** ou **simétricos**.

Assim, o oposto de -3 é $+3$, o oposto de $+9$ é -9, o oposto de $+\frac{5}{4}$ é $-\frac{5}{4}$ e o oposto de $-\frac{3}{2}$ é $+\frac{3}{2}$.

Observação: O oposto de *zero* é o próprio *zero*.

1.8 Operações com Números Inteiros

1.8.1 Adição

1º caso: As parcelas tem o mesmo sinal

A soma de dois números positivos é um número positivo e a soma de dois números negativos é um número negativo.

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+13)+(+10)=+23$	$+13+10=+23=23$
$(-3)+(-6)=-9$	$-3-6=-9$

Observação: Escrevemos a soma dos números inteiros sem colocar o sinal + da adição e eliminamos os parênteses das parcelas.

Na adição de números inteiros com sinais iguais, conserva-se os sinais e soma-se os módulos.

2º caso: As parcelas tem sinais diferentes

A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se os valores absolutos (módulos), dando-se o sinal do número que tiver maior valor absoluto.

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+23)+(-9)=+14$	$+23-9=+14$
$(+7)+(-25)=-18$	$+7-25=-18$

Observação: Escrevemos a soma dos números inteiros sem colocar o sinal + da adição e eliminamos os parênteses das parcelas.

Na adição de números inteiros com sinais diferentes, subtrai-se os módulos, dando-se o sinal da parcela que tiver maior módulo.

3º caso: As parcelas são números opostos

Quando as parcelas são números opostos, a soma é igual a *zero*.

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+8)+(-8)=0$	$+8-8=0$
$(-20)+(+20)=0$	$-20+20=0$

4º caso: Uma das parcelas é zero

Quando um dos números dados é zero, a soma é igual ao outro número.

Com parênteses	*Simplificando a maneira de escrever*
$(+8)+0=+8$	$+8+0=+8$
$(-12)+0=-12$	$-12+0=-12$

5º caso: Soma de três ou mais números inteiros

Calcula-se:
- a soma de todas as parcelas positivas;
- a soma de todas as parcelas negativas;
- a soma dos resultados obtidos conforme os casos anteriores.

Exemplos:

a) $+10-7-1=+10+\underbrace{(-7-1)}_{-8}=+10-8=2$

b) $-6+3+9-10=\underbrace{(+3+9)}_{+12}+\underbrace{(-6-10)}_{-16}=+12-16=-4$

Propriedades Estruturais da Adição

1. **Fechamento:** a soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
   $+2+6=+8\in\mathbb{Z}$ $\quad -4-2=-6\in\mathbb{Z}$
   $+5-8=-3\in\mathbb{Z}$ $\quad +9-5=4\in\mathbb{Z}$

2. **Comutativa:** a ordem das parcelas não altera a soma.
   $+6-8=-2$
   $-8+6=-2$
   Note que: $(+6)+(-8)=(-8)+(+6)$

3. **Elemento neutro:** o número *zero* é o elemento neutro da adição.
   $0+5=5+0=5$
   $0-2=-2+0=-2$

4. **Associativa:** na adição de três números inteiros, podemos associar os dois primeiros ou os dois últimos, sem que isso altere o resultado.
   $\underbrace{[(+3)+(-1)]}_{+2}+(+4)=+6=+3\underbrace{[(-1)+(+4)]}_{+3}$

5. **Elemento simétrico:** qualquer número inteiro admite um simétrico ou oposto.
   $(+5)+(-5)=0$
   $(-3)+(+3)=0$

Indicação Simplificada

Podemos dispensar o sinal + da primeira parcela quando esta for positiva, bem como do resultado.

Exemplos:

a) $(+7)+(-5)=\underbrace{7}_{sem\ sinal\ +}\quad -5=\underbrace{2}_{sem\ sinal\ +}$

b) $(-2)+(+8)=-2+8=\underbrace{6}_{sem\ sinal\ +}$

1.8.2 Subtração

É uma operação inversa à da adição.

Exemplos:

a) $(+8) - (+4) = (+8) + (-4) = 8 - 4 = 4$

b) $(-6) - (+9) = (-6) + (-9) = -6 - 9 = -15$

c) $(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = 5 + 2 = 7$

Para subtrairmos dois números inteiros, basta que adicionemos ao primeiro o oposto do segundo.

Observação: A subtração no conjunto $\mathbb{Z}$ goza apenas da propriedade do fechamento.

Eliminação de Parênteses Precedidos de Sinal Negativo

Para facilitar o cálculo, eliminamos os parênteses usando o significado do oposto.

Exemplos:

a) $-(+8) = -8$ (significa:*o oposto de* $+8$ *é* -8)

b) $-(-3) = 3$ (significa:*o oposto de* -3 *é* $+3$)

Mais exemplos:

a) $-(+8) - (-3) = -8 + 3 = -5$

b) $(+10) - (-3) - (+3) = 10 + 3 - 3 = 10$

c) $(-10) - (-5) = -10 + 5 = -5$

1.8.3 Adição Algébrica

Podemos reprensentar de modo mais simples uma adição de números inteiros. Para isso:

1º) Eliminam-se o sinal de $+$ da operação e os parênteses das parcelas.

2º) Escrevem-se as parcelas, uma em seguida à outra, cada qual com o próprio sinal.

Exemplos:

a) $(+5) + (-8) = 5 - 8 = -3$

b) $(+3) + (-9) + (+10) = 3 - 9 + 10 = \underbrace{3 + 10}_{+13} - \underbrace{9}_{-9} = 4$

c) $(-2) + (+3) - (+8) - (-6) = -2 + 3 - 8 + 6 = \underbrace{-2 - 8}_{-10} + \underbrace{3 + 6}_{+9} = -1$

Cálculo da Adição Algébrica

Observe os exemplos:

a) $12 - 20 = -8$

b) $-4 - 6 = -10$

c) $12 - 9 = 3$

d) $-5 + 8 + 1 = \underbrace{-5}_{-5} + \underbrace{8 + 1}_{+9} = 4$

e) $6 - 10 - 5 + 8 = \underbrace{6 + 8}_{+14} \underbrace{-10 - 5}_{-15} = -1$

Regras para Eliminação de Parênteses

Vale a pena LEMBRAR!!!

1º caso:

Um parêntese precedido pelo sinal + pode ser eliminado, juntamente com o sinal + que o precede, escrevendo-se os números contidos no seu interior com o mesmo sinal .

Exemplos:

- $+(+6) = 6$
- $+(-5) = -5$
- $+(+2-3) = 2-3 = -1$

2º caso:

Um parêntese precedido pelo sinal − pode ser eliminado, juntamente com o sinal − que o precede, escrevendo-se os números contidos no seu interior com os sinais trocados .

Exemplos:

- $-(+6) = -6$
- $-(-5) = +5 = 5$
- $-(+2-3) = -2+3 = 1$

Simplificação de Expressões Numéricas

- Para a eliminação de colchetes e chaves valem as regras do item anterior.
- A eliminação de um sinal de associação se faz a partir do mais interno.

Exemplos:
Eliminando parênteses, colchetes e chaves, calcular as somas algébricas:

a) $10 + (-3+5) =$
$= 10 - 3 + 5 =$
$= +15 - 3 =$
$= 12$

b) $3 - [-4 + (-1+6)] =$
$= 3 - [-4 - 1 + 6] =$
$= 3 + 4 + 1 - 6 =$
$= +8 - 6 =$
$= 2$

c) $2 - \{-3 + [+5 - (-1+3)] + 2\} =$
$= 2 - \{-3 + [+5 + 1 - 3] + 2\} =$
$= 2 - \{-3 + 5 + 1 - 3 + 2\} =$
$= 2 + 3 - 5 - 1 + 3 - 2 =$
$= +8 - 8 =$
$= 0$

1.8.4 Multiplicação

• Se os fatores têm o **mesmo sinal**, o produto é **positivo.**
Exemplos:

a) $(+3).(+8) = 24$ --→ Note que: $(+3).(+8) = 3.(+8) = +8 + 8 + 8 = 24$

b) $(-5).(-4) = 20$ --→ Note que: $(-5).(-4) = -(5).(-4) = -(-20) = 20$

• Se os fatores têm **sinais diferentes**, o produto é **negativo.**
Exemplos:

a) $(+3).(-2) = -6$

b) $(-5).(+4) = -20$

Quadro de sinais da multiplicação

1.º fator	2.º fator	Produto	
$(+)$	$(+)$	$+$	**SINAIS IGUAIS: o resultado é positivo**
$(-)$	$(-)$	$+$	**SINAIS IGUAIS: o resultado é positivo**
$(+)$	$(-)$	$-$	**SINAIS DIFERENTES: o resultado é negativo**
$(-)$	$(+)$	$-$	**SINAIS DIFERENTES: o resultado é negativo**

Exemplos:

a) $(+6).(-3) = -18$

b) $(-9).(+5) = -45$

Multiplicação de Três ou Mais Números Inteiros

Multiplicamos o primeiro pelo segundo. O produto obtido pelo terceiro e, assim, sucessivamente, até o último fator.
Exemplos:

a) $(-5).(+6).(-2) = \underbrace{(-5).(+6)}_{-30}.(-2) = (-30).(-2) = +60 = 60$

b) $(-3).(-4).(-5).(-6) = \underbrace{(-3).(-4)}_{+12}.\underbrace{(-5).(-6)}_{+30} = 12.30 = 360$

Propriedades Estruturais da Multiplicação

1. **Fechamento:** o produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
   $(+2).(+6) = +12 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(+2).(-6) = -12 \in \mathbb{Z}$
   $(-2).(-6) = +12 \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $(-2).(+6) = -12 \in \mathbb{Z}$

2. **Comutativa:** a ordem dos fatores não altera o produto.
   $(+5).(-4) = -20$
   $(-4).(+5) = -20$
   $\Longrightarrow (+5).(-4) = (-4).(+5)$

3. **Elemento Neutro:** o número $+1$ é o elemento neutro da multiplicação.
   $(-10).(+1) = (+1).(-10) = -10$
   $(+6).(+1) = (+1).(+6) = 6$

4. **Associativa:** na multiplicação de três números inteiros, podemos associar os dois primeiros ou os dois últimos, sem que isso altere o resultado.
$\underbrace{[(-2).(+6)]}_{-12}.(-10) = 120 = (-2)\underbrace{[(+6).(-10)]}_{-60} = 120$

5. **Distributiva:** para multiplicar um número inteiro por uma soma algébrica, podemos multiplicar o número por cada uma das parcelas e adicionar, a seguir, os resultados obtidos.
$(+5).(-3+6) = \underbrace{(+5).(-3)}_{-15} + \underbrace{(+5).(+6)}_{+30} = 15$

$-9.(-3+7) = \underbrace{(-9).(-3)}_{+27} + \underbrace{(-9).(+7)}_{-63} = -36$

1.8.5 Divisão

- Se o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é positivo.

  Exemplos:

  a) $(+15) : (+3) = 5$

  b) $(-36) : (-9) = 4$

- Se o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é negativo.

  Exemplos:

  a) $(+18) : (-2) = -9$

  b) $(-30) : (+6) = -5$

Quadro de sinais da divisão

1º fator	2º fator	Quociente
(+)	(+)	+
(−)	(−)	+
(+)	(−)	−
(−)	(+)	−

Observação:

- Não existe a divisão de um número inteiro por zero.

- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto $\mathbb{Z}$.

Exemplos:

a) $(+1) : (+3)$

b) $(-5) : (+2)$

Observação 1: Notem que estas operações não podem ser realizadas em $\mathbb{Z}$, pois o resultado não é um número inteiro.

Observação 2: Essas operações poderão ser feitas no conjunto $\mathbb{Q}$.

1.9 As Frações

1.9.1 Tipos de Frações

Observe as figuras:

$\frac{3}{4}$

A figura acima nos mostra a fração $\frac{3}{4}$, na qual o numerador é menor do que o denominador. Essa fração é chamada de **fração própria.**

$\frac{5}{4}$

A figura acima nos mostra a fração $\frac{5}{4}$, na qual o numerador é maior que o denominador. Essa fração é chamada **fração imprópria**.

$\frac{4}{4} = 1\ inteiro$ $\frac{16}{8} = 2\ inteiros$

As figuras acima nos mostram frações cujo numerador é múltiplo do denominador. Essas frações são chamadas **frações aparentes.**

1.9.2 Frações Equivalentes

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4}$

$\frac{3}{6}$

$\frac{6}{12}$

Observando a figura acima, notamos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ representam a mesma parte da unidade tomada. Verificamos que existem frações diferentes que representam a mesma parte do todo. Assim:

Duas ou mais frações que representam a mesma parte do todo são chamadas de **frações equivalentes.**

Exemplos:

São frações equivalentes:

a) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$

b) $\frac{12}{16}, \frac{6}{8}, \frac{3}{4}$

Propriedade Fundamental

1. Multiplicando os termos de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração dada.
   Exemplo:

   $$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \longrightarrow \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

   $$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \longrightarrow \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

2. Dividindo, quando possível, os termos de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração dada.
   Exemplo:

   $$\frac{12}{16} = \frac{6}{8} \longrightarrow \frac{12 \div 2}{16 \div 2} = \frac{6}{8}$$

   $$\frac{12}{16} = \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$$

1.9.3 Simplificação de Frações

Fração Irredutível

Quando os termos de uma fração são primos entre si, diz-se que a fração é irredutível.

Exemplos:

São frações irredutíveis:

a) $\frac{3}{5}$, note que o numerador 3 e o denominador 5 não possuem divisor comum diferente de 1.

b) $\frac{7}{10}$, note que o numerador 7 e o denominador 10 não possuem divisor comum diferente de 1.

c) $\frac{4}{9}$, note que o numerador 4 e o denominador 9 não possuem divisor comum diferente de 1.

Processo para Simplificar uma Fração

Simplificar uma fração significa obter outra equivalente à fração dada, cujos termos sejam primos entre si.

Exemplo:

Vamos simplificar a fração $\frac{48}{72}$, cujos termos não são primos entre si.

Dividindo-se, sucessivamente, os termos da fração por um fator comum:

$$\frac{48}{72} = \frac{48 \div 2}{72 \div 2} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3} \dashrightarrow \text{fração irredutível}$$

1.9.4 Redução de Frações a um Mesmo Denominador

Sejam as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Pela equivalência de frações, temos: $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Então:

$$\begin{array}{ccccl} \frac{5}{6}, & \frac{1}{3} & \text{e} & \frac{3}{4} & \longrightarrow \text{frações com denominadores diferentes} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \frac{10}{12}, & \frac{4}{12} & \text{e} & \frac{9}{12} & \longrightarrow \text{frações equivalentes com o mesmo denominador} \end{array}$$

Podemos sempre reduzir duas ou mais frações, com denominadores diferentes a um mesmo denominador. Veja a seguir.

Processo Geral

Exemplo:

Sejam as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$.

Vamos multiplicar os termos da primeira fração pelo denominador 5 da segunda fração e os termos da segunda pelo denominador 3 da primeira:

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$$

Processo Prático

Essa redução se torna mais fácil quando aplicamos a seguinte regra prática:

Para se reduzirem duas ou mais frações ao menor denominador comum:
1º) Calcula-se o MMC dos denominadores das frações dadas; esse MMC. será o denominador comum
2º) Divide-se o denominador comum pelo de denominador de cada fração e multiplica-se o resultado obtido pelo respectivo numerador

Exemplo:

Reduzir as frações $\frac{2}{3}$ *e* $\frac{4}{5}$ ao mesmo denominador comum.

MMC(3,5)=15

$$\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{(15 \div 3) \times 2}{15} & \frac{(15 \div 5) \times 4}{15} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{5 \times 2}{15} & \frac{3 \times 4}{15} \\ \downarrow & \downarrow \\ \frac{10}{15} & \frac{12}{15} \end{array}$$

1.9.5 Operações com Frações

Adição Algébrica

1º CASO) As frações tem o mesmo denominador

Seja calcular $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Quando as frações tem o mesmo denominador, mantem-se o denominador comum e somam-se ou subtraem-se os numeradores.

Exemplos:

? Calcule as somas algébricas das frações:

(a) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5+2}{8} = \frac{7}{8}$

(b) $\frac{5}{4} - \frac{11}{4} = \frac{5-11}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

2º CASO) As frações têm denominadores diferentes

Seja calcular: $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

Observando o gráfico, vemos que adicionar $\frac{1}{2}$ com $\frac{2}{5}$ é o mesmo que adicionar $\frac{5}{10}$ com $\frac{4}{10}$, ou seja:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10}}_{\textit{reduzimos ao mesmo denominador}} = \frac{9}{10}$$

Quando as frações tem denominadores diferentes, devemos, em primeiro lugar, reduzi-las ao mesmo denominador comum para, em seguida, efetuar a adição ou a subtração.

Na prática, encontramos o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores e prosseguimos como nos exemplos

Exemplos:

? Calcule as somas algébricas das frações:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

Calculando o MMC(2,4) = 4

$$\begin{array}{r|l} 2,4 & 2 \times \\ 1,2 & 2 \times \\ 1,1 & 4 \end{array}$$

$$\frac{4 \div (2) \times 1}{4} + \frac{4 \div (4) \times 3}{4} = \frac{2 \times 1}{4} + \frac{1 \times 3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

(b) $\frac{3}{2} - \frac{4}{5} =$

MMC(2,5) = 10

$$\begin{array}{r|l} 2,5 & 2 \times \\ 1,5 & 5 \times \\ 1,1 & 10 \end{array}$$

$$\frac{10 \div (2) \times 3}{10} - \frac{10 \div (5) \times 4}{10} = \frac{5 \times 3}{10} - \frac{2 \times 4}{10} = \frac{15-8}{10} = \frac{7}{10}$$

(c) $-\frac{1}{1} - \frac{2}{3} =$

mmc(3,1) = 3

$$\frac{3 \div (1) \times (-1)}{3} - \frac{3 \div (3) \times 2}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

? Mais exemplos:

(a) $-\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{-15+8}{20} = \frac{-7}{20} = -\frac{7}{20}$

(b) $\frac{3}{5} - 2 = \frac{3-10}{5} = -\frac{7}{5}$

(c) $\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{6-10+9}{12} = \frac{5}{12}$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule as seguintes somas algébricas:

(a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{4} =$ MMC(5,10,4)

$$\begin{array}{r|l} 5,10,4 & 2 \\ 5,5,2 & 2 \times \\ 5,5,1 & 5 \times \\ 1,1,1 & 20 \end{array}$$

$$\frac{20 \div (5) \times 3}{20} + \frac{20 \div (10) \times 1}{20} - \frac{20 \div (4) \times 3}{20} = \frac{12}{20} + \frac{2}{20} - \frac{15}{20} = \frac{-1}{20}$$

(b) $\frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$ MMC(3,2,1) $= 3 \times 2 \times 1 = 6$

$$\frac{6 \div (1) \times 2}{6} - \frac{6 \div (2) \times 1}{6} - \frac{6 \div (3) \times 1}{6} = \frac{12}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

(c) $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$ MMC(1,2,4,8) :

$$\begin{array}{r|l} 1,2,4,8 & 2 \\ 1,1,2,4 & 2 \times \\ 1,1,1,2 & 2 \times \\ 1,1,1,1 & 8 \end{array}$$

$$\frac{8 \div (1) \times 1}{8} - \frac{8 \div (2) \times 1}{8} - \frac{8 \div (4) \times 1}{8} + \frac{8 \div (8) \times 1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{4}{8} - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

1.9.6 Multiplicação

Para multiplicarmos números racionais, procedemos do seguinte modo:

- Multiplicamos os numeradores entre si.
- Multiplicamos os denominadores entre si.
- Aplicamos as regras de sinais da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Exemplos Resolvidos

1. Calcule os produtos:

   a) $\left(+\frac{1}{7}\right).\left(+\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{35}$

   b) $\left(\frac{3}{4}\right).\left(\frac{-3}{5}\right) = -\frac{9}{20}$

   c) $\left(\frac{-1}{3}\right).(-2) = \left(\frac{-1}{3}\right).\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{3}$

   d) Quando possível, aplicamos a técnica do cancelamento.

   i) $\left(\frac{\cancel{3}}{4}\right).\left(\frac{5}{\cancel{3}}\right) = \frac{5}{4}$

   ii) $\left(\frac{-\cancel{2}}{3}\right).\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$

2. Calcule os produtos:

   a) $\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10}$

   b) $\left(-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

   c) $\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$

   d) $\left(\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{2}{1}\right) = -\frac{6}{5}$

1.9.7 Divisão de Números Racionais

Números Inversos

Os números racionais $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ são chamados inversos, pois $\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = 1$, isto é, quando multiplica-se um número pelo seu inverso o resultado é 1.

Divisão

Para se dividir uma fração por outra, deve-se multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor.
Ou ainda:
Para se dividir uma fração por outra, deve-se manter a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração

Exemplos

1. Calcule os seguintes quocientes:

(a) $\left(\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{8}$

(b) $\left(-\frac{5}{8}\right) : \left(\frac{5}{7}\right) = \left(-\frac{\cancel{5}}{8}\right) \times \left(\frac{7}{\cancel{5}}\right) = -\frac{7}{8}$

(c) $\left(-\frac{4}{9}\right) : \left(-\frac{2}{1}\right) = \left(-\frac{\cancel{4}}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = \left(-\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{2}{9}$

(d) $\left(\frac{2}{1}\right) : \left(-\frac{5}{1}\right) = \left(\frac{2}{1}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}$

2. Calcule o valor de:

(a) $\dfrac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = -\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = -\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}$

(b) $\dfrac{3 - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{12-1}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{11}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{11}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

(c) $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{2-1}{4}}{\frac{4+1}{6}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{4} : \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

(d) $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}}{-1 - \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{4-2+3}{8}}{\frac{-3-2}{3}} = \dfrac{\frac{5}{8}}{-\frac{5}{3}} = \frac{5}{8} \div \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{5}{8} \times \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{\cancel{5}}{8} \times \frac{-3}{\cancel{5}} = -\frac{3}{8}$

1.10 Operações com Números Decimais

1.10.1 Adição

Considere a seguinte adição:
$2,27 + 2,5 + 0,018$
Transformando em frações decimais, temos:

$$\frac{227}{100} + \frac{25}{10} + \frac{18}{1000} = \frac{2270}{1000} + \frac{2500}{1000} + \frac{18}{1000} = \frac{4788}{1000} = 4,788$$

Método Prático

1. Igualamos o números de casas decimais, com o acréscimo de zeros;
2. Colocamos vírgula debaixo de vírgula;
3. Efetuamos a adição, colocando a vírgula na soma alinhada com as demais.

Exemplo:

Encontre a soma:

a) $2,27 + 2,5 + 0,018$	b) $25,4 + 0,25 + 32$	c) $3,14 + 2,8 + 0,001$
2,270	25,40	3,140
+2,500	+ 0,25	2,800
+0,018	+32,00	+0,001
4,788	57,65	5,941

1.10.2 Substração

Considere a seguinte subtração:
$4,1 - 2,014$
Transformando em fração decimais, temos:

$$\frac{41}{10} - \frac{2014}{1000} = \frac{4100}{1000} - \frac{2014}{1000} = \frac{2086}{1000} = 2,086$$

Método Prático

1. Igualamos o números de casas decimais, com o acréscimo de zeros;
2. Colocamos vírgula debaixo de vírgula;
3. Efetuamos a subtração, colocando a vírgula na diferença, alinhada com as demais.

Exemplo:

Encontre o resultado das subtrações:

a) $4,1 - 2,014$	b) $8,372 - 1,2$	c) $5 - 2,2541$
4,100	8,372	5,0000
$-2,014$	$-1,200$	$-2,2541$
2,086	7,172	2,7459

1.10.3 Multiplicação

Considere a seguinte multiplicação:
$2,25 \cdot 1,2$

Transformando em fração decimais, temos:

$$\frac{225}{100} \cdot \frac{12}{10} = \frac{2700}{1000} = 2,7$$

Método Prático Multiplicamos os dois números decimais como se fossem naturais. Colocamos a vírgula no resultado de modo que o número de casas decimais do produto seja igual à soma dos números de casas decimais do fatores.

Exemplo:

? Encontre os seguintes produtos:

(a)

$2,25 \times 1,2$	
2,25	--→ 2 casas decimais
$\times\ 1,2$	--→ 1 casa decimal
450	
+225*	
2,700	--→ 3 casas decimais

(b)

$2,341 \times 3,24$	
2,341	--→ 3 casas decimais
$\times\ 3,24$	--→ 2 casas decimais
9364	
+4682*	
+7023**	
7,58484	--→ 5 casas decimais

Observações:

1. Na multiplicação de um número natural por um número decimal, utilizamos o método prático da multiplicação. Nesse caso o número de casas decimais do produto é igual ao número de casas decimais do fator decimal.
   Exemplo: $6 \times 1,341 = 8,046$

2. Para se multiplicar um número decimal por 10, 100, 1.000, ..., basta deslocar a vírgula para a direita uma, duas, três, ..., casas decimais.
   Exemplos:

   (a) $3,42 \times 10 = 34,2$ --→ a vírgula se deslocou 1 casa decimal para direita

   (b) $2,934 \times 100 = 293,4$ --→ a vírgula se deslocou 2 casas decimais para direita

3. Os números decimais podem ser transformados em porcentagens.
   Exemplos:

   (a) $0,02 = \dfrac{2}{100} = 2\%$

   (b) $0,275 = \dfrac{27,5}{100} = 27,5\%$

   (c) $1,5 = \dfrac{150}{100} = 150\%$

1.10.4 Divisão

Considere a seguinte divisão:
$1,8 \div 0,05$
Transformando em frações decimais, temos:
$\dfrac{18}{10} \div \dfrac{5}{100} = \dfrac{18}{10} \times \dfrac{100}{5} = \dfrac{1800}{50} = 36$

Método Prático

1. Igualamos o números de casas decimais, com o acréscimo de zeros;

2. Suprimimos as vírgulas;

3. Efetuamos a divisão.

Exemplos:

? Encontre o resultado das seguintes divisões:

(a)

$1,8 \div 0,05$		Efetuando a divisão:
Igualamos as casa decimais:	1,80 : 0,05	180⌊5
Suprimindo as vírgulas:	180 : 5	30 36
Logo, o quociente de 1,8 por 0,05 é 36.		0

(b)

$2,544 \div 1,2$		2544 ⌊1200
Igualamos as casa decimais:	$2,544 \div 1,200$	1440 2,12
Suprimindo as vírgulas:	$2544 \div 1200$	2400
Logo, o quociente de 2,544 por 1,2 é 2,12		0

1.11 Potenciação e Radiciação

1.11.1 Potenciação de Números Inteiros e Racionais

1º caso: O expoente é par.

Quando o expoente for par, a potência é sempre um número positivo .

Exemplos:

a) $(+2)? = (+2).(+2).(+2).(+2) = 16$

b) $(-2)? = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$

c) $\left(+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(+\frac{1}{2}\right).\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

e) $(0,2)^2 = \frac{2}{10}.\frac{2}{10} = \frac{4}{100} = 0,04$

2.º caso: O expoente é ímpar

Quando o expoente for ímpar, a potência é sempre o mesmo sinal da base .

Exemplos:

a) $(+3)? = (+3).(+3).(+3).(+3).(+3) = 243$

b) $(-3)? = (-3).(-3).(-3).(-3).(-3) = -243$

c) $\left(+\frac{2}{3}\right)^3 = \left(+\frac{2}{3}\right).\left(+\frac{2}{3}\right).\left(+\frac{2}{3}\right) = \left(+\frac{8}{27}\right)$

Pela definição de potência, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{8}{27}\right)$

e) $(-0,01)^3 = (\frac{-1}{100}).(\frac{-1}{100}).(\frac{-1}{100}) = \frac{-1}{1000000} = -0,000001$

Para se elevar uma fração a uma dada potência, deve-se elevar o numerador e o denominador a essa potência.

Vale para os números inteiros e racionais que:

- a potência de expoente 1 é igual a própria base.

a) $5^1 = 5$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{3}{5}$

c) $\left(\frac{-9}{4}\right)^1 = \frac{-9}{4}$

d) $0,003^1 = 0,003$

- a potência de expoente 0 é igual a 1.

  a) $(-8)? = 1$

  b) $\left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1$

  c) $\left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1$

  d) $0,011? = 1$

Mais Exemplos:

$(+5)^1 = 5$	$(-10)^1 = -10$	$(\frac{5}{6})^1 = \frac{5}{6}$	$(-\frac{5}{6})^1 = -\frac{5}{6}$
$(+5)? = 1$	$(-10)? = 1$	$(\frac{5}{6})? = 1$	$(-\frac{5}{6})? = 1$

1.11.2 Raiz Quadrada Exata

Raiz quadrada exata *de um número é também um número que, elevado ao quadrado, dá o número inicial*

Então, podemos dizer que:

- A raiz quadrada de 16 é $+4$ ou -4.

Como em Matemática, uma operação (como a raiz quadrada) não pode apresentar dois resultados diferentes, *fica definido que:*

- A raiz quadrada de 16 é o número positivo $+4$. Indica-se: $\sqrt{16} = 4$.

É claro que existe o oposto do número $\sqrt{16}$, que é $-\sqrt{16}$. Então: $-\sqrt{16} = -(+4) = -4$.

A Não-Existência da Raiz Quadrada em $\mathbb{Z}$

Considere as seguintes situações:

1ª) Qual o número inteiro que representa a raiz quadrada de 20?

Note que 20 não é quadrado de nenhum número inteiro, pois $4^2 = 16$ e $5^2 = 25$.

Como não há nenhum inteiro compreendido entre 4 e 5, pode-se concluir que não é possível obter a $\sqrt{20}$ no conjunto $\mathbb{Z}$.

2ª) Qual o número inteiro que elevado ao quadrado dá -25?

Note que o quadrado de um número inteiro nunca é negativo, por exemplo,
$(+5)^2 = 25$ *e* $(-5)^2 = 25$. Portanto, os números negativos não podem representar quadrados de nenhum número inteiro.

Isso significa que os números inteiros negativos não tem raiz quadrada em $\mathbb{Z}$, ou seja, $\sqrt{-25}$ não existe no conjunto $\mathbb{Z}$.

1.11.3 Raiz Quadrada de Números Racionais

Pela definição de raiz quadrada, já estudada, temos:

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, pois $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Então: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

Para se extrair a raiz quadrada de uma fração, extrai-se a raiz quadrada do numerador e a raiz quadrada do denominador.

Exemplos:

1. Encontre a raiz quadrada dos seguintes números racionais positivos:

   (a) $\sqrt{\frac{1}{9}} = +\frac{1}{3}$

   (b) $\sqrt{\frac{36}{25}} = +\frac{6}{5}$

2. Os números racionais negativos não possuem raiz quadrada no conjunto $\mathbb{Q}$:

   (a) $\sqrt{-\frac{1}{9}} = \notin \mathbb{Q}$

   (b) $\sqrt{-\frac{36}{25}} = \notin \mathbb{Q}$

3. A raiz quadrada de $\frac{4}{25}$ é o número positivo $+\frac{2}{5}$. Indica-se: $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

4. A raiz quadrada de 0,36 é o número positivo +0,6. Indica-se: $\sqrt{0,36} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0,6$.

1.12 Expressões Numéricas

As expressões numéricas devem ser resolvidas obedecendo à seguinte ordem de operações:

1º) Potenciação e radiciação;

2º) Multiplicação e divisão;

3º) Adição e subtração.

Nessas operações são realizados:

1º) parênteses ( );

2º) colchetes [ ];

3º) chaves { }.

Exemplos:

Calcular o valor das expressões numéricas:

a) $(-5)^2.(-2) + (+6)^2 =$
$= (+25).(-2) + (+36)$
$= (-50) + (+36)$
$= -50 + 36$
$= -14$

b) $\underbrace{(-5)^2}_{25} + \underbrace{\sqrt{9}}_{3} - [\underbrace{(+20) \div (-4)}_{-5} + 3] =$

$= 25 + 3 - [-5 + 3]$

$= 25 + 3 - [-2]$

$= 25 + 3 + 2$

$= 30$

c) $\left(\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} =$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} - \frac{3}{4} =$

$= \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$

$= \frac{8-9}{12}$

$= -\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{3} + \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{9}\right)\right] =$

$= \frac{1}{3} + \left[\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{9}\right)\right]$

$= \frac{1}{3} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{9}\right)\right]$

$= \frac{1}{3} + \left[\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \times \left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}}\right)\right]$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$= \frac{2-3}{6}$

$= -\frac{1}{6}$

e) $\left(\frac{2}{7} \times \frac{7}{3} + 1\right) \div \left(\frac{5}{3}\right)^2 =$

$= \left(\frac{2}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{3} + 1\right) \div \frac{25}{9}$

$= \left(\frac{2}{3} + 1\right) \div \frac{25}{9}$

$= \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{3}\right) \div \frac{25}{9}$

$= \frac{5}{3} \div \frac{25}{9}$

$= \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{25}} = \frac{3}{5}$

Capítulo 2

Equações do 1º Grau

2.1 Sentenças Matemáticas

As sentenças seguintes são **sentenças matemáticas.**

Linguagem corrente	**Simbologia matemática**
Três mais quatro é igual a sete.	$3 + 4 = 7$
Cinco é maior do que três.	$5 > 3$
Três vezes quatro é igual a 12.	$3 \times 4 = 12$

2.2 Sentenças Matemáticas Abertas

Sentenças matemáticas nas quais se desconhece um ou mais de seus elementos são chamadas de **sentenças matemáticas abertas**.

Exemplos:

- $x + 2 = 8$
- $x + y = 5$
- $2z + 1 = 11$

As sentenças matemáticas do tipo:

- $3 + 5 = 8$
- $(-5)^2 = 25$

são sentenças matemáticas **fechadas**.

2.3 Igualdade

As seguintes sentenças matemáticas constituem igualdades:

$$\underbrace{3+4}_{\substack{\downarrow \\ 1^o \text{ membro da igualdade}}} = \underbrace{7}_{\substack{\downarrow \\ 2^o \text{ membro da igualdade}}}$$

$$\underbrace{3^2 + (-4)^2}_{\substack{\downarrow \\ 1^o \text{ membro da igualdade}}} = \underbrace{6^2 - 11}_{\substack{\downarrow \\ 2^o \text{ membro da igualdade}}}$$

2.3.1 Princípios de Equivalência

Princípio Aditivo

- $2+1=3 \Longrightarrow (2+1)+5=(3)+5$
- $2+1=3 \Longrightarrow (2+1)-5=(3)-5$
- Se $a=b \Longrightarrow a+c=b+c$
- Se $a=b \Longrightarrow a-c=b-c$

Princípio Multiplicativo

- $2+1=3 \Longrightarrow (2+1)\times 10=(3)\times 10$
- $2+1=3 \Longrightarrow (2+1)\div 3=(3)\div 3$
- Se $a=b \Longrightarrow a\times c=b\times c \quad (c\neq 0)$
- Se $a=b \Longrightarrow a\div c=b\div c \quad (c\neq 0)$

2.4 Equação

Chama-se **equação** toda sentença matemática aberta expressa por uma igualdade.

Exemplos:

1. São equações:
   (a) $x-2=3$
   (b) $x+y=4$
   (c) $2x=12$
2. Não são equações:
   (a) $3^2+1=10$
   (b) $z\neq 9$
   (c) $x-4\leq 7$

Como toda equação é uma igualdade, temos:

$\underbrace{x-1}_{\downarrow}$	$=$	$\underbrace{3}_{\downarrow}$
1º membro da igualdade		2º membro da igualdade

$\underbrace{5x+3}_{\downarrow}$	$=$	$\underbrace{9+3x}_{\downarrow}$
1º membro da igualdade		2º membro da igualdade

2.5 Variável ou Incógnita de uma Equação

Observe:

- A equação $x-2=5$ tem um elemento desconhecido expresso pela letra x.
- A equação $x+y=10$ tem dois elementos desconhecidos expressos pelas letras x e y.

O elemento ou os elementos desconhecidos de uma equação são chamados **variáveis** ou **incógnitas**.

Notamos que:

- As variáveis ou incógnitas são normalmente expressas por letras.
- Uma equação pode ter uma, duas, três, ... variáveis.

2.6 Conjunto-Universo e Conjunto-Solução de uma Equação

Representamos por **U**, o conjunto-universo e por **S**, o conjunto-solução de uma equação. Vejamos alguns exemplos.

1º exemplo:

Determinar o elemento do conjunto $\mathbb{N}$ que torna verdadeira a equação $x + 1 = 4$.
Esse elemento é o número 3, pois $(3) + 1 = 4$.

- $\mathbb{N}$ é chamado **conjunto-universo da equação.**
- $\{3\}$ é chamado **conjunto-solução da equação.**
- O número 3 é chamado **raíz da equação.**

Então:

Equação: $x + 1 = 4$
$U = \mathbb{N}$
$S = \{3\} \longrightarrow$ o número 3 é a raíz da equação.

2º exemplo:

Determinar o elemento do conjunto $\mathbb{Z}$ que torna verdadeira a equação $x + 5 = 0$.
Esse elemento é o número -5, pois $(-5) + 5 = 0$.

- $\mathbb{Z}$ é chamado **conjunto-universo** da equação.
- $\{-5\}$ é chamado **conjunto-solução** da equação.
- O número (-5) é chamado **raíz** da equação.

Então:

Equação: $x + 5 = 0$
$U = \mathbb{Z}$
$S = \{-5\} \longrightarrow$ o número -5 é a raíz da equação.

Pelos exemplos dados, temos:

Conjunto-Universo(U) é o conjunto de todos os valores da variável.

Conjunto-Solução(S) é o conjunto dos valores de U, que tornam verdadeira a equação.

Raiz é o elemento do conjunto-solução da equação.

Observe agora, a importância do conjunto-universo.

a) Equação: $x - \frac{1}{3} = 0$
$U = \mathbb{Q}$
$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) Equação: $x - \frac{1}{3} = 0$
$U = \mathbb{Z}$
$S = \varnothing$ pois $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

O conjunto-solução de uma equação depende do conjunto-universo dado.

2.7 Como Verificar se um Número é Raiz de uma Equação

- O número 5 é raiz da equação $2x + 1 = 11$, pois:
  $2.(5) + 1 = 11$
  $\underbrace{10 + 1}_{11} = 11$

- O número -3 não é raiz da equação $5x - 2 = 6$, pois:
  $5.(-3) - 2 \neq 6$
  $\underbrace{-15 - 2}_{-17} \neq 6$

2.8 Equações Equivalentes

Nas equações seguintes, considere $U = \mathbb{Q}$.

Equação:
$x + 4 = 9$
$x = 9 - 4$
$x = 5$
$S = \{5\}$

As equações $x + 4 = 9$, $x = 9 - 4$ e $x = 5$ tem o mesmo conjunto-solução.

Duas ou mais equações que têm o mesmo conjunto-solução são chamadas de **equações equivalentes**.

2.9 Princípios de Equivalência das Equações

- Toda equação é uma igualdade.
- Os princípios de equivalência das igualdades valem para as equações.

2.9.1 Princípio Aditivo

Podemos somar ou subtrair um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtendo uma sentença equivalente.

1) Seja a equação $x - 2 = 6$.
   Somamos 2 aos dois membros da equação:
   $x - 2 + \mathbf{2} = 6 + \mathbf{2}$
   $x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2$
   $x = 6 + 2$, onde S = $\{8\}$

De modo prático:
$x - 2 = 6 \Longleftrightarrow x = 6 + 2$
logo, $x = 8$

2) Seja a equação $x + 5 = 8$.
Subtraímos 5 aos dois membros da equação.
$x + 5 \ \mathbf{-5} = 8 \ \mathbf{-5}$
$x + \cancel{5} - \cancel{5} = 8 - 5$
$x = 8 - 5$, onde S $= \{3\}$

De modo prático:
$x + 5 = 8 \Longleftrightarrow x = 8 - 5$
logo, $x = 3$

OBS: Em uma equação, utilizando-se o *princípio aditivo*, pode-se passar um termo de um membro para outro, desde que se troque o sinal desse termo. A nova equação obtida é equivalente à equação dada.

2.9.2 Princípio Multiplicativo

Podemos multiplicar ou dividir ambos os membros de uma igualdade por um número diferente de zero, obtendo uma sentença equivalente.

1) Seja a equação $2x = 10$.
Dividimos os dois membros da equação pelo coeficiente 2.
$\dfrac{2x}{\mathbf{2}} = \dfrac{10}{\mathbf{2}}$

$1x = 5$

$x = 5$, onde $S = \{5\}$

De modo prático:
$2x = 10$

$x = \dfrac{10}{2}$

$x = 5$.

OBS: Em uma equação, utilizando o *princípio multiplicativo*, pode-se dividir os dois membros por um mesmo número, diferente de zero. A nova equação obtida é equivalente à equação dada.

2) Seja a equação $\dfrac{x}{5} = 2$.
Multiplicamos os dois membros da equação por 5.
$\dfrac{x}{5} \cdot \mathbf{5} = 2 \cdot \mathbf{5}$

$\dfrac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{\mathbf{5}} = 10$

$x = 10$, onde $S = \{5\}$
De modo prático:
$\dfrac{x}{5} = 2$
$x = 2 \cdot 5$
$x = 10$.

OBS: Em uma equação, utilizando o *princípio multiplicativo*, pode-se multiplicar os dois membros por um mesmo número, diferente de zero. A nova equação obtida é equivalente à equação dada.

3) Seja a equação $\frac{3x}{10} + \frac{1}{10} = \frac{x}{10} + \frac{9}{10}$.

Multiplicamos os dois membros da equação pelo denominador 10.

$\cancel{10}.\frac{3x}{\cancel{10}} + \cancel{10}.\frac{1}{\cancel{10}} = \cancel{10}.\frac{x}{\cancel{10}} + \cancel{10}.\frac{9}{\cancel{10}}$

$3x + 1 = x + 9$, onde S={4}

$\frac{3x}{10} + \frac{1}{10} = \frac{x}{10} + \frac{9}{10}$ e $3x + 1 = x + 9$ são equivalentes.

De modo prático:

$\frac{3x}{\cancel{10}} + \frac{1}{\cancel{10}} = \frac{x}{\cancel{10}} + \frac{9}{\cancel{10}} \Longleftrightarrow 3x + 1 = x + 9$

$3x - x = 9 - 1$

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$, logo S={4}

OBS: Quando todos os termos de uma equação têm o mesmo denominador, este pode ser cancelado. A nova equação obtida é equivalente à equação dada.

2.10 Resolução de uma Equação do 1º Grau com uma Variável

- Resolver uma equação significa determinar o conjunto-solução da equação.
- Para resolver uma equação, deve-se determinar a equação elementar equivalente à equação dada.

2.10.1 Método Prático para Resolver Equações

Vamos resolver alguns exemplos de equações, conforme o seguinte roteiro:

1) Isolar no 1º membro os termos que possuem a variável e no 2º membro os termos que não apresentam variável.
2) Operar com os termos semelhantes.
3) Dividir ambos os membros pelo coeficiente da variável.

1º exemplo: Resolver a equação $2x = 16$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$2x = 16$

$x = \frac{16}{2}$

$x = 8$
Logo, $S = \{8\}$

2º exemplo: Resolver a equação $-2x = 8$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$-2x = 8 \rightarrow$ neste caso devemos multiplicar a equação por (-1) pois o coeficiente que acompanha o **x** é negativo.então:

$-2.(-1)x = 8.(-1)$

$2x = -8$

$$x = \frac{-8}{2}$$

$x = -4.$

Logo, $S = \{-4\}$

3º exemplo: Resolver a equação $2x + 1 = 13$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$2x + 1 = 13$

$2x = 13 - 1$

$2x = 12$

$$x = \frac{12}{2}$$

$x = 6.$

Logo, $S = \{6\}$

4º exemplo: Resolver a equação $7x + 5 = 5x + 13$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$7x + 5 = 5x + 13$

$7x - 5x = 13 - 5$

$2x = 8$

$$x = \frac{8}{2}$$

$x = 4.$

Logo, $S = \{4\}$

5º exemplo: Resolver a equação $5(x - 2) - 3(x + 1) = x - 4$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$5(x - 2) - 3(x + 1) = x - 4$

$5x - 10 - 3x - 3 = x - 4$

$5x - 3x - x = -4 + 10 + 3$

$x = 9.$

Logo, $S = \{9\}$

6º exemplo: Resolver a equação $\frac{x+1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{x+3}{4}$,sendo $U = \mathbb{Q}$.

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{x+3}{4},$$

então o m.m.c$(2, 3, 4) = 12$

$$\frac{6(x+1)}{12} + \frac{4(x-2)}{12} = \frac{6}{12} - \frac{3(x+3)}{12},$$

cancelando-se o denominador comum, temos:

$$\frac{6(x+1)}{\cancel{12}} + \frac{4(x-2)}{\cancel{12}} = \frac{6}{\cancel{12}} - \frac{3(x+3)}{\cancel{12}}$$

$6(x + 1) + 4(x - 2) = 6 - 3(x + 3)$

$6x + 6 + 4x - 8 = 6 - 3x - 9$

$6x + 4x + 3x = 6 - 9 - 6 + 8$

$13x = -1$

$x = -\dfrac{1}{13}.$

Logo, $S = \left\{-\dfrac{1}{13}\right\}$

2.11 Casos Particulares de Equações do 1º Grau

Na resolução de uma equação do 1º grau existem 3 possibilidades:

i) A equação ter **uma única solução,** o que aconteceu em todos os exemplos anteriores.

ii) A equação não ter solução, sendo chamada então de **impossível.**
Exemplo: Resolver a equação $5x - 6 = 5x$ no conjunto $\mathbb{Q}$.
$5x - 6 = 5x$
$5x - 5x = 6$
$0x = 6$
Não há número que multiplicado por 0 resulte em 6. Então, a equação é **impossível** no conjunto $\mathbb{Q}$.
Logo, S=$\varnothing$

iii) A equação ter infinitas soluções, sendo chamada então de **identidade.**
Exemplo: Resolver a equação $2x + 5 - 1 = 4 + 2x$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
$2x + 5 - 1 = 4 + 2x$
$2x - 2x = 4 - 5 + 1$
$0x = 0$ Qualquer número racional multiplicado por 0 dá 0,logo a equação é uma **identidade**.

Capítulo 3

Sistemas de Equações do 1º Grau

3.1 Introdução

IMPORTANTE!!!

Sistemas de equações de 1º grau são utilizados principalmente nas disciplinas de Álgebra Linear, Programação Linear e E.D.O. e em qualquer outra disciplina que a solução de um determinado problema caia num sistema de equações de 1º grau. Por isso este material requer uma leitura com muita atenção.

Vamos considerar a equação $x + y = 5$. Essa é uma equação do 1° grau com duas variáveis, **x** e **y**. Para obter as soluções desa equação, devemos considerar que, para cada valor atribuído a **x**, obtemos uma valor para **y**. Assim, em $x + y = 5$, temos:

$$\begin{array}{rr} x = 1 \Rightarrow y = 4 & x = 4 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 & x = 5 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 2 & \text{e assim por diante.} \end{array}$$

Esses valores podem ser escritos na forma de pares ordenados (x, y), pois são dois elementos que obedecem a uma certa ordem: $(1, 4)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$; $(4, 1)$; $(5, 0)$.

Assim, o par ordenado $(1, 4)$ corresponde a $x = 1$ e $y = 4$; o par ordenado $(2, 3)$ corresponde a $x = 2$ e $y = 3$

Observe que, na equação $x + y = 5$, a variável x pode assumir infinitos valores e, em consequência, y também. Assim, existem infintos pares (x, y) que satisfazem a equação.Podemos então afirmar:

Uma equação do 1° grau com duas variáveis admite infintas soluções.

Vamos considerar agora duas equações do 1º grau com duas variáveis:

$$x + y = 5 \textbf{ e } x - y = 1$$

Procedendo do mesmo modo, podemos encontrar soluções para duas equações:

$$\begin{array}{cc} x + y = 5 & x - y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 4 & x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 & x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ \mathbf{x = 3 \Rightarrow y = 2} & \mathbf{x = 3 \Rightarrow y = 2} \\ x = 4 \Rightarrow y = 1 & x = 4 \Rightarrow y = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

O par $(3, 2)$ é solução das duas equações.

Note que neste caso temos duas equações do 1º grau, com duas variáveis, unidas pelo conectivo **e**. Quando isso acontece, dizemos que as equações formam um **sistema** de duas equações do 1º grau com **duas variáveis**, e indica-se por:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

3.2 Resolução de Sistema pelo Processo da Substituição

Vimos que equações do 1º grau em **x** e **y** podem ter uma solução comum, isto é, um par que satisfaça a ambas. Vamos examinar um processo algébrico que conduz a essa solução comum. Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

O processo de **substituição**, como o próprio nome indica, consiste em isolar o valor de uma variável numa das equações e substituí-la na outra.
Vamos isolar a variável **y** na 1ª equação:

$$2x + y = 10 \Leftrightarrow y = \mathbf{10 - 2x}$$

Agora, vamos substituir o "valor"de **y** na 2ª equação:

$$\begin{gathered} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2 \cdot (\mathbf{10 - 2x}) = 1 \\ 3x - 20 + 4x = 1 \\ 3x + 4x = 1 + 20 \\ 7x = 21 \\ x = 3 \end{gathered}$$

Substituímos esse resultado $x = 3$ em qualquer uma das equações do sistema:

1ª equação	**2ª equação**
$2x + y = 10$	$3x - 2y = 1$
$2 \cdot 3 + y = 10$	$3 \cdot 3 - 2y = 12$
$6 + y = 10$	$9 - 2y = 1$
$y = 4$	$-2y = 1 - 9$
	$-2y = -8 \quad \cdot(-\mathbf{1})$
	$2y = 8$
	$y = 4$

Logo, o par $(3, 4)$ satisfaz a ambas as equações.

Verificação:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3 + 4 = 10 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 4 = 10 \text{ (verdade)} \\ 9 - 8 = 1 \text{ (verdade)} \end{cases}$$

3.3 Resolução de Sistema pelo Processo da Adição

Este processo de resolução de um sistema de duas equações com duas variáveis consiste em **somar membro a membro** as duas equações. Processo se baseia no principio:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Se} & a & = & b \\ \text{e} & c & = & d \\ \hline \text{então,} & \multicolumn{3}{c}{\text{a+c=b+d}} \end{array}$$

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 2x - 3y = -16 \end{cases}$$

Vamos **somar** membro a membro:

$$\begin{array}{rrcr} + & 5x + 3y & = & 2 \\ & 2x - 3y & = & -16 \\ \hline & 7x & = & -14 \\ & & x & = -2 \end{array}$$

Para obter o valor de **y**, basta substituir $x = -2$ em qualquer uma das equações. Observe:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 2 \\ 5 \cdot (-2) + 3y &= 2 \\ -10 + 3y &= 2 \\ 3y &= 12 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Portanto: V= $\{(-2, 4)\}$.

Observe, que nesse sistema, os coeficientes de uma das variáveis (**y**) são simétricos: $3y$ e $-3y$. Por isso, ao somar as duas igualdades, chegamos a uma equação com uma só variável. Quando isso não ocorre, podemos obter valores simétricos utilizando artifícios de cálculos.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 17 \\ 5x - 7y = 31 \end{cases}$$

Multiplicamos a 1ª equação pelo coeficiente do (**x**) da 2ª equação e a 2ª equação pelo **simétrico** do coeficiente do (**x**) da 1ª equação:

$$\begin{cases} 3 \quad x - 5y = 17 \quad \boxed{\cdot 5} \\ 5 \quad x - 7y = 31 \quad \boxed{\cdot (-3)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcr} \begin{cases} 15x - 25y \\ -15x + 21y \end{cases} & = & \begin{array}{r} 85 \\ -93 \end{array} \\ \hline -4y & = & -8 \\ y & = & 2 \end{array}$$

Substituindo $y = 2$ em uma das equações do sistema, obtemos o valor de **x**:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 17 \\ 3x - 5 \cdot (2) &= 17 \\ 3x &= 27 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Portanto: V= $\{(9, 2)\}$.

3.4 Resolução de Sistema pelo Processo da Comparação

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 2x - 5y = 5 \end{cases}$$

O processo da comparação consiste em igualar as expressões do valor de uma mesma variável, obtidas em ambas as equações. Deve-se proceder, então, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll} x + 3y = 8 & & 2x - 5y = 5 \\ x = 8 - 3y & \text{(I)} & x = \frac{5+5y}{2} \quad \text{(II)} \end{array}$$

Igualando os valores de **x** obtidos em (I) e (II), temos:

$$\begin{aligned} 8 - 3y &= \tfrac{5+5y}{2} \\ 16 - 6y &= 5 + 5y \\ -11y &= -11 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

O valor da variável **x** pode ser obtido pelo mesmo processo, mas é mais simples substituir $y = 1$ em qualquer uma das equações (I) ou (II).
Assim, temos:

$$\begin{aligned} x &= 8 - 3y \\ x &= 8 - 3 \cdot (1) \\ x &= 8 - 3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Portanto: V= $\{(5, 1)\}$.
Verificação:

$$\begin{cases} x + 3y = 8 \Leftrightarrow 5 + 3 \cdot 1 = 8 \Leftrightarrow 5 + 3 = 8 \text{ (verdadeiro)} \\ 2x - 5y = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow 10 - 5 = 5 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$$

3.5 Problemas Envolvendo Sistemas de Equações de 1º Grau

A resolução de um problema é constituída de três fases:

1. Traduzir em equações as sentenças do problema.
2. Resolver o sistema, por algum dos métodos já vistos anteriormente.
3. Verificar se as soluções são compatíveis com os dados do problema.

Exemplos:

1. A soma de dois números é 27 e sua diferença é 3. Calcular os dois números inteiros.
   Representação: número maior: x; número menor: y
   Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

   Utilizando o método da adição, vem:
   $x + y = 27$
   $\underline{x - y = 3}$
   $2x \quad = 30$
   $x = \frac{30}{2} = 15$

Substituindo o valor de $x = 15$ na 1ª equação, temos:
$15 + y = 27$
$y = 27 - 15$
$y = 12.$
Logo, os números procurados são 15 e 12 ou o par ordenado $(15, 12)$.

2. Numa olimpíada de Matemática, a prova é composta de 25 questões. Pelo regulamento, cada questão correta vale 4 pontos e cada questão errada vale -2 pontos. um estudante obteve 76 pontos. Quantas questões acertou e quantas errou?

   Representação: número de questões certas: x; número de questões erradas: y

   Note que o número total de questões é 25, logo $x + y = 25$

   Cada questão certa vale 4 pontos, logo o total de pontos é $4 \cdot x$ e cada questão errada vale -2 pontos, logo o total de pontos é $-2 \cdot y$.

   Sistema:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x - 2y = 76 \end{cases}$$

   Utilizando o método da adição, vem:
   $x + y = 25 \quad \cdot (2)$
   $4x - 2y = 76$

   $2x + 2y = 50$
   $\underline{4x - 2y = 76}$
   $6x \quad = 126$
   $x = \frac{126}{6} = 21$

   Substituindo o valor de $x = 21$ na 1ª equação, temos:
   $21 + y = 25$
   $y = 25 - 21$
   $y = 4.$
   Logo, o número de acertos é 21 e o de erros é 4 ou o par ordenado $(21, 4)$.

Capítulo 4

Razão, Proporção e Regra de Três

4.1 Razão

4.1.1 Definição

Razão de dois números é o quociente do primeiro pelo segundo.

Exemplo:

A 6ª série D, classe de Vinícius, tem 20 meninos e 30 meninas. Podemos comparar esse números, fazendo:

$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Dizemos, então, que na classe de Vinícius, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é de 2 para 3.

Indica-se: $2 : 3$ ou $\frac{2}{3}$ (lê-se: **dois para três**)

4.1.2 Termos de uma Razão

De um modo geral, na razão de dois números a e b, indica-se $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ e lê-se **a para b.**

Na razão $\frac{a}{b}$, o número a é o **antecedente** e o nùmero b é o **consequente.**

Exemplo:

A razão de 2 para 5 é $\frac{2}{5}$, onde 2 é o antecedente e 5 é o consequente.

4.1.3 Aplicações e Razões Especiais

Veja um exemplo de aplicação:

Um terreno tem $200m^2$ de área livre para $600m^2$ de área construída. A razão da área livre para a área construída é de $\frac{200}{600} = \frac{1}{3}$, isto é, a cada $1m^2$ de área livre, há $3m^2$ de área construída.

Veja algumas razões especiais:

- **Velocidade média:** é razão entre uma distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. *(Esse conceito é muito utilizado na Física)*

  Exemplo: Um automóvel percorreu 300 km em 5 horas. Qual foi a velocidade média do automóvel?

$$V_M = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{300}{5} = 60\ km/h$$

- **Escala:** é a razão entre um comprimento no desenho e o correspondente comprimento real.

  Exemplo: O comprimento de uma garagem é 8 m. No desenho, esse comprimento está representado por 2 cm. Qual foi a escala usada para fazer o desenho?

  Lembre-se que 8 m = 800 cm

  $$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}} = \frac{2}{800} = \frac{1}{400}$$

- **Densidade Demográfica:** é a razão entre a população e a superfície do território.

  (Escala e Densidade demográfica são muito utilizados na geografia.)

  Exemplo: O estado do Rio Grande do Sul tem 10.695.532 habitantes e uma área de 281.748,5 km^2. Qual a densidade demográfica do estado?

  $$DD = \frac{\text{população}}{\text{superfície}} = \frac{10.695.532\ hab}{281.748,5\ km^2} = 37,96\ hah/km^2$$

- **Densidade de um corpo:** é a razão entre a massa do corpo e o seu volume.

  Exemplo: Uma escultura de bronze tem 3,5 kg de massa e seu volume é de 400 cm^3. Qual a densidade do bronze?

  $$\text{densidade} = \frac{\text{massa do corpo}}{\text{volume do corpo}} = \frac{3,5\ kg}{400\ cm^3} = \frac{3500\ g}{400\ cm^3} = 8,75 g/cm^3$$

4.1.4 Mais Exemplos sobre Razões

1. Numa partida de basquetebol João fez 24 arremessos à cesta, acertando 15 deles. Nessas condições, qual a razão do número de acertos para o número total de arremessos à cesta feitos por João ?
   Solução:

   $$15 : 24 = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \longrightarrow 5 \text{ para } 8,$$

   ou seja, para cada 8 arremessos à cesta, João acertou 5.

2. Calcular a razão da área do primeiro retângulo para a área do segundo retângulo.

   Solução:
   Vamos calcular a área de cada retângulo:
   $A_1 = 60cm \times 40cm = 2.400cm^2$

Transformando para a mesma unidade:
$1,2m = 120cm$ e $1m = 100cm$
$A_2 = 120cm \times 100cm = 12000cm^2$

Assim, a razão entre as áreas 1 e 2 é: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2.400}{12.000} = \dfrac{1}{5} \longrightarrow$ *1 para 5, ou seja, a área do retângulo 2 é cinco vezes a área do retângulo 1.*

3. Numa prova de ciências, a razão do número de questões que Lídia acertou para o número total de questões foi de 5 para 6. Sabendo que essa prova era composta de 18 questões, quantas Lídia acertou?
Solução:
Chamando de x o número de questões certas, e sendo a razão dos acertos para o total de questões 5 para 6, temos:

$\dfrac{x}{18} = \dfrac{5}{6}$
$\dfrac{x}{18} = \dfrac{15}{18} \longrightarrow$ *igualando os denominadores*

$x = 15$
Lídia acertou 15 questões.

4.2 Proporção

4.2.1 Definição

A igualdade entre as razões $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ é chamada de *proporção.*

Indicamos por $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ou $a : b = c : d$

Leitura: a está para b assim como c está para d.

Na proporção $a : b = c : d$, dizemos que a e d são os **extremos** e b e c são os **meios.**

Assim:

$$\underset{\text{extremo}}{\underset{\downarrow}{a}} \quad : \quad \underset{\text{meio}}{\underset{\downarrow}{b}} \quad = \quad \underset{\text{meio}}{\underset{\downarrow}{c}} \quad : \quad \underset{\text{extremo}}{\underset{\downarrow}{d}}$$

Exemplos:

Em cada uma das proporções abaixo,calcule o produto dos extremos e o produto dos meios:

a) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{30}{40}$

produto dos extremos: $3 \times 40 = 120$
produto dos meios:$4 \times 30 = 120$.

b) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{6}{9}$

produto dos extremos: $4 \times 9 = 36$
produto dos meios: $6 \times 6 = 36$

OBS: Comparando os resultados obtidos para cada proporção do exemplo anterior observamos que, *o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.*

4.2.2 Propriedade Fundamental das Proporções

Em toda proporção o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios.

Assim:

Se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, então $a \cdot d = c \cdot b$

Exemplos:

Verifique se as setenças abaixo são verdadeiras:

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{24}{36}$

Solução: é verdadeira pois, $2 \times 36 = 3 \times 24$

b) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{8}$

Solução: é falsa pois $3 \times 8 \neq 9 \times 4$

4.2.3 Cálculo do Termo Desconhecido Numa Proporção

Podemos descobrir o valor de um termo desconhecido numa proporção, aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções.

Exemplos:

1. Calcular o valor de x na proporção $\dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{24}$

   Solução:

   $\dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{24}$

   $24 \cdot x = 8 \cdot 15$

   $24x = 120$

   $x = \dfrac{120}{24}$

   $x = 5$

2. Calcular o valor de x na proporção $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{x}{5}$

   Solução:

   $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{x}{5}$

$5(x-3) = 4x$

$5x - 15 = 4x$

$5x - 4x = 15$

$x = 15$

4.2.4 Propriedade da Soma

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Assim:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{então} \quad \begin{array}{c} \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{c+d}{c} \\ \text{ou} \\ \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \end{array}$$

Exemplo: Na proporção $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ temos que:

$$\frac{5+2}{5} = \frac{10+4}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$

4.2.5 Propriedade da Diferença

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou segundo), assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro (ou quarto).

Assim:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{então} \quad \begin{array}{c} \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{c-d}{c} \\ \text{ou} \\ \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \end{array}$$

Exemplo: Na proporção $\frac{5}{2} = \frac{10}{4}$ temos que:

$$\frac{5-2}{5} = \frac{10-4}{10} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

4.2.6 Aplicação das Propriedades

Vamos mostrar a aplicação das propriedades nos exemplos seguintes:

1. Calcular x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, sabendo-se que $x + y = 10$.

   Solução:

   $$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$
   $$\frac{x+y}{x} = \frac{2+3}{2} \longmapsto \text{Prop. da soma}$$
   $$\frac{10}{x} = \frac{5}{2}$$

$5x = 20 \longmapsto$ Prop. fundamental

$x = \dfrac{20}{5}$

$x = 4$
Como $x + y = 10$ e $x = 4$, temos que $y = 10 - 4 \Rightarrow y = 6$

2. Calcular x e y na proporção $\dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{4}$, sabendo-se que $x - y = 15$.
Solução:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{4}$
$\dfrac{x-y}{x} = \dfrac{9-4}{9} \longmapsto$ Prop. da diferença
$\dfrac{15}{x} = \dfrac{5}{9}$

$5x = 135 \longmapsto$ Prop. fundamental

$x = \dfrac{135}{5}$

$x = 27$
Como $x - y = 15$ e $x = 27$, temos que $y = 27 - 15 \Rightarrow y = 12$

4.3 Regra de Três

4.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, aumentando uma delas, a outra **aumenta** na mesma razão da primeira.

Exemplos:

1. Uma máquina:

   - em 1 hora, produz 100 peças;
   - em 2 horas, produz 200 peças.
     Note que:

     1º) dobrando-se o número de horas, o número de peças produzidas também dobra.

     2º) $\underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza tempo}}}{\underset{\downarrow}{\dfrac{1}{2}}} = \underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza produção}}}{\underset{\downarrow}{\dfrac{100}{200}}}$

   Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **produção** são **diretamente proporcionais**.

2. Um veículo:

   - em 1 hora, percorre 60 km;
   - em 2 horas, percorre 120 km;

- em 3 horas, percorre 180 km;
  Note que:

  1º) dobrando-se o número de horas, a distância percorrida também dobra e triplicando o número de horas, a distância percorrida triplica

  2º)
$$\underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza tempo}}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{2}}} = \underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza distância}}}{\underset{\downarrow}{\frac{60}{120}}}$$
$$\underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza tempo}}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{3}}} = \underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza distância}}}{\underset{\downarrow}{\frac{60}{180}}}$$

Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **distância** são **diretamente proporcionais**.

4.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando, aumentando uma delas, a outra **diminui** na mesma razão da primeira.

Exemplo:

Um veículo faz um percurso :

- em 2 horas, com a velocidade de 60 km/h.
- em 1 hora, com a velocidade de 120 km/h;
  Note que:

  1º) dobrando-se a velocidade, o tempo diminui pela metade.

  2º)
$$\underset{\substack{\text{razão entre a}\\ \text{grandeza velocidade}}}{\underset{\downarrow}{\frac{60}{120}}} = \underset{\substack{\text{razão inversa entre a}\\ \text{grandeza tempo}}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{2}}}$$

Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **velocidade** são **inversamente proporcionais**.

4.3.3 Regra de Três Simples

A **regra de três simples** é um processo prático para resolver problemas através de proporções, envolvendo duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Roteiro para Resolução de Problemas

1) Colocar as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna.

2) Indicar duas grandezas:

- diretamente proporcionais com flechas de mesmo sentido.
- inversamente proporcionais com flechas de sentido contrário.

3) Armar a proporção e resolvê-la.

Exemplos:

1. Comprei 5 metros de tecido por R$ 40,00. Quanto custará 14 metros do mesmo tecido?
   Solução:
   Utilizando o roteiro para resolução de problemas, temos:

metros	R$
$\downarrow 5$	$40 \downarrow$
14	x

   Note que aumentando a quantidade de metros o preço também aumenta, logo as grandezas **metros** e **R$** são diretamente proporcionais, por isso as flechas tem mesmo sentido e assim montamos a proporção de forma direta:

   $$\frac{5}{14} = \frac{40}{x}$$

   $$5 \cdot x = 14 \cdot 40$$

   $$5x = 560$$

   $$x = \frac{560}{5}$$

   $$x = 112$$

   Logo, 14 metros de tecido custarão $R\$112,00$.

2. Doze operários constroem um muro em 4 dias. Quantos dias levarão 8 operários para fazer o mesmo muro?
   Solução:
   Utilizando o roteiro para resolução de problemas, temos:

operários	dias
12	4
$\uparrow 8$	$x \downarrow$

   Note que diminuindo o número de operários, o número de dias aumentará, logo as grandezas **operários** e **dias** são inversamente proporcionais, por isso as flechas tem sentidos contrários e então devemos INVERTER a grandeza operários quando montamos a proporção:

   $$\frac{8}{12} = \frac{4}{x}$$

   $$8 \cdot x = 12 \cdot 4$$

   $$8x = 48$$

   $$x = \frac{48}{8}$$

   $$x = 6$$

   Logo, o tempo necessário é de 6 dias.

4.3.4 Regra de Três Composta

A **regra de três composta** é um processo prático para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas.

IMPORTANTE: Para colocar as flechas, comparamos cada grandeza com aquela que contém a incógnita x.

Exemplos:

1. Quarenta operários constroem 16 metros de muro em 8 dias. Quantos operários construirão 8 metros de muro em 32 dias?
Solução:
Utilizando o roteiro para resolução de problemas, temos:

Operários	metros de muro	dias
40	16	8
x	8	32

Vejamos agora, se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

1º) Tomamos como referência a grandeza que apresenta a incógnita **x** (operários) e colocamos aí a seta no sentido do x.

2º) A seguir, verificamos se a 1ª grandeza (operários) e a 2ª grandeza (metros de muro) são diretamente ou inversamente proporcionais. Colocamos a seta. Como trata-se de grandezas diretamente proporcionais, a seta tem mesmo sentido que a 1ª.

3º) Tomamos novamente a 1ª grandeza (operários) e a 3ª grandeza (dias) e verificamos se são direta ou inversamente proporcionais. Colocamos a seta. Nesse caso, trata-se de grandezas inversamente proporcionais, a seta tem sentido contrário da 1ª.

operários	metros de muro	dias
$\downarrow$ 40	16 $\downarrow$	8 $\uparrow$
x	8	32

Ao armarmos a proporção, invertemos os valores da grandeza inversamente proporcional e mantemos a que é diretamente proporcional em relação à grandeza que contém a incógnita. Igualmos a seguir a razão que contém a incógnita com o produto das demais razões:

$$\frac{40}{x} = \frac{16}{8} \cdot \frac{32}{8}$$

$$\frac{40}{x} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1} \dashrightarrow \text{simplificação de frações}$$

$$\frac{40}{x} = \frac{8}{1}$$

$$8 \cdot x = 40 \cdot 1$$

$$x = \frac{40}{8}$$

$$x = 5$$

Logo, serão necessários 5 operários.

2. Para alimentar 12 animais durante 20 dias são necessários 400 kg de ração. Quantos animais podem ser alimentados com 600 kg de ração durante 24 dias?
Solução:
Utilizando o roteiro para resolução de problemas, temos:

Nº de animais	dias	ração
12	20	400
x	24	600

Vejamos agora, se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

1º) Tomamos como referência a grandeza que apresenta a incógnita **x** (nº de animais) e colocamos aí a seta no sentido do x.

2º) A seguir, verificamos se a 1ª grandeza (nº de animais) e a 2ª grandeza (dias) são diretamente ou inversamente proporcionais. Colocamos a seta. Como trata-se de grandezas inversamente proporcionais, a seta tem sentido contrário da 1ª.

3º) Tomamos novamente a 1ª grandeza (nº de animais) e a 3ª grandeza (ração) e verificamos se são direta ou inversamente proporcionais. Colocamos a seta. Nesse caso, trata-se de grandezas diretamente proporcionais, a seta tem mesmo sentido que a 1ª.

nº de animais	dias	ração
$\downarrow$ 12	20 $\uparrow$	400 $\downarrow$
x	24	600

Ao armarmos a proporção, INVERTEMOS os valores da grandeza inversamente proporcional e mantemos a que é diretamente proporcional em relação à grandeza que contém a incógnita. Igualmos a seguir a razão que contém a incógnita com o produto das demais razões:

$$\frac{12}{x} = \frac{24}{20} \cdot \frac{400}{600}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{\cancel{6}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \dashrightarrow \text{simplificação de frações}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{4}{5}$$

$$4 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$x = \frac{60}{4}$$

$$x = 15$$

Logo, podem ser alimentados 15 animais.

4.4 Porcentagem

As mais importantes aplicações de razão, proporção e de regra de três são nos problemas que envolvem porcentagem.

Toda razão cujo consequente é 100 chama-se **razão centesimal**.

Porcentagem é uma razão centesimal representada pelo símbolo % (por cento).

Exemplos:

1. Razão percentual e porcentagem:

Razão centesimal	Forma percentual	Leitura
$\frac{30}{100}$	30%	trinta por cento
$\frac{25}{100}$	25%	vinte e cinco por cento
$\frac{1}{100}$	1%	um por cento

2. Numa caixa há 50 cartões: 9 brancos, 18 amarelos e 23 vermelhos.

   (a) Qual a taxa percentual dos cartões brancos?
   Primeiramente vemos qual a razão que corresponde aos cartões brancos em relação ao total que é:
   $\frac{9}{50} = 0,18 = \frac{18}{100} = 18\%$

   (b) Qual a taxa percentual dos cartões amarelos?
   Da mesma forma:
   $\frac{18}{50} = 0,36 = \frac{36}{100} = 36\%$

   (c) Qual a taxa percentual dos cartões vermelhos?
   Da mesma forma:
   $\frac{23}{50} = 0,46 = \frac{46}{100} = 46\%$

4.4.1 Problemas de Porcentagem

Os problemas podem ser resolvidos por meio de regra de três simples e direta.

Exemplos:

1. Calcular 20% de R$ 600,00.
   Solução:

R$	%	Interpretação
600,00	100	*600,00 --→ corresponde a 100%*
x	20	*x --→ corresponde a 20%*

   Armando a proporção e resolvendo, temos:

   $$\frac{600}{x} = \frac{100}{20}$$

   $$100 \cdot x = 600 \cdot 20$$

   $$x = \frac{600 \cdot 20}{100}$$

   $$x = \frac{12000}{100} = 120,00$$

   Logo, 20% de R$ 600,00 é R$ 120,00.

   Observação: Na Matemática, a preposição *"de"* significa uma multiplicação, assim temos:

   $$20\% \text{ de } R\$600,00 = \frac{20}{100} \times 600 = \frac{12000}{100} = \frac{120}{1} = 120,00$$

2. Na compra de um telefone celular, que custava R$ 500,00, obtive um desconto de 15%. De quanto foi o desconto?
Solução:

R$	**%**	**Interpretação**
500,00	100	*500,00 --→ corresponde a 100%*
x	15	*x --→ corresponde a 15%*

Armando a proporção e resolvendo, temos:

$$\frac{500}{x} = \frac{100}{15}$$

$$100 \cdot x = 500 \cdot 15$$

$$x = \frac{500 \cdot 15}{100}$$

$$x = \frac{7500}{100} = 75,00$$

O desconto foi de R$ 75,00.

3. O preço de um carro popular é R$ 24.500,00. Pagando a vista, obtém-se um desconto de R$ 2.450,00. Qual a taxa percentual de desconto nessa negociação?
Solução:

R$	**%**	**Interpretação**
24500,00	100	*24500,00 --→ corresponde a 100%*
$2450,00$	x	2450,00 *--→ corresponde a x*

Armando a proporção e resolvendo, temos:

$$\frac{24500}{2450} = \frac{100}{x}$$

$$24500 \cdot x = 2450 \cdot 100$$

$$x = \frac{245000}{24500}$$

$x = 10$
A taxa de desconto foi de 10%.

4. Qual é o salário de um trabalhador, sabendo-se que R$ 240,00 representam 8% do salário?
Solução:

R$	**%**	**Interpretação**
x	100	*x --→ corresponde a 100%*
$240,00$	8	240,00 *--→ corresponde a 8%*

Armando a proporção e resolvendo, temos:

$$\frac{x}{240} = \frac{100}{8}$$

$$8 \cdot x = 240 \cdot 100$$

$$x = \frac{24000}{8}$$

$$x = 3000$$

O salário é de R$ 3.000,00.

Capítulo 5

Polinômios

5.1 Monômios

5.1.1 Definição

São expressões algébricas racionais e inteiras que envolvem apenas o produto de números reais por letras, nos quais as letras só apresentam expoentes naturais. Um monômio tem uma **parte numérica** (coeficiente) e uma **literal**.

Exemplo:

No monômio $9x^2y$, o coeficiente é 9 e a parte literal é: $x^2 \cdot y$, isto é:

$$\underbrace{9}_{coeficiente} \cdot \underbrace{x^2y}_{parte\ literal}$$

5.1.2 Grau do Monômio:

É soma dos expoentes da parte literal.

Exemplos:

a) $10x^3y$

Possui grau 4, pois a soma dos expoentes da parte literal($x^3 \cdot y$) é 4.

b) $4xy^2z^3$

Possui grau 6, pois a soma dos expoentes da parte literal($x \cdot y^2 \cdot z^3$) é 6.

5.1.3 Monômios Semelhantes

São monômios que apresentam a mesma parte literal.

Exemplo:

Os monômios $\sqrt{3}xy$, $24xy$,$\frac{10}{7}xy$ são semelhantes pois possuem a mesma parte literal(xy).

5.1.4 Operações com Monômios

Adição e Subtração

Recordando:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Para adicionar ou subtrair monômios semelhantes, basta adicionar ou subtrair os coeficientes e manter a parte literal.

Exemplos:

a) $15x + 2x = x \cdot (15 + 2) = x \cdot 17 = 17x$

b) $27ab - 10ab = ab \cdot (27 - 10) = ab \cdot 17 = 17ab$

Multiplicação

Recordando:

- $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

O produto de monômios é obtido multiplicando-se os coeficientes e, em seguida, multiplicando-se as partes literais.

Exemplos:

a) $7x \cdot 5y = 7 \cdot 5 \cdot x \cdot y = 35 \cdot xy = 35xy$

b) $(-3ab^2) \cdot (5a^2c) = -3 \cdot 5 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c = -15a^3b^2c$

Divisão

Recordando:

- $a^n : a^m = a^{n-m}$, sendo m e n números inteiros.

Para dividir dois monômios, basta dividir os coeficientes e, em seguida, dividir as partes literais.

* Lembre-se que **não existe divisão pelo número zero**.

Exemplos:

a) $(-20a^3b^2) : (5ab^2) = \frac{-20a^3b^2}{5ab^2} = \frac{-20}{5} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} = -4 \cdot a^2 = -4a^2$

b) $(-4x^6y^2) : (-2x^2y) = \frac{-4x^6y^2}{-2x^2y} = \frac{-4}{-2} \cdot \frac{x^6}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y} = 2 \cdot x^4 \cdot y = 2x^4y$

Potenciação

Recordando:

- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Para elevar um monômio a um expoente, basta elevar ao expoente o coeficiente e, em seguida, elevar a parte literal.

Exemplos:

a) $(5 \cdot x \cdot y^2 \cdot z^3)^2 = 5^2 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2 \cdot (z^3)^2 = 25 \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 = 25x^2y^4z^6$

b) $(-4 \cdot a \cdot b^5 \cdot c^6)^3 = (-4)^3 \cdot a^3 \cdot (b^5)^3 \cdot (c^6)^3 = -64 \cdot a^3 \cdot b^{15} \cdot c^{18} = -64a^3b^{15}c^{18}$

5.2 Polinômios

É a soma algébrica de monômios.

Exemplo:

$5ax^2 - 5x^2y^3 + \sqrt{3}x^5$

Observação:Os monômios que formam um polinômio são chamados de termos.

5.2.1 Classificação:

Monômios

São polinômios que apresentam apenas um termo.
Exemplos:

a) $2y^3$

b) $\frac{3}{8}x^2$

c) xyz^2

Binômios

São polinômios que apresentam dois termos.
Exemplos:

a) $x + y$

b) $2x + 6$

c) $3x^2 - 9x$

Trinômios

São polinômios que apresentam três termos.
Exemplos:

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^2 + 5xy - y^2$

c) $x^2 + 6xyz + 5z$

Grau de um Polinômio:

É o grau do termo de mais alto grau desse polinômio.
Observações:

- O grau é definido somente para uma expressão racional e inteira.
- Algumas vezes, o grau do polinômio é especificado para uma de suas variáveis.

Exemplos:

a) $2x^2 + 2x + 1$
O polinômio tem grau 2, pois sua variável de maior grau é o x elevado no expoente 2. E na variável x também tem grau 2.

b) $x^2y + 3xy^3 + y^2 + x$
O polinômio tem grau 4, pois a soma dos expoentes das variáveis do termo de maior grau $3xy^3$ é 4. E na variável x tem grau 2.

5.2.2 Operações com Polinômios

Adição

A soma de dois polinômios é feita, adicionando os termos semelhantes de mesmo grau dos polinômios.
Exemplos:

a) $(5x^3 + 6x^4) + (-8x^3 + 2x^2)$

1) Eliminamos os parenteses:
$5x^3 + 6x^4 - 8x^3 + 2x^2$

2) Adicionamos os termos de mesmo grau:
$5x^3 - 8x^3 + 6x^4 + 2x^2 =$
$= -3x^3 + 6x^4 + 2x^2$

b) $(x^3 - 3x^2 + 8x + 7) + (-5x^3 - 12x + 3)$

1) Eliminamos os parenteses:
$x^3 - 3x^2 + 8x + 7 - 5x^3 - 12x + 3$

2) Adicionamos os termos de mesmo grau:
$x^3 - 5x^3 - 3x^2 + 8x - 12x + 7 + 3 =$
$= -4x^3 - 3x^2 - 4x + 10$

Subtração

A diferença de dois polinômios é feita adicionando o primeiro polinômio com o oposto de cada termo do segundo polinômio.
Exemplo: Determinar as diferenças.

a) $(y^2 - 5y + 7) - (3y^2 - 5y + 12)$

1) Eliminamos os parenteses, trocando os sinais dos termos do segundo polinômio:
$y^2 - 5y + 7 - 3y^2 + 5y - 12$

2) Adicionamos os termos semelhantes de mesmo grau:
$y^2 - 3y^2 - 5y + 5y + 7 - 12 =$
$= -2y^2 - 5$

b) $(x^2 - xy - 5y^2) - (-3x^2 - y^2 + 2xy)$

1) Eliminamos os parenteses, trocando os sinais dos termos do segundo polinômio:
$x^2 - xy - 5y^2 + 3x^2 + y^2 - 2xy$

2) Adicionamos os termos semelhantes de mesmo grau:
$x^2 + 3x^2 - 5y^2 + y^2 - xy - 2xy =$
$= 4x^2 - 4y^2 - 3xy$

Multiplicação

No produto de dois polinômios, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição ou subtração.
Exemplos:

a) $x^3(3x^4 - 5x^2 + 7x + 2)$
$= x^3 \cdot 3x^4 + x^3 \cdot (-5x^2) + x^3 \cdot 7x + x^3 \cdot 2$
$= 3x^{3+4} - 5x^{3+2} + 7x^{3+1} + 2x^3 =$
$= 3x^7 - 5x^5 + 7x^4 + 2x^3$

b) $(x+2y)(x^3-3x^2y+xy^2)$

$= x\cdot x^3 + x\cdot(-3x^2y) + x\cdot xy^2 + 2y\cdot x^3 + 2y\cdot(-3x^2y) + 2y\cdot xy^2$

$= x^{1+3} - 3x^{1+2}y + x^{1+1}y^2 + 2x^3y - 6x^2y^{1+1} + 2xy^{2+1}$

$= x^4 - 3x^3y + x^2y^2 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3$

$= x^4 - 3x^3y + 2x^3y + x^2y^2 - 6x^2y^2 + 2xy^3$

$= x^4 - x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3$

Simplificação de Expressões Algébricas

Veja, nos seguintes exemplos, como pode-se simplificar certas expressões algébricas.
Exemplos:

1. Simplificar a expressão $a(a+b) - b(a-b) - 2b^2$:
   $a(a+b) - b(a-b) - 2b^2 =$

   $= a^2 + ab - ab + b^2 - 2b^2 = \longmapsto$ efetuando as multiplicações

   $= a^2 - b^2 \longmapsto$ reduzindo os termos semelhantes

2. Se $A = x(x-5)$ e $B = (x-1)(x-3)$, calcular $A - B$.

   $A = x(x-5) = x^2 - 5x$

   $B = (x-1)(x-3) = x(x-3) - 1(x-3) = x^2 - 3x - 1x + 3 = x^2 - 4x + 3$

   $A - B = (x^2 - 5x) - (x^2 - 4x + 3) = x^2 - 5x - x^2 + 4x - 3 = -x - 3$

Divisão de Polinômios

Divisão de Polinômio por Monômio

Na divisão de um polinômio por um monômio, não nulo, deve-se dividir cada termo do polinômio por esse monômio.

Exemplos:

a) $(10x^3 - 8x^2 + 10x) : (2x), \text{com } x \neq 0$
   $= 10x^3 : 2x - 8x^2 : 2x + 10x : 2x$

   $= 5x^2 - 4x + 5$

b) $(2a^3b^2 - 5a^2b^3) : (2a^2b^2)$

   $= (2a^3b^2) : (2a^2b^2) + (-5a^2b^3) : (2a^2b^2) =$

   $= 1a^1b^0 + (-\frac{5}{2}a^0b^1) =$

   $= a - \frac{5}{2}b$

Divisão de Polinômio por Polinômio

A divisão pode ser feita por meio de algoritmo simples que simula a divisão de números inteiros.

Exemplos:

a) $(3x^2 - 7x + 3) : (x - 2)$
Dividendo: $3x^2 - 7x + 3$ (grau 2)
Divisor: $x - 2$ (grau 1)
Para efetuar a divisão de um polinômio por outro, vamos adotar o seguinte algoritmo:

1) Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor:
$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

2) Multiplica-se o quociente pelo divisor:
$3x \cdot (x - 2) = 3x^2 - 6x$

3) Subtrai-se o resultado da multiplicação do dividendo(esta subtração é feita adicionando-se o oposto do produto ao dividendo).
$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6x & 3x \\ \cline{1-1} \quad -x + 3 & \end{array}$$

4) Repetem-se os passos anteriores, considerando como dividendo o resultado da subtração $(-x + 3)$.
$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 7x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6x & 3x - 1 \\ \cline{1-1} \quad -x + 3 & \\ \quad +x - 2 & \\ \cline{1-1} \qquad 1 & \end{array}$$

Quociente: $3x - 1$
Resto: 1
A divisão chega ao fim quando tem se como resto um polinômio de grau menor que o grau do divisor.

b) $(x^4 - 1) : (x^2 + 1)$
Como o dividendo e o divisor são polinômios incompletos, devemos escrevê-los na forma geral, assim:

Dividendo: $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ (grau 4)
Divisor: $x^2 + 0x + 1$
Usando o algoritmo para divisão:

1) Divide-se o termo de maior grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor:
$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

2) Multiplica-se o quociente pelo divisor:
$x^2 \cdot (x^2 + 0x + 1) = x^4 + 0x^3 + x^2$

3) Subtrai-se o resultado da multiplicação do dividendo(esta subtração é feita adicionando-se o oposto do produto ao dividendo).
$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 - 0x^3 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} \quad / \quad / \qquad - x^2 + 0x - 1 & \end{array}$$

4) Repetem-se os passos anteriores, considerando como dividendo o resultado da subtração $(-x^2 + 0x - 1)$.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 + 0x + 1 \\ \cline{2-2} -x^4 - 0x^3 - x^2 & x^2 - 1 \\ \cline{1-1} \quad / \quad / \quad -x^2 + 0x - 1 & \\ \qquad\qquad +x^2 + 0x + 1 & \\ \cline{1-1} \quad / \quad / \quad / \quad / & \end{array}$$

Quociente exato: $x^2 - 1$
Resto: 0
A divisão chega ao fim quando tem se como resto um polinômio de grau menor que o grau do divisor.

Observações:

- Na divisão de polinômios, vale a sequinte relação:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}}$$

onde o resto é nulo ou um polinômio de grau menor que o grau do divisor.

Esta relação nos permite fazer a verificação da divisão. Assim, no 1° exemplo, temos:

$$(3x^2 - 7x + 3) : (x - 2)$$

Quociente: $3x - 1$

Resto: 1

Fazendo a verificação:

$$\underbrace{(3x-1)}_{quociente} \cdot \underbrace{(x-2)}_{divisor} + \underbrace{1}_{resto} = \underbrace{3x^2 - 7x + 3}_{dividendo}$$

- Quando o grau do dividendo for menor que o grau do divisor, o quociente será zero e o resto será o própio dividendo.

Capítulo 6

Produtos Notáveis

6.1 Quadrado da Soma de Dois Termos

Sendo a e b dois termos, deseja-se obter o produto $(a+b)^2$.
Algebricamente:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Daí surge a regra:

"*O **quadrado da soma de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o dobro do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.*"

Exemplos:

a) $(x+2y)^2$
$= x^2 + 2x2y + (2y)^2 =$
$= x^2 + 4xy + y^2$

b) $(2+a)^2$
$= 2^2 + 2a2 + a^2 =$
$= 4 + 4a + a^2$

c) $(3x^3+1)^2$
$= (3x^3)^2 + 2.(3x^3).1 + 1^2$
$= 9x^6 + 6x^3 + 1$

6.2 Quadrado da Diferença de Dois Termos

Sendo a e b dois termos, deseja-se calcular $(a-b)^2$.

Algebricamente:

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Daí surge a regra:

"*O **quadrado da diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.*

Exemplos:

a) $(x-2y)^2$
$= x^2 - 2x2y + (2y)^2 =$
$= x^2 - 4xy + 4y^2$

b) $(3a - \frac{1}{2})^2$
$= (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 =$
$= 9a^2 - \frac{6a}{2} + \frac{1}{4} =$
$= 9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$

c) $(x+y-z)^2$
$= (x+y)^2 - 2(x+y).z + z^2 =$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2 =$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$

6.3 Produto da Soma Pela Diferença de Dois Termos

Dados dois termos a e b, sejam $a+b$ a sua soma e $a-b$ a sua diferença, deseja-se obter o produto $(a+b)(a-b)$.
Algebricamente:

Pela propriedade distributiva temos:
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Temos daí, a regra:
"*O **produto da soma pela diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo*
Exemplos:

a) $(x+2)(x-2)$
$= x^2 - 2^2 =$
$= x^2 - 4$

b) $(\frac{1}{3} - y)(\frac{1}{3} + y)$
$= (\frac{1}{3})^2 - y^2 =$
$= \frac{1}{9} - y^2$

c) $(3x-4)(3x+4)$
$= (3x)^2 - 4^2$
$= 9x^2 - 16$

6.4 Produtos da Forma:$(x-p)(x-q)$

Deseja-se calcular $(x-p)(x-q)$.
Algebricamente:

Aplica-se a propriedade distributiva, temos:
$(x-p)(x-q) = x^2 - xq - xp + pq = x^2 - (p+q)x + pq = x^2 - Sx + P$
onde $S = p+q$ e $P = pq$

Exemplos:

a) $(x-2)(x-5) =$
Note que $p = 2$ e $q = 5$; $S = 2 + 5 = 7$ e $P = 2 \cdot 5 = 10$, assim temos que:
$(x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$

b) $(y+4)(y-6) =$
Note que $p = -4$ e $q = 6$; $S = -4 + 6 = 2$ e $P = (-4) \cdot 6 = -24$, assim temos que:
$(y+4)(y-6) = y^2 - 2y - 24$

Importante!!!

Os conceitos aqui apresentados nesse produto notável da forma $(x-p)(x-q)$ serão *"absorvidos"* somente com a prática e o exercício utilizando o raciocínio lógico e o pensamento matemático. Veja a seguir mais alguns exemplos.

Mais exemplos:

Calcular os seguintes produtos de polinômios:

c) $(x+1)(x-2) =$
Note que $p = -1$ e $q = 2$; $S = -1 + 2 = 1$ e $P = (-1).2 = -2$. Como o resultado do produto notável deve ser um trinômio da forma $x^2 - Sx + P$, temos:
$(x+1)(x-2) = x^2 - 1x - 2$

d) $(x+4)(x+2) = x^2 + 6x + 8$

e) $(x-4)(x-2) = x^2 - 6x + 8$

f) $(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$

g) $(x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$

6.5 Outros Produtos Notáveis

Sejam a e b dois termos, deseja-se obter:

- **Cubo de uma soma:**
  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- **Cubo de uma diferença:**
  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplos:

a) $(2x+3y)^3 =$
$= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3 =$
$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot 9y^2 + 27y^3 =$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^3 + 27y^3$

b) $(x-2y)^3 =$
$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 =$
$= x^3 - 6x^2 \cdot y + 3x \cdot 4y^2 - 8y^3 =$
$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Capítulo 7

Fatoração de Polinômios

Fatorar um polinômio que está na forma de uma soma algébrica é transforma-lo num produto de polinômios.
Um polinômio que não pode ser fatorado usando coeficientes inteiros é um polinômio irredutível. Veremos a seguir os principais casos de fatoração.

7.1 Colocação de um Fator Comum em Evidencia:

Sabe-se, pela propriedade distributiva, que:

$$3(x+y) = 3x + 3y$$

ou ainda

$$\boxed{3x+3y = 3(x+y)}$$

onde $\mathbf{3}$ e $(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ são os fatores.

A expressão $3(x+y)$ é a **forma fatorada** da expressão $3x+3y$.

Neste caso, dizemos que 3 é um **fator comum** aos termos da expressão $\mathbf{3x+3y}$ e que foi colocado **em evidência.**

Observe, nos exemplos que seguem, como se obtém a forma fatorada:

1. Fatorar os seguintes polinômios:

   a) $6x + 2xy$

   Neste caso, o fator comum é um monômio com parte numérica e literal:
   parte numérica: é o máximo divisor comum (m.d.c) dos coeficientes 6 e 2: m.d.c$(6,2)$=2
   parte literal: é a variável comum elevada ao menor expoente: x
   Logo, o fator comum é $2x$.
   Dividindo cada termo da expressão $6x+2xy$ pelo fator comum $2x$, temos:

   $$(6x+2xy) : 2x = 3 + y$$

   Portanto:
   $6x + 2xy = 2x(3+y)$

   b) $9a^2x^2 - 12a^2$
   Fator comum:
   parte numérica: m.d.c$(9,12)$= 3
   parte literal: a^2

Logo, o fator comum é $3a^2$.
Quociente da expressão pelo fator comum : $3x - 4$
Portanto:
$9a^2x - 12a^2 = 3a^2(3x - 4)$

c) $5ab^2 + 10a^2b^2 - 15a^3b^4$
Fator comum:
parte numérica: m.d.c$(5, 10, 15)$= 5
parte literal: ab^2
Logo, o fator comum é $5ab^2$.
Quociente da expressão pelo fator comum: $1 + 2a - 3a^2b^2$
Portanto:
$5ab^2 + 10a^2b^2 - 15a^3b^4 = 5ab^2(1 + 2a - 3a^2b^2)$

d) $(a + b)x + (a + b)y$
Fator comum: $(a + b)$
Quociente da expressão pelo fator comum: $x + y$
Portanto:
$(a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$

2. A forma fatorada do polinômio $5x(x - 3) + (x - 3)$ é:
Note que o fator comum é o binômio $(x - 3)$. *Se chamarmos esse fator de* y, *temos* $5xy + y$ *e colocando-o em evidência, temos* $y(5x + 1)$, *mas como* $y = x - 3$ *temos a forma fatorada sendo* $(x - 3)(5x + 1)$.
Portanto:
$5x(x - 3) + (x - 3) = (x - 3)(5x + 1)$

7.2 Por Agrupamento

Se um polinômio com quatro termos é o produto de dois binômios, podemos agrupar os termos para fatorar. Para isso, utilizamos a fatoração colocando o termo comum em evidencia duas vezes.

Exemplos:

a) $ax + ay + bx + by$
$= ax + bx + ay + by$
$= x(a + b) + y(a + b)$
$= (a + b)(x + y)$,

b) $3x - 6y + ax - 2ay$
$= 3(x - 2y) + a(x - 2y)$
$= (x - 2y)(3 + a)$

c) $a^4 - a^3 + a^2 - a =$
$= a^3(a - 1) + a(a - 1)$
$= (a - 1)(a^3 + a)$

d) $2ac - 2ad + bc - bd$
$= (2ac - 2ad) + (bc - bd)$
$= 2a(c - d) + b(c - d)$
$= (c - d)(2a + b)$

e) $3x^3 + x^2 - 6x - 2$
$= x^2(3x+1) - 2(3x+1)$
$= (3x+1)(x^2-2)$

7.3 Trinômio Quadrado Perfeito (TQP)

`Isso é muito importante SABER!!!`

Ao estudarmos produtos notáveis, vimos que:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Logo:
$(a+b)^2$ é a forma fatorada do trinômio: $a^2 + 2ab + b^2$
e
$(a-b)^2$ é a forma fatorada do trinômio: $a^2 - 2ab + b^2$

É necessário, pois, reconhecermos quando um trinômio pode ser decomposto como o quadrado de um binômio, isto é, quando um *trinômio* é **quadrado perfeito**. Para isso, devemos ter duas condições satisfeitas:

1) Dois termos do trinômio são quadrados perfeitos e são precedidos do sinal $+$.

2) O outro termo, precedido do sinal $+$ ou do sinal $-$, é igual ao dobro do produto das raízes dos termos quadrados.

Assim:

$$\begin{array}{ccccccc}
a^2 & +\,2ab & +\,b^2 & & a^2 & -\,2ab & +\,b^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} & & \sqrt{a^2} & & \sqrt{b^2} \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
a \searrow & & \swarrow b & \leftarrow 1^{\text{a}}\text{ condição} \rightarrow & a \searrow & & \swarrow b \\
 & 2ab & & \leftarrow 2^{\text{a}}\text{ condição} \rightarrow & & 2ab & \\
 & (a+b)^2 & & \longleftarrow \textbf{forma fatorada} \longrightarrow & & (a-b)^2 &
\end{array}$$

Portanto:
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Observação: Se o termo do meio for positivo, temos então o quadrado da soma de dois termos e se o termo do meio for negativo, temos então o quadrado da diferença de dois termos.

Exemplos:

Verifique se os seguintes trinômios são TQP e fatore-os:

a) $a^2 + 8ab + 16b^2 =$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{16b^2} = 4b$

Note que $2 \cdot a \cdot 4b = 8ab$
O trinômio é um TQP.

Assim, temos que:
$a^2 + 8ab + 16b^2 = (a+4b)^2$

b) $9x^2 - 30xy + 25y^2 =$

$\sqrt{9x^2} = 3x$

$\sqrt{25y^2} = 5y$

Note que $2 \cdot 3x \cdot 5y = 30xy$ que é o termo do meio
O polinômio é um TQP.

Assim, temos que:
$9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2$

7.4 Diferença de Dois Quadrados

`Isso é muito importante SABER!!!`

Como já vimos anteriormente, nos produtos notáveis, se
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
então podemos admitir que:
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Logo,$(a + b)(a - b)$ é a forma fatorada da expressão $a^2 - b^2$.
Vejamos, nos exemplos seguintes como se deve proceder para fatorar uma diferença de quadrados.
Exemplos:

1. Fatorar os seguintes polinômios:

   a) $a^2 - b^2$
   $a^2 \ - \ b^2$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $\sqrt{a^2} \ \sqrt{b^2}$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $a \quad b$
   Portanto:
   $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

   b) $x^2 - 16$
   $x^2 \ - \ 16$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $\sqrt{x^2} \ \sqrt{16}$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $x \quad 4$
   Portanto:
   $x^2 - 16$=$(x + 4)(x - 4)$

   c) $9x^2 - 25y^4$
   $9x^2 \ - \ 25y^4$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $\sqrt{9x^2} \ \sqrt{25y^4}$
   $\downarrow \quad \downarrow$
   $3x \quad 5y^2$
   Portanto:
   $9x^2 - 25y^4$=$(3x + 5y^2)(3x - 5y^2)$

2. Veja uma bela aplicação da diferença de dois quadrados:

(a) Calcular $2342^2 - 2341^2$.
Note que temos a diferença de dois quadrados e usando o processo de fatoração visto anteriormente, temos que:
$2342^2 - 2341^2 = (2342 + 2341)(2342 - 2341) = 4683 \cdot 1 = 4683.$, ou seja, é muito mais rápido do que elevar 2342 ao quadrado e 2341 ao quadrado e calcular sua diferença.

(b) Calcular $423^2 - 421^2$.
Também temos a diferença de dois quadrados, logo,
$423^2 - 421^2 = (423 + 421)(423 - 421) = 844 \cdot 2 = 1688.$

7.5 Trinômio do 2º Grau do tipo $x^2 - Sx + P$

Vale a pena SABER!!!

As técnicas apresentadas a seguir são bastante úteis para resolver problemas envolvendo funções polinomiais de 2º grau. Você pode ganhar um bom tempo sem utilizar a fórmula resolutiva para equações de 2º grau para encontrar as raízes de um polinômio de grau 2.

No trinômio $x^2 - Sx + P$, S é a soma das raízes e P é o produto das mesmas.
Seja a expressão $x^2 - 5x + 6$.
Sabe-se, por um dos casos de produtos notáveis, que:
$(x-2)(x-3) = x^2 - \mathbf{(2+3)}x + \mathbf{2 \cdot 3}$
Logo,$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$
ou
$\boxed{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)}$
Portanto:
$(x-2)(x-3)$ é a **forma fatorada** da expressão $x^2 - 5x + 6$
Em $x^2 - \mathbf{5}x + \mathbf{6} = (x - \mathbf{2})(x - \mathbf{3})$, **5** (coeficiente de x) é a **soma** de 2 e 3 e **6**(termo independente) é o **produto** de 2 e 3.

De uma forma geral, sendo x_1 e x_2 as raízes do trinômio $x^2 - Sx + P = 0$, onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$, a sua forma fatorada fica:

$$x^2 - Sx + P = (x - x_1)(x - x_2).$$

Observe como se obtém a forma fatorada de um trinômio do 2º Grau do tipo $x^2 - Sx + P$, nos seguintes exemplos:

a) Fatoremos $x^2 - 7x + 12$
Teremos que encontrar dois números , tais que:
- sua **soma** seja **7**;
- seu **produto** seja **12**.
Como o produto é positivo, os números procurados devem ter sinais iguais (ambos positivos ou ambos negativos). E como a soma é positiva, concluímos que ambos os números são positivos.
Decompondo o número 12 e fazendo as alternativas possíveis a partir do produto, temos:

12	2
6	2
3	3
1	

Logo:
se $3 \cdot 4 = 12$
e $3 + 4 = 7$,
os números procurados são **3** e **4**. Portanto:
$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

b) Fatoremos $x^2 - 8x + 15$
Para fatorá-lo, temos que encontrar dois números, tais que:
- sua **soma** seja **8**;
- seu **produto** seja **15**.
O produto dos números procurados é positivo e a soma também é positiva. Então, ambos números são positivos.
Como $15 = 3 \cdot 5$
e $3 + 5 = 8$,
os números procurados são **3** e **5**.
Portanto:
$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$

c) Fatoremos $x^2 + 3x - 10$
Note que:

i) $x^2 + 3x - 10 = x^2 - (-3)x + (-10)$
ii) $10 = 5 \cdot 2$

Teremos que encontrar dois números, tais que:
- sua **soma** seja **-3**;
- seu **produto** seja **-10**.
Neste caso, como o produto é negativo, os números procurados devem ter sinais contrários. A soma é negativa, donde se conclui que o maior número, em valor absoluto, é negativo.
Como $(2) \cdot (-5) = -10$
e $2 - 5 = -3$,
os números são **2** e **-5**.
Portanto:
$x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x - (-5)) = (x - 2)(x + 5)$

d) Fatoremos $x^2 - x - 20$
Para fatorá-lo, termos que encontrar dois números, tais que:
- sua **soma** seja **1**;
- seu **produto** seja **-20**.
Como $-4 \cdot 5 = -20$
e $-4 + 5 = 1$
os números procurados são **-4** e **5**.
Portanto:
$x^2 - x - 20 = (x - (-4))(x - 5) = (x + 4)(x - 5)$

7.6 Fatoração de expressões combinadas

Algumas expressões admitem fatoração com emprego de mais de um caso. Nesta situação basta aplicar sucessivamente os casos possíveis sempre que for oportuno, começando pelo caso de colocação de um fator comum em evidencia.
Exemplos: Obter as formas fatoradas das expressões seguintes:

a) $5x^4 - 45x^2$
$5x^2$ é um fator comum. Logo:
$= 5x^2(x^2 - 9)$; $x^2 - 9$ é a diferença de quadrados. Logo:
$= 5x^2(x + 3)(x - 3)$

b) $4x^4 - 16x^3y + 16x^2y^2$
$4x^2$ é um fator comum. Logo:

$= 4x^2(x^2 - 4xy + 4y^2)$; $x^2 - 4xy + 4y^2$ é o quadrado perfeito. Logo:
$= 4x^2(x - 2y)^2$

c) $5x^4y - 5y$
$5y$ é um fator comum. Logo:
$= 5y(x^4 - 1)$; $x^4 - 1$ é diferença de quadrados. Portanto:
$= 5y(x^2 + 1)(x^2 - 1)$; $x^2 - 1$ é a diferença de quadrados. Logo:
$= 5y(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

7.7 Soma ou Diferença de Dois Cubos

- **Soma de dois cubos:**
  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

- **Diferença de dois cubos:**
  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplos:

Fatorar os seguintes polinômios

a) $2x^3 + 2y^3 =$
$= 2(x^3 + y^3) =$
$= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

b) $5x^3 - 5y^3 =$
$= 5(x^3 - y^3) =$
$= 5(x - y)(x^3 + xy + y^2)$

Capítulo 8

Frações Algébricas

8.1 M.d.c e M.m.c de Polinômios

8.1.1 M.d.c e M.m.c de Números Naturais

No estudo das operações em $\mathbb{N}$, já tivemos a oportunidade de calcular o máximo divisor comum **(m.d.c)** e o mínimo múltiplo comum **(m.m.c)** de dois ou mais números. Para recordar as técnicas apropriadas, calculamos o m.d.c e o m.m.c dos números 24, 36 e 60.

1º) Decompõem-se os números em fatores primos:

24	2	36	2	60	2
12	2	18	2	30	2
6	2	9	3	15	3
3	3	3	3	5	5
1		1		1	

$24 = 2^3 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

2º) Aplicam-se as seguintes regras:

Definição: O **m.d.c** de dois ou mais números é igual ao produto dos fatores comuns a esses números, cada um deles elevado ao menor de seus expoentes.

Definição: O **m.m.c** de dois ou mais números é igual ao produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao maior de seus expoentes.

Portanto:

$\boxed{\text{m.d.c}(24; 36; 60) = 2^2 \cdot 3 = 12}$ $\boxed{\text{m.m.c}(24; 36; 60) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360}$

As mesmas regras se aplicam para determinação do m.d.c ou m.m.c de **monômios** e de **polinômios.**

8.1.2 M.d.c e M.m.c de Monômios

Vamos obter o m.d.c e m.m.c dos monômios seguintes utilizando as definições vistas no item **8.1.1**:

- $10a^2b$ e $15a^3b^4$
  1º) Fatorando os coeficientes dos monômios, temos:
  $\begin{cases} 10a^2b = 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot b \\ 15a^3b^4 = 3 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^4 \end{cases}$

  2º) Aplicando as definições de m.d.c e m.m.c, vem:
  $\text{m.d.c}(10a^2b; 15a^3b^4) = 5 \cdot a^2 \cdot b = 5a^2b$
  $\text{m.m.c}(10a^2b; 15a^3b^4) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b^4 = 30a^3b^4$

- $5a^2xy; -50ax^2$ e $35a^3y^3$
  1º) Fatorando os coeficientes dos monômios, temos:
  $$\begin{cases} 5a^2xy = 5 \cdot a^2 \cdot x \cdot y \\ -50ax^2 = -2 \cdot 5^2 \cdot a \cdot x^2 \\ 35a^3y^3 = 5 \cdot 7 \cdot a^3 \cdot y^3 \end{cases}$$

  2º) Aplicando as definições de m.d.c e m.m.c, vem:
  m.d.c$(5a^2xy; -50ax^2; 35a^3y^3) = 5 \cdot a = 5a$
  m.m.c$(5a^2xy; -50ax^2; 35a^3y^3) = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot y^3 = 350a^3x^2y^3$

Convém observar que se pode admitir, por convenção, que o m.d.c e o m.m.c de monômios tenham sempre um **coeficiente positivo.**

8.1.3 M.d.c e M.m.c de Polinômios

Vamos obter o m.d.c e m.m.c dos seguintes polinômios utilizando as definições vistas no item **8.1.1**:

1) $4x^2$ e $6x^2 - 12x$
   Fatorando as expressões:
   $$\begin{cases} 4x^2 = 2^2 \cdot x^2 \\ 6x^2 - 12x = 6x(x-2) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x-2) \end{cases}$$
   Observação: Note que $(x-2)$ é um **único** fator, assim:

   m.d.c$(4x^2; 6x^2 - 12) = 2 \cdot x = 2x$
   m.m.c$(4x^2; 6x^2 - 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot (x-2) = 12x^2(x-2)$

2) $x^2 - 4$ e $x^2 + 2x$
   Fatorando as expressões, temos:
   $$\begin{cases} x^2 - 4 = (x+2) \cdot (x-2) & \dashrightarrow \text{ forma fatorada do polinômio} \\ x^2 + 2x = x \cdot (x+2) & \dashrightarrow \text{ forma fatorada do polinômio} \end{cases}$$
   Observação: Note que x, $(x+2)$ e $(x-2)$ são os fatores, assim:

   m.d.c$(x^2 - 4; x^2 + 2x) = (x+2)$
   m.m.c$(x^2 - 4; x^2 + 2x) = x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

3) $x - a, x^2 - a^2$ e $x^2 - 2ax + a^2$
   Fatorando as expressões, temos:
   $$\begin{cases} x - a = (x-a) & \dashrightarrow \text{ forma fatorada do polinômio} \\ x^2 - a^2 = (x-a) \cdot (x+a) & \dashrightarrow \text{ forma fatorada do polinômio} \\ x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2 & \dashrightarrow \text{ forma fatorada do polinômio} \end{cases}$$
   então:
   m.d.c$(x - a; x^2 - a^2; x^2 - 2ax + a^2) = (x-a)$
   m.m.c$(x - a; x^2 - a^2; x^2 - 2ax + a^2) = (x-a)^2(x+a)$

8.2 Frações Algébricas

Chama-se **fração algébrica** o quociente indicado de dois polinômios, onde o polinômio do denominador tem pelo menos grau 1 (como caso particular, um dos termos poderá ser um monômio ou um binômio).

8.2.1 Simplificação de Frações Algébricas

Multiplicando-se ou dividindo-se os termos (numerador e denominador) de uma fração algébrica por uma mesma expressão, não nula, a fração obtida é equivalente à fração dada.

Exemplos:
Simplifique as seguintes expressões algébricas:

1. $\dfrac{3a^3b^2}{6a^2b^2}$

   Para destacar os fatores comuns, vamos fatorar convenientemente os termos da fração:
   $\dfrac{3a^3b^2}{6a^2b^2} = \dfrac{\cancel{3}\cancel{a^2}a\cancel{b^2}}{\cancel{3}\cdot 2\cancel{a^2}\cancel{b^2}} = \dfrac{a}{2}$

   Cancelam-se os fatores comuns: $3a^2b^2$

2. $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1}$

   Fatorando convenientemente os termos da fração:
   $\dfrac{a+1}{a^2+2a+1} = \dfrac{\cancel{(a+1)}}{(a+1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{a+1}$

   Cancelam-se os fatores comuns: $(a+1)$

3. $\dfrac{4x^2-4}{8x^2-16x+8}$

   Fatorando convenientemente os termos da fração:
   $\dfrac{4x^2-4}{8x^2-16x+8} = \dfrac{4(x^2-1)}{8(x^2-2x+1)} = \dfrac{4(x+1)(x-1)}{8(x-1)^2} = \dfrac{\cancel{4}(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{4}\cdot 2(x-1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{(x+1)}{2(x-1)} = \dfrac{x+1}{2x-2}$

   Cancelam-se os fatores comuns: $4(x-1)$

4. $\dfrac{x^2-x}{4x-4}$

   Fatorando convenientemente os termos da fração:
   $\dfrac{x^2-x}{4x-4} = \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{4\cancel{(x-1)}} = \dfrac{x}{4}$

   Cancelam-se o fator comum: $(x-1)$

Observação:

Isso NÃO PODE!!!

A simplificação de uma fração algébrica **não pode ser feita da forma**:

$\dfrac{x+\cancel{3}}{\cancel{3}}$, pois 3 não representa um fator, no caso;

ou

$\dfrac{\cancel{a}+x}{\cancel{a}-y}$, pois a não representa um fator, no caso.

8.2.2 Operações com Frações Algébricas

Adições e Subtrações

Veremos as adições e subtrações nos exemplos a seguir:
1º caso: Os denominadores são iguais: Neste caso, basta dar ao resultado o **denominador comum** e efetuar as operações indicadas nos numeradores.

Efetuar as seguintes somas algébricas:

1. $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x-1}{y}-\dfrac{x-2}{y}$

   $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x-1}{y}-\dfrac{x-2}{y}=\dfrac{2x+x-1-(x-2)}{y}=\dfrac{2x+\cancel{x}-1-\cancel{x}+2}{y}=\dfrac{2x+1}{y}$

2. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1+x}{x-1}-\dfrac{2-x}{x-1}$

   $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1+x}{x-1}-\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{x-(1+x)-(2-x)}{x-1}=\dfrac{x-1-\cancel{x}-2+\cancel{x}}{x-1}=\dfrac{x-3}{x-1}$

3. $\dfrac{x}{(x+1)^2}-\dfrac{1+2x}{(x+1)^2}-\dfrac{3+x}{(x+1)^2}$

   $\dfrac{x}{(x+1)^2}-\dfrac{1+2x}{(x+1)^2}-\dfrac{3+x}{(x+1)^2}=\dfrac{x-(1+2x)-(3+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{\cancel{x}-1-2x-3-\cancel{x}}{(x+1)^2}=\dfrac{-2x-4}{(x+1)^2}$

2° caso: Os denominadores são diferentes: Para adicionar ou subtrair frações algébricas, aplicamos o mesmo procedimento usado com os números fracionários: obtemos frações equivalentes e que tenham o mesmo denominador que pode ser o MMC entre os denominadores.
Exemplos:

Efetuar as seguintes somas algébricas:

1. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{5}{8x^2}$

   Cálculo do m.m.c:
   $x=x$
   $4x^2=2^2\cdot x^2$
   $8x^2=2^3\cdot x^2$
   m.m.c$(x;4x^2;8x^2)=8x^2$

   $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{5}{8x^2}=\dfrac{8x\cdot 2}{8x^2}+\dfrac{2\cdot 1}{8x^2}-\dfrac{1\cdot 5}{8x^2}=\dfrac{16x}{8x^2}+\dfrac{2}{8x^2}-\dfrac{5}{8x^2}=\dfrac{16x+2-5}{8x^2}=\dfrac{16x-3}{8x^2}$

2. $\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2-1}{x^2-y^2}$

   Cálculo do m.m.c:
   $x+y=(x+y)$
   $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
   m.m.c$(x+y,x^2-y^2)=(x+y)(x-y)$ ou x^2-y^2

   $\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2-1}{x^2-y^2}=\dfrac{x(x-y)}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-1}{x^2-y^2}=\dfrac{\cancel{x^2}-xy-\cancel{x^2}+1}{x^2-y^2}=\dfrac{1-xy}{x^2-y^2}$

3. $\dfrac{a^2+a}{a^2-9}+\dfrac{2}{a-3}+\dfrac{1}{a+3}$

   Cálculo do m.m.c:
   $a^2-9=(a+3)(a-3)$
   $a-3=(a-3)$
   $a+3=(a+3)$
   m.m.c$(a^2-9,a-3,a+3)=(a+3)(a-3)$

$$\frac{a^2+a}{a^2-9}+\frac{2}{a-3}+\frac{1}{a+3}=\frac{a^2+a}{(a+3)(a-3)}+\frac{2}{a-3}+\frac{1}{a+3}=\frac{a^2+a+2(a+3)+(a-3)}{(a+3)(a-3)}=$$
$$=\frac{a^2+a+2a+6+a-3}{(a+3)(a-3)}=\frac{a^2+4a+3}{(a+3)(a-3)}=\frac{\cancel{(a+3)}(a+1)}{\cancel{(a+3)}(a-3)}=\frac{a+1}{a-3}$$

Multiplicações e Divisões

Sabemos que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{e}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

O mesmo procedimento se aplica a quaisquer frações algébricas, conforme segue.
Efetuar os seguintes produtos e divisões de frações algébricas:

1. $\dfrac{a-1}{2x}\cdot\dfrac{4x^2-2x}{a^2-1}$

   $$\frac{a-1}{2x}\cdot\frac{4x^2-2x}{a^2-1}=\frac{a-1}{2x}\cdot\frac{4x(x-2)}{(a+1)(a-1)}$$

   Simplificando antes de multiplicar, temos:

   $$\frac{a-1}{2x}\cdot\frac{4x(x-2)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2(x-2)}{a+1}=\frac{2x-4}{a+1}$$

2. $\dfrac{\frac{x^2+6x+9}{2x}}{\dfrac{2x+6}{x^2}}$

   $$\frac{\frac{x^2+6x+9}{2x}}{\dfrac{2x+6}{x^2}}=\frac{x^2+6x+9}{2x}\cdot\frac{x^2}{2x+6}=\frac{(x+3)^2}{2x}\cdot\frac{x^2}{2(x+3)}$$

   Simplificar antes de multiplicar, temos

   $$\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{2}}}{2\cdot\cancel{(x+3)}}=\frac{(x+3)}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x(x+3)}{4}=\frac{x^2+3x}{4}$$

3. $\left[\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}\right]\div\dfrac{x+1}{(x^2+6x+9)}$

   Fatorando, temos:

   $$\left[\frac{x^2+4x+4}{x+1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}\right]\div\frac{x+1}{(x^2+6x+9)}=\left[\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}(x+3)}\right]\div\frac{(x+1)}{(x+3)^2}=$$
   $$=\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+3)}}\cdot\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}}=\frac{(x+2)(x+3)}{1}=x^2+5x+6$$

Potenciação de Frações Algébricas

Sabemos que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

A partir daí, podemos calcular a potência n-ésima de frações algébricas, como nos exemplos seguintes.

1. $\left(\dfrac{2x^2}{3y}\right)^2$

   $$\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2 = \frac{\left(2x^2\right)^2}{(3y)^2} = \frac{4x^4}{9y^2}$$

2. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

   $$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$$

3. $\left(\dfrac{3xy^2}{x-y}\right)^3$

   $$\left(\frac{3xy^2}{x-y}\right)^3 = \frac{\left(3xy^2\right)^3}{(x-y)^3} = \frac{27x^3y^6}{(x-y)^3}$$

Capítulo 9

Potenciação e Radiciação

9.1 Potenciação

9.1.1 Definição

Para $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$a^n = b$, onde a é a ***base***, n é o ***expoente*** e b é a ***potência*** (resultado da operação).

- $a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n \quad fatores}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Observações: Existem algumas bases e expoentes *especiais*, tais como,

- $1^n = 1 \;\; \forall\, n \quad \dashrightarrow$ (*para todo* n)
- $0^n = 0 \;\; \forall\, n > 0 \dashrightarrow$ (*para todo* n *maior do que* 0)
- $10^n = 1...,$ seguidos de n zeros
  Números representados genericamente na forma: $N \times 10^n$ (N é um número inteiro de 1 a 9) são números escritos em *notação científica.*
  Exemplos: Escreva na forma de notação científica:
  a) $136,5 = 1,365 \times 10^2$
  b) $0,000847 = 8,47 \times 10^{-4}$.
  Note que o expoente da base 10 é o deslocamento da vírgula para direita ou para esquerda.
- Quando o expoente é **par**, a potência será sempre positiva:
  $x^{2n} > 0, \; \forall\, x \in \Re$
- Quando o expoente é **ímpar**, a potência terá como sinal, o mesmo sinal da base.

Exemplos:

1) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$, temos a base 3, o expoente 4 e a potência 81.

2) $\left(\dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$, 2 é o expoente, $\dfrac{2}{3}$ é a base e $\dfrac{4}{9}$ é a potência.

3) $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^3 = 0,125$, temos a base $0,5$, o expoente 3 e a potência é $0,125$.

Exercícios Resolvidos:

1. Escreva em forma de potência os seguintes produtos:
   (a) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$
   (b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
   (c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

2. Escreva em forma de produto as seguintes potências:
   (a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
   (b) $6^6 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$
   (c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$

3. Calcule as seguintes potências:
   (a) $3^4 =$
   Pela definição, temos:
   $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
   (b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$
   Pela definição, temos:
   $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
   (c) $(0,6)^3 =$
   Pela definição, temos:
   $(0,6)^3 = (0,6) \cdot (0,6) \cdot (0,6) = 0,216$
   (d) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
   (e) $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$
   (f) $6^1 = 6$
   (g) $3^0 = 1$

4. Calcule:
   (a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
   (b) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
   (c) $5^0 = 1$

(d) $120^1 = 120$

(e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

(f) $0^{100} = 0$

(g) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

(h) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

(i) $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

(j) $10^7 = 10.000.000$

(k) $(-6)^2 = (-6)(-6) = 36$

(l) $6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

(m) $1^4 = 1$

(n) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

(o) $10^{-4} = 0,0001$

(p) $(0,2)^3 = 0,008$

5. Escreva em forma de notação científica:

(a) $268.000 = 2,68 \times 10^5$

(b) $0,00023 = 2,3 \times 10^{-4}$

(c) $2.500.000.000 = 2,5 \times 10^9$

9.1.2 Propriedades da Potenciação

Para $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Exercícios Resolvidos:

1. Aplicando as propriedades da potenciação, simplifique:

(a) $10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8$

(b) $6^4 \cdot 6 = 6^{4+1} = 6^5$

(c) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{4+2} = \left(\frac{2}{5}\right)^6$

(d) $(0,1)^4 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,1) = (0,1)^{4+2+1} = (0,1)^7$

(e) $10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$

(f) $6^4 : 6 = 6^{4-1} = 6^3$

(g) $\left(\frac{3}{5}\right)^6 : \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{6-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

(h) $(0,7)^8 : (0,7)^5 = (0,7)^{8-5} = (0,7)^3$

(i) $(10^5)^3 = 10^{5\cdot 3} = 10^{15}$

(j) $(2^6)^2 = 2^{6\cdot 2} = 2^{12}$

(k) $[(2^5)^2]^4 = 2^{5\cdot 2\cdot 4} = 2^{40}$

(l) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4\cdot 6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24}$

(m) $(3 \cdot 7)^2 = 3^2 \cdot 7^2$

(n) $(2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$

(o) $(3 \cdot 4 \cdot 9)^3 = 3^3 \cdot 4^3 \cdot 9^3$

(p) $(6 : 4)^5 = 6^5 : 4^5$

(q) $(10 : 3)^4 = 10^4 : 3^4$

(r) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

2. Associe V (verdadeiro) ou F (falso) a cada sentença:

(a) $2^2 \cdot 2^{-3} = 1/2 \dashrightarrow V$,
pois $2^2 \cdot 2^{-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

(b) $(3^2)^3 = 3^5 \dashrightarrow F$,
pois $(3^2)^3 = 3^{2\cdot 3} = 3^6$

(c) $10^{x+1} = 10^x \cdot 10 \dashrightarrow V$,
pois $10^x \cdot 10 = 10^x \cdot 10^1 = 10^{x+1}$

(d) $a^{3^2} = (a^3)^2 \dashrightarrow F$,
pois $a^{3^2} = a^9$

(e) $\frac{5}{5^x} = 5^{1+x} \dashrightarrow F$,
pois $\frac{5}{5^x} = 5^1 \div 5^x = 5^{1-x}$

(f) $2^n : 2^{n-1} = 2 \dashrightarrow V$,
pois $2^n : 2^{n-1} = 2^{n-(n-1)} = 2^{\cancel{n}-\cancel{n}+1} = 2^1 = 2$

(g) $5^{x+1} \cdot 5^{x-1} = 5^{2x}$ --→ V,
pois $5^{x+1} \cdot 5^{x-1} = 5^{x+\cancel{1}+x-\cancel{1}} = 5^{2x}$

(h) $\frac{10^2}{10^5} = 10^3$ --→ F,
pois $\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$

(i) $(a^{x+2})^3 = a^{3x+6}$ --→ V,
pois $(a^{x+2})^3 = a^{(x+2)\cdot 3} = a^{3x+6}$

(j) $(2^x)^x = 2^{2x}$ --→ F,
pois $(2^x)^x = 2^{x^2}$

(k) $10^{x+2} : 10^{x+1} = 10$ --→ V,
pois $10^{x+2} : 10^{x+1} = 10^{x+2-(x+1)} = 10^{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1} = 10^{2-1} = 10^1 = 10$

(l) $(a^{-2} \cdot b^3)^{-2} = a^4.b^{-6}$ --→ V,
pois $(a^{-2} \cdot b^3)^{-2} = a^{(-2)\cdot(-2)} \cdot b^{3\cdot(-2)} = a^4 \cdot b^{-6}$

9.2 Radiciação

9.2.1 Definição

Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos:
$\sqrt[n]{b} = a$, onde a é a ***raiz***, b é o ***radicando***, n é o ***índice*** e $\sqrt{.}$ é o ***radical***.
Assim, $\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$.

Quando o índice é 2, usualmente não se escreve o índice.
Exemplo: $\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}$

Radicais de índice 1 podem, às vezes, ser escritos e representam o próprio radicando. O índice 1 é o mesmo que o expoente 1 na potenciação.
Exemplo: $\sqrt[1]{b} = b$

9.2.2 Raiz de Um Número Real

- **Se $b \geq 0$ e n é par ou ímpar**
  Nesse caso a raiz a sempre será um número real positivo ou nulo.
  Observe os exemplos:

  a) $\sqrt{25} = 5 \Longleftrightarrow 5^2 = 25$
  b) $\sqrt[3]{27} = 3 \Longleftrightarrow 3^3 = 27$
  c) $\sqrt[3]{0} = 0 \Longleftrightarrow 0^3 = 0$
  d) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

- **Se $b < 0$ e n é par**
  Nesse caso, não existe a raiz a, ou seja não existe raiz de índice par de um número negativo:
  $\sqrt{4} \notin \mathbb{R}$
  Pois não há número real que elevado ao quadrado reproduza o número -4.
  Do mesmo modo:
  $\sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$ e $\sqrt[6]{-100} \notin \mathbb{R}$

- **Se $b < 0$ e n é ímpar**
  Nesse caso, a raiz a sempre será um número real negativo.
  Observe alguns exemplos:

  a) $\sqrt[5]{-32} = -2 \Longleftrightarrow (-2)^5 = -32$

  b) $\sqrt[7]{-1} = -1 \Longleftrightarrow (-1)^7 = -1$

  c) $\sqrt[3]{-8} = -2 \Longleftrightarrow (-2)^3 = -8$

  d) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{1000}} = -\dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow \left(-\dfrac{1}{10}\right)^3 = -\dfrac{1}{1000}$

9.2.3 Propriedades da Radiciação

1. $(\sqrt[n]{b})^n = b$

2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad b \neq 0$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

5. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}, \quad p \in \mathbb{N}^*$

6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ ou $\sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}, \quad p \in \mathbb{N}^*$

Exemplos:

Utilizando as propriedades da radiciação, calcule as seguintes raizes:

a) $(\sqrt{4})^2 = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{7}}$

d) $\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$

e) $(\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{9^2} = \sqrt[3]{81}$

f) $\sqrt[12]{10^6}$ Dividindo o índice e o expoente de $\sqrt[12]{10^6}$ pelo fator comum 6 obtemos:
$\sqrt[12]{10^6} = \sqrt[12 \div 6]{10^{6 \div 6}} = \sqrt{10}$

9.2.4 Simplificação de Radicais

A simplificação de radicais pode ser feita utilizando as propriedades das potências e dos radicais, que depende do índice do radical e dos expoentes dos radicandos. Vamos examinar dois casos.

Primeiro Caso: Índice e o Expoente do Radicando Admitem um Fator Comum

1. Simplificar o radical $\sqrt[6]{a^3}$.

   Neste caso, o índice e o expoente do radicando admitem um fator comum. Dividindo-se o índice do radical e o expoente do radicando pelo fator comum 3, temos:

   $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6\div3]{a^{3\div3}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$

2. Simplificar o radical $\sqrt[6]{27b^3}$.

   Neste caso, devemos inicialmente fatorar o radicando:

   $\sqrt[6]{27b^3} = \sqrt[6]{3^3b^3} = \sqrt[6]{(3\cdot b)^3} = \sqrt[6\div3]{(3\cdot b)^{3\div3}} = \sqrt{3b}$

Exemplos:

Utilizando esse procedimento, podemos simplificar os radicais:

a) $\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5\div5]{a^{10\div5}} = \sqrt[1]{a^2} = a^2$

b) $\sqrt[8]{a^6\cdot b^2} = \sqrt[8]{(a^3b)^2} = \sqrt[8\div2]{(a^3b)^{2\div2}} = \sqrt[4]{a^3b}$

c) $\sqrt[10]{32} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10\div5]{2^{5\div5}} = \sqrt{2}$

Segundo Caso: Alguns Fatores Admitem Fator Comum com o Índice do Radical

Considere o radical $\sqrt[3]{a^6\cdot x}$.
Neste caso, apenas alguns fatores do radicando admitem fator comum com o indice do radical.
Transformando o radical dado num produto de radicais, temos:
$\sqrt[3]{a^6\cdot x} = \sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{x}$
ou
$\sqrt[3\div3]{a^{6\div3}}\cdot\sqrt[3]{x} = a^2\sqrt[3]{x}$
Utilizando o mesmo procedimento, podemos efetuar:

a) $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b} = a\sqrt{b}$

b) $\sqrt[3]{a^6\cdot x} = \sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3\div3]{a^{6\div3}}\cdot\sqrt[3]{x} = a^2\sqrt[3]{x}$

c) $\sqrt[3]{a^6b^3x} = \sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{x} = a^2b\sqrt[3]{x}$

d) $\sqrt[10]{2048} = \sqrt[10]{2^{11}} = \sqrt[10]{2^{10}\cdot 2} = \sqrt[10]{2^{10}}\cdot\sqrt[10]{2} = 2\sqrt[10]{2}$

CUIDADO! Isso é importante saber.

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b\\ \sqrt{a^2-b^2}\neq a-b\end{array}\right\}$ pois (a^2+b^2) e (a^2-b^2) não são quadrados de $(a+b)$ e $(a-b)$, respectivamente.

9.2.5 Potenciação com Expoente Racional

Sendo $p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*$, temos:

i) $a \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

ii) $a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0^{\frac{p}{n}} = 0 \text{ para } \frac{p}{n} > 0 \\ 0^{\frac{p}{n}} \text{ não é defininido para } \frac{p}{n} < 0 \end{cases}$

iii) $a \in \mathbb{R}_-^* \Rightarrow \begin{cases} a^{\frac{p}{n}} \text{ nem sempre é real se n é par} \\ a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \text{ se n é ímpar} \end{cases}$

Todas as propriedades da potenciação com expoente inteiro são válidas para expoente fracionário.

Exemplos:

1) Escrever, se possível as seguintes potências na forma de radical:

a) $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

b) $a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^3} \cdot a^2 = a\sqrt[3]{a^2}$

c) $(-16)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-16)^3} = \sqrt[4]{-4096} \notin \mathbb{R}$

d) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

e) $(x^2 \cdot y^4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^2 \cdot y^4} = y \cdot \sqrt[4]{x^2} = y\sqrt{x}$

f) $m^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{m^3}}$

g) $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

2) Escrever sob a forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$

c) $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = 7^{-\frac{2}{3}}$ --→ `Isso é amplamente usado no Cálculo`

e) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{a^3}} = 3 \cdot a^{-\frac{3}{5}}$ --→ `Isso é amplamente usado no Cálculo`

9.2.6 Introdução de um Fator no Radical

As vezes, convém introduzir um fator no radical; já vimos as propriedades que permitem essa operação. Basta, então, observar:
Como $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, então $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$.
Também $\sqrt{x^4y} = x^2\sqrt{y}$, então $x^2\sqrt{y} = \sqrt{x^4 \cdot y}$ e daí:

Quando se introduz um fator no radical, basta multiplicar o expoente desse fator pelo índice do radical.

9.2.7 Redução de Radicais ao Mesmo Índice

Sejam os radicais $\sqrt[2]{7}$ e $\sqrt[3]{a^2}$.
Pela propriedade $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ das operações com radicais, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[2]{7} = \sqrt[2 \cdot 3]{7^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{7^3} \\ \\ \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{a^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{a^4} \end{array}\right\rangle \text{São radicais de mesmo índice}$$

Na prática, procede-se da seguinte forma:

1º) Determina-se o m.m.c dos índices, para se obter um **índice comum**.

2º Divide-se o índice comum pelo índice de cada radical, multiplicando-se o quociente obtido em cada caso pelo expoente do radicando.

Exemplos:
Reduza os radicais ao mesmo índice:

a) $\sqrt{a}$ e $\sqrt[5]{a^2}$ --→
Note que:

i) $\sqrt{a}$ tem índice 2
ii) $\sqrt[5]{a^2}$ tem índice 5

Temos que obter o índice comum: m.m.c.$(2, 5) = 10$
$\sqrt[10]{a^{1 \cdot 5}}$, $\sqrt[10]{a^{2 \cdot 2}}$
ou $\sqrt[10]{a^5}$, $\sqrt[10]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{a}, \sqrt{ab}, \sqrt[4]{2a^3}$
Note que:

i) $\sqrt[3]{a}$ tem índice 3
ii) $\sqrt{ab}$ tem índice 2
iii) $\sqrt[4]{2a^3}$ tem índice 4

Temos que obter o índice comum: m.m.c$(3, 2, 4) = 12$
$\sqrt[12]{a^4}$, $\sqrt[12]{(ab)^6}$, $\sqrt[12]{(2a^3)^3}$
ou $\sqrt[12]{a^4}$, $\sqrt[12]{a^6b^6}$, $\sqrt[12]{8a^9}$

9.2.8 Operações com Radicais

Adição e Subtração

Vamos efetuar a operação $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$.
Esta operação apresenta a redução de radicais semelhantes. Dizemos, então, que:

Dois ou mais radicais são semelhantes quando possuem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Assim, para efetuarmos a adição e a subtração de radicais, basta reduzir a um só radical e efetuar a soma algébrica dos fatores externos ao radical.
Então:
$2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = (2 + 5 - 3)\sqrt{a} = 4\sqrt{a}$

Exemplos:

a) $\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (1 + 7 - 3 + 2)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} = (2 + 1 - 6)\sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$

c) $3\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} + 4\sqrt{5}$
Efetuando a redução dos termos que são semelhantes, temos:
$3\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{2} + 4\sqrt{5} = (3 - 1)\sqrt{2} + (1 + 4)\sqrt{5} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \sqrt{98}$
Neste caso, não existem, aparentemente, radicais semelhantes. Entretanto, decompondo os radicandos em fatores primos e simplificando-os, temos:
$50 = 2 \cdot 5^2$; $18 = 2 \cdot 3^2$ e $98 = 2 \cdot 7^2$
Então:
$3\sqrt{50} - 2\sqrt{18} + \sqrt{98} = 3\sqrt{2 \cdot 5^2} - 2\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (15 - 6 + 7)\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

e) $\sqrt{12} - \sqrt{50} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2}$
Neste caso, não existem, aparentemente, radicais semelhantes. Entretanto, decompondo os radicandos em fatores primos e simplificando-os, temos:
$12 = 2^2 \cdot 3$ e $50 = 5^2 \cdot 2$
Então:
$\sqrt{12} - \sqrt{50} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{5^2 \cdot 2} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - \sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Multiplicação

Para efetuarmos a multiplicação de radicais, usaremos a propriedade:
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Vamos distinguir, a seguir, dois casos.

1º Caso: Os Índices São Iguais

Basta utilizar a relação acima.
Exemplos:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6} = \sqrt{90} = \sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a \cdot a^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

c) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$
Lembrando que: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
Então:
$\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5 - 3 = 2$

d) $\sqrt[3]{x + 3} \cdot \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{(x + 3)(x - 2)} = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 3x - 6} = \sqrt[3]{x^2 + x - 6}$

2º Caso: Os Índices São Diferentes

Neste caso, basta reduzir os radicais ao mesmo índice.
Exemplos:

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a \cdot a^2 \cdot a^3} = \sqrt[6]{a^6} = a$

c) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt[6]{a^3b^2} = \sqrt[6]{a^3b^3} \cdot \sqrt[6]{a^3b^2} = \sqrt[6]{a^3 \cdot b^3 \cdot a^3 \cdot b^2} = \sqrt[6]{a^6b^5} = a\sqrt[6]{b^5}$

Divisão de Radicais

Para efetuarmos a divisão de radicais, procedemos da mesma maneira que na multiplicação, usando agora a seguinte propriedade:
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ou $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$

Exemplos:

a) $\sqrt[4]{5^6} \div \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^6 \div 5^2} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

b) $\sqrt[4]{x^3} \div \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^3 \div x} = \sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$

c) $\sqrt{a^7} \div \sqrt{a^3} = \sqrt{a^7 \div a^3} = \sqrt{a^4} = a^2$

d) $\sqrt{a^3} \div \sqrt[5]{a^2}$
Reduzindo os radicais ao mesmo índice, temos:
$\sqrt[10]{a^{15}} \div \sqrt[10]{a^4} = \sqrt[10]{a^{15} \div a^4} = \sqrt[10]{a^{11}} = a\sqrt[10]{a}$

e) $\sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[3]{a}$
Reduzindo os radicais ao mesmo índice, temos:
$\sqrt[12]{a^9} \div \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[12]{a^9 \div a^4} = \sqrt[12]{a^5}$

Potenciação de Radicais

Seja a potencia $(\sqrt[n]{a})^p$.
Pela definição de potenciação, temos:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{p \quad fatores}$$

Pela propriedade: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$, temos:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{p \quad fatores} = \sqrt[n]{a^p}$$

Portanto:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}}$$

Para elevar um radical a um dado expoente, basta elevar o radicando àquele expoente.

Exemplos:

a) $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a}$

b) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 = \sqrt[3]{(5^2)^2} = \sqrt[3]{5^4} = 5\sqrt[3]{5}$

c) $\left(2\sqrt{xy}\right)^3 = 2^3 \cdot \sqrt{(xy)^3} = 8 \cdot \sqrt{x^3y^3} = 8xy\sqrt{xy}$

d) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2b}{3a}}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{2b}{3a}\right)^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2b}{3a} = \frac{2a}{3b}$

Radiciação de Radicais

Vamos demonstrar que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$.
1º membro: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$
Elevando ao expoente $n \cdot p$, temos:
$\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n \cdot p} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right]^p = [\sqrt[p]{a}]^p = a$

2º membro: $\sqrt[n \cdot p]{a}$

Elevando ao expoente $n \cdot p$, temos:
$(\sqrt[n \cdot p]{a})^{n \cdot p} = a$

Temos $\begin{cases} \left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n \cdot p} = a \\ (\sqrt[n \cdot p]{a})^{n \cdot p} = a \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n \cdot p} = (\sqrt[n \cdot p]{a})^{n \cdot p}$

Esta é uma igualdade entre duas potências de mesmo expoente. Portanto:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}}$$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[3 \cdot 2]{a} = \sqrt[6]{a}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 2]{x} = \sqrt[12]{x}$

c) $\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

Neste caso, é necessário introduzir os termos sob o radical mais interno:

$$\sqrt{a\sqrt[3]{b}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3 b}} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^3 b} = \sqrt[6]{a^3 b}$$

d) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^3}}$

Neste caso, é necessário introduzir os termos sob o radical mais interno:

$$\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^2 \cdot a^3}} = \sqrt[5 \cdot 2]{a^2 \cdot a^3} = \sqrt[10]{a^5} = \sqrt{a}$$

9.2.9 Racionalização de Denominadores

Racionalização de Denominadores: Quando temos uma expressão fracionária com denominador irracional $\left(\text{como } \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\right)$ é costume simplificar a expressão tornando o **denominador RACIONAL**. Para isso, devemos multiplicar o numerador e o denominador pelo **fator racionalizante do denominador**.

Examinaremos os casos mais frequentes através de exemplos:

1º Exemplo:

Racionalizemos o denominador da fração $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$.

Para obter uma fração equivalente a essa com denominador racional, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo fator racionalizante $\sqrt{2}$.

Assim:

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

2º Exemplo: Racionalizemos o denominador de $\dfrac{4}{\sqrt[3]{5}}$.

O fator racionalizante é $\sqrt[3]{5^{3-1}} = \sqrt[3]{5^2}$. Assim:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{4\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \cdot 5^2}} = \frac{4\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{4\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

OBSERVAÇÃO:

Sempre que o denominador da fração for da forma $\sqrt[n]{a^p}$, o fator racionalizante será $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

3º Exemplo: Racionalizemos o denominador de $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Como sabemos que $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$, então o fator racionalizante é $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Assim:

$$\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = \frac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1} =$$
$$= 3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

4º Exemplo: Racionalizemos o denominador de $\dfrac{5}{4+\sqrt{6}}$.

O fator racionalizante é $4-\sqrt{6}$ ou seja, o conjugado do denominador $4+\sqrt{6}$. Assim:

$$\frac{5}{4+\sqrt{6}} = \frac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{(4+\sqrt{6})\cdot(4-\sqrt{6})} = \frac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{4^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{16-6} = \frac{5\cdot(4-\sqrt{6})}{10} = \frac{4-\sqrt{6}}{2}$$

5º Exemplo: Racionalizemos o denominador de $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

O fator racionalizante é $\sqrt{5}+1$. Assim:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} = \frac{(\sqrt{5})^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1^2}{4} =$$
$$= \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Capítulo 10

Equações de 2º Grau

10.1 Equações de 2º Grau

10.1.1 Definição

Denomina-se equação do 2º grau com uma variável toda equação da forma:

$\boxed{ax^2+bx+c=0}$ onde x é a variável com $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Assim, são equações do 2º grau com uma variável:

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \longrightarrow$ a variável é x , $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$

$6x^2 + 7x + 1 = 0 \longrightarrow$ a variável é x , $a = 6$, $b = 7$, $c = 1$

$y^2 + 5y - 6 = 0 \longrightarrow$ a variável é y , $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$

$x^2 - 9 = 0 \longrightarrow$ a variável é x , $a = 1$, $b = 0$, $c = -9$

$-2t^2 - 6t = 0 \longrightarrow$ a variável é t , $a = -2$, $b = -6$, $c = 0$

10.1.2 Coeficientes da Equação do 2º Grau

Os números reais $a,\ b,\ c$ são denominados *coeficientes* da equação do 2º grau, e:

- a é sempre o coeficiente em x^2;
- b é sempre o coeficiente em x;
- c é chamado termo independente ou termo constante.

Exemplos:

Determine os valores de a, b e c nas equações do 2º grau abaixo:

a) $x^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ seus coeficientes são: $a = 1, b = 0, c = 1$

b) $3x^2 + 6x - 8 = 0 \longrightarrow$ seus coeficientes são: $a = 3, b = 6, c = -8$

c) $-5x^2 - 2x = 0 \longrightarrow$ seus coeficientes são: $a = -5, b = -2, c = 0$

d) $7x + 2x^2 + 15 = 0 \longrightarrow$ seus coeficientes são: $a = 2, b = 7, c = 15$

e) $-x^2 + 35 = 0 \longrightarrow$ seus coeficientes são: $a = -1, b = 0, c = 35$

10.2 Equações Completas e Equações Incompletas

Sabemos, pela definição, que o coeficiente a é sempre diferente de zero, porém, os coeficientes b e c podem ser nulos. Assim:

- Quando b e c são diferentes de zero, a equação se diz **completa**.
  Exemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \\ -5t^2 + 2t + 3 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{são equações completas}$$

- Quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$, a equação se diz **incompleta**.

  Nesse caso, é costume escrever a equação sem o termo de coefiente nulo.
  Exemplos:

  $x^2 - 4 = 0$, em que $b = 0 \longrightarrow$ não está escrito o termo em x

  $y^2 + 3y = 0$, em que $c = 0 \longrightarrow$ não está escrito o termo independente

  $5x^2 = 0$, em que $b = c = 0 \longrightarrow$ não estão escritos o termo em x e o termo independente

10.2.1 Forma Normal

A forma $ax^2 + bx + c = 0$ é denominada **forma normal** da equação do 2º grau com uma variável.
Assim, já estão escrito na forma normal as equações:
$3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 36 = 0 \quad , \quad 3y^2 - 6y = 0$
Existem equações que, por oportunas transformações podem ser reduzidas à forma normal, conforme veremos nos seguintes exemplos:

1º exemplo: Seja reduzir à forma normal a equação $5x^2 + 10x - 3 = 4x + 1$
$5x^2 + 10x - 3 = 4x + 1$
$5x^2 + 10x - 3 - 4x - 1 = 0 \rightarrow$ transpondo $4x$ e 1 para o 1º membro
$\underbrace{5x^2 + 6x - 4 = 0}_{forma\ normal} \longrightarrow$ reduzindo os termos semelhantes

2º exemplo: Seja reduzir à forma normal a equação $(x+2)^2 + (x-1)(x+3) = 3x(x+2)$
$(x+2)^2 + (x-1)(x+3) = 3x(x+2)$
$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x - 3 = 3x^2 + 6x \longrightarrow$ eliminando os parênteses
$x^2 + \cancel{4x} + 4 + x^2 + \cancel{2x} - 3 - 3x^2 - \cancel{6x} = 0 \longrightarrow$ transportando $3x^2$ e $6x$ para o 1º membro
$-x^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ reduzindo os termos semelhantes
$\underbrace{x^2 - 1 = 0}_{forma\ normal} \longrightarrow$ quando o coeficiente a é negativo, é costume trocar os sinais de todos os termos da equação

3º exemplo: Seja reduzir à forma normal a equação $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2}{3}$, com $x \neq 0, x \neq 1$
$\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{2}{3}$
$\dfrac{3(x-1) + 3x^2}{\cancel{3x(x-1)}} = \dfrac{2x(x-1)}{\cancel{3x(x-1)}} \longrightarrow$ reduzindo todos os termos ao mesmo denominador
$3(x-1) + 3x^2 = 2x(x-1) \longrightarrow$ equação equivalente, escrita sem denominadores
$3x - 3 + 3x^2 = 2x^2 - 2x \longrightarrow$ eliminando os parênteses
$3x - 3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x = 0 \longrightarrow$ transpondo $2x^2$ e $-2x$ para o 1º membro
$\underbrace{x^2 + 5x - 3 = 0}_{forma\ normal} \longrightarrow$ reduzindo os termos semelhantes

10.3 Raízes de uma Equação do 2° Grau

Vamos considerar as equações do 2° grau no universo dos números reais ($\mathbb{R}$), a fim de obtermos o **conjunto-solução** de cada uma delas.
Observe as equações a seguir:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
Se substituirmos x por 2 ou por 3, temos:
$\mathbf{2}^2 - 5 \cdot \mathbf{2} + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$
ou
$\mathbf{3}^2 - 5 \cdot \mathbf{3} + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$
Dizemos, assim, que 2 ou 3 são **raízes** da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $5x^2 - 20x = 0$
Substituindo x por zero ou por 4, temos:
$5 \cdot \mathbf{0}^2 - 20 \cdot \mathbf{0} = 0 - 0 = 0$
ou
$5 \cdot \mathbf{4}^2 - 20 \cdot \mathbf{4} = 80 - 80 = 0$
Então, zero ou 4 são **raízes** da equação $5x^2 - 20x = 0$

Concluímos, então, que:

> Chama-se **raiz da uma equação do 2° grau** o número real que, substiuído no lugar da incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.

10.4 Resolução de Equações Incompletas

Resolver uma equação significa determinar o **conjunto solução** dessa equação.
Inicialmente, vamos observar que:

1º) Se $\underset{\substack{\downarrow \\ 1^\circ \text{ fator}}}{a} \cdot \underset{\substack{\searrow \\ 2^\circ \text{ fator}}}{b} = 0$,então, $a = 0$ ou $b = 0$

2º) Se $x^2 = a$, então, $x = \pm\sqrt{a}$ (relação fundamental)

Baseados nestes conhecimentos, veremos, por meio de exemplos, como resolver uma equação incompleta do 2º grau.

1º caso: A equação é da forma $ax^2 + bx = 0$ onde $c = 0$.
Exemplos: Se resolver as seguintes equações incompletas do 2º grau, sendo U = $\mathbb{R}$.

1. $x^2 - 5x = 0$

   $x \cdot (x - 5) = 0 \longrightarrow$ colocando o fator x em evidência

   $$\underbrace{x}_{\substack{\downarrow \\ 1^\circ \text{ fator}}} \underbrace{(x-5)}_{\substack{\searrow \\ 2^\circ \text{ fator}}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (raiz da equação)} \\ \text{ou} \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (raiz da equação)} \end{cases}$$

   S$= \{0, 5\}$

   OBSERVAÇÃO:

   Observamos que os valores $x = 0$ ou $x = 5$ verificam a equação dada:

   $x = 0 \longrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow (0)^2 - 5(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

   $x = 5 \longrightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow (5)^2 - 5(5) = 0 \Rightarrow 25 - 25 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

2. $x(x + 3) + (x - 2)^2 = 4$

   $$x^2 + 3x + x^2 - 4x + 4 = 4$$

$$x^2 + 3x + x^2 - 4x + \cancel{4} - \cancel{4} = 0$$

$$2x^2 - x = 0 \longrightarrow \text{forma normal}$$

$$x \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\mathbf{S}= \{0, \tfrac{1}{2}\}$$

3. $\frac{3}{x} - 4 = x + \frac{6}{2x} \quad (x \neq 0)$

$$\frac{6-8x}{\cancel{2x}} = \frac{2x^2+6}{\cancel{2x}}$$

$$6 - 8x = 2x^2 + 6$$

$$\cancel{6} - 8x - 2x^2 - \cancel{6} = 0$$

$$-2x^2 - 8x = 0$$

$$2x^2 + 8x = 0 \longrightarrow \text{forma normal}$$

$$x(2x + 8) = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 8 = 0 \Rightarrow 2x = -8 \ \Rightarrow x = -\frac{8}{2} \ \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Como o número 0 foi excluído do conjunto universo dessa equação ($x \neq 0$), temos:

$$\mathbf{S}=\{-4\}$$

2º caso: A equação é da forma $ax^2 + c = 0$ onde $b = 0$.
Exemplos: Seja resolver as seguintes equações incompletas do 2º grau, sendo U= $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 16 = 0$

   $x^2 = 16 \longrightarrow$ transpondo o termo independente para o 2º membro

   $x = \pm\sqrt{16} \longrightarrow$ pela relação fundamental

   $x = \pm\ 4 \longrightarrow \sqrt{16} \in \mathbb{R}$ e é exata: 4

   $x = +\ 4$ ou $x = -4$

   $\mathbf{S}= \{-4, 4\}$

2. $5x^2 - 45 = 0$

   $5x^2 = 45$

   $x^2 = \frac{45}{5}$

   $x^2 = 9$

   $x = \pm\sqrt{9} \longrightarrow \sqrt{9} \in \mathbb{R}$ e é exata: 3

   $x = \pm 3$

   $x = +\ 3$ ou $x = -3$

   $\mathbf{S}= \{-3, 3\}$

3. $2x^2 - 10 = 0$

   $2x^2 = 10$

   $x^2 = \frac{10}{2}$

   $x^2 = 5$

   $x = \pm\sqrt{5} \longrightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ mas não é exata.

   Nesta caso, as raízes são escritas em forma de radical.

   $x = +\sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

   $\mathbf{S}= \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

4. $x^2 + 4 = 0$

   $x^2 = -4$

   $x = \pm\sqrt{-4} \longrightarrow \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

   Neste caso, não existem em $\mathbb{R}$ valores de x que verifiquem a equação.

   S$= \varnothing$

5. $(2y+1)^2 - 2(2y+1) = 0$

   $4y^2 + \cancel{4y} + 1 - \cancel{4y} - 2 = 0$

   $4y^2 - 1 = 0 \longrightarrow$ forma normal

   $4y^2 = 1$

   $y^2 = \frac{1}{4}$

   $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

   $y = \pm\frac{1}{2} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} \in \mathbb{R}$ e é exata: $\frac{1}{2}$

   $y = +\frac{1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{2}$

   S$=\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

OBSERVAÇÃO:
Neste tipo de equação, as raízes, quando existem, são simétricas ou opostas.

3º caso: A equação é da forma $ax^2 = 0$, onde $b = 0$ e $c = 0$
Exemplos: Seja resolver as seguintes equações incompletas do 2º grau, sendo U$= \mathbb{R}$:

1. $3x^2 = 0$

   Neste caso, temos:

   $3x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

   Dizemos que **zero** é uma raiz dupla da equação, o que se explica pelo seguinte fato:

   $x^2 = 0 \iff x \cdot x = 0$

   $\iff x' = 0$ e $x'' = 0$

   Logo, S$= \{0\}$

2. $\frac{x^2+1}{3} = \frac{2-3x^2}{6}$

   Reduzindo ao menor denominador comum, temos:

   $\frac{2(x^2+1)}{6} = \frac{2-3x^2}{6}$

   $\iff 2x^2 + 2 = 2 - 3x^2$

   $\iff 5x^2 = 0$

   $\iff x^2 = 0$

   $\iff x = 0$

   Logo, S$=\{0\}$

Para as equações literais incompletas do 2º grau, a resolução é feita pelos mesmos processos.

Exemplos:

1. Resolver a equação literal incompleta $x^2 - 4m^2 = 0$, sendo x a variável.
   $x^2 - 4m^2 = 0$
   $x^2 = 4m^2$
   $x = \pm\sqrt{4m^2}$
   $x = \pm 2m$
   $x = +2m \quad \text{ou} \quad -2m$
   S$= \{-2m, 2m\}$

2. Resolver a equação literal incompleta $by^2 - 3ay = 0 \quad (b \neq 0)$, sendo y a variável.
   $by^2 - 3ay = 0$
   $$y(by - 3a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ by - 3a = 0 \Rightarrow by = 3a \ \Rightarrow y = \dfrac{3a}{b} \end{cases}$$
   S$= \left\{0, \dfrac{3a}{b}\right\}$

10.5 Resolução de Equações Completas

10.5.1 Fórmula Resolutiva e Discriminante

Para a resolução das equações completas, utilizaremos a **fórmula resolutiva** conhecida no Brasil como **Fórmula de Bhaskara**, observando que a resolução das equações completas é feita no conjunto universo dos números reais($\mathbb{R}$).

Faremos, inicialmente, a dedução da fórmula resolutiva considerando a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{em que}\, a, b, c \in \mathbb{R}\, \text{e}\, a \neq 0$$

a) Multiplicando os dois membros da equação por $4a$ e temos:
   $ax^2 + bx + c = 0 \cdot (4a)$
   $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

b) Transpomos $4ac$ para o 2º membro e temos:
   $4a^2x^2 + 4abx = 0 - 4ac$
   $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

c) Adicionamos b^2 ao dois membros da questão e temos:
   $\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\downarrow} = b^2 - 4ac$
   trinômio quadrado perfeito

d) Fatoramos o 1º membro da equação temos:
   $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

e) A expressão $b^2 - 4ac$ (que é um número real) é denominada **discriminante da equação**, sendo usualmente representada pela letra grega Δ (delta); assim, temos:
   $(2ax + b)^2 = \Delta$
   $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \longrightarrow$ pela relação fundamental.

f) Conforme Δ seja positivo, nulo ou negativo, temos três casos a estudar:

1º caso: O Discriminante é Positivo. ($\Delta > 0$).
Nesta caso, o valor de $\sqrt{\Delta}$ é real e temos:
$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$
$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \longrightarrow \text{ fórmula resolutiva}$$

Observamos que existem dois valores reais distintos para a variável x, isto é, a equação tem **duas raízes diferentes**, sendo costume representar essas raízes por x' e x'' ou x_1 e x_2.

Então: $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \longrightarrow \begin{cases} x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

2º caso: O Discriminante é Nulo. ($\Delta = 0$).

Nesta caso, o valor de $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$ e temos:

$2ax + b = 0$

$2ax = -b$

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}} \longrightarrow \text{ caso particular da fórmula resolutiva}$$

Observamos que a equação tem uma única raiz real, sendo comum dizer que a equação **têm duas raízes reais e iguais**, isto é:

$$\boxed{x' = x'' = \frac{-b}{2a}}$$

3º caso: O Discriminante é Negativo. ($\Delta < 0$).

Neste caso, o valor de $\sqrt{\Delta}$ não existe em $\mathbb{R}$, pois não existe no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo.

Dizemos, então, que a equação não tem raízes reais.

OBSERVAÇÃO:

Neste 3º caso, costuma-se, também, dizer que as raízes da equação são números complexos, cujo estudo você viu no ensino médio, se não viu, pesquise sobre o assunto.

▶ **RESUMO:**

Como acabamos de ver, a existência ou não de raízes no conjunto $\mathbb{R}$, e o fato de serem duas ou uma só, depende, exclusivamente de $\Delta = b^2 - 4ac$, daí o nome de **discriminante** que se dá a esta expressão.

Então: $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \Delta \geqslant 0, \text{ a expressão tem raízes reais } \begin{cases} \Delta > 0 \text{ (duas raízes diferentes)} \\ \Delta = 0 \text{ (duas raízes iguais)} \end{cases} \\ \text{Se } \Delta < 0, \text{ a equação não tem raízes reais.} \end{array}}$$

10.5.2 Resolução de Equações Completas por Meio da Fórmula Resolutiva

Veremos alguns exemplos de resolução de equações completas, considerando o discriminante e utilizando a fórmula resolutiva.

1º exemplo: Resolver a equação $x^2 + x + 6 = 0$

Como a equação já está escrita em forma normal, temos:

$$x^2 + x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 1 - 24 = -23 < 0$
Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.
S$= \varnothing$

2º exemplo: Resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$
Como a equação já está escrita em forma normal, temos:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 25 - 24 = 1 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (1)} = \frac{5 \pm 1}{2} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \\ x'' = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \text{aplicação da fórmula resolutiva}$$

S$= \{2, 3\}$

VERIFICAÇÃO
Podemos verificar que os valores $x = 3$ ou $x = 2$ são as raízes da equação dada:

$$x = 3 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (3)^2 - 5 \cdot (3) + 6 = 0 \;\Rightarrow\; 9 - 15 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$
$$x = 2 \longrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (2)^2 - 5 \cdot (2) + 6 = 0 \;\Rightarrow\; 4 - 10 + 6 = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

3º exemplo: Resolver a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$
Como a equação já está escrita em forma normal, temos:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (2)} = \frac{3 \pm 5}{4} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ \\ x'' = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

S$= \left\{ \; 2, -\frac{1}{2} \; \right\}$

4º exemplo: Resolver a equação $x^2 = 5(2x - 5)$
Neste caso, devemos reduzir a equação para forma normal.
$x^2 = 5(2x - 5)$
$x^2 = 10x - 25$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25}_{\text{forma normal}} = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 25 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (25) = 100 - 100 = 0$ (duas raízes iguais)

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \cdot (1)} = \frac{10}{2} = 5$$

S$= \{5\}$

5º exemplo: Resolver a equação $x(x - 4) = 2$
$x(x - 4) = 2$
$x^2 - 4x = 2$

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -2 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-2) = 16 + 8 = 24 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{24}}{2 \cdot (1)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \longrightarrow \begin{cases} x' = \frac{4+2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \\ \\ x'' = \frac{4-2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

S$= \{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\}$

6º exemplo: Resolver a equação $\frac{y-3}{6} = y^2 - 3$

$\frac{y-3}{6} = y^2 - 3$

$\frac{y-3}{\cancel{6}} = \frac{6y^2-18}{\cancel{6}}$

$y - 3 = 6y^2 - 18$

$y - 3 - 6y^2 + 18 = 0$

$-6y^2 + y + 15 = 0$

$$6y^2 - y - 15 = 0 \begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \\ c = -15 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (6) \cdot (-15) = 1 + 360 = 361 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{361}}{2 \cdot (6)} = \frac{1 \pm 19}{12} \begin{cases} x' = \frac{1+19}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \\ \\ x'' = \frac{1-19}{12} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

S$= \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right\}$

7º exemplo: Resolver a equação $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

$\frac{2x(x-2)+6(x+1)}{\cancel{2(x+1)(x-2)}} = \frac{(x+1)(x-2)}{\cancel{2(x+1)(x-2)}}$

$2x^2 - 4x + 6x + 6 = x^2 - x - 2$

$2x^2 - 4x + 6x + 6 - x^2 + x + 2 = 0$

$$x^2 + 3x + 8 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 8 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (8) = 9 - 32 = -23 < 0$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

S$= \varnothing$

OBSERVAÇÃO:

As equações incompletas também podem ser resolvidas aplicando-se a fórmula resolutiva, conforme veremos nos exemplos:

1º exemplo: Resolver equação $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 - 9 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-9) = 0 + 36 = 36 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (1)} = \frac{0 \pm 6}{6} \begin{cases} x' = \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \\ x'' = \frac{0-6}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

S$= \{-3, 3\}$

2º exemplo: Resolver equação $x^2 - 2x = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (0) = 4 - 0 = 4 > 0$ (duas raízes diferentes)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (1)} = \frac{2 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

S$= \{0, 2\}$

10.5.3 Equação Literal Completa

A resolução das equações literais é feita por meio da fórmula resolutiva já conhecida.
Entretanto, devemos excluir os valores dos coeficientes literais que tornem nulos os denominadores ou o coeficiente a.

1º exemplo: Resolver a equação $4x^2 - 3ax - a^2 = 0$

$$4x^2 - 3ax - a^2 = 0 \quad \begin{cases} \text{coeficiente de } x^2 = 4 \\ \text{coeficiente de } x = -3a \\ \text{termo independente} = -a^2 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3a)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (-a^2) = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3a) \pm \sqrt{25a^2}}{2 \cdot (4)} = \frac{3a \pm 5a}{8} \quad \begin{cases} x' = \frac{3a+5a}{8} = \frac{8a}{8} = a \\ x'' = \frac{3a-5a}{8} = -\frac{2a}{8} = -\frac{a}{4} \end{cases}$$

S$= \{a, -\frac{a}{4}\}$

2º exemplo: Resolver a equação $mnx^2 - (m-n)x - 1 = 0 \quad (m \neq 0, n \neq 0)$.

$$mnx^2 - (m-n)x - 1 = 0 \quad \begin{cases} \text{coeficiente de } x^2 = mn \\ \text{coeficiente de } x = -(m-n) \\ \text{termo independente} = -1 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = [-(m-n)]^2 - 4 \cdot (mn) \cdot (-1) = m^2 - 2mn + n^2 + 4mn =$

$= \underbrace{m^2 + 2mn + n^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = (m+n)^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-[-(m-n)] \pm \sqrt{(m+n)^2}}{2 \cdot (mn)} = \frac{(m-n) \pm (m+n)}{2mn} \begin{cases} x' = \frac{m-n+m+n}{2mn} = \frac{\cancel{2m}}{\cancel{2mn}} = \frac{1}{n} \\ x'' = \frac{m-n-m-n}{2mn} = \frac{-\cancel{2n}}{\cancel{2mn}} = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

S$= \{-\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}$

10.5.4 Relações Entre os Coeficientes e as Raízes da Equação do 2º Grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e suponhamos $\Delta \geqslant 0$, casos em que existem raízes reais x' e x'', diferentes ou iguais.
Então, entre as raízes x' e x'' e os coeficientes a, b e c desta equação, estabeleceremos as seguintes relações:

1º relação: Se $\Delta \geqslant 0$, temos:
$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (I) e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (II)
Adicionando membro a membro (I) e (II) , temos:

$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}$

Daí: $\boxed{\text{A soma das raízes é igual a } \frac{-b}{a}\text{,ou seja , } x' + x'' = \frac{-b}{a}}$

2º relação: Se $\Delta \geqslant 0$, temos:
$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (I) e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (II)
Multiplicando membro a membro (I) e (II) , temos:
$x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}c}{\cancel{4}a} = \frac{c}{a}$

Daí: $\boxed{\text{O produto das raízes é igual a } \frac{c}{a}\text{,ou seja , } x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$

Exemplo: Dada a equação $3x^2 - 10x + 3 = 0$, temos:

- soma das raízes $\longrightarrow x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$
- produto das raízes $\longrightarrow x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1$

Verificação: $3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = -10 \\ c = 3 \end{cases}$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (3) = 100 - 36 = 64$
$x = \frac{10 \pm 8}{6} \quad \begin{cases} x' = \frac{18}{6} = 3 \\ x'' = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' + x'' = 3 + \frac{1}{3} = \frac{9+1}{3} = \frac{10}{3} \\ x' \cdot x'' = \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = 1 \end{cases}$

OBSERVAÇÃO: Se $a = 1$, estas relações podem ser escritas:
$x' + x'' = \frac{-b}{1} \quad \Rightarrow \quad x' + x'' = -b$
$x' \cdot x'' = \frac{c}{1} \quad \Rightarrow \quad x' \cdot x'' = c$

Aplicando as Relações: Resolução de Problemas

Aplicando estas duas importantes relações, podemos resolver alguns problemas, como veremos:

1° problema: Determinar o valor de m na equação $(m+2)x^2 - 3x + 2 = 0$, de modo que a soma das raízes da equação seja igual a $\frac{1}{4}$.

Pela relação: $\longrightarrow x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow x' + x'' = \frac{3}{m+2}$ (I)
Pelo problema $\longrightarrow x' + x'' = \frac{1}{4}$ (II)
Comparando (I) e (II) , temos:
$\frac{3}{m+2} = \frac{1}{4} \longrightarrow$ equação do 1° grau em m
$m + 2 = 12 \Rightarrow m = 12 - 2 \Rightarrow m = 10$
Resposta: $m = 10$

2° problema: Calcular o valor de p na equação $3x^2 - 4x + p - 1 = 0$, a fim de que o produto das raízes da equação seja igual a $\frac{4}{5}$.

Pela relação: $\longrightarrow x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow x' \cdot x'' = \frac{p-1}{3}$ (I)
Pelo problema $\longrightarrow x' \cdot x'' = \frac{4}{5}$ (II)
Comparando (I) e (II) , temos:
$\frac{p-1}{3} = \frac{4}{5} \longrightarrow$ equação do 1° grau em p
$5p - 5 = 12 \Rightarrow 5p = 12 + 5 \Rightarrow 5p = 17 \Rightarrow p = \frac{17}{5}$
Resposta: $p = \frac{17}{5}$

Aplicação das Relações: Formação de uma Equação do 2° Grau, Dadas as Raízes

O problema consiste em formar uma equação do 2° grau que tenha dois números dados (x' e x'') como raízes.
Se consideramos $a = 1$, a expressão procurada é $x^2 + bx + c = 0$.
Pelas relações entre coeficientes e raízes, temos:

$x' + x'' = -b \quad \Longrightarrow \quad b = -(x' + x'')$

$x' \cdot x'' = c \quad \Longrightarrow \quad c = x' \cdot x''$

Daí temos:

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \underbrace{(x' + x'')}_{\text{soma das raízes}} x + \underbrace{x' \cdot x''}_{\text{produto das raízes}} = 0$$

Representando-se $x' + x'' = S$ e $x' \cdot x'' = P$, temos a equação:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Observe os exemplos:

1° exemplo: Escrever a equação do 2° grau cujas raízes são os números 2 e -5.

$$x^2 - Sx + P = 0 \begin{cases} S = x' + x'' = 2 + (-5) = -3 \\ P = x' \cdot x'' = 2 \cdot (-5) = -10 \end{cases}$$

Substituindo na equação, temos:
$x^2 - (-3)x + (-10) = 0$

$$\boxed{x^2 + 3x - 10 = 0} \longrightarrow \text{equação procurada}$$

2° exemplo: Escrever a equação do 2° grau cujas raízes são os números $\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{5}$.

$$x^2 - Sx + P = 0 \begin{cases} S = x' + x'' = \frac{1}{2} + (-\frac{2}{5}) = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10} \\ P = x' \cdot x'' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (-\frac{\cancel{2}}{5}) = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Substituindo na equação, temos:
$x^2 - (\frac{1}{10})x + (-\frac{1}{5}) = 0$

$$\boxed{x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{1}{5} = 0} \longrightarrow \text{equação procurada}$$

10.6 Equações Irracionais

10.6.1 Introdução

Considerando as seguintes equações, identifique mentalmente aquelas que contêm a variável no radicando:

$x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$	$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0$
$\sqrt{x+3} = 2$	$\sqrt{x} - x = 2$
$1 - x = \sqrt{1+x}$	$x^2 - (1+\sqrt{3})x = 1$
$x - \sqrt{5} = 0$	$\sqrt[3]{x-1} = 2$
$\sqrt{x} - 2 = 0$	$x^2 - \sqrt{2}x = 0$

Você deve ter identificado as equações:

$\sqrt{x+3} = 2$	$1 - x = \sqrt{1+x}$	$\sqrt{x} - 2 = 0$
$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = 0$	$\sqrt{x} - x = 2$	$\sqrt[3]{x-1} = 2$

10.6.2 Definição

Denomina-se **equação irracional** toda equação que contém a variável ou incógnita no radicando.

Como exemplos, temos:

$$\sqrt{x+3}=2 \quad , \quad 1-x=\sqrt{1+x} \quad , \quad \sqrt{x}-2=0$$
$$\sqrt{x^2-3x-4}=0 \quad , \quad \sqrt{x}-x=2 \quad , \quad \sqrt[3]{x-1}=2$$

10.6.3 Resolução

O conjunto universo da variável, numa equação irracional, é o conjunto $\mathbb{R}$. Entretanto, devemos lembrar que os radicais de índice par somente têm significado em $\mathbb{R}$ quando o radicando for maior ou igual a zero. A resolução de uma equação irracional é feita elevando-se ambos os membros da equação a uma potência conveniente, a fim de transformá-la numa equação racional, que já sabemos resolver.

Veremos alguns exemplos de resolução:

1° exemplo: Resolver a equação $\sqrt{x+5}=x-1$ (com $x \geq -5$).

$\sqrt{x+5}=x-1 \quad \longrightarrow$ o radical se encontra isolado num dos membros

$(\sqrt{x+5})^2=(x-1)^2 \quad \longrightarrow$ elevamos ambos os membros ao quadrado

$x+5=x^2-2x+1$

$x+5-x^2+2x-1=0$

$-x^2+3x+4=0$

$x^2-3x-4=0 \quad \longrightarrow$ equação racional a ser resolvida

$\Delta=25$

$x=\frac{3\pm5}{2} \quad \begin{cases} x'=4 \\ x''=-1 \end{cases}$

Verificação: vamos verificar qual ou quais valores de x satisfazem a equação irracional dada.

$x=4 \longrightarrow \sqrt{4+5}=4-1$
$\sqrt{9}=3$
$3=3$
O valor $x=4$ verifica a equação dada.

$x=-1 \longrightarrow \sqrt{-1+5}=-1-1$
$\sqrt{4}=-2$
$2 \neq -2$
O valor $x=-1$ não verifica a equação dada.

S= $\{4\}$, pois -1 é uma raiz estranha a esta equação irracional.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

A verificação das raízes obtidas na equação racional é sempre necessária, pois a elevação de ambos os membros da equação a uma potência pode introduzir raízes estranhas à equação dada.

2° exemplo: Resolver a equação $\sqrt{x}+6=x$ (com $x \geq 0$).

(Observe que o radical não se encontra isolada em um dos membros.)

$\sqrt{x}+6=x$

$\sqrt{x}=x-6 \quad \longrightarrow$ isolamos o radical em um dos membros

$(\sqrt{x})^2=(x-6)^2 \quad \longrightarrow$ elevamos ambos os membros ao quadrado

$x=x^2-12x+36$

$x-x^2+12x-36=0$

$-x^2+13x-36=0$

$x^2-13x+36=0 \quad \longrightarrow$ equação racional a ser resolvida

$\Delta=169-144=25$

$x=\frac{13\pm5}{2} \quad \begin{cases} x'=9 \\ x''=4 \end{cases}$

Verificação: $x=9 \longrightarrow \sqrt{9}+6=9$
$3+6=9$
$9=9$

$x=4 \longrightarrow \sqrt{4}+6=4$
$2+6=4$
$8 \neq 4$

(verifica a equação) (não verifica a equação)

S={9}

3° exemplo: Resolver a equação $\sqrt{x+\sqrt{x+8}}=2$.

$\sqrt{x+\sqrt{x+8}}=2$

$(\sqrt{x+\sqrt{x+8}})^2=(2)^2$

$x+\sqrt{x+8}=4 \longrightarrow$ eliminamos o radical mais externo

$\sqrt{x+8}=4-x \longrightarrow$ isolamos o radical no 1° membro

$(\sqrt{x+8})^2=(4-x)^2$

$x+8=16-8x+x^2$

$x+8-16+8x-x^2=0$

$-x^2+9x+8=0$

$x^2-9x+8=0 \longrightarrow$ equação racional a ser resolvida

$\Delta=81-32=49$

$x=\frac{9\pm7}{2}\begin{cases} x'=8 \\ x''=1 \end{cases}$

Verificação: $x=8 \longrightarrow \sqrt{8+\sqrt{8+8}}=2$

$\sqrt{8+\sqrt{16}}=2$

$\sqrt{8+4}=2$

$\sqrt{12}\neq 2$

(Não verifica a equação.)

$x=1 \longrightarrow \sqrt{1+\sqrt{1+8}}=2$

$\sqrt{1+\sqrt{9}}=2$

$\sqrt{1+3}=2$

$\sqrt{4}=2$

$2=2$

(Verifica a equação.)

S={1}

Capítulo 11

Intervalos Numéricos

11.1 Intervalos Numéricos

No conjunto dos números reais podemos estabelecer subconjuntos denominados *intervalos*. Considere dois números reais **a** e **b** ($a < b$), localizados na reta. Assim temos:

11.1.1 Intervalo Aberto

Chamamos de intervalo aberto o conjunto de números reais entre **a** e **b**, excluindo estes dois extremos:

Representação geométrica	Notação de conjunto	Notação de intervalo
	$\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$	$]a, b[$ ou (a, b)

11.1.2 Intervalo Fechado

Chamamos de intervalo fechado o conjunto de números reais entre **a** e **b**, incluindo estes dois extremos:

Representação geométrica	Notação de conjunto	Notação de intervalo
	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$

11.1.3 Intervalos Semi-Abertos

Chamamos de intervalo aberto à direita e fechado à esquerda o conjunto dos números reais entre **a** e **b**, incluindo **a** e excluindo **b**:

Representação geométrica	Notação de conjunto	Notação de intervalo
	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$	$[a, b[$ ou $[a, b)$

Chamamos de intervalo fechado à direita e aberto à esquerda o conjunto dos números reais entre **a** e **b**, excluindo **a** e incluindo **b**:

Representação geométrica	Notação de conjunto	Notação de intervalo
	$\{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$	$]a, b]$ ou $(a, b]$

11.1.4 Intervalos Infinitos

Os seguintes intervalos são chamados intervalos infinitos:

Representação geométrica	Notação de conjunto	Notação de intervalo
	$\{x \in \mathbb{R}/x > a\}$	$]a, +\infty[$ ou $]a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R}/x \geqslant a\}$	$[a, +\infty[$ ou $[a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R}/x < b\}$	$]-\infty, b[$ ou $(-\infty, b)$
	$\{x \in \mathbb{R}/x \leqslant b\}$	$]-\infty, b]$ ou $(-\infty, b]$

Os símbolos $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito) não representam nenhum número real. O conjunto dos números reais pode ser representado como um intervalo aberto:

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty)$$

E seus subconjuntos $\mathbb{R}_+$,$\mathbb{R}_-$,$\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}_-^*$ como intervalos semi-abertos:

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty[= [0, +\infty)$

$\mathbb{R}_- =] - \infty, 0] = (-\infty, 0]$

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[=]0, +\infty)$

$\mathbb{R}_-^* =] - \infty, 0[= (-\infty, 0[$

11.1.5 Operações com Intervalos

Exemplos:

1. Seja $A = \{x \in \Re | 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \Re | 3 \leq x < 8\}$, determinar:

$A \cap B$	$A \cup B$
$A \cap B = \{x \in \Re \| 3 \leq x < 5\} = [3, 5[$	$A \cup B = \{x \in \Re \| 2 \leq x < 8\} =]2, 8[$

2. Seja $A =] - 1, 4[$ e $B =] - \infty, 2]$, determinar:

$A \cap B$	$A \cup B$
$A \cap B = \{x \in \Re \mid -1 < x \leq 2\} =]-1, 2]$	$A \cup B = \{x \in \Re \mid x < 4\} =]-\infty, 4[$

Capítulo 12

Introdução à Funções

12.1 Função

12.1.1 Definição:

Dados A e B dois conjuntos não vazios, dizemos que a relação f de A em B é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e só um elemento y do conjunto B, ou em símbolos:

$$f : A \to B \quad \Leftrightarrow \forall x \in A,\ \exists | y \in B | (x, y) \in f$$

Exemplos:

<table>
<tr>
<td>É função:

f_1 é uma função porque todos os elementos de A têm um único correspondente em B.</td>
<td>É função:

f_2 é uma função porque todos os elementos de A têm um único correspondente em B.</td>
</tr>
<tr>
<td>Não é função:

f_3 não é uma função porque $-2 \in A$ e não têm correspondente em B.</td>
<td>Não é função:

f_4 não é uma função porque os elementos 16 e 4 pertencentes ao conjunto A têm dois correspondentes em B.</td>
</tr>
</table>

Exercício Resolvido

Verifique quais dos diagramas de setas representam função de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{-1, 3, 4\}$. Justifique.

Solução:

a) f_1 não é função porque o elemento 3 do conjunto A não tem correspondente em B.

b) f_2 é função porque cada elemento de A tem um único correspondente em B.

c) f_3 não é uma função porque o elemento 1 do conjunto A tem mais de um correspondente em B.

d) f_4 é função porque todos os elementos de A têm um único correspondente em B.

12.1.2 Notação e Valor Numérico

Notação: Podemos escrever uma função $f : A \to B$ através de duas variáveis: uma independente e outra dependente.
Exemplos:

- $y = 3x^2 + 4x$ ou $f(x) = 3x^2 + 4x \implies x$ independente e y dependente
- $V = 2t^3 - \frac{5}{3}t$ ou $v(t) = 2t^3 - \frac{5}{3}t \implies t$ independente e V dependente

Valor Numérico de uma função é o valor da variável dependente quando atribuímos um valor a variável independente.
Exemplo: Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$, determine:

- $f(2) = (2)^3 - (2) = 6$
- $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$
- $f(1) + f(-1) = (1)^3 - (1) + (-1)^3 - (-1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

12.1.3 Domínio, Imagem e Contradomínio de uma Função

Seja a função $f : A \to B$.

a) Chamamos de **domínio** da função f, o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f. Assim, pela definição, $D(f) = A$.

b) Chamamos de **imagem** da função f, o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados (x, y) pertencentes a f.

c) Chamamos de **contradomínio** da função f, o conjunto B. Assim, $CD(f) = B$.

Exemplo: Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 1$, temos:

x	$f(x) = x + 1$	$f(x)$
-2	$f(-2) = -2 + 1$	-1
-1	$f(-1) = -1 + 1$	0
0	$f(0) = 0 + 1$	1
1	$f(1) = 1 + 1$	2

$f = \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$

$D(f) = A = \{-2, -1, 0, 1\}$
$Im(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$
$CD(f) = B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Observação: Decorre da definição que $Im(f) \subset CD(f)$ ou $Im(f) \subset B$.

Exercícios Resolvidos

1. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 1$, determine:

   (a) $Im(f)$

   (b) diagrama de setas da função

   (c) $D(f)$ e $CD(f)$

   Solução:

x	$y = x^2 - 3x + 1$	y
0	$y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1$	1
1	$y = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$	-1
2	$y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$	-1
3	$y = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$	1

   a) $Im(f) = \{-1, 0, 1, 2\}$, pois são valores de y.

   b) Diagrama de setas da função:

   c) $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 2\}$

* Uma função pode ser definida algebricamente por meio de uma regra ou lei em termos da variável x do domínio. A regra, no entanto, não nos fornece todas as informações sem que seja definido o seu domínio.
Por exemplo, podemos definir a área de um círculo como uma função do seu raio, pela fórmula

$$A(r) = \pi \cdot r^2 \text{ (Note que temos } A \text{ de } r \text{ e não } A \cdot r)$$

Essa fórmula está definida para todos os números reais, mas a **função área** não está definida para valores negativos de r. Assim, se nossa intenção é estudá-la, podemos restringir o domínio para todo $r \geq 0$.
A menos que se tenha um modelo que necessita de um domínio restrito, assume-se que o domínio de uma função definida por uma expressão algébrica é o mesmo da própria expressão, isto é, o DOMÍNIO DE VALIDADE.

Os exercícios 2, 3, 4 e 5 são importantes no estudo de cálculo.

2. Determine o domínio da função real $f(x) = \frac{3}{x-2}$

   Solução:
   A restrição refere-se ao denominador, pois ele deve ser diferente de 0, ou seja:
   $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
   Então, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

3. Determine o domínio da função real $f(x) = \sqrt{3-x}$.

   Solução:
   $\sqrt{3-x}$ só existe em $\mathbb{R}$ se:
   $3 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3$
   Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$.

4. Qual o domínio da função real $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{3x}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2}$?

   Solução:
   Devemos ter simultaneamente:
   $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
   $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
   $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
   Efetuando a intersecção das condições, temos:

   Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$

5. Qual o domínio da função real $f(x) = x^2 + 5x$

   Solução:
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $D(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

12.1.4 Função Crescente e Função Decrescente

Uma função $y = f(x)$, de **A** em **B**, é *crescente* em um intervalo $[a, b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ pertencentes ao intervalo $[a, b]$ temos:

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)}$$

Uma função $y = f(x)$, de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{B}$, é *decrescente* em um intervalo $[a, b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ pertencentes esse intervalo temos:

$$\boxed{x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)}$$

Exemplo:
Na função $f(x)$ representada no gráfico abaixo, observe que $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, +\infty)$.

Exercícios Resolvidos

1. As funções reais $f(x)$ e $g(x)$ estão representadas por seus gráficos. Analise-os e indique em que intervalos elas são crescentes ou decrescentes.

Solução:

$f(x)$ é crescente em $[1, \infty)$ porque, para quaisquer $x_2 > x_1$ pertencentes a esse intervalo, $f(x_2) > f(x_1)$ e decrescente em $[0, 1]$ porque, para quaisquer $x_2 > x_1$ pertencentes a esse intervalo, $f(x_2) < f(x_1)$;

$g(x)$ é crescente em $[-2, 0]$, pois nesse intervalo quaisquer $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1)$;
$g(x)$ é crescente em $[2, 4]$, pois nesse intervalo quaisquer $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) > g(x_1)$;
$g(x)$ é decrescente em $[-4, -2]$, pois nesse intervalo quaisquer $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$;

$g(x)$ é decrescente em $[0, 2]$, pois nesse intervalo quaisquer $x_2 > x_1 \Rightarrow g(x_2) < g(x_1)$;

2. Determine em que intervalos as funções representadas pelos gráficos a seguir são crescentes ou decrescentes:

a) **Gráfico 1**

Solução:

$h(x)$ é crescente em $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ e decrescente em $[0, \pi]$.

b) **Gráfico 2**

Solução:

$i(x)$ é crescente em $[-3, -1]$ e $[2, +\infty)$ e decrescente em $(-\infty, 3]$ e $[1, 2]$.

c) **Gráfico 3**

Solução:

$$j(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$j(x)$ é crescente em $]-\infty, -1[$ e $]-1, 0[$ e decrescente em $[0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

Observação: -1 e 1 não estão incluídos nos intervalos, pois não pertencem ao domínio da função $j(x)$.

Capítulo 13

Função Afim

13.1 Definição

Chamamos de **função afim** qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, quando existem constantes $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Observação: A fórmula matemática $f(x) = ax + b$ pode ser representada por $y = ax + b$.

Exemplos:

1. A *função identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as *translações* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções *lineares*, $f(x) = ax$ e as funções *constantes* $f(x) = b$.

2. Outros exemplos de funções afim do tipo $f(x) = ax + b$:

   (a) $f(x) = 3x - 1 \qquad a = 3 \quad \text{e} \quad b = -1$

   (b) $f(x) = -2x + 5 \qquad a = -2 \quad \text{e} \quad b = 5$

   (c) $f(x) = 4x \qquad a = 4 \quad \text{e} \quad b = 0$ --→ função linear

   (d) $f(x) = -x \qquad a = -1 \quad \text{e} \quad b = 0$ --→ função linear

   (e) $f(x) = -2 \qquad a = 0 \quad \text{e} \quad b = -2$ --→ função constante

3. Dada a função real $f(x) = 3x - 2$, determinar $f(5)$.
   Resolução: $f(x) = 3x - 2 \Rightarrow f(5) = 3 \cdot (5) - 2 \Rightarrow f(5) = 13$.

4. Dada a função real $f(x) = ax + b$, sabe-se que $f(1) = 4$ e $f(-2) = 10$. Escrever a lei de formação da função f e calcular $f(2)$.
   Resolução: Se $f(1) = 4 \Rightarrow a.(1) + b = 4 \Rightarrow a + b = 4$.
   Se $f(-2) = 10 \Rightarrow a.(-2) + b = 10 \Rightarrow -2a + b = 10$.
   Vamos determinar a e b resolvendo o sistema:

   $$\begin{cases} a + b = 4 \\ -2a + b = 10 \end{cases}$$

   Utilizando o método da adição, onde adicionamos a 1ª equação ao oposto da 2ª equação e daí temos:

   $$\begin{cases} a + \cancel{b} = 4 \\ \underline{2a - \cancel{b} = -10} \end{cases}$$

   $3a = -6$
   $a = -2$
   Substituindo $a = -2$ em uma das equações originais, temos:
   $(-2) + b = 4 \Rightarrow b = 4 + 2 = 6$. Assim, $a = -2$ e $b = 6$, logo a função f é dada por $f(x) = -2x + 6$.

13.2 Gráfico de Uma Função Afim

Observações:

- O gráfico da função afim é uma reta.
- O conjunto imagem da função afim é $\mathbb{R}$.

Exemplos:

1. Construa o gráfico e dê o conjunto imagem das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

   a) $f(x) = 2$
   O gráfico é uma reta paralela ao eixo horizontal (eixo x), passando pelo ponto $(0, 2)$, logo:

   Im $= \{2\}$

   b) $f(x) = x + 2$
   1º passo: Vamos atribuir valores para x para obter o valor de y.
   Para $x = 0$, temos:
   $f(x) = y = x + 2$
   $y = 0 + 2$
   $y = 2$
   Portanto, temos o primeiro ponto $A(0, 2)$.
   Para $x = 1$, temos:
   $y = 1 + 2$
   $y = 3$
   E agora temos o segundo ponto $B(1, 3)$.
   Esses dois pontos são suficientes para o próximo passo que é a construção do gráfico, pois por dois pontos passa uma única reta.
   2º passo: Vamos marcar os pontos $A(0, 2)$ e $B(1, 3)$ no plano cartesiano:

   Im$= \mathbb{R}$

   c) $f(x) = -3x + 1$
   1º passo:

x	$y = -3x + 1$
0	1
1	-2

Temos então os pontos $A(0,1)$ e $B(1,-2)$.
2º passo: Gráfico:
Marcar os pontos $A(0,1)$ e $B(1,-2)$ no plano cartesiano:

Im= $\mathbb{R}$

d) $f(x) = 5x$
1º passo:

x	$y = 5x$
0	0
1	5

Temos então os pontos $A(0,0)$ e $B(1,5)$
2º passo:
Marcar os pontos $A(0,0)$ e $B(1,5)$ no plano cartesiano:

Im= $\mathbb{R}$

2. A figura a seguir representa uma função afim ($y = ax + b$). Qual o valor da função no ponto $x = 3$?

Solução:

Temos no gráfico da função os pontos $(2, 0)$ e $(0, -2)$ e como a função é do tipo $y = ax + b$, substituimos os valores das coordenadas na equação da função para descobrir os coeficientes a e b; assim:
$\begin{cases} a \cdot (2) + b = 0 \\ a \cdot 0 + b = -2 \end{cases}$
$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases}$
Temos: $b = -2$.
Substituindo $b = -2$ na 1ª equação, temos:
$2a - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$. Assim, $a = 1$ e $b = -2$, logo a função é dada por $y = x - 2$. Então: $f(3) = 1 \cdot 3 - 2 = 1$.
Logo, o valor da função no ponto $x = 3$ é: 1.

13.3 Coeficientes a e b da função $y = ax + b$

13.3.1 Coeficiente a

Na função afim $y = ax + b$, o número real a é chamado de **inclinação** ou **coeficiente angular**, mas o mais correto é chamar esse coeficiente de **TAXA DE VARIAÇÃO**.

Exemplos:
Dê o coeficiente angular (ou taxa de variação) das seguintes funções:

1. $y = 3x + 4$ coeficiente angular $a = 3$.
2. $y = -x + 2$ coeficiente angular $a = -1$.
3. $y = -8 + 5x$ coeficiente angular $a = 5$.

Isso é importante saber!!!

- Se $a > 0$, a função é crescente, ou seja, aumentando x aumenta y.
- Se $a < 0$, a função é decrescente, ou seja, aumentando x diminui y.

Exemplos:

1. $f(x) = 3x + 1 \quad a = 3 \Rightarrow a > 0$ (função crescente)
2. $f(x) = -2x + 3 \quad a = -2 \Rightarrow a < 0$ (função decrescente)

13.3.2 Coeficiente b

Na função afim $y = ax + b$, o número real b é chamado de **coeficiente linear**.
Exemplo:
Dê o coeficiente linear das seguintes funções:

1. $y = 2x + 3$ coeficiente linear $b = 3$;
2. $y = -5 + \dfrac{x}{4}$ coeficiente linear $b = -5$.

Observe que:

Em $y = ax + b$, para $x = 0$ temos $y = b$; o ponto (0,b) é a intersecção da reta com o eixo y.

Exemplo:

- Construir o gráfico da função real $y = x + 2$
  Atribuindo valores para x, na seguinte tabela temos:

x	$y = x + 2$
0	2
3	5

Assim, temos os pontos $A(0, 2)$ e $B(3, 5)$ e traçando o gráfico:

Coeficiente linear SEMPRE corta o eixo y

Note que o ponto $(0, 2)$ é o intercepto y e que $b = 2$ é o coeficiente linear, isto é, sempre o coeficiente linear cortará o eixo y.

13.4 Raiz ou Zero da Função Afim

Dada a função afim $f(x) = ax + b$, chama-se **raiz** ou **zero** da função, o valor de x para o qual $f(x) = 0$, isto é, $ax + b = 0$, ou ainda, o valor de x que anula a função.

Então, para determinarmos a raiz ou zero da função, fazemos $f(x) = y = 0$ e resolveremos a equação.

Assim, o zero ou raiz de uma função afim é $x = \frac{-b}{a}$.

Exemplos:

1. Determine a raiz das seguintes funções afins:

   (a) $y = 3x - 6$
   $3x - 6 = 0$
   $3x = 6$
   $x = \frac{6}{3}$
   $x = 2, \rightarrow 2$ é a raiz.

   (b) $y = -8x$
   $-8x = 0$
   $x = \frac{0}{8}$
   $x = 0, \rightarrow 0$ é a raiz.

2. **Interpretação Geométrica:** Construir o gráfico da função real $f(x) = x - 2$.
   Vamos encontrar primeiramente o zero dessa função:
   $f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, Assim temos o ponto $(2, 0)$
   O coeficiente linear da função f é -2.
   Utilizando o conhecimento visto até aqui, podemos dizer que os pontos que interceptam os eixos coordenados são:

eixo x: $(\frac{-b}{a}, 0)$ --→ Geometricamente, o **zero** da função afim $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ é a **abcissa** do ponto em que a reta corta o eixo x

eixo y: $(0, b)$ --→ Geometricamente, o coeficiente linear sempre corta o eixo y

Logo, os pontos $(2, 0)$ e $(0, -2)$ cortam os eixos coordenados. Veja o gráfico:

3. Na função real $y = 3x - 6$, o zero da função é $x = 2$, assim, o ponto $(2, 0)$ é a intersecção da reta com o eixo **x**.
Construindo o gráfico:

quando $y = 0 \rightarrow x = 2$, temos o ponto $(2, 0)$ e
quando $x = 0 \rightarrow y = -6$ (coef. linear é -6), temos o ponto $(0, -6)$

4. Determine a raiz de cada uma das funções seguintes:

a) $y = 2x - 8$
$2x - 8 = 0$
$2x = 8$
$x = \frac{8}{2}$
$x = 4$, logo 4 é a raiz.
Construindo o gráfico:
$y = 2x - 8$
quando $y = 0 \rightarrow x = 4$
quando $x = 0 \rightarrow y = -8$ (coef. linear é -8)

b) $y = -3x + 3$
$-3x + 3 = 0$
$-3x = -3$
$x = \frac{-3}{-3}$
logo $x = 1$ é a raiz.
Construindo o gráfico:
$y = -3x + 3$
quando $y = 0 \rightarrow x = 1$
quando $x = 0 \rightarrow y = 3$ (coef. linear é 3)

13.5 Sinal da Função Afim

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$, conforme o valor atribuído a x podemos ter:

a) $y > 0$ ou $f(x) > 0$;

b) $y = 0$ ou $f(x) = 0$;

c) $y < 0$ ou $f(x) < 0$;

Exemplos:

1. Dada a função real $f(x) = x - 3$, determinar os valores reais de x para os quais:
(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) > 0$ (c) $f(x) < 0$

* Podemos notar que f é crescente, pois $a = 1 > 0$.
* A raiz ou zero da função é:
  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo: a reta intercepta o eixo x no ponto de abcissa $x = 3$.
  Observando essas considerações, vamos fazer um esboço do gráfico da função f:

Assim:

* $f(x) = 0$ para $x = 3$;
* $f(x) > 0$ para $x > 3$
* $f(x) < 0$ para $x < 3$

2. Dada a função real $f(x) = -2x + 6$, determinar os valores reais de x para os quais:
(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) > 0$ (c) $f(x) < 0$

* Podemos notar que f é decrescente, pois $a = -2 < 0$.
* A raiz ou zero da função é:
  $-2x + 6 = 0 \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$
  Logo: a reta intercepta o eixo x no ponto de abcissa $x = 3$.
  Observando essas considerações, vamos fazer um esboço do gráfico da função f:

Assim:

* $f(x) = 0$ para $x = 3$;
* $f(x) > 0$ para $x < 3$
* $f(x) < 0$ para $x > 3$

Conclusão:

* Para valores de x maiores que a raiz: a função y tem o mesmo sinal de a.
* Para valores de x menores que a raiz: a função y tem sinal contrário de a.
* Para valores de x iguais à raiz: a função é nula $y = 0$.

3. Estude a variação de sinal das seguintes funções:

(a) $y = 4x - 8$
Resolução:
Raiz da função:
$y = 0 \Rightarrow \quad 4x - 8 = 0$
$4x = 8$
$x = \frac{8}{4}$
$x = 2$
logo 2 é a raiz.
Sinal da função:

Logo:
para $x > 2 \Rightarrow y > 0$
para $x < 2 \Rightarrow y < 0$
para $x = 2 \Rightarrow y = 0$

(b) $y = -2x + 5$
Raiz da função:
$y = 0 \Rightarrow \quad -2x + 5 = 0$
$-2x = -5$
$x = \frac{-5}{-2}$
$x = \frac{5}{2}$
logo a raiz é $\frac{5}{2}$

Logo:
para $x > \frac{5}{2} \Rightarrow y < 0$
para $x < \frac{5}{2} \Rightarrow y > 0$
para $x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 0$

13.6 Resolução de Inequações

Para resolvermos as inequações envolvendo expressões de 1º grau, devemos estudar o sinal da expressão $ax + b$ como se fosse uma função $f(x) = ax + b$.

Exemplos:

1. Resolva a inequação $-8x + 16 > 0$
   Raiz da função:
   $y = -8x + 16 > 0 \quad y = 0 \Rightarrow -8x + 16 = 0$
   $-8x = -16$
   $8x = 16$
   $x = \frac{16}{8}$
   $x = 2$ logo a raiz é 2
   sinal da função:

   Como queremos $-8x + 16 > 0$ ou $y > 0$, então devemos ter $x < 2$.
   Logo: V= $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
   Poderíamos, nas inequações de 1º grau, simplesmente resolvê-las de forma direta:
   $-8x + 16 > 0$
   $-8x > -16 \cdot (-1)$
   $8x < 16$
   $x < \frac{16}{8}$
   $x < 2$

2. Resolva a inequação $2x + 5 \leqslant 0$.
   Raiz da função:
   $y = 2x + 5 \leqslant 0 \quad y = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$
   $2x = -5$
   $x = -\frac{5}{2}$,logo a raiz é $-\frac{5}{2}$.

   Como queremos $y \leqslant 0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}$.
   Logo: V=$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{2}\}$

3. Resolva as inequações:

   (a) $x - 5 > 0$
   Raiz da função:
   $y = x - 5 > 0 \quad y = 0 \Rightarrow x - 5 = 0$
   $x = 5$ logo a raiz é 5.

Como queremos $y > 0 \Rightarrow x > 5$.
Logo: V=$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

(b) $2x - 8 \geqslant 0$
Raiz da função:
$y = 2x - 8 \geqslant 0 \quad y = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0$
$2x = 8$
$x = \frac{8}{2}$
$x = 4$ logo a raiz é 4.

Como queremos $y \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 4$.
Logo: V=$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

* Para resolver inequações-produto ou inequações-quociente, primeiro estudamos o sinal de cada função que compõe o produto ou o quociente e, então, determinamos o sinal do produto ou do quociente.

4. Resolva a inequação $(x + 3)(x - 2) \geqslant 0$.
Devemos lembrar que um produto $(x + 3)(x - 2)$ é positivo ou nulo quando as duas funções $y_1 = x + 3$ e $y_2 = x - 2$ têm o mesmo sinal ou quando uma das funções é nula.
Estudando o sinal de cada uma das funções, temos:
$y_1 = x + 3$
$x - 3 = 0$
$x = -3$ Raiz=-3
sinal de y_1:

$y_2 = x - 2$

$x - 2 = 0$
$x = 2$ Raiz=2
sinal de y_2:

Montando o quadro de sinais, poderemos determinar o sinal do produto:

		-3		2	
$y_1 = x + 3$	− − − − − − − − − − −	|	+++++++++++	⋮	+++++++++++
$y_2 = x - 2$	− − − − − − − − − − −	⋮	− − − − − − − − − − −	|	+++++++++++
$y_1.y_2 = (x+3)(x-2)$	+	⋮	−	⋮	+

O

conjunto verdade será:V=$\{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -3 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2\}$

5. Determine o conjunto verdade da inequação:
$\dfrac{-2x-8}{-x+2} \leqslant 0$
Estudando o sinal de cada uma das funções, temos:
$y_1 = -2x - 8$
$-2x = 8$
$x = -\frac{8}{2}$
$x = -4$, Raiz $=-4$.
Sinal de y_1:

$y_2 = -x + 2$
$-x = -2$
$x = 2$, Raiz $=2$.

Montando o quadro de sinais, determinaremos o sinal do quociente:

		-4		2	
$y_1 = -2x - 8$	+++++++++++	|	− − − − − − − − − − −	⋮	− − − − − − − − − − −
$y_2 = -x + 2$	+++++++++++	⋮	+++++++++++	|	− − − − − − − − − − −
$y_1.y_2 = \dfrac{-2x-8}{-x+2}$	+	⋮	−	⋮	+

Observe que o denominador tem que ser diferente de zero, ou seja, $-x + 2 \neq 0$ (então $x \neq 2$) e para que a fração seja nula o numerador tem que ser igual a zero, ou seja, $-2x-8 = 0$ (então $x = -4$).
Logo, o conjunto verdade será: V=$\{x \in \mathbb{R} | -4 \leqslant x < 2\}$

6. Determine o conjunto verdade da inequação:$(x-3)(x+2)(-2x+4) > 0$
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$-2x + 4 = 0 \Rightarrow -2x = -4$

$x = \frac{-4}{-2}$
$x = 2$

Montando o quadro de sinais, determinaremos o sinal do quociente:

		-2		2		3	
$x-3$	– – – – – – – – – –	⋮	– – – – – – – – – – –	⋮	– – – – – – – – – – –	|	++++++++++
$x+2$	– – – – – – – – – –	|	++++++++++	⋮	++++++++++	⋮	+++++++++
$-2x+4$	+++++++++	⋮	+++++++++	|	– – – – – – – – – –	⋮	– – – – – – – – –
$(x-3)(x+2)(-2x+4)$	+	|	–	|	+	|	–

Logo: V=$\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.

7. Vamos explicitar o domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$.

Sabe-se que $\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $f(x) = \dfrac{x-2}{1-x} \geq 0$ e $x \neq 1$.

Portanto, vamos resolver a inequação $\dfrac{x-2}{1-x} \geq 0$:

Chamando o numerador de $g(x) = x - 2$ temos:

- zero ou raiz: $x = 2$
- $a = 1 > 0$ --→ função crescente

Chamando o denominador de $h(x) = 1 - x$ temos:

- zero ou raiz: $x = 1$
- $a = -1 < 0$ --→ função decrescente

Montando o quadro de sinais, temos:

Logo, como nos interessa somente o intervalo POSITIVO, temos que o domínio é:

$D = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\}$.

13.7 Aplicações da Função Afim

1. Diana possuía R$ 600,00 para fazer uma cirurgia que tinha um custo total de R$ 3.000,00. No mês de outubro ela passou a economizar do seu salário R$ 200,00 que será utilizado para pagar esta cirurgia.

   (a) Qual a função que relaciona o tempo, em meses, com a quantia em reais?
   $f(x) = 200 \cdot x + 600$

   (b) Quando Diana terá dinheiro suficiente para realizar a cirurgia?
   Resolução: Temos o valor fixo de R$ 600,00, este será o coeficiente b. Como o valor do dinheiro varia com o tempo (meses) tomemos :
   y= Valor obtido por Diana e x= número de meses.
   Usaremos $y = 3000$. Mas ainda sabemos que Diana economiza R$ 200,00 a cada mês então obtemos $a = 200{,}00$.
   Podemos calcular os meses da seguinte forma :
   $3000 = 200 \cdot x + 600$
   $200 \cdot x = 2400$
   $x = 12$
   Diana poderá realizar a cirurgia em 12 meses.

2. Suponha que você trabalhe como representante de uma firma que se dedica à criação de jogos para computador. Seu salário é de R$ 2000,00 fixos por mês acrescidos de R$ 20,00 por jogo vendido.

   (a) No período de um mês, qual a função que relaciona o número de jogos vendidos com o valor do seu salário, em reais ?
   Com tais informações podemos escrever a equação que nos permite calcular a quantia em dinheiro que ele recebe por mês em função da quantidade de jogos vendidos. Representemos por y a quantia em dinheiro, e por x a quantidade de jogos que foram vendidos, teremos a seguinte equação:

   $$y = 20x + 2000$$

   (b) Se em um mês você vender 15 jogos, quanto você receberá ?
   Utilizando esta fórmula, calcularemos o quanto em dinheiro, num mês, ele conseguirá se vender 15 jogos.

   $y = 20 \cdot 15 + 2000$
   $y = 300 + 2000$
   $y = 2300$
   Portanto, se ele vender 15 jogos, receberá no mês R$ 2.300,00.

3. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.
   Condições dos planos:
   Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 140,00 e R$ 20,00 por consulta.
   Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 110,00 e R$ 25,00 por consulta.

   Vamos determinar:

   (a) A função correspondente ao custo mensal de cada plano.
   Para o plano A é $A(x) = 20x + 140$
   Para o plano B é $B(x) = 25x + 110$

   (b) Em qual situação o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois se equivalem.

Para que o plano A seja mais econômico:
$B(x) > A(x)$
$25x + 110 > 20x + 140$
$25x - 20x > 140 - 110$
$5x > 30$
$x > 6$
Para que o Plano B seja mais econômico:
$B(x) < A(x)$
$25x + 110 < 20x + 140$
$25x - 20x < 140 - 110$
$5x < 30$
$x < 6$
Para que A e B sejam equivalente:
$B(x) = A(x)$
$25x + 110 = 20x + 140$
$25x - 20x = 140 - 110$
$5x = 30$
$x = 6$

4. O custo C de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial b fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância x percorrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6 km, a quantia cobrada foi de R$8,25 e que em outra corrida, de 2,8 km a quantia cobrada foi de R$7,25.

   (a) Calcule o valor inicial b e a fórmula do custo da corrida.
   Seja $C(x)$ o valor de uma corrida, então $C(x) = b + a \cdot x$ onde a é o custo de 1 km percorrido.
   1ª corrida: $8,25 = b + a \cdot 3,6$.
   2ª corrida $7,25 = b + a \cdot 2,8$.
   Subtraímos as duas igualdades e obtemos $1 = a \cdot 0,8$ donde $a = 1,25$. Da primeira igualdade temos $8,25 - 1,25 \cdot 3,6 = b$.
   Logo $b = 3,75$
   O custo da corrida será: $C(x) = 1,25x + 3,75$.

   (b) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R$75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?
   O taxista, em 10 corridas, arrecadou R$ 75,00. Este valor inclui 10 vezes o valor inicial, isto é, R$ 37,50. Como $75,00 = 37,50 + 1,25.x$, teremos $x = \frac{75-37,50}{1,25} = \frac{37,50}{1,25} = 30$.
   Resposta: O taxista percorreu, naquele dia, 30 km.

Capítulo 14

Função Quadrática

14.1 Definição

Toda função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ com $a \in \Re^*,\ b, c \in \Re$ definida para todo x real é denominada *função quadrática*. Nessa função, $a,\ b$ e c são denominados de *coeficientes*.

Exemplos:

1. Encontre os coeficientes a, b e c das seguintes funções quadráticas:

   (a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \qquad (a = 2,\ b = 3,\ c = -1)$

   (b) $f(x) = -x^2 + 1 \qquad (a = -1,\ b = 0,\ c = 1)$

   (c) $y = 5x^2 - 8x \qquad (a = 5,\ b = -8,\ c = 0)$

2. Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(0) = 4$, $f(2) = 2$ e $f(-2) = -2$, escreva a função f.

   $f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \quad (I)$
   $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (II)$
   $f(-2) = -2 \Rightarrow 4a - 2b + c = -2 \quad (III)$
   Substituindo-se (I) em (II) e (III), vem:

   $$\begin{array}{l} 4a + 2b + 4 = 2 \quad \Rightarrow 4a + 2b = -2 \\ 4a - 2b + 4 = -2 \Rightarrow \underline{4a - 2b = -6} \ \oplus \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 8a = -8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = -1 \end{array}$$

   Da equação (II), temos:
   $4a + 2b + c = 2 \Rightarrow -4 + 2b + 4 = 2 \Rightarrow b = 1$
   Então: $a = -1$, $b = 1$ e $c = 4$
   Como $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = -x^2 + x + 4$

14.2 Raízes, Gráfico, Vértice e Sinal

14.2.1 Raízes ou Zeros da Função Quadrática

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, basta fazer $f(x) = 0$ para encontrarmos as raízes ou zeros da função quadrática.

Assim, temos $ax^2 + bx + c = 0$, onde podemos ter várias maneiras de encontrar as raízes *(solução de equações de 2º grau)*. Uma função quadrática pode:

- ter 2 raízes reais diferentes,
- ter 2 raízes reais iguais,
- não possuir raízes reais.

Uma maneira de se mostrar isso é analisando o discriminante Δ.

Exemplos:

Encontre os zeros ou raízes das seguintes funções reais:

1. $f(x) = x^2 + 2x$

Utilizando a fórmula resolutiva:	Utilizando outro método:
$f(x) = x^2 + 2x \Longrightarrow x^2 + 2x = 0$ $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$ $\Delta = b^2 - 4.a.c$ $\Delta = 2^2 - 4.(1).(0) = 4 - 0$ $\Delta = 4$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{-2 \pm 2}{2} \Rightarrow$ $x_1 = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$ e $x_2 = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ Raízes: $x_1 = 0$ e $x_2 = -2$	$x^2 + 2x = 0$ É uma equação incompleta, logo: $x(x+2) = 0$ $x = 0$ ou $x + 2 = 0$ Logo as raízes são: $x = 0$ e $x = -2$

2. $f(x) = x^2 - 7x + 10$

$f(x) = x^2 - 7x + 10 \Longrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$
$a = 1,\ b = -7,\ c = 10$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (-7)^2 - 4.(1).(10) = 49 - 40$
$\Delta = 9$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$
$x = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2.1}$
$x = \dfrac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$ e $x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$
Raízes: $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$

Podemos utilizar o método da soma e produto das raízes, temos:

- a soma das raízes seja 7.
- o produto das raízes seja 10.

Os números procurados são 2 e 5.
Logo, as raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$

3. $f(x) = 4 - x^2$

$f(x) = 4 - x^2 \Longrightarrow -x^2 + 4 = 0\ a = -1,\ b = 0,\ c = 4$
$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$\Delta = (0)^2 - 4.(-1).(4)$
$\Delta = 16$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$
$x = \dfrac{-(0) \pm \sqrt{16}}{2.(-1)}$
$x = \dfrac{0 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{0+4}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$ e $x_2 = \frac{0-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2$
Raízes: $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$

Como essa equação é incompleta, podemos resolver utilizando outro método:

$4 - x^2 = 0$
$-x^2 = -4$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

4. $f(x) = x^2 + 4x + 5$

$f(x) = x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (4)^2 - 4.(1).(5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, logo $f(x)$ não corta o eixo dos x.

14.2.2 Gráfico da Função Quadrática

A representação de uma função quadrática de $\Re$ em $\Re$ é uma parábola. Veja os exemplos:

Traçar o gráfico das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Podemos montar uma tabela:

x	$y = x^2 - 8x + 12$
0	12
2	0
4	-4
6	0

Esboçando o gráfico temos:

b) $f(x) = -x^2 + 8x - 12$

Montando uma tabela:

x	$y = -x^2 + 8x - 12$
0	-12
2	0
4	4
6	0

Esboçando o gráfico temos:

Para representar o gráfico da função quadrática, é importante destacar a **análise do coeficiente a:**

- se $a > 0$, o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para *cima.*
- se $a < 0$, o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para *baixo.*

14.2.3 Vértice da Parábola

Coordenadas do Vértice

A parábola que representa o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, passa por um ponto V, chamado de **vértice**, cujas coordenadas são:

- $x_v = -\frac{b}{2a}$ $(abscissa)$
- $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ $(ordenada)$

Logo, o vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Observações: `Isso é importante!!!`

Ponto de Máximo ou de Mínimo de Uma Função Quadrática

- Se traçarmos uma reta paralela ao eixo y que passe pelo vértice, estaremos determinando o *eixo de simetria* da parábola.
- Quando y assume o **menor** valor da função, esse ponto é chamado de *ponto de mínimo* da função e quando $a > 0$, o **valor mínimo** da função é y_v.

- Quando y assume o **maior** valor da função, esse ponto é chamado de *ponto de máximo* da função e quando $a < 0$, o **valor máximo** da função é y_v.

Imagem da Função Quadrática

De modo geral, dada a função $f : \Re \to \Re$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $V(x_v, y_v)$ é o vértice da parábola correspondente, temos então:

- $a > 0 \Leftrightarrow y_v$ é o valor mínimo de $f \Leftrightarrow Im(f) = \{y \in \Re | y \geq y_v\}$
- $a < 0 \Leftrightarrow y_v$ é o valor máximo de $f \Leftrightarrow Im(f) = \{y \in \Re | y \leq y_v\}$

Exemplos: Nas seguintes funções, determinar as coordenadas do vértice da parábola dizendo se esse ponto é máximo ou mínimo. Encontre também a imagem de f.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
   Resolução:
   Temos $a = 1,\ b = 2$ e $c = -3$, então $\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16$.
   Assim:
   $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2.1} = -\dfrac{2}{2} = -1$
   $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{16}{4.1} = -\dfrac{16}{4} = -4$
   $V = (-1, -4)$
   Como $a = 1$ $(a > 0)$, então a função admite um número mínimo.
   O **valor mínimo** da função é $y_v = -4$
   Logo $Im(f) = \{y \in \Re | y \geq -4\}$
   Veja o gráfico:

2. $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$
   Resolução:
   Temos $a = -4,\ b = 4$ e $c = 5$, então $\Delta = 4^2 - 4.(-4).(5) = 16 + 80 = 96$.
   Assim:
   $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-\cancel{4}}{2.(-\cancel{4})} = \dfrac{1}{2} =$
   $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-96}{4.-4} = -\dfrac{-96}{-16} = 6$
   $V = (-1, -4)$

Como $a = -4$ $(a < 0)$, então a função admite um número máximo.
O **valor máximo** da função é $y_v = 6$
Logo $Im(f) = \{y \in \Re | y \leq 6\}$
Veja o gráfico:

14.2.4 Ponto de intersecção da parábola com o eixo y

Para determinar as coordenadas desse ponto, basta substituir x por 0 na função:

$$y = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow y = c$$

Assim, quando $x = 0 \Longrightarrow y = c$ --→ O coeficiente c é o intercepto y.

Exemplos:
Dada as seguintes funções quadráticas, encontre o intercepto y da parábola:

a) $y = x^2 - 8x - 5$
Solução:
Para encontramos a intersecção da parábola com o eixo y vamos substituir o x por 0:
$y = (0)^2 - 8(0) - 5 \Rightarrow y = -5$

b) $f(x) = -2x^2 + 7x + 6$

Solução:

$f(0) = y = -2(0)^2 + 7(0) + 6 \Rightarrow y = 6$

14.2.5 Forma Prática para Construção do Gráfico de uma Função Quadrática

Podemos construir de modo fácil e prático o gráfico da função quadrática:

- fazendo a *analise do coeficiente a*,
- encontrado os *zeros da função*,
- encontrando as *coordenadas do vértice da parábola*,

- encontrando o *intercepto* y.

Exemplo: Construa o gráfico das funções:

a) $y = x^2 + 2x - 3$
Solução:
Note que:

- $a = 1 > 0$, então a parábola tem concavidade para cima,
- as raízes ou zeros da função são as raízes da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$:
  onde temos que:
  - a soma das raízes é $S = -2$,
  - o produto das raízes é $P = -3$
  - os números procurados são: $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$ --→ Pode ser utilizada a fórmula resolutiva para encontrar as raízes da equação
- as coordenadas do vértice são:
  - $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2.1} = -1$
  - $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(2^2 - 4.1.(-3))}{4.1} = \dfrac{-(4+12)}{4} = \dfrac{-16}{4} = -4$
  - logo $V = (-1, -4)$
- por fim, o intercepto y, isto é, onde a parábola corta o eixo y, que é $y = -3$.

Assim temos o gráfico com os elementos acima:

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
Solução:
Note que:

- $a = -1 < 0$, então a parábola tem concavidade para baixo,
- as raízes ou zeros da função são as raízes da equação $-x^2 + 4x - 3 = 0$:
  onde temos que:
  - a soma das raízes é $S = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-1} = 4$,
  - o produto das raízes é $P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3$
  - os números procurados são: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ --→ Pode ser utilizada a fórmula resolutiva para encontrar as raízes da equação
- as coordenadas do vértice são:

- $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2.(-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$
- $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(4^2 - 4.(-1).(-3))}{4.(-1)} = \dfrac{-(16-12)}{-4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$
- logo $V = (2, 1)$

- por fim, o intercepto y, isto é, onde a parábola corta o eixo y, que é $y = -3$.

Assim temos o gráfico com os elementos acima:

14.2.6 Estudo do Sinal da Função Quadrática

Para estudar o sinal da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, temos que considerar o valor do discriminante Δ e o sinal do coeficiente a.
Através de alguns exemplos, veremos como funciona o estudo do sinal da função quadrática.

1° Caso: $\Delta > 0$

Se $\Delta > 0$, a função admite raízes reais e distintas. Determinamos essas raízes e:

- para valores de x entre as duas raízes x_1 e x_2, a função tem sinal contrário de a,
- para valores de x situados fora do intervalo das raízes, a função tem o mesmo sinal de a.

Exemplos:

Estude o sinal das seguintes funções quadráticas em $\Re$:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
Solução:

- $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$
- As raízes da função são: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow$
  $x_1 = \frac{6}{2} = 3$ e $x_2 = \frac{-2}{2} = -1$
- Esboço do gráfico:

- Sinal da função:
  para $x < -1$ ou $x > 3 \Rightarrow y > 0$
  para $-1 < x < 3 \Rightarrow y < 0$
  para $x = -1$ ou $x = 3 \Rightarrow y = 0$

- Gráfico de $f(x)$:

b) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
Solução:

- $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4.(-1).(-6) = 1 > 0$
- As raízes da função são: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-5) \pm \sqrt{1}}{2.(-1)} = \dfrac{-5 \pm 1}{-2} \Rightarrow$
  $x_1 = \frac{-4}{-2} = 2$ e $x_2 = \frac{-6}{-2} = 3$

- Esboço do gráfico:

- Sinal da função:
  para $x < 2$ ou $x > 3 \Rightarrow y < 0$
  para $2 < x < 3 \Rightarrow y > 0$
  para $x = 2$ ou $x = 3 \Rightarrow y = 0$

- Gráfico de $f(x)$:

2° caso: $\Delta = 0$

Se $\Delta = 0$, a função admite duas raízes reais e iguais. Determinamos essas raízes e:

- Para qualquer valor real de x diferente das raízes x_1 e x_2, a função tem o mesmo sinal de a.

Resumindo:

Exemplos:

Estude o sinal das seguintes funções quadráticas em $\Re$:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Solução:

- Como $a = 1 > 0$, o sinal de a é positivo.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.(9) = 36 - 36 = 0$
- As raízes da função são: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \dfrac{6 \pm 0}{2} \Rightarrow$
  $x_1 = \frac{6-0}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $x_2 = \frac{6-0}{2} = \frac{6}{0} = 3$
- Esboço do gráfico:

- Sinal da função:
  para $x \neq 3 \Rightarrow y > 0$
  para $x = 3 \Rightarrow y = 0$
- Gráfico de $f(x)$:

b) $y = -5x^2$

Solução:

- Como $a = -5 < 0$, o sinal de a é negativo.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4.(-5).0 = 0 - 0 = 0$
- As raízes da função são:$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0}}{2.(-5)} = \dfrac{-0 \pm 0}{-10} \Rightarrow$
  $x_1 = \frac{-0+0}{-10} = \frac{0}{-10} = 0$ e $x_2 = \frac{-0-0}{2} = \frac{0}{-10} = 0$
- Esboço do gráfico:

- Sinal da função:
  para $x \neq 0 \Rightarrow y < 0$
  para $x = 0 \Rightarrow y = 0$

- Gráfico de $f(x)$:

3º Caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$,a função não admite raízes reais, logo para qualquer valor real de x a função tem o mesmo sinal de a.

Resumindo:

Exemplos:

Estude a varição de sinal das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 2x + 6$

Solução:

- Como $a = 1 > 0$, o sinal de a é positivo.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.(1).6 = 4 - 24 = -20 < 0$
- Sendo $\Delta < 0$, a função não admite raízes reais.

- Esboço do gráfico:

- Sinal da Função:
  Para qualquer valor real de **x**, a função tem sinal de a, ou seja, $y > 0$.

- Gráfico da Função:

b) $y = -x^2 - 9$

Solução:

- Como $a = -1 < 0$, o sinal de a é negativo.
- $\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4.(-1).(-9) = 0 - 36 = -36$
- Sendo $\Delta < 0$, a função não admite raízes reais.
- Esboço do gráfico:

- Sinal da Função:
  Para qualquer valor real de **x**, a função tem sinal de a, ou seja, $y < 0$.
- Gráfico da Função:

14.2.7 Exercícios Resolvidos

1. Dado o gráfico de uma função quadrática, descubra a sua lei de formação.

Pelo gráfico conseguimos identificar alguns elementos:

- $a > 0$, pois a concavidade da parábola está voltada para cima;
- as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$;
- o vértice da parábola é o ponto $V(1, -4)$;
- o coeficiente $c = -3$.

Podemos escrever uma função quadrática da seguinte forma: $y = (x - x_1)(x - x_2)$. Logo, temos: $y = (x - (-1))(x - 3) \Rightarrow y = (x + 1)(x - 3) \Rightarrow y = x^2 - 2x - 3$ que é a sua lei de formação, pois $a > 0$ e o intercepto y é -3.

2. Quais são os pontos de intersecção da reta $y = -x + 3$ com a parábola $y = x^2 - 4x + 3$?

Fazendo o esboço dos gráficos num mesmo plano cartesiano, temos:

Mas não podemos usar o desenho para resolver o problema, assim para encontrar tais pontos que são comum à reta e à parábola igualamos as duas expressões:
$x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + x + 3 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$ que é uma equação incompleta onde resolvendo, temos:
$x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$.
Substituindo esses valores na equação da reta ou da parábola (já que são pontos comuns) teremos os pontos de intersecção do gráfico das duas funções:
Vamos substituí-los na equação da reta:

- $y = -(0) + 3 = 3$, logo temos o ponto $(0, 3)$
- $y = -(3) + 3 = 0$, logo temos o ponto $(3, 0)$

que são os pontos de intersecção da reta com a parábola.

3. O vértice da parábola $y = -x^2 + mx + n$ é $V(3, 1)$, qual o valor de m e n, respectivamente?

Sabemos que o $x_v = \frac{-b}{2a} = 3$ e que o $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 1$, logo:

- $3 = \frac{-m}{2.(-1)} \Rightarrow 3 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$,
- $1 = \frac{-(m^2 - 4.(-1).n)}{4.(-1)} \Rightarrow 1 = \frac{-(6^2+4n)}{-4} \Rightarrow$
  $\frac{-36-4n}{-4} = 1 \Rightarrow -36 - 4n = -4 \Rightarrow -4n = -4 + 36 \Rightarrow -4n = 32 \Rightarrow n = -8$

Assim, o valor de m e n são: $m = 6$ e $n = -8$

Capítulo 15

Função Modular

15.1 Módulo, Equações e Inequações Modulares e a Função

15.1.1 Módulo ou Valor Absoluto

Módulo ou valor absoluto de um número real x, indicado por $|x|$ é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \ se \ x \geq 0 \\ -x, \ se \ x \leq 0 \end{cases}$$

O módulo de um número real é sempre positivo.
Observação: $\sqrt{x^2} = |x|$
Exemplos:

De acordo com a definição, calcule:

1. $|-\frac{1}{4}| = -\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$
2. $|2 - 3 \cdot 5| = |2 - 15| = |-13| = 13$
3. $12 + |-8| - |-1-4| = 12 + 8 - |-5| = 20 - 5 = 15$

15.1.2 Equação Modular

É quando a incógnita se apresenta em módulo.
A equação $|x| = a, \ a \in \Re_+^*$, é modular.

$$|x| = a \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$$

Exemplos:

Resolva em $\Re$ as equações modulares:

1. $\sqrt{x^2} = 4 \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \text{ou} \\ x = -4 \end{cases}$

   S= $\{-4, 4\}$

2. $|2x - 1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

   S= $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$

3. $|x-4| = |2x-3| \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 2x-3 \\ \text{ou} \\ x-4 = -(2x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ \text{ou} \\ x-4 = -2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$
   S= $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$

4. $|3x-2| = x-1$ Devemos ter $x-1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$, assim:
   $\Rightarrow \begin{cases} 3x-2 = x-1 \\ \text{ou} \\ 3x-2 = -(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ \text{ou} \\ 4x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$
   Como $x \geqslant 1$, temos S= $\varnothing$

15.1.3 Inequação Modular:

Uma inequação é *modular* quando a incógnita se apresenta em módulo. Para $a > 0$, temos:

- $|x| > a \Rightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{ou} \\ x < -a \end{cases}$
- $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
- $|x| \geq a \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$
- $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

Exemplos:

Resolva as inequações em $\Re$:

1. $|2x-1| > 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > 3 \Rightarrow x > 2 \\ \text{ou} \\ 2x-1 < -3 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$
   Logo:
   S= $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

2. $|x-4| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-4 \leq 1 \Rightarrow -1+4 \leq x \leq 1+4 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$
   Logo, S=$[3, 5[$

15.1.4 Função Modular

Uma função é modular se a cada x real se associa $|x|$:

$$f(x) = |x|$$

15.1.5 Gráfico:

Pela definição de $|x|$, temos de considerar duas sentenças para $f(x)$, de $\Re$ em $\Re$.Veja como construir o gráfico da função $f(x) = |x|$

se $x \geq 0$	se $x < 0$	gráfico de $f(x) = \|x\|$
		$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Exemplo:

Represente graficamente a função real $y = |x - 1|$ e determine o seu domínio e a sua imagem:

Solução:

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{para } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{ou} \\ -(x-1), \text{para } x-1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

x	$y = x - 1$
1	0
2	1
3	2

x	$y = -x + 1$
-1	2
0	1

D= $\mathbb{R}$
Im=$\mathbb{R}_+$

Observação: Podemos traçar o gráfico seguindo outro procedimento. Construímos o gráfico da função de $y = x - 1$ e depois marcamos os pontos em que $y < 0$ simetricamente em relação ao eixo x. Vejamos:

x	$y = x - 1$
-2	-3
-1	-2
0	-1
1	0
2	1

D= $\mathbb{R}$
Im=$\mathbb{R}_+$

15.1.6 Exercícios Resolvidos

1. Calcule:

   (a) $|8-12| = |-4| = -(-4) = 4$

   (b) $|-3-2| = |-5| = 5$

   (c) $|-3| - |-2+1| = 3 - |-1| = 3 - 1 = 2$

2. Resolva as equações modulares em $\Re$:

   (a) $|2x+3| = 9$

   $$|2x+3| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=9 \\ \text{ou} \\ 2x+3=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ \text{ou} \\ 2x=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=-6 \end{cases}$$

   S= $\{3,\ -6\}$

   (b) $2|x-1| = \frac{3}{2}$

   $$2|x-1| = \frac{3}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow |x-1| = \frac{3}{4}$$

   $$|x-1| = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-1=+\frac{3}{4} \\ \text{ou} \\ x-1=-\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4}+1 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{3}{4}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{4} \\ \text{ou} \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$$

   S= $\left\{\frac{7}{4},\ \frac{1}{4}\right\}$

3. Qual o domínio da função real $f(x) = \frac{2x}{|x|-3}$

   Note que para que essa função exista, é necessário que $|x| - 3 \neq 0$.

   $$\text{Logo } |x| \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ \text{ou} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

   Assim, $D(f) = \{x \in \Re | x \neq -3 \ e \ x \neq 3\}$

4. Resolva as inequações em $\Re$:

   (a) $|x-1| > 3$

   $$|x-1| > 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1>3 \Rightarrow x>4 \\ \text{ou} \\ x-1<-3 \Rightarrow x<-2 \end{cases}$$

   Logo:
   S= $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$

   (b) $|2x-1| \leq 5$

   $$|2x-1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x-1 \leq 5 \Rightarrow -5+1 \leq 2x \leq 5+1 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

   Logo:
   S= $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3$

5. Construa os gráficos e determine o domínio e a imagem das funções reais:

(a) $f(x) = |x - 2|$
Pela definição de módulo:

- $|x - 2| = x - 2$, se $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
- $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, se $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Então a função $f(x) = |x - 2|$ pode ser escrita:

I) $f(x) = x - 2$ para $x \geq 2$

II) $f(x) = -x + 2$ para $x < 2$

Colocando (I) e (II) num mesmo plano cartesiano:

$D(f) = \Re$ e $Im(f) = \Re_+$

(b) $y = |-2x + 3|$

$D(f) = \Re$ e $Im(f) = \Re_+$

(c) $y = |x^2 - 6x + 8|$

Pela definição de módulo: $|x^2 - 6x + 8| = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, \text{para } x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ \text{ou} \\ -(x^2 - 6x + 8), \text{para } x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$

Para melhor definir os intervalos da variável x, vamos estudar os sinais de $y = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \;\; ou \;\; x \geq 4$

$x = 2 \;\; ou \;\; x = 4$ $\qquad$ $x^2 - 6x + 8 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Podemos então escrever a nossa função da seguinte forma:

I) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ para $x \leq 2 \;\; ou \;\; x \geq 4$

II) $f(x) = -(x^2 - 6x + 8)$ para $2 < x < 4$

Colocando (I) e (II) num mesmo plano cartesiano:

$D(f) = \Re$ e $Im(f) = \Re_+$

Capítulo 16

Função Exponencial

16.1 Introdução

Consideremos a função $f(x) = 2^x$ definida no domínio $D = \mathbb{N}$. O gráfico é formado por pontos "isolados"de abscissas $x = 0,\ x = 1,\ x = 2, \ldots$. Assim:
$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2^1 = 2$
$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 = 4$
$x = 3 \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$

Se considerarmos também expoente inteiros negativos, isto é, ampliarmos o domínio $D + \mathbb{Z}$, o gráfico terá pontos de abscissa negativas $x = -1,\ x = -2,\ x = -3, \ldots$. Assim:
$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

Agora vamos ampliar o domínio para o conjunto dos números racionais, $D = \mathbb{Q}$. As potências de expoentes racionais são definidas por:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad a > 0,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$$

Assim:

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow f(\frac{2}{3}) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Como o conjuntos dos números racionais não preenche totalmente a reta orientada, o gráfico ainda é uma curva com "buracos". Por exemplo, não há na curva o ponto de abscissa $x = \sqrt{2}$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Para preencher esses buracos precisamos considerar a função definida em $D = \mathbb{R}$. Aí surgem potências de expoentes irracionais, como $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$, 2^{π}, $2^{-\sqrt{2}}$ etc. Podemos formar ideia desses números considerando aproximações racionais para o expoente. Por exemplo, quanto mais o expoente x se aproxima de π, mais a potência 2^x se aproxima de 2^{π}:

$x \to$	3	3,1	3,14	3,141	3,1415	...	π
$2^x \to$	2^3	$2^{3,1}$	$2^{3,14}$	$2^{3,141}$	$2^{3,1415}$	...	2^{π}

A função $f(x) = 2^x$ com domínio $D = \mathbb{R}$ tem o seguinte gráfico:

16.2 Definição

Uma *função exponencial* associa um número real x a um número do tipo a^x, onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Assim:

$$f : \Re \to \Re_+^*$$
$$f(x) = a^x$$

é uma função exponencial.
De uma forma mais geral, uma função $f : \Re \to \Re^*$ definida por $f(x) = x_0 \cdot a^x,\ x_0 \neq 0,\ a > 0$ e $a \neq 1$ é uma função exponencial, onde x_0 é um valor inicial quando $x = 0$.

Exemplos:

São funções exponenciais:

1. $f(x) = 3^x$, onde $a = 3$.
2. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, onde $a = \frac{1}{2}$.

3. $f(x) = (\frac{3}{5})^x$, onde $a = \frac{3}{5}$.

4. $f(x) = 10^x$, onde $a = 10$

Observe a exigência da base $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $a \leq 0$ pode existir número real x para a qual a potência a^x não é definida (por exemplo, $(-2)^{\frac{1}{2}}$ não existe em $\mathbb{R}$, pois $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$), e se $a = 1$ teríamos uma função constante ($f(x) = 1^x = 1 \forall x \in \mathbb{R}$).

16.3 Gráficos

Vamos analisar quanto ao crescimento duas funções quando $a > 1$ e quando $0 < a < 1$.

Função exponencial crescente $f(x) = a^x$ para $a > 1$ se $x_1 > x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$ Exemplo: $f(x) = 2^x$	**Função exponencial decrescente** $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$ se $x_1 > x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$ Exemplo: $y = (\frac{1}{2})^x$

16.4 Comparação de Potências de Mesma Base

Comparar as potências a^x e a^y significa estabelecer qual das três sentenças seguintes é verdadeira:

$$a^x > a^y, \qquad a^x = a^y, \qquad a^x < a^y$$

Para isto vamos examinar o comportamento da função exponencial $f(x) = a^x$.

16.4.1 Caso $a > 1$

Neste caso, o gráfico de $f(x) = a^x$ indica uma função crescente, isto é, quanto maior o expoente x, maior é a potência a^x. Assim:
$a^x = a^y \iff x = y$
$a^x > a^y \iff x > y$
$a^x < a^y \iff x < y$

Exemplos:

1. A função $f(x) = 4^x$ é crescente, porque a base 4 é maior do que 1. Temos então:

   - $4^3 < 4^\pi$ (porque $3 < \pi$),
   - $4^{\sqrt{2}} < 4^{1,5}$ (porque $\sqrt{2} \cong 1,41 < 1,5$),
   - $4^{\frac{1}{2}} > 4^{\frac{1}{3}}$ (porque $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$),
   - $4^{-1} > 4^{-2}$ (porque $-1 > -2$).

2. A função $f(x) = 5^x$ é crescente, porque a base 5 é maior do que 1. Temos então:
   - $5^x = 5^3 \Longleftrightarrow x = 3$
   - $5^x > 5^3 \Longleftrightarrow x > 3$
   - $5^x < 5^3 \Longleftrightarrow x < 3$

16.4.2 Caso $0 < a < 1$

Neste caso, o gráfico de $f(x) = a^x$ indica uma função decrescente, isto é, quanto maior o expoente x, menor é a potência a^x. Assim:
$a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$
$a^x > a^y \Longleftrightarrow x < y$
$a^x < a^y \Longleftrightarrow x > y$

Exemplos:

1. A função $f(x) = 0,4^x$ é decrescente, porque a base $0,4$ é positiva e menor do que 1. Temos então:
   - $0,4^3 < 0,4^2$ (porque $3 > 2$),
   - $0,4^{\sqrt{2}} < 0,4^0$ (porque $\sqrt{2} > 0$),
   - $0,4^{-1} < 0,4^{-2}$ (porque $-1 > -2$).

2. A função $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ é decrescente, porque a base $\frac{1}{4}$ é positiva e menor do que 1. Temos então:
   - $(\frac{1}{4})^x = (\frac{1}{4})^3 \Longleftrightarrow x = 3$
   - $(\frac{1}{4})^x > (\frac{1}{4})^3 \Longleftrightarrow x < 3$
   - $(\frac{1}{4})^x < (\frac{1}{4})^3 \Longleftrightarrow x > 3$

16.5 Equações Exponenciais

É toda equação que possui a incógnita no expoente de uma potência. A resolução de uma equação exponencial baseia-se na comparação de duas potências de mesma base.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Exemplos:

1. Resolva a equação $3^x = 81$ em $\Re$.

   Usa-se a propriedade das potências, transforma-se o 1º e 2º membros da equação em potências de mesma base:

   Veja que $81 = 3^4$, assim:

   $$3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$$

   Logo $S = \{4\}$.

2. Obtenha a solução da equação $\sqrt[4]{2^{x-1}} = 8$.

   Usa-se a propriedade das potências, transforma-se o 1º e 2º membros da equação em potências de mesma base:

   Veja que $\sqrt[4]{2^{x-1}} = 2^{\frac{x-1}{4}}$ e que $8 = 2^3$, Assim:

   $$2^{\frac{x-1}{4}} = 2^3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x - 1 = 3 \cdot 4 \Leftrightarrow x - 1 = 12 \Leftrightarrow x = 12 + 1 \Leftrightarrow x = 13$$

Logo $S = \{13\}$.

3. Resolva a equação $10^x = 1$

   Veja que $10^0 = 1$, assim:

   $10^x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0$
   Logo $S = \{0\}$.

4. Resolver a equação $2^x + 2^{x+1} - 3.2^{x-1} = 6$.
   Solução:
   Como:

   - $2^{x+1} = 2^x.2^1 = 2.2^x$ e
   - $2^{x-1} = 2^x.2^{-1} = \frac{1}{2}.2^x$, temos a equação

   $2^x + 2.2^x - 3.\frac{1}{2}.2^x = 6$
   Fazemos $2^x = y$ e resolvemos a equação obtida em y:
   $y + 2y - \frac{3}{2}y = 6$ --→ **multiplicando** ambos os lados da igualdade por 2, temos uma equação equivalente
   $2y + 4y - 3y = 12$
   $3y = 12$
   $y = \frac{12}{3}$
   $y = 4$
   Finalmente calculamos x:
   $2^x = y \Longleftrightarrow 2^x = 4 \Longleftrightarrow 2^x = 2^2 \Longleftrightarrow x = 2$
   Logo $S = \{2\}$.

5. Ache a solução de $9^x - 12.3^x + 27 = 0$ em $\Re$.

   Usando as propriedades da potenciação, faz-se uma transformação na equação dada:

   $9^x - 12.3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^2)^x - 12.3^x + 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 12.3^x + 27 = 0$

   Fazendo $3^x = y$, temos uma equação na variável y:

   $y^2 - 12y + 27 = 0$

   Resolvendo a equação, temos $y = 3$ ou $y = 9$.

   Voltando à igualdade $3^x = y$, obtemos:

   $3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$ ou

   $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

   Logo $S = \{1, 2\}$.

16.6 Inequações Exponenciais

Denomina-se *inequações exponenciais* as sentenças $a^x > b$, $a^x < b$, $a^x \geq b$, $a^x \leq b$ onde a e b são números reais conhecidos ($a > 0$ e $a \neq 1$) e x é a incógnita.
A resolução destas inequações e, em geral, de inequações do tipo:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a^{f(x)} \geq a^{g(x)},\ a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$$

baseia-se na propriedade do crescimento e decrescimento da função exponencial. Lembramos que:

Caso $a > 1$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$

Caso $0 < a < 1$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) < g(x)$

Exemplos:

1. Resolver a inequação $4^x > \frac{1}{2}$.
   Solução:
   Vamos expressar os membros como potências de mesma base, assim:
   $4^x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow (2^2)^x > 2^{-1} \Longleftrightarrow 2^{2x} > 2^{-1} \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ --→ conserva-se o sinal da desigualdade pois a base é $2 > 1$.

2. Resolver a inequação $(\frac{1}{2})^{x^2+2} \geq (\frac{1}{2})^{3x}$.
   Solução:
   Temos:
   $(\frac{1}{2})^{x^2+2} \geq (\frac{1}{2})^{3x} \Longleftrightarrow x^2 + 2 \leq 3x$ --→ inverteu-se o sinal da desigualdade, pois a base $\frac{1}{2} < 1$
   Assim:
   $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Longleftrightarrow 1 \leq x \leq 2$
   $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 2\}$.

3. Estabelecer o domínio da função $f(x) = \sqrt{3^x - 1}$. *Solução:*
   Para existir $f(x)$ em $\mathbb{R}$ devemos ter $3^x - 1 \geq 0$. Assim:
   $3^x - 1 \geq \Longleftrightarrow 3^x \geq 1 \Longleftrightarrow 3^x \geq 3^0 \Longleftrightarrow x \geq 0$
   Logo, o domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

16.7 A Constante de Euler e

Considere a expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ e, com o auxílio de uma calculadora científica, atribua valores inteiros a **n**. Verificaremos que à medida que o valor de **n** aumenta, a expressão se aproxima do número $2,718....$ Esse número é identificado pela letra **e** e chamado de **constante de Euler**.
Façamos os cálculos variando os valores de n utilizando 5 casas decimais:

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828

Assim, $e \cong 2,71828$

16.8 Aplicações: Crescimento e Decrescimento Exponencial

As funções exponenciais servem para modelar crescimento ou decrescimento populacionais. O modelo matemático que deu origem a função exponencial é conhecido como modelo de crescimento exponencial. De modo geral, se tivermos uma grandeza com valor inicial P_0 e que cresça a uma taxa igual a k por unidade de tempo, então, após um tempo t, medido na mesma unidade de k, o valor dessa grandeza P será dado por:

$$P(t) = P_0.(1 + k)^t$$

Exemplos:

1. **(Matemática Financeira)** Um empresário ficou devendo $R\$600,00$ a um banco que cobra juros compostos, a uma taxa de 16% a.m. durante 12 meses. Qual foi o montante devido no final desse

período?
$P_0 = 600,00$
$k = 16\% = 0,16$a.m.
$t = 12$meses
$P =???$
$P(12) = 600.(1,20)^{12} = R\$3561,62$

2. **(Crescimento Populacional)** O número de habitantes da cidade de Rio Grande é hoje igual a 196.000 e está crescendo a uma taxa de 5% ao ano. Qual o número de habitantes daqui a 8 anos?
$P_0 = 196000$
$k = 5\%$a.a.
$t = 8$anos
$P =?$
$P(8) = 196000.(1,05)^8 = 289581$ hab.

16.9 Exercícios Resolvidos

1. Esboce o gráfico das funções $f: \Re \to \Re_+^*$:

   (a) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

   (b) $g(x) = 3^x$
   . Os dois itens acima estão num mesmo gráfico:

   (c) $h(x) = 2^{x+1}$
   Note que o gráfico está deslocado 1 unidade para esquerda.

2. Analise se as funções exponenciais são crescentes ou decrescentes:

   (a) $f(x) = 5^x$
   Como a base é $5 > 1$ a função é crescente.

   (b) $f(x) = 2^{-x}$
   Note que $2^{-x} = (2^{-1})^x = (\frac{1}{2})^x$, assim como a base é $0 < \frac{1}{2} < 1$ a função é decrescente.

   (c) $F(x) = (\sqrt{2})^x$
   Veja que a base $\sqrt{2} > 1$, a função é crescente.

3. Esboce num mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x + 3$ e verifique quantas soluções tem a equação $2^x = x + 3$
   Esboçando em um mesmo plano as funções podemos notar que seus gráficos se interseccionam em dois pontos:

4. Resolva as seguintes equações em $\Re$:

   (a) $4^x = 64$
   Igualando à mesma base, temos:
   $4^x = 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

   (b) $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{32}$
   Igualando à mesma base, temos:
   $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-5} \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$

   (c) $2^{x+1} = 1$
   Igualando à mesma base, temos:
   $2^{x+1} = 1 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

   (d) $\sqrt[3]{3^{x-5}} = 27$
   Igualando à mesma base, temos:
   $\sqrt[3]{3^{x-5}} = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x-5}{3}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} = 3 \Leftrightarrow x - 5 = 9 \Leftrightarrow x = 14$

   (e) $3^x = 1$
   Igualando à mesma base, temos:
   $3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$

5. Resolva as equações em $\Re$:

   (a) $4^x - 6.2^x + 8 = 0$
   Usando as propriedades da potenciação, faz-se uma transformação na equação dada:
   $4^x - 6.2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 6.2^x + 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 6.2^x + 8 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos uma equação na variável y:
$y^2 - 6y + 8 = 0$
Resolvendo a equação, temos $y = 2$ ou $y = 4$.
Voltando à igualdade $2^x = y$, obtemos:
$2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$ ou
$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
Logo $S = \{1, 2\}$.

(b) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$

Solução:
Como:

- $4^{x+1} = 4^x.4^1 = 4.4^x$ e
- $4^{x-1} = 4^x.4^{-1} = \frac{1}{4}.4^x$, temos a equação

$4.4^x - \frac{1}{4}.4^x = 60$
Fazemos $4^x = y$ e resolvemos a equação obtida em y:
$4y - \frac{1}{4}y = 60$ --→ **multiplicando** ambos os lados da igualdade por 4, temos uma equação equivalente
$16y - y = 240$
$15y = 240$
$y = \frac{240}{15}$
$y = 16$
Finalmente calculamos x:
$4^x = y \Longleftrightarrow 4^x = 16 \Longleftrightarrow 4^x = 4^2 \Longleftrightarrow x = 2$
Logo $S = \{2\}$.

6. Considere a função $f(x) = e^x$, onde **e** é a constante de Euler.

(a) A função é crescente ou decrescente?
Como a base $e \cong 2,71828 > 0$, a função exponencial é crescente.

(b) Qual o domínio e a imagem da função?
O domínio de uma função exponencial são todos os números reais.

(c) Esboce o gráfico de $f(x)$.

7. Determinada população de bactérias cresce exponencialmente, com o tempo, obedecendo a uma equação do tipo:

$$N = 40000.e^{0,20.t},$$

onde t é o tempo em minutos. Pergunta-se:

(a) Qual é o número inicial de bactérias?
Note que o número inicial de bactérias acontece quando $t = 0$, isto é, quando o tempo é zero, assim,
$N(0) = 40000.e^{0,20.(0)} = 40000.e^0 = 40000.1 = 40000$

(b) Qual será o número aproximado de bactérias após 5 minutos?
$N(5) = 40000.e^{0,20.(5)} = 40000.e^1 \cong 40000 \cdot 2,71828 \cong 108731$

Capítulo 17

Função Logarítmica

17.1 Introdução aos Logaritmos

Todos conhecemos as quatro operações fundamentais: a adição, multiplicação e, respectivamente, suas inversas, a subtração e a divisão. Além delas, há uma quinta operação: a *potenciação*, que se origina do produto de fatores iguais:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.....a}_{n\ fatores}$$

Esta quinta operação tem duas inversas, assim consideradas:

1ª) Para a potenciação $a^b = c$, se quisermos descobrir o valor de a, precisamos realizar uma sexta operação matemática denominada *radiciação*. Por exemplo:
$a^4 = 81$
$a = \sqrt[4]{81}$ --→
aqui está a radiciação $a = 3$

2ª) Para a potenciação $a^b = c$, aqui também chamada de *exponencial*, se quisermos descobrir o valor do expoente b, precisamos efetuar uma sétima operação chamada *logaritmação*. Por exemplo, como descobrir x, tal que $3^x = 5$?

17.2 Definição

Podemos dizer que, em: $2^3 = 8$, 3 é o **logaritmo** de 8 na base 2, ou ainda, o logaritmo de 8 na base 2 é igual a 3, que pode ser escrito na forma abreviada:

$$\log_2 8 = 3$$

Veja outros casos:

- $5^3 = 125 \Longleftrightarrow \log_5 125 = 3$
- $3^4 = 81 \Longleftrightarrow \log_3 81 = 4$
- $10^{0,3010} = 2 \Longleftrightarrow \log_{10} 2 = 0,3010$

De um modo geral, sendo a e b números reais positivos ($b \neq 1$), chamamos de logaritmo de a na base b o expoente real x ao qual se eleva b para obter a. Simbolicamente:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a; \text{ com } a > 0,\ b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

onde:
a é o logaritmando;
b é a base;
x é o logaritmo de a na base b.

Exemplos:

a) $\log_2 8 = 3$; pois $2^3 = 8$

b) $\log_{10} 100 = 2$; pois $10^2 = 100$

17.3 Bases Especiais

- Quando a base é 10, por convenção, omitimos a base, ou seja, $\log_{10} x = \log x$;
- Quando a base é e (constante de Euler), chamamos o logaritmo de natural e indicamos por $\log_e x = \ln x$.

Exemplos:
Calcule os valores de x para que existam os logaritmos:

1. $\log(x-3)$

   Como no logaritmo não está especificado a base, por convenção, a base é 10 e pela definição de logaritmos, o logaritmando deve ser maior do que 0, assim:

   $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

2. $\ln(-x^2+9)$

   Nesse caso a base do logaritmo é o número e (constante de Euler) e o logaritmando deve ser maior do que 0, assim:

   Chamando o logaritmando de $g(x)$, temos $g(x) = -x^2 + 9$ e fazendo o estudo do sinal da função $g(x)$ temos: $-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow -x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3$ ou $x = -3$ e seu esboço gráfico é:

Como $g(x) > 0$, os valores de x que satisfaz a inequação $-x^2 + 9 > 0$ estão no intervalo $]-3, 3[$ ou $\{x \in \Re \mid -3 < x < 3\}$

17.4 Consequências da Definição

Da definição e das condições de existência do logaritmo, conclui-se:

1. $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$
2. $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$
3. $\log_b b^m = m$, pois $b^m = b^m$
4. $b^{\log_b a} = a$, pois, sendo $\log_b a = x$, $b^x = a$

Exemplo:
Calcule, aplicando a definição de logaritmos:

a) $\log_3 27$

$\log_3 27 = 3$, pois $27 = 3^3$

b) $\log 10$

$\log 10 = 1$, pois $10 = 10^1$

c) $\ln 1$

$\ln 1 = 0$, pois $1 = e^0$

d) $10^{\log 5}$

$10^{\log 5} = 5$, pois sendo $\log_{10} 5 = x \Leftrightarrow 10^x = 5$, isto é, $10^{\log_{10} 5} = 5$

17.5 Propriedades Operatórias dos Logaritmos

A partir da definição pode-se demonstrar 4 propriedades operatórias que facilitam as operações que envolvem logaritmos:

1. $\log_b a.c = \log_b a + \log_b c$
2. $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$
3. $\log_b a^m = m.\log_b a$
4. $\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n}.log_b a$

Exemplo:
Sabendo que $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,47$ e $\log 5 = 0,7$, utilize as propriedade operatórias para calcular:

a) $\log 80$

Note que $80 = 2^4.5$, assim:

$\log 80 = \log(2^4.5) = \log 2^4 + \log 5 = 4.\log 2 + \log 5 = 4 \cdot 0,3 + 0,7 = 1,2 + 0,7 = 1,9$

b) $\log 12$

Note que $12 = 2^2.3$, assim:

$\log 12 = \log(2^2.3) = \log 2^2 + \log 3 = 2.\log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0,3 + 0,47 = 0,6 + 0,47 = 1,07$

c) $\log 2,5$

Note $2,5 = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5^2}{10}$, assim:

$\log 2,5 = \log(\frac{5^2}{10}) = \log 5^2 - \log 10 = 2.\log 5 - \log 10 = 2 \cdot 0,7 - 1 = 1,4 - 1 = 0,4$

Outra maneira:

$\log 2,5 = \log(\frac{5^2}{10}) = \log(\frac{5^2}{2.5}) \log 5^2 - (\log 2 + \log 5) = 2.\log 5 - (\log 2 + \log 5) = 2 \cdot 0,7 - (0,3 + 0,7) = 1,4 - 1 = 0,4$

d) $\log \sqrt{10}$

Note que $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, assim:

$\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\log 10 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2} = 0,5$

Outra maneira:

$\log \sqrt{10} = \log \sqrt{2 \cdot 5} = \log(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) = \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 + \frac{1}{2} \cdot \log 5 = \frac{1}{2} \cdot 0,3 + \frac{1}{2} \cdot 0,7 = 0,15 + 0,35 = 0,5$

17.6 Função Logarítmica

17.6.1 Definição:

Chamamos de *Função Logarítmica* de base a $(1 \neq a > 0)$ a função que associa cada elemento x positivo o seu logaritmo nessa base. Assim, temos:

$$f : \Re_+^* \to \Re \text{ definida por:}$$
$$f(x) = log_a x, \text{ com } 1 \neq a > 0$$

Observações

1) A função logarítmica é a inversa da função exponencial.

2) As bases das funções logarítmicas mais utilizadas são **10** e **e=2,718...**.

3) Quando a base é 10 a função fica apenas $f : \Re_+^* \to \Re$ definida por: $f(x) = \log x$.

4) Quando a base é **e** a função fica $f : \Re_+^* \to \Re$ definida por: $f(x) = \ln x$.

17.6.2 Gráficos:

Vamos analisar quanto ao crescimento apenas duas funções logarítmicas, quando $a > 1$.

Função crescente	**Função crescente**
$f(x) = \log_e x = \ln x$ se $x_1 > x_2$ então $\ln x_1 > \ln x_2$ Ex.: $f(x) = \ln x$	$f(x) = \log_{10} x = \log x$ se $x_1 > x_2$ então $\log x_1 > \log x_2$ Ex.: $f(x) = \log x$

- Note que a função logarítmica com a base maior do que 1 é sempre crescente, mas com um crescimento moderado, isto é, enquanto os valor de x cresce muito, o valor de y cresce de forma moderada.

Exemplo:
Determine o domínio de validade para que exista uma função com a seguinte lei de formação: $f(x) = \log(x - 5)$.

Devemos ter $x - 5 > 0$, assim $x > 5$ e a função poderá ser definida:

$$f :]5, +\infty[\to \Re \text{ definida por: } f(x) = \log(x - 5)$$

17.7 Exercícios Resolvidos

1. Determine o valor de x para que existam os logaritmos:

   (a) $\log_3(4x - 1)$
   Note a condição de existência dos logaritmos, onde: $a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$
   $4x - 1 > 0 \Leftrightarrow 4x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$,
   logo $S = \{x \in \Re | x > \frac{1}{4}\}$

(b) $\log_{2x}(x+1)$
Note a condição de existência dos logaritmos, onde: $a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1$
$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ e
$2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e
$2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$,
logo $S = \{x \in \Re | x > 0\ e\ x \neq \frac{1}{2}\}$

2. Calcule, aplicando a definição de logaritmos:

(a) $\log_9 \frac{1}{9} = -1$, pois:
$\log_9 \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9^x = 9^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

(b) $\log 1000 = 3$, pois:
$\log 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow 10^x = 10^3 \Leftrightarrow x = 3$

(c) $\ln e^5 = 5$, pois:
$\ln e^5 = x \Leftrightarrow e^x = e^5 \Leftrightarrow x = 5$

(d) $\log_3 3 = 1$, pois:
$\log_3 3 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$

(e) $e^{\ln 5} = 5$, pois:
sendo $\ln 5 = x \Leftrightarrow e^x = 5$, isto é, $e^{\ln 5} = 5$

(f) $3^{\log_3 16} = 16$, pois:
sendo $\log_3 16 = x \Leftrightarrow 3^x = 16$, isto é, $3^{\log_3 16} = 16$

3. Determine as bases dos logaritmos:

(a) $\log_x 16 = 2$
Usando a definição de logaritmos, temos:
$\log_x 16 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.
Mas como não se pode ter uma base negativa a solução é $S = \{4\}$.

(b) $\log_x 5 = -1$
Usando a definição de logaritmos, temos:
$\log_x 5 = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

4. Sendo $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ e $\log 5 = c$ calcule, em função de **a** e **b**:

(a) $\log 54$
Note que: $54 = 2 \cdot 3^3$, assim:
$\log 54 = \log(2 \cdot 3^3) = \log 2 + \log 3^3 = \log 2 + 3.\log 3 = a + 3b$

(b) $\log 150$
Note que: $150 = 2.3.5^2$, assim:
$\log 150 = \log(2.3.5^2) = \log 2 + \log 3 + \log 5^2 = \log 2 + \log 3 + 2.\log 5 = a + b + 2c$

(c) $\log \sqrt[3]{12}$
Note que: $\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{3} = 2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}$, assim:
$\log \sqrt[3]{12} = \log(2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}) = \log 2^{\frac{2}{3}} + \log 3^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$

5. Construa o gráfico da função $f : \Re_+^* \to \Re$: $f(x) = \ln x$, onde $\ln x = \log_e x$.

6. Determine o domínio de validade para que exista a função com a seguinte lei de formação $f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$
Sendo a base $b = 10$ o domínio de $f(x)$ se resume a encontrar os valores tal que $x^2 - 4x + 3 > 0$:
$x^2 - 4x + 3 > 0$ cujas raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ e o esboço do gráfico fica:

logo $D = \{x \in \Re | x < 1 \ ou \ x > 3\}$

Capítulo 18

Trigonometria

18.1 Estudo do Triângulo Retângulo

Considere o seguinte triângulo ABC, retângulo em A:

- os ângulos $\hat{A},\ \hat{B},\ \hat{C}$ são internos e $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$ ($\hat{A}=90^o$);
- o lado $\overline{BC}$ é a ***hipotenusa*** (lado oposto ao ângulo reto);
- os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os ***catetos***.

As medidas desses segmentos são representadas por letras minúsculas:
$\overline{BC}=a$
$\overline{AC}=b$
$\overline{AB}=c$

Existe uma relação métrica entre essas medidas conhecida como **Teorema de Pitágoras** que diz:
"Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos"

$$a^2=b^2+c^2$$

Exemplos:

1. Calcule a diagonal de um retângulo de lados 3 cm e 4 cm.

   Solução:

   Considerando o retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB}=3$ e $\overline{BC}=4$, temos que o segmento $\overline{AC}=d$ é sua diagonal.

Note que a diagonal $\overline{AC}$ divide o retângulo $ABCD$ em dois triângulos retângulos cuja hipotenusa é d e os catetos são 3 e 4. Assim, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor de d:

$$\begin{gathered} d^2 = 3^2 + 4^2 \\ d^2 = 9 + 16 \\ d^2 = 25 \\ d = \sqrt{25} = 5 \end{gathered}$$

2. Encontre:

   (a) o valor de x.

Solução:
Utilizando o teorema de Pitágoras, temos que os valores x e 6 são os catetos e 10 é a hipotenusa. Assim:
$x^2 + 6^2 = 10^2$
$x^2 = 10^2 - 6^2$
$x^2 = 100 - 36$
$x^2 = 64$
$x = 8$

   (b) o valor de y.

Utilizando o teorema de Pitágoras, temos que os valores 3 e 6 são os catetos e y é a hipotenusa. Assim:
$3^2 + 6^2 = y^2$
$y^2 = 9 + 36$

$y^2 = 45$
$y = \sqrt{45}$
$y = 3\sqrt{5}$

3. Um triângulo retângulo e isósceles tem catetos que medem 6 cm. Calcule a medida da hipotenusa.
Solução:

$a^2 = 6^2 + 6^2$
$a^2 = 36 + 36$
$a = \sqrt{72}$

4. Calcule o perímetro de um retângulo, sabendo que sua diagonal mede 18 cm e um dos lados mede 10 cm.
Solução:

$18^2 = 10^2 + x^2$
$18^2 - 10^2 = x^2$
$324 - 100 = x^2$
$x^2 = 224$
$x = \sqrt{224}$
O perímetro é:
P$=10 + 10 + \sqrt{224} + \sqrt{224} = 20 + 2\sqrt{224}$

18.2 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Podemos estabelecer entre os catetos e a hipotenusa as seguintes razões trigonométricas:

- **SENO de um ângulo agudo:** razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

  sen $\widehat{B} = \dfrac{b}{a}$ e sen $\widehat{C} = \dfrac{c}{a}$

- **COSSENO de um ângulo agudo:** razão entre o cateto adjacente (próximo) ao ângulo e a hipotenusa.

  $\cos\widehat{B} = \dfrac{c}{a}$ e $\cos\widehat{C} = \dfrac{b}{a}$

- **TANGENTE de um ângulo agudo:** razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

  $\tan \widehat{B} = \dfrac{b}{c}$ e $\tan \widehat{C} = \dfrac{c}{b}$

- **Observação:** Existe uma relação importante entre tangente, seno e cosseno de um ângulo.

  Vamos chamar o cateto oposto ao ângulo de CO, o cateto adjacente de CA e a hipotenusa de H.

  Note que $\tan \alpha = \dfrac{CO}{CA}$ e veja que: $\dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{CO}{H}}{\frac{CA}{H}} = \dfrac{CO}{H} \cdot \dfrac{H}{CA} = \dfrac{CO}{CA}$.

  Logo:

  $\tan \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$

Exemplos:

1. Calcule o *seno*, o *cosseno* e a *tangente* do ângulo $\widehat{B}$.

   Solução:

   Primeiramente devemos encontrar o cateto oposto ao ângulo B. Para isso, utilizamos o Teorema de Pitágoras:

   $(\overline{AC})^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow (\overline{AC})^2 = 100 - 64 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{36} = 6$

   Assim:

   $\text{sen } \widehat{B} = \dfrac{CO}{H} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

   $\cos \widehat{B} = \dfrac{CA}{H} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

   $\tan \widehat{B} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

2. Uma escada de 10 m é apoiada em um muro, formando com o chão um ângulo de 30º. Calcule a altura do muro sabendo que sen $30^o = 0,5$.

   Solução:

   Fazendo um esboço do problema, temos um triângulo retângulo:

   Assim, a altura do muro é o cateto oposto ao ângulo de 30° e a escada é a hipotenusa, logo:

   $\text{sen } 30° = \dfrac{h}{10} = 0,5$

   $h = 10 \cdot 0,5 = 5\ m$

18.3 Ângulos Notáveis

18.3.1 As Razões Trigonométricas de 30º, 45º e 60º

Considere as figuras:

quadrado de lado l e diagonal $l\sqrt{2}$

triangulo equilátero de lado l e altura $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Através dessas figuras vamos estudar as razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

Seno, Cosseno e Tangente de 30º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30º, temos:

$$\text{sen } 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^o = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 2}{2\cdot\cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 45º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 45º, temos:

$$\text{sen } 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 1}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 45^o = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}\cdot 1}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 30^o = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

Seno, Cosseno e Tangente de 60º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 60º, temos:

$$\text{sen } 60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60^o = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60^o = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

Os ângulos de 30º, 45º *e* 60º são chamados de **ângulos notáveis** pois aparecem muito no estudo (aprendizado) da Trigonometria. Todos os ângulos (assim como os números) são importantes, mas estes aparecerão com muita frequência em nossos estudos.

Resumindo:

x	sen x	cos x	tg x
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exemplos:

1. Uma pessoa está a 30 m de um edifício e vê o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de 60º. Sem levar em conta a altura do observador, calcule a altura do edifício.
Solução:

O prédio forma com o solo um ângulo reto. Então, o ΔOAS é retângulo em **S**, e OS=30 m e **h** são catetos. Daí:
$\tan\ 60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30\sqrt{3}\ m$
Logo, a altura do edifício é de $30\sqrt{3}\ m$.

2. Um botânico interessado em descobrir qual o comprimento da copa de uma árvore fez as observações indicadas na figura abaixo a partir de um ponto no solo. Calcule o comprimento (H), em metros, dessa copa.

Solução: Observe o esquema:

Destacamos os dois triângulos retângulos a seguir:
Aplicamos a tangente de 45º, pois x é o cateto oposto e 10 m é a medida do cateto adjacente.

$\tan\ 45° = \frac{x}{10}$ e como $\tan\ 45° = 1$, temos: $1 = \frac{x}{10}$, logo $x = 10$

A medida do tronco da árvore é 10 m. Aplicamos a tangente de 60º, pois y é o cateto oposto e a medida 10 m é o cateto adjacente.

tan $60° = \frac{y}{10}$ e como tan $60° = \sqrt{3}$, temos: $\sqrt{3} = \frac{y}{10}$, logo $y = 10\sqrt{3}$

Substituindo x e y na relação H + x = y , temos:
H+10 = $10\sqrt{3}$
H= $10\sqrt{3} - 10$
Colocando o fator comum 10 em evidência, temos:
H= $10 \cdot (\sqrt{3} - 1)$
Portanto o comprimento da copa da árvore é $10 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ metros.

18.4 Arcos e Ângulos

18.4.1 Arcos de Circunferência

Numa circunferência de centro em O, consideramos dois pontos, A e B.

O ângulo formado pelos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, com vértice no centro é chamado de **ângulo central** (AB). Tal ângulo determina na circunferência dois arcos de circunferência.

Se $A \equiv B$, temos um arco nulo e outro arco de uma volta.

18.4.2 Medida de um Arco

- **Grau (º):** é o arco unitário (1º) equivalente a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Observação: Uma circunferência completa tem 360°.

Um grau pode ser dividido em 60 partes iguais. Cada parte é chamada de *minuto*.

$$1^o = 60'$$

Um minuto pode ser dividido em 60 partes iguais. Cada parte é chamada de *segundo*.

$$1' = 60"$$

- **Radiano (rd):** é o arco cujo o comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.

18.4.3 Conversão de Unidades de Medidas de Ângulos

Podemos afirmar que:

- O comprimento do arco $\widehat{AB}$ é igual a 1 r e sua medida em radianos é de 1 rd;
- Sabemos da geometria que $C = 2.\pi.r$ (comprimento da circunferência);
- Se o comprimento da circunferência é $C = 2.\pi.r$, então a medida (em radianos) da circunferência é de $2.\pi$ rd

Logo, como uma circunferência tem 360°, corresponde em radianos a 2π rd ou:

$$180^\circ \longmapsto \pi\ rd$$

Exemplos:

1. Determine em radianos, a medida do arco de 60°.

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \longmapsto & \pi\ rd \\ 60^\circ & \longmapsto & xrd \end{array}$$

Assim, temos a seguinte proporção:

$$\frac{180}{60} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{60}\pi}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{3} rd$$

2. Calcule, em graus, a medida do arco $\frac{3\pi}{4}$ rd.

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longmapsto & \pi\ rd \\ x & \longmapsto & \frac{3\pi}{4}\ rd \end{array}$$

Resolvendo a proporção, temos:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{3\cancel{\pi}}{4}}{\cancel{\pi}} = \frac{540}{4} = 135^\circ$$

18.4.4 Ciclo Trigonométrico

É uma circunferência orientada de raio unitário ($r = 1$), com centro na origem de um sistema cartesiano (eixo xy). Adota-se o sentido **anti- horário** como o sentido positivo de orientações dos arcos, sendo a origem dos arcos em A.

Exemplo: Marcar no ciclo trigonométrico um arco de 30° e outro de -30°

18.4.5 Quadrante

É cada uma das quatro partes que o ciclo trigonométrico fica dividido pelos eixos do sistema cartesiano.

18.4.6 Arcos Côngruos

Na trigonometria podemos ter arcos de medida maior que 1 volta, ou seja, maior do que $360°$. Arcos côngruos são aqueles que possuem a mesma origem e a mesma extremidade. Essa extremidade quando $0° < \alpha < 360°$ (em graus) ou $0 < \alpha < 2\pi$ (em radianos) é chamada de **primeira determinação positiva** do arco, que chamaremos de a_0 e k o número de voltas. Daí temos a expressão de um arco:

$$a = a_0 + k.360° \quad k \in Z \text{ ou}$$
$$a = a_0 + 2.k.\pi \quad k \in Z$$

Dois arcos são **côngruos** quando a diferença entre eles é um múltiplo de 360° ou 2π rd.

Exemplos:

1. 30° e 1110° são côngruos, pois: $1110° = 30° + 3 \cdot 360°$.

2. Determine a extremidade, o quadrante e a expressão dos seguintes arcos:

   (a) 420°
   Para encontramos o arco de 420° é necessário que a partir do ponto A, percorrer 1 volta (360°) e mais (60°) no sentido anti-horário.
   Assim, os arcos de 60° e 420° são côngruos, pois possuem a mesma origem e a mesma extremidade.
   Na prática, fazemos:
   $420° \div 360° = 1$ e restam 60° , significa que foi dada 1 volta completa e o ponto está na extremidade de arco 60° , portanto no 1° quadrante.

   (b) 840°
   Pelo modo prático temos:
   $840° \div 360° = 2$ e restam 120°, tem 2 voltas completas e o ponto na extremidade de arco 120°, portanto está no 2° quadrante.

   (c) −1110°
   Pelo modo prático temos:
   $1110° \div 360° = 3$ no sentido horário por que 1110 é negativo, e restam 30°, tem 3 voltas completas e o ponto na extremidade de arco −30°, portanto está no 4° quadrante.

(d) $\frac{17\pi}{4}\ rd$

$\frac{17\pi}{4}\ rd = \dfrac{17.180°}{4} = \dfrac{3060}{4} = 765°$

$765° \div 360° = 2$ e restam $45°$, logo $\dfrac{17\pi}{4}\ rd$ pertence ao $1°$ quadrante.

18.5 Funções Trigonométricas

Ampliaremos nosso estudo das razões trigonométricas para ângulos (arcos) maiores do que 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rd .

18.5.1 A Função Seno

Seno de um Ângulo

Consideremos o ciclo trigonométrico, no qual marcamos o ponto P, que é imagem do número real x (ângulo central):

P' é a projeção de P no eixo y.

Definimos como **seno do ângulo** x a ordenada do ponto P e indicamos:

$$\text{sen } x = \overline{OP'}$$

Valores importantes de sen x

x	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Exemplos:

1. Calcular sen 450°.
   Resolução: Vamos determinar a 1ª determinação positiva:
   Note que $450° = 90° + 1 \cdot 360°$
   Então sen $450°$ = sen $90° = 1$

2. Calcular sen $\frac{19\pi}{3}$.
   Resolução: Vamos determinar a 1ª determinação positiva:
   Note que $\dfrac{19\pi}{3} = \dfrac{19 \cdot 180°}{3} = \dfrac{3420°}{3} = 1140°$ e que $1140° = 60° + 3 \cdot 360°$.
   Então sen $\frac{19\pi}{3}$ = sen $60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18.5.2 Função Seno

Definição: Chamamos de *função seno* a função que, a cada número real x, associa o seno desse número

$$f : \Re \to \Re,\ f(x) = \text{sen } x$$

Domínio: (*valores de* x) $D(f) = \Re$

Imagem: (*valores de* y *ou* $f(x)$) $Im(f) = [-1, 1]$ ou $\{x \in \Re | -1 \leq x \leq 1\}$

Gráfico: Para construir o gráfico da **Função Seno**, devemos localizar inicialmente, no ciclo trigonométrico, os ângulos e determinar o valor de seu seno. A variação da função sen x, com x variando no intervalo $]0, \infty[$, isto é, o ponto P parte do 0 e se movimenta sobre o ciclo no sentido anti-horário.

O gráfico da função seno é chamado de **senoide** e continua *à direita* de 2π e *à esquerda* de 0 (zero).

Sinal e Variação da Função Seno

Quadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
Arco	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
Sinal	$+$	$+$	$-$	$-$
Variação	$0 \to +1$	$+1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
Crescimento	crescente	decrescente	decrescente	crescente

Pela observação do gráfico, podemos concluir que:

- o domínio da função sen x é o conjunto dos números reais, isto é, $D = \Re$.
- a imagem da função sen x é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq$ sen $x \leq 1$.

- a partir de 2π a função seno repete seus valores, portanto é uma função periódica.
- Observe que, a partir de um determinado valor de x, cada vez que somamos 2π, a função seno assume sempre o mesmo valor; portanto, o período da função seno é $p = 2\pi$. Note também que:
  - Se sen $x = \overline{OP'}$,
  - sen $(x + 2\pi) = \overline{OP'}$
  - sen $(x + 4\pi) = \overline{OP'}$
  - sen $(x + k\pi) = \overline{OP'} \quad k \in \mathbb{Z}$

  Quando somamos $2k\pi$ ao arco x, estamos obtendo o mesmo valor para o seno $(\overline{OP'})$, portanto a função seno é periódica e o seu período é 2π, isto é:
  sen $x =$ sen $(x + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

Exemplos:

1. Construir o gráfico da função real $y = 1 + \text{sen } x$, explicitando seu domínio, a imagem e a periodicidade.
   Resolução: Tabelando a função, temos:

x	sen x	$1 + \text{sen } x$	y
0	0	$1+0$	1
$\frac{\pi}{2}$	1	$1+1$	2
π	0	$1+0$	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$1 + (-1)$	0
2π	0	$1+0$	1

   Gráfico:

   Observando o gráfico, temos: $D = \Re$; $Im = [0, 2]$; $p = 2\pi$.

2. Construir o gráfico da função real $y = \text{sen } 2x$, explicitando seu domínio, a imagem e a periodicidade.
   Resolução: Tabelando a função, temos:

x	$2x$	sen $2x$	y
0	0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-1
π	2π	0	0

   Gráfico:

   Observando o gráfico, temos: $D = \Re$; $Im = [-1, 1]$; $p = \pi$.

18.5.3 A Função Cosseno

Cosseno de um Ângulo

Marcando o ponto P no ciclo trigonométrico, que é imagem do número real x, definimos como **cosseno do ângulo** x a abscissa do ponto P e indicamos:

$$\cos x = \overline{OP''}$$

P'' é a projeção de P no eixo x.

Valores importantes de $\cos x$

x	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

18.5.4 Função Cosseno

Definição: Chamamos de *função cosseno* a função que, a cada número real x, associa o cosseno desse número:

$$f : \Re \to \Re,\ f(x) = \cos x$$

Domínio: (*valores de* x) $D(f) = \Re$

Imagem: (*valores de* y *ou* $f(x)$) $Im(f) = [-1, 1]$ ou $\{x \in \Re | -1 \leq x \leq 1\}$

Gráfico: Para construir o gráfico da **Função Cosseno**, devemos localizar inicialmente, no ciclo trigonométrico, os ângulos e determinar o valor de seu cosseno:

O gráfico da função cosseno é chamado de **cossenoide** e continua *à direita* de 2π e *à esquerda* de 0 (zero).

Sinal e Variação da Função Cosseno

Quadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
Arco	$0 \to \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$
Sinal	$+$	$-$	$-$	$+$
Variação	$+1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to +1$
Crescimento	decrescente	decrescente	crescente	crescente

Pela observação do gráfico, podemos concluir que:

- o domínio da função $\cos x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D = \Re$.
- a imagem da função $\cos x$ é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- a partir de 2π a função cosseno repete seus valores, portanto é uma função periódica.
- Observe que, a partir de um determinado valor de x, cada vez que somamos 2π, a função cosseno assume sempre o mesmo valor; portanto, o período da função cosseno é $p = 2\pi$. Note também que:

  * Se $\cos x = \overline{OP''}$,
  * $\cos(x + 2\pi) = \overline{OP''}$
  * $\cos(x + k\pi) = \overline{OP''} \quad k \in \mathbb{Z}$

  Quando somamos $2k\pi$ ao arco x, estamos obtendo o mesmo valor para o cosseno ($\overline{OP''}$), portanto a função cosseno é periódica e o seu período é 2π, isto é, $\cos x = \cos(x + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

Exemplo:

Construir o gráfico da função real $y = \cos \frac{x}{2}$, explicitando seu domínio, a imagem e a periodicidade.
Resolução: Tabelando a função, temos:

x	$\frac{x}{2}$	$\cos \frac{x}{2}$	y
0	0	1	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
2π	π	-1	-1
3π	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
4π	2π	1	1

Gráfico:

Observando o gráfico, temos: $D = \Re$; $Im = [-1, 1]$; $p = 4\pi$.

18.5.5 Redução ao 1º Quadrante

Em um ciclo trigonométrico, se um arco tiver sua extremidade no 2º, 3º ou 4º quadrante, sempre existirá um arco com extremidade no 1º quadrante cujas funções trigonométricas terão, em módulo, o mesmo valor do arco considerado. Usando a simetria, podemos relacionar o seno e o cosseno de um arco de qualquer quadrante com os valores do primeiro quadrante. Desse modo, faremos uma redução ao 1º quadrante.

Redução do Segundo Quadrante para o Primeiro

sen $(180^o - x) =$ sen (x)
$\cos(180^o - x) = -\cos(x)$

Note que falta x para 180° ou π.
Do exposto, podemos dizer que:
Dois arcos suplementares x e $180^o - x$ têm: senos iguais e cossenos simétrico.

Redução do Terceiro Quadrante para o Primeiro

sen $(180^o + x) = -$sen (x)
$\cos(180^o + x) = -\cos(x)$

Os arcos x e $180^o + x$ têm: senos simétrico e cossenos simétrico.

Redução do Quarto Quadrante para o Primeiro

sen $(360^o - x) = -$sen (x)
$\cos(360^o - x) = \cos(x)$

Os arcos x e $360^o - x$ têm: senos simétrico e cossenos iguais.
Vale observar que $360^o - x$ e $-x$ são côngruos.
Das figuras também obtemos:
sen $(360^o - x) =$ sen $(-x) = -$sen (x)
$\cos(360^o - x) = \cos(-x) = \cos(x)$

Exemplos:

1. Calcule os valores de sen (210°) e $\cos(210^o)$
   Esse arco está no 3º quadrante e reduzindo ao 1º quadrante, temos:
   $210^o = 180^o + 30^o$, *logo a redução ao 1º quadrante será o ângulo de* 30°. *Assim,*
   sen $(210^o) = -$sen $(30^o) = -\frac{1}{2}$
   $\cos(210^o) = -\cos(30^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Determine sen $(\frac{8\pi}{3})$
   Calculando a 1^a *determinação positiva:*
   $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$
   Esse arco está no 2º quadrante e reduzindo ao 1° *quadrante, temos:*
   $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, *logo a redução ao 1º quadrante será o ângulo de* $\frac{\pi}{3}$. *Assim,*

   sen $(\frac{8\pi}{3}) =$ sen $(\frac{2\pi}{3}) =$ sen $(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Encontrar o seno e o cosseno de:

   (a) 120°
   Esse arco está no 2º quadrante e reduzindo ao 1° *quadrante, temos:*
   $180^\circ - 120^\circ = 60^o$ então,
   sen $(120^o) =$ sen $(60^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\cos(120^o) = -\cos(60^o) = -\dfrac{1}{2}$

   (b) 240°
   Esse arco está no 3º quadrante e reduzindo ao 1° *quadrante, temos:*
   $180^o + x = 240^o \Rightarrow x = 60^o$ então,

   sen $(240^o) = -$sen $(60^o) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\cos(240^o) = -\cos(60^o) = -\dfrac{1}{2}$

   (c) 300°
   Esse arco está no 4º quadrante e reduzindo ao 1° *quadrante, temos:*
   $360^o - 300^o = 60^o$ então,
   sen $(300^o) = -$sen $(60^o) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\cos(300^o) = \cos(60^o) = \dfrac{1}{2}$

   (d) 135°
   Esse arco está no 2º quadrante e reduzindo ao 1° *quadrante, temos:*
   $180^o - 135^o = 45^o$ então,
   sen $(135^o) =$ sen $(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   $\cos(135^o) = \cos(45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. Determine os sinais do seno e do cosseno de :

   (a) 75°
   sen (75°) está no 1^oq. então é $\{+\}$
   $\cos(75^o)$ está no 1^oq. então é $\{+\}$

   (b) -300°
   sen (-300°) está no 4^oq. então é $\{-\}$
   $\cos(-300^o)$ está no 4^oq. então é $\{+\}$

   (c) 225°
   sen (225°) está no 3^oq. então é $\{-\}$
   $\cos(225^o)$ está no 3^oq. então é $\{-\}$

   (d) 150°
   sen (150°) está no 2^oq. então é $\{+\}$
   $\cos(150^o)$ está no 2^oq. então é $\{-\}$

5. Encontre o valor da expressão $U = 2.\text{sen }(150^o) + 3.\text{sen }(270^o)$
   Solução:
   Vamos reduzir o seno de 150° ao primeiro quadrante:
   sen $(150^o) = 180^o - 150^o = 30^o = \dfrac{1}{2}$
   sen $(270^o) = -1$
   Agora como já temos os valores dos senos, agora colocaremos esses valores na função, então:
   $U = 2.\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3.(-1) \Rightarrow U = -2$

6. Encontre o valor da expressão $Z = 2.\cos(60^o) - 4.\text{sen }(30^o)$
   Solução:
   Vamos substituir os valores de indicados do cosseno e do seno e:
   $Z = 2.(\frac{1}{2}) - 4.(\frac{1}{2})$
   $Z = 1 - 2$
   $Z = -1$

18.5.6 A Função Tangente

Tangente de um Ângulo

Considere o ciclo trigonométrico e uma reta t paralela ao eixo y traçada pelo ponto A. Essa reta é chamada de *eixo das tangentes*.

A intersecção da reta $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes será o ponto T, determinando em t o segmento orientado $\overline{AT}$. Definimos como **tangente de x** a medida do segmento $\overline{AT}$ e indicamos:

$$\tan x = \overline{AT}$$

A tangente é definida como $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ com $\cos x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 90^\circ + k.180^\circ,\; k \in Z$.

Valores importantes de $\tan x$

x	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

18.5.7 Função Tangente

Definição: Chamamos de *função tangente* a função f definida de $x \in \Re / x \neq 90^o + k.180^o,\; k \in Z \;\rightarrow \Re$ que a cada número x, associa a tangente desse número:

$$f(x) = \tan x$$

Domínio: $(valores\ de\ x)\ D(f) = \{x \in \Re | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.\ k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem: $(valores\ de\ y\ ou\ f(x))\ Im(f) = \Re$

Gráfico: Para construir o gráfico da **Função Tangente**, devemos localizar inicialmente, no ciclo trigonométrico, os ângulos e determinar o valor de sua tangente:

Sinal e Variação da Função Tangente

Quadrante	**I**	**II**	**III**	**IV**
Arco	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
Sinal	$+$	$-$	$+$	$-$
Variação	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$
Crescimento	crescente	crescente	crescente	crescente

Exemplos Gerais de Aplicações:

1. Determine os sinais de:

   (a) $\tan(35^o)$
   Como 35° está no 1° quadrante, o sinal é $+$

   (b) $\tan(230^o)$
   Como 230° está no 3° quadrante, o sinal é $+$

(c) $\tan(-45^o)$
Como -45° está no 4° quadrante, o sinal é $-$

2. Calcule os valores de $f(x) = \tan x$ quando:

(a) $x = 30^o$
$f(30^o) = \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) $x = 135^o$

$$f(135^o) = \tan 135^o = \frac{\text{sen } 135^o}{\cos 135^o} = \frac{\text{sen } 45^o}{-\cos 45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

18.6 Outras Relações Trigonométricas

Vamos definir mais três importantes relações trigonométricas para um ângulo x que serão muito úteis na simplificação de expressões e na definição de novas funções trigonométricas:

Cotangente

$$cotgx = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}\ ,\ x \neq k.180^o$$

Secante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ x \neq 90^o + k.180^o$$

Cossecante

$$cossecx = \frac{1}{\text{sen } x},\ x \neq k.180^o$$

Veja no seguinte gráfico, todas as funções trigonométricas:

Exemplo:

Determine $cotg(30^o)$, $\sec(30^\circ)$, $cossec(30^o)$.
Solução:

Sabendo que sen $30^o = \frac{1}{2}$, $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então:

- $cotg 30^o = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$
- $\sec 30^o = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $cossec 30^o = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

18.7 Relações Trigonométricas Fundamentais

A essa relação, válida para todo $x \in \Re$, damos o nome de *Relação Trigonométrica Fundamental*
Exemplos:

1. Dado sen $x = \frac{3}{4}$, com $0 < x < 90^o$ ou $x \in I\ Q$, calcular $\cos x$.
   Solução:
   Utilizando a Relação Trigonométrica Fundamental, temos:
   $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
   $(\frac{3}{4})^2 + \cos^2 x = 1$
   $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{16}$
   $\cos^2 x = \frac{16-9}{16}$
   $\cos^2 x = \frac{7}{16}$
   $\cos x = \pm\sqrt{\frac{7}{16}}$
   $\cos x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$
   Como $0 < x < 90^o$, temos que o cosseno é positivo, logo $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

2. Sabendo que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, com $x \in II\ Q$, calcular:

(a) sen x
Solução:
Utilizando a Relação Trigonométrica Fundamental, temos:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
$\text{sen}^2 x(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1$
$\text{sen}^2 x = 1 - \frac{3}{9}$
$\text{sen}^2 x = \frac{9-3}{9}$
$\text{sen}^2 x = \frac{6}{9}$
$\text{sen } x = \pm\sqrt{\frac{6}{9}}$
$\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$
Como $90^o < x < 180^o$, temos que o seno é positivo, logo sen $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(b) $\tan x$
Agora, já sabemos quanto vale o seno e o cosseno de x, assim:
$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{18}}{3} = -\frac{3\sqrt{2}}{3} = -\sqrt{2}$$

(c) $\sec x$
A definição de secante diz:
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

(d) *cotg x*
Pela definição de cotangente, temos:
$$cotgx = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(e) *cossec x*
A definição de cossecante é:
$$cossecx = \frac{1}{\text{sen}x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

18.8 Identidades Trigonométricas

Quando temos uma igualdade de expressões trigonométricas, dizemos que é uma **Identidade Trigonométrica** se essa igualdade for válida para qualquer valor real de x.

Para mostrar que a identidade é verdadeira, podemos utilizar qualquer uma das relações trigonométricas já estudadas e escolher um dos processos de demonstração:

1. *desenvolver um dos membros da igualdade até chegarmos ao outro;*
2. *transformar o 1º e o 2º membro da igualdade numa mesma expressão.*

Exemplos:
Demonstrar as seguintes identidades trigonométricas:

1. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
Solução:
Transformando todas as razões em função de seno e cosseno, temos:
$(\frac{\text{sen}x}{\cos x})^2 + 1 = (\frac{1}{\cos x})^2$

$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ o que mostra que essa identidade é verdadeira

2. $\tan x + cotg\ x = \tan x.cossec^2 x$
   Solução:
   Transformando todas as razões em função de seno e cosseno, temos:
   $\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x}.(\frac{1}{\text{sen}x})^2$

   $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}x.\cos x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x}.\frac{1}{\text{sen}^2 x}$

   $\frac{1}{\text{sen}x.\cos x} = \frac{1}{\text{sen}x.\cos x}$ o que mostra que essa identidade é verdadeira

18.9 Arcos Trigonométricos

18.9.1 Soma e Diferença

Considerando dois arcos quaisquer de uma circunferência trigonométrica, cujas medidas são **a** e **b**, podemos escrever as seguintes relações:

Seno da soma:

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ b \cdot \cos\ a$

Seno da diferença:

$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ b \cdot \cos\ a$

Cosseno da soma:

$\cos(a+b) = \cos\ a \cdot \cos\ b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

Cosseno da diferença:

$\cos(a-b) = \cos\ a \cdot \cos\ b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

Considerando dois arcos quaisquer de uma circunferência trigonométrica, cujas medidas são **a** e **b**, $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$, podemos escrever as seguintes relações:

Tangente da soma:

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

Tangente da diferença:

$\tan(a+b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

Acompanhe a aplicação dessas relações nos exercícios resolvidos.

Exemplos:

1. Calcule o valor de:
   a) sen 105° b) sen 15° c) $\cos 75°$ d) sen 225° e) $\sec 15°$
   Solução:

(a) $\text{sen } 105° = \text{sen}(60° + 45°) = \text{sen } 60° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 60° =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(b) $\text{sen } 15° = \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos\ 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(c) $\cos 75^o = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 45° =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
Observe que $\text{sen } 15° = \cos\ 75°$, pois $15° + 75° = 90°$.

(d) $\text{sen } 255°$
Reduzindo ao 1° quadrante, temos $\text{sen } 255° = -\text{sen}(255° - 180°) = -\text{sen } 75°$.
$-\text{sen } 75° = -\text{sen}(30°+45°) = -(\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°) = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(e) $\sec 15° = \frac{1}{\cos 15°}$
$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
Logo:
$\sec\ 15° = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Racionalizando o denominador, vem:
$\sec\ 15° = \frac{4}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\cancel{4}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

2. Demonstre que para qualquer **x** real $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\ x$.
Solução:
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\text{sen } \frac{\pi}{2}}_{1} \cdot \cos\ x - \text{sen } x \cdot \underbrace{\cos\ \frac{\pi}{2}}_{0} = 1 \cdot \cos\ x + \text{sen } x \cdot 0 = \cos\ x$
Portanto, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\ x$.

3. Determine $\text{sen}(a + b)$ sabendo que $\text{sen } a = \frac{4}{5}$, $\text{sen } b = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < a, b < \pi$ ($2°$ quadrante).
Solução:
Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:
$\text{sen}^2\ a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \text{sen}^2\ a = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1\ - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos a = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$
Como $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, então $\cos\ a < 0$, logo $\cos\ a = -\frac{3}{5}$.
$\cos^2 b + \text{sen}^2\ b = 1 \Rightarrow \cos^2 b = 1 - \text{sen}^2\ b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos b = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$
Como $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Logo, $\cos b = -\frac{4}{5}$.
Conhecidos os valores do seno e do cosseno e utilizando a fórmula do seno da soma, temos:
$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cos\ a = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = -\frac{25}{25} = -1$
Logo, $\text{sen}(a + b) = -1$.

4. Calcule o valor de:
a) $cotg 15°$ b) $\tan 75°$ c) $cotg\ \frac{55\pi}{12}$
Solução:

(a) $cotg\ 15° = \frac{1}{\tan 15°}$
Mas $\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \cdot \tan 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

Assim:
$cotg\ 15° = \frac{1}{\tan 15°} = \frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$
Racionalizando o denominador, temos:
$cotg\ 15° = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})((3+\sqrt{3}))}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{6}(2+\sqrt{3})}{\cancel{6}} = 2+\sqrt{3}$
Portanto, $cotg\ 15° = 2+\sqrt{3}$.

(b) $\tan 75° = \tan(45° + 30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1-\tan 45° \cdot \tan 30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

(c) $cotg\ \frac{55\pi}{12} = cotg\ \frac{55\cdot 180°}{12} = cotg\ 825°$
Como 825° ultrapassa uma volta, vamos calcular a 1° determinação positiva.

$$\begin{array}{l|l} 825° & 360° \\ \hline \underbrace{105°}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{2}_{\text{voltas}} \end{array}$$

$cotg\ 825° = cotg\ 105° = \frac{1}{\tan 105°}$
Mas:
$\tan 105° = \tan(45° + 60°) = \frac{\tan 45° + \tan 60°}{1-\tan 45° \cdot \tan 60°} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}$
Logo:
$cotg\ 825° = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{\cancel{2}(2-\sqrt{3})}{\cancel{-2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-2$
Portanto $cotg\ \frac{55\pi}{12} = \sqrt{3}-2$.

5. Demonstre que para qualquer **x** real diferente de $k\pi$, vale:

a) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotg\ x$ b) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cossec\ x$
Solução:

(a) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = cotg\ x$
Portanto $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cotg\ x$.

(b) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{1}{\text{sen } x} = cossec\ x$
Portanto $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cossec\ x$.

18.9.2 Arco Duplo

Seno: $\boxed{\text{sen } 2x} = \text{sen}(x+x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = \boxed{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}$
Cosseno: $\boxed{\cos 2x} = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \boxed{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, podemos expressar $\cos 2x$ em função apenas de $\cos x$ ou sen x:

- $\boxed{\cos 2x} = \cos^2 x - sen^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \boxed{2 \cdot \cos^2 x - 1}$
- $\boxed{\cos 2x} = \cos^2 x - sen^2 x = 1 - sen^2 x - sen^2 x = \boxed{1 - 2 \cdot sen^2 x}$

Tangente: $\tan 2x = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan x \cdot \tan x} = \boxed{\frac{2\cdot\tan x}{1-\tan^2 x}}$

Exemplos:

1. Sendo sen $x = \frac{2}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule sen $2x$.
Solução:
sen $2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

Como o valor de $\cos x$ não é conhecido, podemos determiná-lo através da fórmula fundamental:
$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{21}{25}} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$
Como **x** está no 1º quadrante, o cosseno é positivo. Logo, $\cos x = \frac{\sqrt{21}}{5}$.
Então, $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$

2. Calcule $\cos 2x$, sendo $\cos x = \frac{1}{3}$.
Solução:
Como conhecemos somente o valor de $\cos x$, convém utilizar a fórmula que envolve apenas essa função trigonométria.
Assim:
$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$

3. Calcule $\tan 2x$, sabendo que $cotg\ x = \frac{1}{2}$.
Solução:
$cotg\ x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = 2$
Então, $\tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}$

4. Sendo $\sec x = 2x$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule:
a) $\text{sen } 2x$ b) $\cos 2x$
Solução:

(a) $\text{sen } 2x$
$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$
$\cos^2 x + \text{sen}^2\ x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \text{sen}^2\ x = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \text{sen}^2\ x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$
$\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Logo, $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$

5. Sendo $\text{sen } x + \cos x = 1$, calcule $\text{sen } 2x$.
Solução:
$\text{sen } x + \cos x = 1 \Rightarrow (\text{sen } x + \cos x)^2 = 1^2 \Rightarrow \text{sen}^2\ x + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\text{sen}^2\ x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x}_{\text{sen } 2x} = 1 + \text{sen } 2x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = 0$

6. Calcule o valor de $(\text{sen } 22°30' + \cos 22°30')^2$.
Solução:
$(\text{sen } 22°30' + \cos 22°30')^2 = \underbrace{\text{sen}^2 22°30' + \cos^2 22°30'}_{1} + \underbrace{2 \cdot \text{sen } 22°30' \cdot \cos 22°30'}_{\text{sen } (2 \cdot 22°30')} =$
$= 1 + \text{sen } 45° = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Capítulo 19

Matrizes

IMPORTANTE!!!

O material a seguir é de extrema importância nas disciplinas de Geometria Analítica, Álgebra Linear, Programação Linear e Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O). Por isso requer uma leitura com muita atenção!

19.1 Matrizes: Introdução e Notação Geral

19.1.1 Introdução

A teoria das matrizes tem cada vez mais aplicações em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo de matriz.

A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar agora uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados em parênteses ou colchetes:

$$\text{linha} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{8 \quad 7 \quad 9 \quad 8} \\ 6 \quad 6 \quad 7 \quad 6 \\ 4 \quad 8 \quad 5 \quad 9 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 8 & \boxed{7} & 9 & 8 \\ 6 & \boxed{6} & 7 & 6 \\ 4 & \boxed{8} & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$\text{coluna}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os *elementos*. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, da *esquerda para a direita*:

$$\begin{array}{l} \text{1ª linha} \rightarrow \\ \text{2ª linha} \rightarrow \\ \text{3ª linha} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3ª coluna
2ª coluna
1ª coluna

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (onde **m** e **n** são números naturais diferentes de 0) são denominadas *matrizes* $m \times n$. Na tabela acima temos uma matriz 3×3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & -17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3

- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2

19.1.2 Notação Geral

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo $m \times n$ é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ou, abreviadamente, A= $(a_{ij})_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a}_{23}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, temos $\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = 5 \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \end{cases}$

Ou na matriz B= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, temos $a_{11} = -1, a_{12} = 0, a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

19.1.3 Exercícios Resolvidos

1. Determine a matriz A= $(a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.
   Solução:

   coluna

   Sendo **A** do tipo 2×2, a matriz associada é da forma: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

   linha

   Como $a_{ij} = 2i + j$, temos:
   $a_{11} = 2 \cdot (1) + (1) = 3$ (pois $i = 1$ e $j = 1$)
   $a_{12} = 2 \cdot (1) + (2) = 4$
   $a_{21} = 2 \cdot (2) + (1) = 5$
   $a_{22} = 2 \cdot (2) + (2) = 6$

   Logo, A= $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

2. Dada a matriz A= $(a_{ij})_{5 \times 5}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} -i^2, & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 2ij, & \text{se } i + j \text{ é impar} \end{cases}$, determine $a_{32} + a_{42}$.
   Solução:
   $a_{32} = 2 \cdot (3) \cdot (2) = 12$
   $a_{42} = -(4)^2 = -16$
   Logo, $a_{32} + a_{42} = 12 - 16 = -4$.

19.2 Tipos de Matrizes

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

* **Matriz Linha:** matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, com única linha. Por exemplo, a matriz

A= $\begin{bmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, do tipo 1×4.

* **Matriz Coluna:** matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, com única coluna. Por exemplo, a matriz B= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, do tipo 3×1.

* **Matriz Quadrada:** matriz do tipo $n \times n$, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de *ordem* **n**. Por exemplo, a matriz C= $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2×2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a *diagonal principal* e a *diagonal secundária*. A diagonal principal é formada pelos elementos a_{ij} tal que $i = j$. Na diagonal secundária, temos $i + j = n + 1$.
Observe a matriz a seguir:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal secundária

diagonal principal

$a_{11} = -1$ é o elemento da diagonal principal, pois $i = j = 1$
$a_{31} = 5$ é o elemento da diagonal secundária, pois $i + j = n + 1 (3 + 1 = 3 + 1)$

* **Matriz Nula:** matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

* **Matriz Identidade:** matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, para uma matriz identidade $I_n = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

* **Matriz Oposta:** matriz $-\mathbf{A}$ obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

* **Matriz Transposta:** matriz $\mathbf{A^t}$ obtida a partir da matriz **A** trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, então $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo $m \times n$, $\mathbf{A^t}$ é do tipo $n \times m$.
Note que a 1º linha de **A** corresponde a 1º coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de **A** corresponde a 2ª coluna $\mathbf{A^t}$.

* **Matriz Simétrica:** matriz quadrada de ordem **n** tal que $A = A^t$. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ji}$.

Exercício Resolvido

1. Classifique as matrizes dadas quanto ao tipo e à ordem.

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

   c) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Solução:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz quadrada de ordem 2

   b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz linha do tipo 1×3

   c) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz coluna do tipo 3×1

   d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz identidade de ordem 3 ($\mathbf{I_3}$)

19.3 Igualdade de Matrizes e Operações

19.3.1 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes, **A** e **B**, do mesmo tipo $m \times n$, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = B$, então $c = 0$ e $b = 3$.

19.3.2 Operações Simples Envolvendo Matrizes

Adição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chamamos de *soma* dessas matrizes a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$:

$$\boxed{\text{A+B=C}}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: $A+B$ existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Subtração

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chamamos de *diferença* entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

A-B=A+(-B)

Observe os exemplos:

1. $$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{-B}} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Calcule **x**,**y** e **z** tal que $\begin{bmatrix} x^2-1 & 0 & x \\ 0 & y^2-4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

   Solução:

   Da igualdade vem:

   $$\begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ ou } x=-1 \text{ (não convém, pois o elemento } a_{13}=1) \\ x=1 \\ y^2-4 \Rightarrow y=2 \text{ ou } y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

   Logo, $x=1$, $y=\pm 2$ e $z=1$.

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

   a) $A+B$ b) $A-B$ c) A^t+B^t d) $(A+B)^t$

   Solução:

   a) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3-1 \\ 1-2 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

   b) $A-B = A+(-B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 3+1 \\ 1+2 & 4-4 \end{bmatrix} =$

   $$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

   c) A^t+B^t

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   Assim:

   $$A^t+B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 1-2 \\ 3-1 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

   d) $(A+B)^t$

   Como $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$, então $(A+B)^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

   Comparando os itens **c** e **d**, podemos notar que:

   $(A+B)^t = A^t+B^t$

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

Dados um número real **x** e uma matriz **A** do tipo $m \times n$, o produto de **x** por **A** é uma matriz **B** do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **x**, ou seja, $b_{ij} = xa_{ij}$:

$$\boxed{\text{B = xA}}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

   a) $\frac{1}{3}A$ b) $-3B$ c) $2A - 3B$

   Solução:

   (a) $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 & \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $-3B = -3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 4 & -3 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

   (c) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Determine a matriz **X**, tal que $X + A = 3B$, para $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Solução:

   Aplicado as propriedades das matrizes, temos:
   $X = 3B - A$
   Logo:
   $X = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes **X** e **Y** tal que $3X - Y = 2A - B$ e $X + Y = A - B$.
   Solução:
   $\begin{cases} 3X - \cancel{Y} = 2A - B \\ X + \cancel{Y} = A - B \end{cases} +$

   $4X = 3A - 2B \Rightarrow X = \frac{1}{4}(3A - 2B) = \frac{3}{4} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{9}{4} \\ -1 \end{bmatrix}$

   De $X + Y = A - B$, vem:

$$Y = A - B - X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine **a**, **b** e **c** sabendo que $2A = (3B)^t$.

   Solução:

   $2A = (3B)^t \Rightarrow 2\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & c \end{bmatrix} = \left(3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^t \Rightarrow$

   $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 6 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t \Rightarrow$

   $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 6 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

   $\begin{cases} 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \end{cases}$

   Logo, $a = 6$, $b = 0$ e $c = \frac{3}{2}$.

19.3.3 Multiplicação de Matrizes

O produto de uma matriz por outra *não* é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna de **B**.

Vamos multiplicar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{c_{ij}}$:

* 1ª linha e 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1\cdot(-1) + 2\cdot 4}} & \text{——} \\ \text{——} & \text{——} \end{bmatrix}$$

* 1ª linha e 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \overset{c_{12}}{\boxed{1\cdot 3 + 2\cdot 2}} \\ \text{——} & \text{——} \end{bmatrix}$$

* 2ª linha e 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3\cdot(-1) + 4\cdot 4}} & \text{——} \end{bmatrix}$$

* 2ª linha e 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & \underset{c_{22}}{\boxed{3\cdot 3 + 4\cdot 2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1)\cdot 1 + 3\cdot 3} & \boxed{(-1)\cdot 2 + 3\cdot 4} \\ \boxed{4\cdot 1 + 2\cdot 3} & \boxed{4\cdot 2 + 2\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

Vejamos outro exemplo com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 3\cdot 0 & 2\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 3 + 1\cdot 4 \\ -1\cdot 1 + 4\cdot(-2) & -1\cdot 2 + 4\cdot 0 & -1\cdot 3 + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto $A \cdot B$ só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = (A \cdot B)_{m\times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A**(**m**) e o número de colunas de **B**(**n**):

- se $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 5}$, então $(A \cdot B)_{3\times 5}$
- se $A_{4\times 1}$ e $B_{2\times 3}$, então não existe o produto

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o produto de $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, se existir.

   Solução:
   Inicialmente, devemos verificar se é possível multiplicar as matrizes. A 1ª matriz é do tipo 2×3 e a 2ª ,do tipo 3×1. Como o número de colunas da 1ª é igual ao número de linha da 2ª, o produto é possível e a matriz resultante é do tipo 2×1:

   $$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-3)\cdot 5 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 0 + 0\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Determine a matriz **X** tal que $X \cdot A = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

   Solução:
   Como a matriz **X** é fator de um produto, é necessário, inicialmente, determinar o seu tipo.
   Assim, se $X \cdot A_{2\times 2} = B_{2\times 2}$, então X é do tipo 2×2. Logo, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Daí: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$
   Da igualdade de matrizes, temos $\begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} a + 2b = 4 \text{ (I)} \\ c + 2d = 6 \text{ (II)} \end{cases}$
   Substituindo $a = 2$ em (I) e $c = 0$ em (II), vem: $2 + 2b = 4 \Rightarrow b = 1$ e $0 + 2d = 6 \Rightarrow d = 3$
   Logo, $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $A^2 - 2A$.

   Solução:
   $A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

19.4 Matriz Inversa

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem **n**, se existir uma matriz $\mathbf{A'}$, de mesma ordem, tal que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$, então $\mathbf{A'}$ é *matriz inversa* de **A**. Representamos a matriz inversa por $\mathbf{A^{-1}}$.
Acompanhe o procedimento para determinar uma matriz inversa.

Exercícios Resolvidos

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, determine sua inversa, se existir.

   Solução:

   Existindo, a matriz inversa é da mesma ordem de **A**.

   Como, para que exista inversa, é necessário que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$, vamos trabalhar em duas etapas:

   1ª) Impomos a condição de que $A \cdot A' = I_n$ e determinamos A':

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Da igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ -2a+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b+2d=0 \\ -2b+d=1 \end{cases}$$

   Resolvendo os sistemas pelo método da adição, vem:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ -2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+4c=2=0 \\ -2a+c=0 \end{cases}$$

$$5c = 2 \Rightarrow c = \tfrac{2}{5}$$

   Substituindo o valor obtido para **c** em uma das equações do sistema, temos:

   $a+2c=1 \Rightarrow a+2\cdot\frac{2}{5}=1 \Rightarrow a+\frac{4}{5}=1 \Rightarrow a=1-\frac{4}{5} \Rightarrow a=\frac{1}{5}$

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ -2b+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b+4d=0 \\ -2b+d=1 \end{cases}$$

$$5d = 1 \Rightarrow d = \tfrac{1}{5}$$

   Substituindo o valor obtido para **d** em uma das equações do sistema, temos:

   $b+2d=0 \Rightarrow b+2\cdot\frac{1}{5}=0 \Rightarrow b=-\frac{2}{5}$

   Assim:

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

   2ª) Verificamos se $A' \cdot A = I_2$:

$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\cdot 1 + \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot(-2) & \frac{1}{5}\cdot 2 + \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 1 \\ \frac{2}{5}\cdot 1 + \left(\frac{1}{5}\right)\cdot(-2) & \frac{2}{5}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5} & \frac{2}{5}-\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5} & \frac{4}{5}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

   Portanto, temos uma matriz $\mathbf{A}'$ tal que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$. Assim, $\mathbf{A}'$ é inversa de **A** e pode ser representada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2. Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Solução:

   Se $A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$, então $A' = A^{-1}$.

   Vamos verificar se $A \cdot A' = I_2$:

   Fazendo $A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, vem:

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow = \begin{bmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Da igualdade de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = \frac{1}{2} \text{ (I)} \\ a + c = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Comparando as igualdades (I) e (II), observamos que é possível obter simultaneamente $a + c = \frac{1}{2}$ e $a + c = 0$.
Logo, o sistema *não tem solução* e a matriz **A** não é inversível.

Capítulo 20

Determinantes

20.1 Introdução

Como vimos anteriormente, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo $n \times n$).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:
* resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
* cálculo de área de triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

Determinante de 1ª Ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M = [a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não tem significado de módulo.

Por exemplo:

* $M = [5] \Rightarrow \det M = 5$ ou $|5| = 5$

* $M = [-3] \Rightarrow \det M = -3$ ou $|-3| = -3$

Determinante de 2ª Ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

Sendo $\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, temos:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2 \cdot 5} - \underbrace{4 \cdot 3} = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o valor dos determinantes:

   a) $\det M = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\det M = \begin{vmatrix} 10 & -2^2 \\ 1 & 0,4 \end{vmatrix}$

   Solução:

   a) $\det M = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot \frac{1}{3} = -2 - 2 = -4$

   b) $\det M = \begin{vmatrix} 10 & -2^2 \\ 1 & 0,4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0,4 - (-2^2) \cdot 1 = 4 + 4 = 8$

2. Calcule o valor de x real na igualdade : $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

   Solução:
   $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x(x+3) - 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 9x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$
   $x = -4$ ou $x = 1$

20.2 Determinantes: Regra de Sarrus

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus*.

Acompanhe como aplicamos essa regra para $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2º passo: Encontramos a soma dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

3º passo: Encontramos a soma dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):

Assim:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = -(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})+(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

   Solução:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix} = -47$$

$$-3 \quad -8 \quad -12 \qquad 2 \quad -18 \quad -8$$

   Logo $D = -3 - 8 - 12 + 2 - 18 - 8 = +2 - 49 = -47$

2. Calcule o valor de x na igualdade $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$.

   Solução:
   Aplicando a regra de Sarrus, temos:
   $3 + 0 - x^2 - (-1 + 3x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$

3. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

   Solução:
   Aplicando a regra de Sarrus, temos:
   $2 + 0 + 0 - (x^2 + x + 0) < 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2 < 0$
   Resolvendo a inequação do 2º grau e estudando o seu sinal, vem:
   $-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{+1\pm3}{-2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$

   Então, S= $\{x \in \mathbb{R} | x < -2$ ou $x > 1\}$.

Capítulo 21

Sistemas Lineares

21.1 Sistemas Lineares

Sistemas lineares são sistemas de equações com m equações e n incógnitas formados por equações lineares, normalmente escritos como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n são as incógnitas;
- os números reais a_{ij}, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ são os coeficientes, $j = 1, 2, \cdots, n$ e $i = 1, 2, \cdots, m$;
- os números reais $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ são os termos independentes.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

Para um sistema linear, uma ênupla (conjunto de n valores) ordenada do tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é uma solução do sistema de n incógnitas se for solução de todas as equações desse sistema.
Por exemplo, o termo $(2; -1; 3)$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 13 \\ 3x - 2y + 3z = 17 \end{cases}$$

pois, substituindo em cada equação x por 2, y por -1 e z por 3, as três igualdades resultam verdadeiras.
`Experimente substituir nas equações!!!`

21.1.1 Resolução de Sistemas Lineares

Método da Adição

Exemplo:

Resolver o sistema $\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$

O método da soma consiste em eliminar uma das incógnitas "x"ou "y"e desta forma trabalhar com a solução primeiro de uma incógnita e depois da outra.
Para eliminarmos a incógnita "x", por exemplo, devemos multiplicar os valores da primeira equação por (-2) e depois somar o resultado com a segunda equação.

$$\begin{cases} x + 4y = 100 \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 8y = -200 \\ 2x + 3y = 90 \quad + \\ \hline 0x - 5y = -110 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-110}{-5} = 22$$

Substituindo $y = 22$ na equação $x + 4y = 100$ obtemos o valor de x.
$x + 4y = 100$
$x + 4 \cdot (22) = 100$
$x + 88 = 100$
$x = 100 - 88$
$x = 12$
$\therefore S = \{(12; 22)\}$

Método da Substituição

Exemplo:
Resolver o sistema anterior pelo método da substituição $\begin{cases} x + 4y = 100 \\ 2x + 3y = 90 \end{cases}$
O objetivo do método é o mesmo do método da adição, porem devemos isolar uma das incógnitas da primeira equação e substitui-lo na segunda equação
Isolando x incógnita $x \Rightarrow x + 4y = 100 \Longrightarrow x = 100 - 4y$
Substituindo na segunda equação $\Rightarrow 2x + 3y = 90$
$2 \cdot (100 - 4y) + 3y = 90$
$200 - 8y + 3y = 90$
$200 - 5y = 90$
$-5y = 90 - 200$
$y = \frac{90-200}{-5}$
$y = \frac{-110}{-5}$
$y = 22$
Substituindo o valor de y na primeira equação $\Rightarrow x + 4y = 100$
$x + 4y = 100$
$x + 4 \cdot (22) = 100$
$x + 88 = 100$
$x = 100 - 88$
$x = 12$
$\therefore S = \{(12; 22)\}$

21.1.2 Classificação dos Sistemas Lineares

A classificação de um sistema linear é feita em função do número de soluções que ele admite, da seguinte maneira:

- **Sistema Possível e Determinado (SPD):** são sistemas que possuem apenas uma solução.
  Exemplo:
  $(S_1) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$
  O sistema S_1 admite como única solução o par $(4; 1)$. Por essa razão, S_1 é um sistema possível e determinado.

- **Sistema Possível e Indeterminado (SPI):** são os sistemas que permitem infinitas soluções.
  Exemplo:
  $(S_2)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$
  Os termos $(1;2;3),(3;0;0)$ e $(5;4;-3)$, bem como infinitos outros, são soluções de S_2. Portanto, esse sistema é possível e indeterminado, pois admite mais de uma solução.

- **Sistema Impossível (SI):** são sistemas que não tem soluções. Geralmente formado por equações que se contradizem.
  Exemplo:
  $(S_3)\begin{cases} x+y+z=8 \\ x+y+z=10 \end{cases}$
  Note que as duas equações que formam o sistema S_3 são "contraditórias", pois não é possível que se tenha, simultaneamente, $x+y+z=8$ e $x+y+z=10$. O sistema é, portanto, impossível, pois não admite solução alguma.

De forma geral, podemos resumir:

21.1.3 Matrizes e Resoluções de Sistemas

A uma sistema linear de m equações e n incógnitas podemos associar duas matrizes:
▶ **Incompleta:** formada pelos coeficientes das incógnitas;
▶ **Completa:** formada pelos coeficientes das incógnitas e os termos independentes;

Exemplos:

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x-y=1 \end{cases}$

   Matrizes associadas ao sistema:

   Matriz incompleta:$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

   Matriz completa:$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 0z = 6 \end{cases}$

Matrizes associadas ao sistema:

Matriz incompleta: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz completa: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ forma matricial

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ é matriz incompleta dos coeficientes.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas.

$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Sistemas Homogêneos

Um sistema é homogêneo quando todos os termos independentes das equações são nulos.
Exemplo:
$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -x + 5y - 2z = 0 \\ \sqrt{2}x - y + 3z = 0 \end{cases}$
Um sistema homogêneo é sempre possível, pois a ênupla $(0, 0, 0, \cdots, 0)$ é sempre solução de um sistema homogêneo e recebe o nome de uma solução **nula** ou **trivial**.
Quando existem outras soluções, são chamadas de **não triviais**.

Sistema Normal

Um sistema é **normal** quando o número de equações (m) é igual ao número de incógnitas (n), $(m = n)$ e o determinante da matriz incompleta associada ao sistema é diferente de zero.

$\boxed{\text{Se } m = n \text{ e } \det A \neq 0, \text{ o sistema é normal.}}$

Exercícios Resolvidos

1. Verifique quais dos seguintes sistemas são normais:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$

Solução:
Temos: $m = 3$ equações, $n = 3$ incógnitas $\Rightarrow m = n$ (I)

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ (II)

De (I) e (II), concluímos que o sistema é normal.

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ t+w=5 \end{cases}$

Solução:
Temos: $m=3$ equações, $n=5$ incógnitas $\Rightarrow m \neq n$
Logo, o sistema não é normal.

c) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-5z=1 \\ 3x+4y-4z=7 \end{cases}$

Solução:
Temos: $m=3$ equações, $n=3$ incógnitas $\Rightarrow m=n$
$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$
Logo, o sistema não é normal.

2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema $\begin{cases} kx+y=3 \\ 2x+ky=5 \end{cases}$ seja normal.

Solução:
1ª condição: $\det A \neq 0$
$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2-1 \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 1$
2ª condição: $m=n$
No sistema, o número de equações ($m=2$) é igual ao número de incógnitas ($n=2$).
Logo, o sistema é normal para qualquer **k** real diferente de 1 e de -1.

Resolução de Sistemas Normais

Regra de Cramer: O estudo dos determinantes consiste em uma forma de resolver sistemas $n \times n$ com a vantagem de permitir que os sistemas sejam analisados a partir do determinante da sua matriz incompleta. O método de resolver sistemas a partir de determinantes é conhecido como **Regra de Cramer**. Todo sistema linear normal tem uma única solução dada por:

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}, \cdots}$$

Sendo:
▶ D o determinante da matriz incompleta;
▶ D_x, D_y, $D_z, \cdots$ os determinantes obtidos da matriz incompleta substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pela coluna dos termos independentes.

Exemplos:

1. Resolva o sistema $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 4x+y=9 \end{cases}$, usando a Regra de Cramer

Solução:
$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 4x+y=9 \end{cases}$

Deve-se verificar se o número de equações é igual ao número de incógnitas:
$m=2$, $n=2 \Rightarrow m=n$
Calculando o determinante principal "D":
$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2 \cdot 4) = 3+8 = 11 \neq 0$

Logo o sistema é normal, então podemos utilizar a Regra de Cramer para resolvê-lo.
Calculando o determinante das incógnitas:

$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2 \cdot 9) = 22$ (Substituir os termos independentes na 1ª coluna)

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - (4 \cdot 4) = 11$ (Substituir os termos independentes na 2ª coluna)

Daí vem:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{11} = 1$

Portanto, S= $\{(2, 11)\}$

2. Resolva o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \\ x - y - z = -5 \end{cases}$ (ou $3x + 2y + 0z = 0$), usando a Regra de Cramer

Solução:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 0 \\ x - y - z = -5 \end{cases}$

$m = n = 3$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Como o sistema é normal, podemos utilizar a Regra de Cramer:

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8$ (Substituir os termos independentes na 1ª coluna)

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -12$ (Substituir os termos independentes na 2ª coluna)

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ (Substituir os termos independentes na 3ª coluna)

Assim:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{-4} = -2$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$

$z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{-4} = 0$

Portanto, S= $\{(-2, 3, 0)\}$

21.1.4 Discussão de um Sistema Linear

Se um sistema tem o mesmo número de linhas e incógnitas ($m = n$) ele pode ser classificado como:

a) **Sistema Possível e Determinado (SPD)** $\rightarrow$ quando $D = \det A \neq O$ o sistema apresenta solução única.

Exemplo:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$ $m = n = 3$ e $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Então, o sistema é possível e determinado, tendo solução única.

b) **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**$\rightarrow D = D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = \cdots = D_{x_n} = 0$, para n=2. Se $n \geqslant 3$, essa condição só será válida se não houver equações com coeficientes das incógnitas respectivamente proporcionais e termos independentes não-proporcionais.
Um sistema possível e indeterminado apresenta infinitas soluções.
Exemplo:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ -x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$$
$D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ e $D_z = 0$
Assim, o sistema é possível e indeterminado, tendo infintas soluções.

c) **Sistema Impossível (SI)** $\rightarrow D = 0$ e $\exists D_{x_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$; caso em que o sistema não tem solução.
Exemplo:
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -2 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$
Como $D = 0$ e $D_x \neq 0$, o sistema é impossível e não apresenta solução.

Exercícios Resolvidos

1. Verifique para que valores de **k** o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ky = 2 \end{cases}$ é:

   a) possível e determinado;
   b) possível e indeterminado.

   Solução:

   a) O sistema é possível e determinado se $D \neq 0$. Assim:
   $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k - 4 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$
   b) O sistema é possível e indeterminado se $D = D_x = D_y = 0$.
   Como $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, então $\nexists k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema seja possível e indeterminado.

2. Determine **p** de modo que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ px + y = 4 \end{cases}$ seja impossível.
   Solução:
   Para que o sistema seja impossível, devemos ter $D = 0$ e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$.
   Assim:
   $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ p & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2p$
   $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$
   $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ p & 4 \end{vmatrix} = 12 - 3p$
   Como $D = 0$, temos:
   $3 - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$
   Sendo $D_x = -5 \neq 0$, o sistema é impossível para $p = \frac{3}{2}$.

3. Discutir o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$.

   Se o sistema for SPD, encontre a solução.
   Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 33$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{33}{11} = 3 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1$

Resposta: S= $\{(3, -1)\} \mapsto$ Sistema Possível e Determinado (SPD)

4. Discutir o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$.

   Se o sistema for SPD, encontre a solução.

   Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{0}$ impossível $\qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{0}$ impossível

Resposta: S= $\varnothing \mapsto$ Sistema Impossível (SI)

5. Discutir o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 5y + 4z = 5 \\ x - 2y - 7z = -24 \end{cases}$.

   Se o sistema for SPD, encontre a solução.

   Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -10 + 16 + 63 + 70 + 12 + 12 = 163$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 4 \\ -24 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 240 + 16 + 105 + 70 - 288 + 20 = 163$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -24 & -7 \end{vmatrix} = 10 + 192 + 42 - 70 + 8 + 144 = 326$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & -24 \end{vmatrix} = 10 + 20 + 216 + 240 + 15 - 12 = 489$$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{163}{163} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{326}{163} = 2 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{489}{163} = 3$

Resposta: S= $\{(1, 2, 3)\} \mapsto$ Sistema Possível e Determinado (SPD)

6. Discutir o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3y = -4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 4x - 2y + 6z = -8 \end{cases}$.

Se o sistema for SPD, encontre a solução.

Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 4 + 6 + 24 + 4 - 6 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 48 + 8 + 30 - 48 - 8 - 30 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 16 - 24 - 60 - 16 + 24 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 20 + 8 + 32 - 8 + 20 = 0$$

Como $D = D_x = D_y = D_z = 0$, temos um Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

7. Discutir o sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$.

   Se o sistema for SPD, encontre a solução.

   Solução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -36 + 6 - 4 - 6 + 4 + 36 = 0$$

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -27 - 12 - 10 + 12 + 3 + 90 = 56$$

   $x = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{56}{0}$ impossível
   Resposta: S= $\varnothing \mapsto$ Sistema Impossível (SI)

21.1.5 Algumas Aplicações de Sistemas Lineares

1. Em uma padaria, um refrigerante e cinco pães de queijo custam R$ 4,50; dois refrigerantes e sete pães de queijo custam R$ 7,20. Quanto custarão cinco refrigerantes e seis pães de queijo?
   Solução:
   x: preço do refrigerante
   y: preço do pão de queijo

$$\begin{cases} x + 5y = 4,50 \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 7,20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2x} - 10y = -9 \\ \cancel{2x} + 7y = 7,20 \end{cases} +$$

$$-3y = -1,80$$

$$y = 0,60 \Rightarrow x = 1,50$$

   Assim, 5 refrigerantes e 6 pães de queijo custarão:
   $5 \cdot 1,50 + 6 \cdot 0,60 = 7,50 + 3,60 = 11,00$ reais.

2. Uma certa escola de ensino médio tem 107 alunos nas 1ª e 2ª séries, 74 nas 2ª e 3ª séries e 91 nas 1ª e 3ª séries. Qual o total de alunos desse escola?
   Solução:
   Fazendo: $x =$ número de alunos na 1ª série

   $y =$ número de alunos na 2ª série

$z =$ número de alunos na 3ª série

temos o sistema: $\begin{cases} x + y = 107 \\ y + z = 74 \\ x + z = 91 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1x + 1y + 0z = 107 \\ 0x + 1y + 1z = 74 \\ 1x + 0y + 1z = 91 \end{cases}$

Resolvendo pela regra de Cramer, obtemos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 107 & 0 \\ 0 & 74 & 1 \\ 1 & 91 & 1 \end{vmatrix} = 90$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 107 & 1 & 0 \\ 74 & 1 & 1 \\ 91 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 124 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 107 \\ 0 & 1 & 74 \\ 1 & 0 & 91 \end{vmatrix} = 58$$

Logo:

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{124}{2} = 62 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{90}{2} = 45 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{58}{2} = 29$

O total de alunos da escola é igual a: $x + y + z = 62 + 45 + 29 = 136$ alunos

A escola tem 136 alunos.

3. Uma vendedora de loja de roupas atendeu, no mesmo dia, três clientes e efetuou as seguintes vendas:

   - Cliente 1) 1 calça, 2 camisas e 3 pares de meias. Valor: R$ 156,00.
   - Cliente 2) 2 calças, 5 camisas e 6 pares de meias. Valor: R$ 347,00.
   - Cliente 3) 2 calças, 3 camisas e 4 pares de meias. Valor R$ 253,00.

   Quanto custou cada par de meia?

   Solução:

   Sejam x,y e z os preços unitários de calça, camisa e par de meia.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 156 \\ 2x + 5y + 6z = 347 \\ 2x + 3y + 4z = 253 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 156 \\ 2 & 5 & 347 \\ 2 & 3 & 253 \end{vmatrix} = 1265 + 1388 + 936 - 1560 - 1041 - 1012 = -24$$

Assim, segue $z = \frac{D_z}{D} = \frac{-24}{-2} = 12$; cada par de meia custa R$ 12,00.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática: 6ª,7ª e 8ª série**. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

[2] NETTO, S.D.P. **Matemática Conceitos e Histórias: 6ª, 7ª e 8ª Série**. São Paulo: Ed. Scipione,1997.

[3] GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI,B, GIOVANNI Jr, J.R. **A Conquista da Matemática: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª Série**. São Paulo: FTD, 2002.

[4] ——— . **Só Matemática: Operações com Números Decimais**. Disponível em *www.somatematica.com.br*. Acesso em 29 de agosto de 2014.

[5] SANTOS, C.A.M, GENTIL, N, GRECO, S.E. **Matemática Série Novo Ensino Médio: Volume Único**. São Paulo: Editora Ática, 2002.

[6] SILVA, J.D, FERNANDES,V.S. Matemática. São Paulo: IBEP, 1996.

[7] BEZERRA, MANOEL JAIRO. **Matemática para o ensino médio: Volume Único**. São Paulo: Scipione,2001.

[8] GIOVANNI, J.R, BONJORNO, J.R, GIOVANNI Jr, J.R. **Matemática Fundamental, uma nova abordagem: Volume Único**.São Paulo: FTD, 2002.

[9] IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIOGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio**. São Paulo: Editora Sariva, 2010.