Fundamentos de matemática elementar **Dep:** *Matemática Aplicada*
PSE - 2020
Lista 9

---

1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 2}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcule:

(a) $A + A$

(b) $A + B$

(c) $(1 + 1 + 1)(B + B)$

(d) $A^T + B^T$.

2. Encontre o conjunto S de soluções reais do sistema:

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \end{cases}$$

3. Quais são as possíveis matrizes 2×2 na forma escada?

4. Resolva o sistema $AX = 0$ com

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

utilizando escalonamento.

5. Encontre o determinante e a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 2 \end{cases}$$

7. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

uma matriz. Encontre todas as soluções do sistema $AX = 0$ encontrando uma matriz escada.

8. Seja
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
uma matriz real. Encontre todas as soluções dos sistemas lineares reais $AX = 2X$ e $AX = 3X$.

9. Dê um exemplo de um sistema linear real de duas equações e duas variáveis que não possui solução.

10. Determine o conjunto S de soluções do sistema linear abaixo:
$$\begin{cases} x - 2y + z - 6w & = & 1 \\ x + y - z + w & = & 2 \\ x + 7y - 5z - w & = & 3 \end{cases}.$$

11. Dê dois exemplos de matrizes reais A de ordem 2, satisfazendo simultaneamente $A^2 = 0$ e $A \neq 0$.

12. Encontre, caso existam, as matrizes inversas às matrizes reais
    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Encontre, caso exista, a matriz inversa à matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

14. Considere a matriz real
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
    (a) Qual a forma escada de A?
    (b) Qual o determinante da matriz A?

15. Verifique se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos. Caso verdadeiro justifique em no máximo 3 linhas. Caso falso, dê um contra-exemplo.

(a) Se A é uma matriz quadrada real de ordem 4, isto é, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, então

$$det(3A) = 3det(A).$$

(b) Se A é uma matriz quadrada real de ordem 2 com $A^2 = A$, então $A = I$ ou $A = 0$.

(c) Seja I a matriz identidade de ordem 20. Então $\det(-I) = -1$

16. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine a matriz inversa e o determinante de A.

17. Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{50\times 47}$, com $a_{ij} = i - j$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{47\times 30}$, com $b_{ij} = j$, e $C = (c_{ij}) = AB$.

(a) Calcule $C_{25\ 25}$;

(b) Calcule $C_{50\ 20}$.

18. Considere a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a forma escada de A;

(b) Resolva o sistema $AX = 0$;

(c) Determine a inversa de A;

(d) Determine o determinante de A.

19. A diferença entre dois números reais é 14 e o triplo do menor deles é o quádruplo do maior. Determine os dois números reais.

20. Há um ano atrás, um homem era 5 vezes mais velho do que seu filho é hoje. Daqui a 7 anos, ele será 6 vezes mais velho do que seu filho é hoje. Determine as idades do homem e do seu filho.

21. As entradas para um parque de diversões custam R$ 7,00 para adultos, R$ 2,00 para jovens e R$ 0,50 para crianças. Se 150 pessoas entrarem no parque e a arrecadação final for de R$ 100,00, determine o número de adultos, de jovens e de crianças que entraram. (Sugestão: os números procurados deverão ser inteiros não negativos).

22. Para uma festa de aniversário são encomendados 107 refrigerantes, 95 sanduíches, 113 salgadinhos e 151 doces. Serão servidos a cada adulto, 3 refrigerantes, 3 sanduíches, 3 salgadinhos e 3 doces; e a cada adolescente, 2 refrigerantes, 2 sanduíches, 5 salgadinhos e 4 doces; a cada criança, 2 refrigerantes, 1 sanduíche e 4 doces. Para que não sobrem nem faltem refrigerantes, sanduíches, salgadinhos e doces, qual o número de pessoas que devem ser convidadas?

23. Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

24. Uma refinaria processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo com baixo teor exige 5 minutos na unidade de mistura e 4 minutos na refinação. Cada tonelada de alto teor exige 4 minutos de mistura e 2 minutos de refinação. Se a unidade de mistura está disponível durante 3 horas e a refinaria durante 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de petróleo deveriam ser processados para que as duas unidades sejam completamente utilizadas?

Soluções

1.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.

$$S = \{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

3. Considerando os pivôs iguais a 1 temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ com } a \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

4.

$$S = \left\{ \left(\frac{-17}{3}t, \frac{5}{3}t, \frac{11}{3}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

5. -1

6.

$$S = \left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \right)$$

7.

$$S = (0, 0, 0)$$

8.

$$S = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

e

$$S = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

9.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

10.

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}t + \frac{7}{4}, \frac{2}{3}t + \frac{3}{16}, t, \frac{1}{16} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

11.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

12.a Não existe
12.b

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -2/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/4 & -1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$$

13.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

14.a Identidade, considerando pivôs iguais a um
14.b 2
15.a Falso. Contra-exemplo: identidade
15.b Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.c Falso. Determinante igual a $(-1)^{20} = 1$
16. Determinante 4 e inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -3/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

17.a 1175
17.b 24480
18.a Identidade considerando pivôs iguais a 1
18.b S=(0,0,0)
18.c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

18.d -4
19. -42, -56

20. Filho 8, Homem 41
21. 2 adultos, 8 jovens, 140 crianças
22. 21 + 10 + 12 = 33
23. 2000 maçãs, 3000 peras, 5000 laranjas
24. 20 de cada