

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - ICTE**  
**Lista 03 - Fundamentos de Matemática Elementar**

**1)** Quais das funções abaixo são polinômios?

a)  $p(x) = 1$

b)  $p(x) = \sqrt{x} + 1$

c)  $p(x) = \pi x^2 + 2x - 1$

d)  $p(x) = \frac{1}{x} + x^2 + 3x - 2$

e)  $p(x) = x^{3/2} - 4x^3 - x$

f)  $p(x) = x(\cos x)^2 + 4x^4 + x^3$

g)  $p(x) = (x + 1)^{10}$

h)  $p(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

i)  $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{20}}{20!}$

**2)** a) Se  $x^2 - 1 = Q(x)(x - 1)$  então qual o valor de  $Q(1)$ ?

b) Se  $x^3 - 8 = Q(x)(x - 2)$  então qual o valor de  $Q(2)$ ?

c) Se  $x^4 - a^4 = Q(x)(x - a)$  então qual o valor de  $Q(a)$ ?

d) Se  $x^n - a^n = Q(x)(x - a)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , então qual o valor de  $Q(a)$ ?

**3)** Determine  $a$ ,  $x_0$  e  $x_1$  em cada um dos itens abaixo:

a)  $x^2 - 3x + 2 = a(x - x_0)(x - x_1)$

b)  $x^2 - 2x - 3 = a(x - x_0)(x - x_1)$

c)  $x^2 + 3x - 28 = a(x - x_0)(x - x_1)$

d)  $2x^2 - 5x - 3 = a(x - x_0)(x - x_1)$

e)  $-4x^2 + 5x - 1 = a(x - x_0)(x - x_1)$

f)  $1 - x^2 = a(x - x_0)(x - x_1)$

4) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1;$

b)  $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2;$

c)  $\frac{x^2 + a^2}{x + a} = x + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -a;$

d)  $(x^3 - a^3) = (x - a)(x^2 + a^2);$

e)  $x^3 - a^2 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$

f)  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-1} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Sendo  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , calcule  $a + b$ .

6) Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , em que  $a, b$  e  $c$  são reais quaisquer com  $a \neq 0$ .

a) Verifique que

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

b) Explique a seguinte afirmação: "se  $a > 0$ , então o menor valor de  $f(x)$  acontece quando  $x = -\frac{b}{2a}$ ." Nesse caso, qual o menor valor de  $f(x)$ ?

c) Mostre que se  $a < 0$ , então

$$f \left( -\frac{b}{2a} \right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

é o maior valor assumido por  $f$ .

7) Dado o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

sabendo que  $P(\alpha) = 0$ , calcule o resto da divisão de  $P(x)$  por  $x - \alpha$ .

**8)** O resto da divisão de  $2^{64} + 1$  por  $2^{32} + 1$  é igual a

a) 1

b) 0

c) 4

d) 2

**9)** Se  $x^{100} - 1 = Q(x)(x - 1)$ , então o valor de  $Q(1)$  é igual a:

a) 98

b) 99

c) 100

d) 0

**10)** Verifique que, para todo  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale a seguinte igualdade

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1).$$

Use o resultado acima para mostrar que a soma  $S$  dos termos da progressão geométrica

$$\{1, r, r^2, r^3, r^4, \dots, r^n\}, \quad r \neq 1,$$

é dada por

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

**11)** Se

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ , calcule o valor de  $a$  e  $b$ .

**12)** O polinômio  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + x$  é tal que  $P(1) = 0$  e  $P(x) = -P(-x)$ . Calcule  $P(2)$ .

**13)** Determine  $A$  e  $B$  sabendo que

a)  $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\};$

b)  $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\};$

c)  $\frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\};$

d)  $\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - 2, 3.$

**14)** Determine o resto da divisão do polinômio  $P(x) = 3x^{101} + 1$  pelo polinômio  $D(x) = x^2 - 1$ .

**15)** O polinômio  $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{222} + x^{111} + 1$  é divisível pelo polinômio  $Q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x^2 + x + 1$ ?

**16)** Obtenha o quociente e o resto da divisão de  $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$  por  $D(x) = x^2 + 2$ .

**17)** Obtenha o quociente e o resto da divisão de  $P(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$  por  $D(x) = x^2 - 1$ .

**18)** Dividindo-se o polinômio  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$  por  $x - 1$ , obtém-se resto igual a 2. Ao dividir  $P(x)$  por  $x + 1$ , obtém-se resto igual a 3. Sabendo que  $P(x)$  é divisível por  $x - 2$ , calcule  $\frac{ab}{c}$ .

**19)** Um polinômio  $P(x)$ , dividido por  $x + 1$  dá resto  $-1$ , por  $x - 1$  dá resto 1 e por  $x + 2$  dá resto 1. Qual será o resto da divisão do polinômio  $P(x)$  por  $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$ ?

**20)** Um polinômio  $P(x)$ , dividido pelo binômio  $x - 1$ , dá resto 3. O quociente desta divisão é então dividido pelo binômio  $x - 2$ , obtendo-se resto 2. Qual o resto da divisão de  $P(x)$  por  $(x - 1)(x - 2)$ ?

## Respostas

1) a), c), g), h), i)

2) a) 2

b) 12

c)  $4a^3$

d)  $na^{n-1}$

3) a)  $a = 1$ ,  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$

b)  $a = 1$ ,  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 3$

c)  $a = 1$ ,  $x_0 = 4$  e  $x_1 = -7$

d)  $a = 2$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$  e  $x_1 = 3$

e)  $a = -4$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$  e  $x_1 = 1$

f)  $a = -1$ ,  $x_0 = 1$  e  $x_1 = -1$

4) a) F   b) F   c) F   d) F   e) V   f) V

5) 0

7) 0

8) d)

9) c)

11)  $a = -3$  e  $b = -2$

12) 6

13) a)  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$

b)  $A = \frac{1}{2}$  e  $B = \frac{1}{2}$

c)  $A = -3$  e  $B = 4$

d)  $A = 3$  e  $B = -2$

14)  $3x + 1$

15)  $\sin$

16)  $Q(x) = 2x + 1$  e  $R(x) = -3x - 3$

17)  $Q(x) = x^2 + 4$  e  $R(x) = -x + 4$

18)  $9$

19)  $x^2 + x - 1$

20)  $2x + 1$