UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - ICTE
Lista 06 - Fundamentos de Matemática Elementar

1. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se a alternativa for verdadeira, justifique a resposta. Se a alternativa for falsa, dê um contra exemplo.

a) $\ln(1+2) = \ln 1 + \ln 2$;

b) $\ln 6 = \ln(2)\ln(3)$;

c) $-\ln 2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$;

d) $\ln x - \ln y = \dfrac{\ln x}{\ln y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

e) $\ln 4 = 2\ln 2$;

f) $(\ln 4)^2 = 2\ln 4$;

g) $\ln(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{2}$;

h) $\frac{\ln 4}{2} = \ln 2$;

i) $e^{2x} = (e^x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

j) $e^{x^2} = (e^x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

k) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

l) $2\ln x = \ln(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

m) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

n) $e^{-x} = -e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

o) $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$;

p) $(\ln x)^{-1} = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

q) $e^{\ln x} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

r) $\ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

s) $e^{-\ln x} = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

t) $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

u) $\dfrac{\ln 6}{2} = \ln 3$;

w) $e^{\ln(\wp)} = \wp, \quad \forall \wp \in \mathbb{R}_+^*$;

x) $5^x = e^{x \ln 5}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

y) $\ln\sqrt{(-1)^2} = \frac{1}{2}\ln(-1)$;

z) $1 + 1 = 2$;

2. Calcule:

a) $\log_{10} 1000$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

c) $\log_9 \sqrt{3}$

d) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2}$

e) $3\log_{27} 9 - 7\log_{27} 3$

3. Tomando a função $f(x) = 2^{x-1}$–3, faça o que se pede:

a) Faça o gráfico de $f(x)$ e defina seu domínio e imagem. (Dica: Você pode utilizar translação de gráficos)

b) Explique a razão da $f(x)$ ser invertível e determine a $f^{-1}(x)$.

c) Esboce o gráfico da $f^{-1}(x)$ e defina seu domínio e imagem. (Dica: Você pode utilizar a reflexão de gráficos)

d) Verifique que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo x no domínio de $f(x)$ e que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo x no domínio de f^{-1}.

e) Faça os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ em um mesmo plano cartesiano e confirme a simetria sobre a reta $y = x$.

4. Tomando a função $f(x) = \log_4(x - 1)$, faça o que se pede:

a) Faça o gráfico de $f(x)$ e defina seu domínio e imagem. (Dica: Você pode utilizar translação de gráficos)

b) Explique a razão da $f(x)$ ser invertível e determine a $f^{-1}(x)$.

c) Esboce o gráfico da $f^{-1}(x)$ e defina seu domínio e imagem. (Dica: Você pode utilizar a reflexão de gráficos)

d) Verifique que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo x no domínio de $f(x)$ e que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo x no domínio de f^{-1}.

e) Faça os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ em um mesmo plano cartesiano e confirme a simetria sobre a reta $y = x$.

5. Sabendo-se que HA representa um ácido fraco, a sua constante de dissociação é dada pela fórmula:

$$Ka = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}.$$

As chaves representam a concentração dos componentes. É definido que $pH = -\log[H^+]$ e que $pKa = -\log(Ka)$. Usando as propriedades do logaritmo, encontre a equação de Henderson-Hasselbalch:

$$pH = pKa + \log \frac{[A^-]}{[HA]}.$$

6. Resolva as seguinte inequações:

a) $\dfrac{1}{\ln(x)+1} \leq 1$

b) $(\log_2(x))^2 < 2\log_2(x) + 3$

c) $x\log(x+1) \geq x$

d) $\ln(x^2) \leq (\ln(x))^2$

e) $2,3 < -\log(x) < 5,4$

f) $\ln(-2x^3 - x^2 + 13x - 6) < 0$

g) $\frac{150}{1+29e^{-0,8t}} \leq 130$

h) $3^{x-1} < 2^x$

i) $1000(1,005)^{12t} \geq 3000$

7. De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a temperatura do café (T, em graus Fahrenheit) em função do tempo (t, em minutos) pode ser modelada por $T(t) = 70 + 90e^{-\frac{t}{10}}$ após ser servido.

a) Encontre $T(0)$. Qual o significado desse valor?

b) Esboce o gráfico $y = T(t)$ e indique o domínio e a imagem da função.

c) A partir de quantos minutos a temperatura do café passa a ser menor que 100^oF?

8. Tomando um valor principal inicial P, se ele for investido a uma taxa anual, r, e os juros compostos sendo capitalizados n vezes por ano, o valor total acumulado, A, após t anos é dado pela fórmula:

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Agora, vamos supor que você investiu R$$2.000,00$ em uma conta que capitaliza mensalmente a uma taxa de juros de $7,125\%$.

a) Expresse o montante acumulado A como função do prazo de investimento t em anos.

b) Qual o saldo total em conta após 5 anos?

c) Encontre e interprete os valores da taxa de variação média do montante na conta do final do quarto ano ao final do quinto, também do final do trigésimo quarto ano ao final do trigésimo quinto ano.

d) Suponha que um investimento de R$$1,00$ com a taxa de juros de 100% seja capitalizado n vezes por um ano. Em uma tabela, relacione os valores de A e n modificando os períodos de capitalização do dinheiro de forma: anual, semestral, trimestral, mensal, diária, a cada minuto, a cada segundo. Qual a sua conclusão sobre os valores calculados?

9. Um tipo especial de microrganismo, quando inserido em um meio de cultura específico, mantém sua população constante nos dois primeiros dias. A partir do terceiro dia, inicia-se um crescimento exponencial em que a população dobra sua quantidade a cada 8 horas. A população adicionada inicialmente ao meio de cultura foi de 1000 microrganismos.

a) Após 6 dias, qual a população de microrganismos.

b) Escreva a expressão da população (M) de microrganismos em função do tempo em dias.

c) Qual o tempo necessário para que a população se torne 30 vezes maior que a população inicial. (Utilize em seus cálculos $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,47$)

10. No momento da compra, um carro foi avaliado em R$$30.788,00$. Após dois anos, o mesmo carro é a avaliado em R$$18.000,00$.

a) Determine os parâmetros m e b do modelo linear $V = mt + b$, sabendo que V corresponde ao valor do carro e t o tempo de depreciação.

b) Determine os parâmetros a e k do modelo exponencial $V = ae^{kt}$.

c) Encontre os valores do veículo para $t = 1$ ano e $t = 3$ anos utilizando ambos os modelos.

d) Faça o esboço dos gráficos em um mesmo plano cartesiano para os dois modelos.

e) Qual modelo se aproxima mais da nossa realidade? Explique.

11. Dado que $a,\ b,\ c, d,\ e,\ f$ são números reais tais que:

$$2^a = 4,\ 3^b = 5,\ 4^c = 6,\ 5^d = 7,\ 6^e = 8,\ 7^f = 9,$$

calcule o valor do produto $a \cdot b \cdot d \cdot c \cdot e \cdot f$.

12. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 2^{-x}$

c) $f(x) = e^x - 1$

d) $f(x) = e^{x-1}$

e) $f(x) = x + e^x$

f) $f(x) = -e^{-x}$

g) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

h) $f(x) = e^{1/x}$

13. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2(x+1)$

b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \ln|x|$

d) $f(x) = \ln(x+1)$

e) $f(x) = \ln(x-3)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

14. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2(x)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \ln|x|$

d) $f(x) = \ln(x+1)$

e) $f(x) = \ln(x-3)$

f) $f(x) = 1 + \ln(x)$

g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

15. Qual o domínio da função
$$f(x) = e^{\ln x}?$$

16. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log_2 x > 1000$.

17. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log_{\frac{1}{2}} x > 1000$.

18. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\log_2 x < 10^{-5}$.

19. Dado $M > 0$ qualquer, determine um valor de x (que depende de M) tal que $\ln x > M$.

Dica: $x = e^{M+1}$.

20. Dado $M > 0$ qualquer, determine um valor de x (que depende de M) tal que $\ln x < -M$.

21. Suponha que um estudante infectado com um certo vírus retorne a faculdade onde se encontram 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade $y(t)$ de alunos infectados após t dias, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados sabendo que a função que calcula a quantidade de alunos infectados é dada por
$$y(t) = \frac{1000}{1 - 1000Ce^{-1000kt}}$$
em que C e k são constantes. Sabendo que depois de 4 dias o número de infectados é $y(4) = 50$, determine o número de infectados no sexto dia.

22. Inicialmente 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto, e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. A concentração da solução que entra é de 2 gramas por litro e a equação que mede a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer instante de tempo $t > 0$ (em minutos) é dada por
$$Q(t) = 600 + Ce^{-\frac{t}{100}},$$
em que C é uma constante.

a) Quantos gramas de sal estão presentes após 50 minutos?

b)E depois de um longo tempo?

Respostas

1)

a) F b) F c) V d) F e) V f) F g) V

h) V i) V j) F k) F l) F m) V n) F

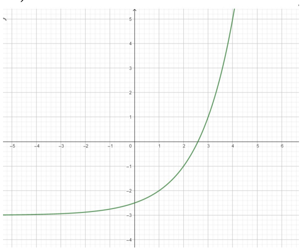
o) F p) F q) V r) V s) F t) V u) F

w) V x) V y) F z) V

2. a) 3 b) -1/2 c) 1/4 d) 1/2 e) -1/3

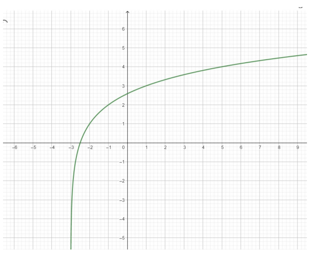
3.

a)



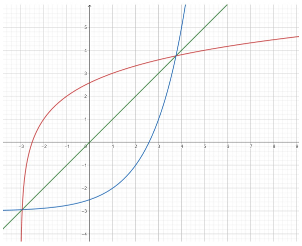
b) $D_f = \mathbb{R}$ e $Im(f) = (-3, +\infty)$

c) $f^{-1}(x) = \log_2(x+3) + 1$

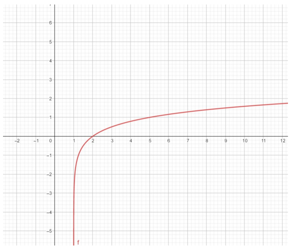


d) faça $f^{-1}(f(x))$ e $f(f^{-1}(x))$

e)

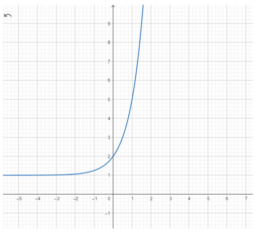


4. a) $D_f = (1, +\infty)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$



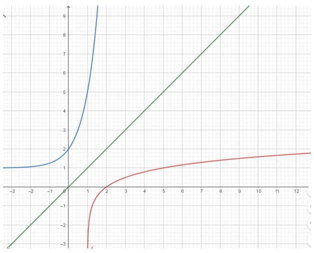
b) $f^{-1} = 4^x + 1$

c) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ e $Im(f^{-1}) = (1, +\infty)$



d) faça $f^{-1}(f(x))$ e $f(f^{-1}(x))$

e)



6. a) $(0, e^{-1}) \cup [1, +\infty)$

b) $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$

c) $(-1, 0] \cup [9, +\infty)$

d) $(0, 1] \cup [e^2, +\infty)$

e) $(10^{-5,4}, 10^{-2,3})$

f) $(-3.0281, -3) \cup (0.5, 0.5991) \cup (1.9299, 2)$ aproximado

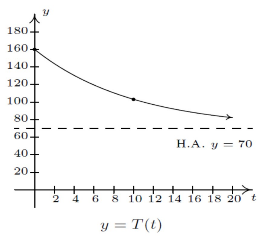
g) $\left(-\infty, \frac{\ln\left(\frac{2}{377}\right)}{-0,8}\right]$

h) $(-\infty, 2.7094)$ aproximado

i) $\left[\frac{\ln 3}{12\ln(1,005)}, +\infty\right)$

7. a) $T = 160^o F$. O café foi servido a essa temperatura.

b) Domínio=$[0, +\infty)$ e Imagem=$(70, 160]$



c) $t = 10,99$min

8. a) $A(t) = 2000(1, 0059375)^{12t}$

b) $R\$$ $2852, 92$

c) $R\$$ $195, 63$ e $R\$$ $1648, 21$

d) Pesquisar sobre juros compostos contínuos.

9. a) 4096.000

b) $P(t) = 1000$ se $1 \leq t \leq 2$, e $P(t) = 1000 \times 8^{t-2}$ se $t \geq 2$

c) $t \cong 3,63$ dias

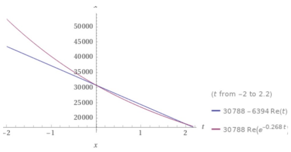
10. a) $V = -6394t + 30788$

b) $V = 30788e^{-0,268t}$

c)

t	1	3
$V = -6394t + 30,788$	24,394	11,606
$V = 30,788e^{-0,268t}$	23,550	13,799

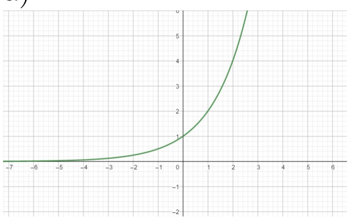
d)



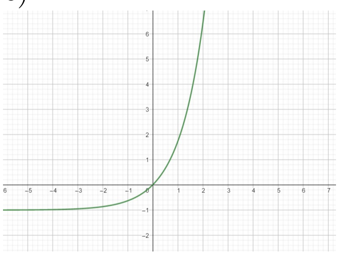
11. 6

12.

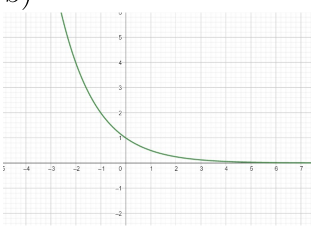
a)



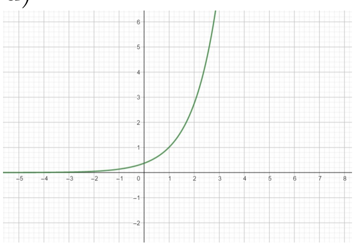
c)



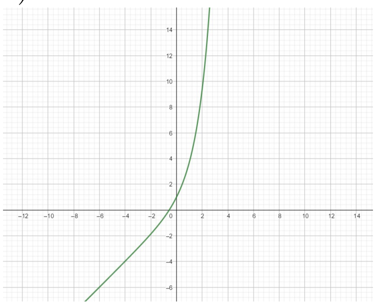
b)



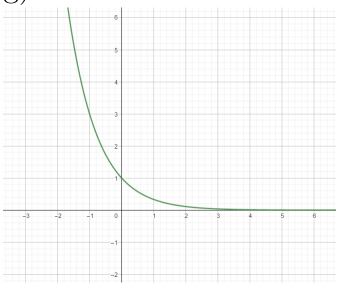
d)



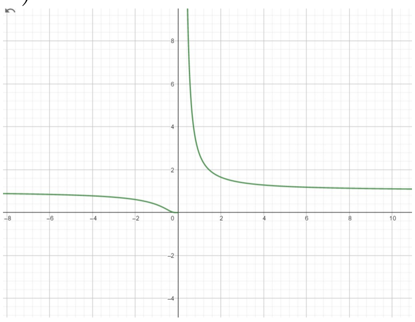
e)



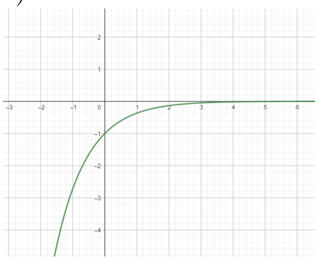
g)



h)



f)



13. a) $D_f = (-1, +\infty)$

b) $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

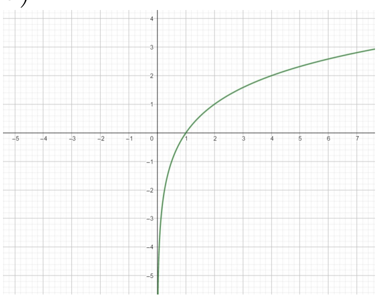
d) $D_f = (-1, +\infty)$

e) $D_f = (3, +\infty)$

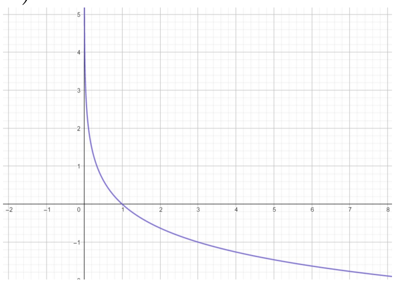
f) $D_f = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

14.

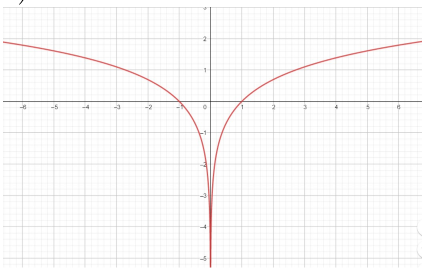
a)



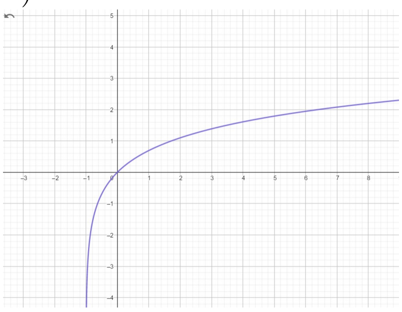
b)



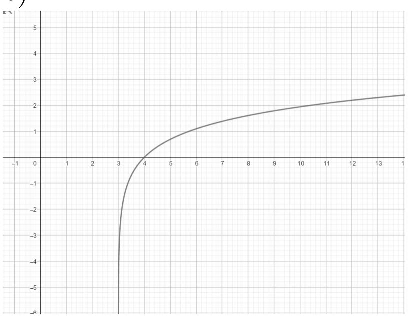
c)



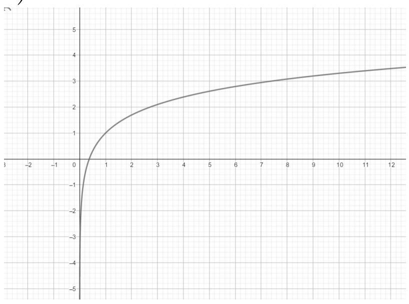
d)



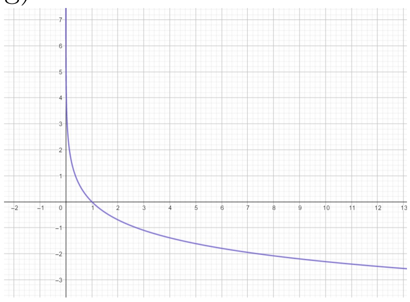
e)



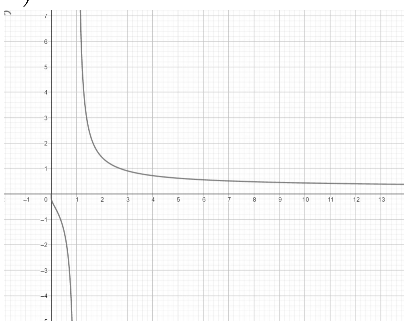
f)



g)



h)



15. $D_f = (0, +\infty)$

16. $x > 2^{1000}$

17. $0 < x < 2^{-1000}$

18. $0 < x < 2^{10^{-5}}$

19. $x > e^{M}$

20. $0 < x < e^{-M}$

21. 276 alunos.

22. a) 266,41 gramas

b) 600 gramas