

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - ICTE**

Lista 03 - Fundamentos de Matemática Elementar

1) Quais das funções abaixo são polinômios?

a) $p(x) = 1$

b) $p(x) = \sqrt{x} + 1$

c) $p(x) = \pi x^2 + 2x - 1$

d) $p(x) = \frac{1}{x} + x^2 + 3x - 2$

e) $p(x) = x^{3/2} - 4x^3 - x$

f) $p(x) = x(\cos x)^2 + 4x^4 + x^3$

g) $p(x) = (x + 1)^{10}$

h) $p(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

i) $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{20}}{20!}$

2) a) Se $x^2 - 1 = Q(x)(x - 1)$ então qual o valor de $Q(1)$?

b) Se $x^3 - 8 = Q(x)(x - 2)$ então qual o valor de $Q(2)$?

c) Se $x^4 - a^4 = Q(x)(x - a)$ então qual o valor de $Q(a)$?

d) Se $x^n - a^n = Q(x)(x - a)$, com $n \in \mathbb{N}$, então qual o valor de $Q(a)$?

3) Determine a , x_0 e x_1 em cada um dos itens abaixo:

a) $x^2 - 3x + 2 = a(x - x_0)(x - x_1)$

b) $x^2 - 2x - 3 = a(x - x_0)(x - x_1)$

c) $x^2 + 3x - 28 = a(x - x_0)(x - x_1)$

d) $2x^2 - 5x - 3 = a(x - x_0)(x - x_1)$

e) $-4x^2 + 5x - 1 = a(x - x_0)(x - x_1)$

f) $1 - x^2 = a(x - x_0)(x - x_1)$

4) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1;$

b) $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2;$

c) $\frac{x^2 + a^2}{x + a} = x + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -a;$

d) $(x^3 - a^3) = (x - a)(x^2 + a^2);$

e) $x^3 - a^2 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$

f) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-1} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$

5) Sendo $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, calcule $a + b$.

6) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são reais quaisquer com $a \neq 0$.

a) Verifique que

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

b) Explique a seguinte afirmação: "se $a > 0$, então o menor valor de $f(x)$ acontece quando $x = -\frac{b}{2a}$." Nesse caso, qual o menor valor de $f(x)$?

c) Mostre que se $a < 0$, então

$$f \left(-\frac{b}{2a} \right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

é o maior valor assumido por f .

7) Dado o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

sabendo que $P(\alpha) = 0$, calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \alpha$.

8) O resto da divisão de $2^{64} + 1$ por $2^{32} + 1$ é igual a

a) 1

b) 0

c) 4

d) 2

9) Se $x^{100} - 1 = Q(x)(x - 1)$, então o valor de $Q(1)$ é igual a:

a) 98

b) 99

c) 100

d) 0

10) Verifique que, para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a seguinte igualdade

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1).$$

Use o resultado acima para mostrar que a soma S dos termos da progressão geométrica

$$\{1, r, r^2, r^3, r^4, \dots, r^n\}, \quad r \neq 1,$$

é dada por

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

11) Se

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, calcule o valor de a e b .

12) O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + x$ é tal que $P(1) = 0$ e $P(x) = -P(-x)$. Calcule $P(2)$.

13) Determine A e B sabendo que

a) $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\};$

b) $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\};$

c) $\frac{x + 3}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\};$

d) $\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - 2, 3.$

14) Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = 3x^{101} + 1$ pelo polinômio $D(x) = x^2 - 1$.

15) O polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \dots + x^{222} + x^{111} + 1$ é divisível pelo polinômio $Q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x^2 + x + 1$?

16) Obtenha o quociente e o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ por $D(x) = x^2 + 2$.

17) Obtenha o quociente e o resto da divisão de $P(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$ por $D(x) = x^2 - 1$.

18) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $x - 1$, obtém-se resto igual a 2. Ao dividir $P(x)$ por $x + 1$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $x - 2$, calcule $\frac{ab}{c}$.

19) Um polinômio $P(x)$, dividido por $x + 1$ dá resto -1 , por $x - 1$ dá resto 1 e por $x + 2$ dá resto 1. Qual será o resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$?

20) Um polinômio $P(x)$, dividido pelo binômio $x - 1$, dá resto 3. O quociente desta divisão é então dividido pelo binômio $x - 2$, obtendo-se resto 2. Qual o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$?

Respostas

1) a), c), g), h), i)

2) a) 2

b) 12

c) $4a^3$

d) na^{n-1}

3) a) $a = 1$, $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$

b) $a = 1$, $x_0 = -1$ e $x_1 = 3$

c) $a = 1$, $x_0 = 4$ e $x_1 = -7$

d) $a = 2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$ e $x_1 = 3$

e) $a = -4$, $x_0 = \frac{1}{4}$ e $x_1 = 1$

f) $a = -1$, $x_0 = 1$ e $x_1 = -1$

4) a) F b) F c) F d) F e) F f) V

5) 0

7) 0

8) d)

9) c)

11) $a = -1$ e $b = 2$

12) 6

13) a) $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$

b) $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$

c) $A = -3$ e $B = 4$

d) $A = 3$ e $B = -2$

14) $3x + 1$

15) \sin

16) $Q(x) = 2x + 1$ e $R(x) = -3x - 3$

17) $Q(x) = x^2 + 4$ e $R(x) = -x + 5$

18) 9

19) $x^2 + x - 1$

20) $2x + 1$