Lógica

Lógica Proposicional
Resolução
Aula 10

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

p q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - Usa uma simples regra de inferência
  - Aplicação fácil, vantajosa e computacionalmente conveniente
  - Só se aplica a **cláusulas**
  - Necessário converter as fórmulas para a **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - **Teorema 1.4 – Princípio da Resolução para Lógica Proposicional**
    - Considere duas cláusulas α e β e seja p um literal tal que $p \in \alpha$ e $\neg p \in \beta$. Então:

$$\{\alpha, \beta\} \models \text{resolvente}(\alpha, \beta; p)$$

      - ou seja, o resolvente de duas cláusulas α e β é consequência lógica das duas cláusulas
    - $\text{resolvente}(\alpha, \beta; p) = (\alpha - p) \cup (\beta - \neg p)$
    - (é a cláusula obtida pela união de α e β, removendo-se os literais complementares = literais que são um a negação do outro)

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - Exemplo
    - Dadas as cláusulas
      - C_1: $\neg p \vee q$
      - C_2: $r \vee \neg q$
    - resolvente(C_1,C_2; q) = $\neg p \vee r$

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - Para cada um dos conjuntos de cláusulas a seguir indique todos os resolventes possíveis
    a) Dadas as cláusulas
       - C_1: $\neg p \vee q \vee r$
       - C_2: $r \vee \neg q$

    b) Dadas as cláusulas
       - C_1: $\neg p \vee q \vee r$
       - C_2: $\neg r \vee \neg q$

RESPOSTAS

a) resolvente(C_1,C_2; q) = $\neg p \vee r$

b) resolvente(C_1,C_2; q) = $\neg p \vee r \vee \neg r$

resolvente(C_1,C_2; r) = $\neg p \vee q \vee \neg q$

Lógica Proposicional

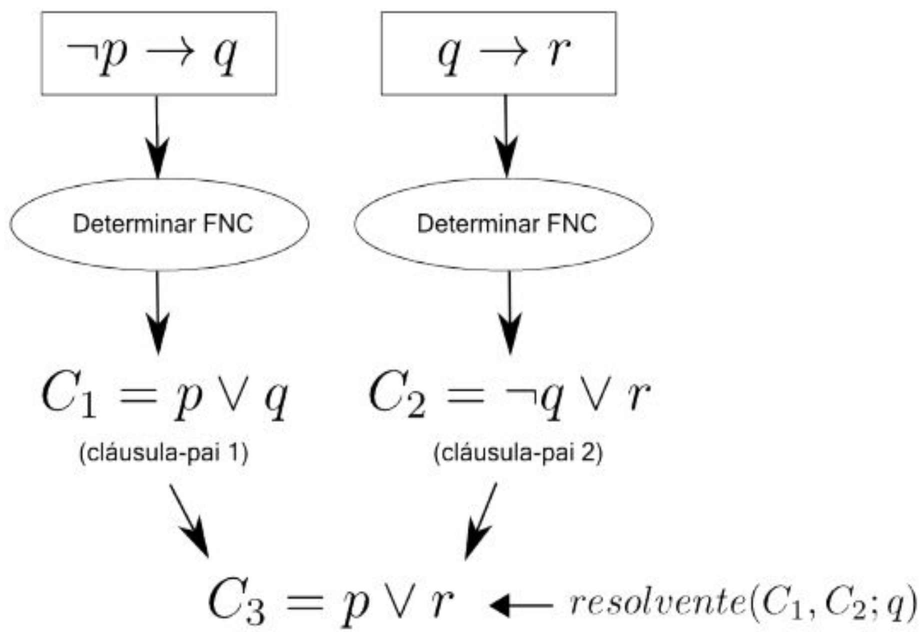
- **Resolução**
  - Alguma relação entre a resolução e as regras de inferência vistas em aulas anteriores?

MP	$p \rightarrow q, p \models q$	$\text{resolvente}(\neg p \vee q, p; p) \equiv q$
MT	$p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$	$\text{resolvente}(\neg p \vee q, \neg q; q) \equiv \neg p$
SH	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$	$\text{resolvente}(\neg p \vee q, \neg q \vee r; q) \equiv \neg p \vee r$

Fonte: (LEVADA, 2011, p. 137)

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - **IMPORTANTE**
    - Antes de aplicar a resolução a um conjunto de fórmulas é necessário convertê-las para a FNC (conjunção de cláusulas)



Fonte: (LEVADA, 2011, p. 138)

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - **Contração**

$$\frac{p \vee p \vee \beta}{p \vee \beta} \quad \text{(contração)}$$

    - Essa regra permite inferir novas cláusulas simplesmente apagando ou **contraindo** literais que ocorrem mais de uma vez na cláusula
  - **Regra da resolução**
    - É uma regra de inferência envolvendo duas cláusulas que contenham literais complementares

$$\frac{\alpha \vee p \qquad \neg p \vee \beta}{\alpha \vee \beta} \quad \text{(resolução)}$$

Lógica Proposicional

- **Inferência (prova) por resolução**
  - Uma cláusula α pode ser inferida por resolução de um conjunto de cláusulas Γ ($\Gamma \vdash_{RES} \alpha$) se a partir do conjunto $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$, por operações de resolução e contração, obtém-se a <u>cláusula vazia</u> (nil)
  - O método de inferência por resolução é um método de inferência por refutação
  - Pode-se refutar a **conclusão** ou **todo o teorema**
  - A prova por resolução não é única
    - ➔ A cláusula vazia nil pode ser obtida a partir de sequências diferentes de operações

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - **Negação da conclusão**

Entrada: conjunto de premissas e conclusão

1. Para cada premissa e a negação da conclusão, **encontre sua FNC**.
2. *(Neste ponto, todas as premissas e a negação da conclusão são conjunções de uma ou várias cláusulas)* **Identifique** e **isole** cada cláusula.
3. **Procure**, no conjunto de cláusulas, por duas que contenham **literais complementares**. **Aplique** a **regra da resolução** para eliminar os literais complementares das duas cláusulas gerando uma terceira, que passa a ser uma nova candidata junto às demais. *(Na prática, as duas cláusulas anteriores transformam-se em uma única, através de uma simples operação de cancelamento)*
4. **Repita** o processo descrito no **passo 3** até que se tenha duas cláusulas compostas por apenas literais complementares de tal modo que ao se aplicar a resolução, obtém-se a **cláusula vazia**, denotada (nil). Essa contradição finaliza a prova.

Fonte: Adaptado de (LEVADA, 2011, p. 139)

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - **Negação da conclusão**
    - Exemplo: $p \lor s \lor r, \neg s \lor r \mid\!-_{RES}\, p \lor r$
    - Inicialmente computamos $\neg(p \lor r) = \{\neg p, \neg r\}$

$$\dfrac{p \lor s \lor r \qquad\qquad \neg p}{s \lor r}$$

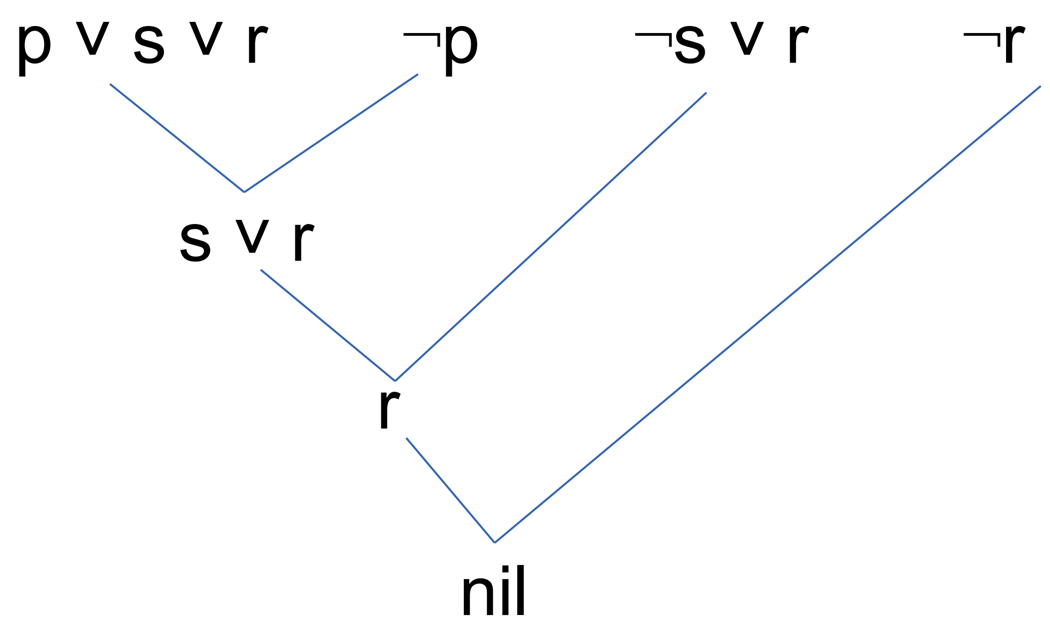
$$\dfrac{s \lor r \qquad\qquad \neg s \lor r}{r \lor r}$$

$$\dfrac{r \lor r}{r}$$

$$\dfrac{r \qquad\qquad \neg r}{\text{nil}}$$

Lógica Proposicional

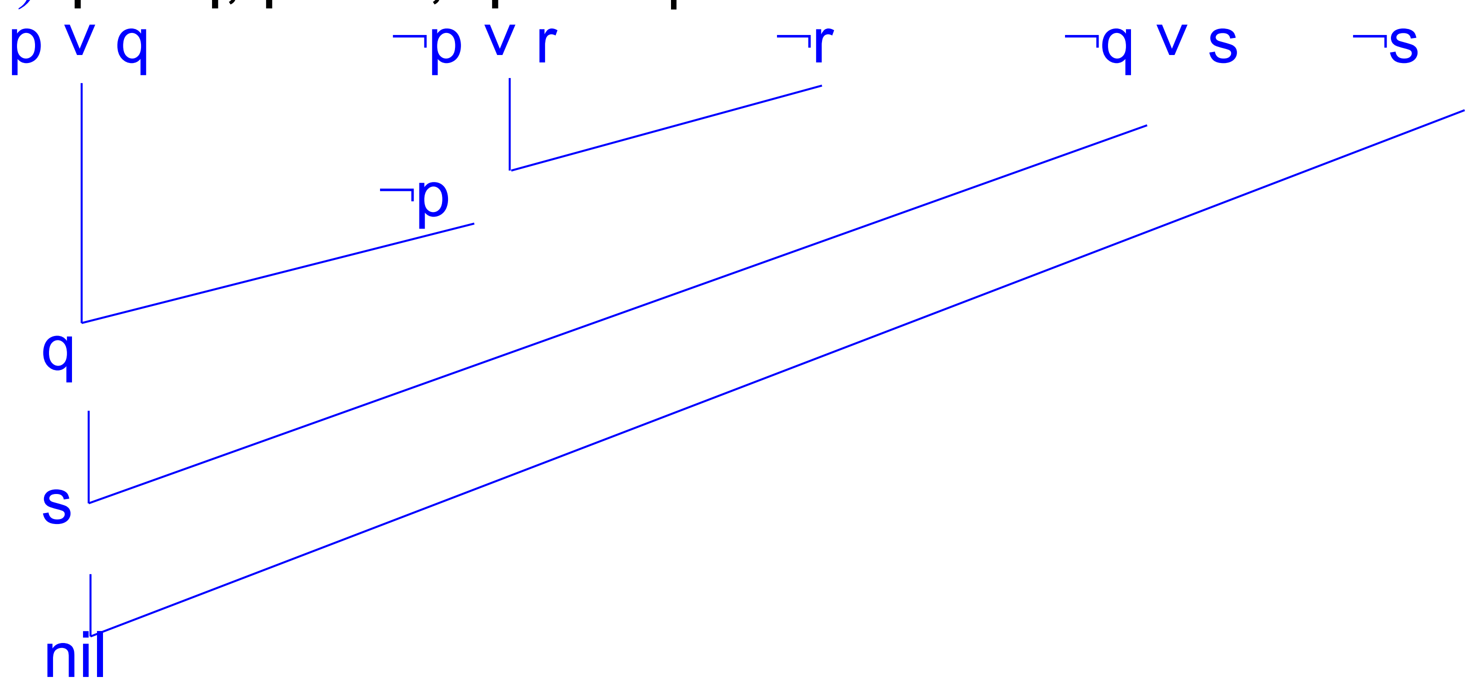
- **Inferência por resolução**
  - **Negação da conclusão**
    - Árvore de refutação



Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

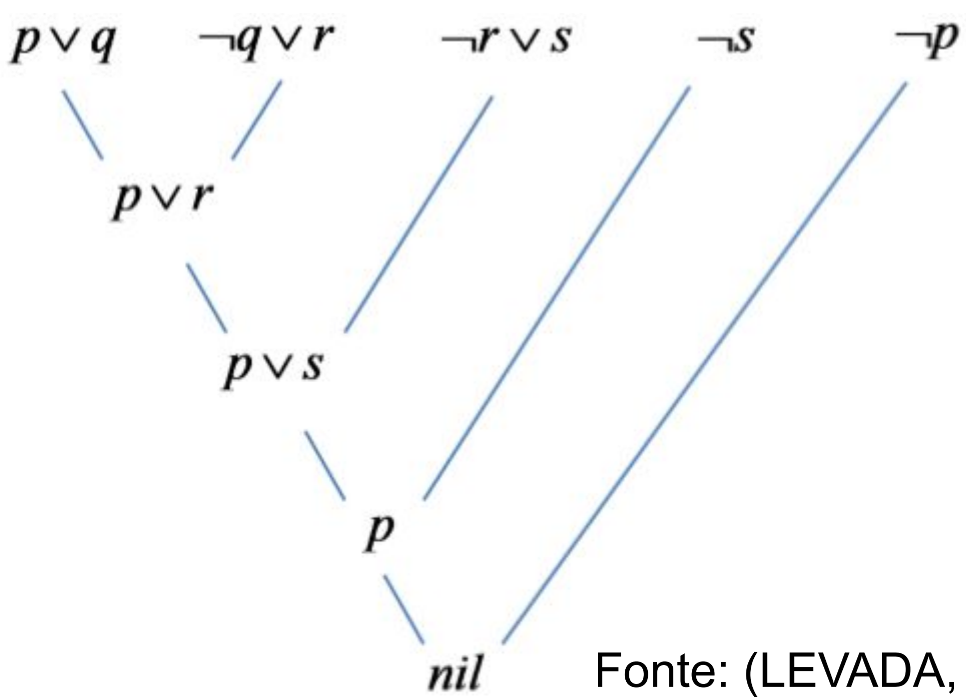
    a) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow s \vdash r \vee s$



Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

    b) $\neg p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \lor s,\ \neg s \mid\!- p$



Fonte: (LEVADA, 2011, p. 141)

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

c) $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee p \vdash p \leftrightarrow q$

$\neg p \vee q$ $\neg q \vee r$ $\neg r \vee p$ $p \vee q$ $\neg q \vee \neg p$

$\neg q \vee p$

$\neg p$

q

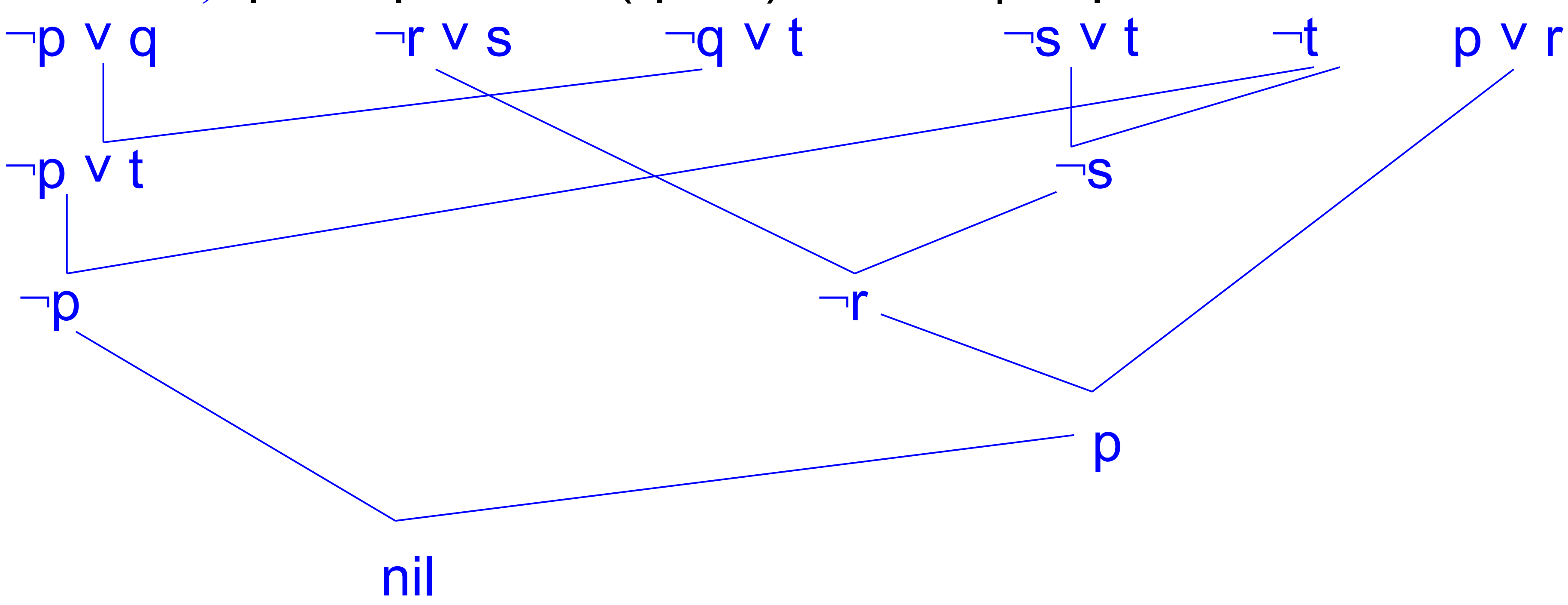
$\neg q$

nil

Exemplo que temos trabalhado em várias aulas

Lógica Proposicional

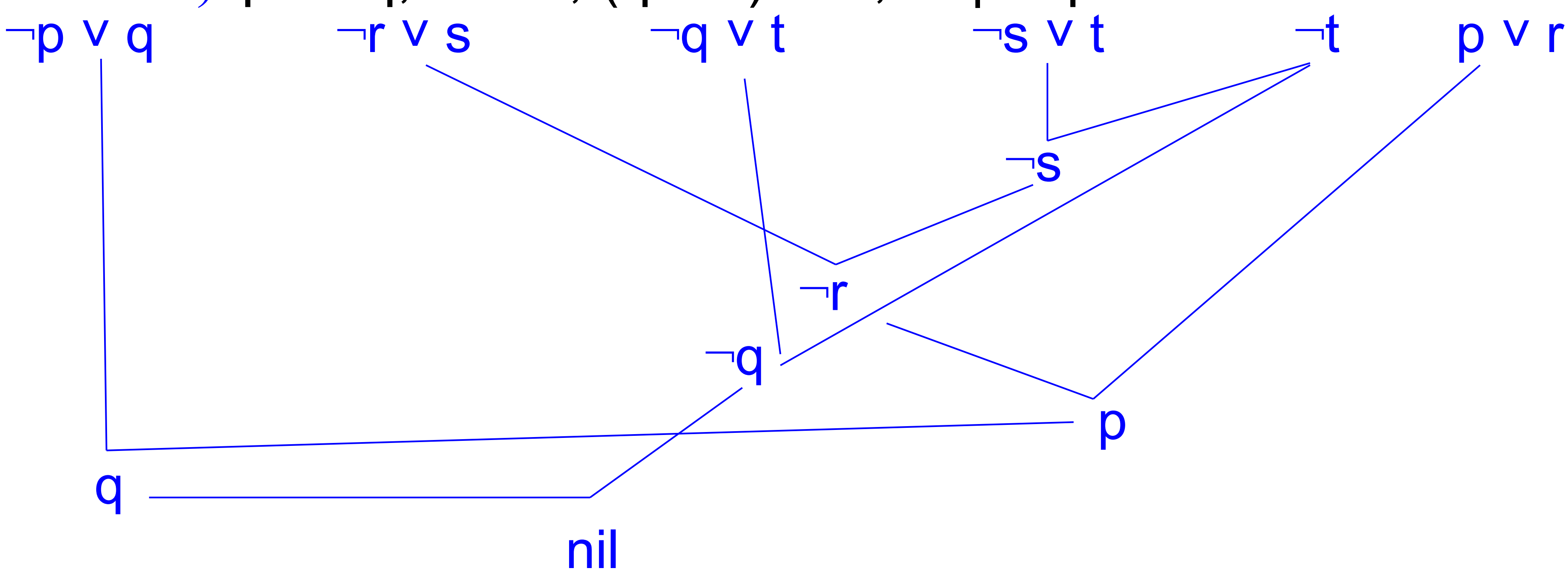
- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução
    - d) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s,\ (q \vee s) \rightarrow t,\ \neg t \vdash \neg p \wedge \neg r$



Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Verifique a validade do argumento a seguir usando inferência por resolução

d) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s,\ (q \vee s) \rightarrow t,\ \neg t \vdash \neg p \wedge \neg r$



Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

a) (1) $\neg q \vee r$ premissa
(2) $r \rightarrow \neg s$ premissa
(3) $p \rightarrow q$ premissa
(4) s premissa
(5) $\neg r \vee \neg s$ equivalência da condicional 2
(6) $\neg p \vee q$ equivalência da condicional 3
(7) $\neg r$ silogismo disjuntivo 4, 5
(8) $\neg q$ silogismo disjuntivo 1, 7
(9) $\neg p$ silogismo disjuntivo 6, 8

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \lor r,\ r \to \neg s,\ p \to q,\ s\ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

b) Encontrando FNC de premissas e conclusão negada

FNC($\neg q \lor r$)	$\neg q \lor r$
FNC($r \to \neg s$)	$r \to \neg s \equiv \neg r \lor \neg s$
FNC($p \to q$)	$p \to q \equiv \neg p \lor q$
FNC(s)	s
conclusão negada:	$\neg\neg p$
FNC($\neg\neg p$)	p

Lógica Proposicional

- **Inferência por resolução**
  - Dado o argumento

$$\neg q \vee r,\ r \rightarrow \neg s,\ p \rightarrow q,\ s \ \vdash \neg p$$

a) Prove que é válido usando regras de inferência

b) Prove que é válido usando inferência por resolução

b) Prova por resolução:

(1)	$\neg q \vee r$	cláusula da primeira premissa
(2)	$\neg r \vee \neg s$	cláusula da segunda premissa
(3)	$\neg p \vee q$	cláusula da terceira premissa
(4)	s	cláusula da quarta premissa
(5)	p	cláusula da negação da conclusão
(6)	$\neg p \vee r$	resolvente da resolução de 1 e 3
(7)	$\neg p \vee \neg s$	resolvente da resolução de 2 e 6
(8)	$\neg p$	resolvente da resolução de 4 e 7
(9)	nil	resolvente da resolução de 5 e 8

Lógica Proposicional

▪ Inferência por resolução

- Dado o argumento em língua natural

"Se o time joga bem, ele ganha o campeonato. Se o time não joga bem, o técnico é culpado. Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes. Os torcedores não estão contentes. Logo, o técnico é culpado."

a) Prove que é válido usando inferência por resolução

p: O time joga bem.
q: O time ganha o campeonato.
r: O técnico é culpado.
s: Os torcedores ficam contentes.
$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg s \vdash r$

$\neg p \vee q \qquad p \vee r \qquad \neg q \vee s \qquad \neg s \qquad \neg r$

$q \vee r$

$r \vee s$

r

nil