# Probabilidade e Estatística

Maria Sílvia

2025

## Aproximação Normal para distribuições Binomiais

Seja $X \sim Binomial(n, p)$, quando $n$ é grande, podemos aproximar a distribuição Binomial para uma distribuição Normal, com média $\mu = np$ e desvio-padrão $\sigma^2 = np(1-p)$, ou seja, $X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$.

## Aproximação Normal para distribuições Binomiais

Seja $X \sim \mathit{Binomial}(n, p)$, quando $n$ é grande, podemos aproximar a distribuição Binomial para uma distribuição Normal, com média $\mu = np$ e desvio-padrão $\sigma^2 = np(1-p)$, ou seja, $X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$.
Porém, há uma regra empírica para que a aproximação seja razoável ou muito boa,

## Aproximação Normal para distribuições Binomiais

Seja $X \sim Binomial(n, p)$, quando $n$ é grande, podemos aproximar a distribuição Binomial para uma distribuição Normal, com média $\mu = np$ e desvio-padrão $\sigma^2 = np(1-p)$, ou seja, $X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$.
Porém, há uma regra empírica para que a aproximação seja razoável ou muito boa, devemos ter $np \geq 10$ e $n(1-p) \geq 10$.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.
Denotamos por $\bar{x}$ e $s^2$ a média e a variância, respectivamente, de uma amostra.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.
Denotamos por $\bar{x}$ e $s^2$ a média e a variância, respectivamente, de uma amostra. E $\mu$ e $\sigma^2$ a média e a variância, respectivamente, da população.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.
Denotamos por $\bar{x}$ e $s^2$ a média e a variância, respectivamente, de uma amostra. E $\mu$ e $\sigma^2$ a média e a variância, respectivamente, da população.
Outra diferença que temos é sobre parâmetro, que descreve a população e, estatística que é calculado a partir de dados da amostra.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.
Denotamos por $\bar{x}$ e $s^2$ a média e a variância, respectivamente, de uma amostra. E $\mu$ e $\sigma^2$ a média e a variância, respectivamente, da população.
Outra diferença que temos é sobre parâmetro, que descreve a população e, estatística que é calculado a partir de dados da amostra.
Parâmetros, como se referem à população, são elementos desconhecidos.

## Distribuições Amostrais

Agora vamos analisar os dados de uma amostra para tirar conclusões a respeito de uma população, um grupo mais amplo.
Para diferenciar vamos deixar a nomenclatura mais precisa.
Denotamos por $\bar{x}$ e $s^2$ a média e a variância, respectivamente, de uma amostra. E $\mu$ e $\sigma^2$ a média e a variância, respectivamente, da população.
Outra diferença que temos é sobre parâmetro, que descreve a população e, estatística que é calculado a partir de dados da amostra.
Parâmetros, como se referem à população, são elementos desconhecidos.
Usamos uma estatística para estimar um parâmetro.

### Lei dos Grandes Números

Selecione observações ao acaso de qualquer população com média finita $\mu$. A medida que o número de observações aumenta (o tamanho da amostra cresce), a média amostral $\bar{x}$ se aproxima cada vez mais da média populacional $\mu$.

### Distribuição Amostral de $\bar{x}$

Podemos demonstrar, por leis de probabilidade, que a média amostral ou seja, a média de uma amostra de tamanho $n$, retirada de uma população com média $\mu$ e desvio-padrão $\sigma$ (não preciso conhecer a forma da distribuição), terá distribuição Normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2/n$.

### O teorema Limite Central

Extraia uma AAS de tamanho $n$ de qualquer população com média $\mu$ e variância $\sigma^2$. O teorema limite central diz que, quando $n$ é grande, a distribuição amostral da média amostral $\bar{x}$ é aproximadamente Normal:

## O teorema Limite Central

Extraia uma AAS de tamanho $n$ de qualquer população com média $\mu$ e variância $\sigma^2$. O teorema limite central diz que, quando $n$ é grande, a distribuição amostral da média amostral $\bar{x}$ é aproximadamente Normal:

$$\bar{x} \text{ é aproximadamente} \mathcal{N}\left\{\mu, \frac{\sigma^2}{n}.\right\}$$

A inferência estatística fornece métodos para extração de conclusões sobre população a partir de dados amostrais.

A inferência estatística fornece métodos para extração de conclusões sobre população a partir de dados amostrais.

### Condições para Inferência sobre a Média

A inferência estatística fornece métodos para extração de conclusões sobre população a partir de dados amostrais.

### Condições para Inferência sobre a Média

1. Temos uma AAS da população de interesse.

A inferência estatística fornece métodos para extração de conclusões sobre população a partir de dados amostrais.

### Condições para Inferência sobre a Média

1. Temos uma AAS da população de interesse. A população é grande quando comparada ao tamanho da amostra.

A inferência estatística fornece métodos para extração de conclusões sobre população a partir de dados amostrais.

### Condições para Inferência sobre a Média

1. Temos uma AAS da população de interesse. A população é grande quando comparada ao tamanho da amostra.
2. Não conhecemos a média da população $\mu$, mas conhecemos o desvio-padrão populacional $\sigma$.

# A lógica da estimação estatística

### A lógica da estimação estatística

A ideia principal é que a distribuição amostral de $\bar{x}$ é normal, com média $\mu$ e desvio-padrão $\sigma/\sqrt{n}$, SE tivermos uma amostra (AAS) de tamanho $n$ de uma população com média desconhecida $\mu$ e devio-padrão conhecido $\sigma$.

### A lógica da estimação estatística

A ideia principal é que a distribuição amostral de $\bar{x}$ é normal, com média $\mu$ e desvio-padrão $\sigma/\sqrt{n}$, SE tivermos uma amostra (AAS) de tamanho $n$ de uma população com média desconhecida $\mu$ e devio-padrão conhecido $\sigma$.
A estimação estatística inverte essa informação para dizer quão perto de $\bar{x}$ a média populacional $\mu$ provavelmente estará.

## A lógica da estimação estatística

A ideia principal é que a distribuição amostral de $\bar{x}$ é normal, com média $\mu$ e desvio-padrão $\sigma/\sqrt{n}$, SE tivermos uma amostra (AAS) de tamanho $n$ de uma população com média desconhecida $\mu$ e devio-padrão conhecido $\sigma$.
A estimação estatística inverte essa informação para dizer quão perto de $\bar{x}$ a média populacional $\mu$ provavelmente estará.
Chamamos o intervalo de números, $\bar{x} \pm \mathcal{C} d.p.$ de *intervalo de confiança de* $xx\%$ para $\mu$.

### Exemplo

Considere uma população de pessoas com idade entre 20 e 29 anos, e estamos interessados em avaliar o IMC-Índice de Massa Corpórea. Sabemos, de estudos passados que a variância dessa variável, nessa população é $\sigma^2 = 7,5^2\ (kg/m2)^2$.

## Exemplo

Considere uma população de pessoas com idade entre 20 e 29 anos, e estamos interessados em avaliar o IMC-Índice de Massa Corpórea.
Sabemos, de estudos passados que a variância dessa variável, nessa população é $\sigma^2 = 7,5^2\ (kg/m2)^2$.
Foi retirada uma amostra de 625 pessoas, e observou-se que média amostra foi $\bar{x} = 26,8$.

Assim, podemos fazer...

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \to \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0{,}3^2\right)$.

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0, 3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0,3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \to \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0,3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

e

$$P(-3 < Z < 3) = 0,997$$

.

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0,3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

e

$$P(-3 < Z < 3) = 0,997$$

.

Se tivermos uma AAS, de tamanho $n$ de uma distribuição, com desvio-padrão conhecido, $\sigma$, pelo teorema limite central, temos que $\bar{X}$ tem distribuição normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \to \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0,3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

e

$$P(-3 < Z < 3) = 0,997$$

.
Se tivermos uma AAS, de tamanho $n$ de uma distribuição, com desvio-padrão conhecido, $\sigma$, pelo teorema limite central, temos que $\bar{X}$ tem distribuição normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
Podemos transformar uma normal qualquer em normal padrão, através da transformação:

Seja $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{7{,}5^2}{625}\right) \to \bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; 0,3^2\right)$.
Sabemos que, para uma distribuição normal padrão, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, temos que

$$P(-1 < Z < 1) = 0,68$$

,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

e

$$P(-3 < Z < 3) = 0,997$$

.
Se tivermos uma AAS, de tamanho $n$ de uma distribuição, com desvio-padrão conhecido, $\sigma$, pelo teorema limite central, temos que $\bar{X}$ tem distribuição normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
Podemos transformar uma normal qualquer em normal padrão, através da transformação: $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$,

Assim,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96\right) = 0,95$$

Assim,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96\right) = 0,95$$

$$P\left(-1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

$\bar{X}$ é nossa estatística e $\mu$ é o parâmetro que não sabemos, mas queremos fazer fazer inferências sobre ele,

Assim,

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = P\left(-1,96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96\right) = 0,95$$

$$P\left(-1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$$

$\bar{X}$ é nossa estatística e $\mu$ é o parâmetro que não sabemos, mas queremos fazer fazer inferências sobre ele, então a partir da equação anterior, contruiremos um Intervalo de Confiança para $\mu$, da seguinte maneira.

$$\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

O valor $1,96$ veio da decisão de usar uma probabilidade de 95%, mas poderia ser generalizado para qualquer probabilidade, então genericamente, temos:

$$\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

O valor $1,96$ veio da decisão de usar uma probabilidade de 95%, mas poderia ser generalizado para qualquer probabilidade, então genericamente, temos:

$$\bar{X} \pm C\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

O valor $1,96$ veio da decisão de usar uma probabilidade de 95%, mas poderia ser generalizado para qualquer probabilidade, então genericamente, temos:

$$\bar{X} \pm C\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

### Interpretação de um intervalo de confiança

O nível de confiança é a taxa de sucesso do método que produz o intervalo. Não sabemos se o intervalo de confiança de 95% obtido a partir de uma amostra particular é um dos 95% que contém $\mu$, ou se é um dos 5% que não contém.

## Interpretação de um intervalo de confiança

O nível de confiança é a taxa de sucesso do método que produz o intervalo. Não sabemos se o intervalo de confiança de 95% obtido a partir de uma amostra particular é um dos 95% que contém $\mu$, ou se é um dos 5% que não contém.

Dizer que temos 95% de confiança em que o parâmetro desconhecido $\mu$ caia entre $c_1$ e $c_2$ é uma maneira abreviada de dizer que obtivemos esses números por um método que fornece resultados corretos em 95% das vezes.

### Teste de Significância

O objetivo de um teste de Significância é avaliar a evidência fornecida pelos dados sobre alguma afirmativa relativa a um parâmetro populacional.

### Teste de Significância

O objetivo de um teste de Significância é avaliar a evidência fornecida pelos dados sobre alguma afirmativa relativa a um parâmetro populacional.

Um jogador de basquete afirma que acerta 75% de seus lances livres no jogo. Para testar essa afirmativa, pedimos para ele tentar 20 lances livres. Ele acerta 8 dos 20

### Teste de Significância

O objetivo de um teste de Significância é avaliar a evidência fornecida pelos dados sobre alguma afirmativa relativa a um parâmetro populacional.

Um jogador de basquete afirma que acerta 75% de seus lances livres no jogo. Para testar essa afirmativa, pedimos para ele tentar 20 lances livres. Ele acerta 8 dos 20 0,40.

“Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.

“Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.
Logo, não acreditamos na sua afirmativa”.

"Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.
Logo, não acreditamos na sua afirmativa".

Podemos dizer quão forte é a evidência contra a afirmativa, fornecendo a probabilidade dele acertar 8 entre 20 lances livres, se realmente acertasse 75% a longo prazo.

"Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.
Logo, não acreditamos na sua afirmativa".

Podemos dizer quão forte é a evidência contra a afirmativa, fornecendo a probabilidade dele acertar 8 entre 20 lances livres, se realmente acertasse 75% a longo prazo.
Essa probabilidade é $0,0009$.

"Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.
Logo, não acreditamos na sua afirmativa".

Podemos dizer quão forte é a evidência contra a afirmativa, fornecendo a probabilidade dele acertar 8 entre 20 lances livres, se realmente acertasse 75% a longo prazo.
Essa probabilidade é $0,0009$.
Ele acertari 8 em 20 lances em apenas 9 vezes em 10mil tentativas.

"Alguém que acerta 75% de seus lances livres quase nunca acertaria apenas 8 de 20.
Logo, não acreditamos na sua afirmativa".

Podemos dizer quão forte é a evidência contra a afirmativa, fornecendo a probabilidade dele acertar 8 entre 20 lances livres, se realmente acertasse 75% a longo prazo.
Essa probabilidade é $0,0009$.
Ele acertari 8 em 20 lances em apenas 9 vezes em 10mil tentativas.
O pequeno valor da probabilidade convence que a afirmativa é falsa.

### Estabelecendo Hipóteses

Em um teste estatístico, a afirmação a ser testada é chamada de hipótese nula.

## Estabelecendo Hipóteses

Em um teste estatístico, a afirmação a ser testada é chamada de hipótese nula. O teste é planejado para avaliar a força da evidência *contra* a hipótese nula.

## Estabelecendo Hipóteses

Em um teste estatístico, a afirmação a ser testada é chamada de hipótese nula. O teste é planejado para avaliar a força da evidência *contra* a hipótese nula.
Em geral, a hipótese nula é uma afirmativa de "nenhum efeito" ou "nenhuma diferença".

## Estabelecendo Hipóteses

Em um teste estatístico, a afirmação a ser testada é chamada de hipótese nula. O teste é planejado para avaliar a força da evidência *contra* a hipótese nula.
Em geral, a hipótese nula é uma afirmativa de "nenhum efeito" ou "nenhuma diferença".

Escrevemos as hipóteses *estatísticas* da seguinte forma:

## Estabelecendo Hipóteses

Em um teste estatístico, a afirmação a ser testada é chamada de hipótese nula. O teste é planejado para avaliar a força da evidência *contra* a hipótese nula.
Em geral, a hipótese nula é uma afirmativa de "nenhum efeito" ou "nenhuma diferença".

Escrevemos as hipóteses *estatísticas* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 0, \\ H_a &: \mu \neq 0. \end{aligned}$$

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação,

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística afirmação sobre um parâmetro de uma distribuição de probabilidade

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística afirmação sobre um parâmetro de uma distribuição de probabilidade
iii. Estabeleça a estatística de teste

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística afirmação sobre um parâmetro de uma distribuição de probabilidade
iii. Estabeleça a estatística de teste
iv. Obtenha os dados

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística afirmação sobre um parâmetro de uma distribuição de probabilidade
iii. Estabeleça a estatística de teste
iv. Obtenha os dados
v. Calcule a estatística de teste para os dados encontrados

O teste de hipótese é a verificação de uma afirmação, os passos que devemos seguir são:

i. Estabeleça a hipótese científica afirmação que se quer estudar/saber
ii. Estabeleça a hipótese estatística afirmação sobre um parâmetro de uma distribuição de probabilidade
iii. Estabeleça a estatística de teste
iv. Obtenha os dados
v. Calcule a estatística de teste para os dados encontrados
vi. Encontre o Valor-$p$

### Valor-p e signifância estatística

A probabilidade, calculada supondo-se $H_0$ verdadeira, de que a estatística de teste assuma um valor tão ou mais extremo do que o valor realmente observado é chamada de valor-p do teste.

### Valor-p e signifância estatística

A probabilidade, calculada supondo-se $H_0$ verdadeira, de que a estatística de teste assuma um valor tão ou mais extremo do que o valor realmente observado é chamada de valor-p do teste.
Quanto menor o valor-$p$, mais forte é a evidência contra $H_0$ fornecida pelos dados.