



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Matrizes e Sistemas

Cláudia Gentile

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Departamento de Matemática - DM

19 de agosto de 2025

As notas de aula abaixo estão assim redigidas apenas para que possamos rever os assuntos *matrizes* e *sistemas lineares* de uma forma rápida, objetiva e eficaz. Este texto não tem a pretensão de ser completo e a maior parte dele foi retirada *ipsis litteris* dos livros

Boldrini, J. L.; Costa, S.I.R., Figueiredo, V.L., Wetzler, H.G., 'Algebra Linear, São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1980.

Steinbruch, A., Winterle, P., 'Algebra Linear, São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

Para estudar este conteúdo use o referencial teórico indicado no AVA. Nossa principal referência para a Unidade 1 é:

Baldin, Y.Y.; Furuya, Y.K.S., *Geometria Analítica para Todos e Atividades com Octave e Geogebra*, São Carlos, EDUFSCar, 2011. (Texto disponível no AVA)

Slides são muito resumidos. Use os slides como apoio, mas vá além!

Definição de matriz

Uma **matriz** A $m \times n$ (m por n) é um quadro retangular com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos indicar uma matriz A pela notação $A = [a_{ij}]$ ou $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ se quisermos especificar as dimensões da matriz. Se $m = n$ dizemos que A é uma **matriz quadrada de ordem n** .

A i -ésima linha de A é

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}], \quad 1 \leq i \leq m$$

e a j -ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Referimo-nos ao elemento a_{ij} que está na i -ésima linha e na j -ésima coluna de A como o (i,j) -ésimo elemento (ou coeficiente, entrada, coordenada) de A .

Se A é uma matriz quadrada de ordem n dizemos que os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a **diagonal principal** de A . Ou seja, a diagonal principal de uma matriz quadrada é composta pelos elementos a_{ij} com $i = j$.

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 4 & \textcircled{5} & 6 \\ 7 & 8 & \textcircled{9} \end{bmatrix}$$

Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Identidade - matriz $A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Usualmente denotamos a matriz identidade por I ou, se quisermos enfatizar a ordem, escrevemos I_n para indicar que trata-se de uma matriz quadrada de ordem n .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Nula - (qualquer ordem $m \times n$) matriz cujos coeficientes são todos nulos. Em geral usamos a letra O para indicar esta matriz.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

(Veja que as dimensões de uma matriz podem ser indicadas no nome ou na própria matriz)

Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Superior - matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ tal que....**complete**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Superior - matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Inferior - matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A igualdade de matrizes só está definida para matrizes de mesmas dimensões. Neste caso os elementos em posições correspondentes devem ser iguais.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a = 1, b = 4, c = 7, d = 0, e = 3, f = 0, g = 6, h = 0 \text{ e } i = 2.$$

Soma de Matrizes

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes de **mesma ordem** $m \times n$ então a soma de A e B , denotada por $A + B$ é a matriz $m \times n$ $C = [c_{ij}]$ definida por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. (Somam-se os elementos em posições correspondentes)

$$\text{Exemplo: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 11 & 0 \\ 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de uma matriz por um número real

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ e r é um número real qualquer, então a multiplicação da matriz A por r , $r \cdot A$, resulta na matriz $B = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = r \cdot a_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
(Cada elemento de A fica multiplicado por r).

$$\text{Exemplo: } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad r = -3, \quad rA = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -9 \\ -9 & -24 & 0 \\ -3 & -6 & -27 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sejam A, B e C matrizes $m \times n$ (todas com as mesmas dimensões) e sejam r e s números reais quaisquer. Então

- ▶ $A + B = B + A$
- ▶ $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ▶ Existe uma única matriz O $m \times n$ tal que $A + O = A$
- ▶ Para cada matriz A $m \times n$ existe uma única matriz D $m \times n$ tal que $A + D = O$.
Representamos D por $-A$ (de fato, $D = (-1) \cdot A$)

Propriedades

- ▶ $r(sA) = (rs)A$
- ▶ $(r + s)A = rA + sA$
- ▶ $r(A + B) = rA + rB$

Observação: dadas duas matrizes de mesma ordem A e B , $A - B = A + (-1)B$.

Produto (ou Multiplicação) de Matrizes

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $p \times n$, então o produto de A por B , AB , é a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Propriedades

Se A , B , C , O e I têm as dimensões adequadas, e r é um número real,

- ▶ $AI = A$ e $IA = A$;
- ▶ $A(B + C) = AB + AC$
- ▶ $(A + B)C = AC + BC$
- ▶ $(AB)C = A(BC)$
- ▶ $OA = O$ e $AO = O$
- ▶ $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

Importante: Em geral $AB \neq BA$ podendo, inclusive, um dos produtos estar definido e o outro não.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix} \neq AB$$

Observação: Note que, no exemplo acima, $AB = O$ muito embora $A \neq O$ e $B \neq O$.

A Transposta de uma Matriz:

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz cujas linhas são as colunas de A e cujas colunas são as linhas de A , que denominamos a **transposta de A** , e denotamos por A^T (ou A' , dependendo do texto).

$$A^T = [b_{ij}]_{n \times m}, \quad \text{onde } b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Se A e B têm as dimensões adequadas e r é um número real,

- ▶ $(A^T)^T = A$
- ▶ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶ $(AB)^T = B^T A^T$ (observe a ordem)
- ▶ $(rA)^T = rA^T$

Matrizes na forma escada reduzida

Definição

Uma matriz $m \times n$ está *reduzida à forma escada* se

1. o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1. Chamamos este elemento de *coeficiente líder* de sua linha.
2. cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os demais elementos iguais a zero.
3. todas as linhas que são formadas exclusivamente por zeros estão abaixo das linhas não nulas.
4. se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas da matriz e, se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Exemplos: as matrizes abaixo **estão na forma escada reduzida**. Verifique cada um dos itens listados na definição anterior para cada uma delas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos: as matrizes abaixo **não** são reduzidas à forma escada. Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre linhas:

Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

- Op. 1: Consiste em **trocar as posições** das linhas r e s , $1 \leq r \leq s \leq m$.
- Op. 2: Consiste em **multiplicar a r -ésima linha** por um número real $c \neq 0$, $1 \leq r \leq m$.
- Op. 3: Consiste em **substituir a r -ésima linha pela r -ésima linha somada à k vezes a s -ésima linha**, para algum número real k , $1 \leq r, s \leq m$.

Se A e A' são matrizes $m \times n$ e A' pode ser obtida a partir de A através de um **número finito** de operações elementares sobre linhas, então dizemos que A' é linha-equivalente a A (ou equivalente). Notação $A \sim A'$

Teorema

*Toda matriz A $m \times n$ é linha equivalente a uma **única** matriz reduzida à forma escada.*

Escalonamento

Para reduzir uma matriz A à sua forma escada reduzida usando as operações elementares sobre linhas siga o seguinte procedimento:

- P 1** Encontre a primeira coluna de A (da esquerda para a direita) cujos coeficientes não são todos nulos. Esta coluna será chamada de coluna pivô. Identifique o primeiro elemento não nulo da coluna pivô (de cima para baixo). Este elemento será chamado de pivô. Transforme-o em 1 (usando a **Op. 2**) e, se necessário, altere a posição da linha (usando a **Op. 1**) para que o pivô fique na primeira linha.
- P 2** Transforme em 0 (usando a **Op. 3**) todos os coeficientes abaixo do pivô.

- P 3** Ignore a coluna pivô (e as que estiverem a sua esquerda, caso haja alguma), ignore a primeira linha, e considere a submatriz restante. Repita os passos acima para a submatriz considerada. Importante: o novo pivô deverá estar abaixo e à direita do anterior.
- P 4** Após repetir o processo descrito anteriormente nos passos P1, P2 e P3 você deverá anular todos os elementos que estiverem acima do novo pivô.
- P 5** Repita o processo todo quantas vezes forem necessárias para que sua matriz ampliada fique na forma escada reduzida.

Exemplo:

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L1 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L1 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L1 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L4 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -1L2+L1 \\ 3L2+L3 \\ 7L2+L4 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4) \cdot L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1L_3+L_2 \\ -5L_3+L_4 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4) \cdot L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1L_3 + L_2 \\ -5L_3 + L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4) \cdot L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1L_3+L_2 \\ -5L_3+L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Equação linear em n variáveis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1)$$

$a_i, i = 1, \dots, n$ e b são números reais (conhecidos, em geral).

$a_i, i = 1, \dots, n$ são coeficientes e b é o termo independente.

$x_i, i = 1, \dots, n$ são incógnitas (ou variáveis).

Uma **solução** de uma equação linear em n variáveis é uma sequência de n números (s_1, s_2, \dots, s_n) que tem a seguinte propriedade: a igualdade em (1) é satisfeita quando fazemos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Sistema linear de m equações com n incógnitas:

é um conjunto de m equações, cada uma delas com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

Uma **solução** de um sistema linear como (2) é uma **sequência de n números** (s_1, s_2, \dots, s_n) que satisfaz **simultaneamente** todas as m equações do sistema.

Sistema homogêneo

Se $b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, dizemos que o sistema é **homogêneo**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Observe que todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução dada por $s_1 = 0, s_2 = 0, \dots, s_n = 0$, denominada **solução trivial**.

Um sistema linear pode ter:

- **uma única solução** e, neste caso, dizemos que o sistema é **determinado** (ou possível e determinado, ou compatível e determinado, ou ainda, consistente e determinado).
- **infinitas soluções** e, neste caso, dizemos que o sistema é **indeterminado** (ou possível e indeterminado, ou compatível e indeterminado, ou ainda, consistente e indeterminado).
- **nenhuma solução** e, neste caso, dizemos que o sistema é **impossível** (ou incompatível, ou ainda, inconsistente).

Exemplo:

Considere um sistema linear de duas equações e duas incógnitas no \mathbb{R}^2 (plano xy)

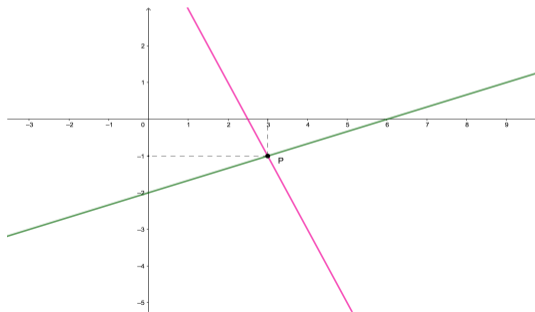
$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada uma das equações acima representa uma reta no plano xy .

Resolver o sistema, portanto, é equivalente a determinar os pontos comuns a essas duas retas.

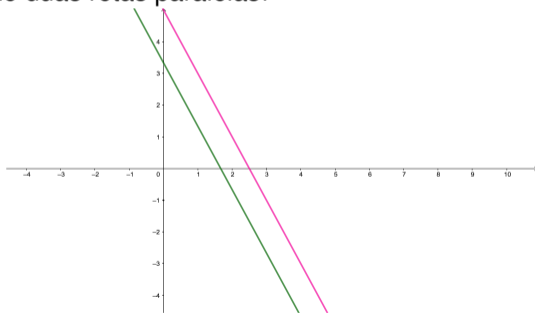
Caso 1 As duas retas se intersectam exatamente em um ponto (sistema possível determinado). Por exemplo, o sistema abaixo tem uma única solução: o ponto do plano $P = (3, -1)$.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$



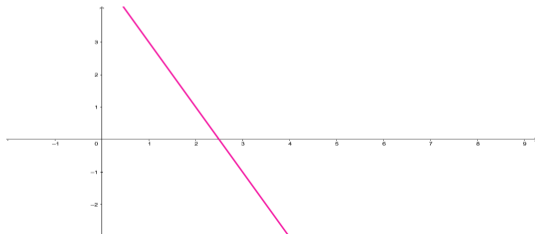
Caso 2 As duas retas não se intersectam (sistema impossível). Neste exemplo o sistema não tem solução - tratam-se de duas retas paralelas!

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$$



Caso 3 As duas retas são coincidentes (sistema indeterminado). Aqui o sistema tem infinitas soluções, pois ambas as equações representam a mesma reta. Ou seja, todos os pontos pertencentes à reta satisfazem ambas as equações.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$



Representação matricial: Dado o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

definimos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

de maneira que o sistema (4) pode ser escrito na forma matricial

$$AX=B$$

A matriz A é chamada de **matriz dos coeficientes** do sistema, e a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz aumentada** (ou **ampliada**) do sistema e é representada por $[A:b]$.

Teorema

Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes (uma obtida a partir da outra por meio de operações elementares sobre linhas) são também equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções.

Processo de Eliminação de Gauss-Jordan

Para resolver o sistema linear $AX = B$ proceda da seguinte forma:

1. forme a matriz aumentada $[A:B]$;
2. leve a matriz aumentada $[A:B]$ à forma escada reduzida usando as operações elementares sobre linhas (conforme procedimento que descreveremos abaixo);
3. resolva o sistema correspondente à matriz ampliada reduzida à forma escada.

Exemplo:

Vamos resolver o sistema de equações abaixo, escalonando a sua matriz ampliada até a forma escada reduzida.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

Solução: Consideremos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{L1 \leftrightarrow L3} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 11 \\ 4 & -3 & 2 & : & 0 \\ 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 3 & 1 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{L1 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 4 & -3 & 2 & : & 0 \\ 2 & -1 & 3 & : & 11 \\ 3 & 1 & 1 & : & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -7 & -2 & : & -24 \\ 0 & -3 & 1 & : & -1 \\ 0 & -2 & -2 & : & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{L4 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & -2 & -2 & : & -14 \\ 0 & -3 & 1 & : & -1 \\ 0 & -7 & -2 & : & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\sim]{(-1/2) \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & -3 & 1 & : & -1 \\ 0 & -7 & -2 & : & -24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -1L2+L1 \\ 3L2+L3 \\ 7L2+L4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{(1/4) \cdot L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} -1L_3 + L_2 \\ -5L_3 + L_4 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 4 & : & 20 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4) \cdot L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1L3+L2 \\ -5L3+L4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 4 & : & 20 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1/4) \cdot L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -1L_3+L_2 \\ -5L_3+L_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, o sistema proposto é equivalente a:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = -1 \\ 0x + 1y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + 1z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Ou seja, o sistema original tem o mesmo conjunto solução que o sistema

$$\begin{cases} x & & = & -1 \\ & y & = & 2 \\ & & z & = & 5 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Portanto trata-se de um sistema possível e determinado cuja única solução é

$$S = \{(-1, 2, 5)\}.$$