Capítulo 6 | Algumas distribuições de probabilidade contínuas

6.1 Distribuição uniforme contínua

Distribuição uniforme

A função de densidade da variável aleatória contínua uniforme X no intervalo $[A, B]$ é

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B - A}, & A \leq x \leq B, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

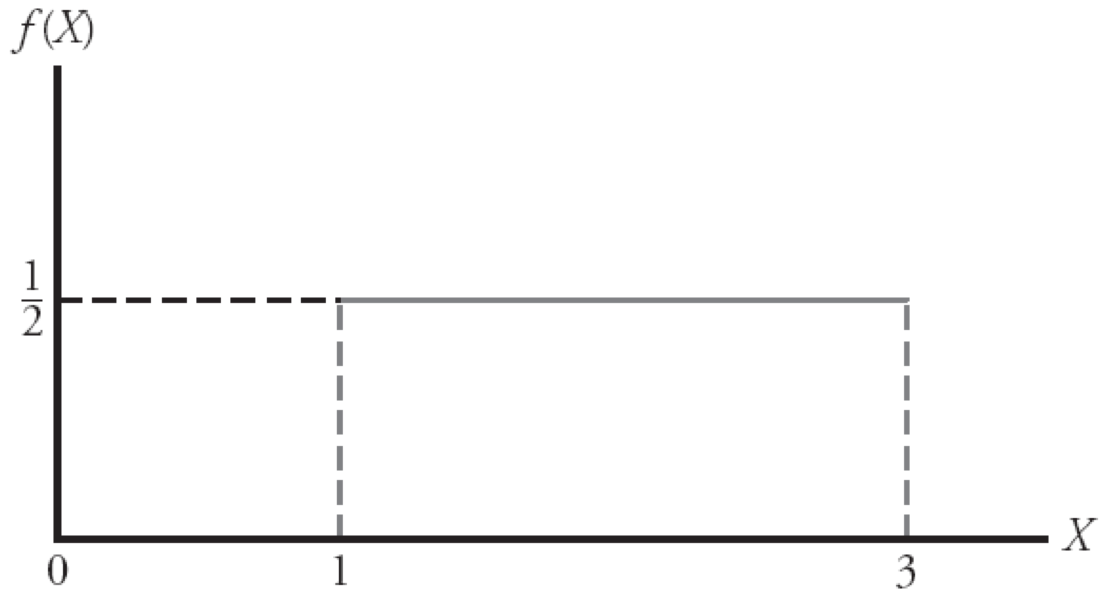

Figura 6.1 A função de densidade para uma variável aleatória no intervalo [1, 3].

Teorema 6.1

A média e a variância da distribuição uniforme são

$$\mu = \frac{A + B}{2} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{(B - A)^2}{12}.$$

6.2 Distribuição normal

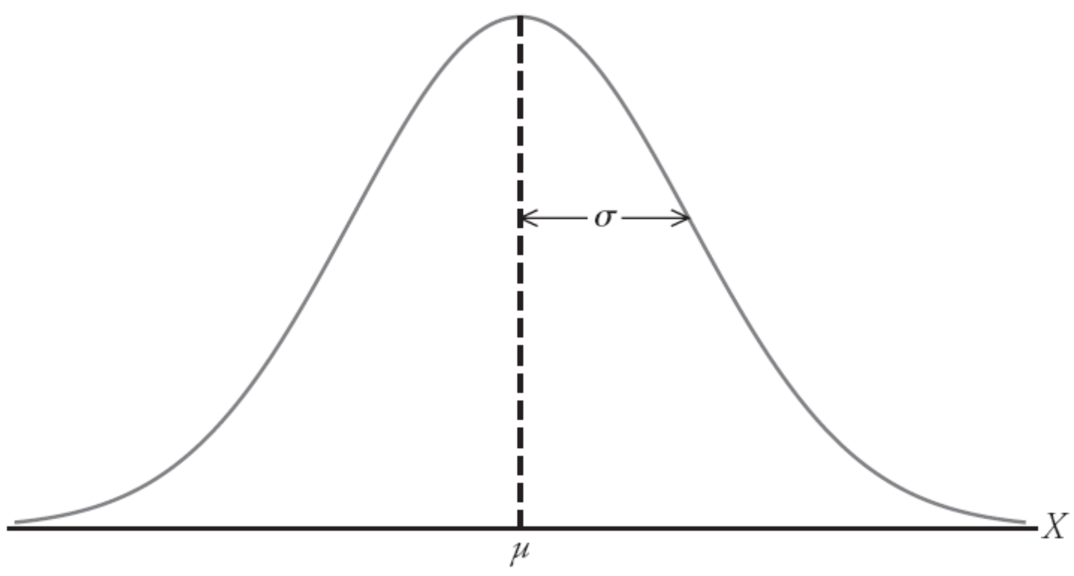

Figura 6.2 A curva normal.

Distribuição normal

A densidade da variável aleatória normal X, com média μ e variância σ^2, é

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

quando $\pi = 3{,}14159\ldots$ e $e = 2{,}71828\ldots$

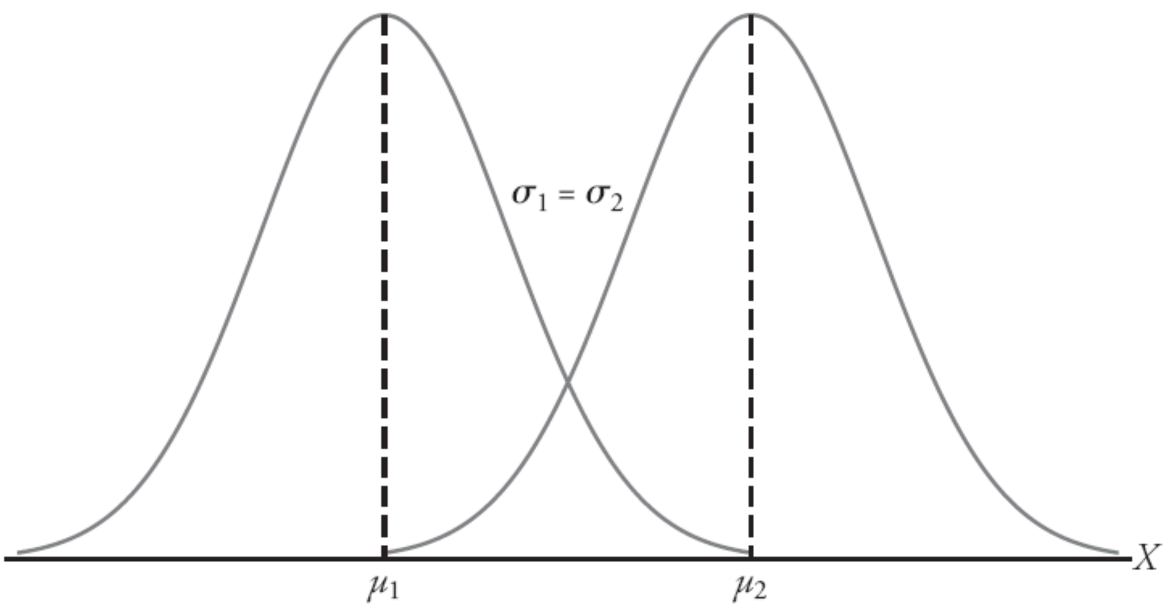

Figura 6.3 Curvas normais com $\mu_1 < \mu_2$ e $\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2$.

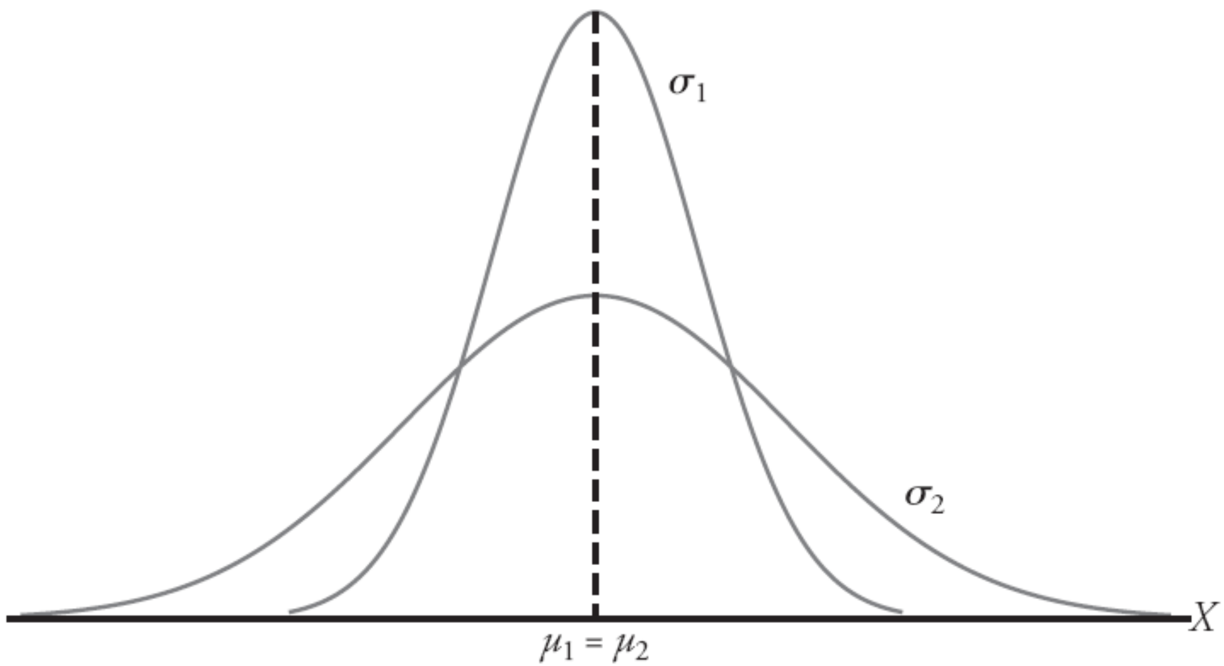

Figura 6.4 Curvas normais com $\mu_1 = \mu_2$ e $\sigma_1 < \sigma_2$.

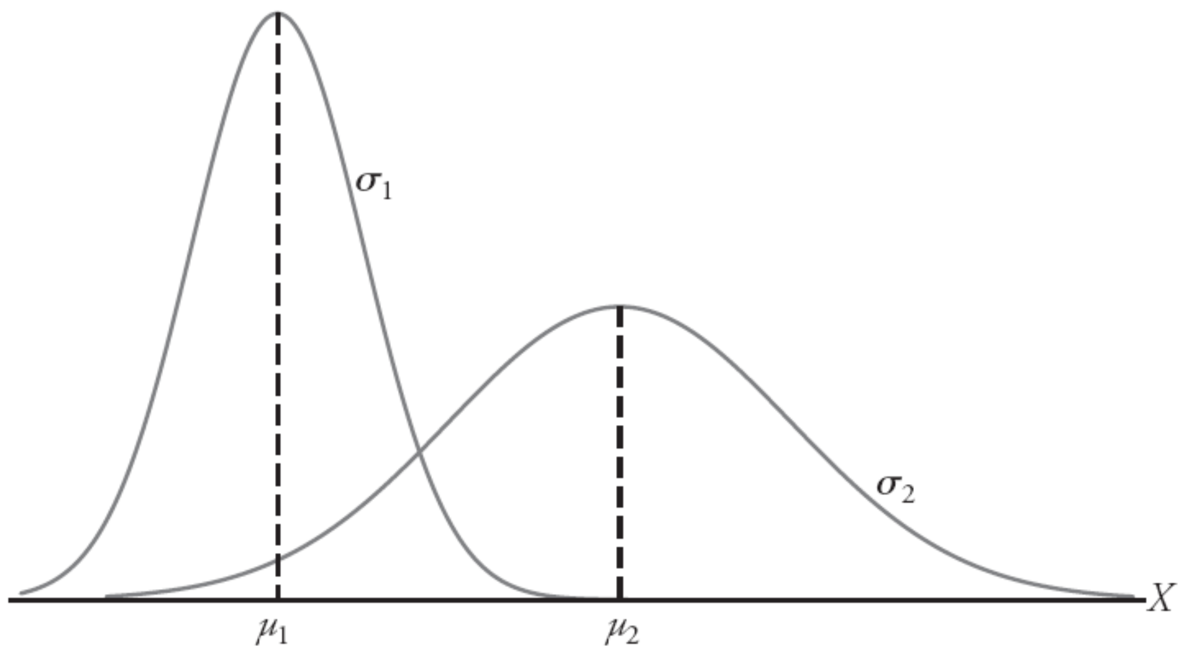

Figura 6.5 Curvas normais com $\mu_1 < \mu_2$ e $\boldsymbol{\sigma}_1 < \boldsymbol{\sigma}_2$.

6.3 Áreas abaixo da curva normal

Portanto, a curva normal da Figura 6.6,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x; \mu, \sigma)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx,$$

é representada pela área na região sombreada.

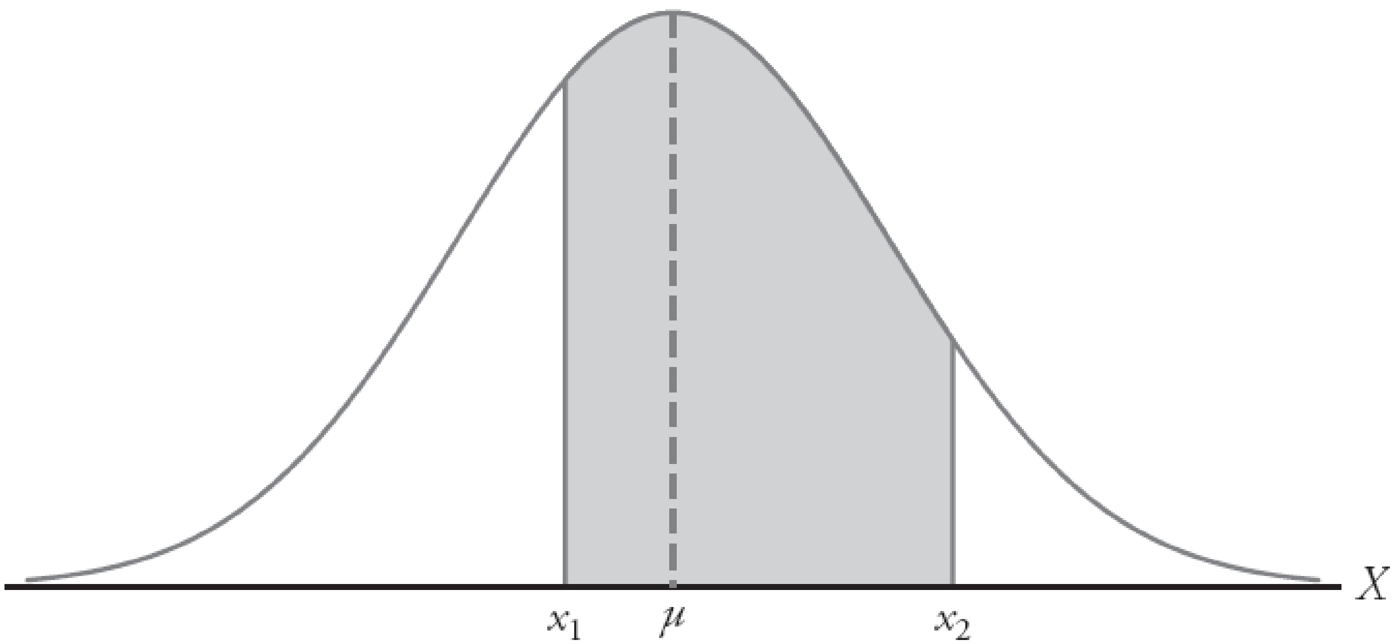

Figura 6.6 $P(x_1 < X < x_2)$ = área da região sombreada.

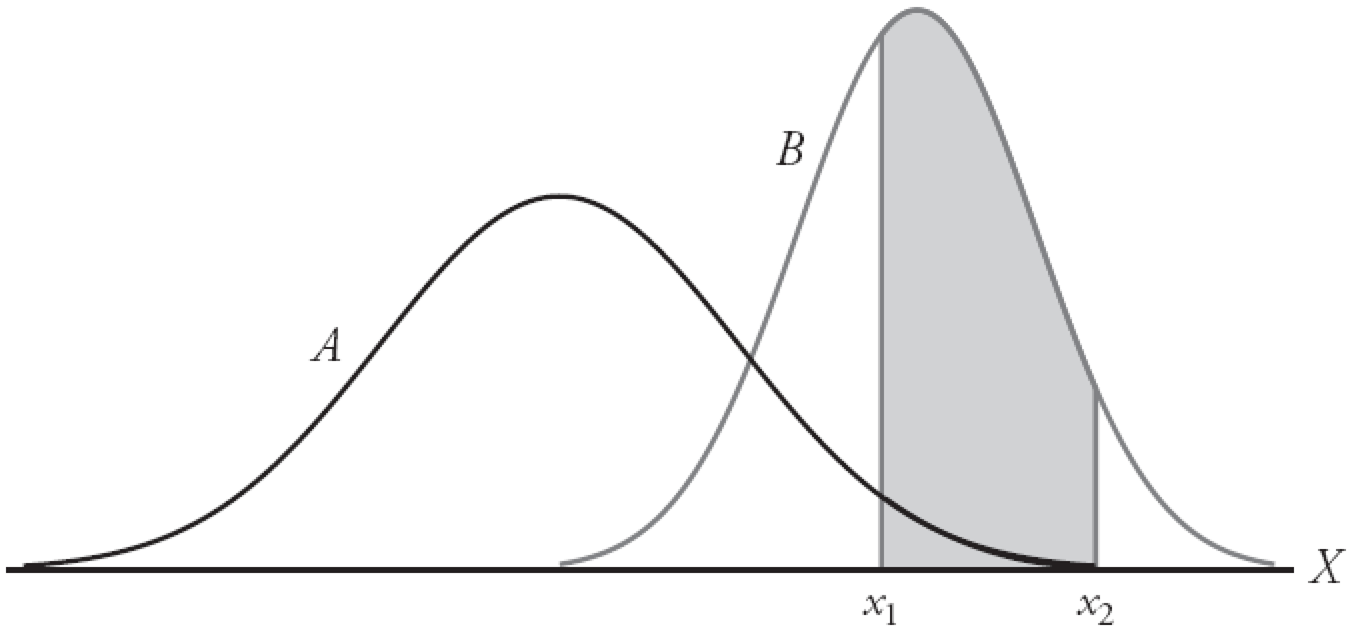

Figura 6.7 $P(x_1 < X < x_2)$ para curvas normais diferentes.

Podemos transformar todas as observações de qualquer variável aleatória normal *X* em um novo grupo de observações da variável aleatória normal *Z*, com média 0 e variância 1. Isso pode ser feito pela transformação

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Definição 6.1

A distribuição de uma variável aleatória normal com média 0 e variância 1 é chamada de *distribuição normal padrão.*

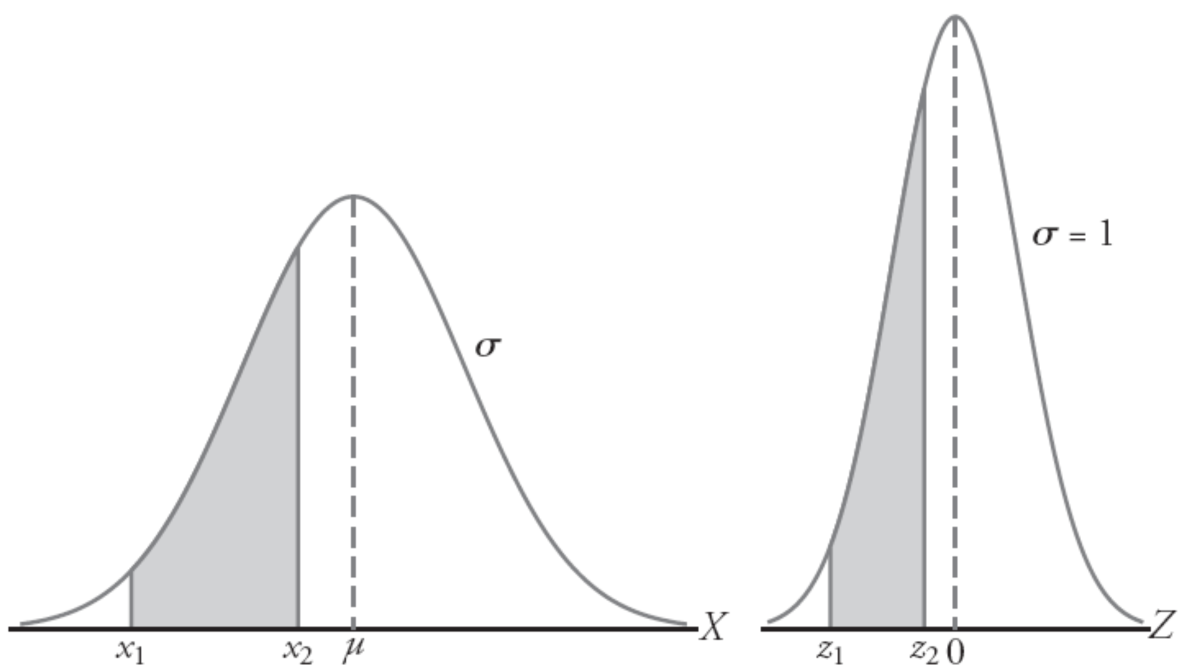

Figura 6.8 Distribuições normais original e transformada.

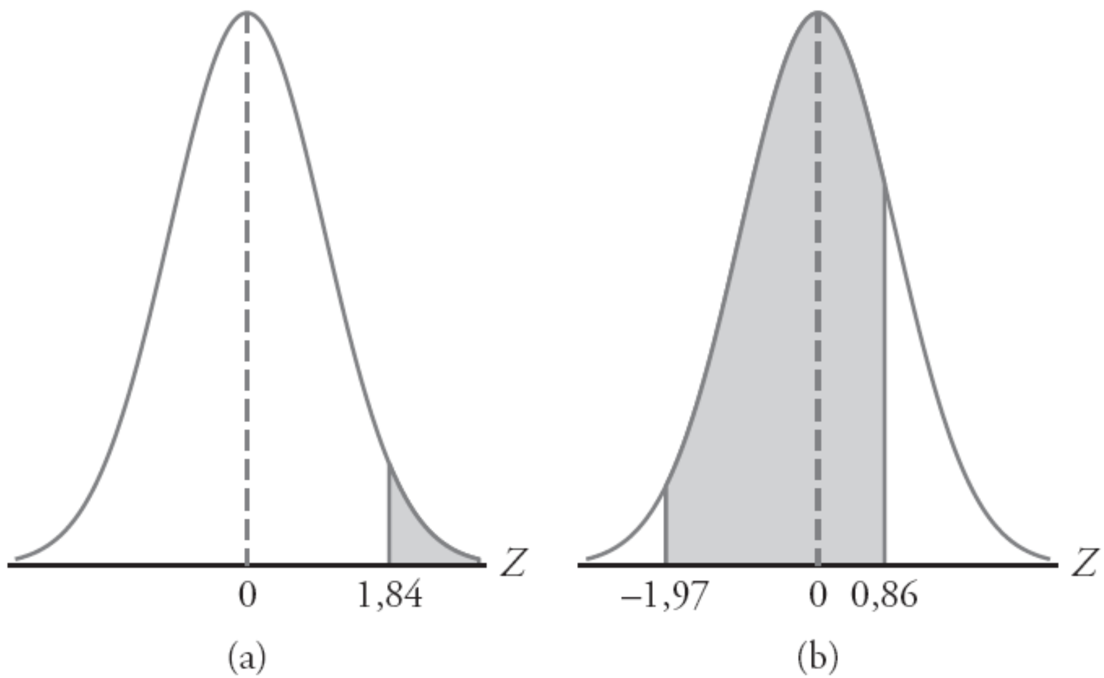

Figura 6.9 Áreas para o Exemplo 6.2.

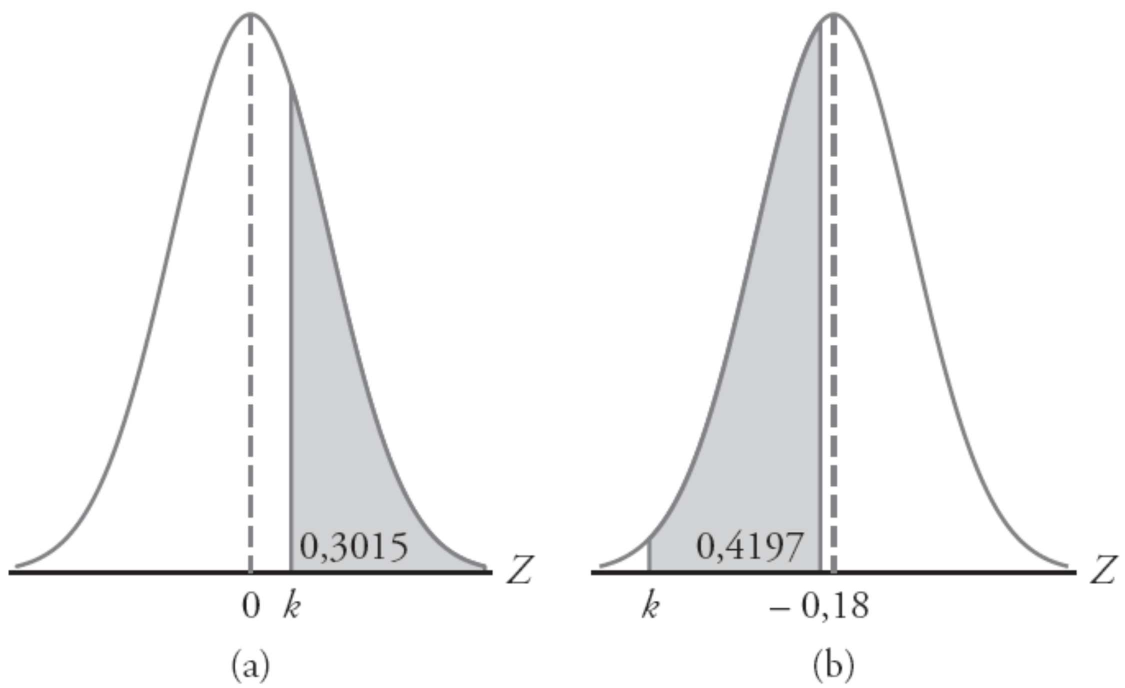

Figura 6.10 Áreas para o Exemplo 6.3.

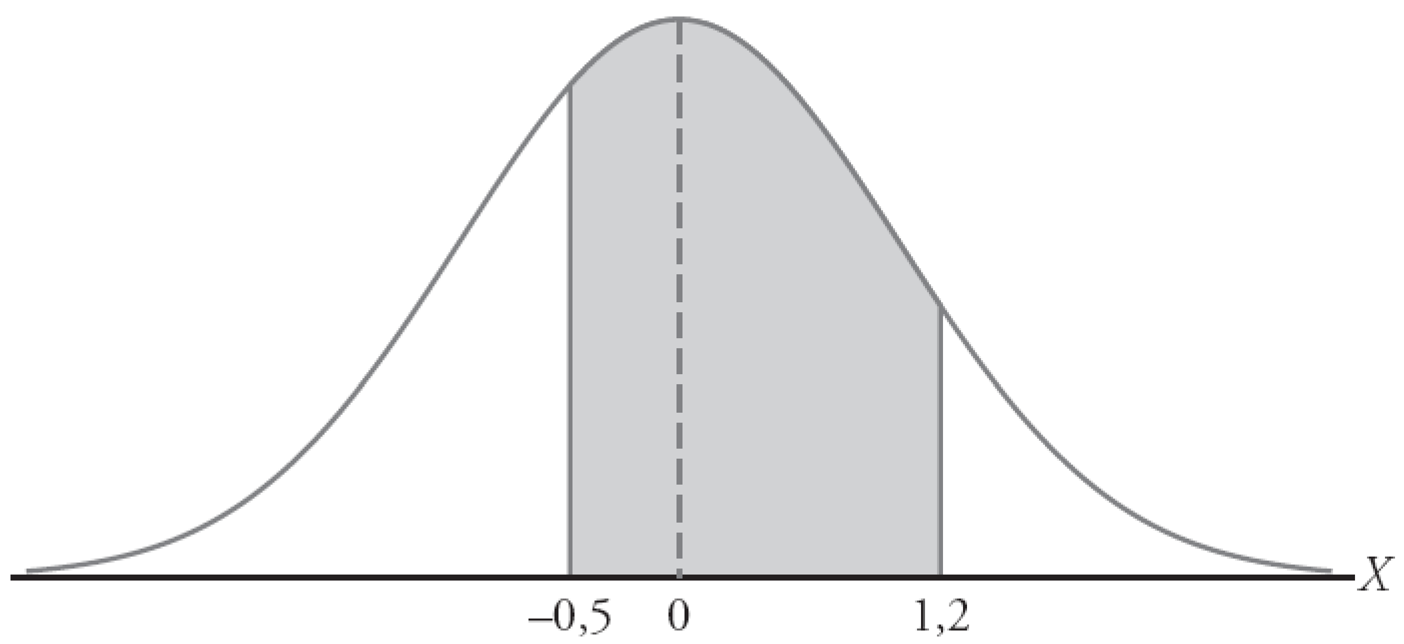

Figura 6.11 Área para o Exemplo 6.4.

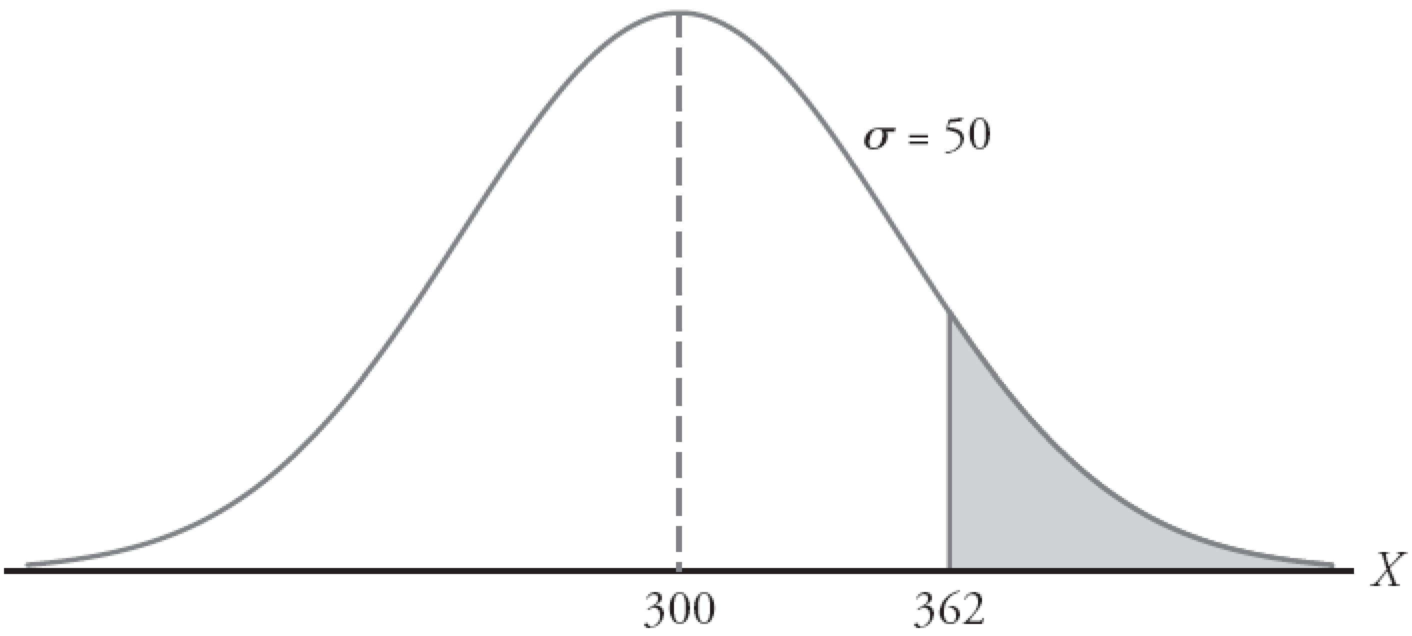

Figura 6.12 Área para o Exemplo 6.5.

6.4 Aplicações da distribuição normal

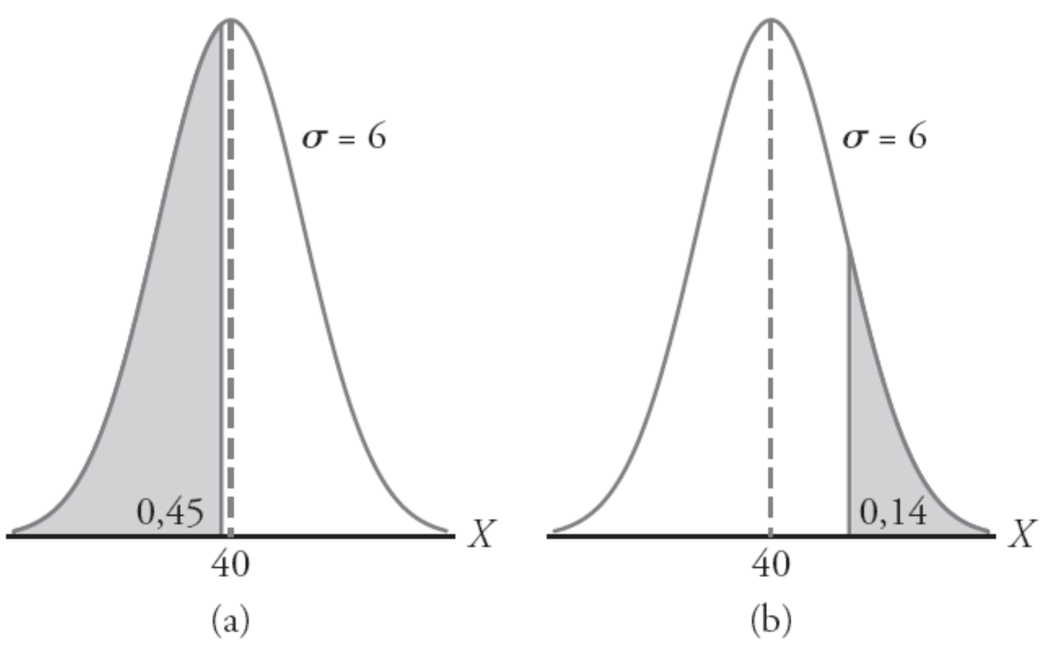

Figura 6.13 Áreas para o Exemplo 6.6.

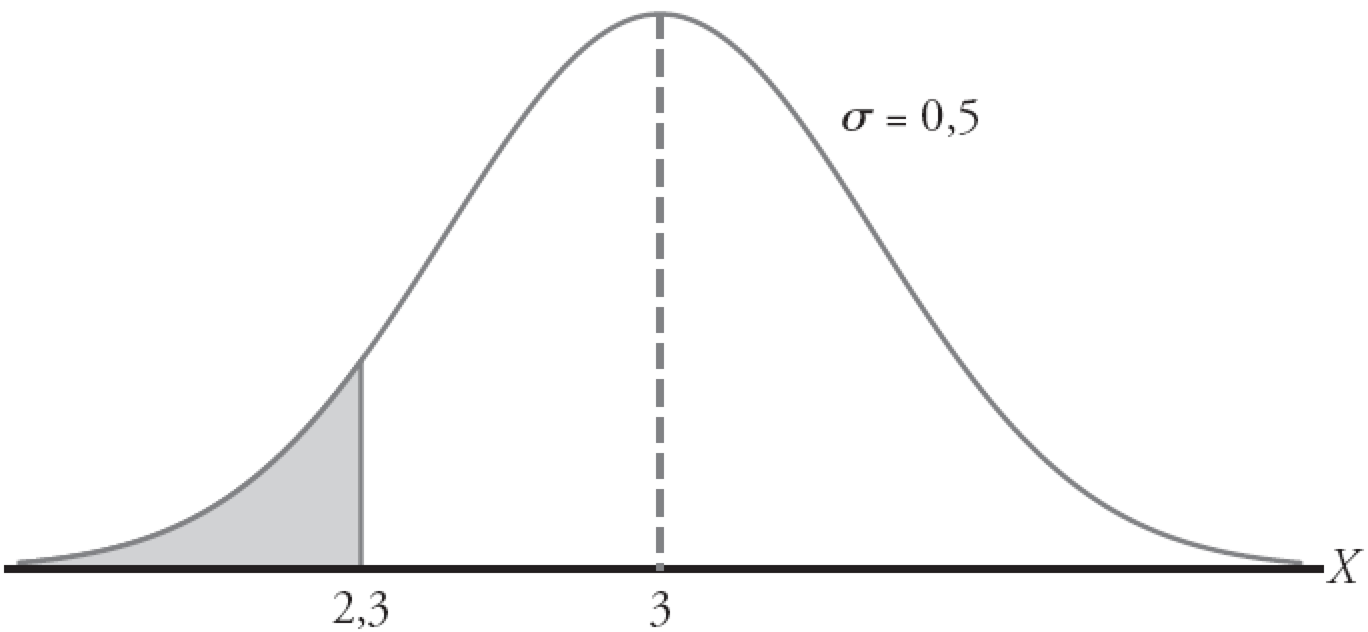

Figura 6.14 Área para o Exemplo 6.7.

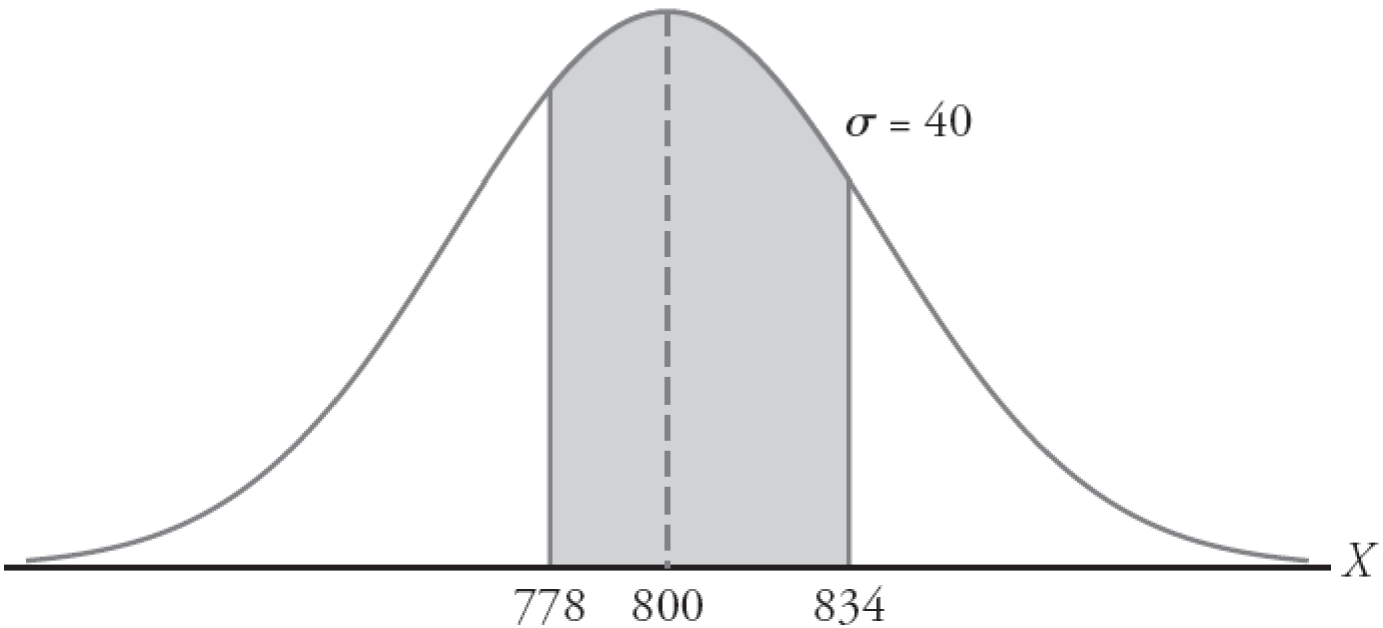

Figura 6.15 Área para o Exemplo 6.8.

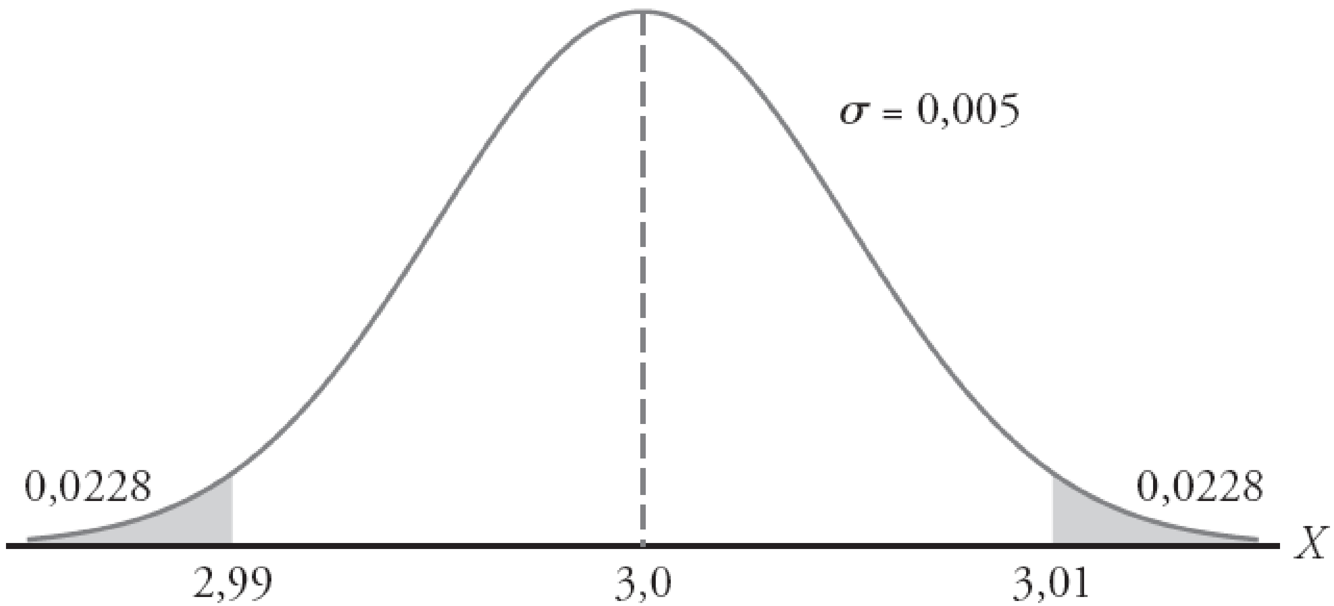

Figura 6.16 Área para o Exemplo 6.9.

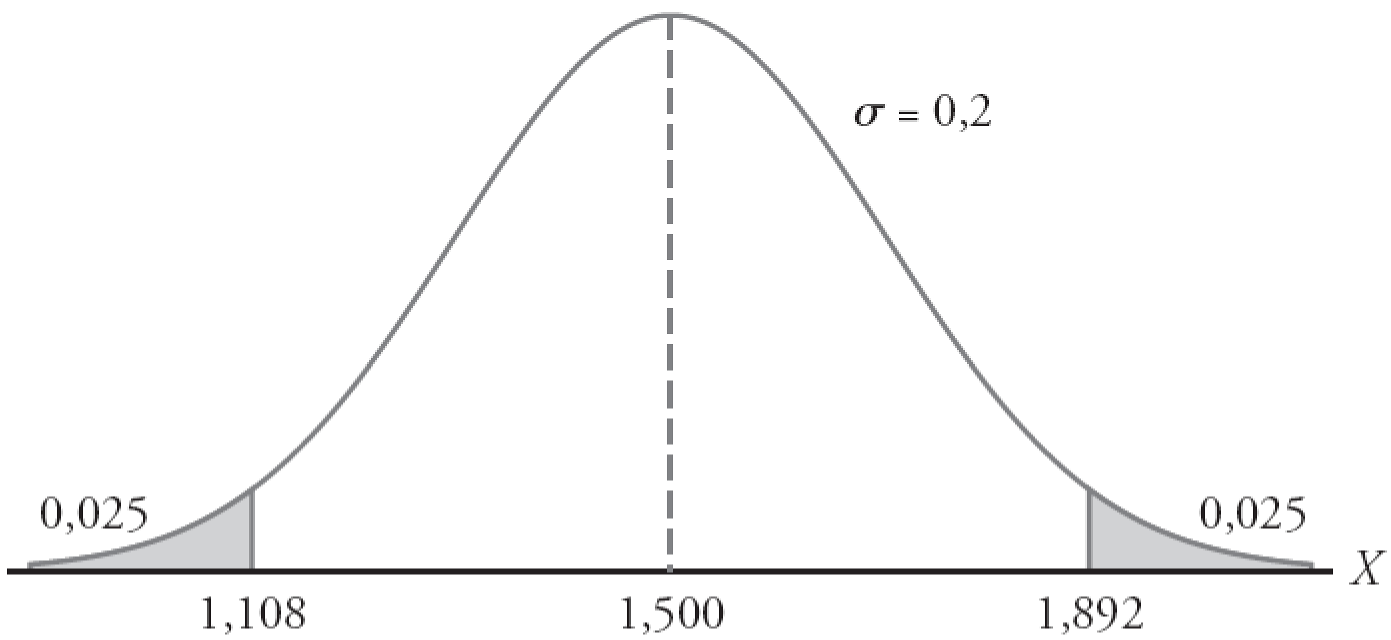

Figura 6.17 Área para o Exemplo 6.10.

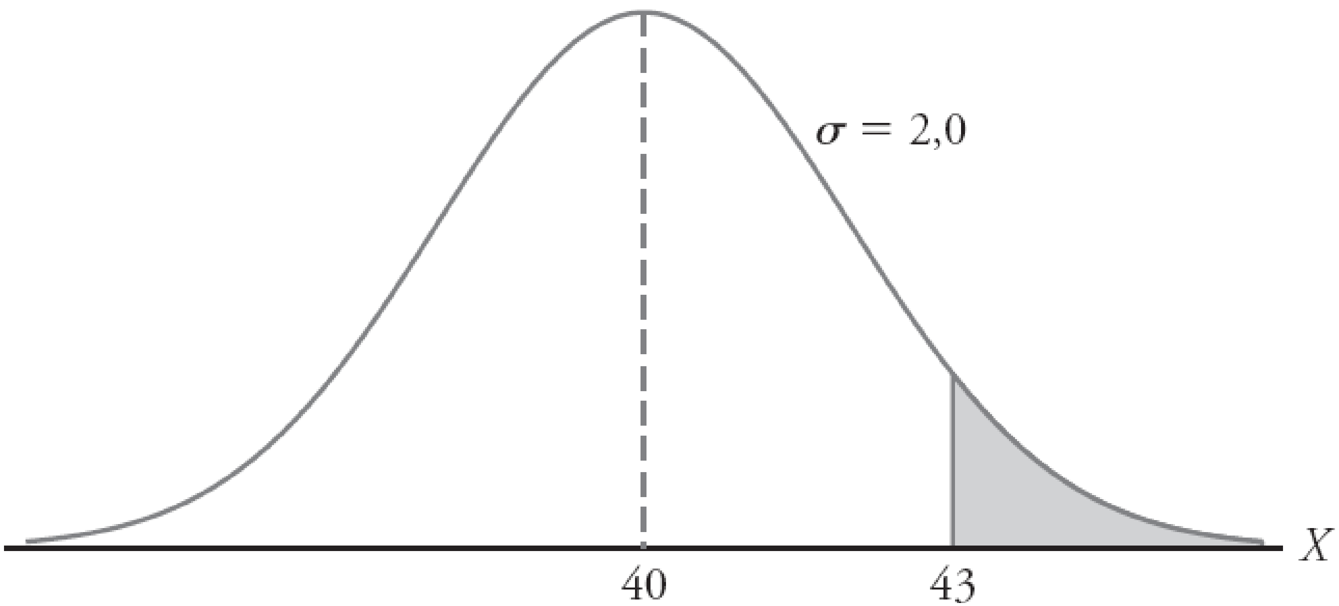

Figura 6.18 Área para o Exemplo 6.11.

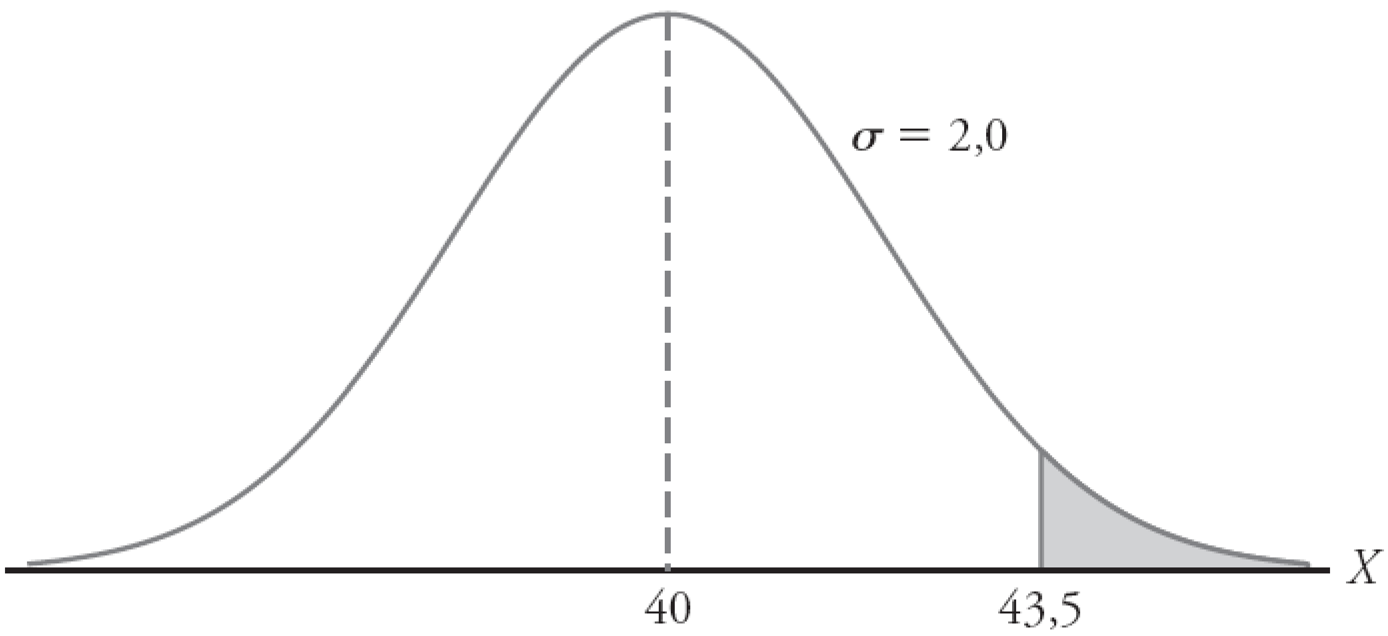

Figura 6.19 Área para o Exemplo 6.12.

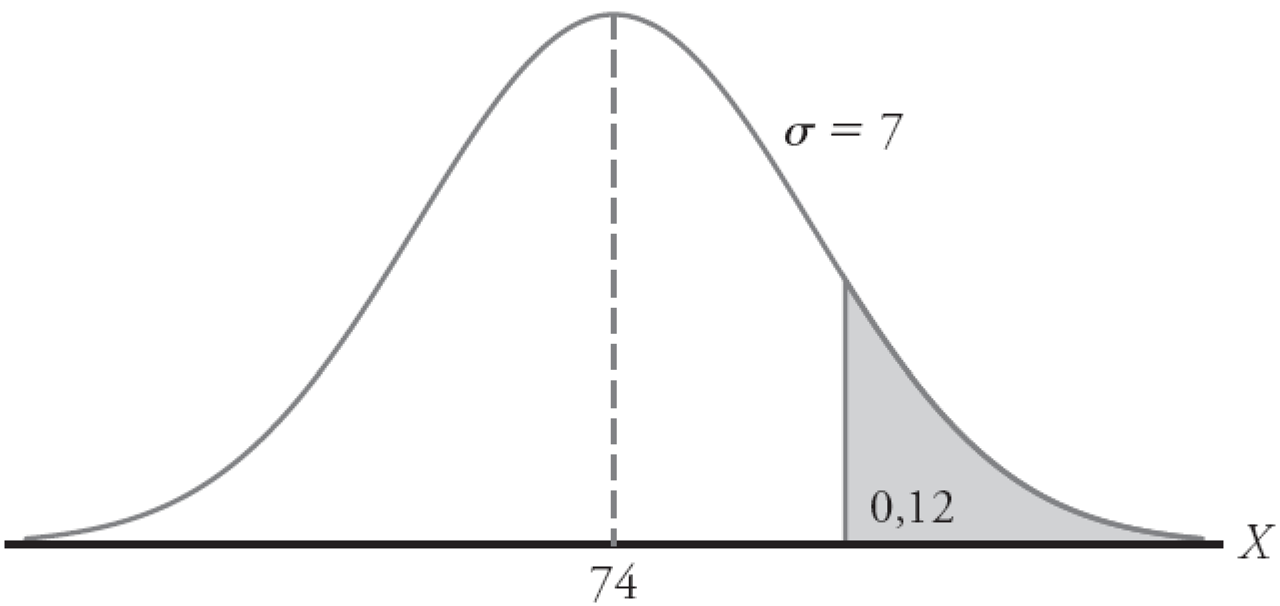

Figura 6.20 Área para o Exemplo 6.13.

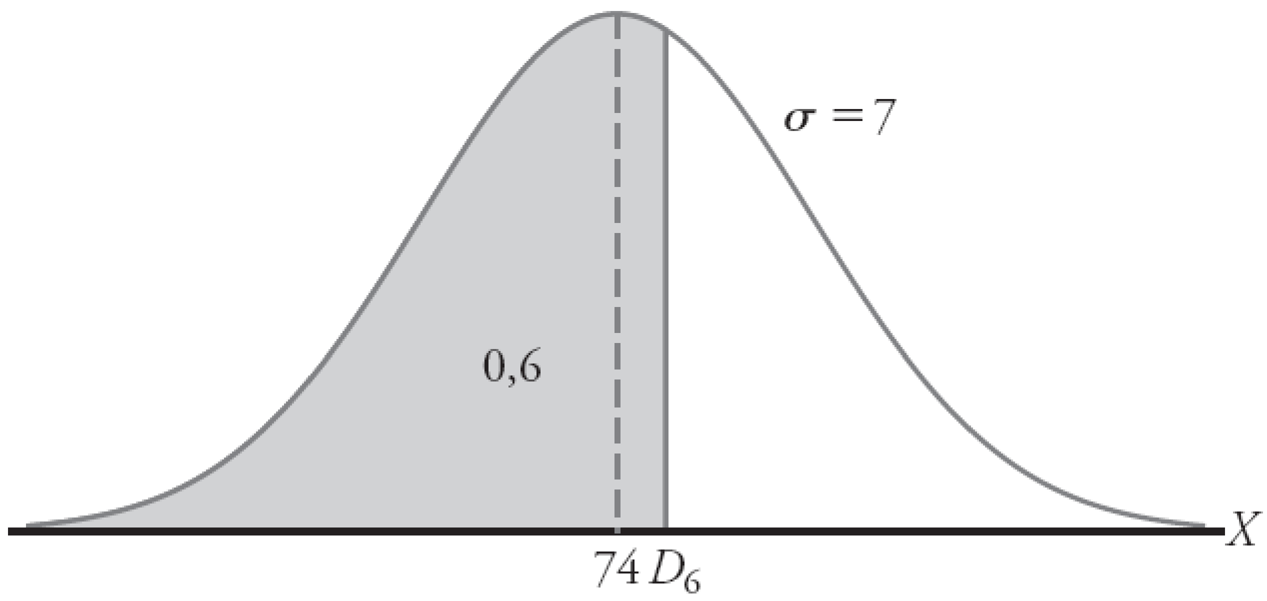

Figura 6.21 Área para o Exemplo 6.14.

6.5 Aproximação normal da binomial

Teorema 6.2

Se X é uma variável aleatória binomial com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$, então a forma limite da distribuição de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}},$$

quando $n \to \infty$, é a distribuição normal padrão $n(z; 0, 1)$.

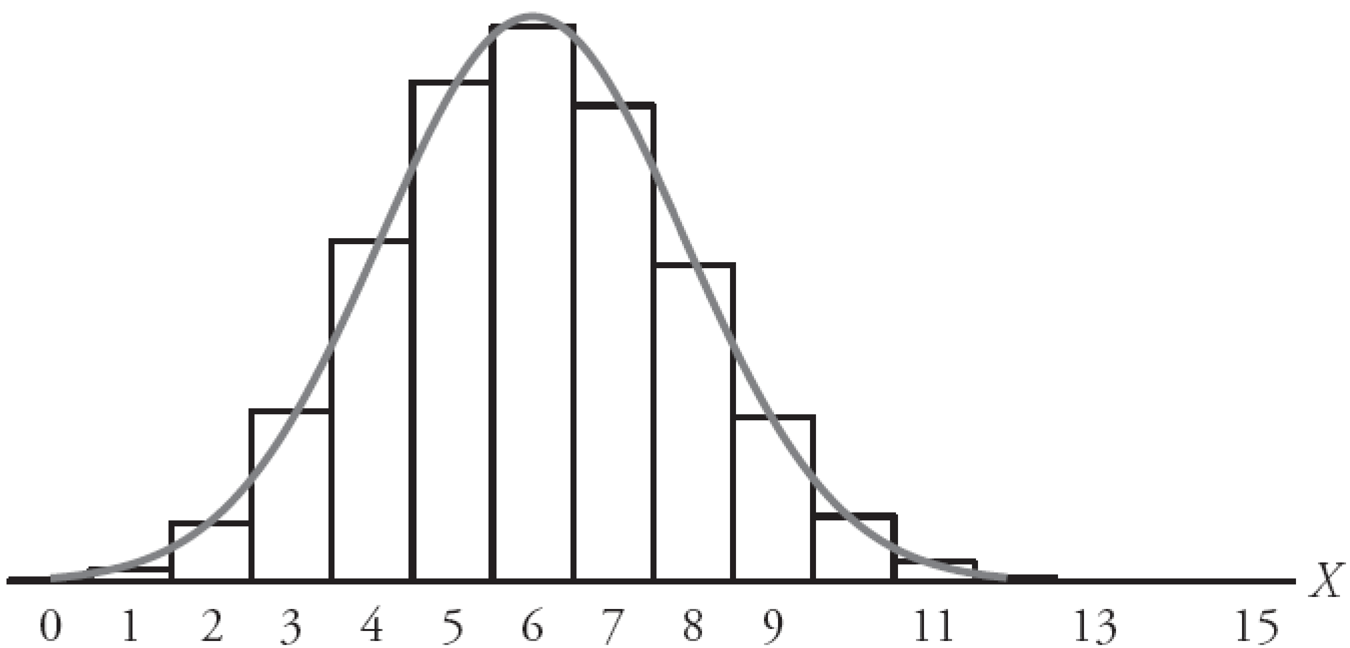

Figura 6.22 Aproximação normal de $b(x; 15, 0{,}4)$.

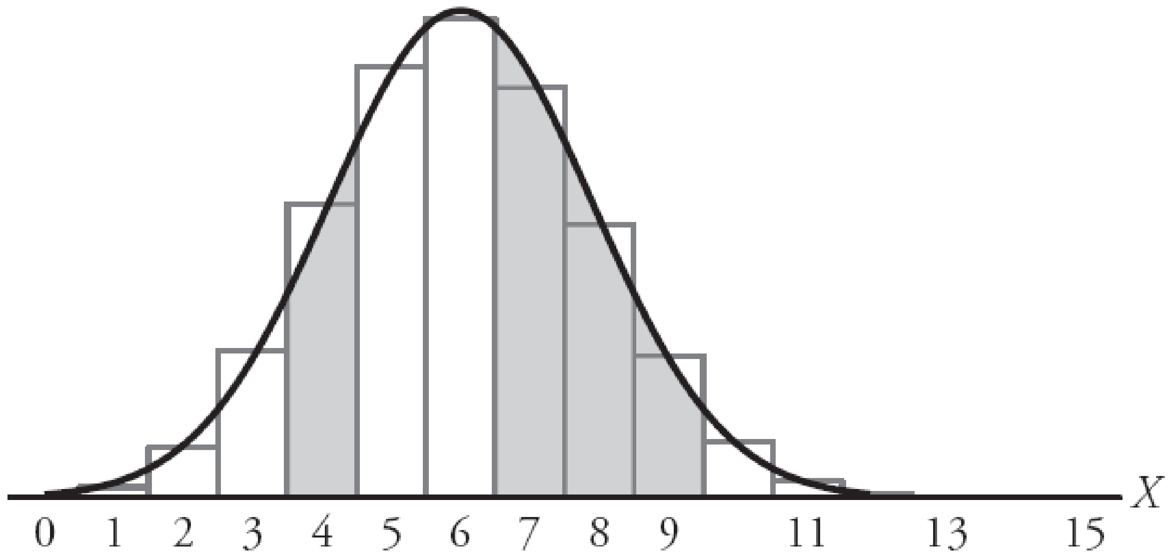

Figura 6.23 Aproximação normal de $b(x, 15, 0{,}4)$ e $\sum_{x=7}^{9} b(x; 15{,}0{,}4)$.

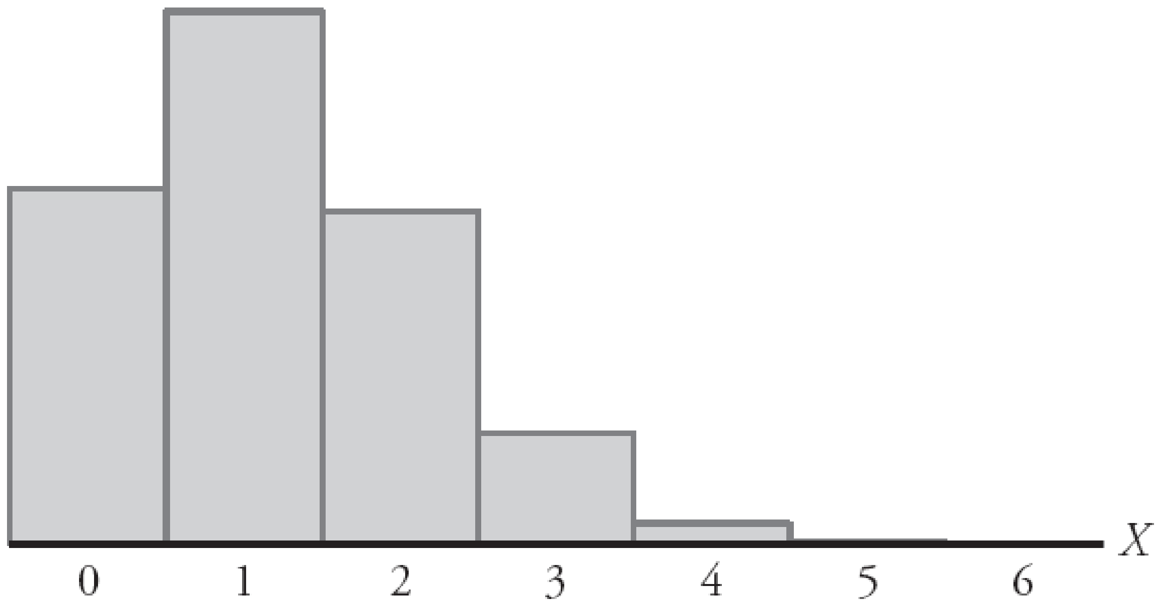

Figura 6.24 Histograma para $b(x; 6, 0{,}2)$.

Aproximação normal para a distribuição binomial

Seja X uma variável aleatória binomial com parâmetros n e p. Então X tem distribuição aproximadamente normal com $\mu = np$ e $\sigma^2 = npq = np(1-p)$, e

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) &= \sum_{k=0}^{x} b(k; n, p) \\
&\approx \text{área abaixo da curva normal} \\
&\quad\ \text{à esquerda de } x + 0{,}5 \\
&= P\left(Z \leq \frac{x + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right),
\end{aligned}
$$

e a aproximação será boa se np e $n(1-p)$ forem maiores ou iguais a 5.

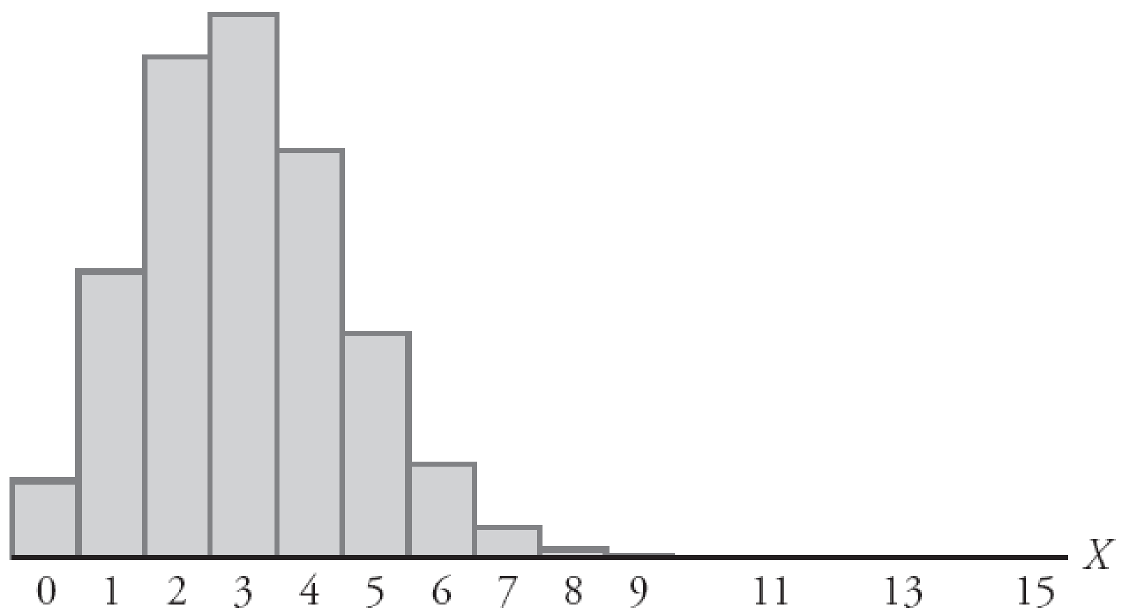

Figura 6.25 Histograma para $b(x;15,\ 0{,}2)$.

Tabela 6.1 Aproximação normal e as probabilidades binomiais acumuladas verdadeiras.

	$p = 0{,}05$, $n = 10$		$p = 0{,}10$, $n = 10$		$p = 0{,}50$, $n = 10$	
r	**Binomial**	**Normal**	**Binomial**	**Normal**	**Binomial**	**Normal**
0	0,5987	0,5000	0,3487	0,2981	0,0010	0,0022
1	0,9139	0,9265	0,7361	0,7019	0,0107	0,0136
2	0,9885	0,9981	0,9298	0,9429	0,0547	0,0571
3	0,9990	1,0000	0,9872	0,9959	0,1719	0,1711
4	1,0000	1,0000	0,9984	0,9999	0,3770	0,3745
5			1,0000	1,0000	0,6230	0,6255
6					0,8281	0,8289
7					0,9453	0,9429
8					0,9893	0,9864
9					0,9990	0,9978
10					1,0000	0,9997

(*continua*)

Capítulo 6 | Algumas distribuições de probabilidade secretas

(*continuação*)

Tabela 6.1 Aproximação normal e probabilidades binomiais acumuladas verdadeiras.

	$p = 0{,}05$					
	$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$	
r	**Binomial**	**Normal**	**Binomial**	**Normal**	**Binomial**	**Normal**
0	0,3585	0,3015	0,0769	0,0968	0,0059	0,0197
1	0,7358	0,6985	0,2794	0,2578	0,0371	0,0537
2	0,9245	0,9382	0,5405	0,5000	0,1183	0,1251
3	0,9841	0,9948	0,7604	0,7422	0,2578	0,2451
4	0,9974	0,9998	0,8964	0,9032	0,4360	0,4090
5	0,9997	1,0000	0,9622	0,9744	0,6160	0,5910
6	1,0000	1,0000	0,9882	0,9953	0,7660	0,7549
7			0,9968	0,9994	0,8720	0,8749
8			0,9992	0,9999	0,9369	0,9463
9			0,9998	1,0000	0,9718	0,9803
10			1,0000	1,0000	0,9885	0,9941

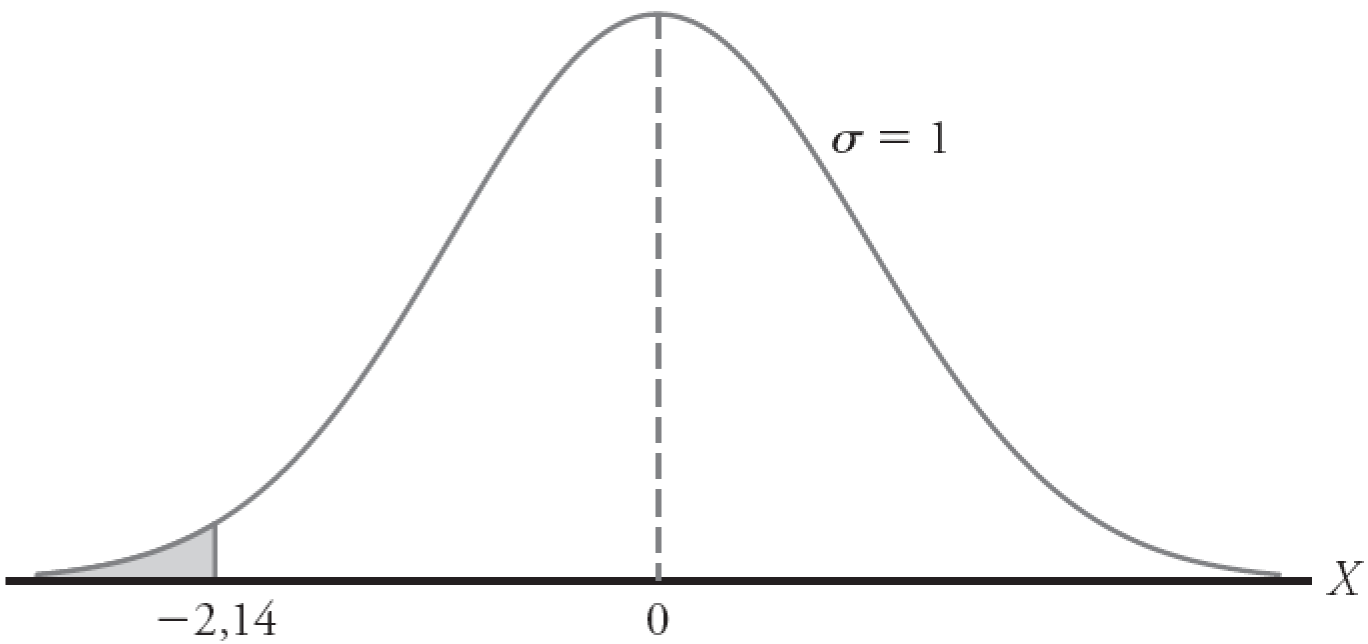

Figura 6.26 Área para o Exemplo 6.15.

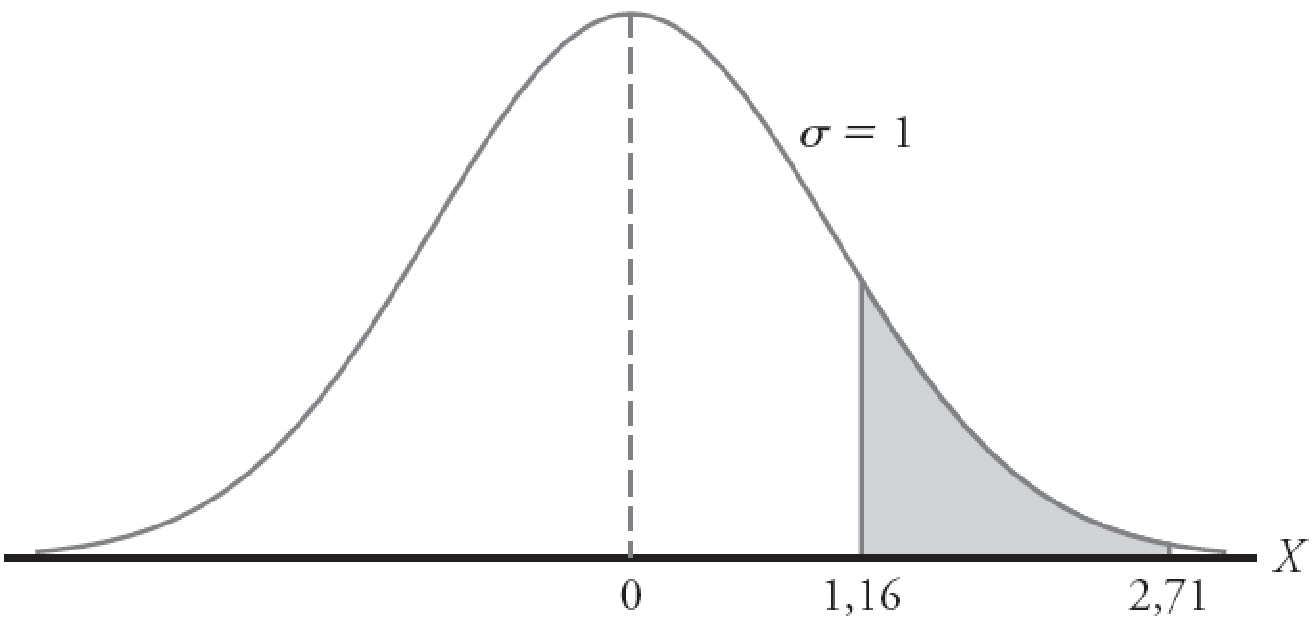

Figura 6.27 Área para o Exemplo 6.16.

6.6 Distribuições gama e exponencial

Definição 6.2

A *função gama* é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x}\, dx, \qquad \text{para } \alpha > 0.$$

Distribuição gama

A variável aleatória contínua X tem uma *distribuição gama*, com parâmetros α e β, se sua função de densidade for dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Distribuição exponencial

A variável aleatória contínua X tem uma *distribuição exponencial*, com parâmetro β, se sua função de densidade é dada por

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\beta > 0$.

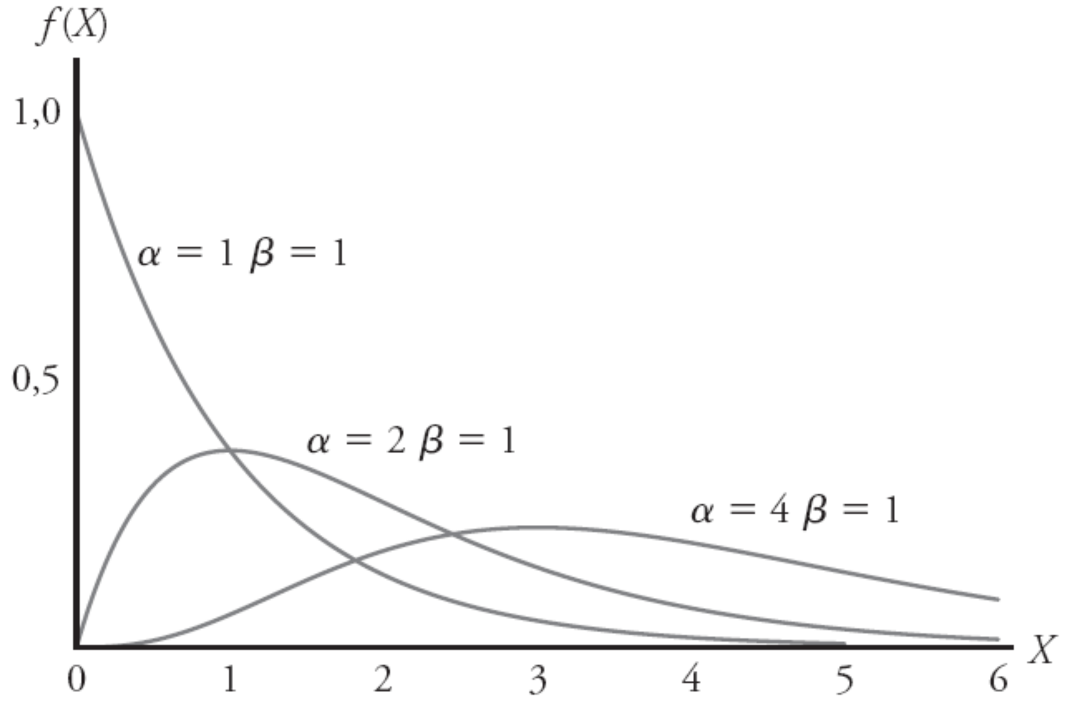

Figura 6.28 Distribuições gama.

Teorema 6.3

A média e a variância da distribuição gama são

$$\mu = \alpha\beta \text{ e } \sigma^2 = \alpha\beta^2.$$

Corolário 6.1

A média e a variância da distribuição exponencial são

$$\mu = \beta \text{ e } \sigma^2 = \beta^2.$$

6.8 Distribuição qui-quadrado

Distribuição qui-quadrado

A variável aleatória contínua X tem distribuição qui-quadrado, com v graus de liberdade, se sua função de densidade for dada por

$$f(x; v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde v é um número inteiro positivo.

Teorema 6.4

A média e a variância da distribuição qui-quadrado são

$$\mu = v \text{ e } \sigma^2 = 2v.$$

6.10 Distribuição Weibull (opcional)

Distribuição Weibull

A variável aleatória contínua X tem uma *distribuição Weibull*, com parâmetros α e β, se sua função de densidade for dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

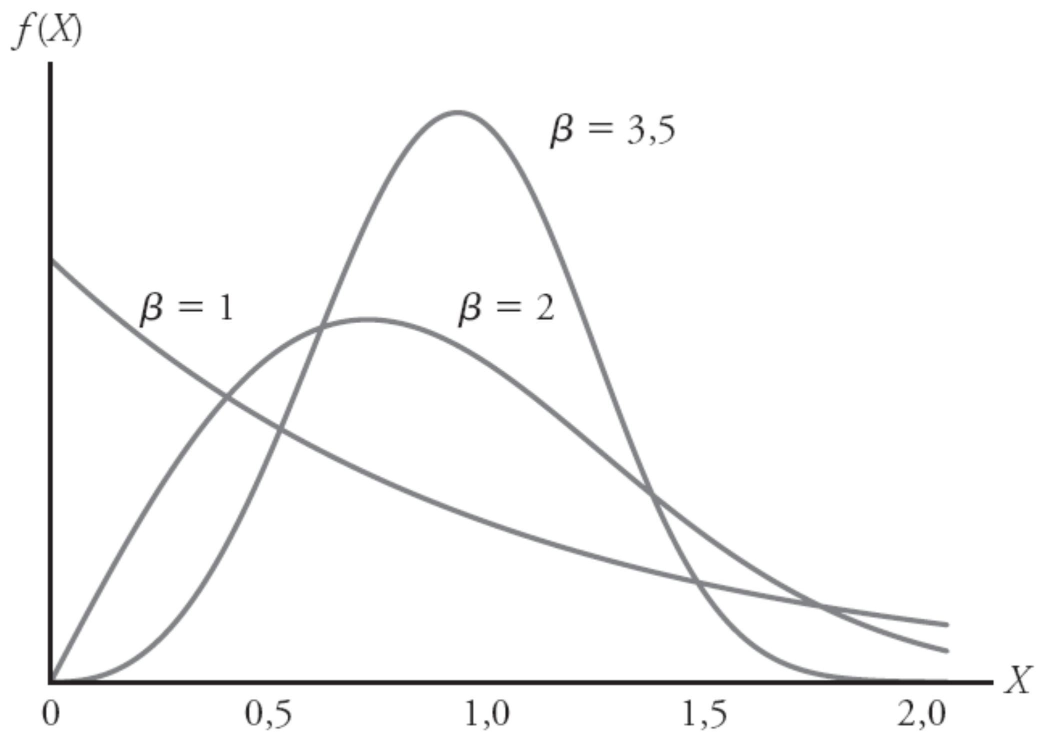

Figura 6.30 Distribuições Weibull ($\alpha = 1$).

Teorema 6.6

A média e a variância da distribuição Weibull são

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \text{ e}$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}.$$

Função de distribuição acumulada da distribuição Weibull

A função de distribuição acumulada (fda) da distribuição Weibull é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}, \qquad \text{para } x \geq 0$$

para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Taxa de falha para a distribuição Weibull

A taxa de falha em um tempo t para a distribuição Weibull é dada por

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta - 1}, \qquad t > 0.$$