1ª Lista de Exercícios

1. Verifique se as fórmulas a seguir são bem-formadas, de acordo com a definição de fórmulas bem-formadas.

   (a) $(p \vee \neg(q \wedge V)) \leftrightarrow falso$
   Sim.

   (b) $((V \vee q) \leftrightarrow \neg(q \wedge p)) \rightarrow (r \wedge F)$
   Sim.

   (c) $(\neg(V \leftrightarrow \neg(q \wedge p)) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg(q \wedge V)) \leftrightarrow F$
   Não, pois está faltando fechar o parêntese.

2. As sentenças a seguir estão em língua natural. Identifique as proposições atômicas, mapeia-as para símbolos proposicionais e traduza cada sentença para a linguagem da Lógica Proposicional.

   (a) Se chove, então as ruas ficam molhadas.
   p: Chover
   q: ruas molhadas

   $$p \rightarrow q$$

   (b) João é magro ou Maria não é brasileira.
   p: João é magro
   q: Maria é brasileira

   $$p \vee \neg q$$

   (c) Se Maria estuda bastante, então Maria vai ao cinema.
   p: Maria estuda bastante
   q: Maria vai ao cinema

   $$p \rightarrow q$$

   (d) Antonio vai ao cinema se e somente se o filme for comédia.
   p: Antonio vai ao cinema
   q: Filme é comédia

   $$p \leftrightarrow q$$

   (e) Ou Maria irá ao cinema e João não, ou Maria não irá e João irá.
   p: Maria irá ao cinema
   q: João irá ao cinema

   $$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

   (f) Maria tem 10 anos ou se Maria é estudiosa, então é boa aluna.
   p: Maria tem 10 anos
   q: Maria é estudiosa
   r: Maria éé boa aluna

   $$p \vee (q \rightarrow r)$$

(g) Uma condição necessária para que uma sequência s convirja é que seja limitada.
p: Sequência convergida
q: Sequência limitada

$$p \to q$$

OBS: Ou seja, se a sequência convergiu, é porque ela é limitada.

(h) Se $x > 0$, $x^2 > 0$
p: $x > 0$
q: $x^2 > 0$

$$p \to q$$

(i) Se Carlos é materialista, Carlos é ateu. Se Carlos é ateu, então Carlos é materialista.
p: Carlos é materialista
q: Carlos é ateu

$$p \leftrightarrow q$$

OU

$$(p \to q) \land (q \to p)$$

(j) Se Pedro está no teatro, então Guilherme está no teatro também.
p: Pedro está no teatro
q: Guilherme está no teatro

$$p \to q$$

(k) Se ele tiver tempo, ele virá.
p: ele tiver tempo
q: ele virá

$$p \to q$$

(l) Se você não sair, eu chamo a polícia.
p: você sair
q: eu chamo a polícia

$$\neg p \to q$$

(m) Duas crianças têm o mesmo tio se e somente se elas têm a mesma mãe e têm o mesmo pai.
p: duas crianças com o mesmo tio
q: duas crianças com a mesma mãe
r: duas crianças com o mesmo pai

$$p \leftrightarrow (q \land r)$$

(n) Se $i > j$, então $(i - 1) > j$ senão $j = 3$.
p: $i > j$
q: $(i - 1) > j$
r: $j = 3$

$$(p \to q) \land (\neg p \to r)$$

3. Considere uma interpretação I e as fórmulas α, β, γ e λ como definidas a seguir:

$$\alpha : (p \to q);\ \beta : (p \leftrightarrow q),\ \gamma : (\neg p \lor p) \text{ e } \lambda : ((\neg p \lor p) \to (\neg q \lor p))$$

				α	β	γ		λ
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \vee p$	$\neg q \vee p$	$(\neg p \vee p) \to (\neg q \vee p)$
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V

(a) Se $I[\alpha]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Se $I[\alpha]$ =V pode se concluir que ou $I[p] =$ F ou $I[q] =$ V. Em outras palavras, $I[p]$ nunca será V quando $I[q]$ =F.

(b) Se $I[\beta]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Se $I[\beta]$ =V pode-se concluir que $I[p] = I[q]$.

(c) Se $I[\gamma]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$?
Se $I[\gamma]$ =V pode-se concluir que independentemente do valor de $I[p]$ a interpretação $I[\gamma]$ sempre será V.

(d) Se $I[\alpha]$ =F, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Uma interpretação $I[\alpha]$ =F somente ocorrerá quando $I[p]$ =V e $I[q]$ =F.

(e) Se $I[\gamma]$ =F, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$?
$I[\gamma]$ nunca será F uma vez que trata-se de uma tautologia.

(f) Se $I[\beta]$ =F, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Se $I[\beta]$ =F pode-se concluir que $I[p] \neq I[q]$.

(g) Se $I[\lambda]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Se $I[\lambda]$ =V pode-se concluir que $I[p] = I[q]$ ou caso $I[p] \neq I[q]$ obrigatoriamente $I[p]$ =V.

(h) Se $I[\lambda]$ =F, o que se pode concluir a respeito de $I[p]$ e $I[q]$?
Se $I[\lambda]$ =F pode-se concluir que $I[p] \neq I[q]$ e obrigatoriamente $I[p]$ =F.

(i) Se $I[q]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[\alpha]$, $I[\beta]$, $I[\gamma]$ e $I[\lambda]$?
Se $I[q] =$ V é possível afirmar que $I[\alpha]$ e $I[\gamma]$ (que é uma tautologia) serão sempre V independente do valor de p. Contudo as demais fórmulas ainda irão depender do valor atribuído a p.

(j) Se $I[p]$ =V, o que se pode concluir a respeito de $I[\alpha]$, $I[\beta]$, $I[\gamma]$ e $I[\lambda]$?
Se $I[p]$ =V é possível afirmar que $I[\gamma]$ e $I[\lambda]$ serão sempre V independente do valor de q. Contudo $I[\alpha]$ e $I[\beta]$ ainda irão depender do valor atribuído a q.

4. Seja I uma interpretação tal que $I[p \to q] =$ F, e J uma interpretação tal que $J[p \to q] =$ V. O que se pode dizer a respeito dos resultados das interpretações a seguir?
Dada a tabela verdade:

	p	q	$p \to q$
I	V	F	F
J	V	V	V
	F	V	V
	F	F	V

É possível concluir que:
Conclusão

- $I[p \to q]$ =F ocorre apenas quando $I[p]$ =V e $I[q]$ =F;
- $J[p \to q]$ =V ocorre quando $J[p]$ =F independentemente do valor de q ou quando $J[p] = J[q]$ =V.

Com base na **Conclusão** dada anteriormente, basta substituirmos os átomos pelos valores correspondentes e acharmos o valor da fórmula.

(a) $I[(p \lor r) \to (\neg q \lor r)]$
Nesse caso $I[(p \lor r) \to (\neg q \lor r)]$ =V independente do valor de r, pois $I[p]$ =V e $I[\neg q]$ = V (V $\lor$ qualquer coisa é sempre V e V $\to$ V é sempre V).

p	q	r	$\neg q$	$(p \lor r) \to (\neg q \lor r)$
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V

(b) $I[(p \land r) \to (q \land r)]$
Nesse caso não é possível definir o valor de $I[(p \land r) \to (q \land r)]$, pois dependendo do valor de r na fórmula a interpretação I para a fórmula em questão pode ser F ou V.

p	q	r	$p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \to (q \land r)$
V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V

(c) $I[(\neg p \lor p) \to (q \lor p)]$
Nesse caso $I[(\neg p \lor p) \to (q \lor p)]$ =V, pois V $\lor$ qualquer coisa é sempre V ($I[p]$ =V) e V $\to$ V é sempre V.

p	q	$\neg p$	$\neg p \lor p$	$q \lor p$	$(\neg p \lor p) \to (q \lor p)$
V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V

(d) $J[(p \lor r) \to (q \lor \neg r)]$
Nesse caso $J[(p \lor r) \to (q \lor \neg r)]$ =F apenas quando $J[p] = J[q]$ =F e $J[r]$ =V, nos demais casos a fórmula será V.

p	q	r	$\neg r$	$p \lor r$	$q \lor \neg r$	$(p \lor r) \to (q \lor \neg r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V

(e) $J[(p \land r) \to (q \land r)]$
Nesse caso $J[(p \land r) \to (q \land r)]$ sempre será V em qualquer combinação possível.

p	q	r	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

(f) $J[(\neg p \vee p) \rightarrow (q \vee p)]$
Nesse caso $J[(\neg p \vee p) \rightarrow (q \vee p)]$ pode ter interpretações V e F, contudo nota-se que a interpretação só será F quando p e q forem F.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee p$	$q \vee p$	$(\neg p \vee p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F

(g) $J[(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q)]$
Nesse caso $J[(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q)]$ pode ter interpretações V e F, contudo nota-se que a interpretação só será V quando $J[p]$ =F e $J[q]$ =V.

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg q)$
V	V	F	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F

5. Verifique se a informação dada é suficiente para determinar:

(a) $I[(p \rightarrow s) \rightarrow r]$, sabendo que $I[r]$ =V.
A interpretação $I[(p \rightarrow s) \rightarrow r]$ sempre será V, pois, independente do valor da sub-fórmula $(p \rightarrow s)$, temos que (qualquer coisa) $\rightarrow$ V sempre será V.

(b) $I[(p \vee r) \vee (s \rightarrow q)]$, sabendo que $I[q]$ =F e $I[r]$ =V.
A interpretação $I[(p \vee r) \vee (s \rightarrow q)]$ sempre será V, pois, independente do valor das sub-fórmulas $(s \rightarrow q)$ e p, temos que $I[r]$ =V e (qualquer coisa $\vee$ V) sempre será V.

(c) $I[((p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge p)) \rightarrow ((r \wedge p) \vee q)]$, sabendo que $I[q]$ =V.
A interpretação $I[((p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge p)) \rightarrow ((r \wedge p) \vee q)]$ sempre será V, independente do valor das sub-fórmulas, pois $I[q]$ =V, ou seja, (qualquer coisa $\vee$ V) é sempre V e (qualquer coisa $\rightarrow$ V) é V.

6. Determine $I[p]$ e $I[q]$, sabendo que:

(a) $I[(p \rightarrow q)]$ =V e $I[(p \wedge q)]$ =F.
Obrigatoriamente $I[p]$ =F, embora q possa ter qualquer valor.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	**V**	**F**
F	F	**V**	**F**

(b) $I[(p \leftrightarrow q)]$ =F e $I[(\neg p \vee q)]$ =V.
Há apenas uma interpretação que satisfaz o enunciado (em negrito na tabela), onde $I[p]$ =F e $I[q]$ =V.

p	q	$\neg p$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	**F**	**V**
F	F	V	V	V

7. Seja I uma interpretação tal que $I[p] = I[q]$ =V e $I[r] = I[s]$ =F. Encontre:

(a) $I[(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee ((p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s))]$
Pela tabela verdade é possível concluir que $I[(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee ((p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s))]$ = V.

p	q	r	s	$\neg q$	$\neg r$	$\neg s$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$ $\vee \neg r$	$p \leftrightarrow \neg q$	$r \vee \neg s$	$(p \leftrightarrow \neg q)$ $\rightarrow (r \vee \neg s)$	$(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee$ $((p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s)$
V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V

(b) $I[(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s)]$
Pela tabela verdade é possível concluir que $I[(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s)]$ =F.

p	q	r	s	$\neg q$	$p \leftrightarrow r$	$\neg q \rightarrow s$	$(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s)$
V	V	F	F	F	F	V	F

(c) $I[(p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))) \leftrightarrow (q \vee \neg s)]$
Pela tabela verdade é possível concluir que $I[(p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))) \leftrightarrow (q \vee \neg s)]$ =V.

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg s$	$r \wedge \neg p$	$q \rightarrow (r \wedge \neg p)$	$p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))$	$q \vee \neg s$	$(p \vee (q \rightarrow (r \wedge \neg p))) \leftrightarrow (q \vee \neg s)$
V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V

8. Construa a tabela-verdade associada a cada fórmula dada a seguir:

(a) $((\neg p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow p$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow q$	$r \wedge \neg q$	$(\neg p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg q)$	$((\neg p \rightarrow q) \vee (r \wedge \neg q)) \leftrightarrow p$
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F	V

(b) $(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg r \to \neg q$	$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q)$
V	V	V	F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

(c) $(p \wedge q \wedge r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge q \wedge r$	$\neg r \leftrightarrow \neg q$	$(p \wedge q \wedge r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V

(d) $((p \leftrightarrow \neg q) \to \neg r) \to (\neg(r \wedge \neg q) \vee p)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \leftrightarrow \neg q) \to \neg r$	$r \wedge q$	$\neg(r \wedge \neg q)$	$\neg(r \wedge \neg q) \vee p$	$((p \leftrightarrow \neg q) \to \neg r)$ $\to (\neg(r \wedge \neg q) \vee p)$
V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	v	V	F	V	F	V	V	V

(e) $((p \vee \neg q) \to r) \to (s \leftrightarrow \neg q)$

p	q	r	s	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow r$	$s \leftrightarrow \neg q$	$((p \vee \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (s \leftrightarrow \neg q)$
V	V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F	V

(f) $(q \vee r) \rightarrow ((q \vee s) \rightarrow (p \vee s))$

p	q	r	s	$q \vee r$	$q \vee s$	$p \vee s$	$(q \vee s) \rightarrow (p \vee s)$	$(q \vee r) \rightarrow ((q \vee s) \rightarrow (p \vee s))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V

(g) $(p \rightarrow r) \rightarrow q$

p	q	r	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

(h) $(p \rightarrow r) \vee q$

p	q	r	$p \to r$	$(p \to r) \vee q$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

(i) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	F

(j) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$(p \to (q \to r)) \to$ $((p \to q) \to (p \to r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

(k) $(p \to q) \to ((p \wedge (q \wedge r)) \to (p \wedge (p \vee r)))$

p	q	r	$p \to q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \vee r$	$p \wedge (p \vee r)$	$(p \wedge (q \wedge r)) \to$ $(p \wedge (p \vee r))$	$(p \to q) \to ((p \wedge (q \wedge r))$ $\to (p \wedge (p \vee r)))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	F	V	V

9. Verifique quais das fórmulas a seguir são tautologias, quais são contradições e quais são contingentes. Justifique sua resposta.

(a) $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

Como pode ser visto na tabela verdade a fórmula $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ é uma tautologia, pois todas interpretações possíveis são iguais a V. Outra forma de demonstrar esse fato é usando a lei da associatividade que diz que $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$. Com base nessa equivalência temos que o lado esquerdo e o lado direito do conectivo $\leftrightarrow$ possuem exatamente as mesmas interpretações. Assim, o valor-verdade da sub-fórmula do lado esquerdo será sempre igual ao valor-verdade da sub-fórmula do lado direito fazendo com que o valor-verdade da fórmula completa seja sempre V, o que a torna uma tautologia.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

(b) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

Como pode ser visto na tabela verdade a fórmula $(p \wedge p) \leftrightarrow p$ é uma tautologia, pois todas interpretações possíveis são iguais a V. Outra forma de demonstrar esse fato é considerando que ao aplicar a lei da idempotência, que diz que $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$, temos que o lado esquerdo da fórmula é p e claramente o valor-verdade do lado esquerdo do conectivo $\leftrightarrow$ será o mesmo do lado direito fazendo com que o valor-verdade da fórmula seja sempre V, o que a torna uma tautologia.

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

(c) $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Como pode ser visto na tabela verdade a fórmula $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ é uma tautologia, pois todas as interpretaçõees possíveis são iguais a V. (Trata-se da lei distributiva)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

(d) $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

Como pode ser visto na tabela verdade a fórmula $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ é uma tautologia, pois todas interpretações possíveis são iguais a V. (Trata-se da lei da absorção)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

(e) $p \to p \vee r$
Como pode ser visto na tabela verdade, a fórmula $p \to p \vee r$ é uma tautologia, pois todas interpretações possíveis são iguais a V. (Trata-se da regra da adição)

p	r	$p \vee r$	$p \to p \vee r$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

10. Verifique, usando a definição de consequência lógica, se pode ser escrito:

(a) $\{\neg p \to q, r \wedge \neg q\} \models p \to r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$r \wedge \neg q$	$p \to r$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V

Segundo a definição, $p \to r$ é uma consequência lógica de $(\neg p \to q), (r \wedge \neg q)$.

(b) $((\neg p \to q) \vee (r \wedge \neg q)) \models p \to \neg r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \to q$	$r \wedge \neg q$	$(\neg p \to q) \vee (r \wedge \neg q)$	$p \to \neg r$
V	V	V	F	f	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	V

Segundo a definição, $p \to \neg r$ não é uma consequência lógica de $((\neg p \to q) \vee (r \wedge \neg q))$, pois as interpretações I_1 e I_3 mostram que nem sempre quando a fórmula à esquerda do símbolo $\models$ é verdade, a da direita também é.

(c) $\{p \to q, r \wedge \neg q\} \models p \to r$

p	q	r	$\neg q$	$p \to q$	$r \wedge \neg q$	$p \to r$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Cont.

Segundo a definição, $p \to r$ é uma consequência lógica de $(p \to q), (r \wedge \neg q)$.

(d) $\{\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q), \neg q\} \models ((p \wedge \neg q) \vee r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg r \to \neg q$	$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q)$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee r$
V	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F

Segundo a definição, $(p \wedge \neg q) \vee r$ não é uma consequência lógica de $(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q), \neg q$, pois a interpretação I_8 mostra que nem sempre quando as fórmulas à esquerda do símbolo $\models$ são verdade, a da direita também é.

(e) $\{(p \wedge q \wedge r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q), \neg r\} \models p \to r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge q \wedge r$	$\neg r \leftrightarrow \neg q$	$(p \wedge q \wedge r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q)$	$p \to r$
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Segundo a definição, $p \to r$ não é uma consequência lógica de $(p \wedge q \wedge r) \to (\neg r \leftrightarrow \neg q), \neg r$, pois as interpretações I_2 e I_4 mostram que nem sempre quando as fórmulas à esquerda do símbolo $\models$ são verdade, a da direita também é.

(f) $\{p \to (q \vee r), p\} \models p \wedge q$

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \wedge q$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F

Segundo a definição, $p \wedge q$ não é uma consequência lógica de $p \to (q \vee r), p$, pois a interpretação I_3 mostra que nem sempre quando as Fórmulas à esquerda do símbolo $\models$ são Verdade, a da direita também é.

(g) $\{\neg p \to \neg\neg q, \neg\neg\neg p\} \models q$

p	q	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$	$\neg q$	$\neg\neg q$	$\neg p \to \neg\neg q$
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	F

Segundo a definição, q é uma consequência lógica de $\neg p \to \neg\neg q, \neg\neg\neg p$.

(h) $\{(p \wedge q) \to (r \wedge s), \neg\neg p, q\} \models s$

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \wedge q$	$rlands$	$(p \wedge q) \to (r \wedge s)$
V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F	V

Segundo a definição, s é uma consequência lógica de $(p \wedge q) \to (r \wedge s), \neg\neg p, q$.

(i) $p \models (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

Segundo a definição lógica $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ é uma consequência lógica de p.

(j) $\{p, \neg\neg(p \to q)\} \models q \vee \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg\neg(p \to q)$	$(q \vee \neg q)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Segundo a definição lógica $q \vee \neg q$ é uma consequência lógica de $p, \neg\neg(p \to q)$.

Cont.

11. Considere a seguinte afirmativa como verdadeira:

    "Se Maria for à escola, então Gabriel ou Paula irão, e se Maria não for à escola, então Paula e Guilherme irão."

    É possível chegar a alguma conclusão de quem com certeza irá à escola?

    p: Maria irá a escola
    q: Gabriel irá a escola
    r: Paula irá a escola
    s: Guilherme irá a escola

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg p \rightarrow (r \wedge s))$$

p	q	r	s	$\neg p$	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$r \wedge s$	$\neg p \rightarrow (r \wedge s)$	$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg p \rightarrow (r \wedge s))$
V	V	V	V	F	V	V	V	V	**V**
V	V	V	F	F	V	V	F	V	**V**
V	V	F	V	F	V	V	F	V	**V**
V	V	F	F	F	V	V	F	V	**V**
V	F	V	V	F	V	V	V	V	**V**
V	F	V	F	F	V	V	F	V	**V**
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	V	F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	**V**
F	F	V	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F

Pela tabela verdade não é possível chegar à uma conclusão exata de quem realmente irá a escola, pois nem p, nem q, nem r, nem s é consequência lógica da afirmativa dada como verdadeira.

12. Complete a tabela de leis de equivalência a seguir:

$p \wedge \neg p \equiv F$	Lei da contradição
$p \vee \neg p \equiv V$	Lei do terceiro excluído
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leis idempotentes
$\neg\neg p \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leis comutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leis associativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leis distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	Definição de $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\rightarrow$ e $\wedge$
$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$(p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $(p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leis da absorção
$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$ $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$	Generalização das Leis da absorção

The End.