Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Planos

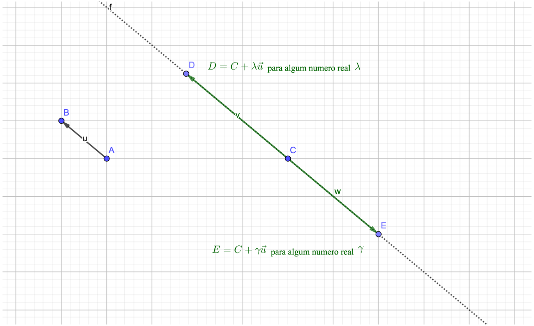
Cláudia Gentile

30 de novembro de 2023

Planos

Relembre: Equação vetorial de uma reta r passando por um ponto C na direção de um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$:

$$r : X = C + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



Observe que qualquer vetor paralelo a $\vec{u}$ pode ser representado por um segmento contido nesta reta. Quando dois ou mais vetores (incluindo o vetor nulo) podem ser representados por segmentos contidos em uma mesma reta, dizemos que eles sao colineares.

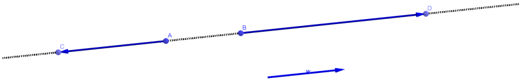
Vetores paralelos são colineares (e vice-versa).

Podemos usar o adjetivo ”colineares”para pontos ou vetores. Dizer que ”pontos são colineares” significa que estão sobre a mesma reta

Vamos compreender a equação vetorial de um plano usando as três operações básicas:

1. soma de ponto com vetor;
2. produto de um vetor por um escalar;
3. soma de vetores.

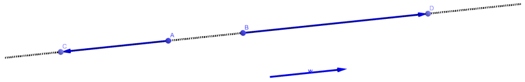
Considerem, primeiramente, dois vetores paralelos. Se você somá-los, qual será o resultado desta soma?



Vamos compreender a equação vetorial de um plano usando as três operações básicas:

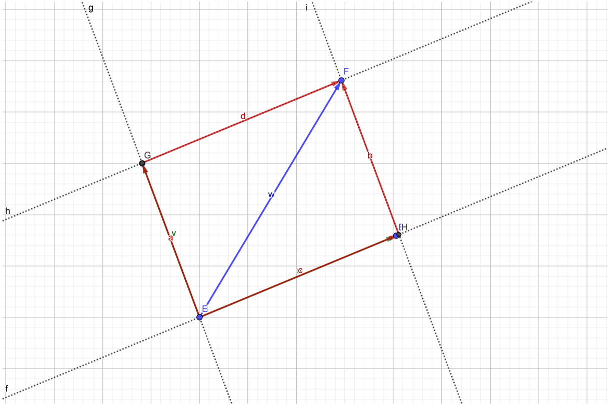
1. soma de ponto com vetor;
2. produto de um vetor por um escalar;
3. soma de vetores.

Considerem, primeiramente, dois vetores paralelos. Se você somá-los, qual será o resultado desta soma?



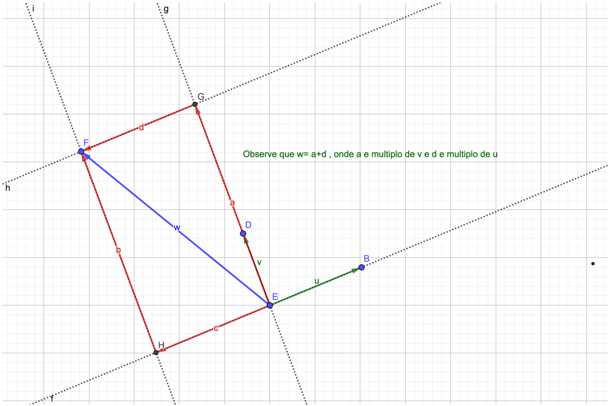
Resposta: Outro vetor paralelo com os dois primeiros!!

Consideremos agora dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (logo, nenhum deles é o vetor nulo, certo?!!!). Para apurarmos nossa percepção geométrica primeiramente, suponhamos que ambos os vetores estejam no $\mathbb{R}^2$.



Note que qualquer vetor do plano pode ser obtido como soma de múltiplos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Veja no Geogebra

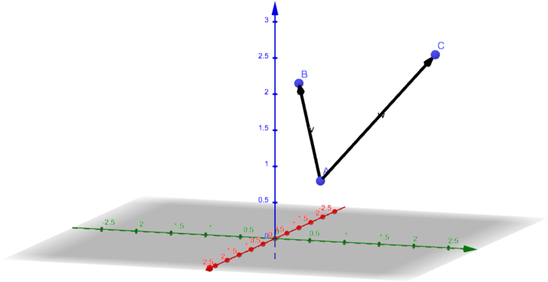


Dois vetores não paralelos **geram** o plano

no seguinte sentido

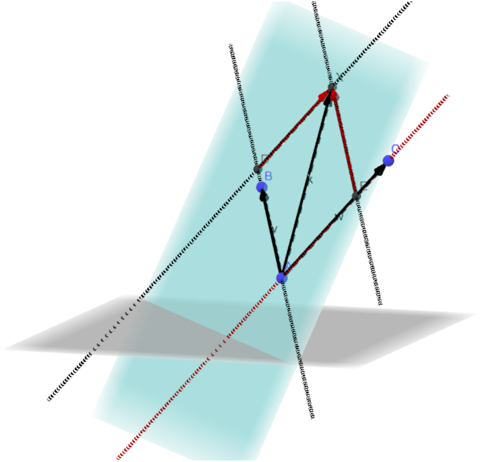
Dados dois vetores não paralelos de um plano, qualquer terceiro vetor deste plano pode ser escrito como soma de múltiplos dos dois primeiros

Agora consideremos dois vetores não paralelos no $\mathbb{R}^3$.



Observe que estes dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam a direção de um plano. Na verdade, de infinitos planos paralelos entre si.

Um ponto A qualquer no espaço e dois vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ determinam completamente um plano específico, que chamaremos de π.



Observe também que um ponto X pertence π se e somente se pode ser escrito como soma de A com múltiplos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Equivalentemente X pertence π se e somente $\overrightarrow{AX}$ pode ser expresso como soma de múltiplos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Em boa matemática, podemos dizer que

$$\boxed{X \in \pi \Leftrightarrow \exists\, t, s \in \mathbb{R}\,;\ \overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}}$$

Mas isso significa que

$$\boxed{X \in \pi \Leftrightarrow \exists\, t, s \in \mathbb{R}\,;\ X = A + t\vec{u} + s\vec{v}}$$

Dizemos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de diretores de π.

Em coordenadas, se $A = (a, b, c)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dizemos que $X = (x, y, z)$ é um ponto do plano π determinado por A, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se e somente se satisfaz a equação:

$$\boxed{\pi : (x, y, z) = (a, b, c) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3) \qquad t, s \in \mathbb{R}.}$$

Diremos que dois ou mais vetores do $\mathbb{R}^3$ são coplanares se eles puderem ser representados por segmentos contidos em um mesmo plano. Observe que o vetor nulo é coplanar com qualquer outro vetor. No exemplo acima, $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores coplanares.

Faz sentido portanto definirmos a equação vetorial de um plano π passando por um ponto A e contendo representantes das direções determinadas por vetores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ como sendo

$$\pi : X = A + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são chamados de vetores diretores do plano π.

Exercite seu conhecimento:

1. Considere o plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 1, 0)$. Escreva uma equação vetorial para este plano.

Exercite seu conhecimento:

1. Considere o plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (1,1,0)$. Escreva uma equação vetorial para este plano.

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda \overset{\overrightarrow{AB}}{(0,-1,0)} + \gamma \overset{\overrightarrow{AC}}{(0,0,-1)}}$$

Exercite seu conhecimento:

1. Considere o plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (1,1,0)$. Escreva uma equação vetorial para este plano.

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda \overset{\overrightarrow{AB}}{(0,-1,0)} + \gamma \overset{\overrightarrow{AC}}{(0,0,-1)}}$$

2. Escreva a equação vetorial do plano que passa pelo ponto $P = (1,2,-1)$ e tem vetores diretores paralelos aos eixos y e z.

Exercite seu conhecimento:

1. Considere o plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (1,1,0)$. Escreva uma equação vetorial para este plano.

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda \overbrace{(0,-1,0)}^{\overrightarrow{AB}} + \gamma \overbrace{(0,0,-1)}^{\overrightarrow{AC}}}$$

2. Escreva a equação vetorial do plano que passa pelo ponto $P = (1,2,-1)$ e tem vetores diretores paralelos aos eixos y e z.

$$\boxed{X = (1,2,-1) + \lambda \overset{\text{eixo y}}{(0,1,0)} + \gamma \overset{\text{eixo z}}{(0,0,1)}}$$

Exercite seu conhecimento:

1. Considere o plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ e $C = (1,1,0)$. Escreva uma equação vetorial para este plano.

$$\boxed{(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda\,\overset{\overrightarrow{AB}}{(0,-1,0)} + \gamma\,\overset{\overrightarrow{AC}}{(0,0,-1)}}$$

2. Escreva a equação vetorial do plano que passa pelo ponto $P = (1,2,-1)$ e tem vetores diretores paralelos aos eixos y e z.

$$\boxed{X = (1,2,-1) + \lambda\,\overset{\text{eixo y}}{(0,1,0)} + \gamma\,\overset{\text{eixo z}}{(0,0,1)}}$$

3. Visualize estes planos no Geogebra.

Consideremos um plano π passando por $A = (a_1, a_2, a_3)$ com vetores diretores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Já vimos a equação vetorial do plano, da forma:

$$\pi : \quad X = A + \lambda \overrightarrow{u} + \delta \overrightarrow{v}, \lambda, \delta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

que é equivalente a

$$\pi : \quad (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \delta(v_1, v_2, v_3), \lambda, \delta \in \mathbb{R}$$

Visualize usando o Geogebra.

Equações paramétricas de um plano

A exemplo do que fizemos com retas, a equação vetorial de um plano gera também um conjunto de equações paramétricas para o plano π, dado por:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \delta v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \delta v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \delta v_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Equação Geral de um plano

Podemos também expressar o plano π através de uma equação que chamaremos de equação geral do plano, por meio da qual temos a relação entre as variáveis x, y e z que deve ser satisfeita por cada ponto (x, y, z) que a ele pertença.
Para obtermos esta equação, observe que, de (1), um ponto X pertence à π se e somente se

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{u} + \delta \overrightarrow{v}$$

para algum valor de λ e algum valor de δ. Mas observe também que isso significa que o vetor $\overrightarrow{AX}$ é combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Ou ainda, isso equivale a dizer que os três vetores $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são coplanares. Dessa forma, devemos necessariamente ter

Dessa forma, devemos necessariamente ter

$$\det \begin{bmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{bmatrix} = 0$$

Reciprocamente, se o determinante desta matriz for nulo, podemos então concluir que o ponto (x, y, z) pertence ao plano π.
Ao calcularmos o determinante acima e o igualarmos a 0, obtemos a equação geral do plano. A idéia ficará mais clara depois de virmos um exemplo.

Exemplo

Considere um plano passando por $A = (1,2,3)$ com vetores diretores $\overrightarrow{u} = (1,-1,0)$ e $\overrightarrow{v} = (2,-1,-1)$. Um ponto (x,y,z) pertence a este plano se e só se

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z-3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (x-1)-(z-3)+2(z-3)+(y-2) = x+y+z-6 = 0$$

Ou seja, a equação geral deste plano é $\boxed{x+y+z=6}$.

Por outro lado, se temos a equação geral de um plano e desejamos obter uma equação vetorial para este plano, basta que encontremos três pontos não colineares que pertençam a ele. Por exemplo, considere um plano cuja equação geral é

$$x + 2y - z = 3$$

Atribuindo valores a x e y obtemos os três pontos:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -3 \\ x = 0 \text{ e } y = 1 \quad &\Rightarrow \quad z = -1 \\ x = 1 \text{ e } y = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = -2 \end{aligned}$$

Ou seja, os pontos $A = (0,0,-3)$, $B = (0,1,-1)$ e $C = (1,0,-2)$ pertencem a este plano. Vamos considerar os vetores $\overrightarrow{AB} = (0,1,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,0,1)$. Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são paralelos sabemos que os pontos são não colineares (vértices de um triângulo contido no plano), e os vetores portanto determinam a direção do plano.
Assim, uma possível equação vetorial para este plano é

$$(x,y,z) = (0,0,-3) + \lambda(0,1,2) + \delta(1,0,1), \quad \lambda,\delta \in \mathbb{R}.$$

Há outra forma de se encontrar a equação geral de um plano. Para descreve-la vamos definir o "vetor normal" a um plano, que é um vetor não nulo, cuja direção é ortogonal à direção de todos os vetores que podem ser representados por segmentos neste plano.

Suponha que você conheça um ponto $P = (x_1, y_1, z_1)$ pertencente a um plano π e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ normal ao plano π.

Neste caso, um ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se, $\overrightarrow{PX} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ for ortogonal a $\vec{n} = (a, b, c)$, ou seja,

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

de onde temos

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

Se fizermos $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, obtemos a equação

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

Observe que, se $d = 0$, o plano passa pela origem.

Os coeficientes de x, y e z na equação geral do plano informam a direção normal.

Compare a equação geral de plano com a equação geral de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$!!!

A partir de agora, ao olhar para uma equação do tipo $\boxed{\alpha x + \beta y = \gamma}$, observe o contexto. Se a expressão estiver sendo considerada em $\mathbb{R}^2$, descreve uma reta, se estiver em $\mathbb{R}^3$, descreve um plano.

Observe também que, dados os vetores diretores de um plano, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, um vetor normal ao plano é o vetor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Equação planar de uma reta

Finalmente, existe uma outra forma importante de expressar uma reta por meio de equações, dada pela intersecção de dois planos não paralelos. Suponha que

$$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad \text{e} \quad \pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

sejam dois planos não paralelos. Então a intersecção deles é uma reta, cuja equação é dada pelo sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \end{cases}$$

pois, como a reta está contida nos dois planos, todos os seus pontos devem satisfazer as duas equações simultaneamente.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - 1z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Escalonamos a matriz ampliada do sistema, para encontrar sua solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : 1 \\ 1 & 1 & 1 & : 0 \end{bmatrix} \underset{\equiv}{L2-L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : 1 \\ 0 & -1 & 2 & : -1 \end{bmatrix} \underset{\equiv}{-1 \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : 1 \\ 0 & 1 & -2 & : 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\equiv}{L1-2L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : -1 \\ 0 & 1 & -2 & : 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x & & + & 3z & = & -1 \\ & y & - & 2z & = & 1 \end{cases}$$

cuja solução é o conjunto $\{(-1-3\alpha, 1+2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Observe que os pontos deste conjunto solução $(-1-3\alpha, 1+2\alpha, 0+1\alpha)$ descrevem exatamente uma reta, cuja equação vetorial é dada por:

$$(x, y, z) = (-1, 1, 0) + \alpha(-3, 2, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$