



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Circunferências, Elipses, Parábolas e Hipérboles

Definição, equação reduzida e curva transladada

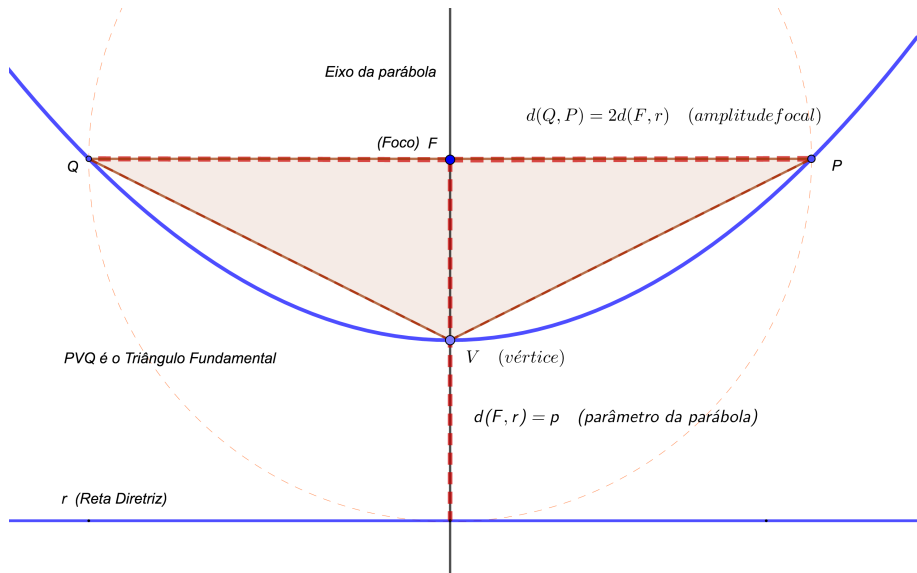
Cláudia Gentile

19 dedezembro de 2023

Parábola

Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a ela. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e r chama-se **Parábola**.

F é o **Foco**, r é a **Reta Diretriz**, $d(F, r) = p$ é o **parâmetro da parábola**. A reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz chama-se **Eixo da Parábola**, o ponto de intersecção do eixo com a parábola é o **Vértice**. Uma **corda** da parábola é qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à ela. A **Amplitude Focal** da parábola é o comprimento da corda que contém o foco e é perpendicular ao eixo.



Equação reduzida da Parábola e translações

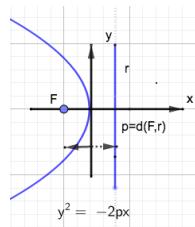
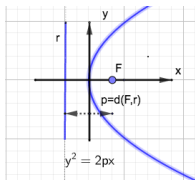
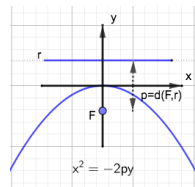
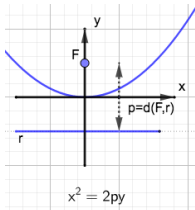
Caso em que a reta diretriz r é paralela ao eixo x , o foco F está sobre o semieixo positivo y , e o vértice é a origem do sistema de coordenadas, e a distância entre F e r é p .

$$x^2 = 2py$$

Se a parábola do caso acima for translada de forma que o vértice $V = (v_1, v_2)$ não seja a origem (translação sem rotação, mantendo a concavidade e a direção do eixo de simetria), a equação fica:

$$(x - v_1)^2 = 2p(y - v_2)$$

Lembrete de equações reduzidas da parábola:



Elipse

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos e tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja a um número real tal que $a > c$. O lugar geométrico dos pontos X tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ chama-se **Elipse**.

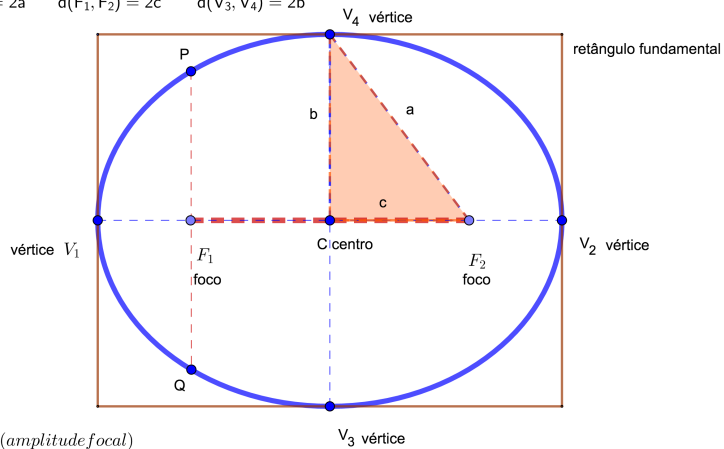
Os pontos F_1 e F_2 chamam-se **Focos da elipse**, o segmento F_1F_2 é chamado de **Segmento Focal**, o ponto médio do segmento focal é chamado de **centro da elipse** e a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ chama-se **distância focal**. A reta que contém os focos chama-se **reta focal**. A reta focal e a reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro da elipse intersectam a elipse em quatro pontos que são denominados **Vértices**. Qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à elipse chama-se **corda**. A corda que contém o segmento focal é chamada de **Eixo Maior da elipse** e a corda perpendicular ao eixo maior que passa pelo centro é chamada de **Eixo Menor** da elipse. A **Amplitude Focal da elipse** é a medida de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$d(V_1, V_2) = 2a$$

$$d(F_1, F_2) = 2c$$

$$d(V_3, V_4) = 2b$$

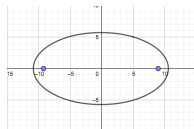


$$d(P, Q) \text{ (amplitude focal)}$$

Equação reduzida da Elipse e translações

Caso em que os **focos estão sobre o eixo x** e o centro é a origem . ($a > b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



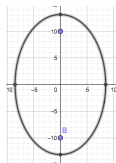
Caso em que os **focos estão em uma reta paralela ao eixo x** e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem . ($a > b$)

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

Equação reduzida da Elipse e translações

Caso em que os **focos estão sobre o eixo y** e o centro é a origem . ($a > b$)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Caso em que os **focos estão em uma reta paralela ao eixo y** e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem . ($a > b$)

$$\frac{(x - c_1)^2}{b^2} + \frac{(y - c_2)^2}{a^2} = 1$$

Observação sobre Circunferência

A **circunferência** de centro na origem e raio r tem equação da forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

A **circunferência** de centro $C = (c_1, c_2)$ e raio r tem equação da forma

$$\frac{(x - c_1)^2}{r^2} + \frac{((y - c_2))^2}{r^2} = 1$$

Excentricidade

A razão $e = \frac{c}{a}$ é denominada **excentricidade da elipse** e é sempre menor do que 1. Existem duas retas paralelas (ambas perpendiculares ao eixo focal) que são as **retas diretrizes da elipse**. A razão da distância de um ponto P da elipse a um dos focos pela distância de P à reta diretriz mais próxima deste foco é a excentricidade e .

Além disso, $e = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, onde α é o ângulo entre uma geratriz e o eixo do cone e β é o ângulo entre o plano que secciona o cone com o eixo do cone.

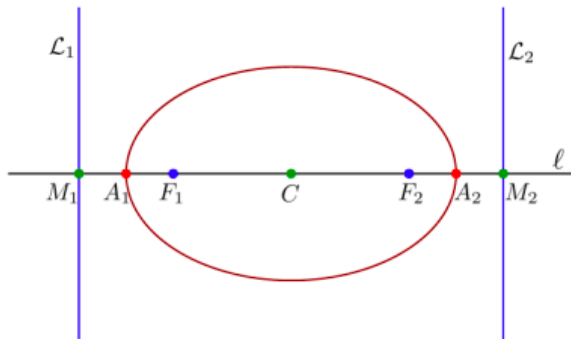


Fig. 1: Focos, vértices e diretrizes da elipse.

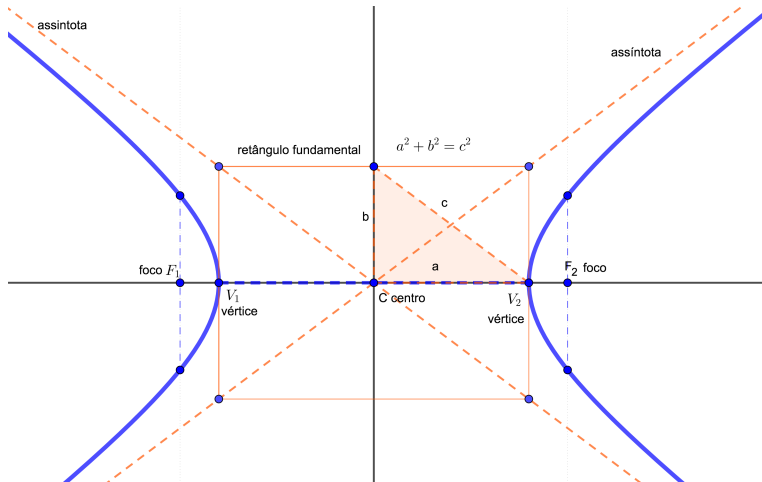
$$\boxed{\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P, F_2)}{d(P, \mathcal{L}_2)}}$$

Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos e tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja a um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico dos pontos X tais que $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ chama-se **Hipérbole**.

Cada um dos pontos F_1 e F_2 chama-se **Foco da hipérbole**, o segmento F_1F_2 é chamado de **Segmento Focal**, o ponto médio do segmento focal é chamado de **centro da hipérbole** e a distância $d(F_1, F_2) = 2c$ chama-se **distância focal**. A reta que contém os focos chama-se **reta focal**. A reta focal intersecta a hipérbole em dois pontos que são denominados **Vértices**.

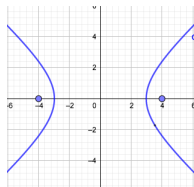
Qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertençam à hipérbole chama-se **corda**. A corda que une os dois vértices é chamada de **Eixo Transverso (ou eixo real)**. A **Amplitude Focal da hipérbole** é a medida de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal. O segmento perpendicular ao eixo transverso, com ponto médio no centro da hipérbole medindo $2b$, é denominado **Eixo Conjugado (ou eixo imaginário)**.



Equação reduzida da Hipérbole e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo x e o centro é a origem.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



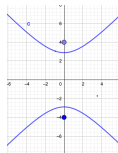
Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo x e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

Equação reduzida da Hipérbole e translações

Caso em que os focos estão sobre o eixo y e o centro é a origem.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Caso em que os focos estão em uma reta paralela ao eixo y e o centro $C = (c_1, c_2)$ NÃO é a origem:

$$\frac{(y - c_2)^2}{a^2} - \frac{(x - c_1)^2}{b^2} = 1$$

Excentricidade

A razão $e = \frac{c}{a}$ é denominada **excentricidade da hipérbole** e é sempre maior do que 1. Existem duas retas paralelas (ambas perpendiculares ao eixo focal) que são as **retas diretrizes da hipérbole**. A razão da distância de um ponto P da hipérbole a um dos focos pela distância de P à reta diretriz mais próxima deste foco é a excentricidade e .

Além disso, $e = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, onde α é o ângulo entre uma geratriz e o eixo do cone e β é o ângulo entre o plano que secciona o cone com o eixo do cone.

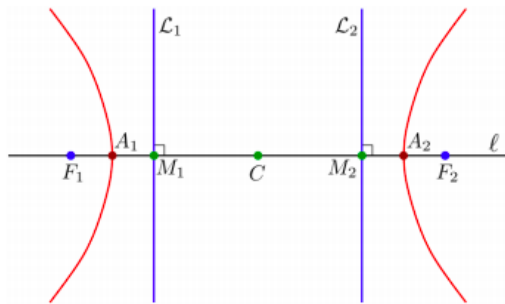
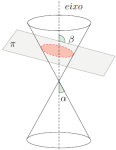
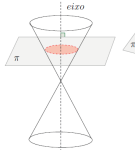
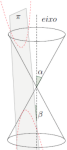
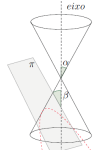


Fig. 4: Focos, vértices e diretrizes da hipérbole.

$$\boxed{\frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P, F_2)}{d(P, \mathcal{L}_2)}}$$

excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

| | | | | | |
|-----------|-------------|---|----------------|---------|---|
| elipse | $0 < e < 1$ |  <p>$\alpha < \beta$ Elipse</p> | circunferência | $e = 0$ |  <p>$\beta = 90^\circ$ Circunferência</p> |
| hipérbole | $1 < e$ |  <p>$\alpha > \beta$ Hipérbole</p> | Parábola | $e = 1$ |  <p>$\alpha = \beta$ Parábola</p> |