

1)b

A expressão para obter a média dos casos, e por consequência, o caso médio é

$$T(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k i.$$

A intenção é percorrer todas as possibilidades, desde o melhor caso que é $n - 1$ até o pior caso que é $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1$.

Separaremos a equação em 3 partes para uma melhor compreensão:

A: $\frac{1}{n-1}$, como a equação é uma média, será necessário dividir pelo o número total de eventos.

B: $\sum_{k=1}^{n-1}$, é a quantidade de passadas que o algoritmo pode dar.

C: $\sum_{i=1}^k i$ será usado para auxiliar na diminuição de comparação, pois a cada passada o algoritmo ele posicionará corretamente o elemento de maior valor.

Simplificando a equação:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right] \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{n^3 - 1}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{n^3 - 1}{3} - \frac{n-1}{3} \right] \\ &= \frac{n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

Ou seja, o $T(n)$ é equivalente a $O(n^2)$

2)b

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^k \left\{ 2 + \sum_{j=i+1}^n 2 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [2k + 2nk - k^2 - k] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n k + 2n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{2n^2}{2} + n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3)b

$$\begin{aligned}T(n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{i=2}^{k+1} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \right) \right] \\&= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} [k^2 + 2k] \\&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 \right] \\&= \frac{1}{n-1} \left[\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{3} + n(n-1) \right] \\&= \frac{1}{3}n^2 + \frac{5}{6}n\end{aligned}$$

Assim, é equivalente ao $O(n^2)$