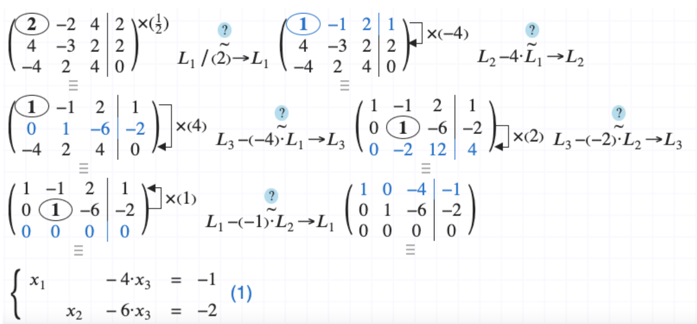
Primeira Prova de Geometria Analítica
Prof^a Cláudia Buttarello Gentile Moussa
28/11/2024

NOME: RA:

1. **(2,0)** Resolva o sistema de equações abaixo, escalonando a sua matriz ampliada até a forma escada reduzida.

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 4x - 3y + 2z = 2 \\ -4x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

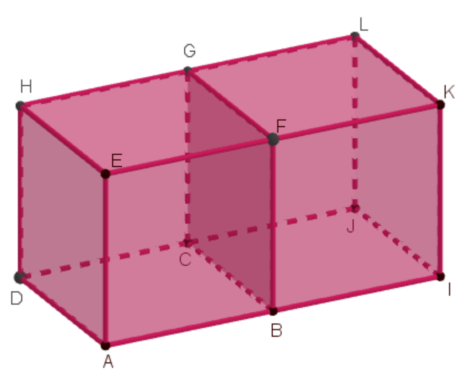
Fonte para o escalonamento abaixo: https://matrixcalc.org/



Portanto, o sistema é possível indeterminado, com grau de liberdade 1, e a solução é dada por:

$$S = \{(-1 + 4z, -2 + 6z, z); z \in \mathbb{R}\}$$

2. **(2,0)** Considere os cubos $ABCDEFGH$ e $BCFGIJKL$ que possuem a face $BCFG$ em comum, conforme figura abaixo.



(a) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BK}$ e $\overrightarrow{LH}$ são coplanares? Justifique sua resposta.

Sim, pois $\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{IA}$ e, portanto, os 3 vetores podem ser representados na mesma face plana do paralelepípedo acima.

(b) Determine qual ponto é igual a $E + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KI}$. Como $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{FL}$, $-2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{LH}$ e $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HD}$, então:

$$E + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KI} = E + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FL} + \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{HD} = D$$

(c) Decomponha o vetor $\overrightarrow{HI}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HL} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$

3. **(2,0)** Verifique se:

(a) Os pontos $P = (1, -2, 1), Q = (3, -1, 4), R = (0, 1, 1)$ e $S = (2, -1, 0)$ são coplanares.
$\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 3)$, $\overrightarrow{PR} = (-1, 3, 0)$, e $\overrightarrow{PS} = (1, 1, -1)$. Como o determinante é

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot(-1)+(-1)\cdot1\cdot3+1\cdot1\cdot0-3\cdot3\cdot1-0\cdot1\cdot2-(-1)\cdot1\cdot(-1) = -19$$

diferente de 0, então os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ não são coplanares. Logo, os pontos P, Q, R e S também não são coplanares.

(b) Os vetores $\vec{u} = (1, -2, 1), \vec{v} = (3, -1, 4), \vec{w} = (0, 1, 1)$ e $\vec{k} = (2, -1, 0)$ são coplanares.
Não. Verifique 3 a 3. Observe que $\vec{u}, \vec{v}$, e $\vec{w}$ não são coplanares, pois o determinante abaixo é diferente de 0. Logo, não é possıvel que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e $\vec{k}$ sejam coplanares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot1+3\cdot1\cdot1+0\cdot(-2)\cdot4-1\cdot(-1)\cdot0-4\cdot1\cdot1-1\cdot(-2)\cdot3 = 4$$

(c) Os pontos $P = (1, 0, 1), Q = (1, -1, 2)$, e $R = (1, 2, -1)$ são colineares.
$\overrightarrow{PQ} = (0, -1, 1)$, e $\overrightarrow{Pr} = (0, 2, -2)$. Como $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ são múltiplos, eles são paralelos. Logo, os pontos P, Q e R são colineares.

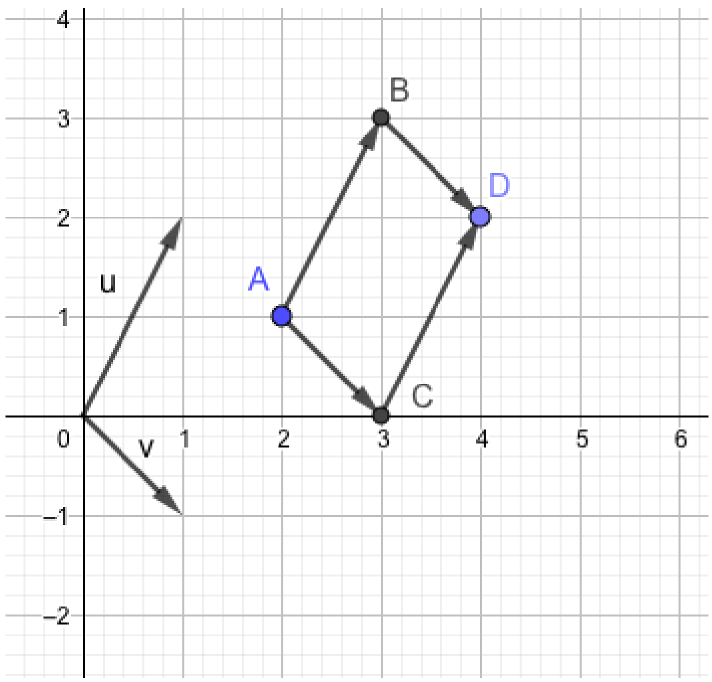
(d) Os vetores $\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (1, -1, 2)$, e $\vec{w} = (1, 2, -1)$ são colineares.
Não. Eles não são paralelos 2 a 2.

4. **(2,0)** Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2)$, e $\vec{v} = (1, -1)$, e seja $A = (2, 1)$, $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$.

(a) Determine as coordenadas do ponto D, tal que $ABDC$ seja um paralelelogramo com diagonais AD e BC;
Conforme mostra a figura abaixo, $D = C + \vec{u} = (4, 2)$

(b) Seja $P = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Decomponha $\overrightarrow{BP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

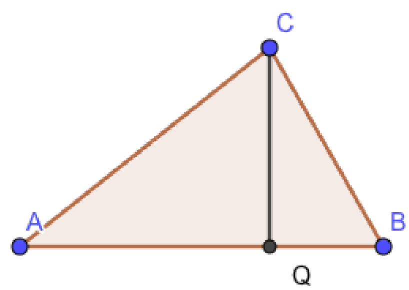
$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$



5. **(2,0)** Considere os pontos $A = (4, -3, 4), B = (5, 0, 5)$ e $C = (5, 4, 4)$.

(a) Determine as coordenadas do ponto Q tal que: a medida do segmento CQ é a altura do triângulo ABC relativa à base AB.

Conforme mostra a figura abaixo, $\overrightarrow{AQ}$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{AC}$ na direção de $\overrightarrow{AB}$



Ou seja,

$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{(1,7,0)\cdot(1,3,1)}{(\sqrt{1^2+3^2+1^2})^2}\right)(1, 3, 1) = \left(\frac{22}{11}\right)(1, 3, 1) = (2, 6, 2)$

Portanto, $Q = A + \overrightarrow{AQ} = (4, -3, 4) + (2, 6, 2) = (6, 3, 6)$.

(b) Calcule a altura do triângulo ABC.

a altura é dada pela norma do vetor $\overrightarrow{CQ} = (6, 3, 6) - (5, 4, 4) = (1, -1, 2)$. Ou seja, a altura é

$$\|\overrightarrow{CQ}\| = \sqrt{6}$$

Caso vc encontre algum erro neste gabarito, me avise, ok?