Primeira prova de Geometria Analítica
Prof^a Cláudia Buttarello Gentile Moussa
14 de julho de 2024

NOME e RA:

1. Respostas sem justificativa serão desconsideradas.

   (a) **(1,0)** Os pontos $A = (3, 7, 2)$, $B = (8, 2, 0)$ e $C = (-10, 10, 4)$ são colineares? Justifique sua resposta.

   Não. Basta, por exemplo, verificar que $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -5, -2)$ não é múltiplo de $\overrightarrow{AC} = C - A = (-13, -3, 2)$.

   (b) **(1,0)** Os pontos $A = (3, -2, 2)$, $B = (1, 3, 0)$, $C = (3, 2, 4)$ e $D = (-2, 4, 3)$ são coplanares? Justifique sua resposta.

   Não. Basta, por exemplo, analisar o determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 5, -2)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 4, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = D - A = (-5, 6, 1)$.

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix} = -74 \neq 0$$

   (c) **(1,0)** Os vetores $\vec{u} = (0, -1, 2)$, $\vec{v} = (-3, 1, 7)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$ são coplanares? Justifique sua resposta.

Não, pois

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -24 \neq 0$$

2. Sejam $\vec{u} = (2, -2, 1)$ e $\vec{v} = (3, -6, 0)$.

   (a) **(1,0)** Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

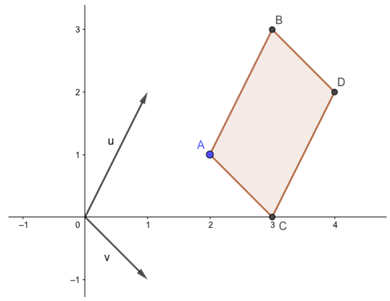
$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} &= \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u} = \left(\frac{6+12+0}{\sqrt{4+4+1}^2}\right)(2, -2, 1) \\ &= 2(2, -2, 1) = (4, -4, 2) \end{aligned}$$

   (b) **(1,0)** Mostre que $\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

$$\begin{aligned} (\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}) \cdot \vec{u} &= ((3, -6, 0) - (4, -4, 2)) \cdot (2, -2, 1) \\ &= (-1, -2, -2) \cdot (2, -2, 1) = -2 + 4 - 2 = 0 \end{aligned}$$

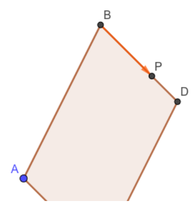
3. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 2)$, e $\vec{v} = (1, -1)$, e seja $A = (2, 1)$, $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$.

   (a) **(1,0)** Determine as coordenadas do ponto D, tal que $ABDC$ seja um paralelogramo;



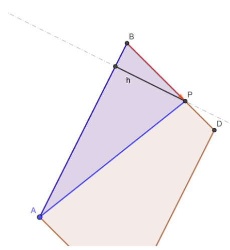
$$D = B + \vec{v} = (A + \vec{u}) + \vec{v} = (2,1) + (1,2) + (1,-1) = (4,2)$$

(b) **(1,0)** Seja $P = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Decomponha $\overrightarrow{BP}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

(c) **(1,0)** Calcule a área do triângulo ABP.



$$\text{Área}_{ABP} = \frac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|.\text{h}}{2}$$

Note que, se $\vec{w}$ é qualquer vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$,

$$h = \left\|\text{proj}_{\vec{w}}\overrightarrow{BP}\right\|$$

Temos que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (1,2)$, logo, podemos escolher qualquer vetor $\vec{w} = (a,b)$, que satisfaça

$$(a,b)\cdot(1,2) = a + 2b = 0, \text{ ou seja, } a = -2b$$

Tomemos, por exemplo, $\vec{w} = (-2,1)$.
Então, como $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\text{proj}_{\vec{w}}\overrightarrow{BP} = \left(\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right)\vec{w} = \left(\frac{\frac{-4}{3} - \frac{2}{3}}{\sqrt{4+1}^2}\right)(2,1) = \frac{-2}{5}(-2,1)$$

Portanto,

$$h = \left\| \frac{-2}{5}(-2,1) \right\| = \left| \frac{-2}{5} \right| \|(-2,1)\| = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

e

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5}$$

Logo,

$$\text{Área}_{ABP} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{5} = 1$$

4. **(1,0)** Sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$, $\vec{u}$ é unitário e $\|\vec{v}\| = 2$, determine $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$;

   Vamos chamar de θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\sqrt{3} = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos\theta = 1.2.\cos\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

   Logo,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta = 1.2.\frac{1}{2} = 1$$

5. **(1,0)** Seja $\vec{w}$ um vetor ortogonal a $\vec{u} = (1,1,2)$ e a $\vec{v} = (-1,2,3)$. Sabendo que $\|\vec{w}\| = 6$, e que a base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ tem orientação positiva, determine as coordenadas de $\vec{w}$.

   $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$, ou seja, existe algum λ real tal que $\vec{w} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$. Temos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (-1,-5,3)$$

   Logo, $\vec{w} = \lambda(-1,-5,3)$. Além disso,

$$6 = \|\vec{w}\| = \|\lambda(-1,-5,3)\| = |\lambda|\sqrt{1+25+9} = |\lambda|\sqrt{35}$$

   Portanto

$$|\lambda| = \frac{6}{\sqrt{35}}$$

   Para saber qual o sinal de λ, observemos $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$ tem a mesma orientção de $(\vec{u}, \vec{v}, -\vec{w})$, e portanto $\vec{w}$ tem sentido contrário ao de $\vec{u} \times \vec{v}$. Ou seja,

$$\vec{w} = -\frac{6}{\sqrt{35}}(-1,-5,3)$$

Por favor, se encontrar algum erro no gabarito, que foi feito meio correndo, me escreva avisando. Obrigada.