

Lógica

Lógica Proposicional

Formas normais

Aula 09

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

p

q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional

- $p \rightarrow q$
- $q \rightarrow r$
- $\neg r \vee p$

premissas (ou
hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

Lógica Proposicional

■ Prova direta

- Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

Dadas as premissas

- $\alpha_1: p \rightarrow q$
- $\alpha_2: q \rightarrow r$
- $\alpha_3: \neg r \vee p$

Deduz-se

- $\beta_1: r \rightarrow p$ ($\alpha_3 +$ equivalência de \rightarrow)
- $\beta_2: q \rightarrow p$ ($\alpha_2 + \beta_1 +$ regra da cadeia)
- $\beta_3: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ($\alpha_1 + \beta_2 +$ conjunção)
- $\alpha_4: q \leftrightarrow p$ ($\beta_3 +$ equivalência de \leftrightarrow)

Lógica Proposicional

- **Como demonstrar a validade de um argumento?**
 - Método semântico
 - Via construção da tabela-verdade
 - Com base em interpretações
 - Método sintático
 - Via construção de uma prova/derivação/dedução
 - Com base em regras de inferência e leis de equivalência (raciocínio)
 - Ou usando inferência por resolução

Baseado no Curso do Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira – DTI / FATEC-SP

Lógica Proposicional

- **Resolução**
 - Usa uma simples regra de inferência
 - Aplicação fácil, vantajosa e computacionalmente conveniente
 - Só se aplica a **cláusulas**
 - Necessário converter as fórmulas para a **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

Lógica Proposicional

■ Formas normais

- Padronizações adotadas para notação das fórmulas a fim de poder expressá-las de uma única maneira
 - Forma Normal Conjuntiva (FNC)
 - Forma Normal Disjuntiva (FND)
- Dada uma fórmula da Lógica Proposicional é sempre possível determinar uma fórmula equivalente que esteja representada tanto na FNC quanto na FND

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Também conhecida como Forma Clausal
- É empregada no método de inferência **resolução** que serve de base para a programação lógica
- Uma fórmula na FNC pode ser definida com base em
 - Cláusulas
 - Literais

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

- **Literal**

- Elemento básico da FNC
 - Literal positivo – uma fórmula atômica: p
 - Literal negativo – negação de uma fórmula atômica:
 $\neg p$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

- **Cláusula**

- Disjunção de literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$$

onde n é o tamanho da cláusula

- Cláusula unária – composta por apenas 1 literal
 - Cláusula vazia – não contém literais

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

■ Exemplos de cláusulas

- p
 - $\neg p$
 - $p \vee q$
 - $p \vee q \vee \neg p$
-

CLÁUSULAS

- $p \wedge q$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$

NÃO CLÁUSULAS

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

■ Definição

- Uma fórmula proposicional está na FNC (ou forma clausal) se for uma conjunção de cláusulas
 - ou seja, uma fórmula está na FNC se for uma conjunção de disjunções de literais
cláusulas

Literal (L): p ou $\neg p$

Cláusula (C): $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n \quad n \geq 0$

FNC: $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n \quad n \geq 1$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
 - **Teorema**
 - Para toda fórmula da Lógica Proposicional clássica β existe uma fórmula α na FNC que é equivalente a β , $\alpha \equiv \beta$

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Pode-se dizer que uma fórmula está na FNC se e somente se:
 1. Contém como conectivos apenas \wedge , \vee e \neg ;
 2. \neg só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre \wedge e \vee ;
 3. Não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
 4. \vee não tem alcance sobre \wedge , ou seja, não existem expressões como $p \vee (q \wedge r)$.

Lógica Proposicional

- **FNC**

- Exemplos de FNC

- $\neg p$
 - $p \vee q$
 - $p \vee q \vee \neg p$
 - $p \wedge q$
 - $(p \vee q) \wedge r$

ESTÁ NA FNC

- $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$
 - $p \rightarrow q$
 - $\neg(p \vee q)$
 - $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

NÃO ESTÁ NA FNC

Lógica Proposicional

- **FNC**

- Exemplos de FNC

- $\neg p$
 - $p \vee q$
 - $p \vee q \vee \neg p$
 - $p \wedge q$
 - $(p \vee q) \wedge r$
 - $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$
 - $p \rightarrow q$
 - $\neg(p \vee q)$
 - $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

APÓS CONVERSÃO

- $\neg p \vee \neg q \vee r$
 - $\neg p \vee q$
 - $\neg p \wedge \neg q$
 - $p \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Transformação via Tabela-Verdade
 1. Construa a tabela-verdade da fórmula que se deseja converter
 2. Procure na tabela-verdade todas as interpretações que avaliam essa fórmula como F
 3. Para cada uma dessas interpretações, crie uma disjunção de seus átomos considerando-se
 - se o átomo p é avaliado como V, considera-se $\neg p$
 - se o átomo p é avaliado como F, considera-se p
 4. A FNC equivalente é a conjunção das disjunções formadas para cada uma das interpretações F
- Se a fórmula for tautológica, FNC: $p \vee (\neg p)$

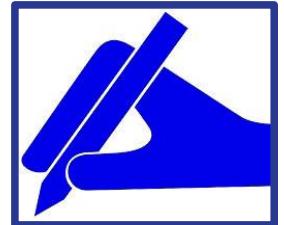
Lógica Proposicional

- Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Transformação via Tabela-Verdade
 - Exemplo: $p \rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$\neg p \vee q$

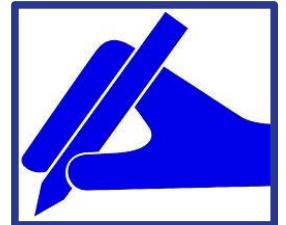


Lógica Proposicional

■ Exercício

- Transforme a fórmula a seguir para a FNC via construção da tabela-verdade
 - $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

1. Construa a tabela-verdade da fórmula que se deseja converter
2. Procure na tabela-verdade todas as interpretações que avaliam essa fórmula como F
3. Para cada uma dessas interpretações, crie uma disjunção de seus átomos considerando-se
 - se o átomo p é avaliado como V, considera-se $\neg p$
 - se o átomo p é avaliado como F, considera-se p
4. A FNC equivalente é a conjunção das disjunções formadas para cada uma das interpretações F



Lógica Proposicional

■ Exercício

- Transforme a fórmula a seguir para a FNC via construção da tabela-verdade
 - $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$	$(\neg p \vee \neg q) \wedge p$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

- Algoritmo de manipulação algébrica para gerar FNC

Entrada: Uma fórmula β

Saída: Uma fórmula α na FNC, $\beta \equiv \alpha$

1. Para todas as subfórmulas δ, γ, ϕ de β faça

1.1. Redefina “ \leftrightarrow ” e “ \rightarrow ” em termos de “ \vee ” e “ \neg ”:

$$(\delta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \delta)$$

$$(\delta \rightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma)$$

1.2. Elimine a dupla negação:

$$\neg\neg\delta \equiv \delta$$

1.3. Empurre as negações para o interior usando as Leis de De Morgan:

$$\neg(\delta \vee \gamma) \equiv \neg\delta \wedge \neg\gamma \quad \text{e} \quad \neg(\delta \wedge \gamma) \equiv \neg\delta \vee \neg\gamma$$

1.4. Aplique a distributividade de \vee sobre \wedge , quando a fórmula obtida não tiver subfórmulas compostas negadas:

$$\delta \vee (\gamma \wedge \phi) \equiv (\delta \vee \gamma) \wedge (\delta \vee \phi)$$

2. A fórmula α é obtida quando não há mais substituições possíveis

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

▪ Exemplo de transformação linear para FNC

$$\bullet p \leftrightarrow (q \wedge r)$$

$$(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow p)$$

Decompõe \leftrightarrow em 2 \rightarrow

$$(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee p)$$

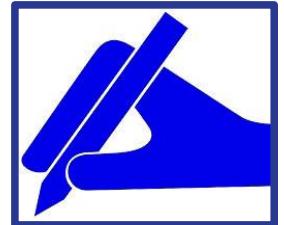
Elimina \rightarrow

$$(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$$

De Morgan

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$$

Distribui \vee sobre \wedge



Lógica Proposicional

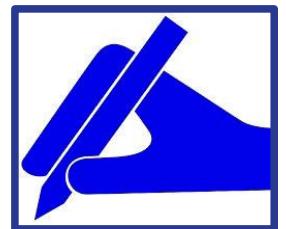
■ Exercício

- Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear

- a) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$
- b) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

Passos

1. Redefina “ \leftrightarrow ” e “ \rightarrow ” em termos de “ \vee ” e “ \neg ”
2. Elimine a dupla negação
3. Empurre as negações para o interior usando as Leis de De Morgan
4. Aplique a distributividade de \vee sobre \wedge



Lógica Proposicional

■ Exercício

- Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear

a) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$

b) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

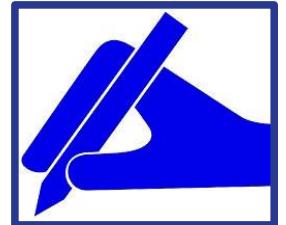
RESPOSTA

a)

- $\neg(\neg p \vee q) \vee r$
- $(\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee r$
- $(p \wedge \neg q) \vee r$
- $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

Elimina \rightarrow
Empurra negação
Elimina dupla negação
Distribui \vee sobre \wedge

→ Verifique, por meio da construção da tabela-verdade, que a fórmula original e sua FNC são logicamente equivalentes



Lógica Proposicional

■ Exercício

- Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear

a) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$

b) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA

b)

- $((p \wedge q) \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow (p \wedge q))$
- $(\neg(p \wedge q) \vee \neg p) \wedge (\neg\neg p \vee (p \wedge q))$
- $(\neg(p \wedge q) \vee \neg p) \wedge (p \vee (p \wedge q))$
- $(\neg p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee (p \wedge q))$
- $(\neg p \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee p) \wedge (p \vee q)$
- $(\neg p \vee \neg q) \wedge p$

Decompõe \leftrightarrow em 2 \rightarrow
Elimina \rightarrow
Elimina dupla negação
Empurra negação
Distribui \vee sobre \wedge
Simplifica (idemp., abs.)

Lógica Proposicional

■ Forma Normal Conjuntiva (FNC)

■ Notação clausal

- FNC de uma fórmula α é uma coleção de cláusulas que pode ser escrita como $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ (conjunção implícita)
- De modo semelhante, uma cláusula é uma coleção de literais $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ (disjunção implícita)
- Exemplo: a notação clausal para a fórmula $(\neg p \vee \neg q) \wedge p$ é:

$$\{\neg p \vee \neg q, p\}$$