

Lógica

Lógica Proposicional

Raciocínio

Aula 08

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

p

q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional

- p → q
- q → r
- ¬r ∨ p

premissas (ou
hipóteses)

Logo, q ↔ p

conclusão

Lógica Proposicional

■ Argumento

- É uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ($n \geq 1$) de proposições, na qual as proposições α_i ($1 \leq i \leq n-1$) são chamadas de **premissas** e a proposição α_n é chamada de **conclusão**

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$$

■ Exemplo

- $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$



então, logo, portanto, como consequência, conclui-se, etc.

Lógica Proposicional

- Como demonstrar a validade de um argumento?

- Método semântico
 - Via construção da tabela-verdade
 - Com base em interpretações
 - Método sintático
 - Via construção de uma prova/derivação/dedução
 - Com base em regras de inferência e leis de equivalência (raciocínio)
 - Ou usando inferência por resolução
- HOJE** {

Baseado no Curso do Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira – DTI / FATEC-SP

Lógica Proposicional

■ Prova (dedução ou derivação)

- Dadas as fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ e α_n da LP. Diz-se que uma sequência finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ é uma **prova (ou dedução ou derivação)** de α_n a partir das **premissas** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ se e somente se:
 1. Cada β_i for uma premissa α_j ($1 \leq j \leq n-1$); ou
 2. β_i provém das fórmulas precedentes aplicando-se um conjunto de **regras de inferência L**; ou
 3. β_i provém do uso do **princípio de substituição** usado em uma fórmula anterior; ou
 - α_n é dedutível das premissas
 4. β_k é α_n .
 - α_n é um teorema e as premissas são a teoria

Lógica Proposicional

■ Prova (dedução ou derivação)

Princípio da substituição

- Se α for uma fórmula tendo β como subfórmula, o valor de α não muda se β for substituída por uma expressão que tenha os mesmos valores-verdade que β

- Equivalências lógicas

conjunto de **regras de inferência L**; ou

- β_i provém do uso do **princípio de substituição** usado em uma fórmula anterior; ou
 - α_n é dedutível das premissas
- β_k é α_n .
 - α_n é um teorema e as premissas são a teoria

Lógica Proposicional

Estratégias

- Prova direta
- Prova condicional
- Prova indireta

■ Prova (dedução ou derivação)

■ Como funciona?

- Para provar que α_n é uma conclusão válida de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ precisamos produzir uma sequência de demonstração da forma

α_1 (premissa)

...

α_{n-1} (premissa)

β_1 (obtida com aplicação de alguma regra/lei)

...

β_k (obtida com aplicação de alguma regra/lei)

α_n (obtida com aplicação de alguma regra/lei)

Pode existir mais de uma sequência de demonstração correta

Lógica Proposicional

■ Regras de inferência

Regra	Nome da regra
$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$	<i>modus ponens</i>
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$	<i>modus tollens</i>
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$	silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$ $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$	silogismo disjuntivo
$\alpha \wedge \beta \models \alpha$ $\alpha \wedge \beta \models \beta$	simplificação
$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$	conjunção (ou combinação)

Lógica Proposicional

■ Regras de inferência

Regra	Nome da regra
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$	de casos
$\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\beta \models \alpha \vee \beta$	adição
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$	dilema construtivo
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$	dilema destrutivo
$\alpha \rightarrow \beta \models \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	contraposição
$\alpha, \neg\alpha \models \beta$	da inconsistência
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$	introdução da equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \rightarrow \alpha$	eliminação da equivalência

Lógica Proposicional

■ Leis de equivalência

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv F$ $\alpha \vee \neg\alpha \equiv V$	Lei da contradição Lei do terceiro excluído
$\alpha \wedge V \equiv \alpha$ $\alpha \vee F \equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \wedge F \equiv F$ $\alpha \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Leis de De Morgan

Lei	Nome da lei
$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$	Definição de \rightarrow em termos de \vee e \neg
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	Definição de \leftrightarrow em termos de \rightarrow e \wedge
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	Definição de \leftrightarrow em termos de \vee e \neg
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$	Lei da absorção
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \equiv \beta$ $(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \equiv \beta$	--

Lógica Proposicional

p

q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional

- $p \rightarrow q$
- $q \rightarrow r$
- $\neg r \vee p$

premissas (ou
hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

■ Prova direta

- Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

Dadas as premissas

- $\alpha_1: p \rightarrow q$
- $\alpha_2: q \rightarrow r$
- $\alpha_3: \neg r \vee p$

Deduz-se

- $\beta_1: r \rightarrow p$ ($\alpha_3 +$ equivalência de \rightarrow)
- $\beta_2: q \rightarrow p$ ($\alpha_2 + \beta_1 +$ regra da cadeia)
- $\beta_3: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ($\alpha_1 + \beta_2 +$ conjunção)
- $\alpha_4: q \leftrightarrow p$ ($\beta_3 +$ equivalência de \leftrightarrow)



Lógica Proposicional

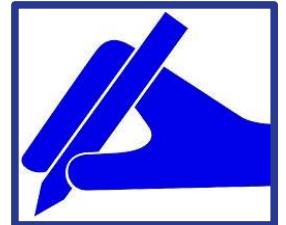
■ Prova direta

- Prove que os argumentos a seguir são válidos

a) $\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s \vdash p$

b) $(p \vee \neg q) \rightarrow r, r \rightarrow s, p \vdash s$

c) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.



Lógica Proposicional

■ Prova direta

- Prove que os argumentos a seguir são válidos

a) $\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s \vdash p$

RESPOSTAS

a) Dadas as premissas

$$\alpha_1: \neg p \rightarrow q \quad \alpha_2: q \rightarrow r \quad \alpha_3: \neg r \vee s \quad \alpha_4: \neg s$$

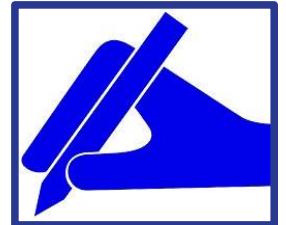
Deduz-se

$$\alpha_5: \neg r \ (\alpha_3 + \alpha_4 + \text{silogismo disjuntivo})$$

$$\alpha_6: \neg q \ (\alpha_2 + \alpha_5 + \text{modus tollens})$$

$$\alpha_7: \neg(\neg p) \ (\alpha_1 + \alpha_6 + \text{modus tollens})$$

$$\alpha_8: p \ (\alpha_7 + \text{equivalência dupla negação})$$



Lógica Proposicional

■ Prova direta

- Prove que os argumentos a seguir são válidos
 - b) $(p \vee \neg q) \rightarrow r, r \rightarrow s, p \vdash s$

RESPOSTAS

b) Dadas as premissas

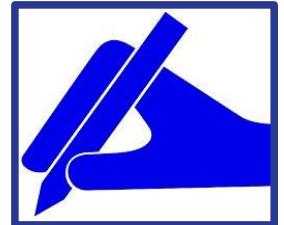
$$\alpha_1: (p \vee \neg q) \rightarrow r \quad \alpha_2: r \rightarrow s \quad \alpha_3: p$$

Deduz-se

$$\alpha_4: p \vee \neg q \ (\alpha_3 + \text{adição})$$

$$\alpha_5: r \ (\alpha_1 + \alpha_4 + \textit{modus ponens})$$

$$\alpha_6: s \ (\alpha_2 + \alpha_5 + \textit{modus ponens})$$



Lógica Proposicional

■ Prova direta

- Prove que os argumentos a seguir são válidos
 - c) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.

RESPOSTAS

a) p: a Terra é redonda, q: a Lua é oval, r: Saturno é vermelho

Dadas as premissas

$$\alpha_1: p \rightarrow q \quad \alpha_2: q \rightarrow \neg r \quad \alpha_3: \neg p \rightarrow \neg r$$

Deduz-se

$$\alpha_4: p \rightarrow \neg r (\alpha_1 + \alpha_2 + \text{regra da cadeia})$$

$$\alpha_5: \neg r (\alpha_3 + \alpha_4 + \text{de casos})$$

■ Prova condicional

- Introdução da condicional
 - Dada a derivação de uma fbf β a partir de uma hipótese α , pode-se descartar a hipótese e inferir a fbf $\alpha \rightarrow \beta$
- **Teorema 1.3 – Teorema da dedução**
 - Sejam α e β duas fbfs e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ premissas. Se juntos $\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ implicam logicamente β , então $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ implicam logicamente $\alpha \rightarrow \beta$

Seu tornozelo está muito inchado.

Se seu tornozelo está muito inchado e você continuar a correr,
então seu tornozelo não vai sarar em uma semana.

Se seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não
estará apto a disputar a corrida.

Logo, se você continuar a correr, então você não estará apto a
disputar a corrida.

- Representando na Lógica Proposicional

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s$$

■ Prova condicional

- Demonstrando que

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s$$

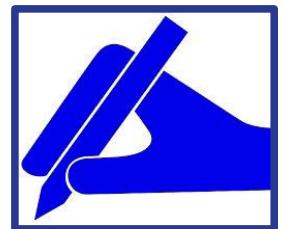
- é um argumento válido

Dadas as premissas

- $\alpha_1: p$
 - $\alpha_2: (p \wedge q) \rightarrow \neg r$
 - $\alpha_3: \neg r \rightarrow \neg s$
- E a hipótese
- $\gamma_1: q$

Deduz-se

- $\beta_1: p \wedge q (\alpha_1 + \gamma_1 + \text{conjunção})$
- $\beta_2: \neg r (\alpha_2 + \beta_1 + \text{modus ponens})$
- $\beta_3: \neg s (\alpha_3 + \beta_2 + \text{modus ponens})$
- $\alpha_4: q \rightarrow \neg s (\gamma_1 + \beta_3 + \text{introdução da condicional})$



Lógica Proposicional

■ Prova condicional

- Prove que o argumento a seguir é válido
 - a) $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

RESPOSTA

a) Dada a premissa

$$\alpha_1: (p \wedge q) \rightarrow r$$

E as hipóteses

$$\alpha_2: p \quad \text{e} \quad \alpha_3: q$$

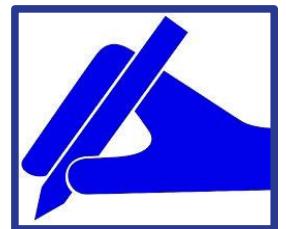
Deduz-se

$$\alpha_4: p \wedge q \quad (\alpha_2 + \alpha_3 + \text{conjunção})$$

$$\alpha_5: r \quad (\alpha_1 + \alpha_4 + \textit{modus ponens})$$

$$\alpha_6: q \rightarrow r \quad (\alpha_3 + \alpha_5 + \text{introdução da condicional})$$

$$\alpha_7: p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad (\alpha_2 + \alpha_6 + \text{introdução da condicional})$$



Lógica Proposicional

■ Prova condicional

- Prove que o argumento a seguir é válido
 - b) $p \rightarrow \neg q, \neg(r \wedge \neg p) \vdash q \rightarrow \neg r$

RESPOSTA

b) Dadas as premissas

$$\alpha_1: p \rightarrow \neg q$$

$$\alpha_2: \neg(r \wedge \neg p)$$

E a hipótese

$$\alpha_3: q$$

Deduz-se

$$\alpha_4: \neg p \quad (\alpha_1 + \alpha_3 + \text{modus tollens})$$

$$\alpha_5: \neg r \vee p \quad (\alpha_2 + \text{De Morgan})$$

$$\alpha_6: \neg r \quad (\alpha_4 + \alpha_5 + \text{silogismo disjuntivo})$$

$$\alpha_7: q \rightarrow \neg r \quad (\alpha_3 + \alpha_6 + \text{introdução da condicional})$$

Lógica Proposicional

■ Prova de Teoremas

- Um teorema α é uma fórmula tal que existe uma dedução $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ ($\vdash \alpha$)
 - Em outras palavras, é uma fbf provada sem premissas
 - A prova de um teorema se inicia com uma ou mais hipóteses que serão descartadas pela introdução da condicional

Lógica Proposicional

■ Prova de Teoremas

- Demonstrando que $\neg p \rightarrow (p \vee q)$ é um argumento válido

Dada a hipótese

- $\alpha_1: p$

Deduz-se

- $\alpha_2: p \vee q (\alpha_1 + \text{adição})$
- $\alpha_3: p \rightarrow (p \vee q) (\alpha_1 + \alpha_2 + \text{introdução da condicional})$

■ Redução ao absurdo (Teorema 1.2)

- Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ e uma fórmula α , diz-se que α é uma consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ se e somente se a fórmula

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$$

for uma **contradição**

■ Redução ao absurdo (Prova indireta)

- Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese α , pode-se descartar a hipótese e inferir $\neg\alpha$
- Passo a passo
 - A conclusão que se deseja provar é negada e inserida como hipótese
 - Busca-se derivar uma contradição (a qual evidencia que a hipótese negada é falsa)
 - Se a contradição é encontrada, infere-se que a conclusão segue das premissas

■ Prova indireta

- Demonstrando que $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$ é um argumento válido

Dadas as premissas

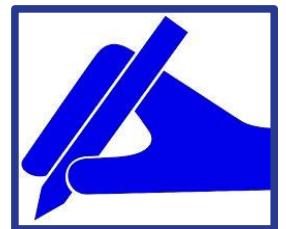
- $\alpha_1: p \rightarrow q$
- $\alpha_2: \neg q$

E a hipótese

- $\alpha_3: p$

Deduz-se

- $\alpha_4: q (\alpha_1 + \alpha_3 + \text{modus ponens})$
- $\alpha_5: q \wedge \neg q (\alpha_4 + \alpha_2 + \text{conjunção})$
- $\alpha_6: \neg p (\alpha_3 + \alpha_5 + \text{redução ao absurdo})$



Lógica Proposicional

■ Prova indireta

- Prove que o argumento a seguir é válido
 - a) $\neg q \vee r, p \rightarrow \neg r, q \vdash \neg p$

RESPOSTA

a) Dadas as premissas

$$\alpha_1: \neg q \vee r$$

$$\alpha_2: p \rightarrow \neg r$$

$$\alpha_3: q$$

E a hipótese (negação da conclusão)

$$\alpha_4: p$$

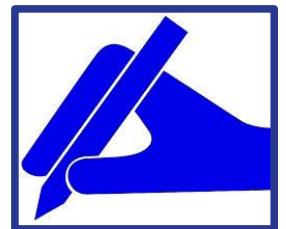
Deduz-se

$$\alpha_5: \neg r (\alpha_2 + \alpha_4 + \text{modus ponens})$$

$$\alpha_6: \neg q (\alpha_1 + \alpha_5 + \text{silogismo disjuntivo})$$

$$\alpha_7: q \wedge \neg q (\alpha_3 + \alpha_6 + \text{conjunção})$$

$$\alpha_8: \neg p (\alpha_4 + \alpha_7 + \text{redução ao absurdo})$$



Lógica Proposicional

■ Prova indireta

- Prove que o argumento a seguir é válido
 - b) $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

RESPOSTA

b) Dada a premissa

$$\alpha_1: p \leftrightarrow \neg q$$

E a hipótese (negação da conclusão)

$$\alpha_2: p \wedge q$$

Deduz-se

$$\alpha_3: p (\alpha_2 + \text{simplificação})$$

$$\alpha_4: q (\alpha_2 + \text{simplificação})$$

$$\alpha_5: (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p) (\alpha_1 + \text{equivalência do bicondicional})$$

$$\alpha_6: p \rightarrow \neg q (\alpha_5 + \text{simplificação}) \quad \alpha_8: q \wedge \neg q (\alpha_4 + \alpha_7 + \text{conjunção})$$

$$\alpha_7: \neg q (\alpha_3 + \alpha_6 + \text{modus ponens}) \quad \alpha_9: \neg(p \wedge q) (\alpha_2 + \alpha_8 + \text{redução ao absurdo})$$

Lógica Proposicional

■ Raciocínio hipotético – IMPORTANTE

- Nenhuma ocorrência de uma fórmula derivada de uma hipótese pode ser usada em qualquer regra aplicada após o descarte da hipótese
- Se duas ou mais hipóteses estiverem ativas simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas foram introduzidas
- Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas