Capítulo 4 | Esperança matemática

4.1 Média de uma variável aleatória

Definição 4.1

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(x)$. A *média* ou o *valor esperado* de X é

$$\mu = E(X) = \sum_{x} xf(x)$$

se X for discreta, e

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

se X for contínua.

Exemplo 4.3

Seja X a variável aleatória que denota a vida, em horas, de certo equipamento eletrônico. A função de densidade da probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20.000}{x^3}, & x > 100, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine o valor esperado de vida desse tipo de equipamento.

Solução: Usando a Definição 4.1, temos

$$\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20.000}{x^3} dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20.000}{x^2} dx = 200.$$

Portanto, podemos esperar que tal tipo de equipamento dure, em média, 200 horas.

Teorema 4.1

Seja X a variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(X)$. O valor esperado da variável aleatória $g(X)$ é

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$$

se X for discreta, e

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx$$

se X for contínua.

Definição 4.2

Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conjunta $f(x, y)$. A média ou valor esperado da variável aleatória $g(x, y)$ é

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y)$$

se X e Y forem discretas, e

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$$

se X e Y forem contínuas.

Capítulo 4 | Esperança matemática

4.2 Variância e covariância de variáveis aleatórias

Definição 4.3

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(X)$ e média μ. A variância de X é

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x),$$

se X for discreta, e

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\ dx,$$

se X for contínua.

A raiz quadrada positiva da variância, σ, é chamada de desvio-padrão de X.

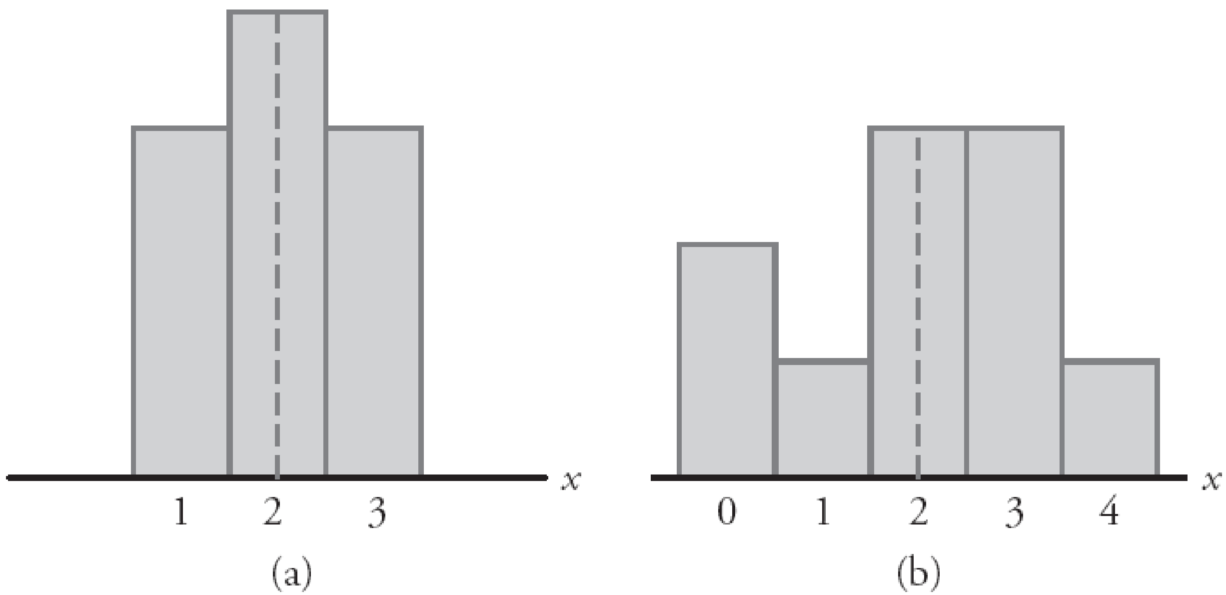

Figura 4.1 Distribuições com médias iguais e dispersões diferentes.

Teorema 4.2

A variância de uma variável aleatória X é

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

■ Exemplo 4.9

Seja a variável aleatória X, o número de partes defeituosas em uma máquina quando três partes são amostradas da linha de produção e testadas. A seguir, temos a distribuição de probabilidade de X.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,51	0,38	0,10	0,01

Usando o Teorema 4.2, calcule σ^2.

Solução: Primeiro, calculamos

$$\mu = (0)(0,51) + (1)(0,38) + (2)(0,10) + (3)(0,01) = 0,61.$$

Agora

$$E(X^2) = (0)(0,51) + (1)(0,38) + (4)(0,10) + (9)(0,01) = 0,87.$$

Portanto,

$$\sigma^2 = 0,87 - (0,61)^2 = 0,4979.$$

Teorema 4.3

Seja X uma variável aleatória com distribuição de probabilidade $f(X)$. A variância da variável aleatória $g(X)$ é

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \sum_x [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)$$

se X for discreta, e

$$\sigma^2_{g(X)} = E\{[g(X) - \mu_{g(X)}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - \mu_{g(X)}]^2 f(x)\, dx$$

se X for contínua.

Definição 4.4

Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conjunta $f(x, y)$. A covariância de X e Y é

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$
$$= \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_y) f(x, y)$$

se X e Y forem discretas, e

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_y) f(x, y)\, dx\, dy$$

se X e Y forem contínuas.

Teorema 4.4

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y com médias μ_X e μ_Y, respectivamente, é dada por

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

Definição 4.5

Sejam X e Y variáveis aleatórias com covariância σ_{XY} e desvios-padrão σ_X e σ_Y, respectivamente. O coeficiente de correlação de X e Y é

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

4.3 Médias e variâncias de combinações lineares de variáveis aleatórias

Teorema 4.5

Se a e b são constantes, então

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Corolário 4.1

Fazendo $a = 0$, vemos que $E(b) = b$.

Corolário 4.2

Fazendo $b = 0$, vemos que $E(aX) = aE(X)$.

Exemplo 4.15

Aplicando o Teorema 4.5 à variável aleatória discreta $f(X) = 2X - 1$, trabalhe novamente o Exemplo 4.4.

Solução: De acordo com o Teorema 4.5, podemos escrever

$$E(2X - 1) = 2E(X) - 1.$$

Agora,

$$\mu = E(X) = \sum_{x=4}^{9} xf(x)$$

$$= (4)\left(\frac{1}{12}\right) + (5)\left(\frac{1}{12}\right) + (6)\left(\frac{1}{4}\right) + (7)\left(\frac{1}{4}\right) \cdot$$

$$+ (8)\left(\frac{1}{6}\right) + (9)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{41}{6} \cdot$$

Portanto,

$$\mu_{2X-1} = (2)\left(\frac{41}{6}\right) - 1 = \$\ 12{,}67,$$

como antes.

Teorema 4.6

O valor esperado da soma ou diferença de duas ou mais funções de uma variável aleatória X é a soma ou a diferença dos valores esperados das funções. Ou seja,

$$E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)].$$

Teorema 4.7

O valor esperado da soma ou diferença de duas ou mais funções das variáveis aleatórias X e Y é a soma ou diferença dos valores esperados das funções. Ou seja,

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)].$$

Corolário 4.3

Fazendo $g(X, Y) = g(X)$ e $h(X, Y) = h(Y)$, vemos que

$$E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)].$$

Corolário 4.4

Fazendo $g(X, Y) = X$ e $h(X, Y) = Y$, vemos que

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y].$$

Teorema 4.8

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes. Então,

$$E(XY) = E(X)\,E(Y).$$

Corolário 4.5

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes. Então, $\sigma_{XY} = 0$.

Teorema 4.9

Se a e b são constantes, então

$$\sigma^2_{aX+b} = a^2\sigma^2_X = a^2\sigma^2.$$

Corolário 4.6

Fazendo $a = 1$, vemos que

$$\sigma^2_{X+b} = \sigma^2_X = \sigma^2.$$

Corolário 4.7

Fazendo $b = 0$, vemos que

$$\sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2 = a^2\sigma^2.$$

Teorema 4.10

Se X e Y são variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conjunta $f(x, y)$, então

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}.$$

Corolário 4.8

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$\sigma^2_{aX+bY} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y.$$

Corolário 4.9

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$$\sigma_{aX-bY} = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2.$$

Corolário 4.10

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então

$$\sigma^2_{a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n} = a_1^2\sigma^2_{X_1} + a_2^2\sigma^2_{X_2} + \cdots + a_n^2\sigma^2_{X_n}.$$

4.4 Teorema de Chebyshev

Teorema 4.11

(*Teorema de Chebyshev*) A probabilidade de que qualquer variável aleatória X assuma um valor a k desvios-padrão da média é, pelo menos, $1 - 1/k^2$. Ou seja,

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

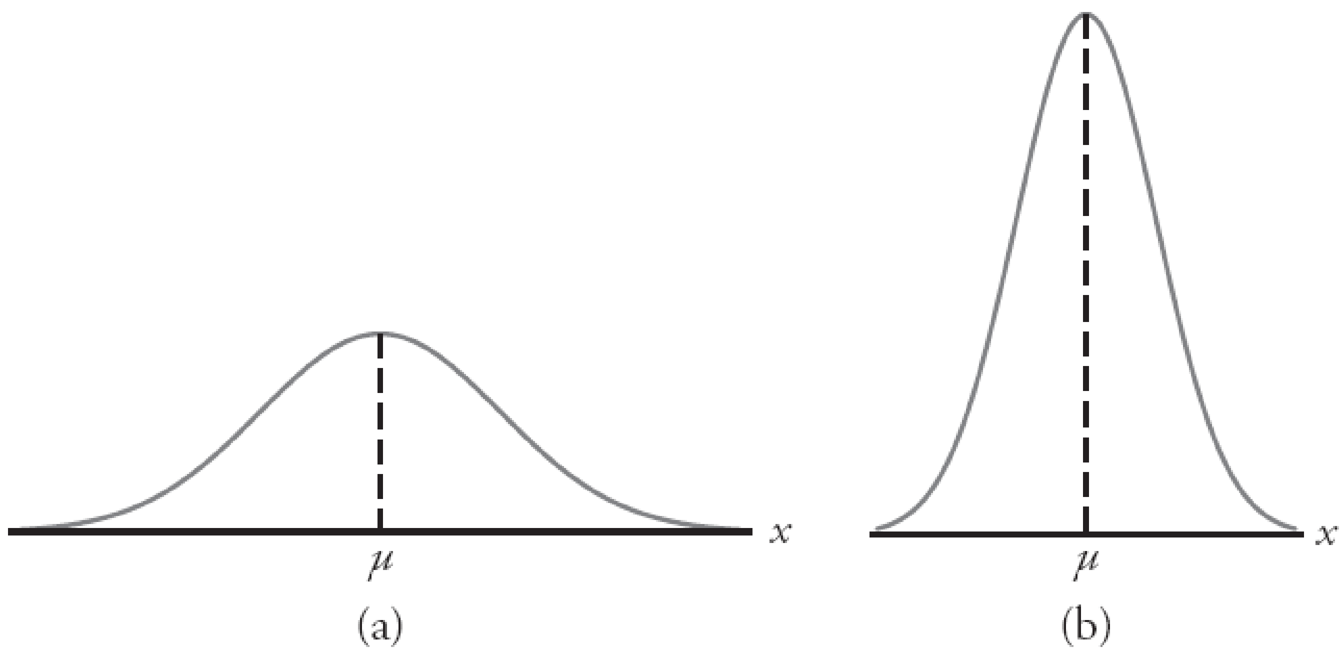

Figura 4.2 Variabilidade de observações contínuas em torno da média.

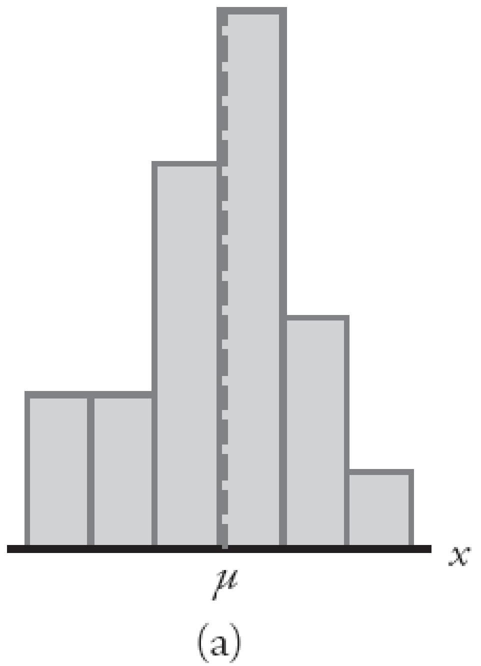

Figura 4.3 Variabilidade das observações discretas sobre a média.