Lógica

Lógica Proposicional
Formas normais
Aula 09

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

p q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: $p \rightarrow q$
    - α_2: $q \rightarrow r$
    - α_3: $\neg r \vee p$

    Deduz-se
    - β_1: $r \rightarrow p$ (α_3 + equivalência de $\rightarrow$)
    - β_2: $q \rightarrow p$ (α_2 + β_1 + regra da cadeia)
    - β_3: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (α_1 + β_2 + conjunção)
    - α_4: $q \leftrightarrow p$ (β_3 + equivalência de $\leftrightarrow$)

Lógica Proposicional

- **Como demonstrar a validade de um argumento?**
  - Método semântico
    - Via construção da tabela-verdade
    - Com base em interpretações
  - Método sintático
    - Via construção de uma prova/derivação/dedução
    - Com base em regras de inferência e leis de equivalência (raciocínio)
    - Ou usando inferência por resolução

Baseado no Curso do Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira – DTI / FATEC-SP

Lógica Proposicional

- **Resolução**
  - Usa uma simples regra de inferência
  - Aplicação fácil, vantajosa e computacionalmente conveniente
  - Só se aplica a **cláusulas**
  - Necessário converter as fórmulas para a **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**

Lógica Proposicional

- **Formas normais**
  - Padronizações adotadas para notação das fórmulas a fim de poder expressá-las de uma única maneira
    - Forma Normal Conjuntiva (FNC)
    - Forma Normal Disjuntiva (FND)

    - Dada uma fórmula da Lógica Proposicional é sempre possível determinar uma fórmula equivalente que esteja representada tanto na FNC quanto na FND

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Também conhecida como Forma Clausal
  - É empregada no método de inferência **resolução** que serve de base para a programação lógica
  - Uma fórmula na FNC pode ser definida com base em
    - **Cláusulas**
    - **Literais**

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Literal**
    - Elemento básico da FNC
    - Literal positivo – uma fórmula atômica: p
    - Literal negativo – negação de uma fórmula atômica: ¬p

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Cláusula**
    - Disjunção de literais

$$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$$

onde n é o tamanho da cláusula

    - Cláusula unária – composta por apenas 1 literal
    - Cláusula vazia – não contém literais

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Exemplos de cláusulas
    - p
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$

CLÁUSULAS

- $p \wedge q$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$

NÃO CLÁUSULAS

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Definição**
    - Uma fórmula proposicional está na FNC (ou forma clausal) se for uma conjunção de cláusulas
      - ou seja, uma fórmula está na FNC se for uma conjunção de $\underbrace{\text{disjunções de literais}}_{\text{cláusulas}}$

Literal (L):	p ou $\neg$p	
Cláusula (C):	$L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$	$n \geq 0$
FNC:	$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$	$n \geq 1$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Teorema**
    - Para toda fórmula da Lógica Proposicional clássica β existe uma fórmula α na FNC que é equivalente a β, $\alpha \equiv \beta$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Pode-se dizer que uma fórmula está na FNC se e somente se:
    1. Contém como conectivos apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$;
    2. $\neg$ só opera sobre proposições atômicas, isto é, não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$;
    3. Não apresenta operadores de negação sucessivos como $\neg\neg$;
    4. $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$, ou seja, <u>não</u> existem expressões como $p \vee (q \wedge r)$.

Lógica Proposicional

- **FNC**
  - Exemplos de FNC
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$
    - $p \wedge q$
    - $(p \vee q) \wedge r$

ESTÁ NA FNC

    - $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$
    - $p \rightarrow q$
    - $\neg(p \vee q)$
    - $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

NÃO ESTÁ NA FNC

Lógica Proposicional

- **FNC**
  - Exemplos de FNC
    - $\neg p$
    - $p \vee q$
    - $p \vee q \vee \neg p$
    - $p \wedge q$
    - $(p \vee q) \wedge r$
    - $\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)$
    - $p \rightarrow q$
    - $\neg(p \vee q)$
    - $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$

APÓS CONVERSÃO

$\neg p \vee \neg q \vee r$

$\neg p \vee q$

$\neg p \wedge \neg q$

$p \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Transformação via Tabela-Verdade
    1. Construa a tabela-verdade da fórmula que se deseja converter
    2. Procure na tabela-verdade todas as interpretações que avaliam essa fórmula como F
    3. Para cada uma dessas interpretações, crie uma disjunção de seus átomos considerando-se
       - se o átomo p é avaliado como V, considera-se $\neg p$
       - se o átomo p é avaliado como F, considera-se p
    4. A FNC equivalente é a conjunção das disjunções formadas para cada uma das interpretações F

  ➔ Se a fórmula for tautológica, FNC: $p \vee (\neg p)$

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Transformação via Tabela-Verdade
    - Exemplo: $p \rightarrow q$

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$\neg p \vee q$

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FNC via construção da tabela-verdade
    - $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

1. Construa a tabela-verdade da fórmula que se deseja converter
2. Procure na tabela-verdade todas as interpretações que avaliam essa fórmula como F
3. Para cada uma dessas interpretações, crie uma disjunção de seus átomos considerando-se
   - se o átomo p é avaliado como V, considera-se $\neg p$
   - se o átomo p é avaliado como F, considera-se p
4. A FNC equivalente é a conjunção das disjunções formadas para cada uma das interpretações F

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme a fórmula a seguir para a FNC via construção da tabela-verdade
    - $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA: $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$	$(\neg p \vee \neg q) \wedge p$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Algoritmo de manipulação algébrica para gerar FNC

Entrada: Uma fórmula β
Saída: Uma fórmula α na FNC, $\beta \equiv \alpha$
1. Para todas as subfórmulas δ, γ, ϕ de β faça
   1.1. Redefina "$\leftrightarrow$" e "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$":
   $$(\delta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma) \wedge (\neg\gamma \vee \delta)$$
   $$(\delta \rightarrow \gamma) \equiv (\neg\delta \vee \gamma)$$
   1.2. Elimine a dupla negação:
   $$\neg\neg\delta \equiv \delta$$
   1.3. Empurre as negações para o interior usando as Leis de De Morgan:
   $$\neg(\delta \vee \gamma) \equiv \neg\delta \wedge \neg\gamma \qquad \text{e} \qquad \neg(\delta \wedge \gamma) \equiv \neg\delta \vee \neg\gamma$$
   1.4. Aplique a distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$, quando a fórmula obtida não tiver subfórmulas compostas negadas:
   $$\delta \vee (\gamma \wedge \phi) \equiv (\delta \vee \gamma) \wedge (\delta \vee \phi)$$
2. A fórmula α é obtida quando não há mais substituições possíveis

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - Exemplo de transformação linear para FNC
    - $p \leftrightarrow (q \wedge r)$

$(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow p)$	Decompõe $\leftrightarrow$ em 2 $\rightarrow$
$(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg(q \wedge r) \vee p)$	Elimina $\rightarrow$
$(\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$	De Morgan
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)$	Distribui $\vee$ sobre $\wedge$

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear
    a) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$
    b) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p$

Passos

1. Redefina "$\leftrightarrow$" e "$\rightarrow$" em termos de "$\vee$" e "$\neg$"
2. Elimine a dupla negação
3. Empurre as negações para o interior usando as Leis de De Morgan
4. Aplique a distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear
    a) $(\neg p \lor q) \rightarrow r$
    b) $(p \land q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA

a)

1. $\neg(\neg p \lor q) \lor r$	Elimina $\rightarrow$
2. $(\neg(\neg p) \land \neg q) \lor r$	Empurra negação
3. $(p \land \neg q) \lor r$	Elimina dupla negação
4. $(p \lor r) \land (\neg q \lor r)$	Distribui $\lor$ sobre $\land$

➔ Verifique, por meio da construção da tabela-verdade, que a fórmula original e sua FNC são logicamente equivalentes

Lógica Proposicional

- **Exercício**
  - Transforme as fórmulas a seguir para a FNC via algoritmo de transformação linear
    - a) $(\neg p \lor q) \rightarrow r$
    - b) $(p \land q) \leftrightarrow \neg p$

RESPOSTA

b)

1.	$((p \land q) \rightarrow \neg p) \land (\neg p \rightarrow (p \land q))$	Decompõe $\leftrightarrow$ em 2 $\rightarrow$
2.	$(\neg(p \land q) \lor \neg p) \land (\neg\neg p \lor (p \land q))$	Elimina $\rightarrow$
3.	$(\neg(p \land q) \lor \neg p) \land (p \lor (p \land q))$	Elimina dupla negação
4.	$(\neg p \lor \neg q \lor \neg p) \land (p \lor (p \land q))$	Empurra negação
5.	$(\neg p \lor \neg q \lor \neg p) \land (p \lor p) \land (p \lor q)$	Distribui $\lor$ sobre $\land$
6.	$(\neg p \lor \neg q) \land p$	Simplifica (idemp., abs.)

Lógica Proposicional

- **Forma Normal Conjuntiva (FNC)**
  - **Notação clausal**
    - FNC de uma fórmula α é uma coleção de cláusulas que pode ser escrita como $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ (conjunção implícita)
    - De modo semelhante, uma cláusula é uma coleção de literais $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ (disjunção implícita)
    - Exemplo: a notação clausal para a fórmula $(\neg p \vee \neg q) \wedge p$ é:

$$\{\neg p \vee \neg q, p\}$$