Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

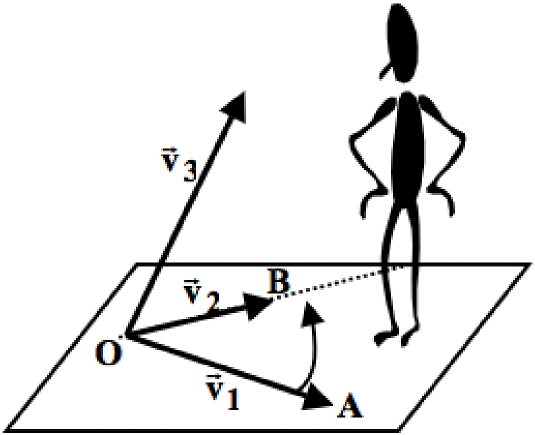
Produto Vetorial e Misto

Cláudia Gentile

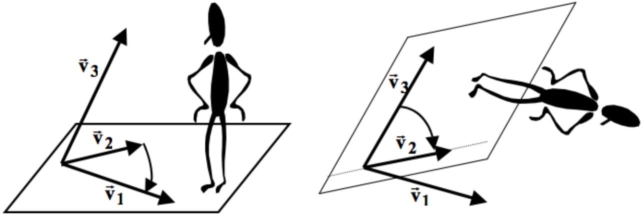
21 de novembro de 2023

Uma base ordenada de vetores no plano $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ tem orientação positiva se para "levarmos" o vetor $\vec{v}_1$ até o vetor $\vec{v}_2$ temos que fazer uma rotação no sentido anti horário (ao longo do menor ângulo).

Uma base ordenada de vetores no espaço $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ tem orientação positiva se um "observador" posicionado no semiespaço determinado pelos dois primeiros vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ para o qual aponta o terceiro vetor $\vec{v}_3$, "enxerga" o par de vetores $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ com orientação positiva.


$\vec{v}_3$
B
$\vec{v}_2$
O
$\vec{v}_1$
A

Observemos que as bases $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ e $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ são negativas.



Crédito das figuras : Foram copiadas de apostila disponibilizada na Semana 5, das profas Christina Cardoso; Sonia Regina Soares; Verlane Cabral UFBA .

Produto Vetorial

Estamos agora em condições de definir o produto vetorial entre dois vetores. Primeiramente observamos que **o produto vetorial só faz sentido no espaço tridimensional.**

Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ forem paralelos definimos o produto vetorial de $\vec{v}_1$ por $\vec{v}_2$ como sendo o vetor nulo $\vec{0}$. Notação:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ forem não paralelos definimos o produto vetorial de $\vec{v}_1$ por $\vec{v}_2$ como sendo um terceiro vetor, que denotaremos por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, com as seguintes propriedades:

norma: $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| sen\,\theta$, onde $\theta = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ é o ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

direção: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0$ e $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$

sentido: $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ é uma base com orientação positiva

Propriedades do produto vetorial

Dados três vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, e um escalar λ,

1. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$ se e somente se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forem paralelos
2. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$
3. $\lambda\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times \lambda\vec{v}_2 = \lambda(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$
4. $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$

Da definição de produto vetorial podemos perceber que

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} & \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} \\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} \\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0} \end{array}}$$

Sendo assim, dados dois vetores $\vec{v}_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ e $\vec{v}_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ temos que

$$\vec{v}_1=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$$

$$\vec{v}_2=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$$

Logo,

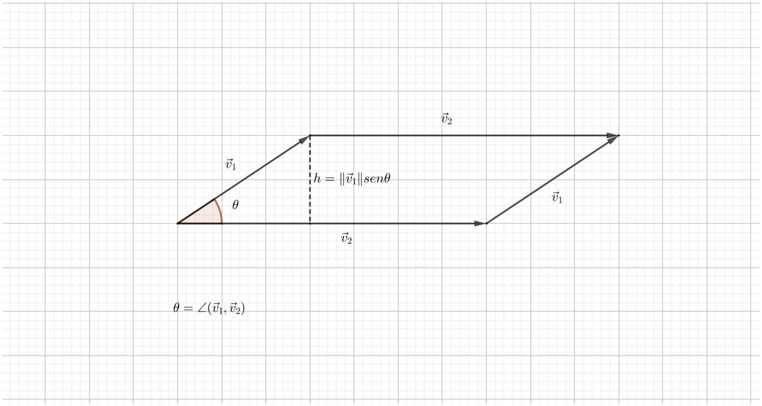
$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}) \times (\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}) \\
&= \alpha_1\vec{i}\times\beta_1\vec{i}+\alpha_1\vec{i}\times\beta_2\vec{j}+\alpha_1\vec{i}\times\beta_3\vec{k} \\
&+ \alpha_2\vec{j}\times\beta_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}\times\beta_2\vec{j}+\alpha_2\vec{j}\times\beta_3\vec{k} \\
&+ \alpha_3\vec{k}\times\beta_1\vec{i}+\alpha_3\vec{k}\times\beta_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}\times\beta_3\vec{k} \\
&= (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k}
\end{aligned}$$

Uma forma de calcular o produto de dois vetores $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $\vec{v}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ usando coordenadas (com relação a uma base ortonormal) é

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}$$

Aplicação: a área de um paralelogramo.

Considere dois vetores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e o paralelogramo determinado por eles.



Como sabemos, a área A do paralelogramo é dada por base $\times$ altura. Agora, note que

$$\text{Medida da base} = \|\vec{v}_2\|$$

e

$$\text{Medida da altura} = \|\vec{v}_1\| sen\,\theta$$

Logo,

$$A = \|\vec{v}_2\|\|\vec{v}_1\| sen\,\theta = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$$

O produto Misto

Considere três vetores do espaço, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Definimos o Produto Misto destes vetores como sendo o escalar (que denotaremos por $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$) dado por:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$$

observe que não são necessários parênteses, já que a única possibilidade que faz sentido na expressão acima é calcular primeiramente o produto vetorial.

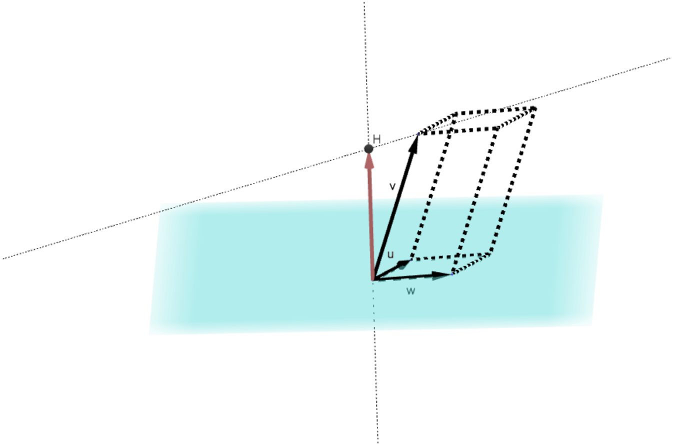
Propriedades:

Sejam $\vec{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\vec{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ e $\vec{v}_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ vetores arbitrários e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem:

1. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$;
2. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = 0$ se e somente se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ for LD;
3. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = [\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1] = [\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$;
4. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = -[\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2]$, $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = -[\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3]$ e $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = -[\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1]$;
5. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$;
6. $[\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{v}_3] + [\vec{w}, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$, $[\vec{v}_1, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v}_3] = [\vec{v}_1, \vec{u}, \vec{v}_3] + [\vec{v}_1, \vec{w}, \vec{v}_3]$, e $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} + \vec{w}] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u}] + [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}]$;
7. $[\lambda\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = [\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \vec{v}_3] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \lambda\vec{v}_3] = \lambda[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$.

Aplicação: cálculo de volumes

Considere um paralelepípedo determinado por três vetores não colineares $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.



Sabemos que seu volume V é dado por

$$V = \text{Área da base } \times \text{Altura}$$

Considerando a altura h em relaçào à base dada pelo paralelogramo determinado por $\vec{u}, \vec{w}$, conforme já vimos, a área da base é dada por

$$\text{Área da base } = \|\vec{u} \times \vec{w}\|$$

e a altura h é dada por

$$h = \|proj_{\vec{u}\times\vec{w}}\, \vec{v}\|$$

Assim,

$$\begin{aligned} V = \|\vec{u} \times \vec{w}\| \cdot \|proj_{\vec{u}\times\vec{w}} \vec{v}\| \quad &= \quad \|\vec{u} \times \vec{w}\| . \left\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w}}{\|\vec{u} \times \vec{w}\|^2} \vec{u} \times \vec{w} \right\| \\ &= \quad \|\vec{u} \times \vec{w}\| . \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w}|}{\|\vec{u} \times \vec{w}\|^2} \|\vec{u} \times \vec{w}\| = |\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w}| \end{aligned}$$

Exercício

E como se calcula volume do tetraedro determinado por 3 vetores não coplanares?