Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Matrizes e Sistemas

Cláudia Gentile

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Departamento de Matemática - DM

26 de agosto de 2025

Resolução de Exercício: Uma indústria que possui duas unidades fabrica três tipos de produtos, P_1, P_2, e P_3, os quais são confeccionados com 5 tipos de matéria-prima, M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5. Em cada semana, a produção das unidades ocorre conforme a Tabela 1:

TABELA 1:

	P_1	P_2	P_3
Unidade 1	500	300	250
Unidade 2	200	200	400

Podemos resumir as informações da Tabela acima usando a matriz 2×3 abaixo:

MATRIZ P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 & 250 \\ 200 & 200 & 400 \end{bmatrix}$$

Para a fabricação destes produtos o material é usado de acordo com a seguinte tabela:

TABELA 2:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	50 Kg	20 Kg	50 l	15 l	4 unidades
P_2	40 Kg	10 Kg	30 l	25 l	5 unidades
P_3	45 Kg	15 Kg	60 l	0 l	6 unidades

que resumidamente pode ser representada pela matriz 3×5:

MATRIZ M:

$$M = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 50 & 15 & 4 \\ 40 & 10 & 30 & 25 & 5 \\ 45 & 15 & 60 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

A direção da empresa, a fim de atender a demanda, precisa saber a quantidade de cada uma das 5 matérias primas que devem ser alocadas semanalmente para as suas duas unidades. A resposta pode ser dada na forma de uma tabela, onde as linhas representem as unidades e as colunas correspondam aos materiais usados . Ou seja,

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
Unidade 1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
Unidade 2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Resumindo em uma matriz Q, de ordem 2×5:

$$Q = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \end{bmatrix}$$

Assim, c_{ij} é quanto a i-ésima unidade deve ter em estoque do j-ésimo material a fim de executar a produção prevista. Se escrevermos $P = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$ e $M = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 5$, vemos que $Q = [c_{ij}]$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 5$, onde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 5$$

Por exemplo, a quantidade da matéria M_5 que a Unidade 1 deve ter em estoque semanalmente é $c_{15} = 500 \times 4 + 300 \times 5 + 250 \times 6 = 5000$ unidades. A partir deste exemplo, a definição do produto de matrizes possivelmente fará mais sentido.

Exercício:

Foram formulados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) para cada um deles, determinou-se que:
(i) o alimento I contém 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C;
(ii) o alimento II contém 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C;
(iii) o alimento III contém 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.
Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C, encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II, III que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

Solução

Sejam x, y, z as quantidades (em gramas) dos alimentos I, II e III respectivamente, necessários para se obter 11 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina B e 20 unidades de vitamina C. Devemos ter então,

$$\begin{cases} x+2y+3z & = 11 \\ 3x+3y & = 9 \\ 4x+5y+3z & = 20 \end{cases}$$

As matrizes ampliada e reduzida (Gauss-Jordan) do sistema são dadas respectivamente por,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, a solução do sistema é dada por: $S = \{(3z-5\ ,\ 8-3z\ ,\ z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

Porém, dado o contexto, devemos observar que a quantidade de alimentos não pode ser negativa. Logo, devemos ter:

$$3z - 5 \geq 0 \quad 8 - 3z \geq 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0$$

ou seja, $\frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$. Assim, as possíveis quantidades (em gramas) x de alimento I, y de alimeto II e z de alimento III que fornecem a quantidade de vitaminas desejada são:

$$x = 3z - 5, \qquad y = 8 - 3z; \qquad \frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$$

(Por exemplo, 1 grama de alimento I, 2 gramas de alimento II e 2 gramas de alimento III é uma possibilidade).

Próximo objetivo:

Classificar sistemas a partir de propriedades das matrizes que os representam. Para sistemas gerais, usaremos o Teorema de Rouchè Capelli, por meio do qual poderemos classificar os sistemas, quanto a existência ou não de uma única ou infinitas soluções, observando a relação entre o número de equações não nulas no sistema equivalente já escalonado e o número de incógnitas.

Posto: definimos o posto de uma matriz A como sendo o número de linhas não nulas na matriz A' reduzida à forma escada e equivalente a A.

Nulidade: a nulidade de uma matriz é por definição o número de colunas da matriz menos o seu posto.

Teorema

Rouchè Capelli

1. *Um sistema com m equações e n incógnitas admite solução se e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*
2. *Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p = n$, a solução será única. (Observe que n é o número de colunas da matriz dos coeficientes. A matriz ampliada possui $n + 1$ colunas.)*
3. *Se as duas matrizes possuem o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas e as outras incógnitas serão dadas em função destas. O número $n - p$ é chamado de grau de liberdade do sistema.*

Exemplo 1:

Observe o primeiro sistema que resolvemos acima:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

Sua matriz ampliada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{bmatrix}$$

Depois de escalonada, a matriz ampliada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : -1 \\ 0 & 1 & 0 & : 2 \\ 0 & 0 & 1 & : 5 \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o posto da matriz ampliada é $p_a = 3$, que coincide com o posto da matriz dos coeficientes, $p_c = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : -1 \\ 0 & 1 & 0 & : 2 \\ 0 & 0 & 1 & : 5 \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \end{bmatrix}$$

O que indica que o sistema é possível. Além disso, a nulidade (da matriz dos coeficientes) é zero, indicando que o sistema é determinado.

Consideremos uma matriz ampliada já reduzida à forma escada de um sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & :1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & :0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :6 \end{bmatrix}$$

Retornando à notação de sistema fica clara a relação entre o posto, a nulidade, e a classificação do sistema.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 1x & + & 0y & + & 0z & + & 1w & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & + & 1w & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & + & 0w & = & 6 \end{array} \right.$$

Compare o exemplo abaixo com o exemplo acima. Neste, o posto da matriz ampliada coincide com o posto da matriz dos coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : 0 \end{bmatrix}$$

Veja que a igualdade 0=6, que tornava o sistema do exemplo anterior incompatível, não está presente neste exemplo.

$$\begin{cases} 1x & + & 0y & + & 0z & + & 1w & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 1z & + & 1w & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & + & 0w & = & 0 \end{cases}$$

Observe que a nulidade da matriz dos coeficientes é positiva. Eliminando os termos nulos, temos:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & w & = & 1 \\ & & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

O fato da nulidade da matriz dos coeficientes ser maior do que zero nos diz que há variáveis livres! Ou seja, depois de escalonado, o sistema tem mais variáveis do que equações. Isso indica que existe algum grau de liberdade no conjunto solução.

Neste exemplo, como a nulidade da matriz dos coeficientes é 2, o grau de liberdade é 2: o conjunto solução tem 2 variáveis livres. Isso deve estar formalmente descrito no conjunto solução:

$$\{(1-\alpha, \beta, -\alpha, \alpha); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Note que as variáveis livres correspondem às colunas que não têm pivô (coeficiente líder).

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & : 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : 0 \end{bmatrix}$$

No caso de sistemas quadrados (sistemas cujas matrizes dos coeficientes são quadradas) podemos classificá-los (como possíveis e determinados ou não) a partir do conhecimento do determinante da matriz dos coeficientes.
Primeiramente vamos entender como calculár o determinante de uma matriz e quais são as suas principais propriedades.

Determinantes

Desenvolvimento de Laplace: O cálculo do determinante de uma matriz $n \times n$ pode ser feito usando a seguinte igualdade:

$$|A|_{n\times n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

onde $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, e A_{ij} é a submatriz obtida retirando-se de A a linha i e a coluna j. Neste caso dizemos que o desenvolvimento foi feito pela i-ésima linha.

Exemplo

Considere a matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Então, fazendo o desenvolvimento pela linha 3 (porque?)

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\Delta_{ij} = a_{31}\cdot(-1)^{3+1}|A_{31}| + a_{32}\cdot(-1)^{3+2}|A_{32}| + a_{33}\cdot(-1)^{3+3}|A_{33}| =$$

$$0\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

Propriedades:

- Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz A forem iguais a zero então $|A| = 0$.
- $|A| = |A^T|$.
- Se multiplicarmos uma linha de uma matriz A por uma constante, então seu determinante fica multiplicado por esta constante. Ou seja, $|cA| = c|A|$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$. (Observe que, se A tem ordem n e a matriz toda é multiplicada por c, então $|cA| = c^n|A|$).
- Uma vez trocadas as posições de duas linhas de uma matriz, o determinante troca de sinal.
- O determinante de uma matriz que possui duas linhas iguais é zero.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- O determinante de uma matriz não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante.
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

A inversa de uma matriz quadrada: Dada uma matriz A de ordem n chamamos de inversa de A (e denotamos por A^{-1}) a uma matriz quadrada de mesma ordem com a propriedade que $A \cdot A^{-1} = I_n$ e $A^{-1} \cdot A = I_n$.

Observação: Nem toda matriz quadrada possui inversa.

Teorema

Uma matriz quadrada A possui inversa se e somente se $|A| \neq 0$.

Propriedades

- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e ambas são inversíveis, isto é, existem A^{-1} e B^{-1}, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Observe a ordem!)
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- A inversa de uma matriz, quando existe, é única.

Procedimento para inversão de matrizes:

Teorema

Se A é uma matriz inversível, sua matriz linha reduzida a forma escada é a identidade.

Teorema

Se uma matriz A pode ser reduzida à identidade por uma sequência finita de operações elementares sobre linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida a partir da identidade, aplicando-se a esta a mesma sequência de operações sobre linhas.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $\det A = -1 \neq 0$. Queremos determinar a inversa de A. Para isso vamos dispor, lado a lado , a matriz A e a matriz identidade $I_{3\times 3}$. Em seguida vamos usar operações elementares sobre linhas para reduzir a matriz A à matriz identidade. As mesmas operações serão aplicadas à matriz identidade. Veja a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-L1+L2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-1 \cdot L2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{-2L2+L1 \\ -L2+L3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{-L3+L1 \\ -L3+L2}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ou seja,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Agora, para entender a relação entre um sistema quadrado e o procedimento de inversão de matrizes, considere um sistema com n equações e n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

Se definirmos as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

então o sistema (1) pode ser escrito na forma matricial

$$AX = B. \tag{2}$$

Suponha que $|A| \neq 0$. Então existe A^{-1}. Assim de (2) temos

$$\begin{array}{rrcl} & A^{-1}AX & = & A^{-1}B \\ \Rightarrow & (A^{-1}A)X & = & A^{-1}B \\ \Rightarrow & I_nX & = & A^{-1}B \\ \Rightarrow & X & = & A^{-1}B \end{array}$$

Exemplo:

Considere o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Já sabemos que A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, podemos concluir que o sistema é possível e determinado, e sua solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ou seja, o conjunto solução é $S = \{(-2, -4, 3)\}$.