

Lógica

Lógica Proposicional

Consequência e Equivalência lógicas

Aula 04

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

■ Consequência lógica

- Uma fórmula β é **consequência lógica** de outra fórmula α (ou α implica logicamente β) se toda interpretação que satisfaz α também satisfaz β
 - Representada por $\alpha \models \beta$
 - Exemplo: $p \models p \vee q$

	p	q	$p \vee q$
I_1	V	V	V
I_2	V	F	V
I_3	F	V	V
I_4	F	F	F



→ Se não houver consequência lógica utiliza-se $\alpha \not\models \beta$

Lógica Proposicional

- **Consequência lógica**

- Uma fórmula α é **consequência lógica** de um conjunto de fórmulas Γ se toda interpretação que satisfaz todas as fórmulas de Γ também satisfaz α
 - Representado por $\Gamma \models \alpha$
 - Exemplo: $\{ p, q \} \models p \vee q$

	p	q	$p \vee q$
I_1	V	V	V
I_2	V	F	V
I_3	F	V	V
I_4	F	F	F



Lógica Proposicional

- **Equivalência lógica**

- Duas fórmulas α e β são **logicamente equivalentes** se as interpretações que satisfazem α são exatamente as mesmas que satisfazem β
 - Representada por $\alpha \equiv \beta$ (ou $\alpha \Leftrightarrow \beta$) ocorre se $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$
- Uma forma de demonstrar a equivalência lógica de duas fórmulas α e β , é construir uma tabela-verdade para α e β e verificar que as colunas para α e β são idênticas

Lógica Proposicional

■ Equivalência lógica

- Exemplo: $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$

	p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
I_1	V	V	V	F	V
I_2	V	F	F	F	F
I_3	F	V	V	V	V
I_4	F	F	V	V	V

colunas idênticas



- **Consequência e Equivalência lógicas**
 - Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

Conjuntos distribuídos pela professora



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C1: { p , $\neg p$, q , $p \vee q$, $\neg p \rightarrow q$, $q \rightarrow \neg p$, $\neg p \leftrightarrow q$ }

p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$\neg p \rightarrow q$	$q \rightarrow \neg p$	$\neg p \leftrightarrow q$
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F

Consequências lógicas

$\neg p \rightarrow q, \neg p \models q$ (Modus ponens)

$\neg p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p \models \neg p \leftrightarrow q$ (Int. eq.)

$\neg p \leftrightarrow q \models \neg p \rightarrow q$ (Elim. eq.)

Equivalência lógica

$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$ (Elim. impl.)



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C2: $\{ \neg p, q, \neg q, \neg p \vee \neg q, p \rightarrow \neg q, p \leftrightarrow q \}$

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$p \leftrightarrow q$
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V

Consequências lógicas

$p \rightarrow \neg q, q \models \neg p$ (Modus tollens)

$\neg q \models \neg p \vee \neg q$ (Adição)

$q, \neg q \models p \rightarrow \neg q$ (Da inconsist.)

Equivalência lógica

$p \rightarrow \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$ (Elim. impl.)



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C3: { $p, q, \neg p, \neg q, \neg(p \wedge q), p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q$ }

p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V

Consequências lógicas

$p \vee \neg q, \neg p \models \neg q$ (Silog. disj.)

$p, \neg p \models q$ (Da inconsistência)

Equivalência lógica

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (De Morgan)



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C4: { $p, q, p \wedge q, \neg p \wedge q, p \vee (p \wedge q), (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ }

				α	β		
p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$\alpha \vee \beta$
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F

Consequências lógicas

$p \wedge q \models p$ (Simplificação)

$p, q \models p \wedge q$ (Conjunção)

Equivalências lógicas

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Lei da absorção)

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv q$



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C5: { $p, q, p \vee q, \neg p \vee q, p \wedge (p \vee q), (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$ }

			α	β		
p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\alpha \wedge \beta$
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	F

Consequências lógicas

$\neg p \vee q, p \models q$ (Silog. disj.)

$p \models p \vee q$ (Adição)

Equivalências lógicas

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ (Lei da absorção)

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv q$

Lógica Proposicional



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C6: { $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $\neg p \rightarrow q$, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, $p \leftrightarrow q$ }

				α	β			
p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow q$	$\alpha \wedge \beta$	$p \leftrightarrow q$
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V

Consequências lógicas

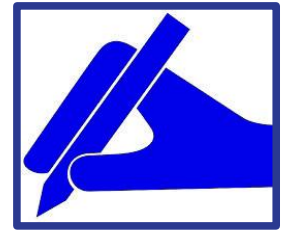
$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \models q$ (De casos)

Equivalências lógicas

$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$ (Elim. impl.)

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Lógica Proposicional



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C7: { q , $\neg q$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $\neg q \rightarrow \neg p$, $p \leftrightarrow q$, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ }

				α	β			
p	$\neg p$	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\alpha \wedge \beta$	$p \leftrightarrow q$
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V

Consequências lógicas

$p \rightarrow q$, $p \models q$ (Modus ponens)

q , $\neg q \models p \leftrightarrow q$ (Da inconsist.)

Equivalência lógica

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ (Contrap.)



■ Consequência e Equivalência lógicas

- Em grupos, verifiquem se os conjuntos de fórmulas possuem alguma consequência lógica e alguma equivalência lógica

C8: { p , $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$, $\neg p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ }

p	$\neg p$	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V

Consequências lógicas

$p \models p \vee q$ (Adição)

$p \rightarrow q, q \rightarrow p \models p \leftrightarrow q$ (Intr. eq.)

$p \leftrightarrow q \models p \rightarrow q$ (Elim. eq.)

Equivalência lógica

$\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$ (Elim. impl.)