Lógica

Lógica Proposicional
Raciocínio
Aula 08

Profa. Helena Caseli
helenacaseli@ufscar.br

Lógica Proposicional

p q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

Lógica Proposicional

- **Argumento**
  - É uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ($n \geq 1$) de proposições, na qual as proposições α_i ($1 \leq i \leq n-1$) são chamadas de **premissas** e a proposição α_n é chamada de **conclusão**

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n$$

  - Exemplo
    - $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$

$\Downarrow$

então, logo, portanto, como consequência, conclui-se, etc.

Lógica Proposicional

- **Como demonstrar a validade de um argumento?**
  - Método semântico
    - Via construção da tabela-verdade
    - Com base em interpretações
  - Método sintático
    - Via construção de uma prova/derivação/dedução
    - Com base em regras de inferência e leis de equivalência (raciocínio)
    - Ou usando inferência por resolução

HOJE

Baseado no Curso do Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira – DTI / FATEC-SP

Lógica Proposicional

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - Dadas as fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ e α_n da LP. Diz-se que uma sequência finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ é uma **prova** (ou **dedução** ou **derivação**) de α_n a partir das **premissas** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ se e somente se:
    1. Cada β_i for uma premissa α_j $(1 \leq j \leq n-1)$; ou
    2. β_i provém das fórmulas precedentes aplicando-se um conjunto de **regras de inferência** L; ou
    3. β_i provém do uso do **princípio de substituição** usado em uma fórmula anterior; ou
    4. β_k é α_n.

- α_n é dedutível das premissas
- α_n é um teorema e as premissas são a teoria

Lógica Proposicional

- **Prova (deducão ou derivacão)**

Princípio da substituição

- Se α for uma fórmula tendo β como subfórmula, o valor de α não muda se β for substituída por uma expressão que tenha os mesmos valores-verdade que β

  - **Equivalências lógicas**

conjunto de **regras de inferência** L; ou

3. β_i provém do uso do **princípio de substituição** usado em uma fórmula anterior; ou
4. β_k é α_n.

- α_n é dedutível das premissas
- α_n é um teorema e as premissas são a teoria

Lógica Proposicional

Estratégias
- Prova direta
- Prova condicional
- Prova indireta

- **Prova (dedução ou derivação)**
  - **Como funciona?**
    - Para provar que α_n é uma conclusão válida de α_1, α_2, …, α_{n-1} precisamos produzir uma sequência de demonstração da forma

α_1 (premissa)
…
α_{n-1} (premissa)
β_1 (obtida com aplicação de alguma regra/lei)
…
β_k (obtida com aplicação de alguma regra/lei)
α_n (obtida com aplicação de alguma regra/lei)

Pode existir mais de uma sequência de demonstração correta

Lógica Proposicional

Regras de inferência

Regra	Nome da regra
$\alpha, \alpha \rightarrow \beta \models \beta$	*modus ponens*
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$	*modus tollens*
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \models \alpha \rightarrow \gamma$	silogismo hipotético (regra da cadeia)
$\alpha \vee \beta, \neg\alpha \models \beta$ $\alpha \vee \beta, \neg\beta \models \alpha$	silogismo disjuntivo
$\alpha \wedge \beta \models \alpha$ $\alpha \wedge \beta \models \beta$	simplificação
$\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$	conjunção (ou combinação)

Lógica Proposicional

▪ Regras de inferência

Regra	Nome da regra
$\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta \models \beta$	de casos
$\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\beta \models \alpha \vee \beta$	adição
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \alpha \vee \gamma \models \beta \vee \delta$	dilema construtivo
$\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \delta, \neg\beta \vee \neg\delta \models \neg\alpha \vee \neg\gamma$	dilema destrutivo
$\alpha \rightarrow \beta \models \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	contraposição
$\alpha, \neg\alpha \models \beta$	da inconsistência
$\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \models \alpha \leftrightarrow \beta$	introdução da equivalência
$\alpha \leftrightarrow \beta \models \alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta \models \beta \rightarrow \alpha$	eliminação da equivalência

Lógica Proposicional

Leis de equivalência

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \neg\alpha \equiv F$ $\alpha \vee \neg\alpha \equiv V$	Lei da contradição Lei do terceiro excluído
$\alpha \wedge V \equiv \alpha$ $\alpha \vee F \equiv \alpha$	Leis da identidade
$\alpha \wedge F \equiv F$ $\alpha \vee V \equiv V$	Leis da dominação
$\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$	Leis idempotentes
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$	Lei da dupla negação

Lei	Nome da lei
$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$	Leis comutativas
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	Leis associativas
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	Leis distributivas
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$	Leis de De Morgan

Lei	Nome da lei
$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$	Definição de $\rightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\rightarrow$ e $\wedge$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	Definição de $\leftrightarrow$ em termos de $\vee$ e $\neg$
$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$ $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$	Lei da absorção
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \equiv \beta$ $(\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \equiv \beta$	--

Lógica Proposicional

p q

Se eu estou com fome, então eu vou ao restaurante.

r

Se eu vou ao restaurante, então está na hora de comer.

Não está na hora de comer ou eu estou com fome.

Logo,

Eu vou ao restaurante se e somente se eu estou com fome.

- Representando na Lógica Proposicional
  - $p \rightarrow q$
  - $q \rightarrow r$
  - $\neg r \vee p$

premissas (ou hipóteses)

Logo, $q \leftrightarrow p$

conclusão

- **Prova direta**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, q \rightarrow r, \neg r \vee p \vdash q \leftrightarrow p$ é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: $p \rightarrow q$
    - α_2: $q \rightarrow r$
    - α_3: $\neg r \vee p$

    Deduz-se
    - β_1: $r \rightarrow p$ (α_3 + equivalência de $\rightarrow$)
    - β_2: $q \rightarrow p$ (α_2 + β_1 + regra da cadeia)
    - β_3: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (α_1 + β_2 + conjunção)
    - α_4: $q \leftrightarrow p$ (β_3 + equivalência de $\leftrightarrow$)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos
    a) $\neg p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee s,\ \neg s \vdash p$
    b) $(p \vee \neg q) \rightarrow r,\ r \rightarrow s,\ p \vdash s$
    c) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    a) $\neg p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ \neg r \vee s,\ \neg s \vdash p$

RESPOSTAS

a) Dadas as premissas

α_1: $\neg p \rightarrow q$ α_2: $q \rightarrow r$ α_3: $\neg r \vee s$ α_4: $\neg s$

Deduz-se

α_5: $\neg r$ ($\alpha_3 + \alpha_4$ + silogismo disjuntivo)
α_6: $\neg q$ ($\alpha_2 + \alpha_5$ + *modus tollens*)
α_7: $\neg(\neg p)$ ($\alpha_1 + \alpha_6$ + *modus tollens*)
α_8: p (α_7 + equivalência dupla negação)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos
    - b) $(p \vee \neg q) \rightarrow r, r \rightarrow s, p \vdash s$

RESPOSTAS

b) Dadas as premissas

α_1: $(p \vee \neg q) \rightarrow r$ α_2: $r \rightarrow s$ α_3: p

Deduz-se

α_4: $p \vee \neg q$ (α_3+ adição)

α_5: r (α_1+ α_4+ *modus ponens*)

α_6: s (α_2+ α_5+ *modus ponens*)

Lógica Proposicional

- **Prova direta**
  - Prove que os argumentos a seguir são válidos

    c) Se a Terra é redonda, então a Lua é oval. Se a Lua é oval, então Saturno não é vermelho. Se a Terra não é redonda então Saturno não é vermelho. Portanto, Saturno não é vermelho.

RESPOSTAS

a) p: a Terra é redonda, q: a Lua é oval, r: Saturno é vermelho

Dadas as premissas

α_1: $p \rightarrow q$ α_2: $q \rightarrow \neg r$ α_3: $\neg p \rightarrow \neg r$

Deduz-se

α_4: $p \rightarrow \neg r$ ($\alpha_1 + \alpha_2$ + regra da cadeia)

α_5: $\neg r$ ($\alpha_3 + \alpha_4$ + de casos)

Lógica Proposicional

Prova condicional

- **Prova condicional**
  - Introdução da condicional
    - Dada a derivação de uma fbf β a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir a fbf $\alpha \rightarrow \beta$
  - **Teorema 1.3** – Teorema da dedução
    - Sejam α e β duas fbfs e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ premissas. Se juntos $\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ implicam logicamente β, então $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ implicam logicamente $\alpha \rightarrow \beta$

Lógica Proposicional

Prova condicional

Seu tornozelo está muito inchado.

Se seu tornozelo está muito inchado e você continuar a correr, então seu tornozelo não vai sarar em uma semana.

Se seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não estará apto a disputar a corrida.

Logo, se você continuar a correr, então você não estará apto a disputar a corrida.

- Representando na Lógica Proposicional

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \mid\!- q \rightarrow \neg s$$

- **Prova condicional**
  - Demonstrando que

$$p, (p \wedge q) \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow \neg s \vdash q \rightarrow \neg s$$

  - é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: p
    - α_2: $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$
    - α_3: $\neg r \rightarrow \neg s$

    E a hipótese
    - γ_1: q

    Deduz-se
    - β_1: $p \wedge q$ ($\alpha_1 + \gamma_1$ + conjunção)
    - β_2: $\neg r$ ($\alpha_2 + \beta_1$ + *modus ponens*)
    - β_3: $\neg s$ ($\alpha_3 + \beta_2$ + *modus ponens*)
    - α_4: $q \rightarrow \neg s$ ($\gamma_1 + \beta_3$ + introdução da condicional)

Lógica Proposicional

Prova condicional

- Prove que o argumento a seguir é válido
  a) $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

RESPOSTA

a) Dada a premissa
α_1: $(p \wedge q) \rightarrow r$
E as hipóteses
α_2: p e α_3: q
Deduz-se
α_4: $p \wedge q$ (α_2+ α_3+ conjunção)
α_5: r (α_1+ α_4 + *modus ponens*)
α_6: $q \rightarrow r$ (α_3+ α_5 + introdução da condicional)
α_7: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (α_2+ α_6 + introdução da condicional)

Lógica Proposicional

- **Prova condicional**
  - Prove que o argumento a seguir é válido
    - b) $p \rightarrow \neg q, \neg(r \wedge \neg p) \vdash q \rightarrow \neg r$

RESPOSTA

b) Dadas as premissas

α_1: $p \rightarrow \neg q$

α_2: $\neg(r \wedge \neg p)$

E a hipótese

α_3: q

Deduz-se

α_4: $\neg p$ ($\alpha_1 + \alpha_3 +$ *modus tollens*)

α_5: $\neg r \vee p$ ($\alpha_2 +$ De Morgan)

α_6: $\neg r$ ($\alpha_4 + \alpha_5$ + silogismo disjuntivo)

α_7: $q \rightarrow \neg r$ ($\alpha_3 + \alpha_6$ + introdução da condicional)

Lógica Proposicional

- **Prova de Teoremas**
  - Um teorema α é uma fórmula tal que existe uma dedução $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = \alpha$ ($\vdash \alpha$)
    - Em outras palavras, é uma fbf provada sem premissas
    - A prova de um teorema se inicia com uma ou mais hipóteses que serão descartadas pela introdução da condicional

Lógica Proposicional

- **Prova de Teoremas**
  - Demonstrando que $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$ é um argumento válido

    Dada a hipótese
    - α_1: p

    Deduz-se
    - α_2: $p \vee q$ (α_1 + adição)
    - α_3: $p \rightarrow (p \vee q)$ (α_1 + α_2+ introdução da condicional)

Lógica Proposicional

Prova indireta

- **Redução ao absurdo (Teorema 1.2)**
  - Dadas as fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ e uma fórmula α, diz-se que α é uma consequência lógica de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ se e somente se a fórmula

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3 \wedge \ldots \wedge \beta_n \wedge \neg\alpha$$

  for uma contradição

Lógica Proposicional

- **Redução ao absurdo (Prova indireta)**
  - Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese α, pode-se descartar a hipótese e inferir $\neg\alpha$
  - Passo a passo
    - A <u>conclusão</u> que se deseja provar é <u>negada</u> e inserida como <u>hipótese</u>
    - Busca-se derivar uma <u>contradição</u> (a qual evidencia que a hipótese negada é falsa)
    - Se a contradição é encontrada, infere-se que a conclusão segue das premissas

Lógica Proposicional

- **Prova indireta**
  - Demonstrando que $p \rightarrow q, \neg q \mid\!- \neg p$ é um argumento válido

    Dadas as premissas
    - α_1: $p \rightarrow q$
    - α_2: $\neg q$

    E a hipótese
    - α_3: p

    Deduz-se
    - α_4: q (α_1+ α_3 + *modus ponens*)
    - α_5: $q \wedge \neg q$ (α_4 + α_2+ conjunção)
    - α_6: $\neg p$ (α_3+ α_5 + redução ao absurdo)

Lógica Proposicional

- **Prova indireta**
  - Prove que o argumento a seguir é válido

    a) $\neg q \vee r,\ p \rightarrow \neg r,\ q \mid\!-\ \neg p$

RESPOSTA

a) Dadas as premissas

α_1: $\neg q \vee r$

α_2: $p \rightarrow \neg r$

α_3: q

E a hipótese (negação da conclusão)

α_4: p

Deduz-se

α_5: $\neg r$ (α_2+ α_4 + *modus ponens*)

α_6: $\neg q$ (α_1+ α_5+ silogismo disjuntivo)

α_7: $q \wedge \neg q$ (α_3+ α_6 + conjunção)

α_8: $\neg p$ (α_4+ α_7 + redução ao absurdo)

Lógica Proposicional

Prova indireta

- Prove que o argumento a seguir é válido

  b) $p \leftrightarrow \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

RESPOSTA

b) Dada a premissa

α_1: $p \leftrightarrow \neg q$

E a hipótese (negação da conclusão)

α_2: $p \wedge q$

Deduz-se

α_3: p (α_2+ simplificação)

α_4: q (α_2+ simplificação)

α_5: $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$ (α_1 + equivalência do bicondicional)

α_6: $p \rightarrow \neg q$ (α_5 + simplificação)

α_7: $\neg q$ (α_3+ α_6 + *modus ponens*)

α_8: $q \wedge \neg q$ (α_4+ α_7 + conjunção)

α_9: $\neg(p \wedge q)$ (α_2+ α_8 + redução ao absurdo)

Lógica Proposicional

- **Raciocínio hipotético – IMPORTANTE**
  - Nenhuma ocorrência de uma fórmula derivada de uma hipótese pode ser usada em qualquer regra aplicada após o descarte da hipótese
  - Se duas ou mais hipóteses estiverem ativas simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas foram introduzidas
  - Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas