



Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Matemática



# Matrizes e Sistemas

Cláudia Gentile

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar  
Departamento de Matemática - DM

19 de agosto de 2025

As notas de aula abaixo estão assim redigidas apenas para que possamos rever os assuntos *matrizes* e *sistemas lineares* de uma forma rápida, objetiva e eficaz. Este texto não tem a pretensão de ser completo e a maior parte dele foi retirada *ipsis litteris* dos livros

Boldrini, J. L.; Costa, S.I.R., Figueiredo, V.L., Wetzler, H.G., 'Algebra Linear, São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1980.

Steinbruch, A., Winterle, P., 'Algebra Linear, São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

Para estudar este conteúdo use o referencial teórico indicado no AVA. Nossa principal referência para a Unidade 1 é:

Baldin, Y.Y.; Furuya, Y.K.S., *Geometria Analítica para Todos e Atividades com Octave e Geogebra*, São Carlos, EDUFSCar, 2011. (Texto disponível no AVA)

Slides são muito resumidos. Use os slides como apoio, mas vá além!

## Definição de matriz

Uma matriz  $A$   $m \times n$  (m por n) é um quadro retangular com  $m \cdot n$  elementos dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos indicar uma matriz  $A$  pela notação  $A = [a_{ij}]$  ou  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  se quisermos especificar as dimensões da matriz. Se  $m = n$  dizemos que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

A  $i$ -ésima linha de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m$$

e a  $j$ -ésima coluna de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

Referimo-nos ao elemento  $a_{ij}$  que está na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna de  $A$  como o  $(i,j)$ -ésimo elemento (ou coeficiente, entrada, coordenada) de  $A$ .

Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  dizemos que os elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formam a **diagonal principal** de  $A$ . Ou seja, a diagonal principal de uma matriz quadrada é composta pelos elementos  $a_{ij}$  com  $i = j$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

## Exemplos e tipos especiais de matrizes:

**Matriz Identidade** - matriz  $A = [a_{ij}]$  tal que  $a_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ .

Usualmente denotamos a matriz identidade por  $I$  ou, se quisermos enfatizar a ordem, escrevemos  $I_n$  para indicar que trata-se de uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplos e tipos especiais de matrizes:

**Matriz Nula** - (qualquer ordem  $m \times n$ ) matriz cujos coeficientes são todos nulos. Em geral usamos a letra  $O$  para indicar esta matriz.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

(Veja que as dimensões de uma matriz podem ser indicadas no nome ou na própria matriz)

## Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Superior - matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  tal que....complete

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

## Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Superior - matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  tal que  $a_{ij} = 0$  se  $i > j$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

## Exemplos e tipos especiais de matrizes:

Matriz Triangular Inferior - matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  tal que  $a_{ij} = 0$  se  $i < j$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## Igualdade de Matrizes

Duas matrizes  $m \times n$   $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  são iguais se  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . A igualdade de matrizes só está definida para matrizes de mesmas dimensões. Neste caso os elementos em posições correspondentes devem ser iguais.

Exemplo:  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$a = 1, b = 4, c = 7, d = 0, e = 3, f = 0, g = 6, h = 0 \text{ e } i = 2.$$

## Soma de Matrizes

Se  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  são matrizes de mesma ordem  $m \times n$  então a soma de  $A$  e  $B$ , denotada por  $A + B$  é a matriz  $m \times n$   $C = [c_{ij}]$  definida por  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . (Somam-se os elementos em posições correspondentes)

Exemplo:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 11 & 0 \\ 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

## Multiplicação de uma matriz por um número real

Se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz  $m \times n$  e  $r$  é um número real qualquer, então a multiplicação da matriz  $A$  por  $r$ ,  $r \cdot A$ , resulta na matriz  $B = [b_{ij}]$ , onde  $b_{ij} = r \cdot a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . (Cada elemento de  $A$  fica multiplicado por  $r$ ).

Exemplo:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $r = -3$ ,  $rA = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -9 \\ -9 & -24 & 0 \\ -3 & -6 & -27 \end{bmatrix}$

## Propriedades

Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes  $m \times n$  (todas com as mesmas dimensões) e sejam  $r$  e  $s$  números reais quaisquer. Então

- ▶  $A + B = B + A$
- ▶  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ▶ Existe uma única matriz  $O$   $m \times n$  tal que  $A + O = A$
- ▶ Para cada matriz  $A$   $m \times n$  existe uma única matriz  $D$   $m \times n$  tal que  $A + D = O$ . Representamos  $D$  por  $-A$  (de fato,  $D = (-1) \cdot A$ )

## Propriedades

- ▶  $r(sA) = (rs)A$
- ▶  $(r+s)A = rA + sA$
- ▶  $r(A+B) = rA + rB$

**Observação:** dadas duas matrizes de mesma ordem  $A$  e  $B$ ,  $A - B = A + (-1)B$ .

## Produto (ou Multiplicação) de Matrizes

Se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz  $m \times p$  e  $B = [b_{ij}]$  é uma matriz  $p \times n$ , então o produto de  $A$  por  $B$ ,  $AB$ , é a matriz  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

## Propriedades

Se  $A, B, C, O$  e  $I$  têm as dimensões adequadas, e  $r$  é um número real,

- ▶  $AI = A$  e  $IA = A$ ;
- ▶  $A(B + C) = AB + AC$
- ▶  $(A + B)C = AC + BC$
- ▶  $(AB)C = A(BC)$
- ▶  $OA = O$  e  $AO = O$
- ▶  $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

**Importante:** Em geral  $AB \neq BA$  podendo, inclusive, um dos produtos estar definido e o outro não.

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix} \neq AB$$

**Observação:** Note que, no exemplo acima,  $AB = O$  muito embora  $A \neq O$  e  $B \neq O$ .

## A Transposta de uma Matriz:

Dada uma matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , podemos obter uma outra matriz cujas linhas são as colunas de  $A$  e cujas colunas são as linhas de  $A$ , que denominamos a **transposta de  $A$** , e denotamos por  $A^T$  (ou  $A'$ , dependendo do texto).

$$A^T = [b_{ij}]_{n \times m}, \quad \text{onde } b_{ij} = a_{ji}.$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

## Propriedades

Se  $A$  e  $B$  têm as dimensões adequadas e  $r$  é um número real,

- ▶  $(A^T)^T = A$
- ▶  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶  $(AB)^T = B^T A^T$  (observe a ordem)
- ▶  $(rA)^T = rA^T$

## Matrizes na forma escada reduzida

### Definição

Uma matriz  $m \times n$  está *reduzida à forma escada* se

1. o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1. Chamamos este elemento de *coeficiente líder* de sua linha.
2. cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os demais elementos iguais a zero.
3. todas as linhas que são formadas exclusivamente por zeros estão abaixo das linhas não nulas.
4. se as linhas  $1, \dots, r$  são as linhas não nulas da matriz e, se o primeiro elemento não nulo da linha  $i$  ocorre na coluna  $k_i$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ .

**Exemplos:** as matrizes abaixo estão na forma escada reduzida. Verifique cada um dos itens listados na definição anterior para cada uma delas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplos:** as matrizes abaixo **não** são reduzidas à forma escada. Justifique.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Operações elementares sobre linhas:

Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Op. 1: Consiste em trocar as posições das linhas  $r$  e  $s$ ,  $1 \leq r \leq s \leq m$ .

Op. 2: Consiste em multiplicar a  $r$ -ésima linha por um número real  $c \neq 0$ ,  $1 \leq r \leq m$ .

Op. 3: Consiste em substituir a  $r$ -ésima linha pela  $r$ -ésima linha somada à  $k$  vezes a  $s$ -ésima linha, para algum número real  $k$ ,  $1 \leq r, s \leq m$ .

Se  $A$  e  $A'$  são matrizes  $m \times n$  e  $A'$  pode ser obtida a partir de  $A$  através de um número finito de operações elementares sobre linhas, então dizemos que  $A'$  é linha-equivalente a  $A$  (ou equivalente). Notação  $A \sim A'$

### Teorema

Toda matriz  $A$   $m \times n$  é linha equivalente a uma única matriz reduzida à forma escada.

## Escalonamento

Para reduzir uma matriz  $A$  à sua forma escada reduzida usando as operações elementares sobre linhas siga o seguinte procedimento:

- P 1** Encontre a primeira coluna de  $A$  ( da esquerda para a direita) cujos coeficientes não são todos nulos. Esta coluna será chamada de coluna pivô. Identifique o primeiro elemento não nulo da coluna pivô (de cima para baixo). Este elemento será chamado de pivô. Transforme-o em 1 (usando a **Op. 2**) e, se necessário, altere a posição da linha (usando a **Op. 1**) para que o pivô fique na primeira linha.
- P 2** Transforme em 0 (usando a **Op. 3**) todos os coeficientes abaixo do pivô.

- P 3** Ignore a coluna pivô ( e as que estiverem a sua esquerda, caso haja alguma), ignore a primeira linha, e considere a submatriz restante. Repita os passos acima para a submatriz considerada. Importante: o novo pivô deverá estar abaixo e à direita do anterior.
- P 4** Após repetir o processo descrito anteriormente nos passos P1, P2 e P3 você deverá anular todos os elementos que estiverem acima do novo pivô.
- P 5** Repita o processo todo quantas vezes forem necessárias para que sua matriz ampliada fique na forma escada reduzida.

## Exemplo:

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-4L1+L2]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-2L1+L3]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-3L1+L4]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{L1 \leftrightarrow L3}{\sim}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \begin{matrix} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \end{matrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-4L1+L2]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L4 \leftrightarrow L2]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow[-1/2 \cdot L2]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow[-1L2+L1]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow[3L2+L3]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow[7L2+L4]{\sim} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{(1/4).L3}{\sim}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{-1L3+L2}{\sim}} \underset{\sim}{\underset{-5L3+L4}{\sim}}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{(1/4).L3}{\sim}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{-1L3+L2}{\sim}} \underset{\sim}{\underset{-5L3+L4}{\sim}}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{(1/4).L3}{\sim}} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array} \right] \underset{\sim}{\underset{-1L3+L2}{\sim}} \underset{\sim}{\underset{-5L3+L4}{\sim}}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## Equação linear em n variáveis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1)$$

$a_i, i = 1, \dots, n$  e  $b$  são números reais (conhecidos, em geral).

$a_i, i = 1, \dots, n$  são coeficientes e  $b$  é o termo independente.

$x_i, i = 1, \dots, n$  são incógnitas (ou variáveis).

Uma solução de uma equação linear em n variáveis é uma sequência de  $n$  números  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  que tem a seguinte propriedade: a igualdade em (1) é satisfeita quando fazemos  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ .

Sistema linear de  $m$  equações com  $n$  incógnitas:

é um conjunto de  $m$  equações, cada uma delas com  $n$  incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (2)$$

Uma solução de um sistema linear como (2) é uma sequência de  $n$  números  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  que satisfaz simultaneamente todas as  $m$  equações do sistema.

## Sistema homogêneo

Se  $b_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , dizemos que o sistema é **homogêneo**.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Observe que todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução dada por  $s_1 = 0, s_2 = 0, \dots, s_n = 0$ , denominada **solução trivial**.

Um sistema linear pode ter:

- uma única solução e, neste caso, dizemos que o sistema é **determinado** (ou possível e determinado, ou compatível e determinado, ou ainda, consistente e determinado).
- infinitas soluções e, neste caso, dizemos que o sistema é **indeterminado** (ou possível e indeterminado, ou compatível e indeterminado, ou ainda, consistente e indeterminado).
- nenhuma solução e, neste caso, dizemos que o sistema é **impossível** (ou incompatível, ou ainda, inconsistente).

**Exemplo:**

Considere um sistema linear de duas equações e duas incógnitas no  $\mathbb{R}^2$  (plano  $xy$ )

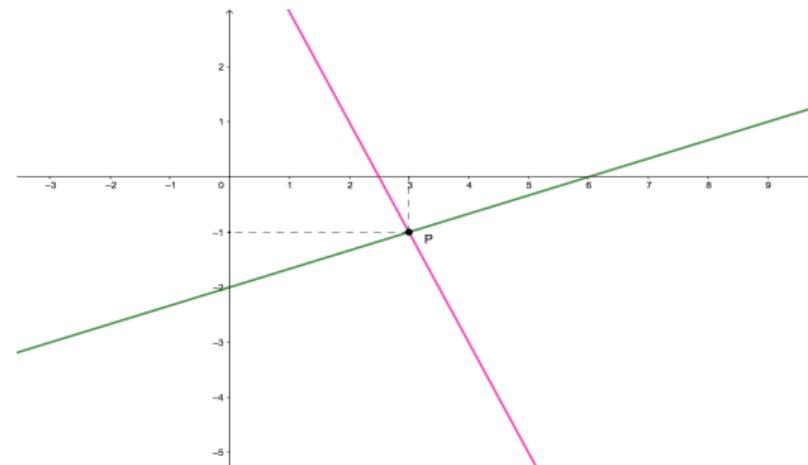
$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Cada uma das equações acima representa uma reta no plano  $xy$ .

Resolver o sistema, portanto, é equivalente a determinar os pontos comuns a essas duas retas.

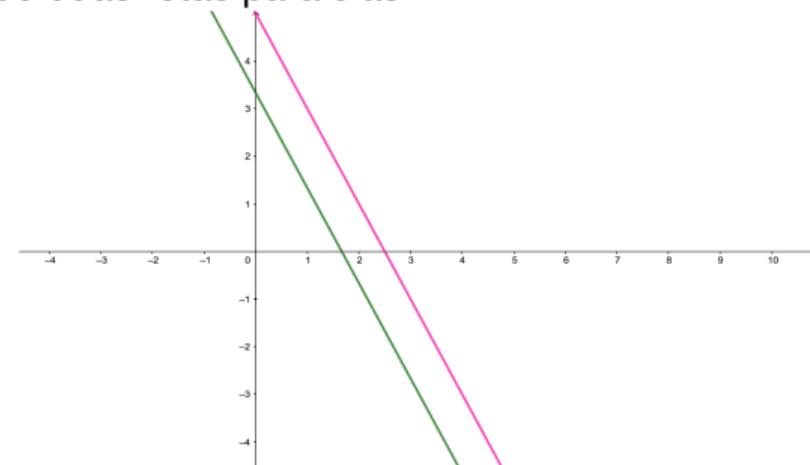
**Caso 1** As duas retas se interceptam exatamente em um ponto (sistema possível determinado). Por exemplo, o sistema abaixo tem uma única solução: o ponto do plano  $P = (3, -1)$ .

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$



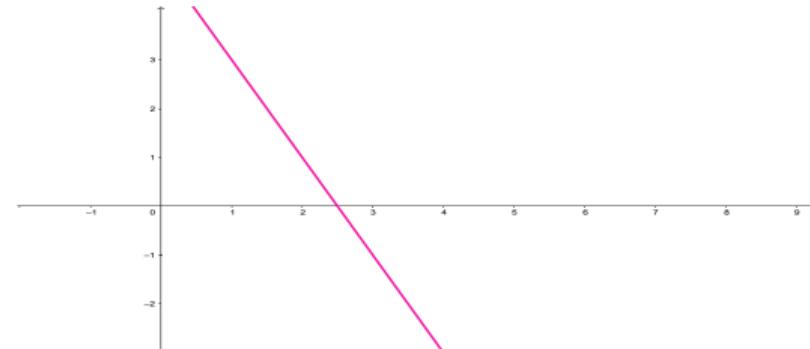
**Caso 2** As duas retas não se interceptam (sistema impossível). Neste exemplo o sistema não tem solução - tratam-se de duas retas paralelas!

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$$



**Caso 3** As duas retas são coincidentes (sistema indeterminado). Aqui o sistema tem infinitas soluções, pois ambas as equações representam a mesma reta. Ou seja, todos os pontos pertencentes à reta satisfazem ambas as equações.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$



Representação matricial: Dado o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (4)$$

definimos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

de maneira que o sistema (4) pode ser escrito na forma matricial

$$AX=B$$

A matriz  $A$  é chamada de **matriz dos coeficientes** do sistema, e a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

é chamada de **matriz aumentada** (ou **ampliada**) do sistema e é representada por  $[A|B]$ .

## Teorema

*Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes (uma obtida a partir da outra outra por meio de operações elementares sobre linhas) são também equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções.*

## Processo de Eliminação de Gauss-Jordan

Para resolver o sistema linear  $AX = B$  proceda da seguinte forma:

1. forme a matriz aumentada  $[A:B]$ ;
2. leve a matriz aumentada  $[A:B]$  à forma escada reduzida usando as operações elementares sobre linhas (conforme procedimento que descreveremos abaixo);
3. resolva o sistema correspondente à matriz ampliada reduzida à forma escada.

## Exemplo:

Vamos resolver o sistema de equações abaixo, escalonando a sua matriz ampliada até a forma escada reduzida.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{array} \right.$$

Solução: Consideremos a matriz ampliada do sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \begin{matrix} -4L1+L2 \\ -2L1+L3 \\ -3L1+L4 \\ \sim \end{matrix}$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-4L1+L2]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-2L1+L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-3L1+L4]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -2 & -2 & : -14 \\ 0 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -2 & -2 & : -14 \end{array} \right]$$

Escalonando-a através de operações elementares sobre linhas temos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 4 & -3 & 2 & : 0 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-4L1+L2]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 2 & -1 & 3 & : 11 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-2L1+L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right] \xrightarrow[-3L1+L4]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -2 & -2 & : -14 \\ 3 & 1 & 1 & : 4 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -2 & -2 & : -14 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[L4 \leftrightarrow L2]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & -2 & -2 & : -14 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \end{array} \right] \xrightarrow[-1/2 \cdot L2]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & : 6 \\ 0 & 1 & 1 & : 7 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \end{array} \right] \xrightarrow[-1L2+L1]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : 1 \\ 0 & 1 & 1 & : 7 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \end{array} \right] \xrightarrow[3L2+L3]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : 1 \\ 0 & 1 & 0 & : 10 \\ 0 & -3 & 1 & : -1 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \end{array} \right] \xrightarrow[7L2+L4]{\sim} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & : 1 \\ 0 & 1 & 0 & : 10 \\ 0 & 0 & 1 & : 3 \\ 0 & -7 & -2 & : -24 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 4 & : & 20 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{(1/4).L3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[-1L3+L2]{-5L3+L4}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 4 & : & 20 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{(1/4) \cdot L3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[-1L3+L2]{-5L3+L4}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 4 & : & 20 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow{(1/4) \cdot L3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 5 & : & 25 \end{array} \right] \xrightarrow[-1L3+L2]{-5L3+L4}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{array} \right]$$

Logo, o sistema proposto é equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = -1 \\ 0x + 1y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + 1z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, o sistema original tem o mesmo conjunto solução que o sistema

$$\begin{cases} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 5 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Portanto trata-se de um sistema possível e determinado cuja única solução é

$$S = \{(-1, 2, 5)\}.$$