Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

# Posições relativas e intersecções

## Tenha em mãos objetos para usar como retas e planos - improvise : palitinhos, lápis, retângulos de papelão, isopor, etc ( isso ajuda bem a entender esta aula)

Cláudia Gentile

05 de dezembro de 2023

# Posições relativas entre duas retas

Vamos separar a análise da posição relativa entre retas em duas partes - uma se aplica a retas no $\mathbb{R}^2$ e outra a retas no $\mathbb{R}^3$.

## Duas retas no plano $\mathbb{R}^2$

Considere 2 retas quaisquer no plano $\mathbb{R}^2$. Essas retas podem ser iguais (coincidentes), paralelas ou concorrentes.

- As retas são iguais se e somente se a intersecção entre elas for um conjunto infinito (todos os seus pontos).
- As retas são distintas e paralelas se e somente se têm intersecção vazia.
- As retas são concorrentes se e somente se a interseção entre elas for um ponto.

Conhecendo equações das retas, uma das formas de entender as posições relativas entre elas é analisando as suas interseções.

É importante que você saiba fazer a intersecção entre retas utilizando diferentes tipos de equações. No exemplo abaixo estamos usando equação geral.

## Exemplo usando equações gerais:

Considere as retas

$$r: \; 2x - y = 1$$

$$s: \; x + y = 2$$

Para investigarmos a interseção entre as retas vamos resolver o sistema determinado pelas duas equações. O conjunto solução vai nos dar as coordenadas dos pontos pertencentes à interseção.

Escalonando a matriz ampliada do sistema temos que

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & : & 1 \\ 1 & 1 & : & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{L1 \leftrightarrow L2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & : & 2 \\ 2 & -1 & : & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-2L1+L2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & -3 & : & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\frac{-1}{3}L2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-L2+L1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & : & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

O sistema é possível determinado e o ponto $(1, 1)$ é o único ponto que satisfaz simultaneamente as duas equações.

Ou seja, as retas são concorrentes (têm apenas um ponto comum) e se intersectam no ponto $(1, 1)$.

## Um exemplo usando equações vetoriais ou paramétricas

Consideremos as equações vetorias das mesmas retas usadas no exemplo acima.

$$r: \quad (x,y) = (0,-1) + \lambda(1,2)$$

$$s: \quad (x,y) = (2,0) + \delta(2,-2)$$

Temos que

$$\boxed{r: \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & -1+2\lambda \end{array} \right.} \qquad \boxed{s: \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+2\delta \\ y & = & -2\delta \end{array} \right.}$$

Igualando as equações para $x$ e $y$, vamos obter um sistema no qual as incógnitas são os parâmetros das retas!

$$\boxed{\begin{cases} \lambda & = & 2+2\delta \\ -1+2\lambda & = & -2\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-2\delta & = & 2 \\ 2\lambda+2\delta & = & 1 \end{cases}}$$

Resolvendo o sistema, vamos obter $\lambda = 1$ e $\delta = -\frac{1}{2}$. Então, neste caso, vamos precisar substituir os valores encontrados de $\lambda$ e $\delta$ nas equações vetoriais (ou paramétricas) se desejarmos conhecer as coordenadas do ponto de intersecção (1,1).

$$\boxed{r: \quad (x,y) = (0,-1) + 1(1,2) = (1,1)} \quad \boxed{s: \quad (x,y) = (2,0) - \frac{1}{2}(2,-2) = (1,1)}$$

Em ambas as análises, um sistema impossível indica intersecção vazia, ou seja, retas paralelas, sistema possível determinado indica que intersecção é um único ponto, ou seja, as retas são concorrentes, e sistema possível indeterminado indica infinitos pontos de intersecção, ou seja, tratam-se de duas equações para a mesma reta.

Alternativamente, podemos observar os vetores diretores para compreender como se posicionam as retas uma com relação a outra.
Mais especificamente suponha que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores de duas retas, $r$ e $s$, no plano $\mathbb{R}^2$.

- $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos se e somente se as retas são concorrentes.
- $\vec{r} \parallel \vec{s}$ se e somente se as retas são paralelas ou coincidentes.

No segundo caso, para decidir se as retas são paralelas ou coincidentes basta tomar um ponto de uma das retas e verificar se ele pertence a outra!!! Se sim, são a mesma reta. Se não, são paralelas distintas.

**Exemplo:**

Considere as retas

$$r: \ X = (-1,2) + \lambda(2,3)$$

$$s: \ X = (0,1) + \gamma(1,-1)$$

Veja que os vetores diretores $\vec{r} = (2,3)$ e $\vec{s} = (1,-1)$ não são paralelos (não são múltiplos), logo podemos concluir que as retas são concorrentes. Se desejarmos encontrar as coordenadas do ponto de interseção, podemos igualar as duas equações, da seguinte forma:

$$(-1,2) + \lambda(2,3) = (0,1) + \gamma(1,-1) \ \Leftrightarrow \ (-1+2\lambda, 2+3\lambda) = (\gamma, 1-\gamma)$$

o que nos leva a um sistema, no qual as incógnitas não são as coordenadas do ponto de intersecção mas são os parâmetros das retas que levam ao ponto de intersecção. Observe a importância de usar letras distintas para representar os parâmetros em equações distintas.

$$\left\{\begin{array}{rcr} -1+2\lambda & = & \gamma \\ 2+3\lambda & = & 1-\gamma \end{array}\right.$$

Ou seja, obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2\lambda-\gamma & = & 1 \\ 3\lambda+\gamma & = & -1 \end{array}\right.$$

cuja solução é dada por $\lambda = 0$ e $\gamma = -1$. Ou seja, se substituirmos $\lambda = 0$ na equação da reta $r$ ou $\gamma = -1$ na equação da reta $s$, vamos obter o mesmo ponto, o ponto $(-1, 2)$ que está na interseção das duas retas.

## Exemplo:

Considere as retas

$$r: \; X = (1,1) + \lambda(2,3)$$
$$s: \; X = (0,1) + \gamma(6,9)$$

Observe que, neste caso, os vetores diretores $(2,3)$ e $(6,9)$ são paralelos, e portanto as retas são ou paralelas ou coincidentes. Para concluirmos, vamos escolher um ponto qualquer da reta $r$, por exemplo o ponto $(1,1)$ e verificar se ele satisfaz a equação da reta $s$. Ou seja, vamos verificar se para algum valor de $\gamma$ é verdadeira a igualdade:

$$(1,1) = (0,1) + \gamma(6,9)$$

Veja que esta igualdade é sempre falsa, visto que deveríamos ter ao mesmo tempo $6\gamma = 1$ e $9\gamma = 0$. Portanto, as retas são paralelas e distintas.

# Duas retas no espaço $\mathbb{R}^3$

Agora considere 2 retas no espaço $\mathbb{R}^3$. Novamente as retas podem ser coincidentes, paralelas distintas, ou concorrentes mas, no $\mathbb{R}^3$, há ainda uma possibilidade a mais: as retas podem ser reversas!!! No espaço temos as seguintes possibilidades:

- As retas são coincidentes (neste caso a intersecção entre elas é um conjunto infinito (todos os seus pontos));
- As retas são distintas e paralelas (neste caso a intersecção entre elas é um conjunto vazio);
- As retas são reversas (neste caso a intersecção entre elas é um conjunto vazio);
- As retas são concorrentes (neste caso a intersecção entre elas é um ponto).

Novamente, podemos analisar se os vetores diretores das retas são ou não paralelos para ter um bom palpite sobre as posições relativas entre elas.
Mais especificamente suponha que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores de duas retas, $r$ e $s$, no espaço $\mathbb{R}^3$.

- $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos se e somente se as retas são concorrentes ou são reversas.
- $\vec{r} \parallel \vec{s}$ se e somente se as retas são paralelas ou coincidentes.

No segundo caso, para decidir se as retas são paralelas ou coincidentes basta tomar um ponto de uma das retas e verificar se ele pertence a outra!!! Se sim, são a mesma reta. Se não, são paralelas distintas.
Mas atenção:

> essa checagem usando um único ponto só vale no segundo caso, já que no primeiro caso você teria que ter muita sorte para escolher exatamente o ponto de intersecção para fazer a checagem, certo?

No primeiro caso, para decidir se as retas são concorrentes ou reversas, você pode fazer dois procedimentos. Uma possibilidade é você montar um sistema com as duas equações das duas retas para verificar se elas têm ou não algum ponto em comum. Se tiverem, então as retas são concorrentes. Se não tiverem, são reversas.

Outra possibilidade é a seguinte:

Tome um ponto $A$ qualquer pertencente à reta $r$ e um ponto $B$ qualquer pertencente à reta $s$. Construa o vetor $\overrightarrow{AB}$.
Em seguida verifique se os vetores $\vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são coplanares ou não.

- Se $\vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem coplanares, então as retas são concorrentes.
- Se $\vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem não coplanares , então as retas são reversas.

Esse raciocínio funciona bem DEPOIS de você já ter verificado que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos.

# Exemplo:

Considere as retas

$$r: X = (-1,1,1) + \lambda(0,1,1)$$

$$s: X = (1,1,-1) + \gamma(1,-1,0)$$

Bem, observe que os vetores diretores são não paralelos, e portanto as retas são concorrentes ou reversas. Há duas formas de tomarmos esta decisão.

Podemos verificar se, para algum valor de $\lambda$ e algum valor de $\gamma$, as equações acima nos levam ao mesmo ponto. Ou seja, podemos igualar o lado esquerdo das duas equações e investigar o sistema resultante, cujas incógnitas serão $\lambda$ e $\gamma$:

$$(-1,1,1)+\lambda(0,1,1)=(1,1,-1)+\gamma(1,-1,0)$$

que equivale a

$$\begin{cases} \gamma & = & -2 \\ -\gamma-\lambda & = & 0 \\ -\lambda & = & 2 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema impossível. Portanto as retas são reversas.

Alternativamente, poderíamos chegar a mesma conclusão escolhendo os pontos
$A = (-1, 1, 1) \in r$, $B = (1, 1, -1) \in s$
(na prática poderíamos tomar quaisquer pontos $A$ e $B$ em $r$ e $s$ respectivamente)
Então verificamos se os vetores $\vec{r} = (0, 1, 1)$, $\vec{s} = (1, -1, 0)$ e $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$ são coplanares ou não. Para isso, basta calcular o determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

Como o determinante é diferente de 0 concluimos que os vetores são não coplanares.
Logo, as retas são reversas.

# Posições relativas e intersecções entre uma reta e um plano

Dados uma reta e um plano, podemos ter a reta inteiramente contida no plano, paralela ao plano, ou transversal ao plano, ie, intersectando o plano em um único ponto.

Consideremos uma reta $r$ e um plano $\pi$. Temos as seguintes possibilidades:

1. $r \subset \pi$ (a reta está contida no plano - neste caso a intersecção entre $r$ e $\pi$ é um conjunto infinito de pontos (toda a reta $r$));
2. $r \cap \pi = \emptyset$ (a reta é paralela ao plano - neste caso a intersecção entre $r$ e $\pi$ é um conjunto vazio);
3. $r \cap \pi = \{P\}$ (a reta é transversal ao plano - neste caso intersecção entre $r$ e $\pi$ é um único ponto $P$).

Ao observarmos as equações de uma reta $r$ e de um plano $\pi$:

> podemos obter informações comparando as direções do vetor normal ao plano, e do vetor diretor da reta.

> podemos também fazer uma análise considerando os vetores diretores do plano juntamente com o vetor diretor da reta!

# Análise das posições relativas entre uma reta e um plano usando o vetor normal do plano

Suponha que $\vec{r}$ é vetor diretor da reta $r$, $\vec{n}$ é vetor normal do plano $\pi$.

1. $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$, ou seja, $\vec{r}$ é ortogonal a $\vec{n}$ se e somente se a reta estiver contida no plano ou for paralela ao plano.
2. $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$ se e somente se a reta for transversal ao plano.

No primeiro caso acima, podemos decidir se a reta está contida no plano ou é paralela ao plano simplesmente tomando um ponto arbitrário da reta e testando para ver se ele satisfaz a equação do plano.
Isso funciona bem porque, se já sabemos que $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são ortogonais, então as possibilidades são:
ou TODOS os pontos de $r$ pertencem a $\pi$ ou NENHUM ponto de $r$ pertence a $\pi$.

# Análise das posições relativas entre uma reta e um plano usando os vetores diretores do plano

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de um plano $\pi$ e seja $\vec{r}$ vetor diretor de uma reta $r$.

1. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{r}$ são coplanares se e somente se a reta estiver contida no plano ou for paralela ao plano.
2. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{r}$ são não coplanares se e somente se a reta for transversal ao plano.

Novamente, no primeiro caso acima, podemos decidir se a reta está contida no plano ou é paralela ao plano simplesmente tomando um ponto arbitrário da reta e testando para ver se ele satisfaz a equação do plano.

Exemplo:

Considere a reta $r$ dada por

$$r: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-2} = z+1$$

e o plano dado por

$$\pi: \quad 2x - 3y + z = 1$$

Vamos avaliar como a reta $r$ se posiciona com relação ao plano $\pi$ .

Primeiramente, observe que uma equação vetorial para a reta $r$ é dada por

$$r: \quad X = (1, -3, -1) + \lambda(2, -2, 1)$$

Logo, um vetor diretor da reta $r$ é $\vec{r} = (2, -2, 1)$. Observe também que um vetor normal ao plano é o vetor $\vec{n} = (2, -3, 1)$. Bem, então o mais simples nesse caso, é primeiramente verificar se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são ortogonais ou não. Fazendo o produto escalar entre eles temos:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (2, -2, 1) \cdot (2, -3, 1) = 4 + 6 + 1 = 11 \neq 0.$$

Ou seja, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são ortogonais. Assim, sabemos que a reta $r$ é transversal ao plano $\pi$.

Se, adicionalmente, desejarmos saber qual é o ponto em que à reta $r$ intersecta o plano $\pi$, então precisaremos de uma análise a mais. Vejamos uma forma de fazer isso.

Observe que, se um ponto $X = (x, y, z)$ pertence à reta $r$, ele necessariamente satisfaz a equação da reta $r$ e portanto deve ter a forma:

$$(x, y, z) = (1 + 2\lambda, -3 - 2\lambda, -1 + \lambda)$$

para algum número real $\lambda$. Bem, se $X$ for o ponto de interseção entre a reta $r$ e o plano $\pi$, então deverá também satisfazer a equação do plano $\pi$, ou seja, devemos ter

$$2(1+2\lambda)-3(-3-2\lambda)+(-1+\lambda)=1$$

Logo

$$11\lambda=-9 \quad \text{e portanto} \quad \lambda=-\frac{9}{11}$$

Substituindo este valor de $\lambda$ na equação da reta $r$ obtemos as coordenadas do ponto de intersecção:

$$X=(1,-3,-1)-\frac{9}{11}(2,-2,1)=\left(\frac{-7}{11},\frac{-15}{11},\frac{-20}{11}\right)$$

.

# Outra forma de analisar as posições relativas e encontrar o ponto de interseção entre uma reta e um plano

Consideremos as equações vetoriais da reta e do plano do exemplo acima:

$$r : \quad (x,y,z) = (1,-3,-1) + \lambda(2,-2,1)$$

$$\pi : \quad (x,y,z) = (0,0,1) + \delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right) + \gamma\left(0,\frac{1}{3},1\right) \quad \text{(Verifique!!)}$$

Conforme já observamos anteriormente, como

$$\det\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + 1 = \frac{11}{6} \neq 0$$

podemos concluir que $\left\{(2,-2,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(0, \frac{1}{3}, 1\right)\right\}$ são não coplanares, e isso significa que $r$ é transversal a $\pi$.

Igualando as equações $(1,-3,-1)+\lambda(2,-2,1)=(0,0,1)+\delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},0\right)+\gamma\left(0,\frac{1}{3},1\right)$ vamos compor um sistema nas variáveis $\lambda$, $\delta$ e $\gamma$.

$$\begin{cases} 2\lambda - \frac{1}{2}\delta = -1 \\ -2\lambda - \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{3}\gamma = 3 \\ \lambda - \gamma = 2 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, encontraremos os valores $\lambda=\frac{-9}{11}$, $\delta=\frac{-14}{11}$ e $\gamma=\frac{-31}{11}$.

Podemos, por exemplo, substituir $\lambda = \frac{-9}{11}$ na equação da reta $r$ para encontrar as coordenadas do ponto de intersecção.

$$(x, y, z) = (1, -3, -1) + \frac{-9}{11}(2, -2, 1) = \left(\frac{-7}{11}, \frac{-15}{11}, \frac{-20}{11}\right)$$

Outra possibilidade seria substituir os valores $\delta = \frac{-14}{11}$ e $\gamma = \frac{-31}{11}$ na equação do plano, mas isso daria mais trabalho e chegaria no mesmo resultado!

# Posições relativas e intersecções entre dois planos

Dois planos podem se posicionar um com relação ao outro da seguinte forma:

- eles podem ser coincidentes (todos os seus pontos são comuns - a interseção é um conjunto infinito com 2 graus de liberdade) ,
- eles distintos e paralelos (não têm nenhum ponto comum - a interseção é vazia),
- eles podem ser transversais (intersectam-se ao longo de uma reta - ou seja, aintersecção é um conjunto infinito com 1 grau de liberdade).

# Posições relativas entre planos comparando os vetores normais

Considere dois planos $\pi_1$ e $\pi_2$ e suponha que $\vec{n}_1$ é o vetor normal de $\pi_1$ e $\vec{n}_2$ é o vetor normal a $\pi_2$.
Então temos o seguinte:

1. $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos se e somente se os planos forem paralelos ou coincidentes.
2. $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são não paralelos se e somente os planos forem transversais.

No primeiro caso acima, para definir se os planos são paralelos ou coincidentes, basta tomar um ponto qualquer de um plano e verificar se ele satisfaz a equação do outro plano. Se sim, são coincidentes. Se não, são paralelos.

# Exemplo:

Considere os planos

$$\pi_1 : \quad 2x - 3y + z = 1$$

$$\pi_2 : \quad x + 3y - z = 0$$

Observe que os vetores normais $\vec{n}_1 = (2, -3, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 3, -1)$ não são paralelos. Logo os planos são transversais.

Resolvendo o sistema dado pelas duas equações acima determinamos a equação da reta na intersecção do planos!!!

$$\begin{cases} 2x-3y+z & = & 1 \\ x+3y-z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & & & = & \frac{1}{3} \\ & y & -\ \frac{1}{3}z & = & -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Assim, sabemos que $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{9}, 0\right) + \delta\left(0, \frac{1}{3}, 1\right)$ é a equação vetorial de reta na intersec ção dos dois planos.

Usar as equações gerais dos planos sempre é a forma mais simples de analisar a posição relativa entre eles. Veja os exemplos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z & = & 1 \\ 4x - 6y + 2z & = & 2 \end{cases}$$

Uma equação é múltipla da outra, planos coincidentes

$$\begin{cases} 2x - 3y + z & = & 1 \\ 4x - 6y + 2z & = & 3 \end{cases}$$

O sistema é impossível, planos paralelos

$$\begin{cases} 2x - 3y + z & = & 1 \\ x + 3y - z & = & 0 \end{cases}$$

Nenhum dos dois casos acima, planos transversais