3ª Lista de Exercícios

1. Considere o alfabeto definido por:

   Constantes: a, b, c
   Variáveis: X, Y, Z
   Símbolos funcionais: f/3, g/2, h/1
   Simbolos predicados: p/3, q/2
   Quantificadores: $\forall$, $\exists$
   Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   Simbolos de pontuação: ( ) ,

   Verifique quais da expressões lógicas a seguir são fórmulas bem-formadas. Justifique sua resposta com base na definição de fórmula bem-formada (fbf ou wff) vista em aula:

   Uma fórmula bem-formada é:

   1. Um símbolo de verdade (V e F);
   2. Se p é um símbolo de predicado n-ário e $t_1, \ldots, t_n$ são termos então $p(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica;
   3. Se α é uma fórmula, então $\neg\alpha$ é uma fórmula;
   4. Se α e β são fómulas, então também são fórmulas: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$
   5. Se α for uma fórmula e X for uma variável livre em α, então $\forall X\alpha$ e $\exists X\alpha$ são fómulas

   (a) $\exists X(\forall X p(X, a, b))$
   Não, pois fere o item 5 da definição, uma vez que X não está livre na fórmula $\forall X p(X, a, b)$ e, portanto, sua quantificação existencial não gera uma fbf.

   (b) $\forall Y(\forall X p(X, Y, b))$
   Sim, pois p é um símbolo de predicado com aridade 3 definido no alfabeto e todos os seus argumentos são termos, logo ele é uma fórmula e os quantificadores quantificam a variável X que está presente em p.

   (c) $\forall Y(\exists X p(X, a, b))$
   Não, pois Y não é uma variável livre na fórmula para ser quantificado universalmente (veja item 5 da definição de wff).

   (d) $\forall X(\exists Y p(X, a, Y) \rightarrow q(f(X), g(Y)))$
   Não, pois mesmo q sendo um símbolo de predicado com aridade 2 definido no alfabeto, seus argumentos não são termos, uma vez que $f/1$ e $g/1$ não foram definidos como símbolos funcionais no alfabeto.

   (e) $(p(X, g(a, b), Y) \vee q(h(h(Z)), d) \wedge \neg q(c, d)$
   Não, pois mesmo q sendo um símbolo de predicado com aridade 2 definido no alfabeto, um de seus argumentos, o d, não é termo, uma vez que não foi definido como constante no alfabeto.

   (f) $p(q(X, a), b, Y) \rightarrow q(c, d)$
   Não, pois mesmo p sendo um símbolo de predicado com aridade 3 definido no alfabeto, seus argumentos não são termos, uma vez que $q/2$ foi definido como símbolo de predicado no alfabeto e símbolo de predicado não é termo.

   (g) $\forall X(\exists Z(\forall Y(p(a, b, X) \rightarrow q(g(X, Z), f(a, b, Y))))))$
   Sim, pois p e q são símbolos de predicado com aridade 3 e 2 respectivamente e ambos estão definidos no alfabeto, e todos os seus argumentos são termos, logo p e q são fórmulas e os quantificadores quantificam as variáveis X, Y e Z que estão presentes em p e q.

(h) $\neg h(p(a,b,c)) \vee f(d,d)$
Não, devido há vários problemas: (1) h e f são símbolos funcionais; (2) $f/2$ não foi definido; (3) a constande d não foi definida no alfabeto; e (4) $p/3$ é um símbolo de predicado, logo não é termo.

(i) $(\exists Y((\exists Z(p(Z,Z,Z) \vee \neg q(Y,Y))) \vee (\forall X q(X,X))))$
Sim, pois p e q são símbolos de predicado com aridade 3 e 2 respectivamente e ambos estão definidos no alfabeto, e todos os seus argumentos são termos, logo a negação e disjunção dessas fórmulas também são fórmulas. Além disso, os quantificadores quantificam as variáveis X e Y que estão presentes em p e q.

(j) $\forall X(\exists Y(p(X,Y,f(a,b,Y)) \rightarrow (\exists Z p(Z,Z,d))))$
Não, pois a constante d não está definida no alfabeto.

(k) $\forall X(\exists Y(p(f(a,b,c),Y,X))) \rightarrow (\exists Y(\forall X q(h(Y),g(X,Y))))$
Sim, pois p e q são símbolos de predicado com aridade 3 e 2 respectivamente e ambos estão definidos no alfabeto, e todos os seus argumentos são termos, e os quantificadores quantificam as variáveis X e Y que estão presentes em p e q.

(l) $\forall X(f(X,b,c) \leftrightarrow q(h(X)))$
Não, pois f está definido como símbolo funcional no alfabeto e, como tal, não pode ser usado como predicado.

(m) $(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee c)$
Não, pois constantes não podem ser usadas como predicado.

(n) $\forall X(q(X,Y) \vee \neg p(f(a,b,X),g(Z,Z,X),h(a)))$
Não, pois $g/3$ não está definido no alfabeto.

2. Identifique as variáveis livres e ligadas nas fórmulas a seguir, e quais fórmulas são fechadas.

(a) $\forall X(p(X,Y) \rightarrow (\exists Z(q(a,Z,M) \leftrightarrow r(Z,T,X))))$
Nesse caso, as variáveis ligadas são X e Z; e as variáveis livres são Y, M e T. Como há variáveis livres na fórmula, essa não é uma fórmula fechada.

(b) $\forall X(\forall Y(\neg p(a) \vee q(X,Y))) \wedge \forall X p(X) \wedge \forall Y(q(a,Y) \vee \neg p(Y))$
Nesse caso X e Y estão ligadas e não há variáveis livres, tornando essa fórmula uma fórmula fechada.

(c) $\exists Z(p(Z,a) \leftrightarrow q(Z,Z)) \rightarrow \forall Y(\exists X(p(a,X) \vee \neg r(X,Y) \vee \neg q(Y,b)))$
Nesse caso X, Y e Z estão ligadas e não há variáveis livres, tornando essa fórmula uma fórmula fechada.

(d) $\forall X(\forall Y(\exists Z(r(X,Y) \wedge \neg r(a,Y))) \rightarrow \forall Z s(Z,b,Z))$
Nesse caso X, Y e Z estão ligadas e não há variáveis livres, tornando essa fórmula uma fórmula fechada.

(e) $\forall X \forall Y(p(X,Y,Z) \wedge \neg r(y,X) \vee \neg q(X)) \leftrightarrow \forall Z q(Z)$
Nesse caso X e Y estão ligadas e Z está livre no primeiro termo antes da bi-implicação; e Z está ligada no segundo termo após a implicação. Como há variável livre na fórmula, essa não é uma fórmula fechada.

3. Construa o fechamento universal e o existencial das fórmulas:

(a) $\forall X p(X,Y)$
$\forall Y \forall X p(X,Y)$ - Fechamento universal
$\exists Y \forall X p(X,Y)$ - Fechamento existencial

(b) $\forall X p(X,Y) \wedge \exists Y q(Y)$
$\forall Y(\forall X p(X,Y) \wedge \exists Y q(Y))$ - Fechamento universal
$\exists Y(\forall X p(X,Y) \wedge \exists Y q(Y))$ - Fechamento existencial

(c) $(\forall X(\exists Y(q(X,Y) \vee p(Z))))$
$(\forall Z(\forall X(\exists Y(q(X,Y) \vee p(Z)))))$ - Fechamento universal
$(\exists Z(\forall X(\exists Y(q(X,Y) \vee p(Z)))))$ - Fechamento existencial

(d) $(\forall X(\forall Z(p(X,Y,Z,T) \leftrightarrow q(Z,M))))$
$(\forall Y(\forall T(\forall M(\forall X(\forall Z(p(X,Y,Z,T) \leftrightarrow q(Z,M)))))))$ - Fechamento universal
$(\exists Y(\exists T(\exists M(\forall X(\forall Z(p(X,Y,Z,T) \leftrightarrow q(Z,M)))))))$ - Fechamento existencial

(e) $\exists X(\forall Y(p(a,b,Y) \vee \neg q(X,b)))$
Esta fórmula não possui variável livre, ou seja, ela já é uma fórmula fechada.

4. Mapeie as senteças a seguir, que estão em língua natural, para a Lógica de Predicados.

(a) Ganso e Neymar são jogadores.
jogador(ganso) ∧ jogador(neymar)

(b) Neymar é jogador e é pai de Davi Lucca.
jogador(neymar) ∧ pai(neymar, davi)

(c) Se Ganso é jogador então ele não é humorista.
jogador(ganso) → ¬humorista(ganso)

(d) Qualquer um é humorista.
∀X humorista(X)

(e) Existe alguém que não é jogador e nem humorista.
∃X (¬jogador(X) ∧¬humorista(X))

(f) Se ninguém é jogador então não existem jogadores.
(∀X ¬jogador(X)) → (¬∃X jogador(X))

(g) Ana é estudiosa.
estudiosa(ana)

(h) Pedro é advogado e Guilherme é estudante.
advogado(pedro) ∧ estudante(guilherme)

(i) Maria vai à festa ou ao teatro.
ir(maria,festa) ∨ ir(maria,teatro)

(j) Gabriel não é programador.
¬programador(gabriel)

(k) Pedro e Guilherme são primos.
primos(pedro, guilherme)

(l) Maria e Ana não são primas, elas são vizinhas.
¬primas(maria, ana) ∧ vizinhas(maria, ana)

(m) Se a função f for diferenciável, ela é contínua.
diferenciavel(f) → continua(f)

(n) A função f é contínua, mas não é diferenciável.
continua(f) ∧¬diferenciavel(f)

(o) Antônio faltou à aula, mas Ana não faltou.
faltou(antonio, aula) ∧¬faltou(ana, aula)

(p) Se Pedro é mais alto que Ana, e Ana é mais alta que André, então Pedro é mais alto que André.
(maisalto(pedro, ana) ∧ maisalto(ana, andre)) → maisalto(pedro, andre)

(q) Maria lê jornal.
le(maria, jornal)

(r) A mãe de Maria gosta de Maria.
gosta(mae(maria), maria)

(s) A mãe da mãe de Maria gosta da mãe de Maria e gosta de Maria.
gosta(mae(mae(maria)), mae(maria)) ∧ gosta(mae(mae(maria)), maria)

(t) Todos os homens são mortais.
∀X (homem(X) → mortal(X))

(u) Alguns homens são mortais.
$\exists X\ (homem(X) \wedge mortal(X))$

(v) Nenhum homem é mortal.
$\neg\exists X\ (homem(X) \wedge mortal(X))$
outra opção é:
$\forall X\ (homem(X) \rightarrow \neg mortal(X))$

(w) Alguns cachorros latem, outros não.
$\exists X\ (cachorro(X) \wedge late(X)) \wedge \exists X\ (cachorro(X) \wedge \neg late(X))$

(x) Existem pessoas bondosas, no entanto nem todas as pessoas são bondosas.
$\exists X\ (pessoa(X) \wedge bondoso(X)) \wedge \neg\forall X\ (pessoa(X) \rightarrow bondoso(X))$

(y) Se Pedro não é estudioso, nenhum dos rapazes é estudioso.
$\neg estudioso(pedro) \rightarrow \forall X\ (rapaz(X) \rightarrow \neg estudioso(X))$

(z) Se Guilherme acordar tarde, então Gabriel irá ao mercado e alguém vai gastar dinheiro.
$acordar(guilherme, tarde) \rightarrow (ir(gabriel, mercado) \wedge \exists X\ (pessoa(X) \wedge gastar(X, dinheiro))$
OBS.: Aqui, como em outras alternativas desta questão, é possível criar predicados unários como *acordartarde(guilherme)* e *iraomercado(gabriel)*. Contudo, deve-se sempre priorizar o predicado que permita a maior flexibilidade possível. Nesse caso, a primeira reposta é preferida pois pode-se usar os predicados *acordar* e *ir* para outros valores como *acordar(guilherme, cedo)*, *acordar(pedro, tarde)* e *ir(gabriel, shopping)*.

(aa) Se o abacate e o caqui engordam, então há alimentos que engordam.
$(engorda(abacate) \wedge engorda(caqui)) \rightarrow \exists X\ (alimento(X) \wedge engorda(X))$

(ab) Alguns alunos estudam, e nem todos os alunos estudam.
$\exists X\ (aluno(X) \wedge estuda(X)) \wedge \neg\forall X\ (aluno(X) \rightarrow estuda(X))$

(ac) Todo aluno é mais novo que alguns professores.
$\forall X\ \exists Y\ (aluno(X) \rightarrow (maisnovo(X, Y) \wedge professor(Y)))$
OBS.: Uma outra resposta possível é posicionar o $\exists Y$ imediatamente antes da subfórmula que contém o Y:
$\forall X\ (aluno(X) \rightarrow \exists Y(maisnovo(X, Y) \wedge professor(Y)))$

(ad) Nem todas as aves podem voar.
$\neg\forall X\ (ave(X) \rightarrow voa(X))$
outra opção é:
$\exists X\ (ave(X) \wedge \neg voa(X))$

(ae) Toda criança é mais nova que a mãe da criança.
$\forall X\ (crianca(X) \rightarrow (maisnovo(X, mae(X)))$

(af) Nenhum número natural é negativo.
$\neg\exists X\ (natural(X) \wedge negativo(X))$

(ag) Alguns números primos são pares.
$\exists X\ (primo(X) \wedge par(X))$

(ah) Todos os números pares são maiores do que 1.
$\forall X\ (par(X) \rightarrow maior(X, 1))$

(ai) Números pares são primos apenas se forem menores do que 3.
$\forall X\ ((par(X) \wedge primo(X)) \rightarrow menor(X, 3))$

(aj) Não existe número primo menor do que 3.
$\neg\exists X\ (primo(X) \wedge menor(X, 3))$

5. Considere uma linguagem de primeira ordem (linguagem da lógica de predicados) λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

Constantes: {a, b, c, d}
Variáveis: {X, Y, Z, W}

Símbolos funcionais: {f/1, g/1, h/1}
Símbolos predicados: {p/1, q/2, s/1}

Seja I a seguinte interpretação:

Domínio: {1,2}

Atribuição a constantes:

a	b	c	d
1	2	1	2

Atribuição a variáveis:

X	Y	Z	W
2	1	1	2

Atribuição a símbolos funcionais:

f(1)	f(2)	g(1)	g(2)
2	1	2	1

Atribuição a símbolos predicados:

p(1)	p(2)	q(1,1)	q(1,2)	q(2,1)	q(2,2)	s(1)	s(2)
V	F	F	V	V	F	F	V

Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I, ou seja, diga qual é o valor-verdade de cada fórmula na interpretação I.

(a) $\forall X \forall Y (p(X) \vee q(Y, c) \vee \neg q(X, a) \vee s(f(W)))$
W é uma váriavel livre, assim assumimos W = 2 (porque é o que está especificado para atribuição de variáveis livres no enunciado da questão).
Para X = 1 temos:

Y = 1
$p(1) \vee q(1, 1) \vee \neg q(1, 1) \vee s(f(2))$
V $\vee$ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
Assim, uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e que o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que quando X=1 e Y=1 a fórmula também será verdadeira.

Y = 2
$p(1) \vee q(2, 1) \vee \neg q(1, 1) \vee s(f(2))$
V $\vee$ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
De modo semelhante ao que vimos para Y=1, uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que quando X=1 e Y=2 a fórmula também será verdadeira.

Para X = 2 temos:

Y = 1
$p(2) \vee q(1, 1) \vee \neg q(2, 1) \vee s(f(2))$
F $\vee$ F $\vee$ F $\vee$ F
F
Notamos que para X=2 e Y=1 a fórmula é falsa.

Concluímos que a fórmula é falsa (F), uma vez que para X=2 e Y=1 o resultado é falso e, de acordo com a semântica da lógica de predicados, uma fórmula quantificada universalmente só será verdadeira se for verdade (V) para todos os valores possíveis das variáveis quantificadas universalmente.

(b) $\exists X \forall Z(p(X) \rightarrow q(Z,c))$
A fórmula a ser avaliada diz que existe um X para o qual para todo Z: $p(X) \rightarrow q(Z,c)$. Com base na tabela verdade da implicação sabemos que: falso → "qualquer coisa" é sempre verdadeiro. Sendo assim, se assumirmos X=2 temos:
Para Z = 1 temos:

$p(2) \rightarrow q(1,1)$
F → "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
Assim, verificamos que quando X=2 e Z=1 a fórmula é verdade (V).

Para Z = 2 temos:

$p(2) \rightarrow q(1,1)$
F → "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
Assim, verificamos que quando X=2 e Z=2 a fórmula é verdade (V).

Concluímos que a fórmula é verdade (V), uma vez que existe um X (que é o 2) para o qual todos os Zs (1 e 2) resultam na fórmula ser verdade (V).

(c) $\forall W \exists Y \exists Z(p(Y) \vee q(W,W) \vee \neg s(Z))$
Para W = 1 temos:

Y = 1 e Z = 1
$p(1) \vee q(1,1) \vee \neg s(1))$
V ∨ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
Uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e que o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que quando Y=1 e Z=1 a fórmula também será verdadeira.

Para W = 2 temos:

Y = 1 e Z = 1
$p(1) \vee q(2,2) \vee \neg s(1))$
V ∨ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
De modo semelhante ao que vimos para W=1, para W=2, pode-se assumir que quando Y=1 e Z=1 a fórmula também será verdadeira.

Concluímos que a fórmula é verdade (V), pois para todo W presente no domínio existe um valor para Y e um valor para Z dentro do domínio que torna a fómula verdadeira.

(d) $\forall X \exists Y(q(X,Y) \vee s(X)) \vee \forall W q(a,W)$
Para X = 1 temos:

Y = 2

W = 1
$q(1,2) \vee s(1) \vee q(1,1))$
V ∨ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
Uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e que o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que quando X=1 e Y=2 a fórmula também será verdadeira.
W = 2
$q(1,2) \vee s(1) \vee q(1,2))$
V ∨ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro
De modo semelhante ao que vimos para W=1, quando X e Y mantém os valores 1 e 2 respectivamente, a fórmula continua verdadeira independente de W.

Cont.

Para X = 2 temos:

Y = 1

W = 1

$q(2,1) \lor s(2) \lor q(1,1))$

V $\lor$ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro

Uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e que o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que quando X=2 e Y=1 a fórmula será verdadeira.

W = 2

$q(2,1) \lor s(2) \lor q(1,2))$

V $\lor$ "qualquer coisa" sempre será verdadeiro

De modo semelhante ao que vimos para W=1, quando X e Y continuam com os valores 2 e 1 respectivamente, a fórmula continua verdadeira independente de W.

Concluímos que a fórmula é verdadeira, pois para todo X e W presente no domínio existe um Y que torna a fómula verdadeira.

(e) $\exists X \exists Y((p(X) \lor s(Y)) \to q(X,X)) \leftrightarrow \forall X q(X,W)$

W é uma váriavel livre, assim assumimos W = 2

Para X = 2, Y=1 temos:

X = 1

$((p(2) \lor s(1)) \to q(2,2)) \leftrightarrow q(1,2)$

((F $\lor$ F) $\to$ F) $\leftrightarrow$ V

V $\leftrightarrow$ V

V

Para X = 1, Y=1 temos:

X = 2

$((p(1) \lor s(1)) \to q(1,1)) \leftrightarrow q(2,2)$

((V $\lor$ F) $\to$ F) $\leftrightarrow$ F

F $\leftrightarrow$ F

V

Concluímos que a fórmula é verdadeira, pois para todo X na subfórmula do lado direito da bi-implicação existe um X e Y na subfórmula do lado esquerdo da bi-implicação que torna a fómula verdadeira.

(f) $\exists W p(g(W)) \lor \forall X \exists Y q(f(X),Y) \lor s(g(Z))$

Z é uma váriavel livre, assim assumimos Z = 1.

Para W = 2 temos:

X = 1

$p(g(2)) \lor q(f(1),1) \lor s(g(1))$

V $\lor$ "qualquer coisa"

V

Uma vez que a fórmula é uma disjunção de predicados e que o primeiro deles é verdadeiro, pode-se assumir que a fórmula sempre será verdadeira quando W=2.

X = 2

$p(g(2)) \lor q(f(2),1) \lor s(g(1))$

V $\lor$ "qualquer coisa"

V

Cont.

De modo semelhante ao que verificamos para X=1, quando X=2 pode-se assumir que a fórmula sempre será verdadeira quando W=2.

Concluímos que a fórmula é verdadeira, pois para todo X existe um W e Y que torna a fómula verdadeira.

(g) $\exists X(p(X) \leftrightarrow q(X,d)) \rightarrow \forall X \exists W q(g(X), f(W))$

Para X = 2 e W = 2 temos:

X = 1 (do lado direito da implicação)

$(p(2) \leftrightarrow q(2,2)) \rightarrow q(g(1), f(2))$
(F ↔ F) → V
V

Para X = 2 e W = 1 temos:

X = 2 (do lado direito da implicação)

$(p(2) \leftrightarrow q(2,2)) \rightarrow q(g(2), f(1))$
(F ↔ F) → V
V

Concluímos que a fórmula é verdadeira, pois para todo X existe um W e X que torna a fómula verdadeira.

6. Considere uma linguagem de primeira ordem (linguagem da lógica de predicados) λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

Variáveis: {X, Y, Z}
Simbolos predicados: {p/2}

Seja I a seguinte interpretação:

Domínio: {a,b,c}

Atribuição:

X	Y	Z	p(a,a)	p(a,b)	p(a,c)	p(b,a)	p(b,b)	p(b,c)	p(c,a)	p(c,b)	p(c,c)
a	a	b	V	F	V	F	V	V	F	V	V

Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I.

(a) $\forall X \exists Y p(X,Y)$
V

(b) $p(Y,Z)$
F

(c) $\forall Y p(Y,Y)$
V

(d) $\exists X \exists Y p(X,Y)$
V

(e) $\forall Y p(Y,Y) \wedge \exists X \forall Y p(X,Y)$
F

7. Suponha que sejam válidas as seguintes assertivas:

   α_1 : Rex é um terrier.
   terrier(rex)

   α_2 : Se Rex é um terrier, então ele late e morde.
   terrier(rex) $\rightarrow$ (late(rex) $\wedge$ morde(rex))

   α_3 : Todos os terrier são cachorros.
   $\forall X$ (terrier(X) $\rightarrow$ cachorro(X))

   α_4 : Todo cachorro que late é barulhento.
   $\forall Y$ (cachorro(Y) $\wedge$ late(Y)) $\rightarrow$ barulhento(Y)

   Usando inferência com base em regras, prove que a seguinte conclusão segue logicamente das assertivas:

   Existe cachorro barulhento.
   $\exists Z$ (cachorro(Z) $\wedge$ barulhento(Z))

   Solução – Usando regras

α_1:	terrier(rex)	Premissa
α_2 :	terrier(rex) $\rightarrow$ (late(rex) $\wedge$ morde(rex))	Premissa
α_3:	$\forall$X (terrier(X) $\rightarrow$ cachorro(X))	Premissa
α_4:	$\forall$Y (cachorro(Y) $\wedge$ late(Y)) $\rightarrow$ barulhento(Y)	Premissa
α_5:	terrier(rex) $\rightarrow$ cachorro(rex)	α_3 + eliminação universal X = rex
α_6:	(cachorro(rex) $\wedge$ late(rex)) $\rightarrow$ barulhento(rex)	α_4 + eliminação universal Y = rex
α_7:	late(rex) $\wedge$ morde(rex)	α_1 + α_2 + modus ponens
α_8:	cachorro(rex)	α_1 + α_5 + modus ponens
α_9:	late(rex)	α_7 + simplificação
α_{10}:	cachorro(rex) $\wedge$ late(rex)	α_8 + α_9 + conjunção
α_{11}:	barulhento(rex)	α_{10} + α_6 + modus ponens
α_{12}:	cachorro(rex) $\wedge$ barulhento(rex)	α_8 + α_{11} + conjunção
α_{13}:	$\exists$Z (cachorro(Z) $\wedge$ barulhento(Z))	α_{12} + introdução existencial

8. Usando inferência com base em regras, prove a validade dos argumentos a seguir. Vários desses argumentos encontram-se descritos em Hegenberg (1976).

   (a) Todos os poetas são sensíveis. Há poetas. Logo, há (pessoas) sensíveis.
   OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

   C_1**:** $\forall X$(poeta(X) $\rightarrow$ sensivel(X))

   C_2**:** $\exists X$ poeta(X)

   Conclusão: $\exists X$ sensivel(X)

   Solução – Usando regras

C_1:	$\forall X$(poeta(X) $\rightarrow$ sensivel(X))	Premissa
C_2:	$\exists X$ poeta(X)	Premissa
C_3:	poeta(a) $\rightarrow$ sensivel(a)	C_1 + eliminação universal X=a
C_4:	poeta(a)	C_2 + eliminação existencial X=a
C_5:	sensivel(a)	C_3 + C_4+ Modus Ponens
C_6:	$\exists X$ sensivel(X)	C_5 + introdução existencial

(b) Alguns felinos são tigres. Todos os tigres são belos. Logo, alguns felinos são belos.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

C_1**:** $\exists X$(felino(X) $\wedge$ tigre(X))

C_2**:** $\forall X$(tigre(X) $\rightarrow$ belo(X))

Conclusão: $\exists X$(felino(X) $\wedge$ belo(X))

Solução – Usando regras

C_1:	$\exists X$(felino(X) $\wedge$ tigre(X))	Premissa
C_2:	$\forall X$(tigre(X) $\rightarrow$ belo(X))	Premissa
C_3:	felino(a) $\wedge$ tigre(a)	C_1 + eliminação existencial X=a
C_4:	tigre(a) $\rightarrow$ belo(a)	C_2 + eliminação universal X=a
C_5:	$\neg$tigre(a) $\vee$ belo(a)	C_4+ equivalência da condicional
C_6:	tigre(a)	C_3 + simplificação
C_7:	belo(a)	$C_5 + C_6$ + silogismo disjuntivo
C_8:	felino(a)	C_3 + simplificação
C_9:	felino(a) $\wedge$ belo(a)	$C_7 + C_8$ + conjunção
C_10:	$\exists X$ (felino(X) $\wedge$ belo(X))	C_9 + introdução existencial

(c) Nenhuma baleia é peixe. Moby Dick é baleia. Logo, Moby Dick não é peixe.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

C_1**:** $\forall X$(baleia(X) $\rightarrow$ $\neg$peixe(X))

C_2**:** baleia(mobydick)

Conclusão: $\neg$peixe(mobydick)

Solução – Usando regras

C_1:	$\forall X$(baleia(X) $\rightarrow$ $\neg$peixe(X))	Premissa
C_2:	baleia(mobydick)	Premissa
C_3:	baleia(mobydick) $\rightarrow$ $\neg$peixe(mobydick)	C_1 + eliminação universal X=mobydick
C_4:	$\neg$peixe(mobydick)	$C_2 + C_3$ + Modus Ponens

(d) Nenhum jogador é pobre. Alguns pobres são felizes. Logo, alguns não jogadores são felizes.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

C_1**:** $\forall X$(jogador(X) $\rightarrow$ $\neg$pobre(X)) $\equiv$ $\neg\exists X$(jogador(X) $\wedge$ podre(X))

C_2**:** $\exists X$(pobre(X) $\wedge$ feliz(X))

Conclusão: $\exists X$($\neg$jogador(X) $\wedge$ feliz(X))

Solução – Usando regras

C_1:	$\forall X$(jogador(X) $\rightarrow$ $\neg$pobre(X))	Premissa
C_2:	$\exists X$(pobre(X) $\wedge$ feliz(X))	Premissa
C_3:	jogador(a) $\rightarrow$ $\neg$pobre(a)	C_1 + eliminação universal X=a
C_4:	pobre(a) $\wedge$ feliz(a)	C_2 + eliminação existencial X=a
C_5:	pobre(a)	C_4 + simplificação
C_6:	$\neg$jogador(a)	$C_3 + C_5$ + modus tollens
C_7:	feliz(a)	C_4 + simplificação
C_8:	$\neg$jogador(a) $\wedge$ feliz(a)	$C_6 + C_7$ + conjunção
C_9:	$\exists X$($\neg$jogador(X) $\wedge$ feliz(X))	C_8 + introdução existencial

(e) Há uma pessoa em quem ninguém acredita. Logo, há uma pessoa que não acredita em si mesma. OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

C_1**:** $\exists Y \forall X$ ¬acredita(X,Y)

Conclusão: $\exists X$¬acredita(X,X)

Solução – Usando regras

C_1:	$\exists Y \forall X$ ¬acredita(X,Y)	Premissa
C_2:	$\forall X$ ¬acredita(X,a)	C_1 + eliminação existencial X=a
C_3:	¬acredita(a,a)	C_2 + eliminação universal X=a
C_4:	$\exists X$¬acredita(X,X)	C_3 + introdução do existencial

(f) Somente os répteis são cobras. Algumas cobras são perigosas. Assim, nem todo réptil deixa de ser perigoso.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

C_1**:** $\forall X$ (cobra(X) $\rightarrow$ reptil(X))

C_2**:** $\exists X$ (cobra(X) $\wedge$ perigoso(X))

Conclusão: ¬($\forall X$(reptil(X) $\rightarrow$ ¬perigoso(X))

Solução – Usando regras

C_1:	$\forall X$(cobra(X) $\rightarrow$ reptil(X))	Premissa
C_2:	$\exists X$(cobra(X) $\wedge$ perigoso(X))	Premissa
C_3:	cobra(a) $\rightarrow$ reptil(a)	C_1 + eliminação universal X=a
C_4:	cobra(a) $\wedge$ perigoso(a)	C_2 + eliminação existencial X=a
C_5:	cobra(a)	C_4 + simplificação
C_6:	reptil(a)	C_5 + C_3 + modus ponens
C_7:	perigoso(a)	C_4 + simplificação
C_8:	reptil(a) $\wedge$ perigoso(a)	$C_6 + C_7$ + conjunção
C_9:	¬(¬reptil(a) $\vee$ ¬perigoso(a))	C_8 + De Morgan
C_{10}:	¬(reptil(a) $\rightarrow$ ¬perigoso(a))	C_9 + equivalência condicional
C_{11}:	$\exists X$¬(reptil(X) $\rightarrow$ ¬perigoso(X))	C_{10} + introdução existencial
C_{12}:	¬$\forall X$(reptil(X) $\rightarrow$ ¬perigoso(X))	C_{11} + equivalência $\exists X \neg\alpha$ e $\neg\forall X \alpha$

(g) Ou alguns carros são velozes ou não há carro que não seja bom. Ora, não é verdade que todos os carros são bons. Logo, alguns carros são velozes.
OBS.: Considere o universo como o domínio, ou seja, todas as propriedades devem virar predicados.

C_1**:** $\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X)) $\vee$ ¬($\exists X$(carro(X) $\wedge$ ¬bom(X)))

C_2**:** ¬($\forall X$(carro(X) $\rightarrow$ bom(X)))

Conclusão: $\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X))

Solução – Usando regras

C_1:	$\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X)) $\vee$ ¬($\exists X$(carro(X) $\wedge$ ¬bom(X)))	Premissa
C_2:	¬($\forall X$(carro(X) $\rightarrow$ bom(X)))	Premissa
C_3:	(carro(a) $\wedge$ veloz(a)) $\vee$ ¬(carro(a) $\wedge$ ¬bom(a))	C_1 + eliminação existencial X=a
C_4:	¬(carro(a) $\rightarrow$ bom(a))	C_2 + eliminação universal X=a
C_5:	¬(¬carro(a) $\vee$ bom(a))	C_4 + equivalência da condicional
C_6:	(carro(a) $\wedge$ veloz(a)) $\vee$ (¬carro(a) $\vee$ bom(a))	C_3 + De Morgan
C_7:	carro(a) $\wedge$ veloz(a)	$C_5 + C_6$ + silogismo disjuntivo
C_8:	$\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X))	C_7 + introdução existencial

(h) Todos os franceses são amáveis. Só os generosos são amáveis. Para ser generoso é preciso ser honesto. Há empresários desonestos. Logo, nem todo empresário é francês.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

C_1**:** $\forall X$(frances(X) $\rightarrow$ amavel(X))

C_2**:** $\forall X$(amavel(X) $\rightarrow$ generoso(X))

C_3**:** $\forall X$(generoso(X) $\rightarrow$ honesto(X))

C_4**:** $\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$honesto(X))

Conclusão: $\neg\forall X$(empresario(X) $\rightarrow$ frances(X)) $\equiv$ $\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$frances(X))

Solução – Usando regras

C_1:	$\forall X$(frances(X) $\rightarrow$ amavel(X))	Premissa
C_2:	$\forall X$(amavel(X) $\rightarrow$ generoso(X))	Premissa
C_3:	$\forall X$(generoso(X) $\rightarrow$ honesto(X))	Premissa
C_4:	$\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$honesto(X))	Premissa
C_5:	frances(a) $\rightarrow$ amavel(a)	C_1 + eliminação universal X=a
C_6:	amavel(a) $\rightarrow$ generoso(a)	C_2 + eliminação universal X=a
C_7:	generoso(a) $\rightarrow$ honesto(a)	C_3 + eliminação universal X=a
C_8:	empresario(a) $\wedge$ $\neg$honesto(a)	C_4 + eliminação existencial X=a
C_9:	empresario(a)	C_8 + simplificação
C_{10}:	frances(a) $\rightarrow$ generoso(a)	$C_5 + C_6$ + regra da cadeia
C_{11}:	frances(a) $\rightarrow$ honesto(a)	$C_7 + C_{10}$ + regra da cadeia
C_{12}:	$\neg$honesto(a)	C_8 + simplificação
C_{13}:	$\neg$frances(a)	$C_{12} + C_{11}$ + modus tollens
C_{14}:	empresario(a) $\wedge$ $\neg$frances(a)	$C_9 + C_{13}$ + conjunção
C_{15}:	$\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$frances(X)	C_{14} + introdução existencial

9. Determine, em cada caso, o resultado da aplicação da substituição à fórmula:

	Fórmula	Substituição
a)	gosta(X, pai(Y)	$\theta = \{$mãe(Y)/X, maria/Y$\}$
b)	gosta(X, pai(Y))	$\theta = \{$mãe(maria)/X, maria/Y$\}$
c)	arvore(t(X, t(Y,Y)))	$\theta = \{$t(U,U)/X,U/Y$\}$
d)	p(X,Y,a)	$\theta = \{$Z/X, M/Y, K/T, a/N$\}$

(a) gosta(X,pai(Y))
$\theta = \{$mãe(Y)/X, maria/Y$\}$
gosta(mae(Y),pai(maria))

(b) gosta(X, pai(Y))
$\theta = \{$mãe(maria)/X, maria/Y$\}$
gosta(mae(maria),pai(maria))

(c) arvore(t(X, t(Y,Y)))
$\theta = \{$t(U,U)/X,U/Y$\}$
arvore(t(t(U,U)), t(U,U))

(d) p(X,Y,a)
$\theta = \{$Z/X, M/Y, K/T, a/N$\}$
p(Z,M,a)

10. Verifique se cada um dos conjuntos de expressões a seguir é unificável. Para aqueles unificáveis, escreva se a substituição é a unificadora mais geral.

    (a) {p(X,g(Y),a),p(Z,M,N),p(c,K,T),p(X1,X2,X3)}
    $\theta = \{c/X, c/Z, c/X1, g(Y)/Mg(Y)/k, g(Y)/X2, a/N, a/T, a/X3\}$
    (b) {q(a,b),q(M,Z),q(T,A),q(a,N)}
    $\theta = \{a/M, a/T, b/Z, b/A, b/N\}$
    (c) {q(g(M),K,L),q(a,b,c),q(N,b,Z)}
    Não unifica, pois não é possível substituir uma função (termo) por uma variável ou uma constante.
    (d) {p(f(f(g(a))),c,g(b)),p(X,Y,Z)}
    $\theta = \{f(f(g(a)))/X, c/Y, g(b)/Z\}$
    (e) {r(a,b,f(Z)),r(X,Y,Z),r(b,b,M)}
    Não unifica, pois não é possível substituir uma função (termo) por uma variável.
    (f) {s(Z1,Z2,f(f(Z4))),s(g(a),M,N,T),r(g(Z),c,d,K)}
    Não unifica, pois não é possível substituir uma função (termo) por uma constante, e os axiomas (r e s) são diferentes.

11. Converta para a Forma Normal Conjuntiva (FNC) as seguintes fórmulas:

    (a) $\forall X \forall Y(p(X) \vee q(Y,c) \vee \neg q(X,a) \vee s(f(W)))$
    Eliminando a variável livre W:
    $$\exists W(\forall X \forall Y(p(X) \vee q(Y,c) \vee \neg q(X,a) \vee s(f(W))))$$
    Skolemização:
    $$\forall X \forall Y(p(X) \vee q(Y,c) \vee \neg q(X,a) \vee s(f(b)))$$
    Remoção de quantificadores universais:
    $$p(X) \vee q(Y,c) \vee \neg q(X,a) \vee s(f(b))$$

    (b) $\exists X \forall Z(p(X) \rightarrow q(Z,c))$
    Equivalência da implicação:
    $$\exists X \forall Z(\neg p(X) \vee q(Z,c))$$
    Skolemização:
    $$\forall Z(\neg p(a) \vee q(Z,c))$$
    Remoção de quantificadores universais:
    $$\neg p(a) \vee q(Z,c)$$

    (c) $\forall W \exists Y \exists Z(p(Y) \vee q(W,W) \vee \neg s(Z))$
    Skolemização
    $$\forall W(p(f(W)) \vee q(W,W) \vee \neg s(g(W)))$$
    Remoção de quantificadores universais:
    $$p(f(W)) \vee q(W,W) \vee \neg s(g(W))$$

(d) $\forall X \exists Y (q(X,Y) \vee s(X)) \vee \forall W q(a,W)$
Skolemização:

$$\forall X (q(X, f(X)) \vee s(X)) \vee \forall W q(a, W)$$

Forma normal Prenex:

$$\forall X \forall W (q(X, f(X)) \vee s(X)) \vee q(a, W)$$

Remoção de quantificadores universais:

$$q(X, f(X)) \vee s(X) \vee q(a, W)$$

(e) $\exists X \exists Y ((p(X) \vee s(Y)) \rightarrow q(X,X)) \leftrightarrow \forall X q(X,W)$
Eliminação da variável livre W:

$$\exists W \exists X \exists Y ((p(X) \vee s(Y)) \rightarrow q(X,X)) \leftrightarrow \forall X q(X,W)$$

Renomear variável X:

$$\exists W \exists X \exists Y ((p(X) \vee s(Y)) \rightarrow q(X,X)) \leftrightarrow \forall Z q(Z,W)$$

Remoção da condicional:

$$\exists W \exists X \exists Y (\neg(p(X) \vee s(Y)) \vee q(X,X)) \leftrightarrow \forall Z q(Z,W)$$

Remoção da bicondicional:

$$\exists W \exists X \exists Y (\neg((\neg p(X) \wedge \neg s(Y)) \vee q(X,X)) \vee \forall Z q(Z,W)) \wedge (\neg(\forall Z q(Z,W)) \vee ((\neg p(X) \wedge \neg s(Y)) \vee q(X,X)))$$

Mover negação para o interior:

$$\exists W \exists X \exists Y (((p(X) \vee s(Y)) \wedge \neg q(X,X)) \vee \forall Z q(Z,W)) \wedge ((\exists Z \neg q(Z,W)) \vee ((\neg p(X) \wedge \neg s(Y)) \vee q(X,X)))$$

Skolemização:

$$(((p(a) \vee s(b)) \wedge \neg q(a,a)) \vee \forall Z q(Z,c)) \wedge ((\neg q(f(Z),c)) \vee ((\neg p(a) \wedge \neg s(b)) \vee q(a,a)))$$

Forma Normal Prenex:

$$\forall Z (((p(a) \vee s(b)) \wedge \neg q(a,a)) \vee q(Z,c)) \wedge ((\neg q(f(Z),c)) \vee ((\neg p(a) \wedge \neg s(b)) \vee q(a,a)))$$

Remoção de quantificadores universais:

$$(((p(a) \vee s(b)) \wedge \neg q(a,a)) \vee q(Z,c)) \wedge ((\neg q(f(Z),c)) \vee ((\neg p(a) \wedge \neg s(b)) \vee q(a,a))) \equiv$$
$$((p(a) \vee s(b) \vee q(Z,c)) \wedge (\neg q(a,a) \vee q(Z,c))) \wedge ((\neg q(f(Z),c)) \vee ((\neg p(a) \vee q(a,a)) \wedge (\neg s(b) \vee q(a,a)))) \equiv$$
$$((p(a) \vee s(b) \vee q(Z,c)) \wedge (\neg q(a,a) \vee q(Z,c))) \wedge ((\neg p(a) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c)) \wedge (\neg s(b) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c))) \equiv$$
$$(p(a) \vee s(b) \vee q(Z,c)) \wedge (\neg q(a,a) \vee q(Z,c)) \wedge (\neg p(a) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c)) \wedge (\neg s(b) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c))$$

Para ficar mais claro, seguem as 4 cláusulas dessa FNC:
C1:

$$p(a) \vee s(b) \vee q(Z,c)$$

C2:

$$\neg q(a,a) \vee q(Z,c)$$

C3:

$$\neg p(a) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c)$$

C4:

$$\neg s(b) \vee q(a,a) \vee \neg q(f(Z),c)$$

(f) $\exists W p(g(W)) \vee \forall X \exists Y q(f(X), Y) \vee s(g(Z))$
Eliminação da variável livre Z:

$$\exists Z \exists W p(g(W)) \vee \forall X \exists Y q(f(X), Y) \vee s(g(Z))$$

Skolemização:

$$p(g(a)) \vee \forall X q(f(X), h(X)) \vee s(g(b))$$

Forma Normal Prenex:

$$\forall X p(g(a)) \vee q(f(X), h(X)) \vee s(g(b))$$

Remoção de quantificadores universais:

$$p(g(a)) \vee q(f(X), h(X)) \vee s(g(b))$$

(g) $\exists X (p(X) \leftrightarrow q(X, d)) \rightarrow \forall X \exists W q(g(X), f(W))$
Renomear variável X:

$$\exists X (p(X) \leftrightarrow q(X, d)) \rightarrow \forall Y \exists W q(g(Y), f(W))$$

Remoção da bicondicional:

$$\exists X ((\neg p(X) \vee q(X, d)) \wedge (\neg q(X, d) \vee p(X))) \rightarrow \forall Y \exists W q(g(Y), f(W))$$

Remoção da condicional:

$$\exists X \neg((\neg p(X) \vee q(X, d)) \wedge (\neg q(X, d) \vee p(X))) \vee \forall Y \exists W q(g(Y), f(W))$$

Mover negação para o interior:

$$\exists X ((p(X) \wedge \neg q(X, d)) \vee (q(X, d) \wedge \neg p(X))) \vee \forall Y \exists W q(g(Y), f(W))$$

Skolemização:

$$((p(a) \wedge \neg q(a, d)) \vee (q(a, d) \wedge \neg p(a))) \vee \forall Y q(g(Y), f(h(Y)))$$

Forma Normal Prenex:

$$\forall Y ((p(a) \wedge \neg q(a, d)) \vee (q(a, d) \wedge \neg p(a))) \vee q(g(Y), f(h(Y)))$$

Remoção de quantificadores universais:

$$((p(a) \wedge \neg q(a, d)) \vee (q(a, d) \wedge \neg p(a))) \vee q(g(Y), f(h(Y))) \equiv$$

$$(((p(a) \wedge \neg q(a, d)) \vee q(a, d)) \wedge ((p(a) \wedge \neg q(a, d)) \vee \neg p(a))) \vee q(g(Y), f(h(Y))) \equiv$$

$$(((p(a) \vee q(a, d)) \wedge (\neg q(a, d) \vee q(a, d))) \wedge ((p(a) \vee \neg p(a)) \vee (\neg q(a, d) \vee \neg p(a)))) \vee q(g(Y), f(h(Y))) \equiv$$

$$((p(a) \vee q(a, d)) \wedge (\neg q(a, d) \vee \neg p(a))) \vee q(g(Y), f(h(Y))) \equiv$$

$$(p(a) \vee q(a, d) \vee q(g(Y), f(h(Y)))) \wedge (\neg p(a) \vee \neg q(a, d) \vee q(g(Y), f(h(Y))))$$

12. Usando inferência por resolução prove que a conclusão do exercício 7 decorre das premissas dadas.
Solução – Usando resolução
α_1: terrier(rex)
α_2: terrier(rex) $\rightarrow$ (late(rex) $\wedge$ morde(rex)) $\equiv$ $\neg$terrier(rex) $\vee$ (late(rex) $\vee$ morde(rex)) $\equiv$ ($\neg$terrier(rex) $\vee$ late(rex)) $\wedge$ ($\neg$terrier(rex) $\vee$ morde(rex))
α_3: $\forall X$ (terrier(X) $\rightarrow$ cachorro(X)) $\equiv$ $\neg$terrier(X) $\vee$ cachorro(X)
α_4: $\forall Y$ (cachorro(Y) $\wedge$ late(Y)) $\rightarrow$ barulhento(Y) $\equiv$ $\forall Y \neg$(cachorro(Y) $\wedge$ late(Y)) $\vee$ barulhento(Y) $\equiv$ $\neg$cachorro(Y) $\vee$ $\neg$late(Y) $\vee$ barulhento(Y)
Conclusão: $\exists Z$ (cachorro(Z) $\wedge$ barulhento(Z))
Negando a conclusão:
$\neg\exists Z$(cachorro(Z) $\wedge$ barulhento(Z)) $\equiv$ $\forall Z \neg$(cachorro(Z) $\wedge$ barulhento(Z)) $\equiv$
$\forall Z$($\neg$cachorro(Z) $\vee$ $\neg$barulhento(Z))

C_1:	terrier(rex)	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$\neg$terrier(rex) $\vee$ late(rex)	Cláusula da Premissa 2
C_3:	$\neg$terrier(rex) $\vee$ morde(rex)	Cláusula da Premissa 2
C_4	$\neg$terrier(X) $\vee$ cachorro(X)	Cláusula da Premissa 3
C_5:	$\neg$cachorro(Y) $\vee$ $\neg$late(Y) $\vee$ barulhento(Y)	Cláusula da Premissa 4
C_6:	$\neg$cachorro(Z) $\vee$ $\neg$barulhento(Z)	Cláusula da Negação da Conclusão
C_7:	late(rex)	$C_1 + C_2 + \theta = \{\}$
C_8:	cachorro(rex)	$C_1 + C_4 + \theta = \{\text{rex}/\text{X}\}$
C_9:	$\neg$barulhento(rex)	$C_6 + C_8 + \theta = \{\text{rex}/\text{Z}\}$
C_{10}:	$\neg$cachorro(rex) $\vee$ barulhento(rex)	$C_5 + C_7 + \theta = \{\text{rex}/\text{Y}\}$
C_{11}:	barulhento(rex)	$C_8 + C_{10} + \theta = \{\}$
C_{12}:	nil	$C_9 + C_{11} + \theta = \{\}$

13. Usando inferência por resolução prove a validade dos argumentos do exercício 8.

(a) Todos os poetas são sensíveis. Há poetas. Logo, há (pessoas) sensíveis.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

Premissa 1: $\forall X$(poeta(X) $\rightarrow$ sensivel(X))
FNC: $\neg poeta(X) \vee sensivel(X)$

Premissa 2: $\exists X$ poeta(X)
FNC: $poeta(a)$

Conclusão: $\exists X$ sensivel(X)
FNC: $\neg sensivel(Y)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg poeta(X) \vee sensivel(X)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$poeta(a)$	Cláusula da Premissa 2
C_3:	$\neg sensivel(Y)$	Cláusula da negação da conclusão
C_4:	$sensivel(a)$	$C_1 + C_2 + \theta = \{a/X\}$
C_5:	nil	$C_3 + C_4 + \theta = \{a/Y\}$

(b) Alguns felinos são tigres. Todos os tigres são belos. Logo, alguns felinos são belos.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

Premissa 1: $\exists X$(felino(X) $\wedge$ tigre(X))
FNC: felino(a) $\wedge$ tigre(a)

Cont.

Premissa 2: $\forall X$(tigre(X) $\rightarrow$ belo(X)) **FNC:** $\neg tigre(X) \vee belo(X)$
Conclusão: $\exists X$(felino(X) $\wedge$ belo(X))
FNC: $\neg felino(Y) \vee \neg belo(Y)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	felino(a)	Cláusula da Premissa 1
C_2:	tigre(a)	Cláusula da Premissa 1
C_3:	$\neg tigre(X) \vee belo(X)$	Cláusula da Premissa 2
C_4:	$\neg felino(Y) \vee \neg belo(Y)$	Cláusula da negação da conclusão
C_5:	$belo(a)$	$C_2 + C3 + \theta = \{a/X\}$
C_6:	$\neg belo(a)$	$C_1 + C_4 + \theta = \{a/Y\}$
C_7:	nil	$C_5 + C_6 + \theta = \{\}$

(c) Nenhuma baleia é peixe. Moby Dick é baleia. Logo, Moby Dick não é peixe.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

Premissa 1: $\forall X$(baleia(X) $\rightarrow$ $\neg$peixe(X))
FNC: $\neg baleia(X) \vee \neg peixe(X)$
Premissa 2: baleia(mobydick)
FNC: baleia(mobydick)
Conclusão: $\neg$peixe(mobydick)
FNC: peixe(mobydick) (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg baleia(X) \vee \neg peixe(X)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	baleia(mobydick)	Cláusula da Premissa 2
C_3:	peixe(mobydick)	Cláusula da negação da conclusão
C_4:	$\neg peixe(mobydick)$	$C_1 + C2 + \theta = \{mobydick/X\}$
C_6:	Nil	$C_3 + C_4 + \theta = \{\}$

(d) Nenhum jogador é pobre. Alguns pobres são felizes. Logo, alguns não jogadores são felizes.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

Premissa 1: $\forall X$(jogador(X) $\rightarrow$ $\neg$pobre(X)) $\equiv$ $\neg\exists X$(jogador(X) $\wedge$ podre(X))
FNC: $\neg jogador(X) \vee \neg pobre(X)$
Premissa 2: $\exists X$(pobre(X) $\wedge$ feliz(X))
FNC: pobre(a) $\wedge$ alegre(a)
Conclusão: $\exists X$($\neg$jogador(X) $\wedge$ feliz(X))
FNC: $\neg alegre(Y) \vee jogador(Y)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg jogador(X) \vee \neg pobre(X)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	pobre(a)	Cláusula da Premissa 2
C_3:	alegre(a)	Cláusula da Premissa 2
C_4:	$\neg alegre(Y) \vee jogador(Y)$	Cláusula da negação da conclusão
C_5:	$\neg jogador(a)$	$C_1 + C_2 + \theta = \{a/X\}$
C_6:	$\neg alegre(a)$	$C_4 + C_5 + \theta = \{a/Y\}$
C_7:	nil	$C_3 + C_6 + \theta = \{\}$

(e) Há uma pessoa em quem ninguém acredita. Logo, há uma pessoa que não acredita em si mesma. OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

Premissa 1: $\exists Y \forall X$ ¬acredita(X,Y)
FNC: $\neg acredita(X, a)$

Conclusão: $\exists X$¬acredita(X,X)
FNC: acredita(a,a) (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg acredita(X, a)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$acredita(a, a)$	Cláusula da negação da conclusão
C_3:	nil	$C_1 + C_2 + \theta = \{a/X\}$

(f) Somente os répteis são cobras. Algumas cobras são perigosas. Assim, nem todo réptil deixa de ser perigoso.
OBS.: Considere o domínio dos animais, ou seja, não precisa especificar o predicado "animal", por exemplo.

Premissa 1: $\forall X$ (cobra(X) $\rightarrow$ reptil(X))
FNC: $\neg cobra(X) \vee reptil(X)$

Premissa 2: $\exists X$ (cobra(X) $\wedge$ perigoso(X))
FNC: $cobra(a) \wedge perigoso(a)$

Conclusão: ¬($\forall X$(reptil(X) $\rightarrow$ ¬perigoso(X))
FNC: $\neg reptil(Y) \vee \neg perigoso(Y)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg cobra(X) \vee reptil(X)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$cobra(a)$	Cláusula da Premissa 2
C_3:	$perigoso(a)$	Cláusula da Premissa 2
C_4:	$\neg reptil(Y) \vee \neg perigoso(Y)$	Cláusula da negação da conclusão
C_5:	$\neg reptil(a)$	$C_3 + C_4 + \theta = \{a/Y\}$
C_6:	$\neg cobra(a)$	$C_1 + C_5 + \theta = \{a/X\}$
C_7:	nil	$C_2 + C_6 + \theta = \{\}$

(g) Ou alguns carros são velozes ou não há carro que não seja bom. Ora, não é verdade que todos os carros são bons. Logo, alguns carros são velozes.
OBS.: Considere o universo como o domínio, ou seja, todas as propriedades devem virar predicados.

Premissa 1: $\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X)) $\vee$ ¬($\exists X$(carro(X) $\wedge$ ¬bom(X)))
FNC: $(bom(X) \vee \neg carro(X) \vee carro(a)) \wedge (\neg carro(X) \vee veloz(a) \vee bom(X))$

Premissa 2: ¬($\forall X$(carro(X) $\rightarrow$ bom(X)))
FNC: $carro(a) \wedge \neg bom(a)$

Conclusão: $\exists X$(carro(X) $\wedge$ veloz(X))
FNC: $\neg caro(Z) \vee \neg veloz(Z)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

Cont.

C_1:	$bom(X) \vee \neg carro(X) \vee carro(a)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$\neg carro(Y) \vee veloz(a) \vee bom(Y)$	Cláusula da Premissa 1
C_3:	carro(a)	Cláusula da Premissa 2
C_4:	$\neg bom(a)$	Cláusula da Premissa 2
C_5:	$\neg carro(Z) \vee \neg veloz(Z)$	Cláusula da negação da conclusão
C_6:	$\neg carro(a) \vee carro(a)$	$C_1 + C_4 + \theta = \{a/X\}$
C_7:	$veloz(a) \vee bom(a)$	$C_2 + C_3 + \theta = \{a/Y\}$
C_8:	$veloz(a)$	$C_4 + C_7 + \theta = \{\}$
C_9:	$\neg veloz(a)$	$C_3 + C_5 + \theta = \{a/Z\}$
C_{10}:	nil	$C_8 + C_9 + \theta = \{\}$

(h) Todos os franceses são amáveis. Só os generosos são amáveis. Para ser generoso é preciso ser honesto. Há empresários desonestos. Logo, nem todo empresário é francês.
OBS.: Considere o domínio dos seres humanos, ou seja, não precisa especificar o predicado "ser-humano" ou "pessoa", por exemplo.

Premissa 1: $\forall X$(frances(X) $\rightarrow$ amavel(X))
FNC: $\neg frances(X) \vee amavel(X)$

Premissa 2: $\forall X$(amavel(X) $\rightarrow$ generoso(X))
FNC: $\neg amavel(Y) \vee generoso(Y)$

Premissa 3: $\forall X$(generoso(X) $\rightarrow$ honesto(X))
FNC: $\neg generoso(Z) \vee honesto(Z)$

Premissa 4: $\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$honesto(X))
FNC: $empresario(a) \wedge \neg honesto(a)$

Conclusão: $\neg\forall X$(empresario(X) $\rightarrow$ frances(X)) $\equiv$ $\exists X$(empresario(X) $\wedge$ $\neg$frances(X))
FNC: $\neg empresario(W) \vee frances(W)$ (negação da conclusão)

Solução – Usando resolução

C_1:	$\neg frances(X) \vee amavel(X)$	Cláusula da Premissa 1
C_2:	$\neg amavel(Y) \vee generoso(Y)$	Cláusula da Premissa 2
C_3:	$\neg generoso(Z) \vee honesto(Z)$	Cláusula da Premissa 3
C_4:	$empresario(a)$	Cláusula da Premissa 4
C_5:	$\neg honesto(a)$	Cláusula da Premissa 4
C_6:	$\neg empresario(W) \vee frances(W)$	Cláusula da negação da conclusão
C_7:	$\neg generoso(a)$	$C_3 + C_5 + \theta = \{a/Z\}$
C_8:	$\neg amavel(a)$	$C_2 + C_7 + \theta = \{a/Y\}$
C_9:	$\neg frances(a)$	$C_1 + C_8 + \theta = \{a/X\}$
C_{10}:	$\neg industrial(a)$	$C_6 + C_9 + \theta = \{a/W\}$
C_{11}	nil	$C_4 + C_{10} + \theta = \{\}$

The End.