TP01

November 5, 2024

[59]:
```python
# Inclusão de bibliotecas necessárias

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from IPython.display import display, HTML
import math
```

1 Métodos de Runge-Kutta

Nesse trabalho, vamos implementar os **Métodos de Runge-Kutta** de 2 e 4 estágios para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + 2\cos t, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A solução analítica desse problema pode ser obtida através do *método do fator integrante*: $y = \sin t + \cos t$.

[60]:
```python
# f(x, y)
def f1(a, b):
    return -b + 2*np.cos(a)

# Solução analítica
def sol_analitica_1(t):
    return np.sin(t) + np.cos(t)
```

[61]:
```python
# Constantes do problema

lista_h = 2**(np.linspace(0,-8,9))

y0 = 1
t0 = 0
tf = 10
```

1.1 Ordem 2

Inicialmente, vamos implementar os métodos de ordem 2. Especificamente, vamos implementar o **Método de Heun** ($b_2 = \frac{1}{2}$) e o **Método do ponto médio** ($b_2 = 1$).

[62]:
```python
# Variantes dos métodos de Runge-Kutta utilizados

def heun(t, y, h):

    k1 = f1(t, y)
    k2 = f1(t + h, y + h*k1)

    return y + (h/2)*(k1 + k2)

def ponto_medio(t, y, h):

    k1 = f1(t, y)
    k2 = f1(t + h/2, y + h/2 * k1)

    return y + h*k2
```

Avaliação dos métodos em diferentes tamanhos de passo:

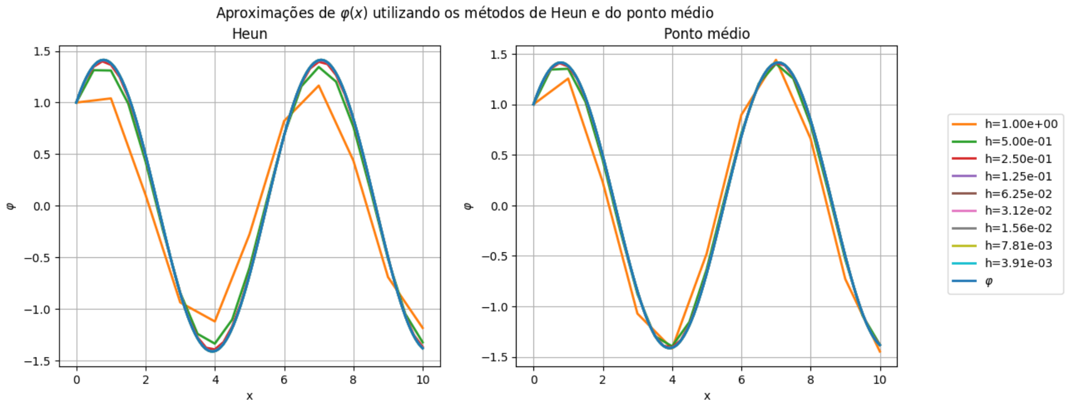
[63]:
```python
lista_t = []
lista_y = {'heun': [], 'ponto_medio': [], 'RK4': []}
erros_abs = {'heun': [], 'ponto_medio': [], 'RK4': []}

for h in lista_h:
    N = int((tf - t0)/h)

    t = np.linspace(t0, tf, N + 1)

    y_heun = np.zeros_like(t)
    y_heun[0] = y0

    y_ponto_medio = np.zeros_like(t)
    y_ponto_medio[0] = y0

    for n in range(N):
        y_heun[n+1] = heun(t[n], y_heun[n], h)
        y_ponto_medio[n+1] = ponto_medio(t[n], y_ponto_medio[n], h)

    lista_t.append(t)

    lista_y['heun'].append(y_heun)
    lista_y['ponto_medio'].append(y_ponto_medio)

    erros_abs['heun'].append(abs(sol_analitica_1(t) - y_heun))
```

```
    erros_abs['ponto_medio'].append(abs(sol_analitica_1(t) - y_ponto_medio))
```

Plotando os gráficos:

[64]:
```
x1 = np.linspace(t0, tf, 100)
y1 = sol_analitica_1(x1)

fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(13, 5))
fig.suptitle(r'Aproximações de $\varphi(x)$ utilizando os métodos de Heun e do␣
↪ponto médio')

# Figura 1:
axs[0].set_title('Heun')
axs[0].set_ylabel(r'$\varphi$')
axs[0].set_xlabel('x')
axs[0].grid(True)

for j in range(len(lista_h)):
    axs[0].plot(lista_t[j], lista_y['heun'][j], label='h='+str(lista_h[j]),␣
↪color='C'+str(j+1), linestyle='-', linewidth=2)

axs[0].plot(x1, y1, label=r'$\varphi$', color='C0', linestyle='-', linewidth=2)
# axs[0].legend()

# Figura 2:
axs[1].set_title('Ponto médio')
axs[1].set_ylabel(r'$\varphi$')
axs[1].set_xlabel('x')
axs[1].grid(True)

for j in range(len(lista_h)):
    axs[1].plot(lista_t[j], lista_y['ponto_medio'][j], label='h='+␣
↪f"{lista_h[j]:.2e}", color='C'+str(j+1), linestyle='-', linewidth=2)

axs[1].plot(x1, y1, label=r'$\varphi$', color='C0', linestyle='-', linewidth=2)
# axs[1].legend()


legend_ax = fig.add_axes([0.9, 0.3, 0.2, 0.4])  # Position to the right of the␣
↪main plot
legend_ax.axis("off")  # Turn off axes for legend area
legend_ax.legend(*axs[1].get_legend_handles_labels(), loc="center")  # Copy␣
↪legend from main plot
```

[64]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f05dbcb1c00>

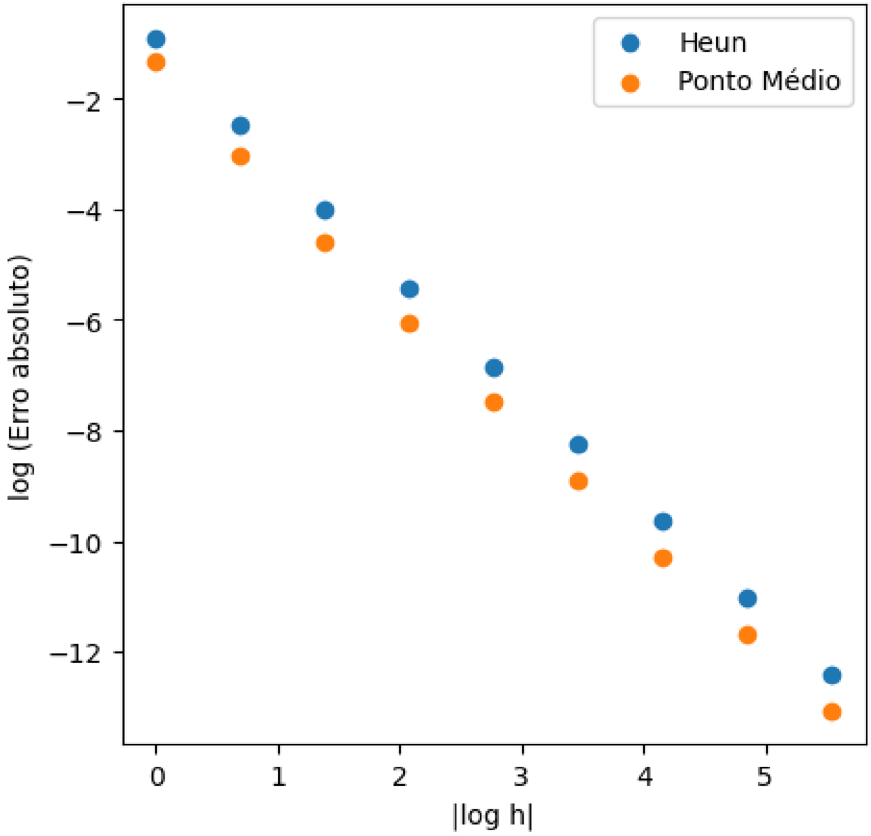


Calculando os erros de truncamento global e a ordem de erro dos métodos:

[66]:
```
# Calculando o erro de truncamento global
truncamento_global = {'heun': [], 'ponto_medio': [], 'RK4': []}

truncamento_global['heun'] = np.array([max(erros_abs['heun'][i]) for i in␣
 ↪range(len(lista_h))])
truncamento_global['ponto_medio'] = np.array([max(erros_abs['ponto_medio'][i])␣
 ↪for i in range(len(lista_h))])

# Plotando o log do erro versus o valor absoluto de log h
fig, ax_plot = plt.subplots(figsize=(5,5))

ax_plot.scatter(abs(np.log(lista_h)), np.log(truncamento_global['heun']),␣
 ↪label='Heun')
ax_plot.scatter(abs(np.log(lista_h)), np.
 ↪log(truncamento_global['ponto_medio']), label='Ponto Médio')

ax_plot.set_xlabel('|log h|')
ax_plot.set_ylabel('log (Erro absoluto)')
ax_plot.legend()

# Ordem numérica dos erros
ordem_heun = -np.polyfit(abs(np.log(lista_h)), np.
 ↪log(truncamento_global['heun']), 1)[0]
ordem_ponto_medio = -np.polyfit(abs(np.log(lista_h)), np.
 ↪log(truncamento_global['ponto_medio']), 1)[0]

print("Ordem numérica encontrada no método de Heun: %.2f" % ordem_heun)
print("Ordem numérica encontrada no método do Ponto médio: %.2f" %␣
 ↪ordem_ponto_medio)
```

```
Ordem numérica encontrada no método de Heun: 2.06
```

```
Ordem numérica encontrada no método do Ponto médio: 2.09
```



O método de Heun e o método do Ponto médio atingiram ordem numérica 2, valor esperado, uma vez que ambos são métodos de Runge-Kutta de ordem 2.

1.2 Ordem superior

Agora, estudaremos um método de Runge-Kutta de ordem superior. Mais especificamente, vamos estudar o **RK4**, de 4 estágios. Continuaremos utilizando o mesmo PVI.

[67]:
```
# RK4

def RK4(t, y, h):

    k1 = f1(t, y)
    k2 = f1(t + h/2, y + h*k1/2)
    k3 = f1(t + h/2, y + h*k2/2)
    k4 = f1(t + h, y + h*k3)

    return y + h/6 * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
```

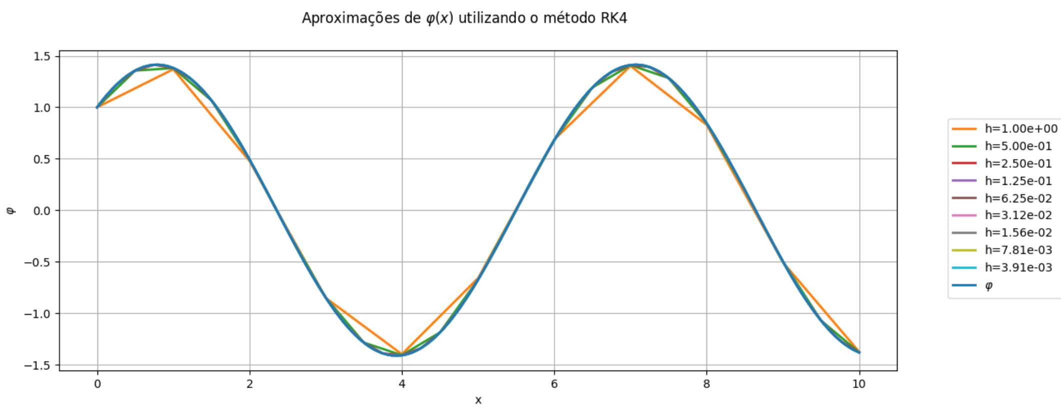
Avaliação do método em diferentes tamanhos de passo:

[68]:
```
for h in lista_h:
    N = int((tf - t0)/h)

    t = np.linspace(t0, tf, N + 1)

    y_RK4 = np.zeros_like(t)
    y_RK4[0] = y0

    for n in range(N):
        y_RK4[n+1] = RK4(t[n], y_RK4[n], h)

    lista_y['RK4'].append(y_RK4)
    erros_abs['RK4'].append(abs(sol_analitica_1(t) - y_RK4))
```

Plotando os gráficos

[69]:
```
x1 = np.linspace(t0, tf, 100)
y1 = sol_analitica_1(x1)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(13, 5))
fig.suptitle(r'Aproximações de $\varphi(x)$ utilizando o método RK4')

# Figura 1:
ax.set_ylabel(r'$\varphi$')
ax.set_xlabel('x')
ax.grid(True)

for j in range(len(lista_h)):
    ax.plot(lista_t[j], lista_y['RK4'][j], label='h='+str(lista_h[j]),␣
 ↪color='C'+str(j+1), linestyle='-', linewidth=2)

ax.plot(x1, y1, label=r'$\varphi$', color='C0', linestyle='-', linewidth=2)

legend_ax = fig.add_axes([0.9, 0.3, 0.2, 0.4])  # Position to the right of the␣
 ↪main plot
legend_ax.axis("off")  # Turn off axes for legend area
legend_ax.legend(*axs[1].get_legend_handles_labels(), loc="center")  # Copy␣
 ↪legend from main plot
```

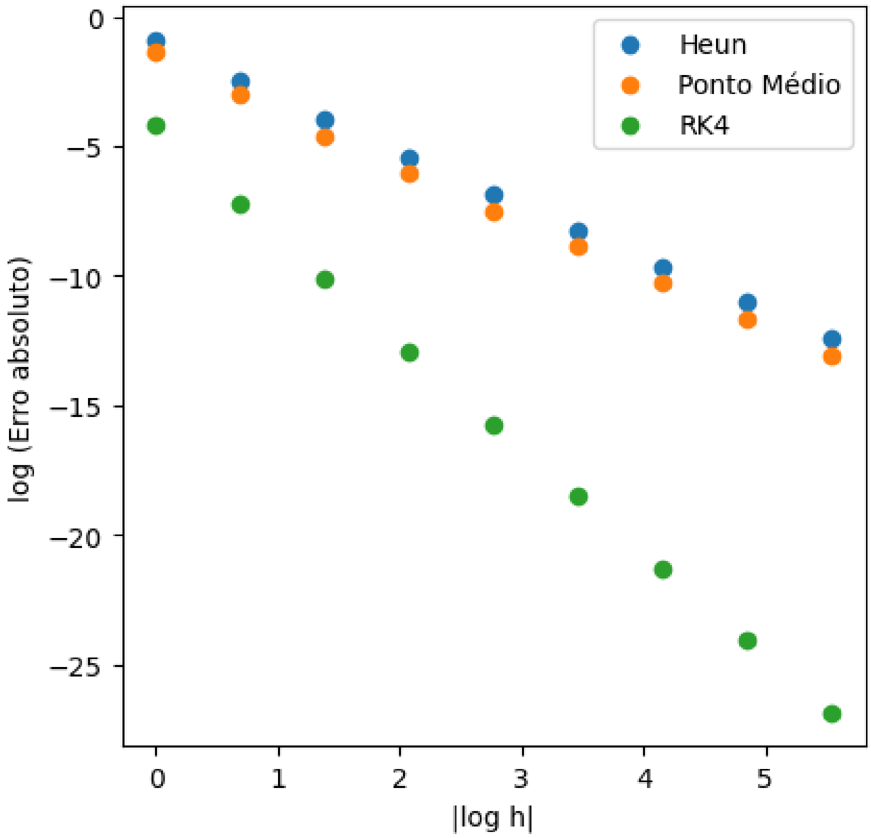
[69]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f05db246d40>
```



Calculando o erro de truncamento global e a ordem de erro do método:

[70]:
```python
truncamento_global['RK4'] = np.array([max(erros_abs['RK4'][i]) for i in range(len(lista_h))])

fig, ax_plot = plt.subplots(figsize=(5,5))

ax_plot.scatter(abs(np.log(lista_h)), np.log(truncamento_global['heun']), label='Heun')
ax_plot.scatter(abs(np.log(lista_h)), np.log(truncamento_global['ponto_medio']), label='Ponto Médio')
ax_plot.scatter(abs(np.log(lista_h)), np.log(truncamento_global['RK4']), label='RK4')


ax_plot.set_xlabel('|log h|')
ax_plot.set_ylabel('log (Erro absoluto)')
ax_plot.legend()


ordem_RK4 = -np.polyfit(abs(np.log(lista_h)), np.log(truncamento_global['RK4']), 1)[0]

print("Ordem numérica encontrada no método RK4: %.2f" % ordem_RK4)
```

```
Ordem numérica encontrada no método RK4: 4.07
```



A ordem de erro encontrada para o método RK4 foi de 4, como esperado.

2 Métodos implícitos de passo único

A partir de agora, implementaremos os **métodos implícitos de passo único**. Mais especificamente, o método *theta*, para $\theta \in [0, 1]$. Mais especificamente, vamos implementar o **método do Euler regressivo** ($\theta = 1$), e o **método do Trapézio** ($\theta = \frac{1}{2}$)

2.1 Implementação em problemas lineares

Para a primeira implementação, vamos usar o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = te^{-t} - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

no intervalo $[0, 10]$, e com $h = 0.2$, 0.1 e 0.05.

Sua solução analítica é

$$y = e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)$$

O passo do euler regressivo correspondente a esse PVI será:

$$y_{i+1} = \frac{y_i + ht_{i+1}e^{-t_{i+1}}}{h+1}$$

O passo do método do trapézio correspondente a esse PVI será:

$$y_{i+1} = \frac{y_i + \frac{h}{2}\left[t_i e^{-t_i} - y_i + t_{i+1}e^{-t_{i+1}}\right]}{\frac{h}{2}+1}$$

[71]:
```
# Sol. analítica
def sol_analitica_2(t):

    return (math.e ** (-t)) * (t*t/2 + 1)

# Euler regressivo
def euler_regressivo(t, y, h):

    t_novo = t + h
    y_novo = (y + h * t_novo * (math.e ** (-t_novo)))/(h+1)

    return y_novo

# Trapezio
def trapezio(t, y, h):

    t_novo = t + h
    y_novo = (y + h/2 * ((math.e ** (-t)) * (t) - y + (math.e ** (-t_novo)) *
 ↪(t_novo)))/(h/2 + 1)
    return y_novo
```

Avaliação dos métodos em diferentes valores de h:

[72]:
```
lista_h = [0.2, 0.1, 0.05]
lista_t = []
lista_y = {'euler_regressivo': [], 'trapezio': []}
erros_abs = {'euler_regressivo': [], 'trapezio': []}

for h in lista_h:
    N = int((tf - t0)/h)

    t = np.linspace(t0, tf, N + 1)

    y_euler_regressivo = np.zeros_like(t)
    y_euler_regressivo[0] = y0

    y_trapezio = np.zeros_like(t)
    y_trapezio[0] = y0
```

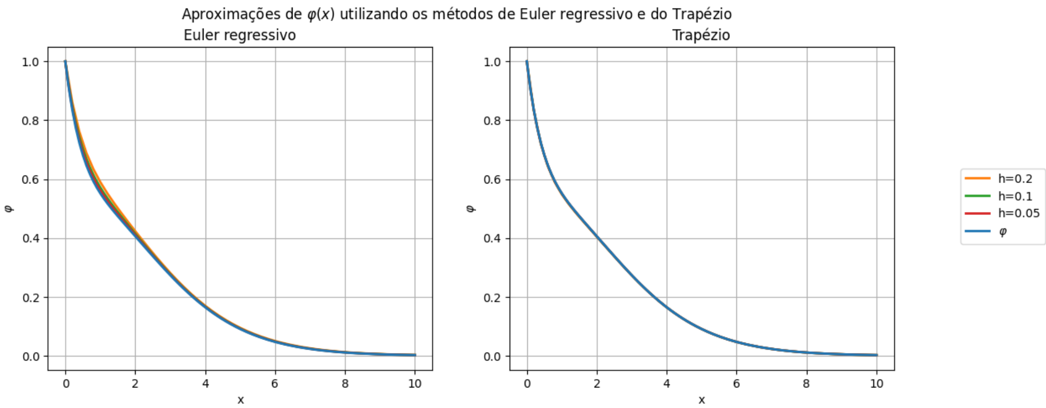
```
    for n in range(N):
        y_euler_regressivo[n+1] = euler_regressivo(t[n], y_euler_regressivo[n],␣
 ↪h)
        y_trapezio[n+1] = trapezio(t[n], y_trapezio[n], h)

    lista_t.append(t)

    lista_y['euler_regressivo'].append(y_euler_regressivo)
    lista_y['trapezio'].append(y_trapezio)

    erros_abs['euler_regressivo'].append(abs(sol_analitica_2(t) -␣
 ↪y_euler_regressivo))
    erros_abs['trapezio'].append(abs(sol_analitica_2(t) - y_trapezio))
```

Plotando os gráficos:

[73]:
```
x1 = np.linspace(t0, tf, 100)
y1 = sol_analitica_2(x1)

fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(13, 5))
fig.suptitle(r'Aproximações de $\varphi(x)$ utilizando os métodos de Euler␣
 ↪regressivo e do Trapézio')

# Figura 1:
axs[0].set_title('Euler regressivo')
axs[0].set_ylabel(r'$\varphi$')
axs[0].set_xlabel('x')
axs[0].grid(True)

for j in range(len(lista_h)):
    axs[0].plot(lista_t[j], lista_y['euler_regressivo'][j],␣
 ↪label='h='+str(lista_h[j]), color='C'+str(j+1), linestyle='-', linewidth=2)

axs[0].plot(x1, y1, label=r'$\varphi$', color='C0', linestyle='-', linewidth=2)
# axs[0].legend()

# Figura 2:
axs[1].set_title('Trapézio')
axs[1].set_ylabel(r'$\varphi$')
axs[1].set_xlabel('x')
axs[1].grid(True)

for j in range(len(lista_h)):
    axs[1].plot(lista_t[j], lista_y['trapezio'][j], label='h='+␣
 ↪str(lista_h[j]), color='C'+str(j+1), linestyle='-', linewidth=2)
```

```
axs[1].plot(x1, y1, label=r'$\varphi$', color='C0', linestyle='-', linewidth=2)
# axs[1].legend()


legend_ax = fig.add_axes([0.9, 0.3, 0.2, 0.4])  # Position to the right of the␣
↪main plot
legend_ax.axis("off")  # Turn off axes for legend area
legend_ax.legend(*axs[1].get_legend_handles_labels(), loc="center")  # Copy␣
↪legend from main plot
```

[73]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f05dbe34f40>



Calculando os erros de truncamento global:

[74]:
```
# Tabela com os erros de truncamento global para os valores em lista_h

pd.options.display.float_format = '{:.3e}'.format

d = {}

d['h'] = np.array2string(np.array(lista_h), separator=',',␣
↪formatter={'float_kind':lambda x: "%.2f" % x}, max_line_width=1000)[1:-1].
↪split(",")

d['Euler regressivo'] = np.array([max(erros_abs['euler_regressivo'][i]) for i␣
↪in range(len(lista_h))])
d['Trapezio'] = np.array([max(erros_abs['trapezio'][i]) for i in␣
↪range(len(lista_h))])

df = pd.DataFrame(data=d)

html = f"""
```

```
<div style="text-align: center;">
    <h3>Erro de Truncamento Global</h3>
    <div style="display: inline-block;">
        {df.to_html(index=False, border=1)}
    </div>
</div>
<style>
    .dataframe {{
        margin-left: auto;
        margin-right: auto;
        width: auto;  /* Adjust width to fit content */
    }}
    .dataframe th, .dataframe td {{
        text-align: center;  /* Center the column headings and data cells */
    }}
</style>
"""
display(HTML(html))
```

```
<IPython.core.display.HTML object>
```

2.2 Implementação em problemas não-lineares:

Nessa seção, implementaremos métodos implícitos de passo único para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Esse PVI possui solução analítica $y = \frac{1}{x}$