AMOSTRAGEM

Unidade 5

Estimação de Proporções Sob AAS

Características Qualitativas e Proporções

Um caso especial de variável de pesquisa y é o de variáveis indicadoras de eventos ou atributos de interesse.

Tais variáveis tomam valor 1 se as unidades possuem determinado atributo ou pertencem a determinado grupo, e 0 caso contrário:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \text{i possui atributo} \\ 0 & \text{se} \quad \text{i não possui atributo} \end{cases} \quad \text{para qualquer i em U.}$$

Características Qualitativas e Proporções

$T = \sum_{i \in U} y_i$ é o número de unidades que possuem o atributo de interesse **na população** ➔ **total populacional**.

$t = \sum_{i \in s} y_i$ é o número correspondente **na amostra** ➔ **total amostral**.

P=T/N é a **proporção** de unidades com o atributo na população ➔ **média populacional**.

p=t/n é a **proporção** de unidades com o atributo na amostra ➔ **média amostral**.

Características Qualitativas e Proporções

Como $y_i = 0$ ou 1, temos $\sum_{i=1}^{N} y_i^2 = T$ e $\sum_{i \in s} y_i^2 = t$.

Segue-se então que

$$S_y^2 = \frac{N}{N-1} P(1-P) \cong P(1-P)$$

$$s_y^2 = \frac{n}{n-1} p(1-p).$$

Resumo dos Resultados para Proporções sob AAS

$$E_{AAS}(p) = P \ .$$

$$E_{AAS}\left[\frac{n}{n-1}p(1-p)\right] = \frac{N}{N-1}P(1-P) \ .$$

$$V_{AAS}(p) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{P(1-P)}{n} \approx \frac{P(1-P)}{n} \text{ se n/N é pequena.}$$

$$\hat{V}_{AAS}(p) = \left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{p(1-p)}{n-1} \approx \frac{p(1-p)}{n-1} \approx \frac{p(1-p)}{n}$$

para n grande e n/N pequena.

Resumo dos Resultados para Proporções sob AAS

Pelo Teorema Central do Limite, para n grande:

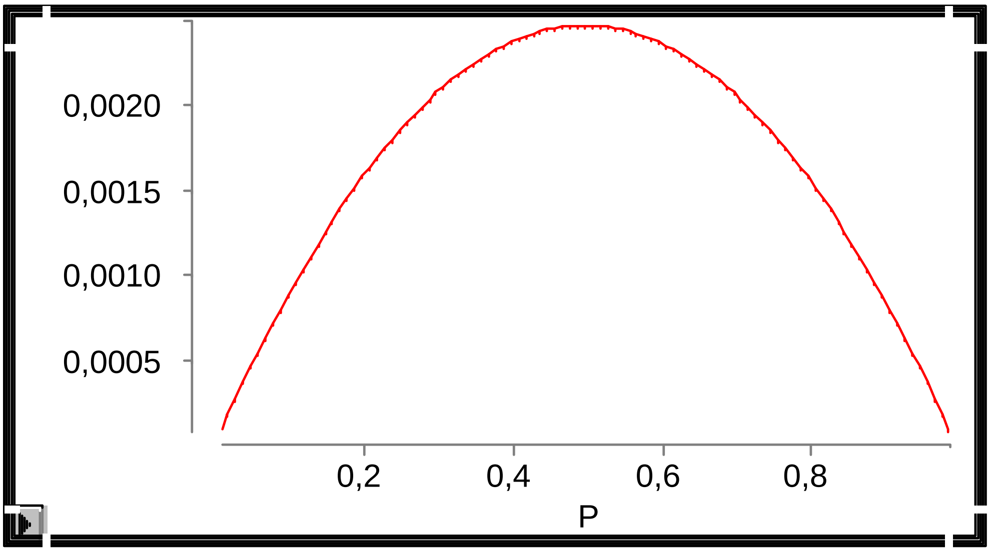
$$z = \frac{p-P}{\sqrt{p(1-p)/n}} \approx N(0,1) \ .$$

Logo um Intervalo de Confiança de 95% para P é dado por:

$$p \mp 1.96\sqrt{p(1-p)/n}$$

com intervalos semelhantes para outros níveis de confiança.

Figura 5.1: Variância da Proporção Amostral



Tamanho de Amostra para Estimar Proporções

Lembrando que, sob AAS

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{d}{z_{\alpha/2}} \right)^2 \frac{1}{S_y^2} + \frac{1}{N} \cong \left(\frac{d}{z_{\alpha/2}} \right)^2 \frac{1}{S_y^2}$$

onde d é a precisão desejada, ou margem de erro aceitável.

Como $S_y^2 \approx P(1-P)$ então $n = \dfrac{z_{\alpha/2}^2 P(1-P)}{d^2}$.

Tamanho de Amostra para Estimar Proporções

Quando P for completamente desconhecido, usamos P=0,5 porque esse é o valor que maximiza $V_{AAS}(p)$.

Assim, o tamanho máximo da amostra AAS necessária para estimar qualquer proporção P com precisão d ao nível $1-\alpha$ é:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4d^2}.$$

Como geralmente $\alpha=0,05$ e $z_{\alpha/2}=1,96$, segue-se que

$$n \cong \frac{1}{d^2}.$$

Exemplo 5.1 - Tamanho de Amostra para Proporções

Para estimar P com erro máximo de 3% (d=0,03) a 95% de confiança, o tamanho da amostra fica:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4d^2} = \frac{1{,}96^2}{4 \times 0{,}03^2} \Rightarrow n = 1.067$$

ou então

$$n = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{0{,}03^2} = 1.112$$

Precisão Relativa para Estimadores de Proporções

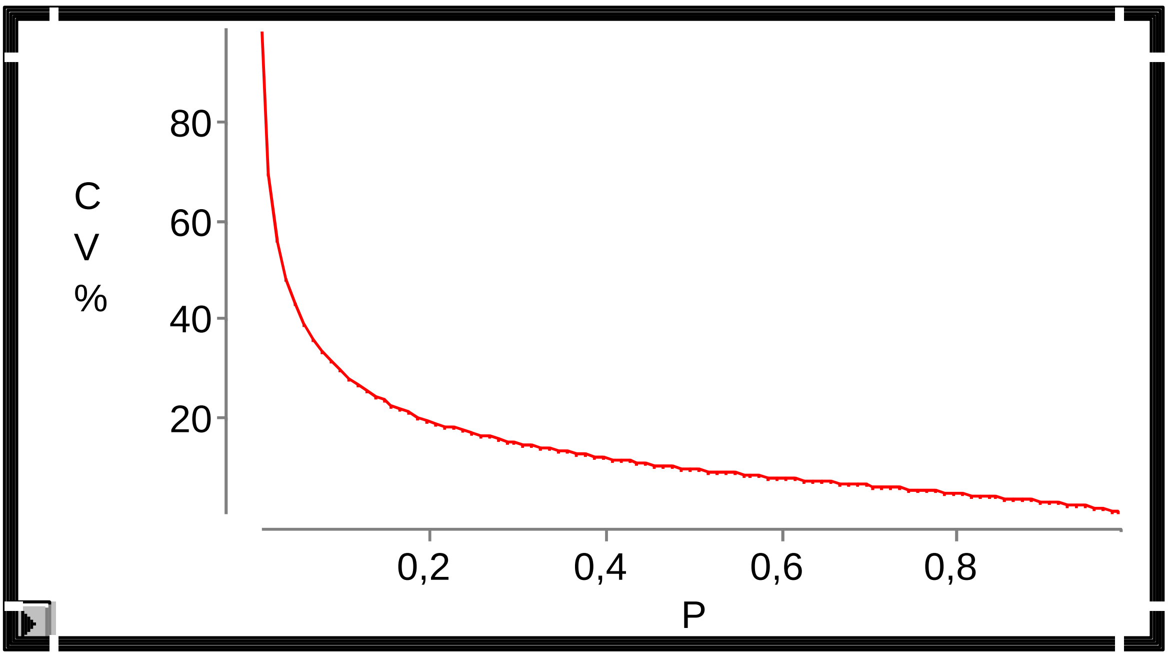
O estimador de proporções tem CV igual a

$$CV_{AAS}(p) = \frac{1}{P}\sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{P(1-P)}{n}} \approx \sqrt{\frac{1-P}{nP}}$$

Portanto, a precisão relativa do estimador p é uma função monótona do valor de P, decrescendo à medida que P se aproxima de 1. Veja Figura 5.2.

Conseqüência: é mais difícil estimar proporções pequenas com alta **precisão relativa**.

Figura 5.2: CV da Proporção Amostral (em %)



Tamanho de Amostra para Precisão Relativa Fixada

Algumas vezes, precisamos calcular o tamanho de amostra necessário para garantir estimativas com uma **precisão relativa** especificada.

Seja d_r a precisão relativa requerida. Portanto, podemos usar:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{d_r^2} \times \frac{1 - P_{min}}{P_{min}}$$

onde P_{min} é a menor proporção cuja precisão relativa deve ser igual ou maior que d_r .

Exemplo 5.2 - Tamanho de Amostra para Precisão Relativa Fixada

Para estimar proporções P iguais ou maiores que 1% com erro relativo máximo de 5% (d_r=0,05) a 95% de confiança, o tamanho da amostra fica:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{d_r^2} \times \frac{1 - P_{min}}{P_{min}} = \frac{1{,}96^2}{0{,}05^2} \times \frac{1 - 0{,}01}{0{,}01} \Rightarrow n \cong 152.128$$