Mudança de variáveis na integral dupla

CONCURSO PÚBLICO – EDITAL 27/2017

Leandro Resende Mundim

Bacharel em Matemática Industrial - UFG
Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional - USP

Conteúdo programado

1. Observações preliminares
2. Mudança de variável
3. Jacobiano
4. Teorema
5. Considerações

Observações preliminares

Mudança de variável na integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du$$

$$x = g(u) \qquad dx = g'(u)du$$

$$g(c) = a \qquad g(d) = b$$

Teorema do Valor Médio (TVM)

Considere uma função f satisfazendo as condições:

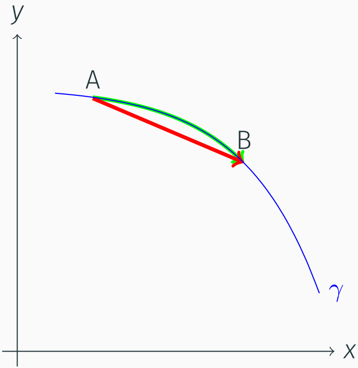
1. f é contínua no intervalo fechado [a, b];
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existe um número c em (a, b), tal que $f'(c) = f$.

Geometricamente, o **TVM** diz que se f é uma função “suave” que liga os pontos A = (a, f(a)) e B = (b, f(b)), existe um ponto c, entre a e b, tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela à reta secante que passa por A e por B.

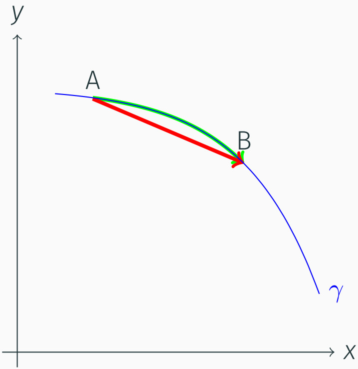
Curvas

Uma curva γ é uma curva no plano, onde para cada par ordenado (x, y) temos um único valor associado. Ou seja, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.



Esse conceito, será usado ainda nesta aula para aproximar as áreas de dois domínios diferentes.

Considere a curva γ.



$$\text{Arco } AB \approx \overrightarrow{AB} = (x(a) - x(b), y(a) - y(b))$$
$$= (x'(t_0)(a-b), x'(t_1)(a-b))$$
$$= \gamma'(t)(a-b).$$

Produto vetorial

$\vec{u}, \vec{v}$ são vetores no $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo este determinante, chegamos na expressão formal do produto vetorial.

$\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

Além disso, temos que o módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo formado por $\vec{u}, \vec{v}$.

$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}||\text{sen}(\theta)$.

Produto vetorial no $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Mudança de variável

Mudança de variáveis

A mudança de variáveis é extremamente importante, pois pode simplificar um domínio complexo para um domínio mais simples.

A função abaixo, responsável pela mudança de domínio, apresenta a mudança de um domínio complexo para um domínio retangular:

$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$.

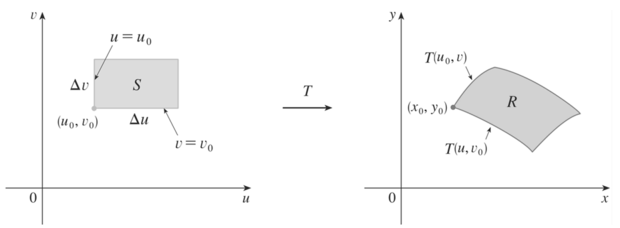


Figura 1: Figura extraída do livro de James Stewart, Cálculo, 6 edição.

Jacobiano

No quadro, usando as observações preliminares, vamos demonstrar que a área do retângulo multiplicado por um fator local de correção é aproximadamente a área do pseudo-retângulo desenhado abaixo.

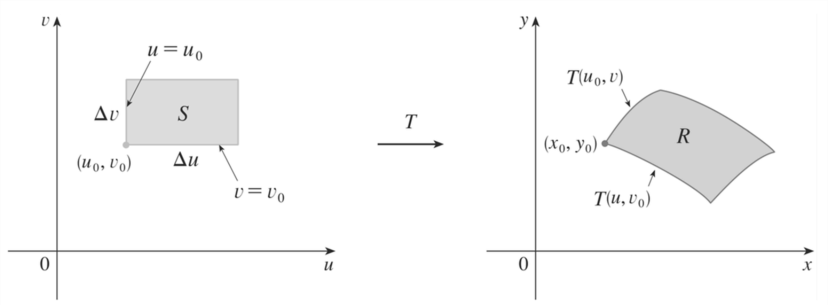


Figura 2: Figura extraída do livro de James Stewart, Cálculo, 6 edição.

Jacobiano

Definicão

*O **jacobiano**[1] da transformação T dada por x = g(u, v) e y = (u, v) é dado por:*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

[1] Para fixar o conteúdo é recomendado refazer o exemplo 1 do livro de James Stewart, Cálculo, 6 edição, início página 962.

Teorema

Teorema de mudança de variáveis em uma integral dupla

Suponha que ***T*** *seja uma transformação* C^1 *cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy. Suponha que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos da da fronteira de S. Então,*

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int\int_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

Exemplo numérico usando o teorema

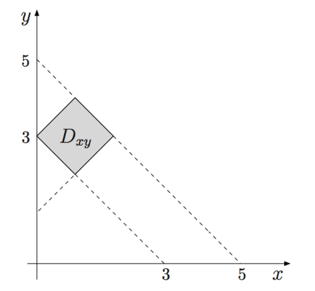
Exemplo: Calcule, utilizando uma mudança de variáveis conveniente, a integral $\int\int_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$, sendo D_{xy} a região limitada pelas retas $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$.

Exemplo numérico usando o teorema

Exemplo: Calcule, utilizando uma mudança de variáveis conveniente, a integral $\int\int_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$, sendo D_{xy} a região limitada pelas retas $y+x=3$, $y+x=5$, $y-x=1$ e $y-x=3$.

Resolução:

Considere o esboço de D_{xy}.



Exemplo (continuação).

Vamos substituir $u = x + y$ e $v = y - x$. Isso nos dá, fazendo a soma e a diferença das variáveis:

$x = \frac{u-v}{2}$ e $y = \frac{u+v}{2}$

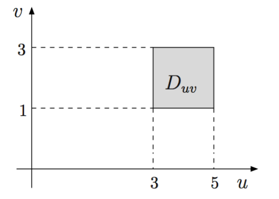
Logo, temos que o **jacobiano** é:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Como a região D_{xy} é limitada pelas retas $y + x = 3$, $y + x = 5$, $y - x = 1$ e $y - x = 3$. Temos que a região D_{uv} é limitada por $u = 3$, $u = 5$, $v = 1$ e $v = 3$.

Exemplo (continuação).

O esboço da região D_{uv}.



Usando o Teorema, temos que:

$$\int\int_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dxdy = \int\int_{D_{uv}} \frac{u^6}{v} \cdot \frac{1}{2} dudv.$$

Desenvolvendo as contas, chegamos que:

$$\int\int_{D_{xy}} \frac{(x+y)^6}{y-x} dxdy = (5^7 - 3^7)\frac{ln(3)}{14}.$$

Considerações

Na aula de hoje:

- Revisamos alguns conceitos importantes para facilitar a compreensão do **Jacobiano** e da mudança de variáveis.
- Conhecemos o **Jacobiano** por meio de um exemplo. Em seguida, compreendemos a sua definição.
- Fomos apresentados ao Teorema de mudança de variáveis em uma integral dupla e fizemos um breve exemplo.

Na próxima aula:

Vamos apresentar diversos exemplos da mudança de variáveis em integrais múltiplas.

Referência

- Guidorizzi, H. L. **Um Curso de Cálculo - volume 3.**
  5^a edição. Rio de Janeiro, 2001.
- Stewart, J. **Cálculo - volume 2.**
  6^a edição. São Paulo, 2010.
- Thomas, G. B. **Cálculo - volume 2.**
  11^a edição. São Paulo, 2009.
- Plano de aula e slides.
  Disponível em: <`http://www.leandromundim.com/material-concurso-27-2017`>.