Algoritmos y Estructuras de Datos I

Segundo cuatrimestre de 2023

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Introducción a la especificación de problemas

Definición (Especificación) de un problema

problema *nombre*(*parámetros*) : tipo de dato del resultado {
  requiere *etiqueta*: { condiciones sobre los parámetros de entrada }
  asegura *etiqueta*: { condiciones sobre los parámetros de salida }
}

- *nombre*: nombre que le damos al problema
  - será resuelto por una función con ese mismo nombre
- *parámetros*: lista de parámetros separada por comas, donde cada parámetro contiene:
  - Nombre del parámetro
  - Tipo de datos del parámetro
- *tipo de dato del resultado*: tipo de dato del resultado del problema (inicialmente especificaremos funciones)
  - En los asegura, podremos referenciar el valor devuelto con el nombre de **res**
- *etiquetas*: son nombres opcionales que nos servirán para nombrar declarativamente a las condiciones de los requiere o aseguras.

Retomando: Tipos de datos

- Un **tipo de datos** es un conjunto de valores (el conjunto base del tipo) provisto de una serie de operaciones que involucran a esos valores.
- Para hablar de un elemento de un tipo T en nuestro lenguaje, escribimos un término o expresión
  - Variable de tipo T (ejemplos: x, y, z, etc)
  - Constante de tipo T (ejemplos: 1, -1, $\frac{1}{5}$, 'a', etc)
  - Función (operación) aplicada a otros términos (del tipo T o de otro tipo)
- Todos los tipos tienen un elemento distinguido: $\perp$ o Indef

Tipos de datos de nuestro lenguaje de especificación

- Básicos
  - Enteros ($\mathbb{Z}$)
  - Reales ($\mathbb{R}$)
  - Booleanos (Bool)
  - Caracteres (Char)
- Enumerados
- Uplas
- Secuencias

Tipo upla (o tupla)

- Una estructura de datos es una forma particular de organizar la información.
- Uplas, de dos o más elementos, cada uno de cualquier tipo.
- $T_0 \times T_1 \times \cdots \times T_k$: Tipo de las k-uplas de elementos de tipos T_0, T_1, ... T_k, respectivamente, donde k es fijo.
- Ejemplos:
  - $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ son los pares ordenados de enteros.
  - $\mathbb{Z} \times \text{Char} \times \text{Bool}$ son las triplas ordenadas con un entero, luego un carácter y luego un valor booleano.
- *n*ésimo: $(a_0, \ldots, a_k)_m$ es el valor a_m en caso de que $0 \leq m \leq k$. Si no, está indefinido.
- Ejemplos:
  - $(7, 5)_0 = 7$
  - $(\text{'a'}, DOM, 78)_2 = 78$

Secuencias

- **Secuencia:** Varios elementos del mismo tipo T, posiblemente repetidos, ubicados en un cierto orden.
- $seq\langle T\rangle$ es el tipo de las secuencias cuyos elementos son de tipo T.
- T es un tipo arbitrario.
  - Hay secuencias de $\mathbb{Z}$, de Bool, de `Días`, de 5-uplas;
  - también hay secuencias de secuencias de T;
  - etcétera.

Secuencias. Notación

- Una forma de escribir un elemento de tipo $seq\langle T\rangle$ es escribir términos de tipo T separados por comas, entre $\langle \ldots \rangle$.
  - $\langle 1, 2, 3, 4, 1, 0\rangle$ es una secuencia de $\mathbb{Z}$.
  - $\langle 1,\ 1+1,\ 3,\ 2*2,\ 5 \bmod 2,\ 0\rangle$ es otra secuencia de $\mathbb{Z}$ (igual a la anterior).
- La secuencia vacía se escribe $\langle\rangle$, cualquiera sea el tipo de los elementos de la secuencia.
- Se puede formar secuencias de elementos de cualquier tipo.
  - Como $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ es un tipo, podemos armar secuencias de $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ (secuencias de secuencias de $\mathbb{Z}$, o sea $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$).
  - $\langle\langle 12, 13\rangle, \langle -3, 9, 0\rangle, \langle 5\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle 3\rangle\rangle$ es un elemento de tipo $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$.

Secuencias bien formadas

Indicar si las siguientes secuencias están bien formadas. Si están bien formadas, indicar su tipo ($seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, *etc*...)

- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ y $seq\langle\mathbb{R}\rangle$
- $\langle 1, true, 3, 4, 5\rangle$? No está bien formada porque no es homogénea (Bool y $\mathbb{Z}$)
- $\langle 'a', 2, 3, 4, 5\rangle$? No está bien formada porque no es homogénea ($Char$ y $\mathbb{Z}$)
- $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle Char\rangle$
- $\langle true, false, true, true\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle\text{Bool}\rangle$
- $\langle \frac{2}{5}, \pi, e\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle\mathbb{R}\rangle$
- $\langle\rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle X\rangle$ donde X es un tipo válido.
- $\langle\langle\rangle\rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle seq\langle X\rangle\rangle$ donde X es un tipo válido.

Funciones sobre secuencias

Longitud

- Longitud: $length(a : seq\langle T\rangle) : \mathbb{Z}$
  - Representa la longitud de la secuencia a.
  - Notación: $length(a)$ se puede escribir como $|a|$ o como $a.length$.
- Ejemplos:
  - $|\langle\rangle| = 0$
  - $|\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle| = 4$
  - $|\langle 1, 1, 2\rangle| = 3$

Funciones con secuencias

I-ésimo elemento

- Indexación: $seq\langle T\rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
  - Requiere $0 \leq i < |a|$.
  - Es el elemento en la i-ésima posición de a.
  - La primera posición es la 0.
  - Notación: $a[i]$.
  - Si no vale $0 \leq i < |a|$ se indefine.
- Ejemplos:
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[0] = 'H'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[1] = 'o'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[2] = 'l'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[3] = 'a'$
  - $\langle 1, 1, 1, 1\rangle[0] = 1$
  - $\langle\rangle[0] = \perp$ (Indefinido)
  - $\langle 1, 1, 1, 1\rangle[7] = \perp$ (Indefinido)

Funciones con secuencias

Pertenece

- Pertenece: $pertenece(x : T, s : seq\langle T\rangle) : Bool$
  - Es **true** sí y solo sí x es elemento de s.
  - Notación: $pertenece(x, s)$ se puede escribir como $x \in s$.
- Ejemplos:
  - $(1, MAR) \in \langle(1, LUN), (2, MAR), (3, JUE), (1, MAR)\rangle$? **true**
  - $(1, MAR) \in \langle(1, LUN), (2, MAR), (3, JUE), (3, MAR)\rangle$? **false**

Funciones con secuencias

Igualdad

Dos secuencias s_0 y s_1 (notación $s_0 = s_1$) son iguales si y sólo si

- Tienen la misma cantidad de elementos
- Dada una posición, el elemento contenido en la secuencia s_0 es igual al elemento contenido en la secuencia s_1.

Ejemplos:

- $\langle 1, 2, 3, 4\rangle = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$? Sí
- $\langle\rangle = \langle\rangle$? Sí
- $\langle 4, 4, 4\rangle = \langle 4, 4, 4\rangle$? Sí
- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$? No
- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle = \langle 1, 2, 4, 5, 6\rangle$? No
- $\langle 1, 2, 3, 5, 4\rangle = \langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$? No

Funciones con secuencias
Cabeza o Head

- Cabeza: $head(a : seq\langle T\rangle) : T$
  - Requiere $|a| > 0$.
  - Es el primer elemento de la secuencia a.
  - Es equivalente a la expresión $a[0]$.
  - Si no vale $|a| > 0$ se indefine.
- Ejemplos:
  - $head(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = 'H'$
  - $head(\langle 1, 1, 1, 1\rangle) = 1$
  - $head(\langle\rangle) = \bot$ (Indefinido)

Funciones con secuencias
Cola o Tail

- Cola: $tail(a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Requiere $|a| > 0$.
  - Es la secuencia resultante de eliminar su primer elemento.
  - Si no vale $|a| > 0$ se indefine.
- Ejemplos:
  - $tail(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = \langle 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $tail(\langle 1, 1, 1, 1\rangle) = \langle 1, 1, 1\rangle$
  - $tail(\langle\rangle) = \bot$ (Indefinido)
  - $tail(\langle 6\rangle) = \langle\rangle$

Funciones con secuencias
Agregar al principio o addFirst

- Agregar cabeza: $addFirst(t : T, a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Es una secuencia con los elementos de a, agregándole t como primer elemento.
  - Es una función que no se indefine
- Ejemplos:
  - $addFirst('x', \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = \langle 'x', 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $addFirst(5, \langle 1, 1, 1, 1\rangle) = \langle 5, 1, 1, 1, 1\rangle$
  - $addFirst(1, \langle\rangle) = \langle 1\rangle$

Funciones con secuencias
Concatenación o concat

- Concatenación: $concat(a : seq\langle T\rangle, b : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Es una secuencia con los elementos de a, seguidos de los de b.
  - Notación: $concat(a, b)$ se puede escribir $a +\!+\, b$.
- Ejemplos:
  - $concat(\langle 'H', 'o'\rangle, \langle 'l', 'a'\rangle) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $concat(\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle) = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$
  - $concat(\langle\rangle, \langle\rangle) = \langle\rangle$
  - $concat(\langle 2, 3\rangle, \langle\rangle) = \langle 2, 3\rangle$
  - $concat(\langle\rangle, \langle 5, 7\rangle) = \langle 5, 7\rangle$

Funciones con secuencias

Subsecuencia o subseq

- Subsecuencia: $subseq(a : seq\langle T\rangle, d, h : \mathbb{Z}) : seq\langle T\rangle$
  - Es una sublista de a en las posiciones entre d (inclusive) y h (exclusive).
  - Cuando $0 \leq d = h \leq |a|$, retorna la secuencia vacía.
  - Cuando no se cumple $0 \leq d \leq h \leq |a|$, se indefine!
- Ejemplos:
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 1) = \langle 'H'\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 4) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 2, 2) = \langle\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, -1, 3) = \perp$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 10) = \perp$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 3, 1) = \perp$

Funciones con secuencias

- Cambiar una posición: $setAt(a : seq\langle T\rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T\rangle$
  - Requiere $0 \leq i < |a|$
  - Es una secuencia igual a a, pero con valor val en la posición i.
- Ejemplos:
  - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 'X') = \langle 'X', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 3, 'A') = \langle 'H', 'o', 'l', 'A'\rangle$
  - $setAt(\langle\rangle, 0, 5) = \perp$ (Indefinido)

Operaciones sobre secuencias

- $length(a : seq\langle T\rangle) : \mathbb{Z}$ (notación $|a|$)
- $pertenece(x : T, s : seq\langle T\rangle) :$ Bool (notación $x \in s$)
- indexación: $seq\langle T\rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
- igualdad: $seq\langle T\rangle = seq\langle T\rangle$
- $head(a : seq\langle T\rangle) : T$
- $tail(a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
- $addFirst(t : T, a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
- $concat(a : seq\langle T\rangle, b : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$ (notación a++b)
- $subseq(a : seq\langle T\rangle, d, h : \mathbb{Z}) : \langle T\rangle$
- $setAt(a : seq\langle T\rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T\rangle$

Definición (Especificación) de un problema

- *Sobre los requiere*
  - Describen todas las condiciones y posibles valores o casuísticas de los parámetros de entrada.
  - Puede haber más de un requiere (recomendamos una condición por renglón). Se asume que valen todos juntos (es una conjunción).
  - Evitar contradicciones (un requiere no debería contradecir a otro).
- *Sobre los asegura*
  - Describen todas las condiciones y posibles valores o casuísticas de los parámetros de salida y entrada/salida en función de los parámetros de entrada.
  - Puede haber más de un asegura (recomendamos una condición por renglón). Se asume que valen todos juntos (es una conjunción).
  - Evitar contradicciones (un asegura no debería contradecir a otro).

Problemas comunes de las especificaciones

- ¿Qué sucede si especifico de menos?
- ¿Qué sucede si especifico de más?

Sobre-especificación

- Consiste en dar una postcondición más restrictiva de la que se necesita, o bien dar una precondición más laxa.
- Limita los posibles algoritmos que resuelven el problema, porque impone más condiciones para la salida, o amplía los datos de entrada.
- Ejemplo:
  problema $distinto(x : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
    requiere: $\{True\}$
    asegura: $\{res = x + 1\}$
  }
- ... en lugar de:
  problema $distinto(x : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}${
    requiere: $\{True\}$
    asegura: $\{res \neq x\}$
  }

Sub-especificación

- Consiste en dar una precondición más restrictiva de lo realmente necesario, o bien una postcondición más débil de la que se necesita.
- Deja afuera datos de entrada o ignora condiciones necesarias para la salida (permite soluciones no deseadas).
- Ejemplo:

  problema $distinto(x : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}${
    requiere: $\{x > 0\}$
    asegura: $\{res \neq x\}$
  }

  ... en vez de:

  problema $distinto(x : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}${
    requiere: $\{True\}$
    asegura: $\{res \neq x\}$
  }

Modularizacion

Partiendo un problema en problemas mas chicos

Dadas dos secuencias, queremos saber si uno es una una permutación[1] de la otra secuencia:
¿Cuándo será una secuencia permutación de la otra?

- Tienen los mismos elementos
- Cada elemento aparece la misma cantidad de veces en ambas secuencias

problema $esPermutacion(s1, s2 : seq\langle T\rangle)$: Bool {
  asegura: $\{res = true \leftrightarrow$ para cada elemento es cierto que tiene la misma cantidad de apariciones en $s1$ y $s2$ }
}

Pero... falta algo...

[1] mismos elementos y misma cantidad por cada elemento, en un orden potencialmente distinto

Modularizacion

Partiendo un problema en problemas mas chicos

Ahora, tenemos que especificar el problema *cantidadDeApariciones*

¿Cómo podemos saber la cantidad de apariciones de un elemento en una lista?

- Podríamos sumar 1 por cada posición donde el elemento en dicha posición es el que buscamos!
- Las operaciones de Sumatorias y Productorias también podemos usarlos

problema $cantidadDeApariciones(s : seq\langle T\rangle, e : T) : \mathbb{Z}$ {
  asegura $\{res =$ la cantidad de veces que el elemento e aparece en la lista s $\}$
}

Recapitulando

Partiendo un problema en problemas mas chicos

Dadas dos secuencias, queremos saber si uno es una una permutación[1] de la otra secuencia:

problema $esPermutacion(s1, s2 : seq\langle T\rangle)$: Bool {
  asegura: $\{res = true \leftrightarrow$ (para cada elemento e de T, se cumple que $(cantidadDeApariciones(s1, e) = cantidadDeApariciones(s2, e)))\}$
}

Donde...

problema $cantidadDeApariciones(s : seq\langle T\rangle, e : T) : \mathbb{Z}$ {
  asegura $\{res =$ la cantidad de veces que el elemento e aparece en la lista s $\}$
}

Y así podemos modularizar y descomponer nuestro problemas, partiendolos en problemas más chicos. Y también los podremos reutilizar!

[1] mismos elementos y misma cantidad por cada elemento, en un orden potencialmente distinto

Modularización

O partir el problema en problemas más chicos...

Los conceptos de modularización y encapsulamiento siempre estarán relacionados con los principios de diseño de software. La estrategia se puede resumir en:

- Descomponer un problema grande en problemas más pequeños (y sencillos)
- Componerlos y obtener la solución al problema original

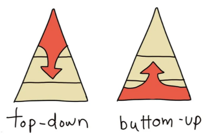
Esto favocere muchos aspectos de calidad como:

- La reutilización (una función auxiliar puede ser utilizada en muchos contextos)
- Es más facil probar algo chico que algo grande (si cada parte cumple su función correctamente, es más probable que todas juntas también lo haga)
- La declaratividad (es más facil entender al ojo humano)

Modularización

Top Down versus Bottom Up

También es aplicable a la especificación de problemas:



problema $esPermutacion(s1, s2 : seq\langle T\rangle)$: Bool {
  asegura: $\{res = true \leftrightarrow$(para cada elemento e de T, se cumple que $(cantidadDeApariciones(s1, e) = cantidadDeApariciones(s2, e)))\}$
}

problema $cantidadDeApariciones(s : seq\langle T\rangle, e : T) : \mathbb{Z}$ {
  asegura $\{res =$ la cantidad de veces que el elemento e aparece en la lista s $\}$
}

¿Lo encaramos Top Down o Bottom Up?

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Todos sabemos jugar al ¿Piedra, Papel y Tijera?... ¿Cómo podríamos especificarlo?

- ¿Cómo lo podemos modelar?
- ¿Qué tipo de datos podríamos utilizar?

Opciones:

- Números?
- Letras?
- Un enumerado?

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Todos sabemos jugar al ¿Piedra Papel y Tijera?... ¿Cómo podríamos especificarlo?

```
enum PPT {
  PIEDRA, PAPEL, TIJERA
}
```

- ¿Qué problemas tenemos que resolver?

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Todos sabemos jugar al ¿Piedra Papel y Tijera?... ¿Cómo podríamos especificarlo?

```
enum PPT {
  PIEDRA, PAPEL, TIJERA
}
```

- ¿Qué problemas tenemos que resolver?
  - En cada jugada... cada jugador elige jugar con: Piedra, Papel o Tijera
    - Si ambos jugadores eligen lo mismo, empatan
    - Piedra le gana a la Tijera
    - Tijera le gana al Papel
    - Papel le gana a la Piedra
  - Una partida es al mejor de 3 jugadas...

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Todos sabemos jugar al ¿Piedra Papel y Tijera?... ¿Cómo podríamos especificarlo?

```
enum PPT {
  PIEDRA, PAPEL, TIJERA
}
```

problema $determinarGanadorJugada(j1 : PPT, j2 : PPT) : \mathbb{Z}$ {
  requiere: {...}
  asegura: {...}
}

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Todos sabemos jugar al ¿Piedra Papel y Tijera?... ¿Cómo podríamos especificarlo?

enum PPT {
PIEDRA, PAPEL, TIJERA
}

problema $determinarGanadorJugada(j1 : PPT, j2 : PPT) : \mathbb{Z}$ {
asegura: $\{res = 1 \leftrightarrow esGanador(j1, j2)\}$
asegura: $\{res = 2 \leftrightarrow esGanador(j2, j1)\}$
asegura: $\{res = 0 \leftrightarrow j1$ es igual $j2\}$
}

problema $esGanador(j1 : PPT, j2 : PPT)$: Bool {
asegura: $\{res = true \leftrightarrow ((j1 = PIEDRA \wedge j2 = TIJERA) \vee (j1 = TIJERA \wedge j2 = PAPEL) \vee (j1 = PAPEL \wedge j2 = PIEDRA))\}$
}

Una que sepamos todo...

¿Cómo describiríamos el Piedra, Papel y Tijera?

Ya tenemos una jugada... ¿cómo sería una partida?

problema $determinarGanadorPartida(jugadas : seq\langle(PPTxPPT)\rangle) : \mathbb{Z}$ {
requiere: $\{|jugadas| = 3\}$
asegura: $\{res = 1 \leftrightarrow cantidadJugadasGanadas1(jugadas) > cantidadJugadasGanadas2(jugadas)\}$
asegura: $\{res = 2 \leftrightarrow cantidadJugadasGanadas1(jugadas) < cantidadJugadasGanadas2(jugadas)\}$
asegura: $\{res = 0 \leftrightarrow cantidadJugadasGanadas1(jugadas) = cantidadJugadasGanadas2(jugadas)\}$
}

problema $cantidadJugadasGanadas1(jugadas : seq\langle(PPTxPPT)\rangle) : \mathbb{Z}$ {
asegura: $\{res$ es la cantidad de jugadas j de la lista $jugadas$ tales que $determinarGanadorJugada(j_0, j_1) = 1\}$
}

problema $cantidadJugadasGanadas2(jugadas : seq\langle(PPTxPPT)\rangle) : \mathbb{Z}$ {
asegura: $\{res$ es la cantidad de jugadas j de la lista $jugadas$ tales que $determinarGanadorJugada(j_0, j_1) = 2\}$
}

Siguiente paso: Algoritmos y programas

- Hasta ahora estudiamos lógica y aprendimos a especificar problemas
- El objetivo es ahora escribir un algoritmo que cumpla esa especificación
  - Secuencia de pasos que pueden llevarse a cabo mecánicamente
- Puede haber varios algoritmos que cumplan una misma especificación
- Una vez que se tiene el algoritmo, se escribe el programa que implementa el algoritmo
  - Expresión formal de un algoritmo
  - Lenguajes de programación
    - sintaxis definida
    - semántica definida
    - qué hace una computadora cuando recibe ese programa
    - qué especificaciones cumple
    - ejemplos: Haskell, C, C++, C#, Python, Java, Smalltalk, Prolog, etc.
- A partir de un algoritmo van a existir múltiples programas que implementan dicho algoritmo.

Paradigmas de Programación

- Existen distintos paradigmas de programación
  - Formas de pensar un algoritmo que cumpla una especificación
  - Cada uno tiene asociado un conjunto de lenguajes
  - Nos llevan a encarar la programación según ese paradigma
- Haskell pertenece al paradigma de programación funcional
  - programa = colección de funciones
    - Transforman datos de entrada en un resultado
  - Los lenguajes funcionales nos dan herramientas para explicarle a la computadora cómo computar esas funciones

Programación funcional

- Un programa en un lenguage funcional es un conjunto de ecuaciones orientadas que definen una o más funciones.

  Por ejemplo:

  doble x = x + x

- La ejecución de un programa en este caso corresponde a la evaluación de una expresión, habitualmente solicitada desde la consola del entorno de programación.

```
Prelude> doble 10
20
```

- La expresión se evalúa usando las ecuaciones definidas en el programa, hasta llegar a un resultado.
- Las ecuaciones orientadas junto con el mecanismo de reducción describen algoritmos.

Ecuaciones

Para determinar el valor de la aplicación de una función se reemplaza cada expresión por otra, según las ecuaciones.

- Este proceso puede no terminar, aún con ecuaciones bien definidas.
- Por ejemplo, consideremos la expresión:

  `doble (1 + 1)`

  Si reemplazamos `1 + 1` por `doble 1` obtenemos `doble (doble 1)`

  Y ahora podemos reemplazar `doble 1` por `1 + 1`

  Volvimos a empezar...

  `doble (1 + 1)` ⇝ `doble (doble 1)` ⇝ `doble (1 + 1)` ⇝ ...

Ecuaciones orientadas

- Lado izquierdo: expresión a definir
- Lado derecho: definición
- Cálculo del valor de una expresión : reemplazamos las subexpresiones que sean lado izquierdo de una ecuación por su lado derecho

Ejemplo: `doble x = x + x`
`doble (1 + 1)` ⇝ `(1 + 1) + (1 + 1)` ⇝ `2 + (1 + 1)` ⇝ `2 + 2` ⇝ `4`

También podría ser:
`doble (1 + 1)` ⇝ `doble 2` ⇝ `2 + 2` ⇝ `4`

Más adelante veremos cómo funciona Haskell en particular.

Transparencia referencial

Es la propiedad de un lenguaje que garantiza que el valor de una expresión depende exclusivamente de sus subexpresiones.

Por lo tanto,

- Cada expresión del lenguaje representa siempre el mismo valor en cualquier lugar de un programa
- Es una propiedad muy importante en el paradigma de la programación funcional.
  - En otros paradigmas el significado de una expresión depende del contexto
- Es muy útil para verificar correctitud (demostrar que se cumple la especificación)
  - Podemos usar propiedades ya probadas para sub expresiones
  - El valor no depende de la historia
  - Valen en cualquier contexto

Formación de expresiones

- Expresiones atómicas
  - También se llaman formas normales
  - Son las más simples, no se puede reducir más.
  - Son la forma más intuitiva de representar un valor
  - Ejemplos:
    - `2`
    - `False`
    - `(3, True)`
  - Es común llamarlas “valores” aunque no son un valor, *denotan* un valor, como las demás expresiones
- Expresiones compuestas
  - Se construyen combinando expresiones atómicas con operaciones
  - Ejemplos:
    - `1+1`
    - `1==2`
    - `(4-1, True || False)`

Formación de expresiones

- Algunas cadenas de símbolos no forman expresiones
  - por problemas sintácticos:
    - `+*1-`
    - `(True`
    - `('a',)`
  - o por error de tipos:
    - `2 + False`
    - `2 || 'a'`
    - `4 * 'b'`
- Para saber si una expresión está bien formada, aplicamos
  - Reglas sintácticas
  - Reglas de asignación o inferencia de tipos (algoritmo de Hindley-Milner)
- En Haskell toda expresión denota un valor, y ese valor pertenece a un tipo de datos y no se puede usar como si fuera de otro tipo distinto.
  - Haskell es un lenguaje fuertemente tipado

¿Cómo ejecuta Haskell?

¿Qué sucede en Haskell cuando escribo una expresión? ¿Cómo se transforma esa expresión en un resultado?

- Dado el siguiente programa:

```
resta x y = x − y

suma x y = x + y

negar x = −x
```

- ¿Qué sucede al evaluar la expresión `suma (resta 2 (negar 42)) 4`

Reducción

`suma (resta 2 (negar 42)) 4`

El mecanismo de evaluación en un lenguaje funcional es la reducción:

1. Elegimos una subexpresión. Vamos a reemplazar esta subexpresión por otra.
2. La subexpresión a reemplazar es alguna instancia del lado izquierdo de alguna ecuación orientada del programa, y se la llama radical o redex (*reducible expression*).
   - Buscamos un redex: $\texttt{suma (}\underbrace{\texttt{resta 2 (negar 42)}}_{\text{redex}}\texttt{) 4}$
3. La reemplazaremos por el lado derecho de esa misma ecuación, ligando los parámetros.
   - `resta x y = x - y`
   - $\texttt{x} \leftarrow \texttt{2}$
   - $\texttt{y} \leftarrow \texttt{(negar 42)}$
4. Reemplazamos el redex con lo anterior y el resto de la expresión no cambia.
   - `suma (resta 2 (negar 42)) 4` ⇝ `suma (2 - (negar 42)) 4`
5. Si la expresión resultante aún puede reducirse, volvemos al paso 1, sino llegamos a una expresión atómica (forma normal) y ese es el resultado del cómputo.

`suma (2 - (negar 42)) 4` ⇝ `suma (2 - (- 42)) 4suma (2 - (- 42)) 4` ⇝ `suma (44) 4suma (44) 4` ⇝ `44 + 4` ⇝ `48`

Órdenes de evaluación en Haskell

Haskell tiene un orden de evaluación normal o lazy (perezoso): se reduce el redex más externo y más a la izquierda para el cual se sepa qué ecuación del programa se debe aplicar; es decir que primero se evalúa la función y después los argumentos (si se necesitan).

Ejemplo:

```
   suma (3+4) (suc (2*3))
⇝ (3+4) + (suc (2*3))
⇝ 7 + (suc (2*3))
⇝ 7 + ((2*3) + 1)
⇝ 7 + (6 + 1)
⇝ 7 + 7
⇝ 14
```

Otros lenguajes de programación (C, C++, Pascal, Java) tienen un orden de evaluación eager (ansioso): primero se evalúan los argumentos y después la función.

Indefinición

- Las expresiones para las cuales Haskell no encuentra un resultado se dicen que están indefinidas ($\perp$).
- ¿Cómo podemos clasificar las funciones?
  - Funciones totales: nunca se indefinen.
    `suc x = x + 1`
  - Funciones parciales: hay argumentos para los cuales se indefinen.
    `division x y = div x y`

¿Qué pasa al reducir las siguientes expresiones en Haskell?

- `(division 1 1 ==0) && (division 1 0 ==1)`
- `(division 1 1 ==1) && (division 1 0 ==1)`
- `(division 1 0 ==1) && (division 1 1 ==1)`

¿Y si hiciéramos una evaluación eager o ansiosa?

Definiciones de funciones por casos

Podemos usar guardas para definir funciones por casos:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

```
f n | n == 0 = 1
    | n /= 0 = 0
```

Palabra clave "si no".

```
f n | n == 0 = 1
    | otherwise = 0
```


La función signo

$$signo(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
            | n < 0 = -1
```

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
        | otherwise = -1
```

La función máximo

```
maximo x y | x ≥ y = x
           | otherwise = y
```


¿Qué hacen las siguientes funciones?

```
f1 n | n ≥ 3 = 5

f2 n | n ≥ 3 = 5
     | n ≤ 1 = 8

f3 n | n ≥ 3 = 5
     | n == 2 = undefined
     | otherwise = 8
```


¿Qué hacen las siguientes funciones?

```
f4 n | n ≥ 3 = 5
     | n ≤ 9 = 7

f5 n | n ≤ 9 = 7
     | n ≥ 3 = 5
```

Prestar atención al orden de las guardas. ¡Cuando las condiciones se solapan, el orden de las guardas cambia el comportamiento de la función!

Otra posibilidad usando *pattern matching*

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

```
f n | n == 0 = 1
    | n /= 0 = 0
```

También se puede hacer:

```
f 0 = 1
f n = 0
```

Otra posibilidad usando *pattern matching*

$$signo(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

```
signo n | n > 0 = 1
        | n == 0 = 0
        | n < 0 = -1
```

También se puede hacer:

```
signo 0 = 0
signo n | n > 0 = 1
        | otherwise = -1
```


Un ejemplo con especificación

Dados tres números a, b y c, calcular la cantidad de soluciones reales de la ecuación cuadrática: $aX^2 + bX + c = 0$.

problema $cantidadDeSoluciones(a : \mathbb{Z}, b : \mathbb{Z}, c : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
  requiere: $\{a \neq 0\}$
  asegura: $\{res = 2 \leftrightarrow discriminante(a, b, c) > 0\}$
  asegura: $\{res = 1 \leftrightarrow discriminante(a, b, c) = 0\}$
  asegura: $\{res = 0 \leftrightarrow discriminante(a, b, c) < 0\}$
}
problema $discriminante(a : \mathbb{Z}, b : \mathbb{Z}, c : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}$ {
  requiere: $\{a \neq 0\}$
  asegura: $\{res = b^2 - 4 * a * c\}$
}

```
cantidadDeSoluciones a b c | b^2 - 4*a*c > 0 = 2
                           | b^2 - 4*a*c == 0 = 1
                           | otherwise = 0
```

Otra posibilidad:

```
cantidadDeSoluciones a b c | discriminante > 0 = 2
                           | discriminante == 0 = 1
                           | otherwise = 0
                        where discriminante = b^2 - 4*a*c
```


Tipos de datos

Un **conjunto de valores** a los que se les puede aplicar un **conjunto de funciones**.

Ejemplos:

1. `Int` = $(\mathbb{Z}, \{+, -, *, \texttt{div}, \texttt{mod}\})$ es el tipo de datos que representa a los enteros con las operaciones aritméticas habituales.
2. `Float` = $(\mathbb{Q}, \{+, -, *, /\})$ es el tipo de datos que representa a los racionales, con la aritmética de punto flotante.
3. `Char` = ({'a', 'A', '1', '?'}, {ord, chr, isUpper, toUpper}) es el tipo de datos que representan los caracteres.
4. `Bool` = ({True, False}, {&&, ||, not}) representa a los valores lógicos.

- Podemos declarar explícitamente el tipo de datos del *dominio* y *codominio* de las funciones. A esto lo llamamos dar la signatura de la función.
- No es estrictamente necesario hacerlo (Haskell puede inferir el tipo), pero suele ser una buena práctica (y ¡nosotros lo vamos a pedir!).

Aplicación de funciones

En programación funcional (como en matemática) las funciones son elementos (valores).

Notación `f :: T1 -> T2 -> T3 -> ... -> Tn`

- Una función es un valor
- la operación básica que podemos realizar con ese valor es la aplicación
  - Aplicar la función a un elemento para obtener un resultado
- Sintácticamente, la aplicación se escribe como una yuxtaposición (la función seguida de su parámetro).
- Por ejemplo: sea `f :: T1 -> T2`, y `e` de tipo `T1` entonces `f e` es una expresión de tipo `T2`.
  Sea `doble :: Int -> Int`, entonces `doble 2` representa un número entero.

Ejemplos de funciones con la signatura

```
maximo :: Int → Int → Int
maximo x y | x ≥ y = x
           | otherwise = y

maximoRac :: Float → Float → Float
maximoRac x y | x ≥ y = x
              | otherwise = y

esMayorA9 :: Int → Bool
esMayorA9 n | n > 9 = True
            | otherwise = False

esPar :: Int → Bool
esPar n | mod n 2 == 0 = True
        | otherwise = False

esPar2 :: Int → Bool
esPar2 n = mod n 2 == 0

esImpar :: Int → Bool
esImpar n = not (esPar n)
```


Otro ejemplo más raro:

```
funcionRara :: Float → Float → Bool → Bool
funcionRara x y z = (x ≥ y) || z
```

Otras posibilidades, usando *pattern matching*:

```
funcionRara :: Float → Float → Bool → Bool
funcionRara x y True = True
funcionRara x y False = x ≥ y

funcionRara :: Float → Float → Bool → Bool
funcionRara _ _ True = True
funcionRara x y False = x ≥ y
```


Nueva familia de tipos: Tuplas

Tuplas

- Dados tipos $A_1, \ldots, A_k$, el tipo *k*-upla $(A_1, \ldots, A_k)$ es el conjunto de las *k*-uplas $(v_1, \ldots, v_k)$ donde v_i es de tipo A_i

```
(1, 2)           :: (Int, Int)
(1.1, 3.2, 5.0)  :: (Float, Float, Float)
(True, (1, 2))  :: (Bool, (Int, Int))
(True, 1, 2)    :: (Bool, Int, Int)
```

- En Haskell hay infinitos tipos de tuplas

Funciones de acceso a los valores de un par en `Prelude`

- `fst :: (a, b) →a` Ejemplo: `fst (1 +4, 2)` ⇝ 5
- `snd :: (a, b) →b` Ejemplo: `snd (1, (2, 3))` ⇝ `(2, 3)`

Ejemplo: suma de vectores en $\mathbb{R}^2$

```
suma :: (Float, Float) → (Float, Float) → (Float, Float)
suma v w = ((fst v) + (fst w), (snd v) + (snd w))
```