Matemática Aplicada

Notas de Aula. Ecuaciones Diferenciales

Módulo III: EDOs

Dr. Leandro Giordano

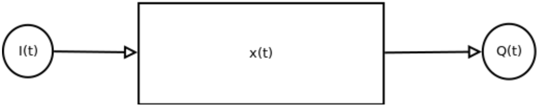
ICO-UNGS Ecología

Temario

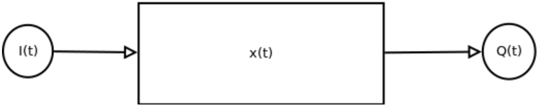
Temario

1. Ámbito de Aplicación
2. Ejemplos de Aplicación

I(t) es la entrada de materia/energía/información al sistema [flujo de entrada]
Q(t) es la salida de materia/energía/información del sistema [flujo de salida]
X(t) es la cantidad de materia/energía/información presente en el sistema [variable de estadc

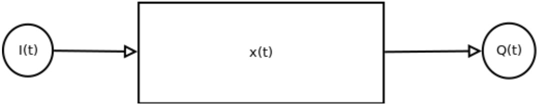


I(t) es la entrada de materia/energía/información al sistema [flujo de entrada]
Q(t) es la salida de materia/energía/información del sistema [flujo de salida]
X(t) es la cantidad de materia/energía/información presente en el sistema [variable de estad



Si se conocen $I(t)$ y $Q(t)$ ¿Cómo podría hallarse $x(t)$?

$I(t)$ es la entrada de materia/energía/información al sistema [flujo de entrada]
$Q(t)$ es la salida de materia/energía/información del sistema [flujo de salida]
$X(t)$ es la cantidad de materia/energía/información presente en el sistema [variable de estad



Si se conocen $I(t)$ y $Q(t)$ ¿Cómo podría hallarse $x(t)$?

Llave del problema: Ecuación de Conservación

$$\frac{dx}{dt} = I(t) - Q(t)$$

Temario

1. Ámbito de Aplicación

2. Ejemplos de Aplicación

8. Considere un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuida uniformemente por todo el lago con una concentración $c(t)$, donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que el agua que contiene una concentración k de contaminante ingresa al lago a una taza r, y esa agua sale del lago a la misma taza. Supongamos que los contaminantes también se agregan directamente al lago a una tasa constante de P.

8. Considere un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuida uniformemente por todo el lago con una concentración $c(t)$, donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que el agua que contiene una concentración k de contaminante ingresa al lago a una taza r, y esa agua sale del lago a la misma taza. Supongamos que los contaminantes también se agregan directamente al lago a una tasa constante de P.

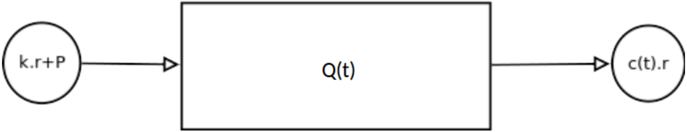
¿Cuáles son los flujos de entrada y salida?¿Cuál es la variable de estado?

Concentración de sustancias contaminantes en un embalse

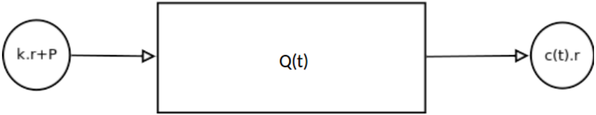
8. Considere un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuida uniformemente por todo el lago con una concentración $c(t)$, donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que el agua que contiene una concentración k de contaminante ingresa al lago a una taza r, y esa agua sale del lago a la misma taza. Supongamos que los contaminantes también se agregan directamente al lago a una tasa constante de P.

8. Considere un lago de volumen constante V que contiene en el tiempo t una cantidad $Q(t)$ de contaminante, distribuida uniformemente por todo el lago con una concentración $c(t)$, donde $c(t) = Q(t)/V$. Suponga que el agua que contiene una concentración k de contaminante ingresa al lago a una taza r, y esa agua sale del lago a la misma taza. Supongamos que los contaminantes también se agregan directamente al lago a una tasa constante de P.

c(t) es la concentración de contaminantes en el embalse [M/V]
k es la concentración de contaminante en caudal afluente [M/V]
P es la tasa de aporte directo de contaminantes [M/t]
r es la afluencia/efluencia de caudal hacia y desde el embalse [V/t]

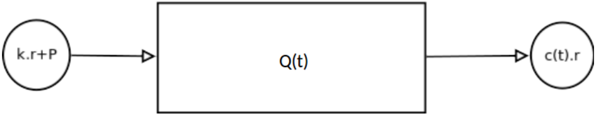


c(t) es la concentración de contaminantes en el embalse [M/V]
k es la concentración de contaminante en caudal afluente [M/V]
P es la tasa de aporte directo de contaminantes [M/t]
r es la afluencia/efluencia de caudal hacia y desde el embalse [V/t]



$$\frac{dQ}{dt} = rk + P - rc(t)$$
$$\frac{dQ}{dt} = rk + P - rQ(t)/V$$

c(t) es la concentración de contaminantes en el embalse [M/V]
k es la concentración de contaminante en caudal afluente [M/V]
P es la tasa de aporte directo de contaminantes [M/t]
r es la afluencia/efluencia de caudal hacia y desde el embalse [V/t]



$$\frac{dQ}{dt} = rk + P - rc(t)$$
$$\frac{dQ}{dt} = rk + P - rQ(t)/V$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V}Q(t) = rk + P$$

La ecuación

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V} Q(t) = rk + P$$

Es una EDO lineal de primer order, luego su **solución general** es (aplicando **factor integrante**):

$$\begin{aligned}
Q(t)e^{\int r/V dt} &= \int (rk + P)e^{\int r/V dt} dt \\
Q(t)e^{r/V \int dt} &= (rk + P) \int e^{r/V \int dt} dt \\
Q(t)e^{r/Vt} &= (rk + P) \int e^{r/Vt} dt \\
Q(t)e^{r/Vt} &= \frac{V}{r}(rk + P)e^{r/Vt} + C \\
Q(t) &= \frac{V(rk + P)}{r} + Ce^{-r/Vt} \\
\frac{Q(t)}{V} = c(t) &= \frac{rk + P}{r} + Ce^{-r/Vt}
\end{aligned}$$

Luego, si se sabe que $c(t=0)=c_0$, para obtenerse la **solución particular** primero procedemos a despejar el valor de la constante C:

$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + Ce^{-r/V0}$$
$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + C$$

Reordenando:

$$C = c_0 - \frac{(rk+P)}{r}$$

Luego, si se sabe que $c(t=0)=c_0$, para obtenerse la **solución particular** primero procedemos a despejar el valor de la constante C:

$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + Ce^{-r/V0}$$
$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + C$$

Reordenando:

$$C = c_0 - \frac{(rk+P)}{r}$$

Finalmente, reemplazando en la solución general, se obtiene:

$$c(t) = \frac{(rk+P)}{r} + [c_0 - \frac{(rk+P)}{r}]e^{-r/Vt}$$

Luego, si se sabe que $c(t=0) = c_0$, para obtenerse la **solución particular** primero procedemos a despejar el valor de la constante C:

$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + Ce^{-r/V0}$$
$$c_0 = \frac{(rk+P)}{r} + C$$

Reordenando:

$$C = c_0 - \frac{(rk+P)}{r}$$

Finalmente, reemplazando en la solución general, se obtiene:

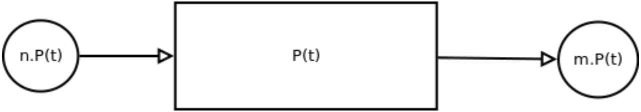
$$c(t) = \frac{(rk+P)}{r} + [c_0 - \frac{(rk+P)}{r}]e^{-r/Vt}$$

O lo que es lo mismo:

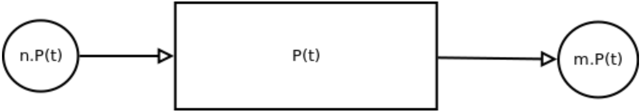
$$c(t) = \frac{(rk+P)}{r} - \frac{(rk+P)}{r}e^{-r/Vt} + c_0 e^{-r/Vt}$$
$$c(t) = \frac{(rk+P)}{r}(1 - e^{-r/Vt}) + c_0 e^{-r/Vt}$$

Proceso Demográfico

Supóngase que una población de una especie animal, en un sitio con recursos ilimitados, presenta una tasa de reproducción de n individuos por individuo y una tasa de mortalidad de m individuos por individuo, ambas constantes en el tiempo. Sea $P(t)$ la población en tiempo t ¿Cuál es la ecuación diferencial que caracteriza el proceso?



Así, podemos plantear la siguiente ecuación de conservación



Así, podemos plantear la siguiente ecuación de conservación

$$\frac{dP}{dt} = nP(t) - mP(t)$$
$$\frac{dP}{dt} = (n-m)P(t)$$

Luego si $k = n - m$, se obtiene la ecuación del proceso Malthussiano, cuya resolución general la vimos la clase pasada:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)$$
$$\frac{dP}{P(t)} = kdt$$
$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int kdt$$
$$lnP(t) = kt + C$$
$$P(t) = e^{kt+C} = e^{C}e^{kt} = Ce^{kt}$$

Si para $P(t=0)$ tengo P_0 ¿Cuál es la solución particular?

Para esto igualamos $P(t) = P_0$ en el término correspondiente y evaluamos $P(t)$ para $t = 0$ en el restante:

$$P_0 = Ce^{k0}$$
$$C = P_0$$

Y, de ahí, la **solución particular** es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Finalmente, se nos puede postular que un sistema demográfico presenta entradas en función del tiempo descritas por una función $I(t)$ y salidas descritas por el producto de una función $Q(t)$ y $P(t)$. Así se obtiene:

Modelos demográficos lineales

Finalmente, se nos puede postular que un sistema demográfico presenta entradas en función del tiempo descritas por una función $I(t)$ y salidas descritas por el producto de una función $Q(t)$ y $P(t)$. Así se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = I(t) - Q(t)P(t)$$

Modelos demográficos lineales

Finalmente, se nos puede postular que un sistema demográfico presenta entradas en función del tiempo descritas por una función $I(t)$ y salidas descritas por el producto de una función $Q(t)$ y $P(t)$. Así se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = I(t) - Q(t)P(t)$$

Reordenado obtenemos:

$$\frac{dP}{dt} + Q(t)P(t) = I(t)$$

¿Qué tipo de EDO es y cómo se resuelve?

Por ejemplo si $I(t) = I_0$ y $Q(t) = k$ ¿cómo se procedería?

Por ejemplo si $I(t) = I_0$ y $Q(t) = k$ ¿cómo se procedería? Resuelva la EDO lineal y obtenga la solución particular para $P(t=0) = P_0$

$$\frac{dP}{dt} = I_0 - kP(t)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} + kP(t) &= I_0 \\
P(t)e^{\int kdt} &= \int I_0 e^{\int kdt} dt \\
P(t)e^{kt} &= I_0 \int e^{kt} dt \\
P(t)e^{kt} &= I_0 \frac{e^{kt}}{k} + C \\
P(t) &= \frac{I_0}{k} + Ce^{-kt}
\end{aligned}$$

Si se pide la solución particular para $P(t=0)=P_0$:

$$P_0 = \frac{I_0}{k} + Ce^{-k0}$$
$$P_0 = \frac{I_0}{k} + C$$
$$C = P_0 - \frac{I_0}{k}$$

Finalmente:

$$P(t) = \frac{I_0}{k} + (P_0 - \frac{I_0}{k})e^{-kt}$$
$$P(t) = (\frac{I_0}{k} - 1)e^{-kt} + P_0 e^{-kt}$$

Supongamos que la cantidad de nuevos individuos en una población por inmigración y natalidad queda dada mediante $e^{-t/\lambda}t$ y el decrecimiento por emigración y mortalidad mediante $kP(t)$

- ¿Cuál es la ecuación diferencial (conservación) que describe el proceso?

$$
\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= e^{-t/\lambda}t - kP(t) \\
\frac{dP}{dt} + kP(t) &= e^{-t/\lambda}t \\
P(t)e^{\int kdt} &= \int e^{-t/\lambda}te^{\int kdt}dt \\
P(t)e^{kt} &= \int e^{t(k-1/\lambda)}tdt
\end{aligned}
$$