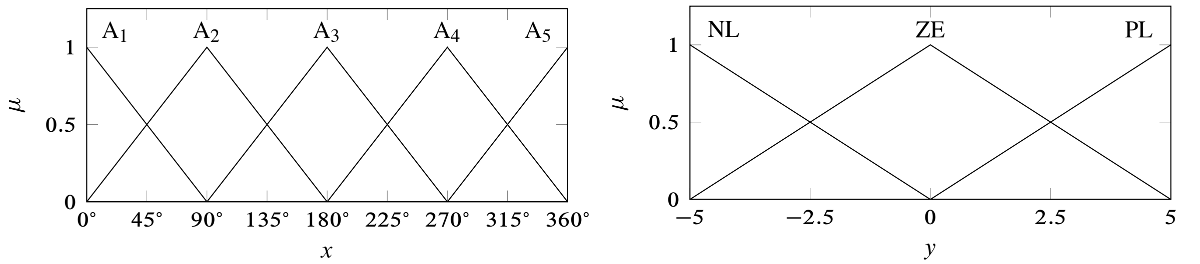
Ασαφή Συστήματα

Εργασία 1 - Σειρά 7

Δημανίδης Ιωάννης - 8358

Αρχική μοντελοποίηση

Επιθυμούμε να μοντελοποιήσουμε τη μη-γραμμική συνάρτηση $y = 5\cos(x)$ με τη χρήση ασαφών συστημάτων, συνεπώς ορίζουμε το χώρο εισόδου $X = [0°, 360°]$ και το χώρο εξόδου $Y = [-5, 5]$. Στο σχήμα 1 έχουμε τα ασαφή σύνολα στους χώρους εισόδου και εξόδου αντίστοιχα.



Σχήμα 1: Ασαφή σύνολα είσοδου και εξόδου

Η είσοδος με την έξοδο συνδέονται μέσω της ακόλουθης βάσης κανόνων:

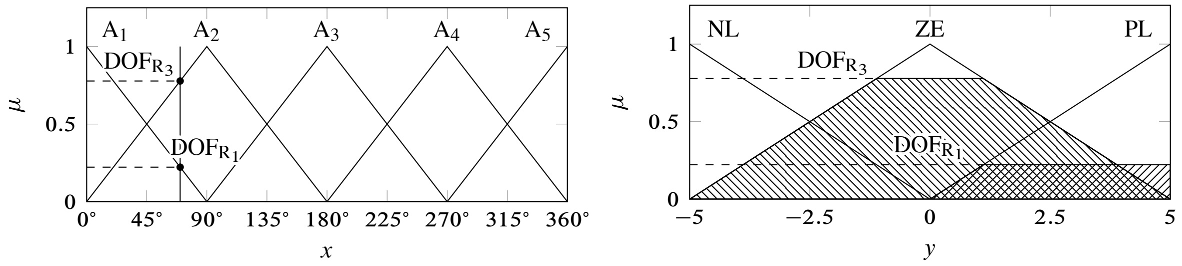
$$
\begin{aligned}
R_1&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_1) \text{ OR } (x \text{ is } \mathrm{A}_5) \text{ THEN } (y \text{ is PL})\\
\text{ALSO } R_2&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_2) \text{ OR } (x \text{ is } \mathrm{A}_4) \text{ THEN } (y \text{ is ZE})\\
\text{ALSO } R_3&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_3) \text{ THEN } (y \text{ is NL})
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω βασή κανόνων γράφεται και σε κανονική μορφή ως εξής:

$$
\begin{aligned}
R_1&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_1) \text{ THEN } (y \text{ is PL})\\
\text{ALSO } R_2&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_5) \text{ THEN } (y \text{ is PL})\\
\text{ALSO } R_3&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_2) \text{ THEN } (y \text{ is ZE})\\
\text{ALSO } R_4&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_4) \text{ THEN } (y \text{ is ZE})\\
\text{ALSO } R_5&: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_3) \text{ THEN } (y \text{ is NL})
\end{aligned}
$$

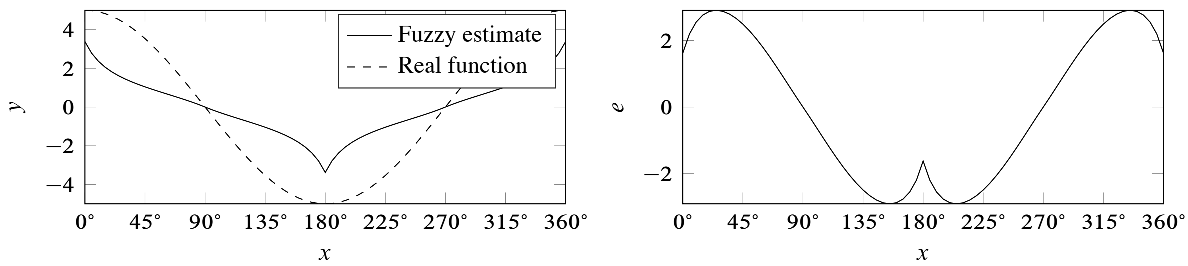
Διακριτοποιούμε την είσοδο ανά 5° και σχηματίζουμε τους πίνακες συμμετοχής $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_5$ και έπειτα διακριτοποιούμε αναλόγως την έξοδο, σχηματίζοντας τους πίνακες συμμετοχής NL, ZE, PL. Υλοποιούμε τους κανόνες ως ασαφείς σχέσεις μεταξύ των premise και consequent sets με τη χρήση του τελεστή συμπερασμού Mamdani $\mathcal{R}_c$, οπότε έχουμε για παράδειγμα, $R_1 = \mathcal{R}_c\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{PL})$.

Συνεπώς για τη singleton είσοδο $x = 70°$, ορίζουμε το ασαφές σύνολο A' το οποίο περιγράφεται από έναν πίνακα που έχει παντού μηδενική συμμετοχή εκτός από την θέση $x = 70°$, όπου η συμμετοχή είναι μοναδιαία. Επομένως, μπορούμε να εξάγουμε τα επιμέρους συμπεράσματα B_i για τους αντίστοιχους κανόνες R_i με τη σύνθεση του A' με την σχέση R_i, μέσω του τελεστή σύνθεσης max-min, και έπειτα να τροφοδοτήσουμε με αυτά των αποσαφοποιητή COS ώστε να εξάγουμε το $y^\star$. Στο σχήμα 2 βλέπουμε οτι καθώς τα μόνα σύνολα τα οποία δεν έχουν μηδενική συμμετοχή για $x = 70°$ είναι τα A_1 και A_2, ενεργοποιούνται οι κανόνες R_1, R_3 με αντίστοιχους βαθμούς εκπλήρωσης $\mathrm{DOF}_{\mathrm{R}_1} = 0.2222$ και $\mathrm{DOF}_{\mathrm{R}_3} = 0.7778$. Οπότε, για τη προκείμενη είσοδο, το ασαφές μοντέλο μας επιστρέφει $y^\star = 0.4882$, ενώ η πραγματική τιμή της συνάρτησης που θέλουμε να μοντελοποιήσουμε είναι $y = 5\cos(70°) = 1.7101$.



Σχήμα 2: Βαθμοί ενεργοποίησης των κανόνων για singleton είσοδο

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλες τις τιμές της εισόδου που προέκυψαν από την διακριτοποίησή της, παράγουμε τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματός μας, δινοντάς μας την εκτίμηση $\hat{y}$ της συνάρτησης $y = 5\cos(x)$, που αποτυπώνεται στο σχήμα 3. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ της πραγματικής συνάρτησης και της ασαφούς εκτίμησής μας είναι $\mathbb{E}[e^2] = 4.6468$, το οποίο δεν είναι ιδιαίτερα αποδεκτό. Όμως, το υψηλό σφάλμα είναι αναμενόμενο καθώς δεν έχουμε αρκετά ασαφή σύνολα για επαρκή μοντελοποίηση της συνάρτησης και το μόνο που μοντελοποιείται σωστά είναι το πρόσημο.

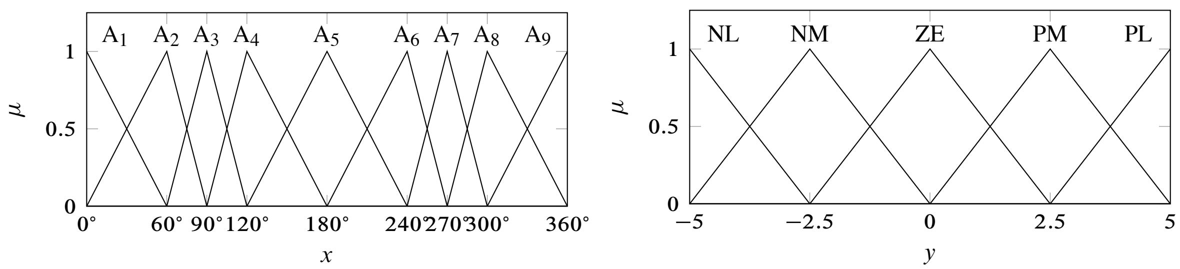


Σχήμα 3: Σύγκριση y, $\hat{y}$ και το μεταξύ τους σφάλμα $e = y - \hat{y}$

Επανασχεδίαση

Βλέποντας ότι η αρχική μας μοντελοποίηση κρίθηκε ανεπαρκής, θεωρούμε στο χώρο της εισόδου 5 ασαφή σύνολα έναντι των 3 που είχαμε προηγούμενως. Αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει να εισάγουμε και νέα σύνολα στο χώρο της εισόδου, καθώς και να ξαναδημιουργήσουμε βάση κανόνων. Έχοντας λοιπόν 5 σύνολα στην έξοδο, χρειαζόμαστε 8 σύνολα στην είσοδο και το γιατί είναι προφανές άμα δει κανείς ένα πίνακα τιμών του συνημιτόνου. Δίνουμε έμφαση ώστε για κάθε σημείο $x \in X$, το άθροισμα των συμμετοχών των συνόλων στα οποία ανήκει να είναι 1. Έτσι ένα σημείο δε θα ανήκει σε πάνω από 2 σύνολα ταυτόχρονα και οι συναρτήσεις συμμετοχής θα είναι συμπληρωματικές, όπως ήταν και στην αρχική σχεδίαση. Οι τελικοί διαμερισμοί των χώρων εισόδου και εξόδου φαίνονται στο σχήμα 4. Έπειτα δημιουργούμε μια νέα βάση κανόνων που να ανταποκρίνεται στα νέα δεδομένα του συστήματος, η οποία έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
R_1 &: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_1) \text{ THEN } (y \text{ is PL}) \\
\text{ALSO } R_2 &: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_9) \text{ THEN } (y \text{ is PL}) \\
\text{ALSO } R_3 &: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_2) \text{ THEN } (y \text{ is PM}) \\
\text{ALSO } R_4 &: \text{ IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_8) \text{ THEN } (y \text{ is PM})
\end{aligned}
$$

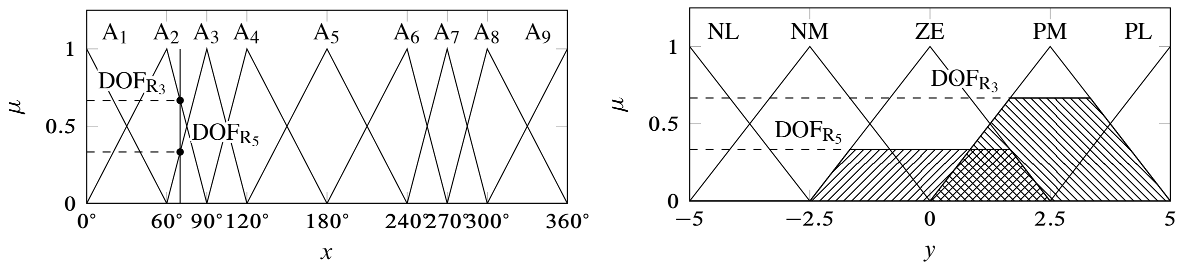


Σχήμα 4: Καινούρια ασαφή σύνολα εισόδου και εξόδου

$$\begin{aligned}
&\text{ALSO } R_5\text{: IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_3) \text{ THEN } (y \text{ is ZE})\\
&\text{ALSO } R_6\text{: IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_7) \text{ THEN } (y \text{ is ZE})\\
&\text{ALSO } R_7\text{: IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_4) \text{ THEN } (y \text{ is NM})\\
&\text{ALSO } R_8\text{: IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_6) \text{ THEN } (y \text{ is NM})\\
&\text{ALSO } R_9\text{: IF } (x \text{ is } \mathrm{A}_5) \text{ THEN } (y \text{ is NL})
\end{aligned}$$

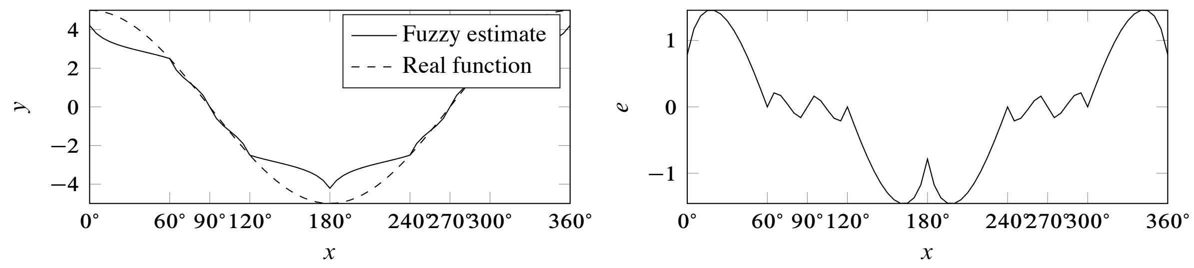
Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως προηγούμενως και διακριτοποίουμε την είσοδο ανά $5°$ και σχηματίζουμε τους πίνακες συμμετοχής $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_9$ και έπειτα διακριτοποιούμε αναλόγως την έξοδο, σχηματίζοντας τους πίνακες συμμετοχής NL, NM, ZE, PM, PL. Υλοποιούμε τους κανόνες ως ασαφείς σχέσεις μεταξύ των premise και consequent sets με τη χρήση του τελεστή συμπερασμού Mamdani $\mathcal{R}_c$, οπότε έχουμε για παράδειγμα, $R_1 = \mathcal{R}_c\,(\mathrm{A}_1, \mathrm{PL})$.

Επομένως για τη singleton είσοδο $x = 70°$, ορίζουμε το ασαφές σύνολο A' και εξάγουμε τα νέα συμπεράσματα B_i για τους αντίστοιχους κανόνες R_i. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5, το σημείο $x = 70°$ έχει μη-μηδενική συμμετοχή μόνο στα σύνολα A_2 και A_3, οπότε ενεργοποιούνται μονάχα οι κανόνες R_3 και R_5 με βαθμούς εκπλήρωσης $\mathrm{DOF}_{\mathrm{R}_3} = 0.6667$ και $\mathrm{DOF}_{\mathrm{R}_5} = 0.3333$ αντίστοιχα. Οπότε για τη δοσμένη είσοδο η έξοδος του αποσαφοποιητή είναι $y^\star = 1.5385$, τιμή που είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή $y = 5\cos(70°) = 1.7101$, ειδικά σε σχέση με την προγούμενη εκτίμηση.



Σχήμα 5: Βαθμοί ενεργοποίησης των νέων κανόνων για singleton είσοδο

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για όλες τις τιμές της εισόδου που προέκυψαν από την διακριτοποίησή της, παράγουμε τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματός μας, δινοντάς μας την νέα εκτίμηση $\hat{y}$ της συνάρτησης $y = 5\cos(x)$, που αποτυπώνεται στο σχήμα 6. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ της πραγματικής συνάρτησης και της ασαφούς εκτίμησής μας είναι



Σχήμα 6: Σύγκριση $y, \hat{y}$ και το μεταξύ τους σφάλμα $e = y - \hat{y}$

$\mathbb{E}[e^2] = 0.8147$, το οποίο εμφανής βελτίωση από το προγούμενο μοντέλο μας. Μαλιστά, παρατηρεί κανείς πως για τις ενδιάμεσες τιμές, δηλαδή όταν $x \in [60°, 120°]$ ή $x \in [240°, 300°]$, η προσέγγισή μας είναι αρκετά ικανοποιητική. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι για αυτές τις τιμές εισόδου συνάρτηση y εμφανίζει σχεδόν γραμμική συμπεριφόρα καθώς και στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν σημεία καμπής στις περιοχές αυτές, συνεπώς η y είναι εύκολα προβλέψιμη. Επιπλέον φαίνεται ότι τα σημεία καμπής αποτελούν τις περιοχές με την μέγιστη ανακρίβεια, όπου εκεί το απόλυτο σφάλμα e ξεπερνάει τη μονάδα. Αυτό συμβαίνει γιατί στις περιοχές αυτές οι συναρτήσεις συμμετοχής είναι μη-συμμετρικά τρίγωνα και δεδομένου οτί χρησιμοποιούμε αποσαφοποιήτη COS οι εκάστοτε τιμές $y^\star$ της κάθε συνάρτησης συμμετοχής για τα τρίγωνα αυτά δεν βρίσκονται στα ιδανικά σημεία. Π.χ. όταν έχουμε singleton είσοδο $x = 180°$, το x ανήκει πλήρως στο A_5 και ο βαθμός εκπλήρωσης του κανόνα R_9 είναι $\text{DOF}_{\text{R}_9} = 1$, παρόλα αυτά προκύπτει ότι το $y^\star = -4.213$ αντί για -5 που θα ήταν το ιδανικό, πράγμα το οποίο θα μπορούσε να λυθεί με τη χρήση διαφορετικού αποσαφοποιητή.