Transformée de Fourier 2D

Transformée de Fourier 2D

- Principaux signaux
- TF 2D analogique
- TF 2D discrète

ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 2

Principaux signaux

ENSTA Bretagne

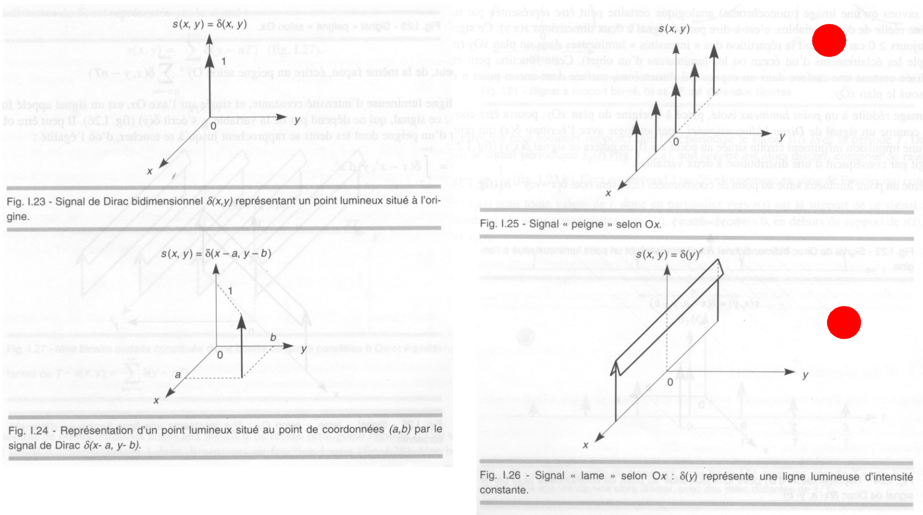


Fig. I.23 - Signal de Dirac bidimensionnel $\delta(x,y)$ représentant un point lumineux situé à l'origine.

Fig. I.24 - Représentation d'un point lumineux situé au point de coordonnées (a,b) par le signal de Dirac $\delta(x-a, y-b)$.

Fig. I.25 - Signal « peigne » selon Ox.

Fig. I.26 - Signal « lame » selon Ox : $\delta(y)$ représente une ligne lumineuse d'intensité constante.

Principaux signaux

ENSTA Bretagne

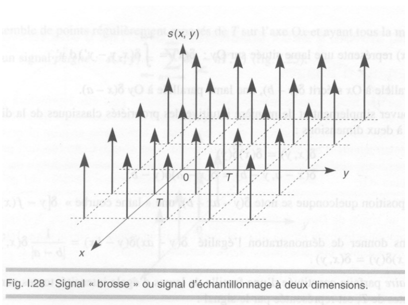


Fig. I.28 - Signal « brosse » ou signal d'échantillonnage à deux dimensions.

Transformée de Fourier

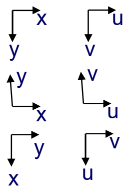
Utilité ?

- Évaluation du contenu fréquentiel d'une image (i.e information sur les taux de variations des intensités/niveaux de gris dans le domaine spatial) :
- Utilité en filtrage
- Intérêt en détection d'objets d'intérêts, en identification d'objets spécifiques, en reconnaissance de formes

Transformée de Fourier

1. Définition

u,v : fréquences spatiales (traduisent les taux de variations de niveaux de gris dans le domaine spatial),
y : axe vertical
x : axe horizontal



$$\boxed{S(u,v) = \iint_{[-\infty,+\infty]} s(x,y).\exp\left[-2\pi j(u.x+v.y)\right] dx.dy}$$

$$s(x,y) = \iint_{[-\infty,+\infty]} S(u,v).\exp\left[2\pi j(u.x+v.y)\right] du.dv$$

$$S(u,v) = \mathrm{Re}(u,v) + j\mathrm{Im}(u,v)$$

$$S(u,v) = |S(u,v)|.\exp\left[j.\phi(u,v)\right]$$

Transformée de Fourier

2. Amplitude et phase

- Spectre d'amplitude

$$|S(u,v)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(u,v) + \mathrm{Im}^2(u,v)} = \sqrt{S(u,v)S^*(u,v)}$$

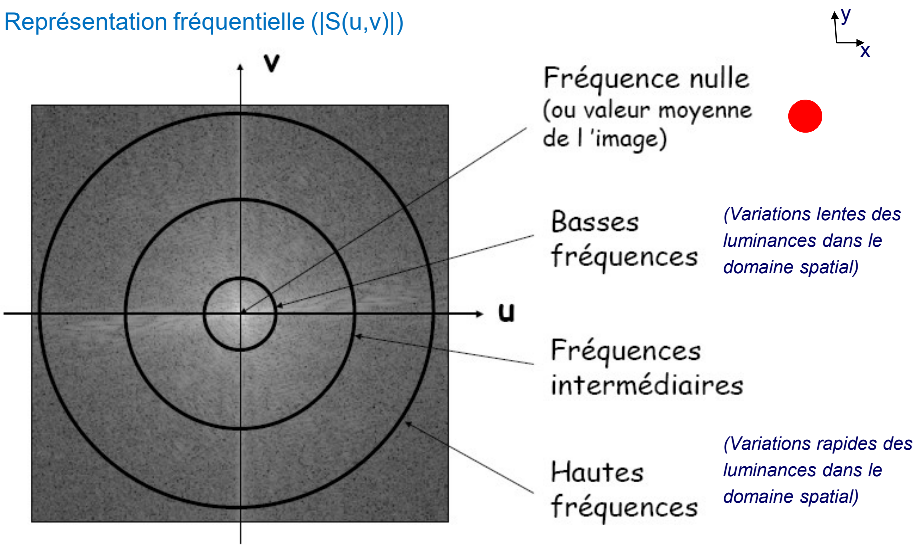
$$\text{avec} \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s(x,y)\cos\left(2\pi(u.x+v.y)\right)\ dxdy \\ \mathrm{Im}(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} s(x,y)\sin\left(2\pi(u.x+v.y)\right)\ dxdy \end{array}$$

- Spectre de phase

$$\phi(u,v) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right)$$

Transformée de Fourier

Représentation fréquentielle (|S(u,v)|)



Transformée de Fourier

3. Linéarité

$$s \to S \quad , \quad w \to W \quad , \quad a \in \Re, b \in \Re$$
$$a.s + b.w \underset{TF\_2D}{\longrightarrow} a.S + b.W$$

4. Symétrie hermitienne

$$\text{si } s \text{ est réelle } (\Leftrightarrow s(x,y) \in \Re \quad \forall (x,y))$$

$$\text{alors } S(u,v) = S^*(-u,-v) \quad \forall u \ , \forall v$$

ce qui implique :

$$|S(u,v)| = |S(-u,-v)|$$
$$\phi(u,v) = -\phi(-u,-v)$$

Transformée de Fourier

5. Modulation / Translation

$$s(x,y).\exp\left[2\pi j\left(u_0.x + v_0.y\right)\right] \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} S(u-u_0, v-v_0)$$
$$s(x-x_0, y-y_0) \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} S(u,v).\exp\left[-2\pi j\left(u.x_0 + v.y_0\right)\right]$$

6. Convolution

$$w(x,y) = h(x,y) * s(x,y)$$
$$\text{soit } w(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha,\beta).s(x-\alpha, y-\beta).d\alpha.d\beta$$
$$\text{soit } w(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-\alpha, y-\beta).s(\alpha,\beta).d\alpha.d\beta$$
$$\text{et } W(u,v) = H(u,v).S(u,v)$$

7. Séparabilité

$$s(x,y) = s_1(x).s_2(y) \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} \mathrm{S(u,v)} = \mathrm{S}_1(u).S_2(v)$$

Transformée de Fourier

8. Changement d'échelle

$$s(ax, by) \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} \frac{1}{|ab|} S\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

9. Invariance par rotation

$$\begin{aligned}&\text{Si } s(r,\theta) \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} S(\rho,\varphi)\\ &\text{alors } s(r,\theta+\alpha) \overset{TF\_2D}{\longrightarrow} S(\rho,\varphi+\alpha)\end{aligned}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une lame selon (Ox) est une lame selon (Ov)

$$\begin{aligned}&TF(s(x,y)) = \delta(u)\\ &\text{si } s(x,y) = \delta(y)\end{aligned}$$

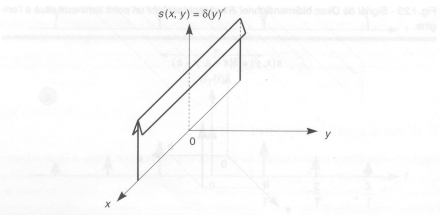


Fig. I.26 - Signal « lame » selon Ox : δ(y) représente une ligne lumineuse d'intensité constante.

Transformée de Fourier

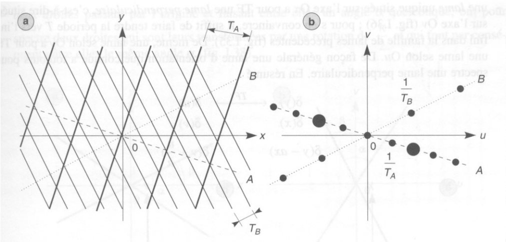


Fig. I.34 - a) Représentation schématique d'un objet lumineux périodique selon deux directions quelconques OA et OB du plan xOy, b) le module du spectre de cet objet, vu de dessus, est formé de points alignés selon les mêmes directions OA et OB du plan des fréquences spatiales uOv.

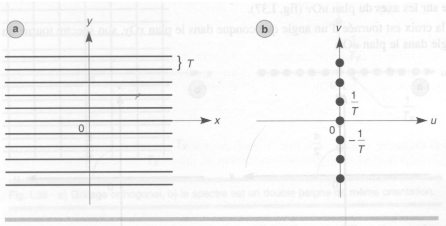


Fig. I.35 - a) Mire binaire constituée d'une famille de lames parallèles à Ox équidistantes de T, b) le spectre est formé de points distants de $1/T$ alignés selon l'axe Ov et tous de même intensité.

Le spectre d'un signal périodique est un spectre de raies

Transformée de Fourier

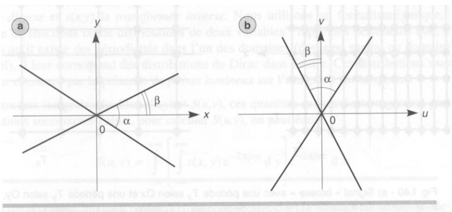


Fig. I.38 - a) Croix d'angle α et d'orientation quelconque, b) le spectre est une croix de même angle tournée de $\pi/2$.

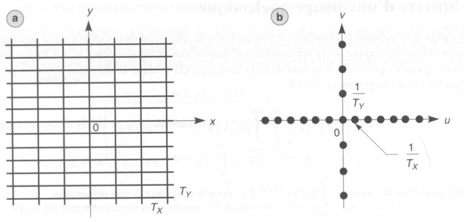


Fig. I.39 - a) Grillage orthogonal, b) le spectre est un double peigne de même orientation.

Transformée de Fourier

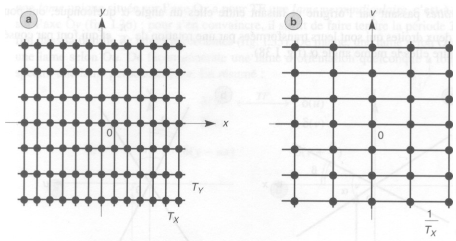


Fig. I.40 - a) Signal « brosse » avec une période T_X selon Ox et une période T_Y selon
b) le spectre est également une brosse de périodes $1/T_X$ selon Ou et $1/T_Y$ selon Ov.

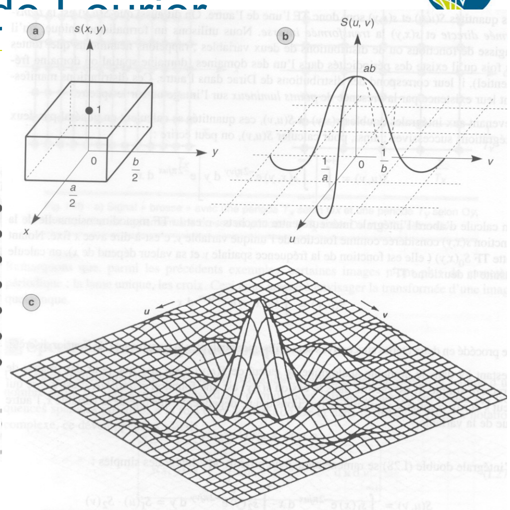


Fig. I.41 - a) Rectangle lumineux d'intensité unité, de côtés a et b selon Ox et Oy,
b) et c) la transformée de Fourier est le produit de deux fonctions en $\frac{\sin u}{u}$ et $\frac{\sin v}{v}$:
$S(u, v) = ab \operatorname{sinc} \pi ua \operatorname{sinc} \pi vb$.

Transformée de Fourier

ENSTA Bretagne

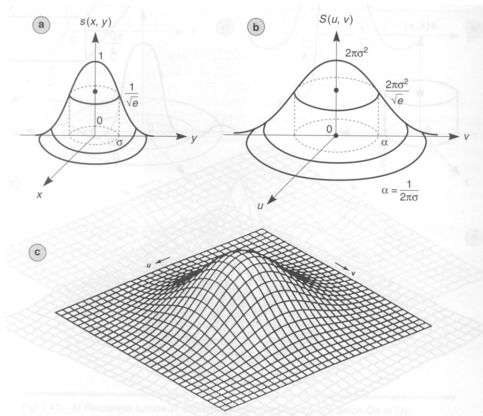


Fig. I.43 - a) Image gaussienne de révolution, de méridienne $e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ où r est le rayon $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, b) et c) : la transformée de Fourier est également une gaussienne de révolution, de méridienne $2\pi\sigma^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\alpha^2}}$ où ρ est le rayon $\left(\rho = \sqrt{u^2 + v^2}\right)$ et où $\alpha = \frac{1}{2\pi\sigma}$.

La transformée de Fourier discrète 2D

u,v : fréquences spatiales (traduisent les taux de variations de niveaux de gris dans le domaine spatial), en cycles par pixel
m : indice ligne (axe vertical) / n : indice colonne (axe horizontal)

1. Définition

$$S(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(m,n).\exp\left[-2\pi j(um + vn)\right]$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathrm{u} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{M}} & ,k = 0,1,...,M-1 \\ \mathrm{v} = \frac{\mathrm{l}}{\mathrm{N}} & ,l = 0,1,...,N-1 \end{cases}$$

u et v sont les fréquences spatiales en cycles par pixels et varient entre 0 et 1

u/M et v/N sont les fréquences spatiales en cycles par pixels et varient entre 0 et 1

$$S(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(m,n).\exp\left[-2\pi j(\tfrac{u}{M}m + \tfrac{v}{N}n)\right]$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathrm{u} = 0,1,...,M-1 \\ \mathrm{v} = 0,1,...,N-1 \end{cases}$$

u et v sont les fréquences spatiales en cycles par image et varient entre 0 et M-1 (resp N-1)

Fréquences d'échantillonnage en x et y : 1

La transformée de Fourier discrète 2D

1. Définition

$$S(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(m,n).\exp\left[-2\pi j(\tfrac{u}{M}m + \tfrac{v}{N}n)\right]$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathrm{u} = 0,1,...,M-1 \\ \mathrm{v} = 0,1,...,N-1 \end{cases}$$

S(u,v) est généralement complexe

$\Downarrow$

$$S(u,v) = \mathrm{Re}(u,v) + j\,\mathrm{Im}(u,v)$$

OU

$$S(u,v) = |S(u,v)|.\exp[j\varphi(u,v)]$$

Module => spectre d'amplitude

Phase => spectre de phase

La transformée de Fourier discrète 2D

2. Amplitude et phase

- Spectre d'amplitude

$$|S(u,v)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(u,v) + \mathrm{Im}^2(u,v)}$$

$$\text{avec} \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}(u,v) = \sum\limits_m \sum\limits_n s(m,n) \cos\left(2\pi(\frac{u}{M}m + \frac{v}{N}n)\right) \\ \mathrm{Im}(u,v) = \sum\limits_m \sum\limits_n s(m,n) \sin\left(2\pi(\frac{u}{M}m + \frac{v}{N}n)\right) \end{array}$$

- Spectre de phase

$$\phi(u,v) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(u,v)}{\mathrm{Re}(u,v)}\right)$$

Généralement difficile à interpréter mais contient l'information sur la localisation des objets dans l'image, sur leur placement relatif

ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 19

La transformée de Fourier discrète 2D

u,v

4. Symétrie

si s est réelle($\Leftrightarrow s(m,n) \in \Re \quad \forall (m,n)$)
alors $S(u,v) = S^*(M-u, N-v)$
$\forall u \; tq \; 0 \leq u \leq M-1, \forall v \; tq \; 0 \leq v \leq N-1$

$\Rightarrow$ Point de symétrie de $S(u,v)$ en $\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right)$

si s est réelle($\Leftrightarrow s(m,n) \in \Re \quad \forall (m,n)$)
alors $S(u',v') = S^*(1-u', 1-v')$
$\forall u \; tq \; 0 \leq u' = u/M \leq= 1 - 1/M,$
$\forall v \; tq \; 0 \leq v' = v/N \leq 1 - 1/N$

$\Rightarrow$ Point de symétrie de $S(u,v)$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

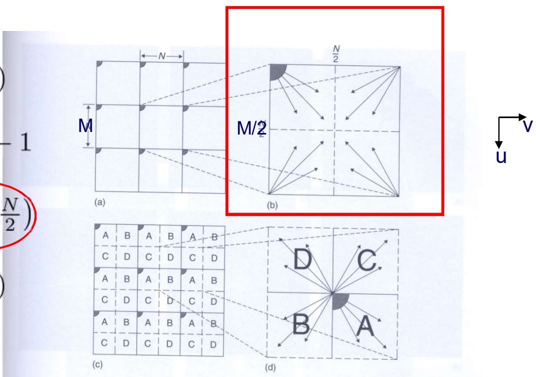


FIGURE 5.2.11
Periodicity and implied symmetry for the Fourier transform. (a) Implied symmetry with origin in upper-left corner. Each $N \times N$ block represented all the transform coefficients, and is repeated infinitely in all directions. (b) Increasing frequency in direction of arrows. (c) Periodic spectrum, with quadrants labeled A, B, C, and D. (d) Spectrum shifted to center. Frequency increases in all directions as we move away from the origin.

ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 20

La transformée de Fourier discrète 2D

u,v

5. Périodicité

$$\forall 0 \le u \le M-1 \quad \forall 0 \le v \le N-1$$
$$\forall k \in IN \quad \forall l \in IN$$
$$S(u+k.M, v+l.N) = S(u,v)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall 0 \le u' = u/M \le 1-1/M$$
$$\forall 0 \le v' = v/N \le 1-1/N$$
$$\forall k \in IN \quad \forall l \in IN$$
$$S(u'+k, v'+l) = S(u', v')$$

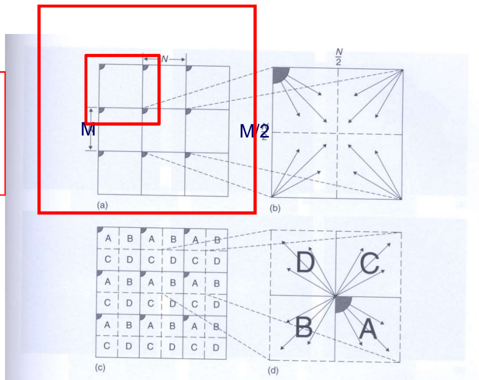


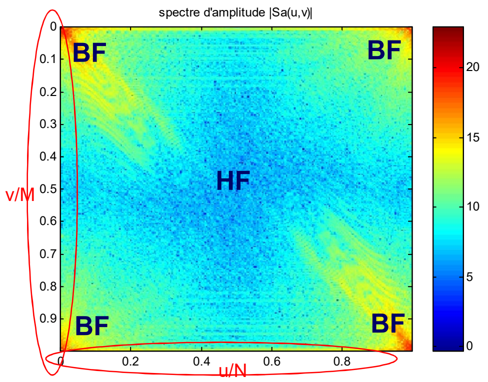
FIGURE 5.2.11
Periodicity and implied symmetry for the Fourier transform. (a) Implied symmetry with origin in upper-left corner. Each $N \times N$ block represented all the transform coefficients, and is repeated infinitely in all directions. (b) Increasing frequency in direction of arrows. (c) Periodic spectrum, with quadrants labeled A, B, C, and D. (d) Spectrum shifted to center. Frequency increases in all directions as we move away from the origin.

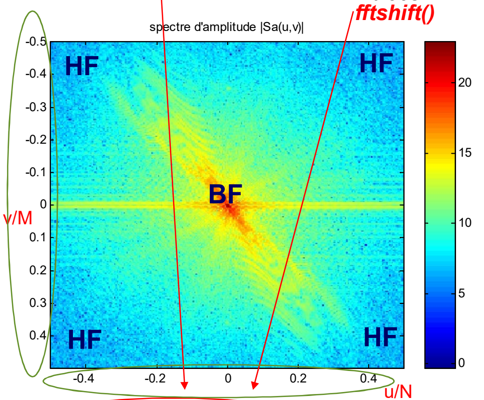
La transformée de Fourier discrète 2D

7. Représentation de la TFD-2D

$s(m,n)(-1)^{n+m} \Updownarrow$

Manipulation supplémentaire sous OpenCV pour réarranger les 4 blocs
fftshift()



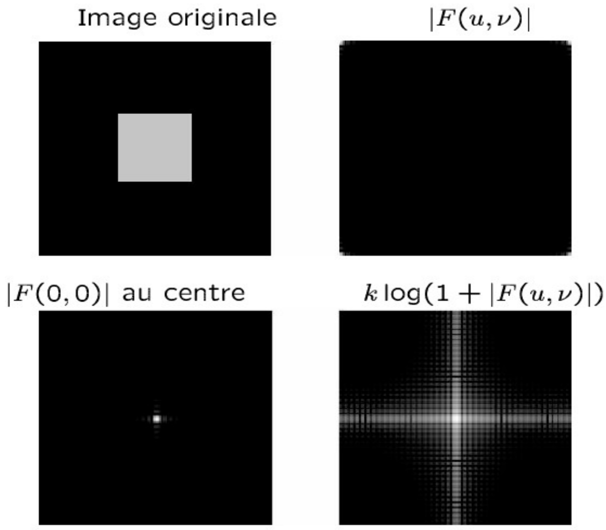


$|S(u,v)| \quad ou \quad \log_2(1+|S(u,v)|)$
$\forall 0 \le u \le 1-1/M \quad \forall 0 \le v \le 1-1/N$

$|S(u-1/2, v-1/2)|$
$\forall -0.5 \le u \le 0.5 \quad \forall -0.5 \le v \le 0.5$

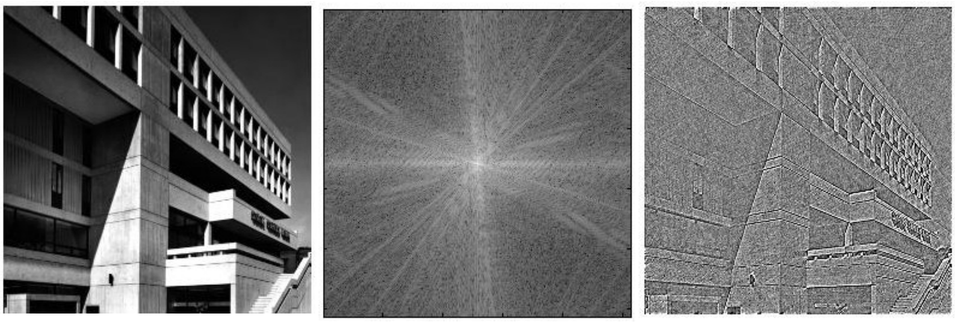
La transformée de Fourier discrète 2D

Autre exemple



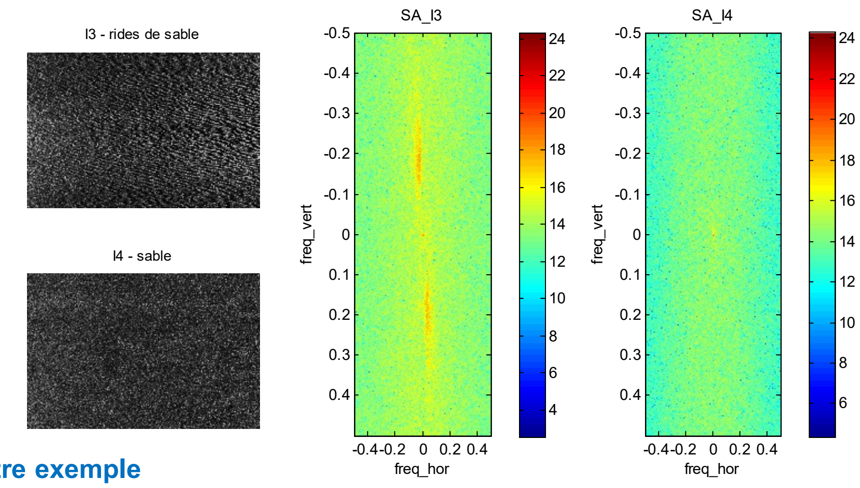
La transformée de Fourier discrète 2D

Autre exemple



$\log\left(|F(u,v)|\right)$ $\varphi(u,v)$

La transformée de Fourier discrète 2D



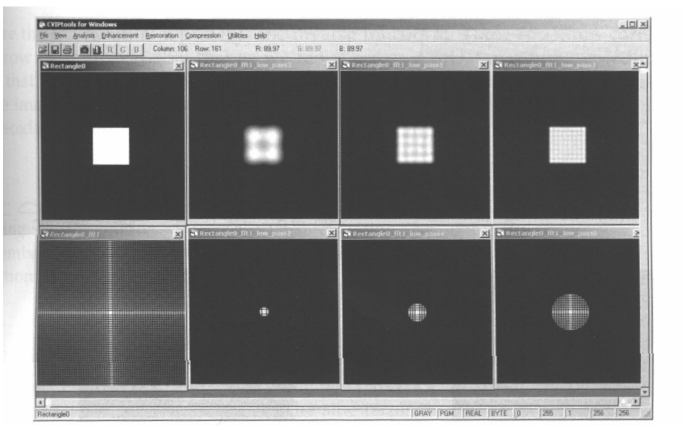
Autre exemple

ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 25

La transformée de Fourier discrète 2D

Interprétation fréquences hautes / basses

Source : Computer imaging, Scott E Umbaugh



harmonics. (f) Approximation to the sum of the first 20 harmonics. (g) CVIPtools screen capture of a square and successively adding more harmonics. Across the top are the reconstructed squares with 8, 16 and then 32 harmonics. Across the bottom are the corresponding Fourier transform magnitude images.

ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 26

La transformée de Fourier discrète 2D

Interprétation fréquences hautes / basses

Source : Computer imaging, Scott E Umbaugh

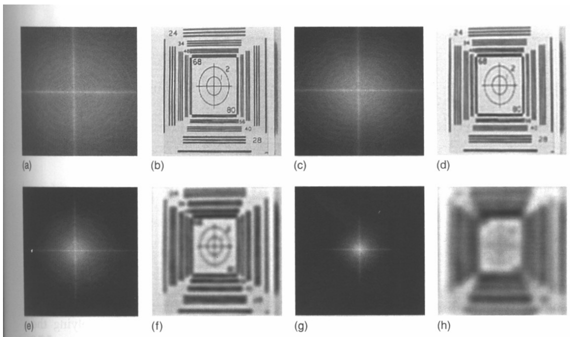


FIGURE 5.7.5
Butterworth lowpass filtering, filter order = 3, various cutoff frequencies. (a) Fourier spectrum, cutoff frequency = 64. (b) Resultant image with cutoff frequency = 64. (c) Fourier spectrum, cutoff frequency = 32. (d) Resultant image with cutoff frequency = 32. (e) Fourier spectrum, cutoff frequency = 16. (f) Resultant image with cutoff frequency = 16. (g) Fourier spectrum, cutoff frequency = 8. (h) Resultant image with cutoff frequency = 8.

Une autre façon de deviner la TF2D d'une image …

1. Echantillonnage spatial (par une brosse de Dirac) => périodisation fréquentielle (la TF est périodique)
2. Troncature spatiale (multiplication de l'image par une fenêtre de pondération 2D) => filtrage du spectre (convolution du spectre par la réponse en fréquence de la fenêtre)
3. Périodisation spatiale ⇐ 3. Echantillonnage fréquentiel
4. Restriction du spectre sur une période

TFD 2D et OpenCV / Numpy

OPENCV

Transformée de Fourier discrète : cv2.dft ()

cv2.dft(src[, dst[, flags[, nonzeroRows]]]**)** → dst

Transformée de Fourier Inverse : cv2.idft()

cv2.idft(src[, dst[, flags[, nonzeroRows]]]**)** → dst

Spectre d'amplitude : **cv2.magnitude(**x, y[, magnitude]**)** → magnitude

Spectre de phase : **cv2.phase(**x, y[, angle[, angleInDegrees]]**)** → angle

Spectre d'amplitude et de phase : **cv2.cartToPolar()**

NUMPY

fft.fft2() , fft.ifft2()

abs()

fft.fftshift()

Sinusoïdes à espace discret

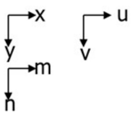
- Fonction sinusoïdale 1D
  - Déphasage à l'origine
  - Fréquence d'oscillation

$$f(n) = A.\sin(2\pi f_0.n + \varphi)$$

- Fonction sinusoïdale 2D
  - Déphasage à l'origine
  - 2 fréquences d'oscillation *(U – fréq / axe de m et V – fréq / axe de n)*
  - Ou la fréquence d'oscillation la plus rapide (fréquence radiale) et la direction de cette oscillation

$$f(m,n) = A.\sin(2\pi(U.m + V.n) + \varphi)$$

$$\Omega = \sqrt{U^2 + V^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{V}{U}\right)$$



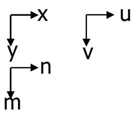
$$U = \frac{u_S}{M} \; et \; V = \frac{v_S}{N}$$

u_S et v_S représentent le nombre de cycles entiers que réalise la fonction sinus sur une distance de M pixels horizontalement et N pixels verticalement.
Par exemple, u_S =2 et v_S =2 spécifient une fonction sinusoïdale qui réalise deux cycles entiers dans les deux directions horizontale et verticale créant ainsi une onde orientée diagonalement

$$\exp[2\pi j(U.m + V.n)]$$

Exemple de sinusoïdes à espace discret

- Au niveau logiciel :



- Fonction sinusoïdale 2D *(ancien TE1)*
  - Avec déphasage nul à l'origine et amplitude A=1

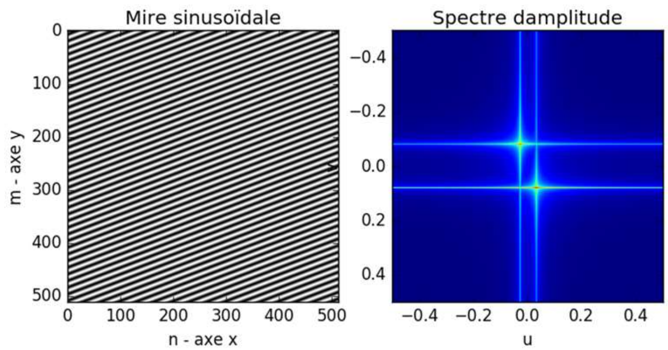
$$f(m,n) = A.\sin\left(2\pi\left(U.m + V.n\right) + \varphi\right)$$

$$\Downarrow$$

$$f(m,n) = \sin\left(2\pi\left(F_y.m + F_x.n\right)\right)$$

Fx,Fy= 0.03, 0.08;#fréquences définissant la sinusoïde données en cycles par
#pixel. Il faut les multiplier par le nombre de pixels par ligne et par colonne
#pour les avoir en cycles par image.
#ce qui donne Fx=15 cycles par image et Fy=40 cycles par image

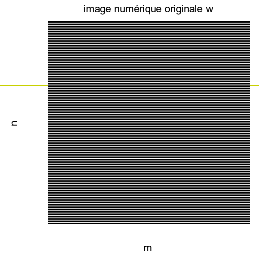
TFD2D de la mire sinusoïdale

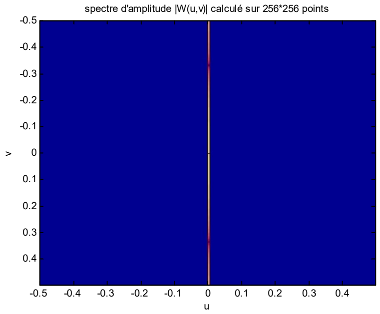


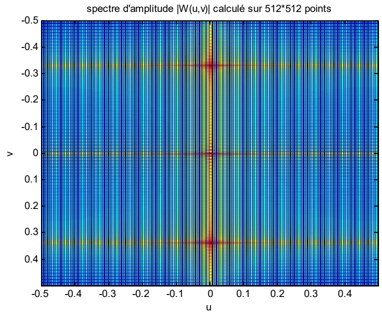
#En comptant les cycles (<=> périodes) sur chaque axe,
#on trouve nb_cycles_x=16 env et nb_cycles_y=41 env, ce qui correspond bien à
#fx=0.031 env et fy=0.08
#Remarque 2 : on observe bien deux pics fréquentiels, l'un en u=0.031 et v=0.078
#et l'autre en u=-0.031 et v=-0.078. Les deux pics sont en fait des sinc du fait
#de la troncature rectangulaire implicite

Zero-padding

- Objectif : améliorer la précision de la réponse fréquentielle, augmenter la visibilité du spectre pour une meilleure interprétation du spectre

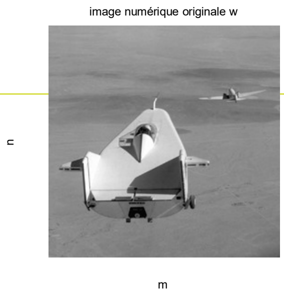


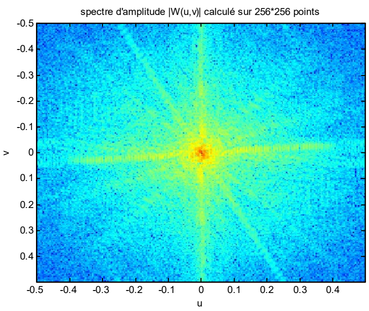


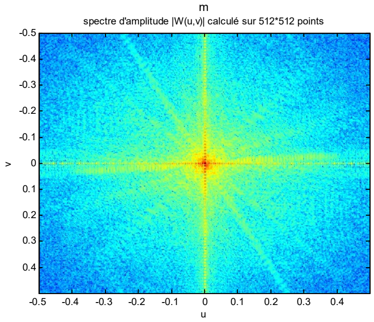


ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 33

Zero-padding (2)







ENSTA Bretagne – SE - UE41 ROB / UE42 SOIA – Traitement Numérique des Images – T 34