Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2020

Redictado

Prof. Alejandra Schiavoni (ales@info.unlp.edu.ar)

Prof. Catalina Mostaccio (catty@lifia.info.unlp.edu.ar)

Prof. Claudia Queiruga (claudiaq@info.unlp.edu.ar)

Prof. Pablo Iuliano (piuliano@info.unlp.edu.ar)

Agenda
Análisis de algoritmos

- Introducción al concepto T(n)
  - Tiempo, entrada, peor caso, etc.
- Cálculo del T(n)
  - En algoritmos iterativos
  - En algoritmos recursivos
- Notación Big-Oh
  - Definición y ejemplos
  - Reglas (suma, producto)
- Ejemplo de optimización de algoritmos

Análisis de algoritmos

- *Nos permite comparar algoritmos en forma independiente de una plataforma en particular*

- *Mide la eficiencia de un algoritmo, dependiendo del tamaño de la entrada*

Análisis de algoritmos

Pasos a seguir:

- Caracterizar los datos de entrada del algoritmo
- Identificar las operaciones abstractas, sobre las que se basa el algoritmo
- Realizar un análisis matemático, para encontrar los valores de las cantidades del punto anterior

Introducción al concepto T(n)

Criterios de elección

- Recursos de computadora
  - espacio de memoria
  - tiempo de ejecución

Medida de eficiencia

- enfoque empírico (a posteriori)
- enfoque teórico (a priori)

T(n) **n**: tamaño de la entrada de los datos

se calcula en forma teórica.

tiempo en el peor de los casos.

Introducción al concepto T(n)

Adivinar número - Búsqueda lineal o binaria-

https://es.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/intro-to-algorithms/a/a-guessing-game

Hemos analizado la búsqueda lineal y la búsqueda binaria al contar el número máximo de intentos que necesitamos hacer.
Pero lo que en realidad queremos saber es *cuánto tiempo tardan* estos algoritmos.
Estamos interesados en el *tiempo*, no sólo en la cantidad máxima de *intentos*.

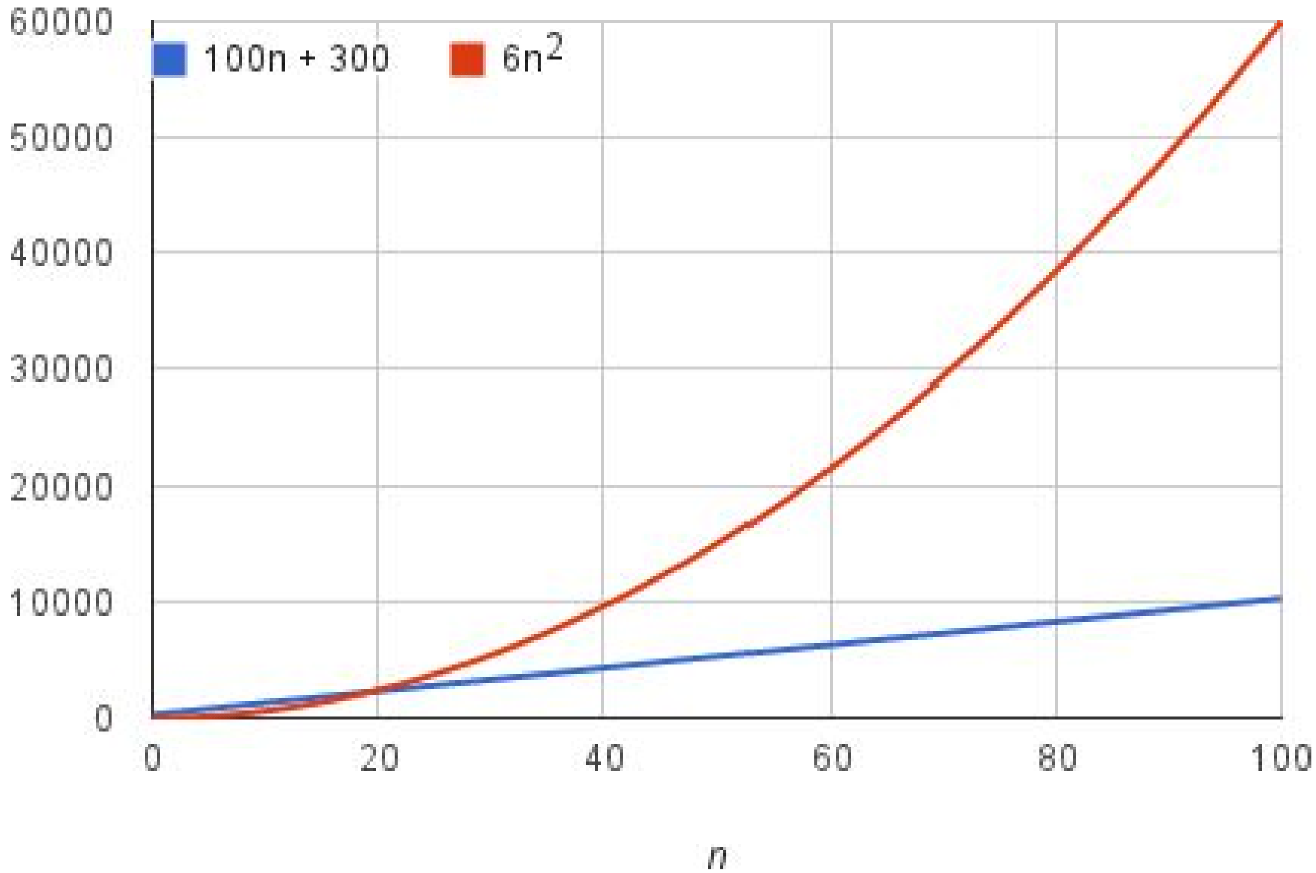
Introducción al concepto T(n)

Debemos enfocarnos en cuán rápido crece una función T(n) respecto al tamaño de la entrada. A esto lo llamamos la **tasa o velocidad de crecimiento** del tiempo de ejecución.

Por ejemplo, supongamos que un algoritmo, que corre con una entrada de tamaño n, tarda $\mathbf{6n^2+100n+300}$ instrucciones de máquina. El término $\mathbf{6n^2}$ se vuelve más grande que el resto de los términos, **100n+300** una vez que n se hace suficientemente grande, 20 en este caso.

Introducción al concepto T(n)

Gráfica que muestra los valores de $6n^2$ y de $100n+300$ para valores de n de 0 a 100:



Introducción al concepto T(n)

Al descartar los términos menos significativos y los coeficientes constantes, podemos enfocarnos en la parte importante del tiempo de ejecución de un algoritmo, su tasa o velocidad de crecimiento, sin involucrarnos en detalles que complican nuestro entendimiento.

Cuando descartamos los coeficientes constantes y los términos menos significativos, usamos **notación asintótica**.

Cuadro comparativo del tiempo para diferentes funciones

Costo		$n=10^3$	Tiempo	$n=10^6$	Tiempo
Logarítmico	$\log_2(n)$	10	10 segundos	20	20 segundos
Lineal	n	10^3	16 minutos	10^6	11 días
Cuadrático	n^2	10^6	11 días	10^{12}	30.000 años

Orden de ejecución del algoritmo

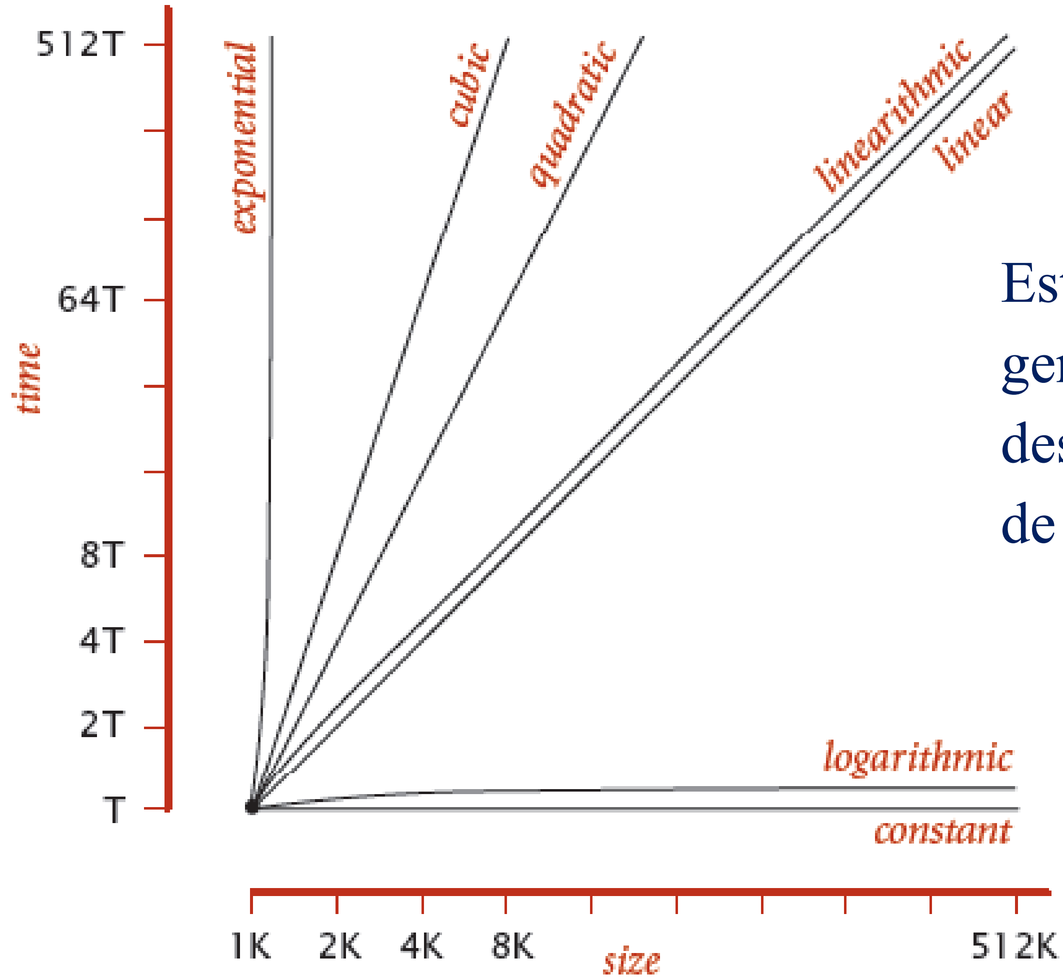
Cantidad de operaciones — Tiempo total del algoritmo: $n = 10^3$

Cantidad de operaciones — Tiempo total del algoritmo: $n = 10^6$

Algunas funciones

Ordenadas en forma creciente	Nombre
1	Constante
log n	Logaritmo
n	Lineal
n log n	n Log n
$\mathbf{n^2}$	Cuadrática
$\mathbf{n^3}$	Cúbica
$\mathbf{c^n \quad c>1}$	Exponencial

Algunas funciones



Este conjunto de funciones en general es suficiente para describir la tasa de crecimiento de los algoritmos típicos

Problema

Considerando que un algoritmo requiere *f(n)* operaciones para resolver un problema y la computadora procesa 100 operaciones por segundo.

Si *f(n)* es:

a.- $\log_{10} n$

b.- $\sqrt{n}$

Determine el tiempo en segundos requerido por el algoritmo para resolver un problema de tamaño n=10000.

Problema

Suponga que Ud. tiene un algoritmo ALGO-1 con un tiempo de ejecución exacto de $10n^2$. ¿En cuánto se hace más lento ALGO-1 cuando el tamaño de la entrada *n* aumenta:……….?

a.- El doble

b.- El triple

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Estructuras de Control

- Secuencia
- Condicional:
  - *if /else*
  - *switch*
- Iteración:
  - *for*
  - *while*
  - *do-while*

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Condicional:

a) *__if__ (boolean expression) {*
statement(s)
}

b) *__if__ (boolean expression) {*
statement(s)
} __else__ {
statement(s)
}

Cálculo del Tiempo de Ejecución

➢ Condicional:

c) ***switch*** *(integer expession) {*

    case *integer expression : statement(s) ;* ***break****;*

    ...

    case *integer expression : statement(s) ;* ***break****;*

    default *: statement(s) ;* ***break****;*

}

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración:

a) **for** *(initialization; termination; increment) {*
```
      statement(s)
  }
```

b) **while** *(boolean expression) {*
```
          statement(s)
  }
```

c) **do** *{*
```
          statement(s)
  } while (boolean expression);
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración:

a) For

Viene como
parámetro

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n];
for (int i =1; i<= n ; i++ )
    sum += a[i];
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración:

a) *For*

Viene como parámetro

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n];
for (int i =1; i<= n ; i++ )
    sum += a[i];
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} cte_2 =$$

$$= cte_1 + n * cte_2$$

$$\Rightarrow O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Viene como parámetro

a) For

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n][n];
for (int i =1; i<= n ; i++) {
  for (int j =1; j<= n ; j++)
      sum += a[i][j];
}
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

a) ***For***

Viene como parámetro

```
int sum = 0;
int [] a = new int [n][n];
for (int i =1; i<= n ; i++) {
   for (int j =1; j<= n ; j++)
      sum += a[i][j];
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} cte_2 =$$

$$= cte_1 + n*n*cte_2$$

$$\Rightarrow O(n^2)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

a) *For*

Viene como parámetro

```
int [] a = new int [n];
int [] s = new int [n];
for ( int i =1; i<= n ; i++ )
      s[i] = 0;
for ( int i =1; i<= n ; i++) {
  for (int j =1; j<= i ; j++)
        s[i] += a[j];
}
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

a) *For*

Viene como parámetro

```
int [] a = new int [n];
int [] s = new int [n];
for ( int i =1; i<= n ; i++ )
      s[i] = 0;
for ( int i =1; i<= n ; i++) {
  for (int j =1; j<= i ; j++)
      s[i] += a[j];
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{n} cte_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} cte_3 =$$

$$= cte_1 + n * cte_2 +$$

$$cte_3 * \sum_{i=1}^{n} i = \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow O(n^2)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración:

b) *While*

```
int x= 0;
int i = 1;
while ( i <= n) {
        x = x + 1;
        i = i + 2;
}
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración:

b) *While*

```
int x= 0;
int i = 1;
while ( i <= n) {
        x = x + 1;
        i = i + 2;
}
```

$$T(n) = cte_1 + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} cte_2 =$$

$$= \quad cte_1 + cte_2/2 * (n+1)$$

$$\Rightarrow O(n)$$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración :

b) While

```
int x= 1;
while ( x < n)
    x = 2 *x;
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

- Iteración :

b) *While*

$$T(n) = cte_1 + cte_2 * \log(n)$$

```
int x= 1;
while ( x < n)
    x = 2 *x;
```

$$\Rightarrow O(\log(n))$$

Aclaración:

Si n es potencia de 2: realiza log(n) iteraciones

Si n no es potencia de 2: realiza log(n) + 1 iteraciones

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejercicio

¿Cuál es la expresión correcta respecto al tiempo de ejecución del siguiente segmento de código?

```
for (i = 0; i < n; i++)
        for (j = 1; j < n; j+=n/2)
            x = x + 1;
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejercicio

¿Cuál es la expresión correcta respecto al tiempo de ejecución del siguiente segmento de código?

```
for (i = 0; i < n; i++)
      for (j = 1; j < n; j+=n/2)
         x = x + 1;
```

(a) $O(\sqrt{n})$ (b) $O(n)$ (c) $O(n \log n)$ (d) $O(n^2)$ (e) $O(n^3)$

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejercicio

Considere el siguiente fragmento de código:

```
int count = 0;
int N = a.length;
for (int i = 0; i < N; i++)
      for (int j = 0; j < N; j++)
            a[j]++;
```

Suponga que tarda 1 seg cuando N=3500,
¿cuánto tardará aproximadamente para N=35000? Justifique su respuesta.

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo:

```
private void imparesypares(int n){
 int x=0; int y=0;

 for (int i=1;i<=n;i++)
      if (esImpar(i))
          for (int j=i;j<=n;j++)
              x++;
      else
          for (int j=1;j<=i;j++)
              y++;

}
```

```
public boolean esImpar(int unNumero){
      if (unNumero%2 != 0)
        return true;
      else
        return false;
 }
```

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Desarrollo de la función T(n) del método *imparesypares*

- Asumiendo valor de "n" par.
- El método ***esImpar*** tiene todas sentencias constantes

$$T_{esImpar}(n) = cte1$$

- El método ***imparesypares*** tiene un loop en el que: en cada iteración se llama al método ***esImpar*** y la mitad de las veces se ejecuta uno de los *for* (para valores de "i" impares) y la mitad restante el otro *for* (para valores de "i" pares)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n[paso\,2]} \Big(\sum_{j=i}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{i+1} cte2 \Big)$$

Valores pares dados por el siguiente a los impares "*i*"

Es la llamada al método ***esImpar,*** que se ejecuta para todos los valores de "*i*"

Valores de "*i*" impares

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Desarrollo de la función T(n) del método *imparesypares*

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n/2} \Big(\sum_{j=2*i-1}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{2*i} cte2 \Big)$$

Como "*i*" ahora toma valores consecutivos entre 1 y n/2, entonces se hace un cambio de variable para seguir tomándose valores impares y pares en cada loop.

Cálculo del Tiempo de Ejecución

Ejemplo (cont.):

Resolviendo la función T(n)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} cte1 + \sum_{i=1}^{n/2} \Big(\sum_{j=2*i-1}^{n} cte2 + \sum_{j=1}^{2*i} cte2 \Big)$$

$$T(n) = cte1 * n + \sum_{i=1}^{n/2} cte2 * (n - 2 * i + 1 + 1 + 2 * i - 1 + 1) =$$

$$= cte1 * n + cte2 * (n + 2) * n / 2$$

$$= cte1 * n + cte2 / 2 * n^2 + cte2 * n$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Ejercicio

```
private int ejercicio3(int n) {
  int p=0; int j=1;

  for (int i=1; i<=n; i++)
        if (esImpar(i))
              j:=j*2;
        else
              for (int k=1; k<=j; k++)
                    p:= p+1;
  return p;
}
```

```
public boolean esImpar(int unNumero){
      if (unNumero%2 != 0)
        return true;
      else
        return false;
}
```

Ejercicio

```
0       i = 0; j =0;
1       while(i<1000)
2               for( int k = i; k <= n; k++ ) {
3                   i++;
4                   j++; }
5       for( int p = 0; p < n*n; p++ )
6               for( int q = 0; q < p; q++ )
7                   j–;
```

1. ¿Con qué valor termina la variable i ?

2. ¿Cuántas veces se ejecuta la sentencia 3?

   a. $O(n)$
   b. $O(n^2)$
   c. $O(n^3)$
   d. $O(n^4)$
   e. Ninguna de las anteriores