

Занятие 8

Двойственные задачи

Составить задачу, двойственную данной.

$$1. \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{aligned} Z &= 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 = 7 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 14 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{aligned} Z &= x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Решив графически задачу, двойственную к исходной, найти решение исходной задачи по теореме равновесия.

$$7. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 8 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{aligned} Z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 3x_5 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -2 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} Z &= 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq -13 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{aligned} Z &= -5x_1 + 9x_2 - 10x_3 + 4x_4 + 4x_5 \rightarrow \max \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 2 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответы:

$$7. Z_{\max} = Z(2; 0; 0; 0; 3) = 3$$

$$8. Z_{\min} = Z(3; 1; 0; 0; 0) = 14$$

$$9. Z_{\max} = Z(5; 0; 4; 0) = 14$$

$$10. Z_{\min} = Z(4; 3; 0; 0; 0) = 7$$