А. П. Иванов

Методические указания

Тема 4: Метод Ньютона решения нелинейных уравнений и систем уравнений

факультет ПМ–ПУ СПбГУ 2007 г.

Оглавление

1. Решение скалярных уравнений 2
    1.1. Описание метода Ньютона 2
    1.2. О локализации корней 3
    1.3. Задания. 5
2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений 5
    2.1. Изложение метода 5
    2.2. Пример решения системы методом Ньютона 6
    2.3. Задания. 8

1. Решение скалярных уравнений

Для скалярного уравнения

$$f(x) = 0, \quad f(\cdot) \in C^2(a,b) \tag{1}$$

далее рассматривается задача уточнения корня $\bar{x}$, локализованного на отрезке $[a,b]$.

1.1. Описание метода Ньютона

При наличии хорошего приближения x_k к корню $\bar{x}$ функции $f(\cdot)$ можно использовать метод Ньютона, называемый также методом *линеаризации* или методом *касательных*. Расчётные формулы метода могут быть получены путём замены исходного уравнения (1) линейным уравнением в окрестности корня

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0, \tag{2}$$

Решение этого уравнения принимается за очередное приближение x_{k+1}:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3}$$

Метод Ньютона имеет простую геометрическую интерпретацию: график функции заменяется касательной к нему в точке $(x_k, f(x_k))$ и за очередное приближение x_{k+1} принимается абсцисса точки пересечения её с осью OX. Используя эту интерпретацию легко получить расчётные формулы (3) метода Ньютона и вследствие этой интерпретации он именуется также методом касательных.

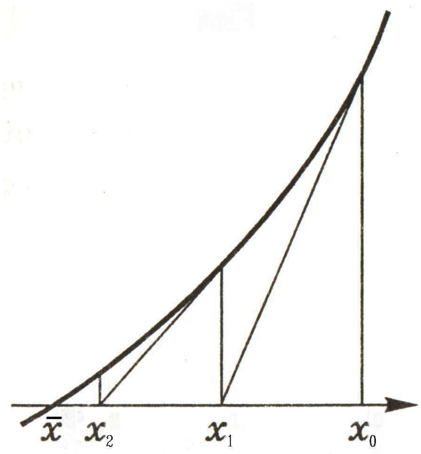

Рис. 1.

Здесь x_0, x_1, x_3 поледовательные приближения к корню $\bar{x}$, полученные в результате применения метода Ньютона.

Ясно, что сходимость последовательности $\{x_k\}$ к корню зависит от свойств функции $f(\cdot)$ и не всегда имеет место. Так, легко представить, что уже приближение x_1 не попадает на исходный интервал и процесс итераций останавливается.

Приведём полезную теорему, гарантирующую сходимость метода.

Теорема 1. Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, причём $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля (и, следовательно, сохраняют определённые знаки при $x \in [a, b]$), то, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего условию $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, можно вычислить методом Ньютона по формуле (3) единственный корень $\bar{x}$ уравнения (1) с любой степенью точности.

Замечание. Практическим критерием окончания вычислений является выполнение условия $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где ε – требуемая точность вычисления корня.

Метод Ньютона – удобный способ вычисления корня целой степени. Поскольку задача извлечения корня $\sqrt[n]{c}$ равносильна задаче решения уравнения (1) с функцией $f(x) = x^n - c$, то расчётная формула метода Ньютона приобретает вид

$$x_{k+1} = \frac{n-1}{n} x_k + \frac{c}{n x_k^{n-1}}.$$

Пусть $n = 2,\ c = 2,$ и тогда $f(x) = x^2 - 2$. Можно принять $[a, b] = [1, 2]$. Проверим выполнение условий теоремы 1: $f(1) = -1,\ f(2) = 2,\ f'(x) = 2x > 0,\ f''(x) = 2 > 0$ при $x \in [1, 2]$. Положим $x_0 = 2$. Поскольку $f(2) \cdot f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$, то обеспечена сходимость последовательности $\{x_k\}$, получаемой по формуле (3) к $\sqrt{2}$:

$$x_0 = 2;\ x_1 = \frac{1}{2}(2+1) = 1,5;\ x_2 = 1,41667;\ x_3 = 1,414216,\ x_4 = 1,414214.$$

Все цифры последнего приближения являются верными.

Если же условия теоремы 1 не выполняются или проверка их затруднительна, то очередное "приближение" x_{k+1} может оказаться вне интервала, на котором расположен корень $\bar{x}$. В этом случае x_{k+1} строится либо методом половинного деления либо методом хорд. В первом случае полагают

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \tag{4}$$

во втором –

$$x_{k+1} = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(a_k). \tag{5}$$

Здесь a_k, b_k – левый и правый конец интервала, которому принадлежит корень $\bar{x}$ на предыдущем шаге.

На начальном этапе полагаем $a_0 = a,\ b_0 = b$. *Пусть для определённости* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Если $x_1 \in [a, b]$, то вычислив $c = f(x_1)$, полагаем $a_1 = c$, $b_1 = b_0$ при $c < 0$, и $a_1 = a_0$, $b_1 = c$ при $c > 0$ и повторяем вычисления.

Если же приближение $x_1 \notin [a, b]$, то применяем формулы (4) либо (5) и поступаем как и выше: вычисляя $c = f(x_1)$, полагаем $a_1 = c$, $b_1 = b_0$ при $c < 0$, и $a_1 = a_0$, $b_1 = c$ при $c > 0$ и применяем метод Ньютона.

1.2. О локализации корней

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(\cdot)$ непрерывна, то основой для локализации корня обычно служит следствие из теоремы Коши: если $f(a)f(b) < 0$, то на интервале $[a, b]$ имеется по крайней мере один корень указанного уравнения (точнее нечётное число корней). Для локализации корня на интервале $[a, b]$ можно применять такие подходы:

- *Графический метод.* Исходное уравнение (1) приводится к виду $g(x) = h(x)$, строятся графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$ и определяется интервал оси OX, которому принадлежит абсцисса точки пересечения графиков. Он и используется для уточнения корня.

- *Последовательный перебор.* Интервал $[a, b]$ разбивается на N равных отрезков и вычисляются значения функции $f(\cdot)$ в точках $x_k = a + kh,\ k = 0, 1, \ldots, N$, где $h = (b - a)/N$. Если при этом найдётся интервал $[x_k, x_{k+1}]$, для которого $f(x_k)f(x_{k+1}) < 0$, то тем самым корень функции будет локализован с точностью $h/2$. Может оказаться, что функция $f(\cdot)$ не меняет знака на последовательности $\{x_k\}$. Если корень на $[a, b]$ существует, то последнее означает, что шаг h слишком велик и его следует заменить на меньший, полагая, например, $N = 2N$.

- *Перебор с переменным шагом.* Если функция $f(x)$ является Липшицевой, т.е.

  $$|f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''|, \quad x', x'' \in [a, b],$$

  то можно строить последовательность $\{x_k\}$ вида:

  $$x_0 = a,\ x_{k+1} = x_k + \frac{|f(x_k)|}{L}\ .$$

  Основанием к этому может служить то, что при $f(x) = cx + d$, можно принять $L = |c|$ и в этом случае значение x_1, полученное указанным способом, удовлетворяет уравнению $f(x) = 0$.

  Если L неизвестна, то можно её заменить через

  $$L_k = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|}\ .$$

- *Использование мажорант.* Если известны оценки функции $f(\cdot)$ на $[a, b]$, т.е.

  $$f^-(x) \le f(x) \le f^+(x),$$

  и корни x^- и x^+ этих функций, то $\bar{x} \in [\min\{x^-, x^+\},\ \max\{x^-, x^+\}]$.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x + x^3 - 2,\ x \in [0, \pi]$. Поскольку на указанном интервале $0 < \sin x < 1$, то в данном случае можно принять: $f^-(x) = x^3 - 2,\ f^+(x) = 1 + x^3 - 2 = x^3 - 1$. Следовательно, $\bar{x} \in \left[1;\ \sqrt[3]{2}\,\right] \subset [1; 1,28]$.

Итеративная последовательность метода Ньютона по формуле (3) имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k + x_k^3 - 2}{\cos x_k + 3x_k^2}\,.$$

1.3. Задания.

Локализовать и получить методом Ньютона минимальный по модулю ненулевой корень уравнения с точностью 0.0001:

1. $x - \sin x = 0.25$;
2. $x^3 = e^x - 1$;
3. $\sqrt{x} - \cos x = 0$;
4. $x^2 + 1 = \arccos x$;
5. $\lg x - \dfrac{7}{2x+6} = 0$;
6. $\mathrm{tg}(0.5x + 0.2) = x^2$;
7. $3x - \cos x - 1 = 0$;
8. $x + \lg x = 0.5$;
9. $x^2 = \arcsin(x - 0.2)$;
10. $x^2 + 4\sin x = 2$;
11. $\mathrm{ctg}\, x - x^2 = 0$;
12. $\mathrm{tg}\, x = \cos x - 0.1$;
13. $x\ln(x+1) - 0.3 = 0$;
14. $x^2 - \sin 10x = 0$;
15. $\mathrm{ctg}\, x = x$;
16. $\mathrm{tg}\, 3x + 0.4 = x^2$;
17. $x^2 + 1 = \mathrm{tg}\, x$;
18. $x^2 - 1 = \ln x$;
19. $0.5^x + 1 = (x-2)^2$;
20. $(x+3)\cos x = 1$;
21. $x^2 \cos 2x = -1$;
22. $\cos(x + 0.3) = x^2$;
23. $2^x(x-1)^2 = 2$;
24. $x\ln(x+1) = 0.5$.

2. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

2.1. Изложение метода

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$F(x) = 0,\ F(x),\ x \in R^n, \tag{6}$$

и предположим, что существует вектор $\bar{x} \in D \subset R^n$, являющийся решением системы (6). Будем считать, что $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, причём $f_i(\cdot) \in C^1(D)\ \forall i$.

Разложим $F(x)$ в окрестности точки $\bar{x}$: $F(x) = F(x^0) + F'(x^0)(x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$. Здесь

$$F'(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \ldots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \ldots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \ldots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

называется матрицей Якоби, а её определитель – якобианом системы (6). Исходное уравнение заменим следующим: $F(x^0) + F'(x^0)(x - x^0) = 0$. Считая матрицу Якоби $F'(x^0)$ неособой, разрешим это уравнение относительно x: $\hat{x} = x^0 - [F'(x)]^{-1}F(x^0)$. И вообще положим

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1}F(x^k). \tag{7}$$

При сделанных относительно $F(\cdot)$ предположениях имеет место сходимость последовательности $\{x^k\}$ к решению системы со скоростью геометрической прогрессии при условии, что начальное приближение x^0 выбрано из достаточно малой окрестности решения $\bar{x}$.

При дополнительном предположении $F(\cdot) \in C^2$ имеет место квадратичная сходимость метода, т.е.

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| \leq \omega \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Сформулируем теорему.

Теорема. *Пусть в некоторой окрестности решения $\bar{x}$ системы (6) функции $f_i(\cdot) \in C^2$ и якобиан системы отличен от нуля в этой окрестности. Тогда существует δ-окрестность точки $\bar{x}$ такая, что при любом выборе начального приближения x^0 из этой окрестности последовательность $\{x^k\}$ не выходит из неё и имеет место квадратичная сходимость этой последовательности.*

Замечание 1. В качестве критерия окончания процесса итераций обычно берут условие: $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$.

Замечание 2. Сложность метода Ньютона – в обращении матрицы Якоби. Вводя обозначение $\delta x^k = x^{k+1} - x^k$ получаем для вычисления δx^k СЛАУ

$$\frac{\partial F(x^k)}{\partial x} \cdot \delta x^k = -F(x^k), \tag{8}$$

откуда и находим искомую поправку δx^k, а затем и следующее приближение $x^{k+1} = x^k + \delta x$ к решению $\bar{x}$. Очевидно, что это значительно сокращает количество арифметических операций для построения очередного приближения.

Замечание 3. Начиная с некоторого шага k_0 решают стационарную СЛАУ

$$\frac{\partial F(x^{k_0})}{\partial x} \cdot \delta x^k = -F(x^k).$$

Данное видоизменение носит название *модифицированный метод Ньютона.*

Замечание 4. (О выборе начального приближения). Пусть вектор-функция $\Phi(\lambda, x)$ такова, что $\Phi(1, x) = F(x)$, а система $\Phi(0, x) = 0$ может быть решена. Тогда разбивая $[0, 1]$ на N частей решают методом Ньютона набор из N систем

$$\Phi(i/N, x) = 0, \ i = \overline{1, N},$$

принимая для каждой следующей системы в качестве начального приближения решение предыдущей системы.

2.2. Пример решения системы методом Ньютона

Рассмотрим задачу решения системы уравнений с точностью 0.001:

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1.2x = 0.4; \\ 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Отделение корней произведём графически (см. рисунок 2).

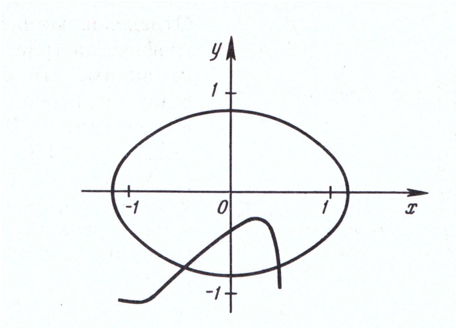

Рис. 2.

Второе уравнение системы геометрически суть эллипс с полуосями $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$. Кривую, соответствующую первому уравнению, строим по точкам в диапазоне $x \in [-1.1;\ +1.1]$.

Система имеет два решения. уточним одно из них, расположенное в четвёртой четверти, приняв в качестве начального приближения значения $x_0 = 0.4;\ y_0 = -0.75$.

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \sin(2x-y) - 1.2x - o.4; \\ f_2(x,y_= 0.8x^2 + 1.5y^2 - 1\,. \end{cases}$$

Имеем далее:

$$\begin{cases} (f_1(x,y))'_x = 2\cos(2x-y) - 1.2; \\ (f_2(x,y))'_x = 1.6x\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f_1(x,y))'_y = -\cos(2x-y); \\ (f_2(x,y))'_y = 3y\,. \end{cases}$$

Уточнение корней будем вести методом Ньютона с учётом замечания 2:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + g_n; \\ y_{n+1} = y_n + h_n\,, \end{cases}$$

где g_n и h_n – решение СЛАУ (8):

$$\begin{cases} (f_1(x_n,y_n))'_x g_n + (f_1(x_n,y_n))'_y h_n = -f_1(x_n,y_n); \\ (f_2(x_n,y_n))'_x g_n + (f_2(x_n,y_n))'_y h_n = f_2(x_n,y_n)\,. \end{cases}$$

Отсюда последовательно получаем:

$$\begin{cases} x_0 = 0.4; \\ y_0 = -0.75\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0.50; \\ y_1 = -0.733\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0.4940; \\ y_2 = -0.7083\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0.4913; \\ y_3 = -0.7339\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 0.4912; \\ y_4 = -0.7335\,. \end{cases}$$

Поскольку три первые знака после запятой установились, процесс вычислений заканчиваем (см. замечание 1.)

2.3. Задания.

Используя метод Ньютона, решить систему нелинейных уравнений с точностью 0.0001:

1. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ x + \cos(y-1) = 0.7\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos x + y = 1.5; \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1; \\ x + \cos(y-2) = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8; \\ \sin y - 2x = 1.6\,. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1.3\,; \\ x - \sin(y+1) = 0.8\,. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0.4\,. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5; \\ x + \cos(y-2) = 0.5\,. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2; \\ 2y + \cos x = 2\,. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5; \\ y - \cos x = 3\,. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ y + \cos(x-1) = 0.7\,. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos y + x = 1.5; \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1\,. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1; \\ y + \cos(x-2) = 0\,. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \cos(y+0.5) + x = 0.8; \\ \sin x - 2y = 1.6\,. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1.3; \\ y - \sin(x+1) = 0.8\,. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) - y = 0; \\ y + \sin x = -0.4\,. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \cos(y+0.5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1\,. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1.5; \\ y + \cos(x-2) = 0.5\,. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ 2x + \cos y = 2\,. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.8; \\ x - \cos y = 2\,. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin x + 2y = 1.6; \\ x + \cos(y-1) = 1\,. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \cos x + y = 1.2; \\ 2x - \sin(y-0.5) = 2\,. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков. Численные методы. Физматлит, М.– СПб – 2000.
2. В. М Вержбицкий. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. М., Высшая школа 2000.
3. Г. Н. Воробьёва, А. Н. Данилова. Практикум по вычислительной математике. М., Высшая школа 1990.