Решение СЛАУ методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} ¿(2)^{я}+1{,}5(1) \\ (3)^{я}+0{,}5(1) \end{matrix} =$$

$$¿\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3+1{,}5\cdot(-2) & 1+1{,}5\cdot 1 & -6+1{,}5\cdot(-3) & -9+1{,}5\cdot(-8) \\ 1+0{,}5\cdot(-2) & 1+0{,}5\cdot 1 & 2+0{,}5\cdot(-3) & 5+0{,}5\cdot(-8) \end{array}\right) =$$

$$¿\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} ¿ \\ (3)+0{,}2(2) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2{,}5 & -10{,}5 & -21 \\ 0 & 0 & -1{,}6 & -3{,}2 \end{array}\right)$$

Запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -1{,}6x_3=-3{,}2 \\ 2{,}5x_2-10{,}5x_3=21 \\ -2x_1+x_2-3x_3=-8 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ 2{,}5x_2-21=21 \\ -2x_1+x_2-6=-8 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ 2x_1=2 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ x_1=1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ x_1=1 \end{cases}$

Модифицированный метод Гаусса

Необходимо поменять строки местами таким образом, чтобы ведущим элементом был максимальный по модулю среди элементов данного столбца ниже главной диагонали.

В данном примере вторую строку нужно поставить на место первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

После перестановки строк имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} ¿(2)-1/3(1) \\ (3)+2/3(1) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 5/3 & -7 & -14 \end{array}\right) \begin{matrix} ¿ \\ (3)+5/4(2) \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & -4/3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -2x_3=-4 \\ \dfrac{-4}{3}x_2+4x_3=8 \\ 3x_1+x_2-6x_3=-9 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ \dfrac{-4}{3}x_2+8=8 \\ 3x_1+x_2-12=-9 \end{cases} =¿ \begin{cases} x_3=2 \\ \dfrac{-4}{3}x_2=0 \\ 3x_1+x_2-12=-9 \end{cases} =¿$$

$$¿\begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ 3x_1+0-12=-9 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ 3x_1=3 \end{cases} = \begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ x_1=1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_3=2 \\ x_2=0 \\ x_1=1 \end{cases}$

1. Вычисление чисел с погрешностью

$x=2{,}384\pm 0{,}021$

$y=9{,}485\pm0{,}014$

$x+y=2{,}384+9{,}485\pm(0{,}021+0{,}014)=11{,}869\pm0{,}035$

$x-y=2{,}384-9{,}485\pm(0{,}021+0{,}014)=-7{,}101\pm0{,}035$

В операциях с делением и умножением переходим от абсолютной погрешности к относительной.

$$x\cdot y=2{,}384\left(1\pm\frac{0{,}021}{2{,}384}\right)\cdot 9{,}485\left(1\pm\frac{0{,}014}{9{,}485}\right)=2{,}384(1\pm0{,}009)\cdot 9{,}485(1\pm0{,}001)=22{,}612(1\pm0{,}01)=22{,}612\pm0{,}226$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2{,}384\left(1\pm\frac{0{,}021}{2{,}384}\right)}{9{,}485\left(1\pm\frac{0{,}014}{9{,}485}\right)}=\frac{2{,}384(1\pm0{,}009)}{9{,}485(1\pm0{,}001)}=0{,}251(1\pm0{,}01)=0{,}251\pm0{,}002$$

$$y^2=9{,}485^2\left(1\pm\frac{2\cdot0{,}014}{9{,}485}\right)=89{,}965(1\pm0{,}003)=89{,}965\pm0{,}269$$

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{11{,}869\left(1\pm\frac{0{,}035}{11{,}869}\right)}{-7{,}101\left(1\pm\frac{0{,}035}{-7{,}101}\right)}=\frac{11{,}869(1\pm0{,}003)}{-7{,}101(1\pm0{,}005)}=-1{,}761(1\pm0{,}008)=-1{,}671\pm0{,}013$$

$$\sqrt{x}=2{,}384^{\frac{1}{2}}\left(1\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}021}{2{,}384}\right)=2{,}384^{\frac{1}{2}}\left(1\pm\frac{1}{2}0{,}009\right)=1{,}544(1\pm0{,}004)=1{,}544\pm0{,}006$$

$$x-y^2=2{,}384\pm0{,}021-89{,}965\pm0{,}269=-87{,}581(0{,}021+0{,}269)=-87{,}581\pm0{,}290$$

$$sinx=\sin 2{,}384\pm\cos 2{,}384\cdot0{,}021=0{,}69\pm0{,}73\cdot0{,}021=0{,}69\pm0{,}015$$

$$siny=\sin 9{,}485\pm\cos 9{,}485\cdot0{,}014=0{,}06\pm0{,}1\cdot0{,}014=0{,}06\pm0{,}001$$

$$\frac{\sqrt{x}\cdot(x-y^2)}{sinx+y^2}=\frac{(1{,}544\pm0{,}006)\cdot(-87{,}581\pm0{,}290)}{(0{,}69\pm0{,}015)+(89{,}965\pm0{,}269)}=¿$$

$$¿\,\frac{1{,}544(1\pm0{,}004)\cdot-87{,}581(1\pm0{,}003)}{90{,}655\pm0{,}296}=\frac{-135{,}225(1\pm0{,}007)}{90{,}655(1\pm0{,}003)}=¿$$

$$¿-1{,}495(1\pm0{,}01)=-1{,}492\pm0{,}15$$

2. Метод простых итераций

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5 & -1 & 2 & 3\\ -2 & -10 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 5 & 12\end{array}\right)\varepsilon=10^{-4}$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{c} ¿:5 \\ ¿:-10 \\ ¿:5 \end{array}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array}\right) A=l+C$$

$$l=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}$$

$$\|C\|^{\infty}=max(0,2+0,4\,;0,2+0,3\,;0,2+0,4)=max(0,6\,;0,5\,;0,6)=0,6$$
$$\|B\|^{\infty}=max(0,6\,;0,4\,;2,4)=2,4$$

$$x^{(k+1)}=B-C\cdot x^{k}$$

<u>Шаг 1:</u> (начальный вектор х - нулевой)

$$x^{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x^{1}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 2:</u>

$$x^{2}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,88 \\ -0,6 \\ 0,28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0,28 \\ 1 \\ 2,12 \end{pmatrix};$$

<u>Шаг 3:</u>

$$x^{3}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & -0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0,28 \\ 1 \\ 2,12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \\ 2,4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,648 \\ -0,692 \\ 0,344 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0,048 \\ 1,092 \\ 2,056 \end{pmatrix};$$

3. Метод Зейделя

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -10 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{c} ¿:5 \\ ¿:-10 \\ ¿:5 \end{array}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,2 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 1 & -0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 1 & 2,4 \end{array}\right)$$

$x^{(k+1)}=B-C\cdot x^{k}$

<u>Шаг 1:</u>

$$\begin{cases} x_1^1=0,6-(-0,2\cdot 0+0,4\cdot 0)=0,6 \\ x_2^1=0,4-(0,2\cdot 0,6-0,3\cdot 0)=0,4-0,12=0,28 \\ x_3^1=2,4-(0,2\cdot 0,6+0,4\cdot 0,28)=2,4-0,12-0,112=2,168 \end{cases}$$

<u>Шаг 2:</u>

$$\begin{cases} x_1^2=0,6-(-0,2\cdot 0,28+0,4\cdot 2,168)=0,6+0,056-0,8672=-0,2112 \\ x_2^2=0,4-(0,2\cdot(-0,2112)-0,3\cdot 2,168)=0,4+0,04224+0,6504=1,0926 \\ x_3^2=2,4-(0,2\cdot(-0,2112)-0,4\cdot 1,0926)=2,4+0,04224-0,43704=2,0052 \end{cases}$$

<u>Шаг 3:</u>

$$\begin{cases} x_1^3=0,6-(-0,2\cdot 1,0926+0,4\cdot 2,0052)=0,6+0,21852-0,80208\approx 0,0164 \\ x_2^3=0,4-(0,2\cdot 0,0164-0,3\cdot 2,0052)=0,4-0,003288+0,60156\approx 0,9983 \\ x_3^3=2,4-(0,2\cdot 0,0164-0,4\cdot 0,9983)=2,4-0,00328-0,30932\approx 1,9974 \end{cases}$$

$$N=\left(\frac{\ln\frac{10^{-4}(1-0,6)}{2,4}}{\ln 0,6}\right)+1=\left(\frac{\ln\frac{4}{240000}}{-0,511}\right)+1\approx 22,5$$

4. Метод половинного деления

$x^2-3=0$ Начальный интервал: (1; 2)

Находим произведение значений функции в крайних точках:

$f(a)\cdot f(b)=(1^2-3)\cdot(2^2-3)=-2$

Шаг 1:

Находим середину интервала:

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1{,}5\; x^2=1{,}5^2=2{,}25\; \varepsilon=\frac{|b-a|}{2}=0{,}5$

В новых интервалах:

(1; 1,5) $f(a)\cdot f(c)=-2\cdot(-0{,}75)=1{,}5$

(1,5; 2) $f(c)\cdot f(b)=(-0{,}75)\cdot 1=-0{,}75$ < 0, выбираем этот интервал

Шаг 2:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 2)

Находим середину интервала:

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75\; x^2=1{,}75^2=3{,}0625\; \varepsilon=\frac{|b-a|}{2}=0{,}25$

В новых интервалах:

(1,5; 1,75) $f(a)\cdot f(c)=(-0{,}75)\cdot 0{,}0625=-0{,}046875$ < 0, выбираем этот интервал

(1,75; 2) $f(c)\cdot f(b)=0{,}0625\cdot 1=0{,}0625$

Шаг 3:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,5; 1,75)

Находим середину интервала:

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{1{,}5+1{,}75}{2}=1{,}625\; x^2=1{,}625^2=2{,}640625\; \varepsilon=\frac{|b-a|}{2}=0{,}125$

В новых интервалах:

(1,5; 1,625) $f(a)\cdot f(c)=(-0{,}75)\cdot(-0{,}36)=0{,}27$

(1,625; 1,75) $f(c)\cdot f(b)=(-0{,}36)\cdot 0{,}0625=-0{,}0225$ < 0, выбираем этот интервал

Шаг 4:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,75)

Находим середину интервала:

$c=\frac{1{,}625+1{,}75}{2}=1{,}6875\; x^2=1{,}6875^2=2{,}84765625\; \varepsilon=\frac{|b-a|}{2}=0{,}0625$

В новых интервалах:

(1,625; 1,6875) $f(a)\cdot f(c)=(-0{,}36)\cdot 2{,}848=-1{,}025$ < 0, выбираем этот интервал

(1,6875; 1,75) $f(c)\cdot f(b)=2{,}848\cdot 0{,}0625=0{,}178$

Шаг 4:

Аналогично продолжаем вычисление в интервале (1,625; 1,6875)

…..

5. Метод хорд

$x^2-3=0$ Начальный интервал: (1; 2)

В отличие от метода половинного деления, точка *c* является не серединой интервала, а вычисляется по формуле

$$c=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}$$

<u>Шаг 1:</u>
Вычисляем по формуле значение c для этого шага:

$$c=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1\cdot 1-2\cdot(-2)}{1-(-2)}=\frac{1+4}{1+2}=1{,}666667$$

В интервалах:
(1; 1,666667) $f(a)\cdot f(c)=0{,}444442$
(1,666667; 2) $f(c)\cdot f(b)=-0{,}222221$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 2:</u>
Вычисляем по формуле значение c для этого шага:

$$c=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1{,}666667\cdot 1-2\cdot(-0{,}222221)}{1-(-0{,}222221)}=1{,}727273$$

В интервалах:
(1,666667; 1,727273) $f(a)\cdot f(c)=0{,}003673$
(1,727273; 2) $f(c)\cdot f(b)=-0{,}016528$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 3:</u>
Вычисляем по формуле значение c для этого шага:

$$c=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1{,}727273\cdot 1-2\cdot(-0{,}016528)}{1-(-0{,}016528)}=1{,}731707$$

В интервалах:
(1,727273; 1,731707) $f(a)\cdot f(c)=0{,}000020$
(1,731707; 2) $f(c)\cdot f(b)=-0{,}001191$ < 0, значит, выбираем этот интервал

<u>Шаг 4:</u>
Вычисляем по формуле значение c для этого шага:

$$c=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{1{,}731707\cdot 1-2\cdot(-0{,}001191)}{1-(-0{,}001191)}=1{,}732026$$

6. Метод Ньютона

$x^2-3=0$ Начальный интервал: (1; 2)

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x¿¿k)f(x)=x^2-3;f'(x)=2x¿}$$

В качество начальной точки x_0 выбираем такую, в которой знак 2-ой производной совпадает со знаком функции, в нашем случае $x_0=2$

$x_0=2$

$x_1=2-\frac{2^2-3}{2\cdot 2}=2-0,25=1,75$

Аналогично для последующих x

$x_2=1,75-\frac{1,75^2-3}{2\cdot 1,75}=1,75-\frac{3,0625-3}{3,5}=1,75-0,017857=1,732143$

$x_3=1,732143-\frac{1,732143^2-3}{2\cdot 1,7732143}=1,732143-0,000092=1,732051$

$x_4=1,732051-\frac{1,732051^2-3}{2\cdot 1,732051}=1,732051-0,000000192431=¿¿1,7320503333$

Для сравнения, найдем точное решение данного уравнения

$\sqrt{3}=1,7320508075$

Как видно, приближенное решение совпадает с точным на 6 знаков после запятой.

8. Решение СНУ методом Ньютона

(обратная матрица)

$$\begin{cases} x^2+y^3-4=0 \\ \frac{x}{y}-2=0 \end{cases}$$

$$F=\begin{pmatrix} x^2+y^3-4 \\ \frac{x}{y}-2=0 \end{pmatrix}; W=\begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ \frac{1}{y} & \frac{x}{y^2} \end{pmatrix}; x^0=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Шаг 1:

$$F\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}2^2+1^3-4\\ \frac{2}{1}-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1-4\\ 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};W\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}4&3\\1&-2\end{pmatrix};$$

Найдем обратную матрицу:

$$\Delta W\left(x^0\right)=-8-3=-11$$

$\Delta_{11}=-2 \quad \Delta_{21}=3$

$\Delta_{12}=1 \quad \Delta_{22}=4$

$$W\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}-2&1\\3&4\end{pmatrix};W^T\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}-2&-3\\-1&4\end{pmatrix};$$

$$W^{-1}\left(x^0\right)=\frac{-1}{11}\cdot\begin{pmatrix}-2&-3\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{11}&\frac{3}{11}\\ \frac{1}{11}&\frac{-4}{11}\end{pmatrix};$$

$$x^1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{11}&\frac{3}{11}\\ \frac{1}{11}&\frac{-4}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{2}{11}\\ \frac{1}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{20}{11}\\ \frac{10}{11}\end{pmatrix};$$

Шаг 2:

$$F\left(x^1\right)=¿$$

$$W\left(x^1\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\left(\frac{20}{11}\right)&3\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^2\\ \frac{1}{\frac{10}{11}}&-2\end{pmatrix};$$

11. Вычисление интерполяционного многочлена

x	$y=\sqrt{x}$
1	1,0000
2	1,4142
3	1,7321
4	2,0000

Найти *y* для *x* = 2,56

$$P_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(2{,}56)=1\cdot\frac{(2{,}56-2)(2{,}56-3)(2{,}56-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+1{,}4142\cdot\frac{(2{,}56-1)(2{,}56-3)(2{,}56-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+1{,}7321\cdot\frac{(2{,}56-1)(2{,}56-2)(2{,}56-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$

$$\varepsilon_{усеч}\le\frac{M_4}{4!}\cdot\left|(2{,}56-1)(2{,}56-2)(2{,}56-3)(2{,}56-4)\right|=\frac{M_4}{4!}\cdot 0{,}5535=0{,}0216$$

$$M_4 = max\left|\left(\sqrt{x}\right)''''\right| = max\left|\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'''\right| = max\left|\left(\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}\right)''\right| = max\left|\left(\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\right)'\right| = max\left|\left(\frac{-15}{16\sqrt{x^7}}\right)\right| = \frac{15}{16}$$

$\varepsilon_{окр} = 5\cdot 10^{-5}$

$\varepsilon_{реальное} = \varepsilon_{окр} + \varepsilon_{усеч} = 5\cdot 10^{-5} + 0{,}0216 = 0{,}02165$

12. Схема Эйткена

$x = 2{,}56 \; y = 1{,}6$

x	$y=\sqrt{x}$
1	1,0000
2	1,4142
3	1,7321
4	2,0000

$$\begin{matrix} y_0 = p_{x_0}(x) \\ y_1 = p_{x_1}(x) \\ y_2 = p_{x_2}(x) \\ y_3 = p_{x_3}(x) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} p_{x_0x_1}(x) \\ p_{x_1x_2}(x) \\ p_{x_2x_3}(x) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} p_{x_0x_1x_2}(x) \\ p_{x_1x_2x_3}(x) \end{matrix} \rightarrow p_{x_0x_1x_2x_3}(x)$$

$$p_{x_0x_1} = \frac{p_{x_0}(x-x_1) - p_{x_1}(x-x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{1\cdot(2{,}56-2) - 1{,}4142\cdot(2{,}56-1)}{1-2} = 1{,}6462$$

$$p_{x_1x_2} = \frac{p_{x_1}(x-x_2) - p_{x_0}(x-x_1)}{x_1 - x_2} = \frac{1{,}4142\cdot(2{,}56-3) - 1{,}7321\cdot(2{,}56-2)}{2-3} = 1{,}5923$$

$$p_{x_2x_3} = \frac{p_{x_2}(x-x_3) - p_{x_3}(x-x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{1{,}7321\cdot(2{,}56-4) - 2\cdot(2{,}56-3)}{3-4} = 1{,}6142$$

$$p_{x_0x_1x_2} = \frac{p_{x_0x_1}(x-x_2) - p_{x_1x_2}(x-x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{1{,}6462\cdot(2{,}56-3) - 1{,}5923\cdot(2{,}56-1)}{1-3} = 1{,}6042$$

$$p_{x_1x_2x_3} = \frac{p_{x_1x_2}(x-x_3) - p_{x_2x_3}(x-x_1)}{x_1 - x_3} = \frac{1{,}5923\cdot(2{,}56-4) - 1{,}6142\cdot(2{,}56-2)}{2-4} = 1{,}5984$$

$$p_{x_0x_1x_2x_3} = \frac{p_{x_0x_1x_2}(x-x_3) - p_{x_1x_2x_3}(x-x_0)}{x_0 - x_3} = \frac{1{,}6042\cdot(2{,}56-4) - 1{,}5984\cdot(2{,}56-1)}{1-4} = 1{,}6012$$

$$\begin{matrix} p_{x_0}=1{,}0000 \\ p_{x_1}=1{,}4142 \\ p_{x_2}=1{,}7321 \\ p_{x_3}=2{,}0000 \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0 x_1}=1{,}6462 \\ p_{x_1 x_2}=1{,}5923 \\ p_{x_2 x_3}=1{,}6142 \end{matrix} \to \begin{matrix} p_{x_0 x_1 x_2}=1{,}6042 \\ p_{x_1 x_2 x_3}=1{,}5984 \end{matrix} \to p_{x_0 x_1 x_2 x_3}=1{,}6012$$

12. Первая формула Ньютона

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1,0000	0,4142	-0,0963	0,0463
2	1,4142	0,3179	-0,0500	
3	1,7321	0,2679		
4	2,0000			

13. Метод Эйлера

$$\begin{cases} y''' = y + y''x - y' \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \\ y''(1) = -1 \end{cases} \quad h = 0{,}2$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \; Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y + y''x - y' \end{pmatrix} = F(x, Y)$$

Первый шаг:

$$Y_1 = Y_0 + F(x_0, y_0) \cdot h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 - 1 \cdot 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \text{¿} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}2 \\ -{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix}$$

Второй шаг:

$$Y_2 = Y_1 + F(x_1, y_1) \cdot h = \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ -1{,}4 \\ 2{,}6 + (-1{,}4) \cdot 1{,}2 - 2{,}8 \end{pmatrix} = \text{¿}$$

$$\text{¿} \begin{pmatrix} 2{,}6 \\ 2{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ -0{,}28 \\ -0{,}376 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}16 \\ 2{,}52 \\ -1{,}776 \end{pmatrix}$$

14. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$y''' = x + y + x\,y' - y''\,h = 0{,}1$$

$$\begin{matrix} y(1)=1 \\ y'(1)=2 \\ y''(1)=4 \end{matrix}\; Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix};\, Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix};\, Y' = F(x, y) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x + y + x\,y' - y'' \end{pmatrix};$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x + y + x\,y' - y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1+1+1\cdot 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Первый шаг:

$$k_2 = f(x_0 + 0{,}05, y_0 + 0{,}05 \cdot k_1) = F\left(1{,}05\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}05\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = ¿$$

$$¿\,F\left(1{,}05\begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 2{,}2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = f(x_0 + 0{,}05, y_0 + 0{,}05 \cdot k_2) = F\left(1{,}05\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}05\begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}\right)\right) = ¿$$

$$¿\,F\left(1{,}05\begin{pmatrix} 1{,}11 \\ 2{,}2 \\ 4{,}023 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4{,}023 \\ 0{,}447 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = f(x_0 + 0{,}1, y_0 + 0{,}1 \cdot k_3) = F\left(1{,}1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}1\begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 4{,}023 \\ 0{,}447 \end{pmatrix}\right)\right) = ¿$$

$$¿F\left(1{,}1\begin{pmatrix}1+0{,}22\\2+0{,}4023\\4+0{,}0447\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2{,}4023\\4{,}0447\\0{,}91783\end{pmatrix}$$

$$y_1=y_0+0{,}0167\cdot(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+0{,}0167\cdot\begin{pmatrix}2+2\cdot2{,}2+2\cdot2{,}2+2{,}4023\\4+2\cdot4+2\cdot4{,}023+4{,}0447\\0+2\cdot0{,}46+2\cdot0{,}447+0{,}91783\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix}$$

Второй шаг:

$$k_1=f(x_1,y_1)=F\left(1{,}1\begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2{,}40232\\4{,}04562\\1{,}1+{,}122048+1{,}1\cdot2{,}40232\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}40232\\4{,}04562\\0{,}91739\end{pmatrix}$$

$$k_2=f(x_1+0{,}05,y_1+0{,}05\cdot k_1)=F\left(1{,}15\left(\begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix}+0{,}05\begin{pmatrix}2{,}40232\\4{,}04562\\0{,}91739\end{pmatrix}\right)\right)=¿$$

$$k_3=f\left(1{,}1+0{,}05\begin{pmatrix}1{,}22048+0{,}05\cdot2{,}604596\\2{,}402315+0{,}05\cdot4{,}0914915\\4{,}045622+0{,}05\cdot1{,}3943899\end{pmatrix}\right)=F¿$$

$$\begin{pmatrix}2{,}6068896\\4{,}115342\\1{,}15+1{,}3507098+1{,}15\cdot2{,}6068896-4{,}115342\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}6068896\\4{,}115342\\1{,}381291\end{pmatrix}$$

$$k_4=f\left(1{,}2\begin{pmatrix}1{,}22048+0{,}1\cdot2{,}6068896\\2{,}402315+0{,}1\cdot4{,}115342\\4{,}045622+0{,}1\cdot1{,}381291\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2{,}8138492\\4{,}1839511\\1{,}87383694\end{pmatrix}$$

$$y_2=\begin{pmatrix}1{,}22048\\2{,}402315\\4{,}045622\end{pmatrix}+0{,}0167\cdot\begin{pmatrix}2{,}40232+2\cdot2{,}604596+2\cdot2{,}6068896+2{,}8138492\\4{,}04562+2\cdot4{,}0914915+2\cdot4{,}115342+4{,}1839511\\0{,}91739+2\cdot1{,}3943899+2\cdot1{,}381291+1{,}87383694\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}4816536\\2{,}8138571\\4{,}185010\end{pmatrix}$$