

chaque $n > 1$, où \oplus dénote la concaténation.

F4 Croissance sous-exponentielle (25+5 points)

Dans cet exercice, on étudie les notions de sous-exponentielle et super-polynomiale, définies ainsi pour une fonction $f(n)$ sur $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$f \text{ est sous-exponentielle si } f(n) = 2^{o(n)} \quad (\text{F1a})$$

$$f \text{ est super-polynomiale si } n^{O(1)} = o(f(n)) \quad (\text{F1b})$$

i. (15 points) ► Donnez des définitions équivalentes⁵ à (F1a) et (F1b) sans utiliser la notation asymptotique ($o, O, \Theta, \Omega, \dots$).

ii. (10 points) ► Démontrez⁶ que la fonction

$$g(n) = \begin{cases} n+1 & \{n = 0, 1, \dots, 2014\} \\ n^{n/\log_{2015} n} & \{n \geq 2015\} \end{cases}$$

est super-polynomiale mais non pas sous-exponentielle.

iii. (5 points boni) Est-ce qu'il existe une fonction qui est super-polynomiale et sous-exponentielle en même temps? ► Donnez un exemple, ou démontrez que c'est impossible.

```
x ← newNode([0]) // f0
for i ← 1, ..., n {x ← FiboSubst(x)}
return x
```

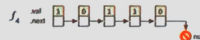


FIG. 3: FiboChain(4) retourne la tête de la liste chaînée illustrée ici.

⁵ *Indice:* Découvrez la relation entre $f(n)$ et les fonctions cachées par les termes asymptotiques, et exprimez la contrainte imposée soit comme une inégalité qui vaut presque partout, soit — si applique — comme une limite $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

⁶ *Indice:* Simplifiez $n^{n/\log_{2015} n}$.