DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SIGLE DU COURS: IFT 2015 (E14)

NOM DU PROFESSEUR: Neil Stewart

TITRE DU COURS: Structures de Données

EXAMEN INTRA

Date	: Mercredi, 11 juin, 2014
Heure	: 10:00-12:00
Lieu	: AA-1360

DIRECTIVES PÉDAGOGIQUES:

- Vous disposez de deux heures pour compléter cet examen.
- Documentation permise: une page 8" x 11", recto-verso.
- Mettez tout de suite votre nom et votre matricule dans la case (Figure 1).
- Répondez sur l'examen. Il y a deux pages brouillons (page 5 et page 10).
- L'espace alloué pour la réponse indique la longueur de la réponse cherchée.
- Il y a 9 questions, avec 100 points au total.

PLAGIAT. Constitue un plagiat:

- faire exécuter son travail par un autre
- utiliser, sans le mentionner, le travail d'autrui
- ÉCHANGER DES INFORMATIONS LORS D'UN EXAMEN
- falsifier des documents

Le plagiat est passible de sanctions allant jusqu'à l'exclusion du programme.

Figure 1: Mettez votre nom et matricule ici.

1. Question 1 *(15 points)*

   Arbres binaires de recherche

   (a) Quel est le nom de l'ordre (au sens de "ordre de parcours") utilisé normalement dans les arbres binaires de recherche?

   (b) En vous servant simplement de trois lettres majuscules, donnez la définition de cet ordre.

   (c) Expliquez comment créer un arbre qui respecte cet ordre, en supposant disponibles des clefs distinctes.

   (d) Montrer le résultat d'utiliser votre algorithme de "création d'arbre" dans le cas de clefs F, E, D, C, B, A, K. (Les clefs sont ordonnes par l'ordre lexicographique habituel, et elles sont traitées dans l'ordre indiqué.)

2. Question 2 *(10 points)*

   Matrices orthogonales

   Dans le Devoir 2 vous avez implanté trois fonctions reliées aux calculs avec les matrices orthogonales, dont la fonction *vectorTTimesMatrix*. Décrivez brièvement la fonction *vectorTTimesMatrix* que vous avez écrite.

3. Question 3 *(15 points)*

   Profondeur d'un arbre moyen

   Nous avons pu trouver un estimé de la valeur espérée de I (longueur de chemin intérieur, "Internal Path Length"). En fait, nous avons pu démontrer que cette valeur espérée, notée $D(N)$, est à peu près égal à

$$(N+1)\left(2\sum_{i=3}^{N+1}\frac{1}{i}\right). \tag{1}$$

   Avec ce que nous savons sur les Nombres Harmoniques H_N, cela nous montrait que le nombre moyen de comparaisons nécessaires, pour faire une recherche dans un arbre aléatoire, est $O(\log N)$. C'était un résultat un peu surprenant, mais quand même un résultat heureux. (Notons ici que (1) n'entre pas du tout dans cette question, je l'ai mis juste pour vous rapeller un peu de quoi je parle.)

   La récurrence que nous avons trouvée pour faire cette preuve était

$$D(N) = 2\left[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D(j)\right] + N - 1, \quad D(0) = D(1) = 0. \tag{2}$$

   Il serait rassurant de confirmer que (2) donne le bon résultat, au moins pour des petites valeurs de N.

Prenons par exemple $N = 2$. Il y a deux permutations de deux clefs, donc au total deux arbres possibles, soient disons l'arbre avec B à la racine et A comme enfant gauche, et l'arbre avec A à la racine et B comme enfant droit. La valeur de I dans les deux cas est égal à 1, la valeur moyenne est donc 1, et la récurrence (2) donne bel et bien $D(2) = 1$. Nous sommes rassurés.

En imitant cette dernière phrase, montrez que la récurrence (2) donne le bon résultat dans le cas $N = 3$.

4. Question 4 *(10 points)*

   Monceau et sac

   - Dans le TAD *Queue de priorité* il y a l'opération *retirer*. En supposant que vous utilisez un monceau, expliquez brièvement comment cette opération se fait, et commenter le coût de l'opération.

   - Dans le TAD *sac* (anglais "bag") (exemple: simulation des particules), il y a l'opération *retirer(x)*. En supposant que vous utilisez un tableau linéaire, et en supposons x déjà trouvé, expliquez brièvement comment cette opération se fait, et commenter le coût de l'opération.

5. Question 5 *(10 points)*

   TAD Liste

   (a) Les arbres balancés peuvent être utilisés pas seulement pour trouver les informations associées à la clef x, mais aussi les informations associées à la k'ième item dans la structure (TAD *Liste*). Pour ce faire, on ajoute à chaque noeud un champs qui donne le *rang* du noeud, soit

   $$r = 1 + \text{le nombre de noeuds dans le sous-arbre gauche.}$$

   En supposant cette information disponible, donnez du pseudo-code pour trouver le k'ième item dans la structure.

   (b) Indiquez comment modifier le champs r au moment de l'insertion d'une clef, dans le cas où nous savons *a priori* que la clef n'est pas déjà présente.

6. Question 6 *(10 points)*

   (a) Exprimez la relation entre les listes généralisées, et la représentation "puîné" (premier sibling après moi + mon premier enfant) pour les arbres.

   (b) Exprimez la relation entre les arbres binaires et les deux choses mentionnées dans la partie (a) de la question.

7. Question 7 *(10 points)*

   Complexité

   En utilisant la définition de Ω, montrez que si une fonction est $\Omega(\log N)$, alors elle est aussi $\Omega(\log \log N)$. Note: $\log \log N$ veut dire $\log(\log(N))$.

8. Question 8 *(10 points)*

   Supposons dans un arbre AVL que j'ai trouvé, après insertion d'une clef, un manque de balancement de la forme $d, d+2$ au noeud P. Supposons aussi que l'enfant gauche de P est $T1$, l'enfant droit de P est S, les enfants de S sont $T2$ et $T3$, et que j'ai inséré à droite de S. Montrez comment faire la rotation nécessaire, et montrer que l'ordre n'a pas changé après .

   (Note: il n'est pas nécessaire de parler des hauteurs des sous-arbres.)

9. Question 9 *(10 points)*

   Pour le TAD *Queue de Priorité*, avec opérations *retirer*, *insérer* et *initialiser*, donner les coûts en utilisant la notation $O(\ldots)$, pour les deux choix suivants de structure de données: le monceau, et une liste triée dans un tableau.

Page brouillon: cette page ne sera pas prise en compte lors de la correction.

Fin de l'examen.

Neil Stewart