chaque $n > 1$, où $\oplus$ dénote la concaténation.

F4 Croissance sous-exponentielle (25+5 points)

Dans cet exercice, on étudie les notions de sous-exponentielle et super-polynomiale, définies ainsi pour une fonction $f(n)$ sur $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$f \text{ est } \textit{sous-exponentielle} \text{ si} \qquad f(n) = 2^{o(n)} \qquad \text{(F1a)}$$

$$f \text{ est } \textit{super-polynomiale} \text{ si} \qquad n^{O(1)} = o(f(n)) \qquad \text{(F1b)}$$

i. (15 points) ▶ Donnez des définitions équivalentes[5] à (F1a) et (F1b) sans utiliser la notation asymptotique $(o, O, \Theta, \Omega, \ldots)$.

ii. (10 points) ▶ Démontrez[6] que la fonction

$$g(n) = \begin{cases} n+1 & \{n = 0, 1, \ldots, 2014\} \\ n^{n/\log_{2015} n} & \{n \geq 2015\} \end{cases}$$

est super-polynomiale mais non pas sous-exponentielle.

iii. (5 points boni) Est-ce qu'il existe une fonction qui est super-polynomiale et sous-exponentielle en même temps ? ▶ Donnez un exemple, ou démontrez que c'est impossible.

```
x ← newNode( 0 )                          // f0
for i ← 1,...,n {x ← FiboSubst(x)}
return x
```

FIG. 3: FiboChain(4) retourne la tête de la liste chaînée illustrée ici.

[5] *Indice:* Découvrez la relation entre $f(n)$ et les fonctions cachées par les termes asymptotiques, et exprimez la contrainte imposée soit comme une inégalité qui vaut presque partout, soit — si applique — comme une limite $\lim_{n\to\infty}$.

[6] *Indice:* Simplifiez $n^{n/\log_{2105} n}$.