

基于收益预测和 CVaR 约束的投资组合优化

Jingsong Yuan

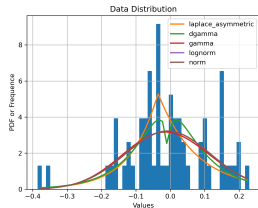
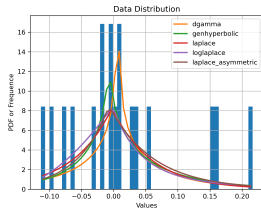
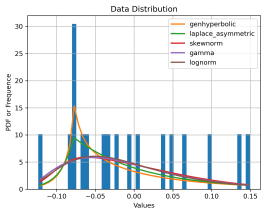
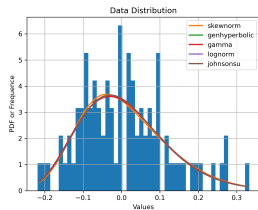
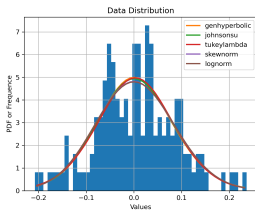
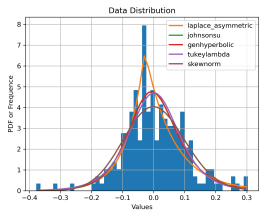
2023.11

Outline

- 1 研究背景
- 2 理论模型
- 3 数据实验
- 4 不足与改进

改进期望收益

- Mean-Variance 存在缺陷，模型建立在资产收益率服从正态分布等诸多限制性假设之上；均值作为期望收益与实际市场不符；低通滤波；不适于短期投资；



改进风险度量

① 使用方差度量风险

- 对异常值敏感，极端风险事件，会显著影响方差计算；
- 只关注收益率分布的前两矩，忽略分布的尾部；

② 使用 CVaR 来度量风险损失

- 对异常值不敏感
- 不依赖分布假设
- 考虑分布的尾部，更好处理异常值

资产及收益率

- N 种资产
- 收益率矩阵 $N \times T$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^1 & r_1^2 & r_1^3 & \dots & r_1^T \\ r_2^1 & r_2^2 & r_2^3 & \dots & r_2^T \\ r_3^1 & r_3^2 & r_3^3 & \dots & r_3^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_N^1 & r_N^2 & r_N^3 & \dots & r_N^T \end{bmatrix} = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_T]$$

其中 R_t 为 t 时期 N 种资产的收益率矩阵；

- 权重矩阵 $N \times 1$

$$w = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \dots \quad w_N]^T$$

VaR 及 CVaR

- 价值损失函数

$$L(w, R) = -w^T R$$

其中, $w \in W \subseteq R^N$, W 为可行集; R 为随机变量, 密度函数为 $P(R)$;

- $L(w, R)$ 是依赖于 w 的随机变量, 小于临界值 λ 的概率为:

$$\varphi(w, \lambda) = \int_{L(w, R) \leq \lambda} P(R) dR$$

- 置信水平: $\alpha \in (0, 1)$

$$\text{VaR} : \lambda_\alpha(w) = \inf\{\lambda \in R; \varphi(w, \lambda) \geq \alpha\}$$

$$\text{CVaR} : \phi_\alpha(w) = E[L(w, R) | L(w, R) \geq \text{VaR}(w)] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{L(w, R) \geq \lambda_\alpha(w)} L(w, R) P(R) dR$$

CVaR 计算

- 利用 Rockafellar 和 Uryasev 同时计算 VaR 和 CVaR 的功能函数 $F_\alpha(w, R)$ 有

$$F_\alpha(w, \lambda) = \lambda + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{R \in R^N} [L(w, R) - \lambda]^+ P(R) dR$$

其中, λ 即 VaR 值, $[0, x]^+ = \max(0, x)$

- Rockafellar 和 Uryasev 提出, 当 $P(R)$ 的解析式未知时, 可以使用基于历史数据的情景分析法, 产生情景矩阵, 将多重积分转化为求和运算;
- 假设有 m 种情况, 可以取 N 种债券 m 个时期的收益率

$$\hat{F}_\alpha(w, R) = \lambda + \frac{1}{m(1 - \alpha)} \sum_{t=1}^T [L(w, R_t) - \lambda] = \lambda + \frac{1}{m(1 - \alpha)} \sum_{t=1}^m [-w^T R_t - \lambda]$$

优化问题建模

- 目标函数

$$\min_w \lambda + \frac{1}{m(1-\alpha)} \sum_{t=1}^m [-w^T R_t - \lambda]$$

- 决策变量: w

- 约束条件

$$\text{s.t. } w^T I = 1$$

数据实验

- ① 理论端
 - 考虑交易成本
- ② 预测端
 - 尝试更多 ML/DNN 方法
- ③ 策略端
 - 改进滚动及调仓周期
- ④ 数据端
 - 使用更高频数据
- ⑤ 求解方法
 - 松弛线性规划 (LP)
 - 次梯度算法 (SA)
 - 遗传算法 (GA)
 - 光滑化方法 (SM)

不足与改进

- ① 理论端
 - 考虑交易成本
- ② 预测端
 - 尝试更多 ML/DNN 方法
- ③ 策略端
 - 改进滚动及调仓周期
- ④ 数据端
 - 使用更高频数据
- ⑤ 求解方法
 - 松弛线性规划 (LP)
 - 次梯度算法 (SA)
 - 遗传算法 (GA)
 - 光滑化方法 (SM)