ບົດສອບເສັງນັກຮຽນເກັ່ງ ວິຊາຄະນິດສາດ
ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ (ມ7) ຂັ້ນໂຮງຮຽນ
ໂຮງຮຽນພອນສະຫວັນ ແລະ ຊົນເຜົ່າກຽມມະຫາວິທະຍາໄລ
ສົກຮຽນ 2020-2021

ແກ້ໂດຍ: ທ. ລັດຕະນະໄຕສັນ ແກ້ວດາລາ (A0001)

ໝາຍເຫດ: ຫົວບົດສອບເສັງສະບັບນີ້ ແມ່ນໄດ້ຮັບການເຜີຍແຜ່ກ່ອນໄດ້ຮັບອະນຸຍາດຈາກເຈົ້າຂອງຜູ້ອອກຂໍ້ສອບ. ຖ້າຫາກເຈົ້າຂອງຜູ້ອອກຂໍ້ສອບໄດ້ພົບເຫັນ ແລະ ຮັບຮູ້ກ່ຽວກັບຫົວບົດສອບເສັງສະບັບນີ້, ດ້ວຍຄວາມເຄົາລົບ ແລະ ນັບຖືຢ່າງສູງ, ກະລຸນາທັກຫ້ອງ ແລະ ສົ່ງຂ່າວມາຍັງທາງ ເລີນນີ (Learni) ໂດຍກົງ ເພື່ອຈະໄດ້ທຳການຂໍສະເໜີ ແລະ ອະນຸຍາດໃນການເຜີຍແຜ່ຫົວບົດສອບເສັງສະບັບດັ່ງກ່າວ.

Email: learni.up.lao@gmail.com

Facebook: Learni

Instagram: learni_official

First update: 26 ມັງກອນ 2022 (ວັນພຸດ)

ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ມະຫາວິທະຍາໄລແຫ່ງຊາດ
ໂຮງຮຽນພອນສະຫວັນ ແລະ
ຊຸມເຜົ້າກຽມມະຫາວິທະຍາໄລ

ຄັ້ງວັນທີ 28 ຕຸລາ 2020
ສົກຮຽນ 2020-2021

ຫົວບົດສອບເສັງຄັດເລືອກນັກຮຽນເກັ່ງຂັ້ນໂຮງຮຽນ
ວິຊາ ຄະນິດສາດ ຂັ້ນ ມ7 ເວລາ 90 ນາທີ

1. ຈົ່ງຊອກໃຈຜົນຖ້ວນຂອງສົມຜົນ: $x+xy+y=9$
2. ຈົ່ງຊອກ m ເພື່ອໃຫ້ $x^3-mx^2-6x-8=0$ ສົມຜົນມີສາມໃຈຜົນຕ່າງກັນ ແລະ ປະກອບເປັນອັນດັບທະວີຄູນ.
3. ສາຍຈຳນວນ (u_n) ກຳນົດດ້ວຍ: $\begin{cases} u_1=11 \\ u_{n+1}=10u_n+1-9n, \forall n\in \mathbb{N}. \end{cases}$ ຈົ່ງຊອກພົດທົ່ວໄປ u_n ຕາມຄ່າຂອງ n.
4. ຈົ່ງແກ້ສົມຜົນ: $(1+\tan x)\cos^3 x+(1+\cot x)\sin^3 x=\sqrt{2\sin 2x}.$
5*. ກຳນົດໃຫ້ (x_k) ສຳລັບ: $x_k=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{k}{(k+1)!}$

   ຊອກ $\lim \sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_{2012}^n}$
6. ກຳນົດໃຫ້ $f(x)=2x^2+x-2$, ຈົ່ງພິສູດວ່າ $f(f(x))-x$ ຫານຂາດໃຫ້ $2x^2+2x-1$.

ບົດແກ້

1. $x, y \in I$ $\quad x + xy + y = 9$

$$x(1+y) + (1+y) = 10$$

$$(1+y)(1+x) = 10$$

x	0	1	9	4	-2	-3	-11	-6
y	9	4	0	1	-11	-6	-2	-3

$$S = \{(0,9); (1,4); (9,0); (4,1); (-2,-11); (-3,-6); (-11,-2); (-6,-3)\}$$

2. $m = ?$ $\quad x^3 - mx^2 - 6x - 8 = 0$, $x_1 \neq x_2 \neq x_3$

ໂດຍວ່າ $x_1; x_2; x_3$ ປະກອບເປັນອັນດັບທະວີຄູນ

ເຊິ່ງເຮົາໄດ້ວ່າ $x_2 = x_1 r$ ແລະ $x_3 = x_1 r^2$

ຕາມຫຼັກການວີແອັດ ~~ເຊັ່ນແອັດ~~ ຄືລົມສາມ

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 = 8 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = -6 & (2) \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = m & (3) \end{cases}$$

ພິຈາລະນາ (1); $x_1 x_2 x_3 = 8$ ໄດ້ວ່າ $x_1 (x_1 r)(x_1 r^2) = 8$

$$(x_1 r)^3 = 2^3$$

$$x_1 r = 2 = x_2$$

ພິຈາລະນາ (3); $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = m$

ໄດ້ $\quad 2x_1 + x_1 x_3 + 2x_3 = m$

$$2(x_1 + x_3) + x_1 x_3 = m$$

ເມື່ອ $x_2 = 2$ ຈາກ (1) ເຮົາໄດ້ $x_1 x_3 = 4$

ເມື່ອ $x_2 = 2$ ຈາກ (2) ເຮົາໄດ້ $x_1 + x_3 = -8$

ເພາະສະນັ້ນ ເຮົາໄດ້ $m = -12$

3. ລຳດັບ $\{u_n\}$ ກຳນົດດ້ວຍ $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

- $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n$

  $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 8 - 9n$

ໄດ້ $u_{n+2} - u_{n+1} = 10(u_{n+1} - u_n) - 9$

ໃຫ້ $V_n = u_{n+1} - u_n$; $V_{n+1} = 10V_n - 9$

$\because V_{n+1} = pV_n + q$; $\alpha = \dfrac{q}{1-p}$ ເຊິ່ງຈະໄດ້ $V_n = (V_1 - \alpha)p^{n-1} + \alpha$

ເຊິ່ງຈະໄດ້ $V_n = 9 \cdot 10^n + 1$

ໂດຍວ່າ $u_{n+1} - u_n = V_n$ ແລ້ວໄດ້ $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} V_k$

$u_n = 11 + \sum_{k=1}^{n-1}(9 \cdot 10^k + 1) = 11 + 10^n - 10 + n - 1$

$u_n = 10^n + n$

4. ແກ້ສົມຜົນ:

$(1 + \tan x)\cos^3 x + (1 + \cot x)\sin^3 x = \sqrt{2\sin 2x}$

$\cos^3 x + \sin x \cos^2 x + \sin^3 x + \cos x \sin^2 x = \sqrt{2\sin 2x}$

$\cos^2 x(\cos x + \sin x) + \sin^2 x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2\sin 2x}$

$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sqrt{2\sin 2x}$

$\sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x}$ ຍົກ 2

$1 + \sin 2x = 2\sin 2x$

$\sin 2x = 1$

ຈະໄດ້ $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in I$

$\therefore S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right\}$; $k \in I$

5. $\{x_k\}$ ສຳລັບ : $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

ຈົ່ງຫາ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n}$

ພິຈາລະນາ $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

$$x_k = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

ໄດ້ $x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

ໃຫ້ $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n}$

$$\ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n)}{n}$$

ນຳໃຊ້ ໂລປີຕານ

$$\ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^n \ln(x_1) + x_2^n \ln(x_2) + \dots + x_{2012}^n \ln(x_{2012})}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n}$$

$$\ln(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x_1)}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n + \dots + \left(\frac{x_{2012}}{x_1}\right)^n} + \dots + \frac{\ln(x_{2012})}{\left(\frac{x_1}{x_{2012}}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_{2012}}\right)^n + \dots + 1}$$

ເນື່ອງຈາກ $x_{k+1} > x_k$ ສຳລັບ $\forall_k \in \mathbb{N}$

ເພາະສະນັ້ນໄດ້ $\ln(L) = \ln(x_{2012})$

$$L = x_{2012} = 1 - \frac{1}{2013!}$$

ດັ່ງນັ້ນໄດ້ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} = 1 - \frac{1}{2013!}$

6. $f(x) = 2x^2 + x - 2$, ຈົ່ງພິສູດວ່າ $f(f(x)) - x$ ຫານລົງໃຫ້ $2x^2 + 2x - 1$.

ພິຈາລະນາ $f(f(x)) - x = f(2x^2 + x - 2) - x$

$$= 2(2x^2 + x - 2)^2 + (2x^2 + x - 2) - 2 - x$$

$$f(f(x)) - x = 2(2x^2 + x - 2)^2 + 2x^2 - 4$$

ອີງ ສຳລັບ $\forall_x$ ທີ່ເຮັດໃຫ້ $2x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Z}$

ສຳລັບ $\forall_x$ ທີ່ເຮັດໃຫ້ $2(2x^2 + x - 2)^2 + 2x^2 - 4 \in \mathbb{Z}$

ຕາມທິດສະດີເສດເຫຼືອ ເຮົາຈະໄດ້

$$2(2x^2 + x - 2)^2 + 2x^2 - 4 \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$2(2x^2 + x - 2 - (2x^2 + 2x - 1))^2 + 2x^2 - 4 - (2x^2 + 2x - 1) \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$2(x + 1)^2 - 2x - 3 \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$2(x^2 + 1 + 2x) - 2x - 3 \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$2x^2 + 4x + 2 - 2x - 3 \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$2x^2 + 2x - 1 \equiv r(x) \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

$$r(x) \equiv 0 \bmod (2x^2 + 2x - 1)$$

ດັ່ງນັ້ນພິສູດໄດ້ວ່າ ຫານລົງ