

ບົດສອບເສັງນັກຮຽນເກັ່ງ ວິຊາຄະນິດສາດ
ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ (ມ7) ລະດັບຊາດ
ສົກຮຽນ 2016-2017



ແກ້ໂດຍ: ທ. ລັດຕະນະໄຕສັນ ແກ້ວດາລາ (A0001)

ໝາຍເຫດ: ຫົວບົດສອບເສັງສະບັບນີ້ ແມ່ນໄດ້ຮັບການເຜີຍແຜ່ກ່ອນໄດ້ຮັບອະນຸຍາດຈາກເຈົ້າຂອງຜູ້ອອກຂໍ້ສອບ. ຖ້າຫາກເຈົ້າຂອງຜູ້ອອກຂໍ້ສອບໄດ້ພົບເຫັນ ແລະ ຮັບຮູ້ກ່ຽວກັບຫົວບົດສອບເສັງສະບັບນີ້, ດ້ວຍຄວາມເຄົາລົບ ແລະ ນັບຖືຢ່າງສູງ, ກະລຸນາທຳການ ແລະ ສົ່ງຂ່າວມາຍັງທາງ ເລີນນີ (Learni) ໂດຍກົງ ເພື່ອຈະໄດ້ທຳການຂໍສະເໜີ ແລະ ອະນຸຍາດໃນການເຜີຍແຜ່ຫົວບົດສອບເສັງສະບັບດັ່ງກ່າວ.

Email: learni.up.lao@gmail.com

Facebook: Learni

Instagram: learni_official

First update: 25 ມັງກອນ 2022 (ວັນຄານ)



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ
ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ
ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວປິດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນຕັ້ງ ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ
ລະດັບຊາດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2016-2017

ວິຊາ ຄະນິດສາດ

ເວລາ: 120 ນາທີ

- ໃຫ້ຈຳນວນຖ້ວນ x ແລະ y ຖ້າວ່າ: $5|(x+9y)$ ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $5|(8x+7y)$
- ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$
- ໃຫ້ (a_n) ເປັນອັນດັບທະວີບວກ ເຊິ່ງວ່າ $a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$
ຈົ່ງຊອກຫາ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$
- ຈົ່ງຊອກຫາບັນດາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ: $\int_0^x \cos(t-x^2) dt = \sin x$
- ໃຫ້ $\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ແລະ $0 \leq x \leq 180^\circ$, $0 \leq y \leq 180^\circ$
ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ x ແລະ y
- ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$; ສຳລັບ $n \in \mathbb{N}$
- ຈົ່ງຊອກຫາຕົວປະສານຂອງເມັດຕັດກັນລະຫວ່າງໜ້າພຽງ $P: 2x+y-5z=1$ ແລະ ເສັ້ນຊື່ (AB)
ເຊິ່ງວ່າ: $A(1;-5;0)$ ແລະ $B(4;1;3)$
- ຈະສາມາດສ້າງຈຳນວນທີ່ປະກອບດ້ວຍ 10 ຕົວເລກເຊິ່ງວ່າຕົວເລກທຸກຕົວແມ່ນ 2 ຫຼື 3 ໄດ້ຈັກຈຳນວນ?
ໃນນັ້ນ ຕົວເລກ 3 ບໍ່ສາມາດຢູ່ຖັດກັນໄດ້.

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວປິດ

ប្រតិបត្តិ

1. $x, y \in I$ ជំនួសឱ្យ $5/(x+iy)$ យើងបាន

$$\frac{x+iy}{5} = q_1, \quad q_1 \in I$$

$$x+iy = 5q_1$$

$$3x+27y = 5(3q_1) = 5q_2, \quad q_2 \in I$$

$$3x+27y = 5(q_2 + 4y - x), \quad q_2 \in I$$

$$3x+27y = 5q_2 + 20y - 5x$$

$$8x+7y = 5q_2$$

ឱ្យបាន $\frac{8x+7y}{5} = q_3$ ដែល $q_3 \in I$

ឱ្យបាន ជំនួសឱ្យ $5/(x+iy)$ យើងបាន $5/(8x+7y)$

2. គណនា $S = \left(\frac{1+i}{1-i}\right) + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$

ដំបូង $\frac{1+i}{1-i} = \frac{i}{i} \times \frac{1+i}{1-i} = 1 \times \frac{1+i}{1-i^2} = i \times \frac{1+i}{1+i} = i$

ឱ្យបាន $S = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017}$

យើងដឹងថា $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ ជំនួសឱ្យ $2017 \bmod 4 = 1$

ឱ្យបាន $\left(\frac{1+i}{1-i}\right) + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017} = i$

$$3. a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 9$$

ဒေါ်မိ ဝံ့လံးပုဏ်းဝံ့လံး $\{a_n\}$ ချီၣ်ဝံ့ $a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$

တပဝံး၊ နံၣ်တပဝံး $a_n = a_1 + (n-1)d$ ချီၣ် $d = a_{n+1} - a_n$

တပဝံး $n \in \mathbb{N}$

$$\text{ပိၣ်တပဝံး } a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$$

$$\text{ပိၣ်တပဝံး } (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + 8d) = 100$$

$$8a_1 + 36d = 100$$

$$2a_1 + 9d = 25$$

$$a_1 + (a_1 + 9d) = 25$$

$$a_1 + a_{10} = 25$$

$$\text{ပိၣ်တပဝံး } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 + a_{10} = 125$$

$$4. \text{ ပိၣ်တပဝံး } \int_0^x \cos(t - x^2) dt = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\sin(t - x^2)) \Big|_0^x = \sin x$$

$$\sin(x - x^2) - \sin(-x^2) = \sin x \Leftrightarrow \sin(x - x^2) + \sin(x^2) = \sin(x)$$

$$2 \sin\left(\frac{x - x^2 + x^2}{2}\right) \cos\left(\frac{x^2 - x + x^2}{2}\right) - \sin(x) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x^2 - x}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{2x^2 - x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x^2}{2}\right) \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x - x^2}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

ပိၣ်တပဝံး၊ နံၣ်တပဝံး $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{I}$

$$\frac{x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{I}$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{I}$$

ပိၣ်တပဝံး၊ နံၣ်တပဝံး $\frac{x - x^2}{2} = \pi k$, $k \in \mathbb{I}$

$$\frac{x - x^2}{2} = \pi k, k \in \mathbb{I}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\pi k}}{2}, k \in \mathbb{I} - \mathbb{N}$$

$$\frac{x^2}{2} = \pi k$$

$$x = \pm \sqrt{2\pi k}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

7. $P: 2x + y - 5z = 1$ និង (CAB) ឡើយ: $A(1, -5, 0) B(4, 1, 3)$

• តើ P ជាប្លង់ឬទេ? P ជាប្លង់ $(2, 1, -5)$

• តើ AB ជាប្លង់ឬទេ? AB ជាប្លង់ $(1, 2, 1)$

ដើម្បីដឹងថា P ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល P ជាប្លង់ឬទេ

ដើម្បីដឹងថា AB ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល AB ជាប្លង់ឬទេ

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = (1)(2) + (2)(1) + (1)(-5) = -1$$

ដើម្បីដឹងថា P ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល P ជាប្លង់ឬទេ

ដើម្បីដឹងថា AB ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល AB ជាប្លង់ឬទេ

ដើម្បីដឹងថា P ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល P ជាប្លង់ឬទេ

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -5 + 2k \\ z = k \end{cases} \text{ តាម } k \in \mathbb{R}$$

ដើម្បីដឹងថា P ជាប្លង់ឬទេ យើងត្រូវពិនិត្យមើល P ជាប្លង់ឬទេ

8. យើងមាន 3 ប្លង់ និង 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

ប្លង់ 1 ប្លង់ 2 ប្លង់ 3 ដែលមាន 3 ប្លង់ ដែលមាន 3 ប្លង់

5. ယူဆလေသည်

$$\begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \sin x \cos x & \sin x \sin(x+y) \\ \cos x & \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ဒီမှာ ၅၀၂ နဲ့ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ မှာ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ မှာ $x = 30^\circ$

ယူဆလေသည် $\sin(x+y) = 1$ ဒီမှာ ၅၀၂ နဲ့ $x+y = 90^\circ$ မှာ $y = 60^\circ$

တို့သည် $(x, y) = (30^\circ, 60^\circ)$

6. ယူဆရ: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ နှင့် $n \in \mathbb{N}$

ဤသည်မှာ ယူဆချက် ပြောင်းလဲခြင်း နှင့် $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

$$P(1): \frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$1 = 2 \cos^2 x - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

ယူဆချက် ပြောင်းလဲခြင်း $P(n) \rightarrow P(n+1)$ မှာ $P(n) \equiv T$ နှင့် $P(n+1)$ သာ ယူဆလေသည်

$$P(n+1): \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x} = \cot x - \cot 2^{n+1} x$$

$$\cot x - \cot 2^n x + \frac{1}{\sin 2^{n+1} x} = \cot x - \cot 2^{n+1} x$$

$$\frac{1}{\sin 2^{n+1} x} = \cot 2^n x - \cot 2^{n+1} x = \frac{\cos 2^n x}{\sin 2^n x} - \frac{\cos 2^{n+1} x}{\sin 2^{n+1} x}$$

$$1 = 2 \cos^2(2^n x) - \cos 2^{n+1} x \Leftrightarrow \cos 2^{n+1} x = 2 \cos^2(2^n x) - 1$$

ယူဆချက် ပြောင်းလဲခြင်း

တို့သည် ဤသည်မှာ ပြောင်းလဲခြင်း $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$ နှင့် $n \in \mathbb{N}$ မှာ ယူဆချက် ပြောင်းလဲခြင်း