ข้อที่ 6 ทั้ง

1. ให้ $A=\left(\frac{2}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right)\div\left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$ สำหรับ $a\geq 0$ และ $a\neq 1$

ก. จงตัดสินว่าสมการ A

$A=\left(\frac{2}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right)\div\left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)=\left(\frac{2+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}\right)\div\left(\frac{2+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right)$

$A=\left(\frac{2+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}\right)\times\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{2+\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}=\frac{(\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}$

$A=\sqrt{1-a}$

ข. จงหาค่าของสมการ A สำหรับ $a=\frac{24}{49}$

เพราะฉะนั้น $A=\sqrt{1-\frac{24}{49}}=\sqrt{\frac{49-24}{49}}=\sqrt{\frac{25}{49}}=\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2}$

ดังนั้น $A=\frac{5}{7}$

ค. จงหาค่าของ a เพื่อให้สมการ $A=2$

พิจารณา $\sqrt{1-a}=2$ เพราะฉะนั้น $a=-3$

ซึ่งแสดงว่าข้อความข้างต้นนั้น $A\neq 2$ ในสมการนี้

2. จงหาค่าของ x,y,z ที่ว่า $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$

พิจารณา $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$

$\sqrt{x-y+z}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{z}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

เพราะฉะนั้น $x-y+z+y+2\sqrt{(x-y+z)y}=x+z+2\sqrt{xz}$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{(x-y+z)y}=\sqrt{xz}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$(x-y+z)y=xz \Leftrightarrow xy-y^2+yz=xz$

$\Leftrightarrow y^2-xy-yz+xz=0 \Leftrightarrow y(y-x)-z(y-x)=0$

$\Leftrightarrow (y-x)(y-z)=0$ เพราะฉะนั้น จะได้ $y=x$ หรือ $y=z$

ดังนั้น $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$ เมื่อ $x=y=z$ โดยที่ $x,y,z\in\mathbb{R}^+$

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $f(x)=a\sin x^\circ+bx\cos x^\circ+x^2$ / $x\in\mathbb{R}$ ที่ว่า $f(2)=3$ จงหาค่าของ $f(-2)$

เพราะฉะนั้น $f(2)=a\sin(2)^\circ+2b\cos 2^\circ+4=3$ เพราะฉะนั้น $a\sin(2)^\circ+2b\cos(2)^\circ=-1$ ... (1)

พิจารณา $f(-2)=a\sin(-2)^\circ+b(-2)\cos(-2)^\circ+4$

$f(-2)=-a\sin(2)^\circ-2b\cos(2)^\circ+4=-(a\sin(2)^\circ+2b\cos(2)^\circ)+4$

$f(-2)=-(-1)+4=5$

ดังนั้น $f(-2)=5$

4. ให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน: $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = \sqrt{3}$, $\angle ABC = 120^\circ$ และ $\angle BCD = 90^\circ$

จงหาความยาวของเส้นทแยงมุม $[AD]$

$AB = 1$, $\angle ABC = 120^\circ$
$BC = 2$
$CD = \sqrt{3}$, $\angle BCD = 90^\circ$

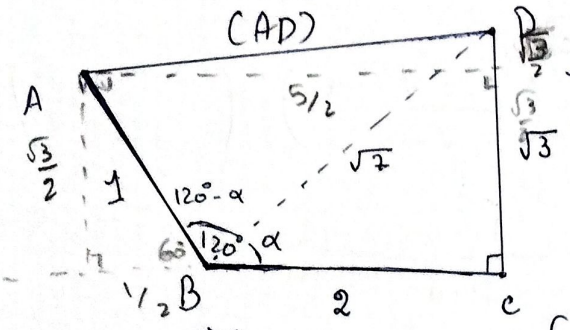

fig. 1

+) ลากเส้นจากจุด B ไปหาจุด D เพื่อให้รูปสามเหลี่ยมภายในสามเหลี่ยม BCD มีมุมที่ C
จะได้ว่าเส้นนี้ $BD = \sqrt{7}$

+) สมมุติให้ $\angle DBC = \alpha$ เพราะฉะนั้น $\angle ABD = 120^\circ - \alpha$
จะได้: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$ $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

+) จากรูปสามเหลี่ยม ABD ตามกฎของ cos เราได้

$(AD)^2 = (1)^2 + (\sqrt{7})^2 - 2(1)(\sqrt{7})\cos(120^\circ - \alpha)$

$(AD)^2 = 8 - 2\sqrt{7}(\cos 120^\circ \cos\alpha + \sin 120^\circ \sin\alpha)$

$(AD)^2 = 7 - 2\sqrt{7}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = 8 + 2 - 3$

ดังนั้น $AD = \sqrt{7}$

ตามความยาวเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีความยาวเท่ากันทั้งสองเส้น

5. ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดกำเนิดอยู่ที่ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ เมื่อให้จุด $A(-2, 3)$, $B(1, 5)$ และ $C(6, 3)$

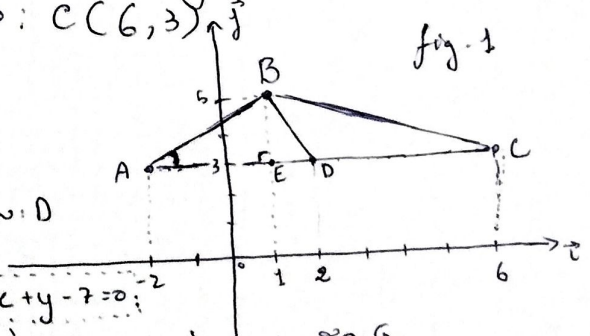

fig. 1

5.1) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามจากจุดยอดมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม ABC

ให้จุด D แทนจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับจุด B
เมื่อ $A(-2, 3)$ และ $C(6, 3)$ เพราะฉะนั้น $D\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+3}{2}\right)$
หรือ $D(2, 3)$ ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ D

$y - 3 = \left(\frac{3-5}{2-1}\right)(x-2)$ ได้ $y = -2x + 7$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามจากจุดยอดมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $2x + y - 7 = 0$

5.2) ให้จุด G เป็นจุดศูนย์กลางมวลของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหาตำแหน่งของจุด G

+) ตามสมบัติของจุดศูนย์กลางมวลที่ว่า จุดศูนย์กลางมวลของรูปสามเหลี่ยมแบ่งส่วนของเส้นมัธยฐานออกเป็นสองส่วน ที่มีอัตราส่วนเป็น 2 ต่อ 1 นับจากจุดยอดมุม

$BG : GD = 2 : 1$ เพราะฉะนั้นจากสูตรหาจุดกึ่งกลางเส้นตรง จะได้ว่า G คือ $G\left(\frac{2\cdot 2 + 1\cdot 1}{2+1}, \frac{2\cdot 3 + 1\cdot 5}{2+1}\right)$

ดังนั้น $G\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$

5.3) จงหาค่าของ $\sin\angle BAC$

+) สมมุติให้จุด E เป็นจุดที่ทำให้ $(BE) \perp (AC)$ ที่เพราะฉะนั้นจากรูปจะได้ว่า
ตำแหน่งของจุด E คือ $E(1, 3)$

• เรารู้ว่า $\sin\angle BAC = \frac{BE}{AB}$ ... (1)

เรารู้ $|BE| = 2$ และ $|AB| = \sqrt{(1+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

ดังนั้น $\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{13}}$