4.1一阶逻辑命题符号化

一阶逻辑－ 谓词和量词

命题逻辑缺点：

- 不能研究命题的结构、成分和内部逻辑的特征
- 不能表达二个原子命题所具有的共同特征，无法处理一些简单又常见的推理

苏格拉底论证：

所有的人总是要死的
苏格拉底是人
所以苏格拉底是要死的

4.1一阶逻辑命题符号化

p：所有的人总是要死的

q：苏格拉底是人

r：苏格拉底是要死的

形式结构：$(p \wedge q) \rightarrow r$

推理不正确

4.1一阶逻辑命题符号化

- 个体词和谓词

陈述句可分解为：

个体(名词，代词)和谓词

- 例：张华是个劳动英雄，李明是劳动英雄
  - ***H:*** 是个劳动英雄
  - ***j:*** 张华
  - ***m:*** 李明

可用下列符号表示上述命题：***H(j)***，***H(m)***

4.1一阶逻辑命题符号化

- 个体变元
  - 代表个体的变元
- 谓词常元
  - 代表特定谓词的字母
- 谓词变元
  - 代表任意(抽象的、泛指的)谓词的字母
- 例：5是质数
  - M代表是质数, 符号化为M(5)

4.1一阶逻辑命题符号化

- 谓词命名式
  - H(x,y,z)，H为谓词，x,y,z为个体
  - 一元谓词
  - 二元谓词
  - n元谓词
- 一般个体变元的位置是有规定的

  例：河南省北接河北省

  n L b

写成二元谓词为：L(n,b)

4.1一阶逻辑命题符号化

- 谓词命名式中个体变元的取值范围叫做论域或个体域。空集不能作为论域。

4.1一阶逻辑命题符号化

全称量词、存在量词

- 全称量词
  符号：“∀”，读作“对于所有的”，“对一切”

例：这里所有的都是苹果

解：$\forall x P(x)$，谓词$P(x)$表示x是苹果

4.1一阶逻辑命题符号化

几种不同形式的读法

- ∀xP(x)：对所有的x，x是…
- ∀x¬P(x) ：对所有x，x不是…
- ¬ ∀xP(x) ：并不是对所有的x，x是…
- ¬ ∀x¬P(x) ：并不是所有的x，x不是…

4.1一阶逻辑命题符号化

❑存在量词

符号：“∃”，读作“存在一个”，“对于一些”

例：有一个聪明人

- **M(x)：x**是聪明人

  $\exists xM(x)$

4.1一阶逻辑命题符号化

“∃”表达式的读法：

- **∃x A(x)**：存在一个x,使x是…
- **∃x¬ A(x)**：存在一个x, 使x不是…
- **¬∃x A(x)**：不存在一个x, 使x是…
- **¬∃x¬ A(x)**：不存在一个x, 使x不是…

4.1一阶逻辑命题符号化

将谓词转化为命题

- 将个体变元代之以个体

- 对变元量化
  - 谓词**F(x)**：“**x**是质数”
  - 论域为**I**，$\forall$**x F(x)** 为假，$\exists$ **x F(x)** 为真
  - 量化后命题的真值与论域有关

宇宙间一切事物组成的论域，称为全总个体域

量化

在谓词P(x),Q(x,y)…等前面加上全称量词∀x或存在量词∃x，则变元x被全称量化或存在量化

例：$L(x,y)$表示$x<y$；$E(x,y)$表示$x=y$

(a) $\forall y L(y,y+1)$　　(b) $\forall y E(y,3)$

(c) $\exists y L(y,y+1)$　　(d) $\exists y E(y,3)$

如果论域是整数，那么(a)、(c)、(d)是真的，(b)是假的。

4.1一阶逻辑命题符号化

例：人总是要死的, 有些人是不怕死的

$F(x)$：x是不怕死的

$D(x)$：x是要死的

$M(x)$：x是人

- 如果论域是人类，则

$$\forall x D(x)$$

$$\exists x F(x)$$

- 如果论域是全总个体域，则

$$\forall x (M(x) \rightarrow D(x))$$

$$\exists x(M(x) \land F(x))$$

其中$M(x)$表示的是特性谓词

4.1一阶逻辑命题符号化

1. 对于全称量词，特性谓词作为蕴含式的前件加入

$$\forall x\,(M(x) \rightarrow D(x))$$

2. 对于存在量词，特性谓词作为合取项加入

$$\exists x(M(x) \wedge F(x))$$

4.1一阶逻辑命题符号化

注意：

1. 在不同的论域中，命题符号化的形式可能不一样
2. 若事先没有给出论域，应以全总个体域为论域
3. 在引入特性谓词后，使用全称量词与存在量词符号化的形式是不同的
4. 论域和谓词的含义确定下来后，**n**元谓词要转化为命题至少需要**n**个量词

4.1一阶逻辑命题符号化

5. 当论域为有限集时，如D= $\{a_1 \ldots a_n\}$
由量词的定义可知，对于任意谓词P(x)

$$\forall xP(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$$
$$\exists xP(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_n)$$

6. 多个量词同时出现时，不能随意颠倒顺序
例：对任意的x，存在着y，使得x+y=5
论域为实数集； E(x,y)表示x+y=5
符号化为：$\forall x \exists y E(x,y)$

4.1一阶逻辑命题符号化

1 凡偶数均能被2整除

解:

- F(x)： x是偶数
- G(x)： x能被2整除

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

2 在北京工作的人不都是北京人

解:

- F(x)：x是在北京工作的人
- G(x)：x是北京人

$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

4.1一阶逻辑命题符号化

3 不存在跑得同样快的两只兔子

解：

- F(x):x是兔子
- L(x,y):x和y跑得同样快

符号化为：

$$\neg\exists x\exists y\,(F(x)\land F(y)\land L(x,y))$$

4.1一阶逻辑命题符号化

4 尽管有些人聪明，但不是所有人聪明

解：

- M(x):x是人
- F(x):x聪明

$$\exists x(M(x) \land F(x)) \land \neg (\forall x(M(x) \rightarrow F(x)))$$

$$\neg (\exists x(M(x) \land F(x)) \rightarrow \forall x(M(x) \rightarrow F(x)))$$

$$\exists x(M(x) \land F(x)) \land \exists x(M(x) \land \neg F(x))$$

4.1一阶逻辑命题符号化

5 每位电影演员都或与Kevin Bacon同拍过电影，或跟与Kevin Bacon同拍过电影的人同拍过电影。

- **Bacon数**
- **Erdos数**

4.2一阶逻辑公式及解释

定义4.1 一阶语言的字母表定义如下：

1. 个体常元：$a,b,c\ldots,a_i,b_i,c_i\ \ldots i\geq 1$
2. 个体变元：$x,y,z\ldots,x_i,y_i,z_i\ \ldots i\geq 1$
3. 函数符号：$f,g,h\ldots,f_i,g_i,h_i\ \ldots i\geq 1$
4. 谓词符号： $F,G,H\ldots,F_i,G_i,H_i\ \ldots i\geq 1$
5. 量词符号： $\forall, \exists$
6. 联结词符号： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
7. 括号与逗号： (,) ,

4.2一阶逻辑公式及解释

定义4.2 项定义如下：

1. 个体常元和个体变元是项
2. 若$\varphi(x_1,x_2\ldots x_n)$是任意的n元函数，$t_1,t_2\ldots t_n$是任意的n个项，则$\varphi(t_1,t_2\ldots t_n)$是项
3. 所以项都是有限次应用1，2得到的

定义4.3 设$R(x_1,x_2\ldots x_n)$是任意n元谓词，$t_1,t_2\ldots t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1,t_2\ldots t_n)$是F的原子公式

4.2一阶逻辑公式及解释

定义4.4　合式公式

1. 原子公式是合式公式
2. 若A是合式公式，则¬A也是合式公式
3. 若A, B都是合式公式，则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式
4. 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也都是合式公式
5. 只有有限次应用(1)-(4)求得公式是合式公式

4.2一阶逻辑公式及解释

(1)辖域：紧接在量词后面括号内的合式公式

例： $\forall x\, P(x)$， $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$，

$\forall x\, M(x) \rightarrow D(x)$

(2)自由变元与指导变元

指导变元：出现在量词$\forall x$, $\exists x$辖域内的变元x

自由变元：非约束出现的变元

4.2一阶逻辑公式及解释

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$，x是指导变元
- $\forall x(P(x) \to \exists y\, P(x,y))$，x，y均是指导变元
- $\forall x\, P(x) \to Q(x)$，x既以自由变元出现，又以指导变元出现

定义4.6 设A是任意的公式，若A中不含自由出现的个体变元，则称A为封闭的公式，简称闭式

4.2一阶逻辑公式及解释

定义4.7 解释I由以下四部分组成：

- 非空个体域D_I。
- D_I中一些特定元素的集合
  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots\}$
- D_I上特定函数集合
  $\{\bar{f}_i^n \mid i, n \geq 1\}$
- D_I上特定谓词集合
  $\{\bar{F}_i^n \mid i, n \geq 1\}$

4.2一阶逻辑公式及解释

例：给定解释I如下：

- 个体域D＝N
- a=0
- f(x,y)=x+y, g(x,y)=x*y
- F(x,y)为x=y

1. $F(f(x,y),g(x,y))$
2. $\forall xF(g(x,a),x) \rightarrow F(x,y)$
3. $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$

4.2一阶逻辑公式及解释

定理4.1 封闭的公式在任何解释下都变成命题

例： $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

- 全总个体域
- F(x)：x犯错误
- M(x)：x是人

例： $\exists z(P(z) \wedge F(x,z) \wedge M(z,y))$

- 全总个体域
- P(z)：z是人
- F(x,z)：x是z的父亲
- M(z,y)：z是y的母亲

4.2一阶逻辑公式及解释

- 永真式
  - A在任何解释下都为真
- 永假式
  - A在任何解释下都为假
- 可满足式
  - 至少存在一个解释使A为真

4.2一阶逻辑公式及解释

定义4.9 设A_0是含命题变元$p_1,p_2\ldots p_n$的命题公式，$A_1,A_2\ldots A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例。

定理4.2 永真式的代换实例是永真式，永假式的代换实例是永假式。

4.2一阶逻辑公式及解释

例：判断公式类型

1. $\forall x(F(x) \to G(x))$

2. $\forall xF(x) \to (\exists x \exists y G(x,y) \to \forall xF(x))$

3. $\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

4. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \to \forall yG(y)$