东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

课 程 名 称 几何与代数B 考试学期 08-09-2 得分

适 用 专 业 电类专业 考 试 形 式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名 学号

线 封 密

一. （30%）填空题

1. 设 n 是正整数，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda \\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^n=$________________；

2. 若分块矩阵 $\begin{pmatrix}A & O \\ O & B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A & B \\ O & I\end{pmatrix}$ 可交换，且 B 是可逆矩阵，则 $A-B=$________；

3. 如果向量组 $(1,1,1),(1,2,2),(0,1,k)$ 的秩为 2，则参数 $k=$____________；

4. 若 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=3$，则 A 的伴随矩阵的行列式 $|A^*|=$__________；

5. 已知 A 是 2 阶方阵，若 $trA=2$，$|A|=-3$，则 A 的特征值为____________；

6. R^3 的子空间 $V=\{(x,y,z)\,|\,x-y+z=0\}$ 的一组基为____________；

7. 直线 $\begin{cases} y+z=3 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面的方程为________________；

8. 如果方程 $x^2-2y^2+z^2+2kxz=1$ 表示双叶双曲面，则参数 k 满足条件________；

9. 若矩阵 A,B 满足 $BA^T-A^TB=\begin{pmatrix}0 & -2 \\ 3 & 0\end{pmatrix}$，则 $B^TA-AB^T=$____________；

10. 如果矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ a & 2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & b\end{pmatrix}$ 合同，则参数 a,b 满足条件__________。

二. （10%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使得 $XA=2X+B$。

三. （10%）假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问：参数 a,b,c 满足什么条件时，向量组

$\beta_1=a\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=b\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=c\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关？

四. （16%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+a & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+a\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$。

1. 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解？有唯一解时，用 Cramer 法则求 x_1。

2. 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 没有解？

3. 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解？有无穷多解时，求方程组的通解。

五. （14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & b\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$， $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

1. 问：参数 a,b 满足什么条件时，η 是 A 的特征向量？若 η 是 A 的特征向量，求相应的特征值。

2. 若 η 是 A 的特征向量，且 A 有一个二重特征值，求 a,b 的值，并讨论 A 是否相似于对角阵。如果 A 相似于对角阵，求对角阵及相应的相似变换矩阵。

六. （8%）设有球面$\Sigma: x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$，平面$\pi$过球面$\Sigma$的球心且垂直于直线$L:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$。求$\Sigma$与$\pi$的交线在$xOy$平面上的投影曲线的方程。

七. （12%）设$n\geq 2$，α,β都是实n维列向量，且α,β是一标准正交向量组，p,q都是非零实数，$A=p\alpha\alpha^T+q\beta\beta^T$。

1. 证明α,β都是A的特征向量，并求相应的特征值；

2. A相似于对角阵。试说明理由，并求相应的对角阵；

3. 问：当参数k满足什么条件时，$kI+A$是正定矩阵？

08-09-2 几代(B)部分答案提示

一（30%）填空题

9. 若矩阵 A,B 满足 $BA^T - A^T B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，则 $B^T A - AB^T =$ ____________________；

分析：$B^T A - AB^T = (A^T B)^T - (BA^T)^T = (A^T B - BA^T)^T$。

10. 如果矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 合同，则参数 a,b 满足条件______________。

分析：因为 B 对称，所以 A 对称，于是 $a = 2$。如何确定 b？实对称矩阵合同⇔正负惯性指数的个数相同⇔正负特征值的个数相同。

三（10%）假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，问：参数 a,b,c 满足什么条件时，向量组 $\beta_1 = a\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = b\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = c\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关？

分析：方法一

向量组 $\beta_1 = a\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = b\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = c\alpha_3 - \alpha_1$ **线性相关**

⇔存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 **使得** $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$。

⇔存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 **使得** $k_1(a\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(b\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(c\alpha_3 - \alpha_1) = 0$

⇔存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 **使得**

$$(ak_1 - k_3)\alpha_1 + (bk_2 - k_1)\alpha_2 + (ck_3 - k_2)\alpha_3 = 0 \quad \textbf{..........(*)}$$

注意到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ **线性无关，所以（*）等价于** $ak_1 - k_3 = bk_2 - k_1 = ck_3 - k_2 = 0$。**于是**

向量组 $\beta_1 = a\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = b\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = c\alpha_3 - \alpha_1$ **线性相关**

⇔存在一组不全为零的数 k_1, k_2, k_3 **使得** $ak_1 - k_3 = bk_2 - k_1 = ck_3 - k_2 = 0$。

⇔方程组 $ak_1 - k_3 = bk_2 - k_1 = ck_3 - k_2 = 0$ **有非零解**

⇔系数行列式为零（此时是三个未知元三个方程的齐次方程组）

方法二 因为 $\beta_1 = a\alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = b\alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = c\alpha_3 - \alpha_1$，所以

$$\begin{aligned}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) &= (a\alpha_1-\alpha_2, b\alpha_2-\alpha_3, c\alpha_3-\alpha_1)\\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}\\ &:= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C\end{aligned}$$

则 β_1,β_2,β_3 线性无关 $\Leftrightarrow r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3 \Leftrightarrow r(C)<3$。

事实上，若 $r(C)<3$，因为 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\le r(C)$，则 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$。若 $r(C)=3$，则 C 可逆，从而 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$。

四 （16%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$。

a) 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解？有唯一解时，用 Cramer 法则求 x_1。

分析：由 Cramer 法则，$|A|\neq 0$ 时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解。计算 $|A|$ 时，可以将第 2,3,4 行加到第 1 行简化运算。

b) 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 没有解？

分析：由(a)知，要使得 $Ax=b$ 没有解，则前提条件是 $|A|=0$。在此前提下，将增广矩阵 (A,b) 化为阶梯形，然后看系数矩阵的非零行数与整个矩阵的非零行数是否相等，不等则没有解；相等，则有无穷多解。

c) 当参数 a 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解？有无穷多解时，求方程组的通解。

五（14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&a&b\\1&0&1\end{pmatrix}$， $\eta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

d) 问：参数 a,b 满足什么条件时，η 是 A 的特征向量？若 η 是 A 的特征向量，求相应的特征值。

分析： $A\eta=\lambda\eta$ **当且仅当** $\lambda=2,\ a+b=2$。

e) 若 η 是 A 的特征向量，且 A 有一个二重特征值，求 a,b 的值，并讨论 A 是否相似于对角阵。如果 A 相似于对角阵，求对角阵及相应的相似变换矩阵。

分析：$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-a)$。**于是** $a=0,b=2$；**或者** $a=2,b=0$。

当 $a=0,b=2$ **时，考察** $(0E-A)x=\theta$，**因为** $r(0E-A)=2$，**所以二重特征值 0 对应 1 个线性无关的特征向量，此时** A **不相似于对角阵；**

当 $a=2,b=0$ **时，考察** $(2E-A)x=\theta$，**因为** $r(2E-A)=1$，**所以二重特征值 2 对应 2 个线性无关的特征向量，此时** A **相似于对角阵；**

七（12%）设 $n\ge 2$，α,β 都是实 n 维列向量，且 α,β 是一标准正交向量组，p,q 都是非零实数，$A=p\alpha\alpha^T+q\beta\beta^T$。

f) 证明 α,β 都是 A 的特征向量，并求相应的特征值；

分析：$A\alpha=(p\alpha\alpha^T+q\beta\beta^T)\alpha=p\alpha(\alpha^T\alpha)+q\beta(\beta^T\alpha)=p\alpha$；

$A\beta=(p\alpha\alpha^T+q\beta\beta^T)\beta=p\alpha(\alpha^T\beta)+q\beta(\beta^T\beta)=q\beta$。

g) A 相似于对角阵。试说明理由，并求相应的对角阵；

分析：因为 $A=A^T$，**所以** A **相似于对角阵。另外，我们可构造出** $n-2$ **个与** α,β **构成标准正交向量组的向量** $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-2}$（**可以通过解方程组得到**）。**则** $A\eta_i=\theta(i=1,2,\ldots,n-2)$，**即** $A\eta_i=\theta=0\eta_i(i=1,2,\ldots,n-2)$。**于是** A **相似于**

$$\begin{pmatrix} p & & & & \\ & q & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}。$$

h) 问：当参数k满足什么条件时， $kI+A$是正定矩阵？

分析：法一 由**(b)**知道A的特征值是$p,q,0,\ldots,0$，则$kI+A$的特征值是$p+k,q+k,k,\ldots,k$。所以$kI+A$是正定矩阵当且仅当$p+k>0,q+k>0,k>0$。

法二 由**(b)**知道存在可逆阵P使得$P^{-1}AP=diag\{p,q,0,\ldots,0\}$，则$P^{-1}(kI+A)P=kI+P^{-1}AP=diag\{k+p,k+q,k,\ldots,k\}$。所以$kI+A$是正定矩阵当且仅当$p+k>0,q+k>0,k>0$。

东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

课程名称 几何与代数B 考试学期 09-10-2 得分

适用专业 电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. （30%）填空题

1. 若 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，且 $(AB)^2=A^2B^2$，则 a,b 满足条件______________；

2. 设 2 阶方阵 $A=(\alpha,\beta)$，$B=\left(2\alpha-\beta,\alpha+3\beta\right)$，若 $B=AC$，则矩阵 $C=$__________；

3. 直线 $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ 的一个方向向量为______________________________；

4. 点 $P(1,1,1)$ 到平面 $x-2y+2z=3$ 的距离是______________________________；

5. 如果向量组 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关，则参数 a 满足条件__________；

6. 向量 $\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 在 R^2 的基 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 下的坐标是__________________；

7. 如果 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的属于特征值 b 的特征向量，则 $(a,b)=$______________；

8. 假设 A 是 2×2 矩阵，若可逆矩阵 $P=(\alpha,\beta)$ 满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$Q=\left(\beta,\alpha\right)$，

   则 $Q^{-1}AQ=$____；

9. 假设 A 是 2×2 矩阵，若 $A+E, A-E$ 都不可逆，则行列式 $\left|A+2E\right|=$____________；

10. 若 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 是 $n\times n$ 正交矩阵，则 $B=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_r\alpha_r^T$ $(1\le r\le n)$ 的特征多项式是____。

二. （10%）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$。已知 $XA=B+X$ ，求 X 。

三. （14%）设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=1\\ 2x_1+3x_2+ax_3+4x_4=b\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+6)x_4=5\end{cases}$。

1. 当参数 a,b 满足什么条件时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？

2．有无穷多解时，求方程组的通解。

四. （14%）假设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$，且$A$与$B$相似。

1. 求参数a,b的值；

2. 求一可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$；

3. 证明存在矩阵C,使得$A=C^2$。

五. （10%）设π_1是抛物线$\begin{cases}x^2+2y=0\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转所得曲面，$\pi_2$是平面$x-2y+z=4$。

求π_1的方程；求π_1与π_2的交线在xOy平面上的投影曲线的方程；并画出由π_1、π_2所围成的空间有界区域的草图。

六. （12%）假设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3$。

1. 求一可逆线性变换 $x=Cy$ 将 f 化成其标准形；

2. 求 f 的矩阵 A，问：当参数 a 取什么值时，A 的特征值都大于零？

3. 如果二次曲面 $f(x,y,z)=1$ 表示单叶双曲面，问：参数 a 应满足什么条件？

七. （10%）证明题

1. 假设 A 是 $n\times n$ 正定矩阵，B 是 $s\times n$ 实矩阵，证明：BAB^T 是正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=s$。

2. 假设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，若存在不为零的数 x,y 使得 $AB=xA+yB$，证明：$AB=BA$。

09-10-2 几代(B)部分答案提示

一. 填空题

10. 若 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$ 是 $n\times n$ 正交矩阵，则 $B=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_r\alpha_r^T$ $(1\le r\le n)$ 的特征多项式是________________________________。

解：答案是$(\lambda-1)^r\lambda^{n-r}$**。思路是找到**$B$**的所有特征值。注意到**$A$**的列向量组相互正交且都是单位向量，于是有**

$$B\alpha_i=\alpha_i\alpha_i^T\alpha_i=\alpha_i(\alpha_i^T\alpha_i)=1\alpha_i(1\le i\le r);$$

$$B\alpha_i=\theta=0\alpha_i(i\ge r+1).$$

于是 1 和 0 是B**的特征值，它们对应的特征向量是**n**个线性无关的特征向量。所以 1 和 0 是**B**的所有特征值。**

四.（14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$，且 A 与 B 相似。

a) 求参数 a,b 的值；

分析：这里可能要用到A**和**B**的迹相同、行列式相同、特征值相同的必要条件。甚至是可相似对角化的充要条件：2 是 2 重特征值，所以它对应 2 个线性无关的特征向量，因此成立**$r(2E-A)=3-2=1$**。**

b) 求一可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$；

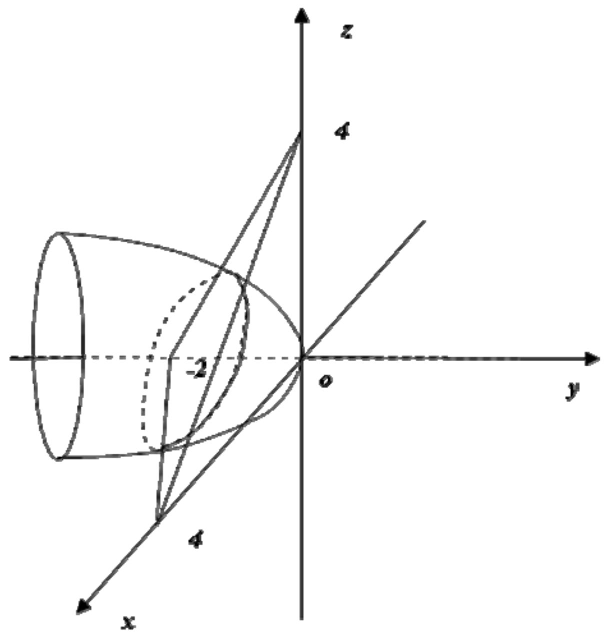
c) 证明存在矩阵 C,使得 $A=C^2$。

分析：由 b) 可知 $A=PBP^{-1}$**，于是** $A=PB^{1/2}B^{1/2}P^{-1}=PB^{1/2}P^{-1}P^{-1}B^{1/2}P^{-1}$**。令** $C=PB^{1/2}P^{-1}$**即可。**

五． （10%）设 π_1 是抛物线 $\begin{cases} x^2+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得曲面，π_2 是平面 $x-2y+z=4$。求 π_1 的方程；求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程；并画出由 π_1、π_2 所围成的空间有界区域的草图。

分析： 绕 y 轴旋转，保持 y 不变，替换 x 为 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 得旋转面方程 $x^2+z^2+2y=0$。联立 π_2 方程，消去 z 得投影柱面方程 $x^2+(4-x+2y)^2+2y=0$，整理得 $x^2-2xy+2y^2-4x+9y+8=0$。投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2-4x+9y+8=0, \\ z=0. \end{cases}$$



六． （12%）假设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3$。

1. 求一可逆线性变换 $x=Cy$ 将 f 化成其标准形；

分析：建议此题用配方法。

2. 求 f 的矩阵 A，问：当参数 a 取什么值时，A 的特征值都大于零？

分析：A 的特征值都大于零意味着 A 的正惯性指数为 3，或者 A 是正定阵，所以可从不同的角度来看待。

3. 如果二次曲面 $f(x,y,z)=1$ 表示单叶双曲面，问：参数 a 应满足什么条件？

分析：单叶双曲面意味着相应二次型的惯性指数满足两正一负。

七.（10%）证明题

1. 假设 A 是 $n\times n$ 正定矩阵，B 是 $s\times n$ 实矩阵，证明：BAB^T 是正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=s$。

证明：=> BAB^T 是正定矩阵，则 $\forall x\neq\theta, x^T(BAB^T)x>0$，即 $(B^Tx)^T A(B^Tx)>0$。从而有 $\forall x\neq\theta, B^Tx\neq\theta$（否则 $(B^Tx)^T A(B^Tx)=0$，矛盾）。这意味着 $B^Tx=\theta$ 只有零解。则成立 $r(B^T)=$ 未知元个数= B^T 的列数，即 $r(B)=s$。

<= 设 $r(B)=s$，则 $B^Tx=\theta$ 只有零解。从而 $\forall x\neq\theta, B^Tx\neq\theta$。于是由 A 的正定性可知 $(B^Tx)^T A(B^Tx)>0$，即 $\forall x\neq\theta, x^T(BAB^T)x>0$，证得 BAB^T 是正定矩阵。

2. 假设 A,B 都是 $n\times n$ 矩阵，若存在不为零的数 x,y 使得 $AB=xA+yB$，证明：$AB=BA$。

证明：由 $AB=xA+yB$ 可得 $(A-yE)(B-xE)=xyE$。因为 x,y 不为零，所以

$$\frac{A-yE}{y}\frac{B-xE}{x}=E。$$

则 $\frac{A-yE}{y}$ 和 $\frac{B-xE}{x}$ 互逆，于是

$$\frac{A-yE}{y}\frac{B-xE}{x}=\frac{B-xE}{x}\frac{A-yE}{y}=E。$$

整理可得 $AB=BA$。

东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称	几何与代数B	考试学期	2010-2011-2	得分	
适用专业	电类各专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
批阅人									

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

一. 填空(每空 2 分, 共 30 分)

1. 设向量$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 2, 2)$, 矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{A}^{10} =$________________,
$\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) =$ ______________, $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}| =$ _________________,
$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角为________________, 若$\boldsymbol{\gamma}$ 是垂直于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$的单位向量,
则$\boldsymbol{\gamma} =$________________.

2. 设平面π过点 $P(1, 0, -1)$且垂直于直线 l: $\begin{cases} x = t-9, \\ y = -3t+2, \\ z = 2t, \end{cases}$ 则平面π的方程为
________________, 直线 l 与平面π的交点坐标为____________.

3. 原点 O 到平面 $x + y - z + 3 = 0$ 的距离为________________.

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, 则$\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix}^{-1} =$________________

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$线性相关, 则 $a =$ ____, 这个向量组
的一个极大线性无关组是____________________.

5. 向量空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \middle| x - 2y + 3z = 0 \right\}$ 的一组基为________________,
V 的维数 $\dim V =$ ____________.

6. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$中,________________与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$相似,
________________与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$合同.

二. (6 分)计算行列式$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

三. (8 分)设三个平面π_1: $x + 2y + z = 0$; π_2: $2x + 5y + z = 1$; π_3: $x - y + az = b$ 交于一条直线 l.

1. 求参数 a, b 的值.
2. 求直线 l 的方向向量和对称方程.

四. (8 分)设 3×2 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

五. (8 分)设 S 为曲线$\begin{cases} y^2 - z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$绕 z 轴旋转一周所得的曲面.

1. 曲面 S 的方程为______________________ ___________.
2. 设曲面 S 与平面 $2x + 2y - z - 2 = 0$ 的交线为 c. 求曲线 c 到 xOy 平面的投影柱面 S_1 和投影曲线 c_1 的方程.
3. 在右边的坐标系中作出曲面 S 和曲线 c_1 的图形

六. (20 分)设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.
2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量.
3. $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵? 请说明理由.
4. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 求 x, y.
5. 若 $f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式$|f(\boldsymbol{A})|$ = _______________.

七. (10 分) 用**配方法**把二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz$ 化为标准形. 请写出所用的可逆线性变换, 并就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 的类型.

八. (10 分) 1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解. 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系.

(2) 存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得 $\boldsymbol{A}^* = (k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), ..., k_n(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2))$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实矩阵, 而且$\|\boldsymbol{A\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|$对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$都成立. 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

课程名称 ____几何与代数 B____ 考试学期 ____2010-2011-2____ 得分 ______

适用专业 ____电类各专业____ 考试形式 ____闭卷____ 考试时间长度 ____120 分钟____

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
批阅人									

一. 填空(每空 2 分，共 30 分)

1. 设向量$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 2, 2)$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 则 $\boldsymbol{A}^{10} =$ $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2^{10} & 2^{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 2^{10} \end{pmatrix}}$,

$\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) =$ ____1____, $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}| =$ ____0____,

$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角为 ____$\pi/3$____ ，若$\boldsymbol{\gamma}$ 是垂直于$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$的单位向量，

则$\boldsymbol{\gamma} =$ ____$\pm(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$____ .

2. 设平面π过点 $P(1, 0, -1)$且垂直于直线 l: $\begin{cases} x = t-9, \\ y = -3t+2, \\ z = 2t, \end{cases}$ 则平面π的方程为

____$x - 3y + 2z + 1 = 0$____，直线 l 与平面π的交点坐标为____$(-8, -1, 2)$____.

3. 原点 O 到平面 $x + y - z + 3 = 0$ 的距离为 ____$\sqrt{3}$____ .

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，则$\begin{pmatrix} 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix}^{-1} =$ ____$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$____ .

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$线性相关，则 $a =$ ____1____，这个向量组

的一个极大线性无关组是____$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$____.

5. 向量空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \middle| x - 2y + 3z = 0 \right\}$的一组基为 ____$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 或其它两个向量构成的与的之等价的向量组____ ,

V 的维数 $\dim V =$ ____2____.

6. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$中， ____$\boldsymbol{A}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$____ 与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$相似，

____$\boldsymbol{B}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$____ 与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$合同.

二. (6 分)计算行列式$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解: $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1}{\underset{i=2,3,4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 4a+4 & 4b+4 & 4c+4 & 4d+4 \\ 6a+9 & 6b+9 & 6c+9 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$\overset{r_3 - 2r_2}{\underset{r_4 - 3r_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

三. (8 分)设三个平面π_1: $x + 2y + z = 0$; π_2: $2x + 5y + z = 1$; π_3: $x - y + az = b$ 交于一条直线 l.

1. 求参数 a, b 的值.

解: 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$.

因为平面π_1, π_2, π_3 交于一条直线, 所以 r($\boldsymbol{A}$) = r($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\beta}$) = 2.

故由($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\beta}$) $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & b+3 \end{pmatrix}$

可见 $a - 4 = b + 3 = 0$, 即 $a = 4$, $b = -3$.

2. 求直线 l 的方向向量和对称方程.

解: 由$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$的通解$\begin{cases} x = -3t - 2, \\ y = t + 1, \\ z = t, \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$

可见直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$ = (–3, 1, 1), 对称方程为 $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

注: 也可以由(1, 2, 1)×(2, 5, 1) = (–3, 1, 1)求 $\boldsymbol{s}$.

四. (8 分)设 3×2 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解: 由 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{X}$ 得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

由$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

注: 也可以先求得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 再得 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

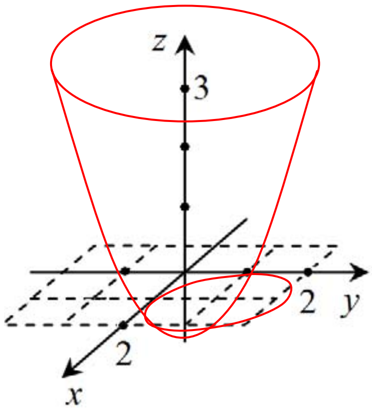
五. (8 分)设 S 为曲线 $\begin{cases} y^2 - z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的曲面.

1. 曲面 S 的方程为____$x^2 + y^2 - z - 1 = 0$________.

2. 设曲面 S 与平面 $2x + 2y - z - 2 = 0$ 的交线为 c. 求曲线 c 到 xOy 平面的投影柱面 S_1 和投影曲线 c_1 的方程.

解: 将 $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$ 与 $2x + 2y - z - 2 = 0$
相减并整理得$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
这就是投影柱面 S_1 的方程.
进而得投影曲线 c 的方程为
$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

3. 在右边的坐标系中作出曲面 S 和曲线 c_1 的图形



六. (20 分)设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

解: $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$.

2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量.

解: $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可见$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_1 = (0, 1, 0)^T$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于$\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $k\xi_1$ $(k \neq 0)$.

$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

可见$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$\xi_2 = (1, 0, 1)^T$.
故 $\boldsymbol{A}$ 的对应于$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k\xi_2$ $(k \neq 0)$.

3. $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵? 请说明理由.

答: $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵. 因为 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 但只有一个线性无关的特征向量与之对应. (另外, 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$能由$\xi_1, \xi_2$线性表示, 因而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性相关, 可见 $\boldsymbol{A}$ 不可能有 3 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵.)

4. 若 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 求 x, y.

解: 若 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, 则 $x + 2 + y = 5$, $2xy = 4$, 故 $x = 2, y = 1$, 或 $x = 1, y = 2$.
当 $x = 2, y = 1$ 时, $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = 1$, $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = 2$, $\boldsymbol{B}$ 不与 $\boldsymbol{A}$ 相似;
当 $x = 1, y = 2$ 时, 设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$, 由此可得

$$\boldsymbol{Ap}_1 = \boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{Ap}_2 = 2\boldsymbol{p}_2,\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}_3 = 3\boldsymbol{p}_2,$$

根据第 2 题的结果, 取 $\boldsymbol{p}_1 = \xi_1$, $\boldsymbol{p}_2 = \xi_2$ 及$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{p}_2$ 的一个特解 $\boldsymbol{p}_3 = (-3, 0, 0)^T$,
则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的确成立. 因此 $x = 1, y = 2$.

5. 若 $f(x) = x^2 - x - 1$, 则行列式$|f(\boldsymbol{A})|$ = ______-1______.

七. (10 分) 用**配方法**把二次型 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz$ 化为标准形. 请写出所用的可逆线性变换, 并就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 的类型.

解: $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + kz^2 + 4yz = x^2 + 2(y+z)^2 + (k-2)z^2$.

令 $\begin{cases} u = x, \\ v = y + z, \\ w = z \end{cases}$ 则 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 且

$f(x, y, z) = u^2 + 2v^2 + (k-2)w^2$.

由此可见:

当 $k < 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为单叶双曲面;

当 $k = 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为椭圆柱面;

当 $k > 2$ 时, 二次曲面 $f(x, y, z) = 1$ 为椭球面.

八. (10 分) 1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解. 证明:

(1) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系.

证明: 因为 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,

所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的非零解. 因而$|\boldsymbol{A}| = 0$.

又因为 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零, 可见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1$.

因而 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的基础解系中只有一个解向量.

所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系.

(2) 存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得 $\boldsymbol{A}^* = (k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), ..., k_n(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2))$.

证明: 由上题知$|\boldsymbol{A}| = 0$. 于是 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 可见 $\boldsymbol{A}^*$的列向量都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的解.

又因为 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$的一个基础解系, 且 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$,

所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, ..., k_n$ 使得

$$\boldsymbol{A}^* = (k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2), ..., k_n(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)).$$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实矩阵, 而且$\|\boldsymbol{A\alpha}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|$对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$都成立. 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证一: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)^T$.

由条件可知$\|\boldsymbol{\alpha}_i\| = \|\boldsymbol{Ae}_i\| = \|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, 且对于任意的 $1 \le i < j \le 3$, 有

$2 = \|\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j\|^2 = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j)\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2 + 2\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j + \|\boldsymbol{\alpha}_j\|^2 = 2 + 2\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j$,

可见$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0$.

综上所述, $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证二: 又条件可知, 对于任意的 3 维列向量$\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{A\alpha})^T\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{E\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵.

可见 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}$ 是同一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ex}$ 的矩阵,

因而 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

证三: 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)^T$. 由条件可知

$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1x_1^2 + \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2x_2^2 + \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_3x_3^2 + 2\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2x_1x_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3x_1x_3 + 2\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3x_2x_3$

$= (\boldsymbol{A\alpha})^T\boldsymbol{A\alpha} = \|\boldsymbol{A\alpha}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

由$\boldsymbol{\alpha}$的任意性可知$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_3 = 1$, $\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$,

因而 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.