11-12-2 几何与代数 B 期末试卷 A

一、填空题（30%）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$， $BA=B-2E$，E 为 2 阶单位阵，则 $|B|=$________________；

2. 设矩阵 A,B 分别是 s 和 t 阶可逆矩阵，则 $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}^{-1}=$______________________；

3. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为____；

4. 过点 $P(1,2,0)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2y-z=1\\ x-y+3z=0\end{cases}$ 垂直的平面的方程是__________________；

5. 若向量组 $(1,-1,2),(1,k,-3),(3,0,1)$ 线性相关，则 $k=$ _______________________；

6. 设 A 是 4×3 阶矩阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只含一个解向量，则方程组 $A^T y=0$ 的基础解系中有________________________个线性无关的解向量；

7. 设 α,β 是非零向量，若 $\|\alpha+\beta\|=\|\alpha-\beta\|$，则向量 α 与 β 的关系是____________；

8. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $-1,2,3$，则行列式 $|2A^{-1}|=$______________________；

9. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & a & b\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 与对角阵相似，则参数 a 和 b 满足条件_______________；

10. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & k+1 & k\\ 0 & k & k+1\end{pmatrix}$ 正定，则参数 k 满足____________________________。

二、（10%）计算行列式 $\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ a-1 & b+1 & c & d\\ a-2 & b & c+2 & d\\ a-3 & b & c & d+3\end{vmatrix}$.

三、（12%）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $AXA^{-1}+A-AX=O$ 的解。

四、（14%）设线性方程组 $\begin{cases} -x_1 \quad\quad\quad + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_3 = 2 \\ ax_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ \quad\quad cx_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 都是相容的，且是同解方程组。（1）求参数 a 的值；（2）求参数 b, c 的值和方程组的通解。

五、（10%）在空间直角坐标系中，曲线 $\Gamma_1: \begin{cases} x^2 = 1 - 2z \\ y = 0 \end{cases}$，$\Gamma_2: \begin{cases} y^2 = 3z \\ x = 0 \end{cases}$。曲面 π_1 是以曲线 Γ_1 为准线，母线与 y 轴平行的柱面，π_2 为 Γ_2 绕 z 轴旋转所产生的旋转面。分别求曲面 π_1、π_2 的方程；并求 π_1 与 π_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线的方程。

六、（14%）给定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$。

1. 求正交变换 $x = Qy$，将二次型化为标准形，并给出相应的标准型；
2. 作出二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = -1$ 的草图。

七、证明题（10%）

1. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，若 $AB = E$，证明：A 的行向量组线性无关。
2. 假设 a, b, c 是实数，证明：矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ 的三个特征值互不相同。

一、填空题（30%，每空 3 分）

1. 2；　2. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；　3. 0；　4. $5x - 4y - 3z + 3 = 0$；　5. 2；

6. 2　7. 垂直；　8. $-4/3$；　9. $a = 0, b$ 任意；　10. $k > 0$。

二、（10%）

解：$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a-1 & b+1 & c & d \\ a-2 & b & c+2 & d \\ a-3 & b & c & d+3 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & b+1 & c & d \\ 1 & b & c+2 & d \\ 1 & b & c & d+3 \end{vmatrix}$

$$= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(a+b+c+d)$$

三、（12%）

解：先化简矩阵方程，$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，

故方程组两边同时左乘 A^{-1}，得 $XA^{-1} + E - X = O$，再右乘 A，

得 $X + A - XA = O$，即 $X(A-E) = A$，

$\therefore X = A(A-E)^{-1}$　　(或进一步$X = E + (A-E)^{-1}$)。

而 $A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，$(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$，

$\therefore X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$。

四、（14%）

解：（1）设 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，

因为 $A_1 x = b_1$ 与 $A_2 x = b_2$ 相容，且它们是同解方程组，

则 $r(A_1) = r(A_1, b_1) = r(A_2, b_2) = r(A_2) = 2$，由 $|A_1| = 0$，得到 $a = 3$；

（2）$A_1 x = b_1$ 与 $A_2 x = b_2$ 同解，所以 $\begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x = b_2 \end{cases}$ 与 $A_1 x = b_1$ 也同解，且增广矩阵秩为 2

增广矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & b+1 & 2 \\ 0 & c & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & 2-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore b = 0,\ c = 1$$

同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$，即通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

五、（10%）

解：柱面π_1的方程：$x^2+2z=1$，

旋转面π_2的方程：$x^2+y^2-3z=0$；

曲面π_1与π_2的交线Γ_3的方程：$\begin{cases} x^2+2z=1 \\ x^2+y^2-3z=0 \end{cases}$；

交线Γ_3在xOy平面的投影曲线方程：$\begin{cases} 5x^2+2y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$，投影曲线是一个椭圆。

六、（14%）

解：（1）二次型$f(x)=x^T Ax$的矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，

求特征值，得$\lambda_{1,2}=7,\quad \lambda_3=-2$；

求特征向量：

$\lambda_{1,2}=7$时，$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得到正交的特征向量：$\eta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=-2$时，$\lambda_3 E-A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量$\eta_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

令正交矩阵$Q=\left(\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|},\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|},\frac{\eta_3}{\|\eta_3\|}\right)=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{pmatrix}$，

则正交变换$x=Qy$将二次型化为标准形：$f(y_1,y_2,y_3)=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$

（2）变换$x=Qy$将二次曲面$f(x_1,x_2,x_3)=-1$的方程化为：$7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2=-1$，

这是一个双叶双曲面，草图如下（略）

七、证明题（10%）

1. 证明：$A_{s\times n}$，$B_{n\times s} \Rightarrow (AB)_{s\times s}$，$\because AB=E,\quad \therefore r(AB)=r(E)=s$；

而 $s=r(AB)\le \min\left\{r(A),r(B)\right\}\le r(A)$，

同时 $r(A)\le \min\left\{s,n\right\}\le s$，$\therefore r(A)=s$，即 A 的行向量组线性无关。

2. 证明：（反证法）$\because A$ 是实对称矩阵，$\therefore A\sim\Lambda$（其中 Λ 是对角矩阵）。

下面只需要证明矩阵矩阵 A 没有二重特征值即可。

假设矩阵 A 的特征值 λ 是二重特征值，则它必有 2 个线性无关的特征向量，

则此时矩阵 $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-a & -1 & 0\\ -1 & \lambda-b & -1\\ 0 & -1 & \lambda-c\end{pmatrix}$ 的秩必须为 1，即 $r(A)=1$；

但 $\lambda E-A$ 有 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ \lambda-b & -1\end{vmatrix}$，则 $r(A)\ge 2$，与 $r(A)=1$ 矛盾。

所以矩阵 A 的三个特征值互不相同。