推理

- 前提：
  - 如果**Tom**用功学习，那么他一定成绩好
  - **Tom**用功学习
- 结论：
  - **Tom**成绩好
- 推理正确？结论正确？

3.1 推理的形式结构

定义3.1 设H_1，H_2 …，H_n ，C都是命题公式，若对于H_1，H_2 …，H_n ，C中出现的命题变元的任意一组赋值，或者$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为假，或者当$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为真时，C也为真，则称由前提$H_1$，$H_2$ …，H_n推出C的推理是*有效的或正确的*，并称C是*有效结论*。

若$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \rightarrow C$为永真式，则称C是$H_1$，$H_2$，…，$H_n$的有效结论。

3.1 推理的形式结构

- 由前提H_1，H_2 …，H_n 推出结论C的推理是否正确和前提的排列顺序无关。
- 因前提中的公式是一个有限公式集合，若将该集合记为 Γ，可将由 Γ 推C的推理记为 $\Gamma \vdash C$ 。若推理是正确的，则记为 $\Gamma \models C$ 。这里称 $\Gamma \vdash C$和$\{H_1，H_2 …，H_n\} \vdash C$为推理的形式结构。

3.1 推理的形式结构

例1.

如果x是偶数，则x^2是偶数。　　$p \rightarrow q$

x是偶数　　p

x^2是偶数

结论：q

注意：横线上方是前提，下方是结论。

推理的形式结构：$\{p, p \rightarrow q\} \vdash q$

推理正确

3.1 推理的形式结构

例2.

如果**x**是偶数，则**x²**是偶数。 $p \to q$

<u>**x** ^{2} 是偶数 **q**</u>

x是偶数 结论： **p**

推理的形式结构： $\{q，p \to q\} \vdash p$

该推理错误。若x^2 ＝2。

3.1 推理的形式结构

例3.

如果x是偶数，则x^2是偶数。 $p \to q$

x^2不是偶数

$\neg q$

x不是偶数 结论：$\neg p$

推理的形式结构：$\{\neg q, \ p\to q\} \vdash \neg p$

推理正确

3.1 推理的形式结构

定理3.1：命题公式H_1，H_2…，H_n推C的推理正确当且仅当$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \rightarrow C$是一个永真式。

- 可以将由前提H_1，H_2…，H_n推C的推理形式结构$\{H_1, H_2 \cdots, H_n\} \vdash C$转换成蕴涵式$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \rightarrow C$。
- 将推理正确$\{H_1, H_2 \cdots, H_n\} \models C$转换成$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$

3.1 推理的形式结构

推理的形式结构

前提：　H_1，H_2 …，H_n

结论：　C

论证推理是否正确即证$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \to C$是否为永真式。

3.1 推理的形式结构

- 设H_1，H_2 …，H_n ，C中出现的命题变元有m个，对于任意一组赋值，前提和结论的真值情况有四种
  - $H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为0，C为0；
  - $H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为0，C为1；
  - ~~$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为1，C为0；~~
  - $H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n$为1，C为1；
- 推理正确不能保证结论一定为真。

3.1 推理的形式结构

例：判定下列推理是否正确

$\{p\} \vdash p \vee q$；$\{p,q\} \vdash p$

可用等值演算法证：

- $p \rightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q)$

  $\Leftrightarrow T$

  $p \Rightarrow p \vee q$

- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee p$

  $\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee p$

  $\Leftrightarrow T$

  $p \wedge q \Rightarrow p$

I_1 $P \Rightarrow P \vee Q$ $(Q \Rightarrow P \vee Q)$

I_2 $P \wedge Q \Rightarrow P$ $(P \wedge Q \Rightarrow Q)$

I_3 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 假言推理

I_4 $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$ 拒取式

I_5 $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$ 析取三段论

I_6 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$

I_7 $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$

I_8 $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$

$(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \vee \neg P) \Rightarrow Q$

I_9 $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$

3.1 推理的形式结构

证明永真蕴含式的方法

(1)把"$\Rightarrow$"关系符改为"$\rightarrow$"联结词，证明为永真式。

(a)真值表法

(b)等值演算法

(c)主析取范式法

(2)*找出使蕴含命题前件为"T"的所有指派，试看这些指派能否令后件为"T"，若为"T"，则永真蕴含关系成立。

3.1 推理的形式结构

证明： $p\wedge(p\rightarrow q)\Rightarrow q$

使前件为“T”的指派为p、($p\rightarrow q$) 同时为“T”

∵p为“T”，∵$p\rightarrow q$也为“T”

∴q也应为“T”

∴$p\wedge(p\rightarrow q)\Rightarrow q$成立

3.1 推理的形式结构

（3）*找出使蕴含命题的后件均为“F”的所有指派，试看这些指派能否令前件的真值为“F”，若均能，则永真蕴含式成立。

例：$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

使后件为“F”的指派为：p为“T”，

代入前件得

（ⅰ）若q为T，则$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$为“F”；

（ⅱ）若q为F，则$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$为“F”；

$\therefore \neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$成立

3.2 自然推理系统P

定义3.2 一个形式系统I由下面四个部分组成：

- 非空的字母表，记做A(I)。
- A(I)中符号构造的合式公式集，记做E(I)。
- E(I)中一些特殊的公式组成的公理集，记做Ax(I)。
- 推理规则集，记做R(I)。

3.2 自然推理系统P

定义3.2 自然推理系统定义

- 字母表：命题变元符号；联接词符号；括号与逗号。
- 合式公式：同定义1.6。
- 推理规则：

  1)前提引入规则：在推导的任何步骤上都可以引入前提。

  2)结论引入规则：在推导的任何步骤上得到的结论都可以作为后继证明的前提。

  3)置换规则：在推导的任何步骤上，命题公式的子公式都可以用与之等值的公式置换。

3.2 自然推理系统P

4)假言推理规则：

$$\frac{\begin{array}{c}P\to Q\\ P\end{array}}{\text{结论：}Q}$$

5)附加规则：

$$\frac{P}{\text{结论：}P\vee Q}$$

6)化简规则：

$$\frac{P\wedge Q}{\text{结论：}P}$$

3.2 自然推理系统P

7)拒取式规则：

$$\frac{\neg Q \quad P\to Q}{\therefore \neg P}$$

8)假言三段论规则：

$$\frac{P\to Q \quad Q\to R}{\therefore P\to R}$$

9)析取三段论规则：

$$\frac{\neg P \quad P\vee Q}{\therefore Q}$$

3.2 自然推理系统P

10)构造性两难推理规则：

$$\begin{array}{l} P\to Q \\ R\to T \\ \underline{P\vee R} \\ \therefore Q\vee T \end{array}$$

11)破坏性两难推理规则：

$$\begin{array}{l} P\to Q \\ R\to T \\ \underline{\neg Q\vee\neg T} \\ \therefore \neg P\vee\neg R \end{array}$$

12)合取引入规则：

$$\begin{array}{l} P \\ \underline{Q} \\ \therefore P\wedge Q \end{array}$$

3.2 自然推理系统P

例1. 考虑下述论证：

- 如果这里有球赛，则通行是困难的。
- 如果他们按时到达，则通行是不困难的。
- 他们按时到达了。
- 所以这里没有球赛。

设**p**:这里有球赛 **q**:通行是困难的 **r**:他们按时到达.

$$\begin{array}{r} p\rightarrow q \\ r\rightarrow \neg q \\ \underline{\qquad\qquad r} \\ \neg p \end{array}$$

形式结构：$(p\rightarrow q)\land(r\rightarrow\neg q)\land r\rightarrow\neg p$

3.2 自然推理系统P

前提：$(p\to q), (r\to\neg q), r$　结论：$\neg p$

1. r
2. $r\to\neg q$
3. $\neg q$　　　$(r\to\neg q)\wedge r \Rightarrow \neg q$
4. $p\to q$
5. $\neg q\to\neg p$　　　$p\to q \Leftrightarrow \neg q\to\neg p$
6. $\neg p$　　　$(\neg q\to\neg p)\wedge\neg q \Rightarrow \neg p$

3.2 自然推理系统P

证明：$r \vee s$是前提$c \vee d, c \to r, d \to s$的有效结论。

1. $c \vee d$
2. $\neg c \to d$　　　$c \to d \Leftrightarrow \neg c \vee d$
3. $d \to s$
4. $\neg c \to s$　　　$(\neg c \to d) \wedge (d \to s) \Rightarrow \neg c \to s$
5. $c \to r$
6. $\neg r \to \neg c$
7. $\neg r \to s$　　　4, 6
8. $r \vee s$　　　7

3.2 自然推理系统P

证明方法：

- **CP规则(附加前提证明法)：**

对于形如 $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow (P\rightarrow Q)$的证明

- 把结论中蕴涵命题的前件引入条件，和其他给定条件一起能推导出结论中蕴涵命题的后件来，则：$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow P\rightarrow Q$成立。又称为演绎定理。

3.2 自然推理系统P

前提: $p\rightarrow(q\rightarrow s)$, $\neg r\vee p$, q 结论: $r\rightarrow s$

证: (1) r 引入前提

(2) $\neg r\vee p$

(3) $r\rightarrow p$

(4) p

(5) $p\rightarrow(q\rightarrow s)$

(6) $q\rightarrow s$

(7) q

(8) s

(9) 根据CP规则，得证

3.2 自然推理系统P

前提： $p \to q$ 结论： $p \to (p \land q)$

(1) p 引入前提

(2) $p \to q$

(3) q

(4) $p \land q$

(5) $p \to (p \land q)$ CP

所以$p \to q \Rightarrow p \to (p \land q)$成立。

3.2 自然推理系统P

- 反证法(归缪法)

若想证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_m \rightarrow C$成立。

可以将结论的否定引入到前提条件中，如果能够和其他的前提条件一起推出矛盾来，则说明推理正确。

3.2 自然推理系统P

前提： $\neg p \wedge \neg q$　结论： $\neg(p \wedge q)$

证：(1) $\neg(\neg(p \wedge q))$　假设前提

(2) $p \wedge q$　T(1)

(3) p　T(2) (化简规则)

(4) $\neg p \wedge \neg q$

(5) $\neg p$　T(4) (化简规则)

(6) $p \wedge \neg p$　T(3)(5)

(7) F

所以 $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

例2:前提：**$r\rightarrow\neg q$, $r\vee s$, $s\rightarrow\neg q$, $p\rightarrow q$** 结论： **$\neg p$**

(1) $\neg(\neg p)$	假设前提
(2) p	**T(1)**
(3) $p\rightarrow q$	
(4) q	**T(2)(3)**
(5) $s\rightarrow\neg q$	
(6) $q\rightarrow\neg s$	**T(5)**
(7) $\neg s$	**T(4)(6)**
(8) $r\vee s$	
(9) r	**T(7)(8)**
(10) $r\rightarrow\neg q$	
(11) $\neg q$	**T(9)(10)**
(12) $q\wedge\neg q$	**T(4)(11)**

3.2 自然推理系统P

例：一位计算机工作者协助公安人员审查一起谋杀案，经调查，获得如下线索。

(1)会计张某或邻居王某谋害了厂长 (2)如果会计张某谋害了厂长，则谋害不可能发生在半夜 (3)如果邻居王某的证词不正确，则在半夜时房里灯光未灭

(4)如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜

(5)在半夜房子里的灯光灭了，且会计张某曾贪污过

解：

p：会计张某谋害了厂长

q：邻居王某谋害了厂长

n：谋害发生在半夜

o：邻居王某的证词是正确的

r：半夜时房子的灯光灭了

a：会计张某曾贪污过

3.2 自然推理系统P

列出条件公式：

(1) $p \vee q$　　(4) $o \rightarrow n$

(2) $p \rightarrow \neg n$　　(5) $r \wedge a$

(3) $\neg o \rightarrow \neg r$

推理过程为：

(1) $r \wedge a$

(2) r

(3) $\neg o \rightarrow \neg r$

(4) o

(5) n

(6) $p \rightarrow \neg n$

(7) $\neg p$

(8) $p \vee q$

(9) q

结论：邻居王某谋害了厂长。