第八章：函数

第一节：函数的定义与性质

第二节：函数的复合与反函数

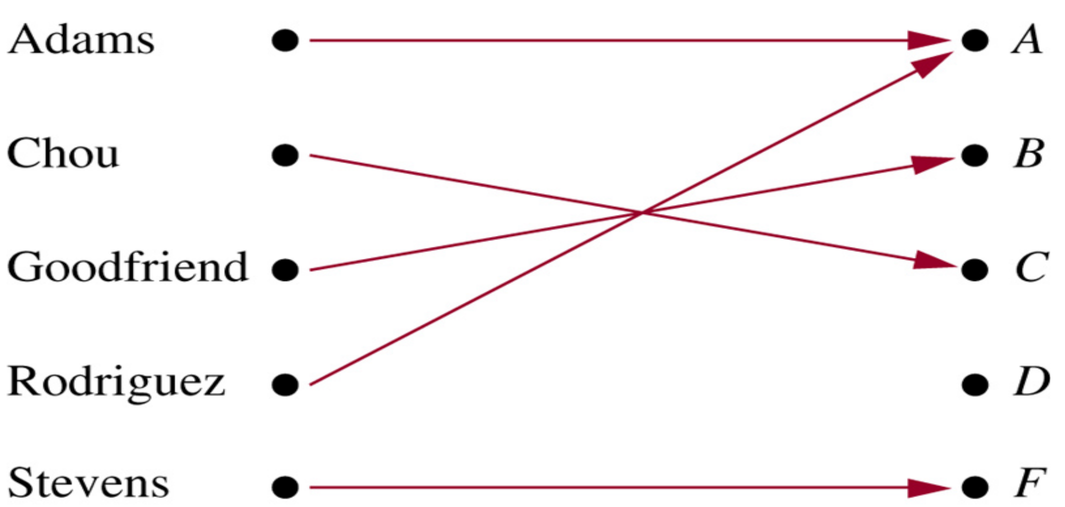
第八章：函数

第一节：函数的定义与性质

第二节：函数的复合与反函数

8.1 函数的定义与性质

- 函数是具有特殊性质的二元关系
  - 也称为映射或变换
- 本章定义一般函数类和各种特殊子类
  - 侧重讨论离散函数



8.1 函数的定义与性质

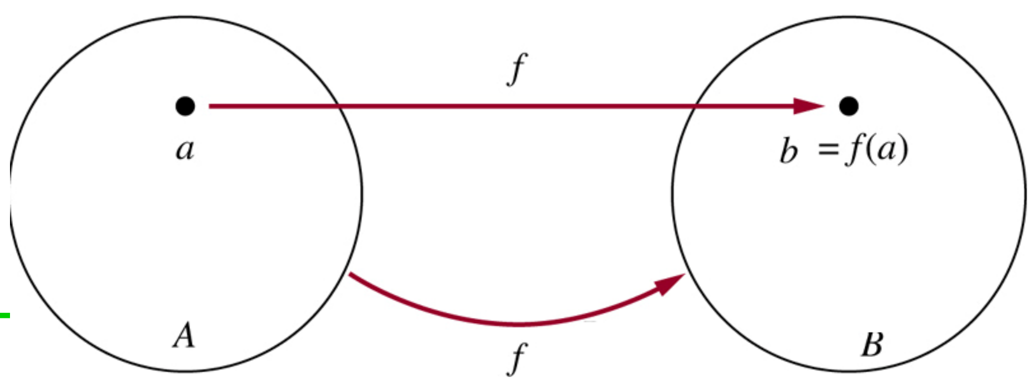
- 定义　设F为二元关系，若$\forall x \in domF$都存在唯一的$y \in ranF$使xFy成立，称F为函数
  - 对于函数F，如果xFy，记做$y = F(x)$，称y为F在x的值

- 定义 设F，G是函数
  - $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

8.1 函数的定义与性质

- 定义　设**A**，**B**是集合，如果***f***为函数，且***domf=A,ranf⊆B***，称***f***为从***A***到***B***的函数
  - 记为***f:A→B***
- 存在性 $\forall x(x\in A\rightarrow\exists y(y\in B\wedge<x,y>\in f))$

  and
- 唯一性 $(<x,y_1>\in f\wedge<x,y_2>\in f)\rightarrow y_1=y_2$



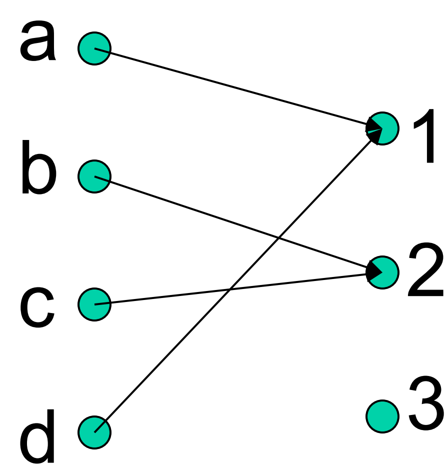
8.1 函数的定义与性质

- 例 g:{a,b,c,d} →{1,2,3}

$g(a)=1$
$g(b)=2$
$g(c)=2$
$g(d)=1$

或

x	g(x)
a	1
b	2
c	2
d	1



8.1 函数的定义与性质

- 定义 通常用Y^X表示从集合X到集合Y的所有函数的集合
- 具有前域

$$X = \mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i$$

的函数f叫做n个变元的函数，在$<x_1,x_2,\ldots x_n>$上的f值用$f(x_1,x_2,\ldots x_n)$表示，其中$x_i \in X_i$

8.1 函数的定义与性质

- 皮亚诺后继函数
  - $f\colon N \to N,\ f(n)=n+1$
- 投影函数
  - X和Y是非空集合，$f\colon X\times Y \to X,\ f(x,y)=x$
- 截痕函数
  - X和Y是非空集合
  - $f\colon X \to p(X\times Y),\ f(x)=\{x\}\times Y$
- 如果X＝Φ，Y是任意集合，那么从X到Y的关系叫空关系，函数叫空函数
- 若X≠Φ而Y＝Φ，不存在从X到Y的函数

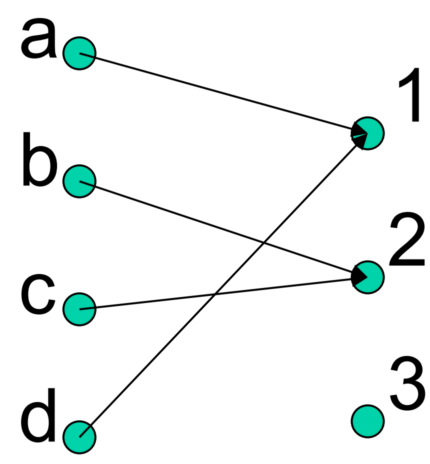
8.1 函数的定义与性质

- 定义　设f是从X到Y的函数，X'是前域X的子集，Y'是Y的子集
  - $f(X')=\{f(x) \mid x\in X'\}$叫做函数$f$下$X'$的像
  - 整个前域的像$f(X)$叫做函数f的像(f的值域)
  - $f^{-1}(Y')=\{x \mid x\in X\wedge f(x)\in Y'\}$,称$f^{-1}(Y')$为$Y'$在$f$下的完全原像

8.1 函数的定义与性质

例 设f：$\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3\}$

- $f(\{a\})=\{1\}$
- $f(\{a,b\})=\{1,2\}$
- $f(\Phi)=\Phi$
- $f^{-1}(\{1\})=\{a,d\}$

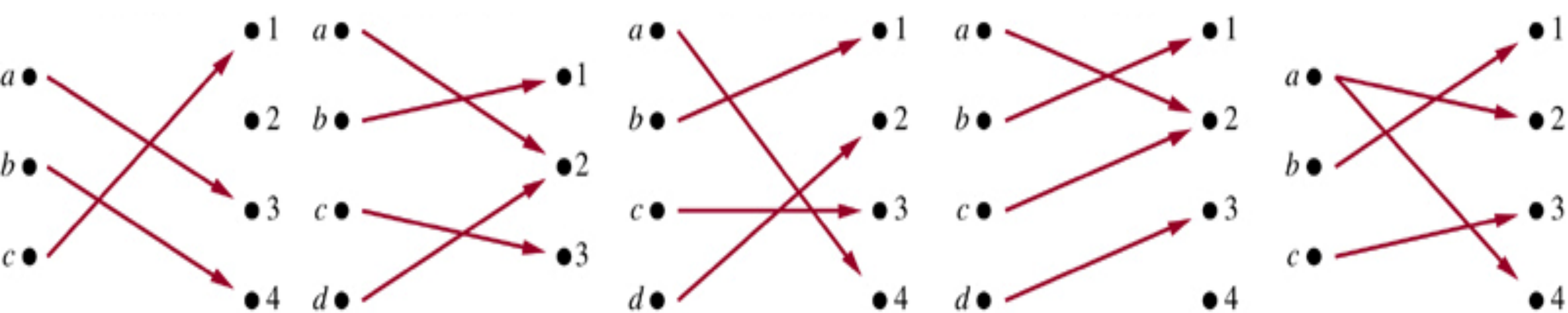


8.1 函数的定义与性质

- 定义　设f是从X到Y的函数
  - 如果$f(X)=Y$,那么f是满射的
  - 如果$x \neq x'$蕴含$f(x) \neq f(x')$(即$f(x)=f(x')$,那么$x=x'$),那么f是单射的
  - 如果f是满射的且是单射的，那么是双射的

8.1 函数的定义与性质

- 讨论：f是从X到Y的函数
  - 满射函数有：(1)|X|≥|Y| (2)ran*f*=Y
  - 单射函数有：(1)|X|≤|Y| (2)ran*f*⊆Y
  - 双射函数有：(1)|X|=|Y| (2)ran*f*=Y



8.1 函数的定义与性质

- 例 $f: R\rightarrow R, f(x)=2x+5$, 判断函数类型
- 解:
  - $\forall y\in R$存在$x=(y-5)/2$使得$f(x)=y$, f是满射
  - $\forall x_1,x_2\in R$, $x_1\neq x_2$,
    有$2x_1+5\neq 2x_1+5$,即$f(x_1)\neq f(x_2)$,f是单射
  - f是双射

8.1 函数的定义与性质

- 例 $f: R\rightarrow I, f(a)=\lfloor a\rfloor$

f是满射,但不是单射,也不是双射。

- A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质
  - 1. $f: A\times B\rightarrow A$,
  - $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B,\ f(\langle a,b\rangle)=a$
  - 2. $f: A\times B\rightarrow B\times A$,
  - $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B,\ f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$

8.1 函数的定义与性质

- 1\. $f:A\times B\to A$, $\forall\langle a,b\rangle\in A\times B, f(\langle a,b\rangle)=a$
  - 当$|B|>1$时,f非单射,是满射,非双射
  - 当$|B|=1$时,f是单射,满射,双射
- 2\. $f:A\times B\to B\times A, \forall\langle a,b\rangle\in A\times B,$

  $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$
  - f是单射,满射,双射

8.1 函数的定义与性质

- 例: 设$A_1=\{a,b\}$，$B_1=\{1,2,3\}$, $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$, $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

求$A_1\to B_1$,$A_2\to B_2$,$A_3\to B_3$的所有单射,满射, 双射函数.

8.1 函数的定义与性质

- 例: (1) $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
- 解: (1) $A_1 \to B_1$中无满射,无双射,单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$, $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$, $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.
- 例: (2) $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
- 解: (2) $A_2 \to B_2$中无单射,无双射,满射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,2>,<c,1>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,1>\}$, $f_4=\{<a,1>,<b,2>,<c,2>\}$,
  $f_5=\{<a,2>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,2>,<b,2>,<c,1>\}$.

8.1 函数的定义与性质

- 例: (3) $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
- 解: (3) $A_3 \to B_3$中双射6个: $f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$, $f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$, $f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$.

8.1 函数的定义与性质

- 计数(counting)问题
- 设|A|=n, |B|=m, 问A→B中有多少单射,满 射,双射?
  - n<m时, A→B中无满射,双射, 单射个数为 m(m-1)…(m-n+1)
  - n=m时, A→B中双射个数为n!
  - n>m时, A→B中无单射,双射, 满射个数为P149

8.1 函数的定义与性质

- 定义
  - 对函数$f:X\to Y$，如果存在$y\in Y$使对每一$x\in X$有$f(x)=y$，即$f(X)=\{y\}$，f称为常函数。
  - 对函数$f:X\to X$，如果对每一$x\in X$有$f(x)=x$，f称为X上的恒等函数，记为1_X。
- 恒等函数是双射函数

8.1 函数的定义与性质

- **R为f诱导的X上的等价关系**
  - 如果函数f: X →Y的前域X非空，集合族

$\{f^{-1}(\{y\}) \mid y\in Y \wedge f^{-1}(\{y\})\neq \Phi\}$形成X的一个划分，

该划分诱导的关系R定义为：

$$x_1Rx_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

可以证明R为等价关系

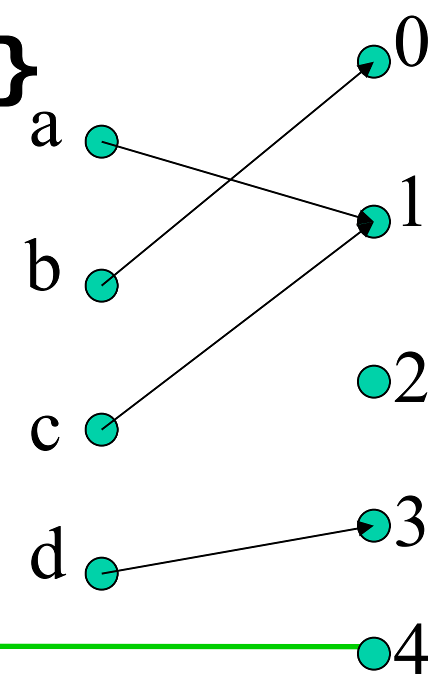
- **自然映射**
  - 设R是一集合X上的等价关系，函数

$$g:X\rightarrow X/R, g(x)=[x]_R$$

为从X到商集X/R的自然映射

8.1 函数的定义与性质

- 例 设X={a,b,c,d},Y={0,1,2,3,4}
  - f(a)=1,f(b)=0,f(c)=1,f(d)=3
  - f诱导的等价关系R的等价类{a,c},{b},{d}
- 从X到X/R的自然映射g
- g:{a,b,c,d}→{{a,c},{b},{d}}
  - g(a)={a,c}
  - g(b)={b}
  - g(c)={a,c}
  - g(d)={d}



第八章：函数

第一节：函数的定义与性质

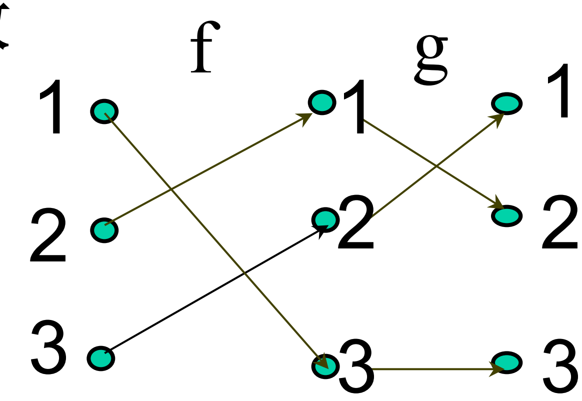
第二节：函数的复合与反函数

8.2 函数的复合与反函数

- 定理　设F,G都是函数,则$F \circ G(x)=G(F(x))$也是函数,且满足
  - $dom(F \circ G)=\{x|x\in domF \wedge F(x)\in domG\}$
  - $\forall x\in dom(F \circ G)$有$F \circ G(x)=G(F(x))$

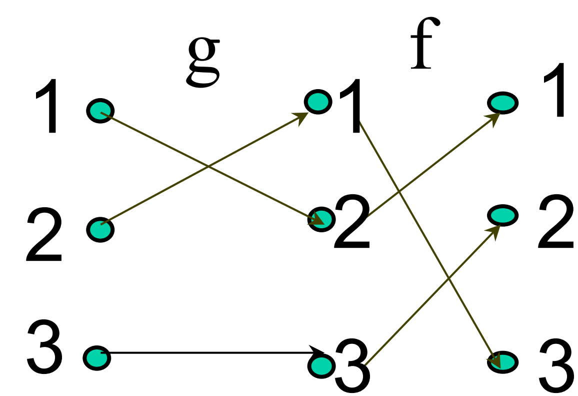
8.2 函数的复合与反函数

- 例 集合**A={1,2,3},A**上的两个函数
  - **f={<1,3>,<2,1>,<3,2>}**
  - **g={<1,2>,<2,1>,<3,3>}**



- $f \circ g=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$
- $g \circ f=\{<1,1>,<2,3>,<3,2>\}$
- $f \circ f=\{<1,2>,<2,3>,<3,1>\}$
- $f \circ f \circ f=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

  $=I_A$



8.2 函数的复合与反函数

- 例:R上的三个函数,
  - $f(a)=3-a, g(a)=2a+1, h(a)=a/3$
  - $(f \circ g)(a)=g(f(a))=g(3-a)$
    $=2(3-a)+1=7-2a$
  - $(g \circ f)(a)=f(g(a))=f(2a+1)=2-2a$
  - $h(g(f(a)))=h(7-2a)=(7-2a)/3$

8.2 函数的复合与反函数

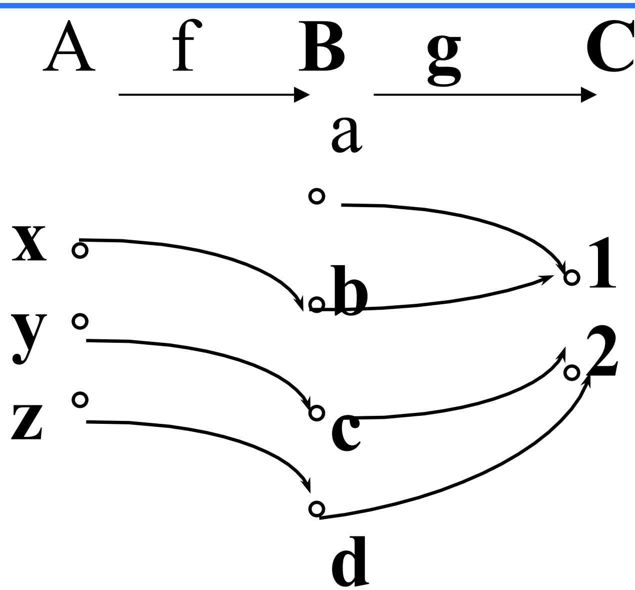
- 推论 设函数f,g,h,则$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$

- 推论 设$f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$, 则$f\circ g$：$A\rightarrow C$,且$\forall x\in A$都有$f\circ g(x)=g(f(x))$

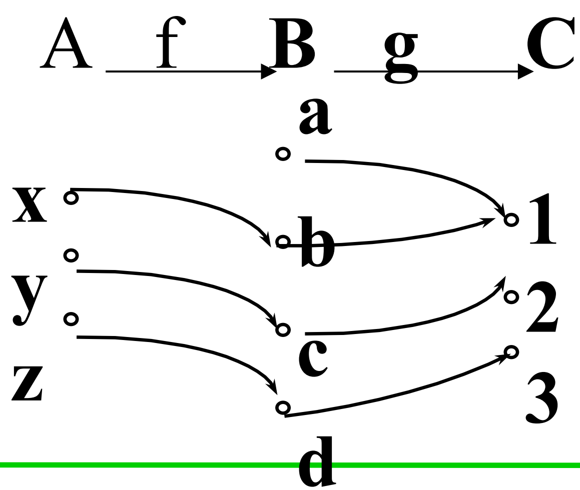
8.2 函数的复合与反函数

- 定理 设函数f:A→B ,g:B→C 则:
  - 若f和g都是满射,则f o g 也是满射
  - 若f和g都是单射,则f o g也是单射
  - 若f和g都是双射,则f o g也是双射

8.2 函数的复合与反函数



$f\circ g$是满射,f不是满射



$f\circ g$是单射,g不是单射

8.2 函数的复合与反函数

- 定理 设函数$f:A\to B, g:B\to C$,
  - 若 $f\circ g$是满射,则g 是满射
  - 若 $f\circ g$是单射,则f 是单射
  - 若 $f\circ g$双射,则g是满射而f是单射
- 定理 设函数$f:A\to B$,有
  - $f=f\circ I_B=I_A\circ f$

8.2 函数的复合与反函数

- $A \to B$的函数f， f是A到B的关系,f的逆关系一般不满足函数的要求
  - 如f是满射,则f^{-1} 满足函数的存在性要求
  - 如f是单射,则f^{-1}满足函数的唯一性要求
  - 如f是双射,则f^{-1}满足存在性和唯一性要求

- 例：$A=\{a,b,c\},B=\{1,2,3\}$
  - $f=\{\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$ f非单射非满射
  - $f^{-1}=\{\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$ f^{-1}不是函数