几何代数第5章

作者 刘国华

东南大学 数学系

September 5, 2017

目录

矩阵的特征值与特征向量

请用10 秒钟计算

$$34+55+89+144+233+377+610+987+1597+2584=??$$

矩阵的特征值与特征向量

请用10 秒钟计算

$$34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 = ??$$

答案是6710.

请用10 秒钟计算

$$34 + 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 = ??$$

答案是6710.

定义

若一个数列,前两项等于1,而从第三项起,每一项是其前两项之和,则称该数列为斐波那契数列.即: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

请用10 秒钟计算

$$34+55+89+144+233+377+610+987+1597+2584=??$$

答案是6710.

定义

若一个数列,前两项等于1,而从第三项起,每一项是其前两项之和,则称该数列为斐波那契数列.即: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

数学家发现:连续10个斐波那契数之和,必定等于第7个数的11 倍!所以上面式子的答案为$610\times 11=6710$.

矩阵的特征值与特征向量

假设一对初生兔子要一个月才到成熟期，而一对成熟兔子每月会生一对(雌雄)兔子，那么，由一对初生兔子开始，12 个月后会有多少对兔子呢？

假设一对初生兔子要一个月才到成熟期，而一对成熟兔子每月会生一对(雌雄)兔子，那么，由一对初生兔子开始，12 个月后会有多少对兔子呢？

1月1对；　(小)；

2月1对；　(大)；

3月2对；　(1小+1大)

4月3对；　(1小+2大)

5月5对；　(2小+3大)

6月8对；　(3小+5大)

7月13对；　(5小+8大)

1) 分析问题、抓住本质、简化。本质上有两类兔子：一类是能生殖的兔子，简称为大兔子；新生的兔子不能生殖，简称为小兔子；小兔子一个月就长成大兔子. 求的是大兔子与小兔子的总和.

2）深入观察发现规律①每月小兔对数=上个月大兔对数. ②每月大兔对数=上个月大兔对数+上个月小兔对数=上个月大兔对数+上上个月大兔对数=前两个月大兔对数之和.

特征值与特征向量的定义

1. 培养观察问题分析问题的能力

1月1对;	(1小);	2月1 对;	(1 大);
3月2对;	(1小+1大)	4月3 对;	(1 小+2 大)
5月5对;	(2小+3大)	6月8对;	(3 小+5 大)
7月13对;	(5小+8大)	8月21对;	(8 小+13 大)
9月34对;	(13小+21大)	10月55对;	(21 小+34 大)
11月89对;	(34小+55大)	12月144对;	(55小+89 大)
12月233对;	(89小+144大)		

即：二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

特征值与特征向量的定义

1. 培养观察问题分析问题的能力

1月1对;	(1小);	2月1 对;	(1 大);
3月2对;	(1小+1大)	4月3 对;	(1 小+2 大)
5月5对;	(2小+3大)	6月8对;	(3 小+5 大)
7月13对;	(5小+8大)	8月21对;	(8 小+13 大)
9月34对;	(13小+21大)	10月55对;	(21 小+34 大)
11月89对;	(34小+55大)	12月144对;	(55小+89 大)
12月233对;	(89小+144大)		

即：二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

2. 深入观察发现规律

I 每月小兔对数=上个月大兔对数.

II 每月大兔对数=上个月大兔对数+上个月小兔对数.

特征值与特征向量的定义

3. 深入研究问题

由二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots \text{ 可得:}$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

特征值与特征向量的定义

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

特征值与特征向量的定义

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k
3. 若存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = \Lambda$, Λ 为对角阵，则易求得A^k. 此时称方阵A 可与对角阵此时称方阵A 可与对角阵Λ 相似.

4. 进一步深入分析

问题的提出：设A 是n 阶方阵，求A^k?

分析：

1. 若A 是对角阵，则易求A^k.
2. 若A 不是对角阵，怎么求A^k
3. 若存在n 阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$，Λ 为对角阵，则易求得A^k. 此时称方阵A 可与对角阵此时称方阵A 可与对角阵Λ 相似.

问题: 如何判断A 可与对角阵Λ 相似？当且仅当存在n 个线性无关的向量$p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得

$$Ap_i=\lambda_i p_i.$$

特征值与特征向量的定义

定义

设 $A \in M_n$, 如果存在数 λ, 非零向量η 使得

$$A\eta = \lambda\eta,$$

则称数λ 为A 的一个**特征值**, 称向量η 为A 的属于λ 的**特征向量**.

特征值与特征向量的定义

定义

设 $A \in M_n$, 如果存在数 λ, 非零向量η 使得

$$A\eta = \lambda\eta,$$

则称数λ 为A 的一个**特征值**, 称向量η 为A 的属于λ 的**特征向量**.

这里有两点要注意:

(1) 特征向量α 一定是非零的向量. λ 可以为零.

(2) λ 必须是数, 否则数乘$\lambda\alpha$ 没有意义.

特征值存在的条件及基本性质

对于给定的方阵A, 它满足什么条件才有特征值呢?

性质

下列三个条件等价:

(1) A 有特征值λ;

(2) 以方阵$\lambda E - A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)x = 0$$

有非零解;

(3) n 阶行列式

$$|\lambda E - A| = 0.$$

特征值存在的条件及基本性质

对于给定的方阵A, 它满足什么条件才有特征值呢?

性质

下列三个条件等价:

(1) A 有特征值λ;

(2) 以方阵$\lambda E - A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$(\lambda E - A)x = 0$$

有非零解;

(3) n 阶行列式

$$|\lambda E - A| = 0.$$

特征值存在的条件及基本性质

将行列式$|\lambda E - A|$展开，得到一个变量为λ 的n 次多项式，记为$f_A(\lambda)$，即

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个多项式称为A 的 **特征多项式**，方程称为矩阵A的 **特征方程**. 特征多项式的根即为A 的**特征值**.

特征值与特征向量的求法

由上述讨论可知A的特征值和特征向量可按如下步骤求得:

(1) 写出A的特征多项式, 并求出根, 即A的全部特征值.

(2) 对求得的每一特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s(\leq n))$, 求齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

的基础解系, 此即A的属于λ_i最大个数的线性无关的特征向量.

(3) 写出基础解系的一切非零的线性组合, 即得属于特征值λ_i的全部特征向量.

特征值与特征向量的求法

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

特征值与特征向量的求法

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量.

例

证明

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

是关于λ 的n 次多项式，并求λ^n, λ^{n-1} 的系数以及常数项.

例

证明

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

是关于λ 的n 次多项式，并求λ^n, λ^{n-1} 的系数以及常数项.

定理

设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (实数或复数，可重复)是n 阶方阵A 的n 个特征值，即$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = detA.$$

例

设λ 是方阵A 的特征值, α 是A 的属于λ 的特征向量, 证明:

(1) λ^2 是A^2 的特征值, 且 α 是A^2 的属于λ^2 的特征向量;

(2) 当A 可逆时, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, , $|A|\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值, 且 α 是A^{-1}, A^* 对应的特征向量;

(3) $k\lambda$ 是kA 的特征值, 且 α 是kA 的属于$k\lambda$ 的特征向量;

(4) 设2 为A 的一个特征值, 求矩阵 $3A^2+2A-5E$ 的一个特征值;

(5) 设三阶矩阵A的特征值为$1,-2,3$, 求$|\ A^*+2A-3E\ |$.

例

设λ 是方阵A 的特征值, α 是A 的属于λ 的特征向量, 证明:
(1) λ^2 是A^2 的特征值, 且 α 是A^2 的属于λ^2 的特征向量;
(2) 当A 可逆时, λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, , $|A|\lambda^{-1}$ 是 A^* 的特征值, 且 α 是A^{-1}, A^* 对应的特征向量;
(3) $k\lambda$ 是kA 的特征值, 且 α 是kA 的属于$k\lambda$ 的特征向量;
(4) 设2 为A 的一个特征值, 求矩阵 $3A^2+2A-5E$ 的一个特征值;
(5) 设三阶矩阵A的特征值为$1,-2,3$, 求$|\ A^*+2A-3E\ |$.

推论

1. 若λ 是A 的特征值, 则$\varphi(\lambda)$ 是$\varphi(A)$ 的特征值.
2. A 与A^{T} 有相同的特征多项式, 因此也有相同的特征值.
3. 方阵A 可逆的充要条件是A 的特征值均不为0.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.
A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.
A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

化零多项式

定义

假设A 是方阵，$f(\lambda)$ 是多项式，并且$f(A)=0$，称$f(\lambda)$ 是方阵A 的化零多项式.

性质

矩阵A 的特征值全是$f(\lambda)=0$ 的根.

注

A 的化零多项式的根未必都是A 的特征值.
A 的化零多项式的根$\supset$ A 的特征值.
A 的化零多项式的根是A 的所有可能的特征值.

例

若$A^2=E$，求A 的所有可能的特征值.

相似矩阵

定义

设 A, B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，则称矩阵 A 与 B 相似．记为 $A \sim B$ ．P 为相似变换矩阵．

相似矩阵

定义

设 A, B 都是 n 阶方阵，若有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，则称矩阵 A 与 B 相似．记为 $A \sim B$．P 为相似变换矩阵．

例

证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_0 \end{pmatrix}$ 相似．

注

1. 相似是等价关系的特例: 相似必等价,反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性; 传递性.)

注

1. 相似是等价关系的特例: 相似必等价,反之不然.
2. 矩阵间的相似关系是一种等价关系(反身性;对称性; 传递性.)

性质

1. 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.
2. 设 $A \sim B$, f 是一个多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.

定理

若 n 阶方阵 A 与 B 相似, 则有相同的特征多项式和特征值.

定理

若 n 阶方阵 A 与 B 相似, 则有相同的特征多项式和特征值.

注: 特征多项式相同的矩阵未必相似.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 有相同的特征多项式和特征值, 但是不相似.

特征多项式相同是相似的必要而非充分的条件.

等价关系下的不变量为秩.

相似关系下的的不变量?

等价关系下的不变量为秩.
相似关系下的的不变量?
相似关系下的不变量为：**特征值, 迹, 行列式, 秩**

等价关系下的不变量为秩.
相似关系下的的不变量?
相似关系下的不变量为：**特征值, 迹, 行列式, 秩**
以上不变量都只是必要条件.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵，则称矩阵可以相似对角化. 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵，则称矩阵可以相似对角化. 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵，则称矩阵可以相似对角化．方阵 A 的相似对角化问题：求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

注

若 n 阶方阵 A 有少于 n 个线性无关的特征向量，则 A 不与对角矩阵相似．不是每个方阵都与对角矩阵相似.

矩阵的相似对角化问题

如果矩阵 A 相似于某个对角矩阵，则称矩阵可以相似对角化. 方阵 A 的相似对角化问题: 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$.

定理

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

注

若 n 阶方阵 A 有少于 n 个线性无关的特征向量, 则 A 不与对角矩阵相似. 不是每个方阵都与对角矩阵相似.

问题的提出：如何判断 A 是否有 n 个线性无关的特征向量？

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量, 则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

推论

若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，则 A 与对角矩阵相似.

定理

假设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是矩阵属于不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的特征向量，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关.

推论

若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，则 A 与对角矩阵相似.

定理

假设 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值，$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{it_i}$ 是 A 的对应于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，则向量组

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1t_1}, \eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2t_2}, \cdots, \eta_{s1}, \eta_{s2}, \cdots, \eta_{st_s}$$

线性无关.

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ A 的每个n_i 重特征值 i 有 n_i 个线性无关的特征向量,

即 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$, $n = 1, \cdots, t$, 其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$

$\Leftrightarrow$ λ_i 的代数重数等于几何重数, $\forall \lambda_i$.

n 阶方阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ A 的每个n_i 重特征值 i 有 n_i 个线性无关的特征向量,

即 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$, $n = 1, \cdots, t$, 其中 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$

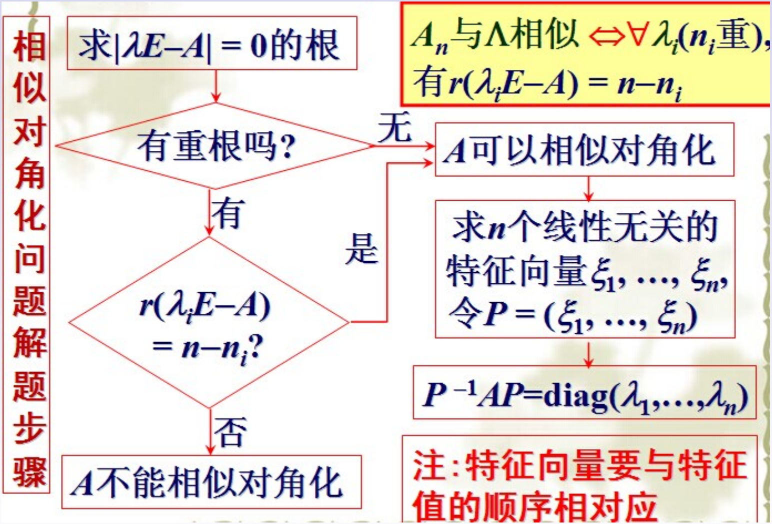
$\Leftrightarrow$ λ_i 的代数重数等于几何重数, $\forall \lambda_i$.

例

若 $A = \begin{pmatrix} 2 & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 相似于对角阵, 求 b, c, x, y, z.

几何代数第5章

作者 刘国华



例

若 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P 和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 并求A^k.

相似矩阵

1. 相似是等价的特例：相似必等价,反之不然.
2. 相似是一等价关系,不变量为特征值,迹,行列式,秩.
   注：不变量都只是必要条件，而非充要条件.
3. 相似对角化下的最简形为对角阵.
4. 相似则特征多项式相同，但反之不然.
5. 若A,B都可相似对角化，且特征多项式相同，则A,B相似吗？
6. $A \sim B$, 则对于任意多项式 $f(x)$ 有 $f(A) \sim f(B)$. $tr(f(A)) = tr(f(B)), |f(A)| = |f(B)|, r(f(A)) = r(f(B))$.
7. $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.
8. A 属于不同特征值的线性无关的特征向量仍线性无关.

求斐波那契数列的通项

由二阶递推公式

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \cdots$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1,\ \lambda = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$

由$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

可得$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

由$\lambda_2 E - A = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$

可得$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$

所以有$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$

使得$P^{-1}AP = \Lambda.$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix},$$

$P^{-1}AP=\Lambda.$

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=P\Lambda^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}-1&\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\\-1&\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}$$

因此

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix},$$
$P^{-1}AP=\Lambda.$

$$\begin{pmatrix}F_n\\F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=P\Lambda^{n-1}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}&\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}+1}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}-1&\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\\-1&\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}$$

因此

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

一个正整数序列的通项,竟然可以用带有无理数的式子表达.

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\}\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\cdots \to \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339.$$

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n-\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\}\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\cdots\to\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.6180339.$$

“黄金分割”比喻这一“分割”如黄金一样珍贵。黄金比是工艺美术、建筑、摄影等艺术门类中审美的因素之一。认为它表现了恰到好处的“合谐”。

斐波那契数列与黄金分割

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

$$\{\frac{F_n}{F_{n-1}}\}\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \cdots \to \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339.$$

“黄金分割”比喻这一“分割”如黄金一样珍贵。黄金比是工艺美术、建筑、摄影等艺术门类中审美的因素之一。认为它表现了恰到好处的“合谐”。

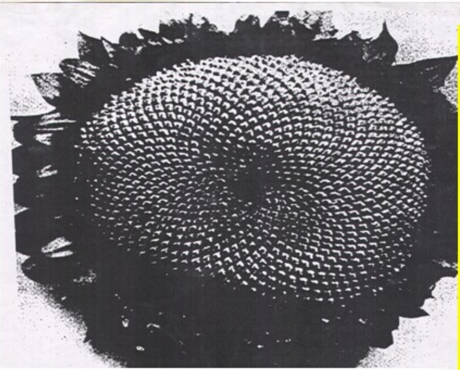
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \cdots \approx 1.618$$

称为第二黄金比.

生活中的斐波那契数

生活中的斐波那契数

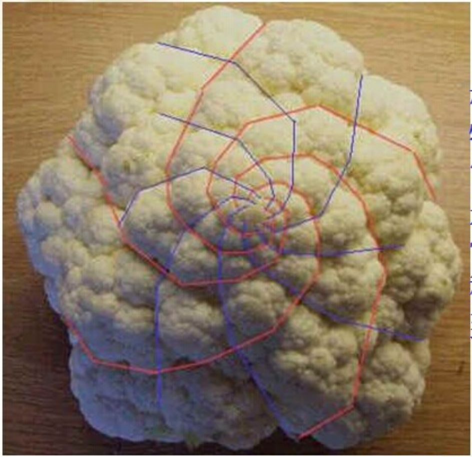
向日葵花盘内葵花子排列的螺线数



种子按顺、逆时针的螺线排列，两组螺线的条数往往成相继的两个斐波那契数，一般是34和55; 89和144; 144和233条螺线。

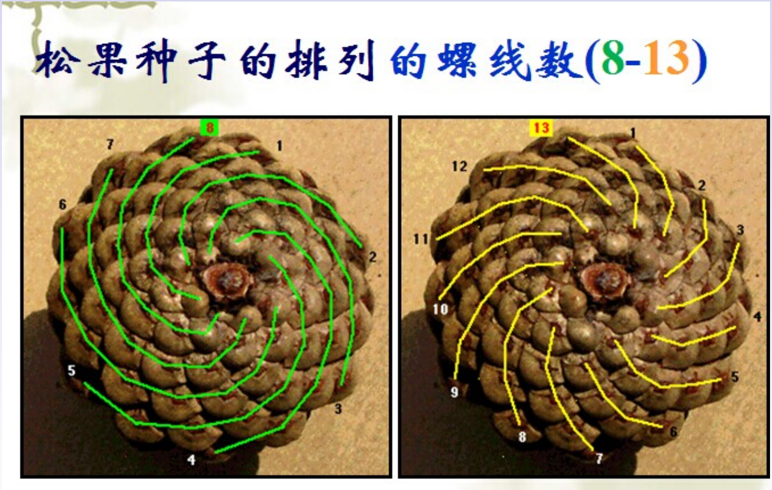
生活中的斐波那契数

菜花表面排列的螺线数（5-8）



植物生长的动力学特性造成的：相邻器官原基之间的夹角是黄金角——137.50776度；这使种子的堆集效率达到最高。

生活中的斐波那契数



复矩阵的共轭矩阵

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$,则称$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵的性质：

- $\overline{kA}=\overline{k}\overline{A}$;
- $\overline{A^T}=(\overline{A})^T$;
- $\overline{AB}=\overline{A}\overline{B}$.

复矩阵的共轭矩阵

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{C}$,则称$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 为 A 的共轭矩阵.

共轭矩阵的性质:

- $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$;
- $\overline{A^T}=(\overline{A})^T$;
- $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$.

实对称: $\overline{A}=A$, $A^T=A\Rightarrow\overline{A}^T=A$.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

若矩阵 A 满足 $\overline{A}^T = A$, $A\eta = \lambda\eta$, 则有

- $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(\lambda E - A)x = 0$ 有实的基础解系.
- A 对应于 λ 有实的特征向量.

实对称矩阵的性质

性质

实对称矩阵的特征值都是实数.

若矩阵 A 满足 $\overline{A}^T = A$, $A\eta = \lambda\eta$, 则有

- $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $(\lambda E - A)x = 0$ 有实的基础解系.
- A 对应于 λ 有实的特征向量.

性质

实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量相互正交.

实对称矩阵的正交相似对角化

定理

对于任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 的列向量组是 A 的对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量组.

实对称矩阵的正交相似对角化

定理

对于任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在正交矩阵 Q, 使得$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值, $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 的列向量组是 A 的对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的标准正交特征向量组.

推论

n 阶实对称矩阵 A 的 n_i 重特征值都有 n_i 个线性无关的特征向量，再由$Schmit$正交化方法知，必有 n_i 个标准正交的特征向量.

实对称矩阵的正交相似对角化

实对称阵的正交相似对角化

求$|\lambda E-A|=0$的根,得到所有特征值$\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_s$

↓

对每个λ_i, 求$(\lambda_i E-A)x=0$的一个非零解η_{i1},由正交性求得正交的特征向量组 $\eta_{i1},\eta_{i2},\dots,\eta_{it_i}$

↓

将$\eta_{i1},\eta_{i2},\dots,\eta_{it}$单位化得标准正交特征向量组$\gamma_{i1}, \gamma_{i2},\dots, \gamma_{it_i}$

↓

令$Q=(\gamma_{11}, \gamma_{12},\dots, \gamma_{1t_1}, \dots, \gamma_{s1}, \gamma_{s2},\dots, \gamma_{st_s})$

$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots, \lambda_1,\dots,\lambda_s,\dots, \lambda_s)$

则$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda$

注:特征向量要与特征值的顺序相对应

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$，正交相似对角化.

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

实对称矩阵的正交相似对角化

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1=(2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda=1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1=(2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda=1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

例

若 A,B 是实对称阵, $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, A,B 是否相似?是否正交相似?

例

把 $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, 正交相似对角化.

例

设3阶实对称矩阵 A 的特征多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda-10)$, 且 $\alpha_3=(1,2,-2)^T$ 是对应于 $\lambda=10$ 的特征向量, 求 A.

若已知 $\alpha_1=(2,1,2)^T$ 是对应于 $\lambda=1$ 的特征向量, 能否唯一求出 A 呢?

例

若 A,B 是实对称阵, $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, A, B 是否相似?是否正交相似?若 A, B 是一般实方阵呢?

例

设 $\alpha \neq 0, \alpha \in R^n$, 求 $A = \alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量.

求 $A=\alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量

解1：设 $a_1\neq 0$

$$\because |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_1^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2-\lambda & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i-\frac{a_i}{a_1}r_1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ \frac{a_2}{a_1}\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{a_i}{a_1}c_i} \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\lambda & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^{n-1}\left(\alpha^T\alpha-\lambda\right)$$

所以A的全部特征值为 0($n-1$重根), $\alpha^T\alpha$

求 $A=\alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量

解法2: $\because A^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=\alpha^T\alpha A$

所以A的所有可能的特征值λ满足 $\lambda^2-(\alpha^T\alpha)\lambda=0$

所以A的所有可能的特征值 $0,\alpha^T\alpha$

$$\because A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix},$$

$$\therefore trA=\sum_{i=1}^n a_i^2=\alpha^T\alpha=\alpha^T\alpha+0+\cdots+0$$

所以A的全部特征值为 0($n-1$重根), $\alpha^T\alpha$

求 $A=\alpha\alpha^T$ 的特征值和特征向量

解法3:

$$\because A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}, \therefore r(A)=r(\alpha\alpha^T)=1$$

$\because A^T=(\alpha\alpha^T)^T=\alpha\alpha^T=A$ $\therefore$ 实对称阵A可正交相似对角化.

即存在正交阵Q和对角阵Λ, $\mu\neq 0$,使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix} \mu & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$\because \mu=tr\Lambda=trA=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\alpha^T\alpha$$

所以A的全部特征值为 0($n-1$重根), $\alpha^T\alpha$