高等数学期中模拟试卷

一、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1、 $x^{3x}+y^3=\frac{4}{3}$， 求 （$\frac{1}{3}$，1） 处 的 切 线 方 程 ________________

1. $x^{3x}+y^3=\frac{4}{3}$，求$(\frac{1}{3},1)$处的切线方程.

$x^{3x}+y^3=\frac{4}{3}$ 过点$(\frac{1}{3},1)$

$(e^{3x\ln x})'+3y^2\cdot y'=0 \Rightarrow y'=\frac{\ln 3-1}{3}$

切线: $y-1=\frac{\ln 3-1}{3}(x-\frac{1}{3}) \Rightarrow y=\frac{\ln 3-1}{3}x-\frac{\ln 3}{9}+\frac{10}{9}$

2、设函数$y=\frac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$______________

2 $(-1)^n n!\frac{2^n}{3^{n+1}}$

$y'=(-1)(2x+3)^{-2}\times 2$

$y''=(-1)(-2)(2x+3)^{-3}\times 2^2$

......

$y^{(n)}=(-1)^n n!(2x+3)^{-(n+1)}\cdot 2^n$

3、$\cos x-\cos 2x$为x的______阶无穷小。

解：法一：

$$\cos x-\cos 2x=-2\sin\frac{x+2x}{2}sin\frac{x-2x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}sin\frac{x}{2}$$

$\therefore \lim\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim\frac{2\sin\frac{3x}{2}sin\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\frac{2\cdot\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}$

∴二阶无穷小

法二：$\cos x-\cos 2x=\cos x-(1-2\sin^2 x)$

$$=\cos x-1+2\sin^2 x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=\frac{3}{2}$$

∴为2阶无穷小量

4、设f(x)在$x=a$可导,且$f(a)\neq 0$，求$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=$__________

解：这是“1^{∞}”． 原式=$\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$．

5、若函数$y=y(x)$满足$(1+x^2)^2y''=y$且$x=\tan t$，$y=\frac{u(t)}{\cos t}$，试求$\frac{d^2u}{dt^2}=$__________

5 若函数 $y=y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$ 且

$$x=\tan t,\quad y=\frac{u(t)}{\cos t}$$

试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.

解法1 利用参数方程求导法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u\sin t}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\sec^2 t}=\cos t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u\sin t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cos t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u\sin t\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\cos t\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+u\cos t}{\sec^2 t}=\cos^3 t\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+u\right)$$

代入 $(1+x^2)^2y''=y$,

$$\sec^4 t\cdot\cos^3 t\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+u\right)=\frac{u}{\cos t},$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=0$

解法2 利用复合函数求导法.

$$u(t)=y(x)\cos t,\quad x=\tan t$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=y'(x)\sec t-y(x)\sin t$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}&=y''(x)\sec^3 t-y(x)\cos t\\&=[y''(x)\sec^4 t-y(x)]\cos t\\&=[(1+x^2)^2y''-y(x)]\cos t=0\end{aligned}$$

6、设 $F(x)=\begin{cases} f(x) & x\le x_o \\ ax+b & x>x_o \end{cases}$，其中，f(x) 在 $x=x_o$ 左方可微，问 a=_______________________，b=_____________________时，F(x)在 $x=x_0$ 处连续且可微。

6.解. 要使 $F(x)$ 在 x_0 点连续，必须满足条件 $F(x_0+0)=F(x_0-0)=F(x_0)$，而

$F(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}(ax+b)=ax_0+b$，$F(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，

由此得 $ax_0+b=f(x_0)$，或 $b=f(x_0)-ax_0$

记 $f(x)$ 在 x_0 点的左导数为 $f'_-(x_0)$，要使 $F(x)$ 在 x_0 点可微，必须

$F'_-(x_0)=F'_+(x_0)$，亦即：

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{(ax+b)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow f'_-(x_0)=a$$

因此，选取 $a=f'_-(x_0)$，$b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$，即可使 $F(x)$ 在 x_0 处连续且可微.

7、求极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{(\sin x)^4}=$____________________

7.解. $\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}(\sin x)^2+\frac{1}{24}(\sin x)^4+o(\sin^4 x)$

$=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)$

$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)}{x^4}=\frac{1}{6}$

8、函数$\mathrm{f}(x)=\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点为 x=________.

解: $$\lim_{x\to0^+}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+e\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}\cdot e}\cdot\frac{\tan x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\mathrm{f}(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}\cdot\frac{\tan x}{x}=\frac{e}{-e}\cdot1=-1$$

∴x=0 是 f(x)的第一类间断点

二、计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

9、已知$\mathrm{f}'(\mathrm{x})=\frac{1}{\mathrm{x}}$，$\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$，求$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$。

9 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $y=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

令 $u=\frac{x+1}{x-1}$, $x\neq1$

则 $\frac{du}{dx}=-\frac{2}{(x-1)^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}\right]=\frac{2}{(1-x^2)}$ $(x\neq\pm1)$

10、$\lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{\sqrt{1+\mathrm{xsinx}}-\sqrt{\mathrm{cosx}}}\cdot\left(2-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e^x}-1}\right)$

解： 分别对$\frac{(\mathrm{arctanx})^2}{\sqrt{1+\mathrm{xsinx}}-\sqrt{\mathrm{cosx}}}$和$\left(2-\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e^x}-1}\right)$运用洛必达定理即可

答案：4/3

11、$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$

解：

$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\sqrt{\frac{k+n^2}{n^2}}-\frac{n}{n}=\frac{\sqrt{k+n^2}-n}{n}=\frac{k}{n(\sqrt{n^2+k}+n)}$$

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}>\frac{\sum k}{\sum n(\sqrt{n^2+k}+n)}>\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

两边极限均为$\frac{1}{4}$

答案：1/4

12、$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：

$$\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\left(1+\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1}}\right)^{\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1\right)\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1\right)\frac{1}{x}}$$

研究$\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1\right)\frac{1}{x}$的极限，原式$=\left(\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e}\right)\frac{1}{x}$

将$\ln(1+x)$泰勒展开，再使用洛必达定理即可

答案:1/e

三、解答题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

13、证明重要极限：$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

证明：∀x≧1，有

$$[x]\leq x\leq [x]+1$$

$$\frac{1}{[x]+1}\leq \frac{1}{x}\leq \frac{1}{[x]}$$

记 n=[x], 则当$x\to +\infty$时，$n\to +\infty$，且

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n}<(1+\frac{1}{x})^{x}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

而 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})}=e$$

由夹逼准则，$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

当$x\to-\infty$时，令 $t=-x$，则 $t\to+\infty$，且

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

于是

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e$$

综上，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

14、设函数f(x)在[0,1]上有二阶导数，且满足$|f(x)| \le a$，$|f''(x)| \le b$（a>0, b>0 是常数），证明对任意$x \in (0,1)$，$|f'(x)| \le 2a + \frac{b}{2}$。

证：利用泰勒公式，对$\forall x \in (0,1)$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x^2,\ \xi_1 \in (0,x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x)^2,\ \xi_2 \in (x,1)$$

两式相减，得 $f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-x)^2 - f''(\xi_1)x^2]$

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|f(1) - f(0) + \tfrac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]\right| \\ &\le |f(1) - f(0)| + \tfrac{1}{2}|f''(\xi_1)|x^2 + \tfrac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-x)^2 \\ &\le a + a + \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot(1-x)^2 \\ &= 2a + \tfrac{b}{2}[x^2 + (1-x)^2] \\ &\le 2a + \tfrac{b}{2}\end{aligned}$$

15、设$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{4(1+x_n)}{4+x_n}$ (n = 1,2,⋯)，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim_{n\to\infty} x_n$。

证：首先由题设知：$x_n > 0$，因此 $1 < x_n < 4$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(1+x_n)}{4+x_n} - \frac{4(1+x_{n-1})}{4+x_{n-1}} = \frac{12(x_n - x_{n-1})}{(4+x_n)(4+x_{n-1})}$$

于是 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号，因此 $\{x_n\}$ 单调，

由单调有界原理知 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

在递推关系式两端令 $n \to \infty$，取极限得 $a = \frac{4(1+a)}{4+a}$

解得$a_1 = 2, a_2 = -2$（由极限保号性得知 $a \ge 1$，舍去），

因此$\lim_{n\to\infty} x_n = 2$

16、已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$。

(1)求函数f(x)的最大值；

(2)设$0<a<b$,证明$0<g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

（Ⅰ）略;

（Ⅱ）证明：依题意，有$g'(x)=\ln x+1$

$$g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)=g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right)$$

由拉格朗日中值定理得，存在$\lambda\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\mu\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，使得

$$g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\left(g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)\right)=\left(g'(\mu)-g'(\lambda)\right)\bullet\frac{b-a}{2}=(\ln\mu-\ln\lambda)\bullet\frac{b-a}{2}$$

$$=\ln\frac{\mu}{\lambda}\bullet\frac{b-a}{2}<\ln\frac{b}{a}\bullet\frac{b-a}{2}<\ln\frac{4a}{a}\bullet\frac{b-a}{2}=(b-a)\ln 2$$

评注：对于不等式中含有$g(a),g(b),g\left(\frac{a+b}{2}\right)(a<b)$的形式，我们往往可以把

$g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)$和$g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)$，分别对$g\left(\frac{a+b}{2}\right)-g(a)$和$g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)$两次

运用拉格朗日中值定理.

17、求证$\frac{2}{n(n+1)}<ln2\cdot ln3\cdot ln4\cdots\cdots lnn$

解：$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}(x>0)$

分析：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增。

所以当$x>1$时，有$f(x)>f(1)=0$，即有$\ln x>\frac{x-1}{x+1}(x>1)$

因而有$\ln 2>\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3},\ln 3>\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4},\ln 4>\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$， ……

$\ln n > \frac{n-1}{n+1}$

故： $\ln 2 \bullet \ln 3 \bullet \ln 4 \bullet \ldots\ldots \bullet \ln n > \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \cdots\cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

综上有 $\frac{2}{n(n+1)} < \ln 2 \bullet \ln 3 \bullet \ln 4 \bullet \ldots\ldots \bullet \ln n$