几何代数第4章

作者 刘国华

白贵妇的线牌

子空间的基和

线性方程组的 解的结构

几何代数第4章

作者 刘国华

东南大学 数学系

September 5, 2017

目录

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

1维回重 司量组的线性 目关性

维数

向重的内积 线性方程组 6

- 1 n维向量
 - n维向量空间
 - 线性组合和线性表示
 - \bullet R^n 的子空间
 - 三个向量空间
- ② 向量组的线性相关性
 - 线性相关和线性无关
- ③ 子空间的基和维数
 - 基和维数
 - 坐标和坐标变换公式
- 4 向量的内积
 - 内积和正交性
 - 标准正交基和Schmidt正交化方法
 - 正交矩阵
- 5 线性方程组的解的结构

几何代数第4章 作者 刘国华

引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.

目录

n维向量 n维向量空间 线性组合和线性表: Rⁿ的子空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

n维向量 **n维向量空间** 我性组合和我性表示 Rⁿ 的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



几何代数第4章 作者 刘围化

目录

1**维向量 n维向量空间**数性组合和数性表示 *限*ⁿ 的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

• 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

1维向量 **n维向量空间** 线性组合和线性表示 R⁷¹的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

1维向量 1维向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间 三个向量空间

回重组的线管 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积 线性方程组的 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



确定飞机的状态, 需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$
- 机身的水平转角 $\theta := [0, 2\pi];$

几何代数第4章 作者 刘国华 引例 n > 3时, n 维向量没有直观的几何形象, 却有广泛的实际意义.



1 雅 回 **宝 n 雅 向 堂 空 何**我性祖 合 和 我性表 示

R ⁿ 的 子 空 同
三 个 向 堂 空 同

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积 线性方程组的



确定飞机的状态,需以下6个参数:

- 机身的仰角 $\varphi := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
- 机翼的转角 $\psi := [-\pi, \pi];$
- 机身的水平转角 $\theta := [0, 2\pi];$
- 飞机重心在空间的位置参数P(x,y,z).

所以,确定飞机的状态,需用6维向量

$$x, y, z, \varphi, \psi, \theta$$

n维向量的定义

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

1维向量 **n维向量空间** 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间

向量组的线性 相关性

子空间的基系 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定义

设 a_1,\ldots,a_n 是 R 或者 C 中的 n 个数,则称有序数组 (a_1,\ldots,a_n) 为 R 或者 C 上的 n 维行向量,称有序数 (a_1)

组
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$
 为 R 或者 C 上的 n 维列向量.

八条基本性质

几何代数第4章

在前面一章,我们介绍过列向量的加法,数乘.关于行(列)向量的加法和数乘,我们有下列八条性质成立. (a_1)

$$i \mathcal{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in R, \ 1 \le i \le n \right\}, \\
\forall \alpha, \beta, \gamma \in R^n, \forall \lambda, \mu \in R.$$

① 加法交换律:
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
;

② 加法结合律:
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
;

③ "零元"存在性: 即存在
$$0 \in \mathbb{R}^n$$
,使 $0 + \alpha = \alpha$;

① "负元"存在性: 即
$$\forall \alpha$$
,存在 β ,使得 $\alpha + \beta = 0$;
② 左分配律: $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

6 右分配律:
$$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$$
;
6 右分配律: $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$;

② 数乘结合律:
$$(\lambda \mu)\alpha = \lambda(\mu \alpha) = \mu(\lambda \alpha)$$
;

此性质作为公理来定义抽象的线性空间.

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

1维向量 11维向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间 三个向量空间

回里组的线性 相关性 子空间的基和

向量的内积 线性方程组的

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 都是n 维向量, $k_1, k_2, \dots k_s$ 是数,则称向量:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的线性组合, $k_1, k_2, \dots k_s$ 是这个线性组合的系数.如果n 维向量 η 可以写成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的线性组合,则称 η 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 线性表示.

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万程组的 解的结构

例

相大性 子空间的基和

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

例

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

1维向量 n^麻向量空同 **线性组合和线性表示** Rⁿ 的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基系维数

向量的内积

解的结构

方程组与线性表示:

$$\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \text{ fix}$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$$

$$\Leftrightarrow$$
 存在实数 $x_1, x_2, \dots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$

几何代数第4章

作者 刘国华

日录 n维向量 n维向量空间

日本の重立向 **我性組合和我性表示** Rⁿ 的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基系 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

方程组与线性表示:

$$A_{mn}X = b$$
 有解 $\Leftrightarrow (A_1, A_2, \cdots A_n)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ 有解

- $\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \ fi$
- $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$
- \Leftrightarrow 存在实数 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$
- \Leftrightarrow 向量b 可以由 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 线性表示.

方程组与线性表示:

- $\Leftrightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b \notin A$
- $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$
- \Leftrightarrow 存在实数 $x_1, x_2, \dots x_n$, 使得 $b = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$
 - \Leftrightarrow 向量b 可以由 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 线性表示.

问题:

唯一解和无数多解对应的线性表示应该是什么?

几何代数第4章 作者 刘国华

日录 n维向量 n^{维向量空间} 线性级合和线性表示

三个向量空间 向量组的线性 相关性

子空间的基系 维数

维数 白层的内和

线性方程组的

Example:

设
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda\\1\\1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1\\1+\lambda\\1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1+\lambda \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0\\3\\\lambda \end{pmatrix},$$
问 λ 为何值时, β 能由 α_1 , α_2 , α_3 线性表示.

Example:

零向量可以被任意向量线性表示.

向量组的等价

几何代数第4章 作者 刘国华

日 环 **n 维 向 量 n** 麻肉量空同 **线性组合和线性表示 R**⁷¹ 的子空同 三个向量空同

向量组的线性 相关性 子空间的基和

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Definition:

设两组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$, 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 中每一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,则称向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性表示,如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

向量组的等价

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

Definition:

设 两 组 向 量 α_1 , α_2 , $\cdots \alpha_s$ 和 β_1 , β_2 , $\cdots \beta_t$, 如 果 向 量 组 β_1 , β_2 , $\cdots \beta_t$ 中每一个向量都可以由 α_1 , α_2 , $\cdots \alpha_s$ 线性表示,则称向量组 β_1 , β_2 , $\cdots \beta_t$ 可以由向量组 α_1 , α_2 , $\cdots \alpha_s$ 线性表示,如果两组向量可以互相线性表示,则称这两组向量是等价的.

记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$, 矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t)$, 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性表示当且仅当矩阵方程AX=B有解.

向量组的等价

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

1维向量 11维向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

• 等价关系满足自反性,对称性和传递性.

几何代数第4章 作者 刘围化

目录n维向量n维向量空间n维加量空间数性组合和线性表示

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

- 等价关系满足自反性,对称性和传递性.
- ◆ 若向量组I与II 等价,则I,II与{I,II}三组向量互相等价.

几何代数第4章 作者 刘国华

相天性 子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Example:

验证下列两组向量等价

$$I: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$II: \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remark:

- 等价关系满足自反性,对称性和传递性.
- 若向量组I与II 等价,则I,II与 $\{I,II\}$ 三组向量互相等价.
- $iA = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t), M \cap$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \beta_2, \cdots \beta_t \} \}$ $\exists \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \} \}$

几何代数第4章 作者 刘国化

作者 刈国华

目录

n 维 向 量 n 維 向 量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ 的子空间 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价 ⇔ 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解⇒ r(A) = r(A, B) = r(B).

几何代数第4章 作者 刘围化

____ n维向

11年四<u>里</u> 11年四<u>里</u> 11年四<u>里</u> **线性组合和线性表** R¹¹ 的子空间 三个向量空间

向量组的线点 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价 \Leftrightarrow 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解 $\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B).$

矩阵A 和B 等价当且仅当r(A) = r(B).

矩阵等价和向量组等价之间有关系吗?

```
几何代数第4章
作者 刘国华
目录
n维向量
```

维向量

1维向量空間

1维向量空間

1度性组合和线性表示

1度型 10 子空間

1 量组的线性

一个 子空间的基和 维数 向量的内积

线性方程组的 解的结构 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价 \Leftrightarrow 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解 $\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B).$

矩阵A 和B 等价当且仅当r(A) = r(B). 矩阵等价和向量组等价之间有关系吗?

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

几何代数第4章 作者 刘国华

1维向量
11维向量空间
13维加量空间 **线性组合和线性表示**Rⁿ的子空间
三个向量空间

子空间的基和 维数 向量的内积

解的结构

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价 \Leftrightarrow 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解 $\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B).$

矩阵A 和B 等价当且仅当r(A) = r(B). 矩阵等价和向量组等价之间有关系吗?

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

反例:
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

几何代数第4章 作者 刘国华

> 维向量 1推向量空间 3.社组合和线性表示 程型的子空间 三个向量空间 可量组的线性

力维数 向内积 数 6 大程组的 线性方程组的解的结构

 $iA = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t),$ 则向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s\}$ 等价 \Leftrightarrow 矩阵方程AX = B, BY = A 都有解 $\Rightarrow r(A) = r(A, B) = r(B).$

矩阵A 和B 等价当且仅当r(A) = r(B). 矩阵等价和向量组等价之间有关系吗?

Proposition:

如果向量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t\}$ 和 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s\}$ 等价,则 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$ 等价. 反之不成立.

反例:
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Remark:

两个矩阵行向量组等价于列向量组等价没有关系.

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万程组的 解的结构

Definition:

设
$$S$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 S 为 R^n 的一个子空间.

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

n维向量 n维向量空间 线性组合和线性表示 **Rⁿ的子空间** 三个向量空间

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万程组的 解的结构

Definition:

设
$$S$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 S 为 R^n 的一个子空间.

• 向量空间必包含零向量.

几何代数第4章

1录

向量组的线点 相关性

子空间的基系 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Definition:

设
$$S \ \,$$
 为 $R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$ 的非空子集且对加法和数乘封闭,则 称 $S \ \,$ 为 R^n 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和 θ 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

几何代数第4章

作者 刘国华

日录 n维向量 n维向量空间

三个向量空间

相关性 子空间的基系 维数

向量的内积 线性方程组的 级的结构

Definition:

设
$$S \rightarrow R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$$
 的非空子集且对加法和数乘封闭,则

称S 为 R^n 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和 θ 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

$$(1)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0 \}$$
 是子空间吗?

几何代数第4章

设
$$S \rightarrow R^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$$
 的非空子集且对加法和数乘封闭,则

称S 为 R^n 的一个子空间.

- 向量空间必包含零向量.
- R^n 和 θ 也是 R^n 的子空间,成为平凡子空间.

例

$$(1)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 0 \}$$
 是子空间吗?

$$(2)W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 | x + 2y + z = 1 \}$$
 是子空间吗?

核空间和列空间

几何代数第4章

目录

1维向量 1维向量空间 1线性组合和线性表示 1度性组合和线性表示 1度型的 1度型的 1度型的 1度型的

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

战性力程组的 解的结构

定义

设 $A_{s \times n}$,则齐次线性方程组Ax = 0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A的核空间或者零空间.

核空间和列空间

几何代数第4章 作者 刘国化

TF有 刈国芋

n维向量 n维向量空间 我性组合和线性;

三个向量空间 向量组的线性 超 关 性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的

定义

设 $A_{s \times n}$,则齐次线性方程组Ax = 0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A的核空间或者零空间.

注

非齐次方程组的解集不是子空间.

核空间和列空间

定义

几何代数第4章

设 $A_{s \times n}$,则齐次线性方程组Ax = 0 的解的全体所构成的集合

$$K(A) = \{x \in R^n | Ax = 0\}$$

是 R^n 的子空间,称为齐次方程组的解空间,也成为矩阵A的核空间或者零空间.

注

工 非齐次方程组的解集不是子空间,

定义

加佳。

设
$$A_{s\times n}$$
,则集合

 $R(A) = \{ \eta \in R^n | \exists x \in R^n, \ \eta = Ax \}$ 是 R^n 的子空间,称为矩阵A的值域或者列空间.

生成子空间

几何代数第4章

目录 n维向量 n^{维向量空间}

Rⁿ 的子空间 三个向量空间 句 黄 细 的 线 性

向重组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万程组的 解的结构

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$,用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合.即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

几何代数第4章

作者 刘国华

n维向量 n維向量空间 线性组合和线性表示 Rⁿ的子空间

向量组的线性 相关性 子空间的基和

维数向量的内积

线性方程组的 解的结构

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$, 用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合. 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

Remark:

• $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{N} L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$

几何代数第4章

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$,用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 表 示

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合. 即

则 $\delta L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为 $\delta \Delta_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间,

• $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \text{ } \mathbb{N} L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$

• $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t).$

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$

Remark:

几何代数第4章

定义

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s \in \mathbb{R}^n$,用 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s)$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合.即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_i \in R\},\$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{N}L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$
- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t)$.
- 生成的子空间是包含 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的所有向量空间中最小的.

定义

几何代数第4章

假设 $\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots \, \alpha_s \in R^n$, 用 $L(\alpha_1, \, \alpha_2, \, \cdots \, \alpha_s)$ 表 示

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的一切线性组合所成的集合, 即

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = \{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s | k_i \in R\},$$

则 称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s)$ 为 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 生 成 的 子 空 间, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 为这个空间的生成元.

Remark:

- $A = (A_1, A_2, \cdots A_t), \ \mathbb{N} L(A_1, A_2, \cdots A_t) = R(A).$
- $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t$ 等价当且仅当 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_t)$
- $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_t).$ • 生成的子空间是包含 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的所有向量空间中最小的.
- 线性方程组AX = b 有解当且仅当 $b \in R(A)$.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

日录

n维向董 向量组的

们大生 线性相关和线性无

子空间的基和 维数

向量的内积

级任力任纽的 解的结构 n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
目录
n维向量
向量组的线性
```

子空间的基和 维数

向童的内积

践性力程组的 解的结构 n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, 如果存在 $k \in R$, 使 $\alpha = k\beta$ 或 $\beta = k\alpha$, 称 $\alpha = k\beta$ 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

定义

给定向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

则称向量组1 线性相关.

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量之间最简单的关系是比例关系,设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)$, 如果存在 $k\in R$, 使 $\alpha=k\beta$ 或 $\beta=k\alpha$, 称 α 与 β 成比例.

把这种比例关系推广到更多的向量,就是向量组的线性相关关系.

定义

给定向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 如果存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

则称向量组I 线性相关.否则称向量组A 线性无关. 也就是说,当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才能成立,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

几何代数第4章 作者 刘国华

目录 n维向量 向量组的线

线性相关和线性无法 子空间的基和

向量的内积

解的结构

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

1. 作品 1. 作品

子空间的基和维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Remark

 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 ⇔ 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

$$\kappa_1 \alpha_1 + \kappa_2 \alpha_2 + \dots + \kappa_s \alpha_s = 0$$

 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) X = AX = 0$ 有非零解.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

日 水 口维向量 向量组的线性 相关性

子空间的基和维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

Remark

 $lpha_1, lpha_2, \cdots, lpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得 $k_1lpha_1 + k_2lpha_2 + \cdots + k_slpha_s = 0$ \Leftrightarrow $(lpha_1, lpha_2, \cdots, lpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.

 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

```
几何代数第4章
作者 刘围华
```

目录 n维向量 向量组的线性 相关性

Remark

$$lpha_1, lpha_2, \cdots, lpha_s$$
 线性相关
 \Leftrightarrow 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s ,使得
 $k_1lpha_1 + k_2lpha_2 + \cdots + k_slpha_s = 0$
 $\Leftrightarrow (lpha_1, lpha_2, \cdots, lpha_s)X = AX = 0$ 有非零解.
 $\Leftrightarrow r(A) < s$.

同理,有

Remark

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$
 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \mathsf{R} \ \mathsf{f} \ \mathsf{s} \mathsf{f}.$$

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录

Remark

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$
 线性相关

$$\Leftrightarrow$$
 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \cdots, k_s , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0 \text{ }$$
 有非零解.

$$\Leftrightarrow r(A) < s$$
.

同理,有

Remark

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$$
 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \text{只有零解}.$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$$
 没有非零解.

```
几何代数第4章
```

Remark

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$
 线性相关

$$\Leftrightarrow$$
 存在一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$$
 有非零解.

$$\Leftrightarrow r(A) < s$$
.

同理,有

Remark

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$$
 线性无关

$$\Leftrightarrow k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \ \text{只有零解}.$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)X = AX = 0$$
 没有非零解.

$$\Leftrightarrow r(A) = s.$$

几何代数第4章 作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性 线性相关和线性无关

子空间的基系 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

几何代数第4章

例

读
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, 判$$

断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

例

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ $\alpha_3 + \alpha_1$, 证明 β_1 , β_2 , β_3 线性无关.

几何代数第4章 作者 刘国华

日水

n维向i

相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

級任力任纽的 解的结构

几何代数第4章 作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性相关性 相关性 线性相关和线性无

子空间的基和 维数

向量的内积

线性力柱组的 解的结构 由定义, 易知有以下结论:

• 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.

几何代数第4章 作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

向量的内积

线性万程组的 解的结构

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.

几何代数第4章 作者 刘国华

口水 1维向量 向量组的线| 如兰州

线性相关和线性无子空间的基本

向量的内积

线性方程组的 解的结构

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

1 华向量 1 维向量 句量组的线性 妇 关 써

线性相关和线性无子空间的基系维数

雅
致
向
量
的
内
积

四里的門本

线性方程组的 解的结构

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

n维向量

向量组的线性相关性 相关性 线性相关和线性无:

子空间的基和 维数

向量的内积 "此一和如4

线性方程组的 解的结构

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- $\exists m > n$ 时,任意m 个n 维向量线性相关.

几何代数第4章 作者 刘国华

日求 n维向量 向量组的线|

线性相关和线性无法 子空间的基和 维数

向量的内积 线性方程组的

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- 当m > n时,任意m 个n维向量线性相关.
- n+1 个n维向量线性相关.

几何代数第4章

- 单个向量线性相关当且仅当此向量是零向量.
- 任意含零向量的向量组一定线性相关.
- 两个向量线性相关当且仅当对应分量成比例.
- $\dot{\pi}$ $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots, \dot{\alpha}_s$ 线性相关,则 $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots, \dot{\alpha}_s, \dot{\alpha}_{s+1} \cdots$ 也线 性相关
 - 当m > n时,任意m 个n维向量线性相关.
 - n+1 个n维向量线性相关.
- 如果n维向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关, 那么在每个 向量中都任意去掉同一个序号的分量,得到的n-1维向 量组 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 也线性相关.

几何代数第4章 作者 刘国化

乍者 刘国华

目录

n维向重

向量组的线[|] 相关性

子空间的基和

维数

问重的内积

解的结构

思考线性相关与线性表示的关系。

几何代数第4章 作者 刘围华

目录 n维向量

同重组的线性 相关性 线性相关和线性无关 子穴间的其和

子空间的基和 维数

向重的内积

解的结构

思考线性相关与线性表示的关系。

定理

向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

几何代数第4章 作者 刘国华

思考线性相关与线性表示的关系。

定理

向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,而向量组 $II=\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,则向量 β 一定能用向量组I线性表示,且表示式是唯一的.

几何代数第4章 作者 刘国华

思考线性相关与线性表示的关系。

定理

向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)\}$ 线性相关的充分必要条件是该向量组中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

定理

设向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,而向量组 $II = \beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则向量 β 一定能用向量组I线性表示,且表示式是唯一的.

性质

如果 n 个n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,则任意 n 维向量 η 都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录 n维向量 向量组的线性 相关性 我性相关和线性无关

子空间的基和 维数

线性方程组的 解的结构

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的部分向量组. 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中每一个向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

则称 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组I的一个极大线性无关组,简称极大无关组。

几何代数第4章

定义

设向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分向量组. 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中每一个向量都可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组I的一个极大线性无关组,简称极大无关组。

例

求向量组1:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的极大无关组.

ル阿代剱第45 作者 刘国华

目录

n维向i

向量组的线 相关性

子空间的基和

7. W 11 la c.

1-1-7-14-11-17

线性万柱组的 解的结构 为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

几何代数第4章 作者 刘国华

为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

几何代数第4章 作者 刘国华

为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的部分向量组. 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

任何向量组I与它自身的极大无关组等价。

几何代数第4章 作者 刘国华

为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

- 任何向量组I与它自身的极大无关组等价。
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.

几何代数第4章 作者 刘国华

为了应用的方便,给出极大无关组的等价定义.

定义

设向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的部分向量组, 且满足

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;
- I中任意r+1个向量都线性相关,

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为向量组A的一个极大线性无关组.

定理

- 任何向量组I与它自身的极大无关组等价。
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.个数一样吗?

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录 n维向量

相关性线性相关和线性无关

子空间的基和 维数

向量的内积

解的结构

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示,而且 t > s,则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 必定线性相关.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录 n维向量 向量组的线性 相关性

我性相关和致性无关 子空间的基和 维数 向景的内和

(1) 型的內积 线性方程组的解的结构

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,而且 t > s,则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 必定线性相关.

推论

如果向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示,并且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关,则 $t\leq s$.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录 n维向量 向量组的线性 相关性 线性相关和线性无3

维数 向量的内积 线性方程组的 解的结构

定理

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示,而且 t > s,则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 必定线性相关.

推论

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,并且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关,则 $t \leq s$.

推论

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价,并且它们均线性无关.则t = s.

极大线性无关组

几何代数第4章

W 2 8

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万柱组的 解的结构

定理

• 任何向量组1与它自身的极大无关组等价.

极大线性无关组

几何代数第4章 作者 刘国华

日求 n维向量

向量组的线性相关性 相关性 线性相关和线性无

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定理

- 任何向量组1与它自身的极大无关组等价.
- 同一个向量组的任意两个极大无关组等价.且每一组极大 无关组的个数是一样的.

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

n维向量

相关性

子空间的基系

向量的内积

解的结构

定义

向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**, 记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

几何代数第4章 作者 刘国华

日录 n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和

向量的内积

践性力程组的 解的结构

定义

向量组 $I=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**,记为 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$.

只含零向量的向量组规定它的秩为零.

几何代数第4章

定义

向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为 这个向量组的秩, 记为 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$.

只含零向量的向量组规定它的秩为零.

定理

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 可以有向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表 示,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \leq r\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$.

几何代数第4章

定义

向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**, 记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

只含零向量的向量组规定它的秩为零.

定理

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ 可以有向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \leq r\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$.

推论

等价的向量组有相同的秩.

几何代数第4章

定义

向量组 $I = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**,记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$.

只含零向量的向量组规定它的秩为零.

定理

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 可以有向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \leq r\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$.

推论

等价的向量组有相同的秩.

性质

秩为r的向量组I中任意r个线性无关的向量,均为该向量组的一个极大无关组.

几何代数第4章

日水

n维向量

相关性

子空间的基和

向量的内积

线性方程组的 解的结构

remark

• $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$

几何代数第4章

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和

向量的内积

线性方程组的

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$

几何代数第4章

日 R な の 维 向 量

向量组的线性 相关性

相关性 线性相关和线性无头

子空间的基和 维数

向童的内积

解的结构

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0;$

几何代数第4章 作者 刘国化

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基系 维数

向量的内积

线性万柱组的 解的结构

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) > 0 \Leftrightarrow \text{Ξ'}$ 存在一个 $\alpha_i \neq 0$;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性无关;

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性 线性相关和线性无关

子空间的基和 维数

向量的内积

线性万柱组的 解的结构

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) > 0 \Leftrightarrow \text{Ξ'}$ 存在一个 $\alpha_i \neq 0$;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性无关;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) < s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性相关;

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

日求 n维向量

向量组的线性 相关性 线性相关和线性无关

子空间的基和 维数

向量的内积

线性为柱组的 解的结构

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性无关;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) < s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性相关;
- 在几何空间中, $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 共线且非零向量;

1维向量

向量组的线性 相关性 数性相关和线性无关

子空间的基和 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

- $0 \le r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) \le s$;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0;$
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性无关;
- $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) < s \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 相性相关;
- 在几何空间中, $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 1 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 共线且非零向量; $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s) = 2 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 共面但不共线.

几何代数第4章 作者 刘国华

- 42 A Z

向量组的线性 相关性

子空间的基系

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,求向量组 $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$ 的一个极大无关组.

```
几何代数第4章
```

多角度看可逆阵

n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow AB = BA = E$

- $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ (非奇异阵、非退化阵)
- $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow Ax = b$ 有唯一解
- ⇔A的行最简形矩阵为E. ⇔A与E相抵
- $\Leftrightarrow A = P_1 P_2 ... P_s, P_s$ 为初等阵.
- $\Leftrightarrow r(A) = n \text{ (满秩)}$
- \Leftrightarrow A的列向量组 $A_1,A_2,...,A_n$ 线性无关
- ⇔任一n维向量α都可由列向量组A1,A2,...,An 线性表示

向量组的秩与矩阵的秩

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录 n维向量

向量组的线性 相关性

线性相关和线性无

子空间的基和 维数

向童的内积

解的结构

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的行秩; 列向量组的秩为矩阵A的列秩.

向量组的秩与矩阵的秩

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量

相关性 线性相关和线性无: 子空间的基和

维数

向童的内积

线性方程组的 解的结构

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A 的行向量组的极大无关组和行秩,以及A 的列向量组的极大无关组和列秩.

向量组的秩与矩阵的秩

几何代数第4章 作者 刘国华

A CONTRACTOR OF THE CONTRACTOR

n维向量 向量组的线性

子空间的基和 维数

向量的内积 (8. 14. 一知何4

线性方程组的 解的结构

定义

矩阵A的行向量组的秩称为矩阵A的**行秩**; 列向量组的秩为矩阵A的**列秩**.

例

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试写出A的行向量组的极大无关组和行秩,以及A的列向量组的极大无关组和列秩.

任意矩阵的行秩和列秩之间的关系?

化何代数第4章 作者 刘国华

目录 n维向量

向量组的线性

线性相关和线性无

子空间的基系 维数

向量的内积

线性为柱组的 解的结构

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

1维向量

线性相关和线性无子空间的基系

向量的内积

线性万程组的 解的结构

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

几何代数第4章 作者 刘国华

1维向量 向量组的线性 日半此

我性相关和线性无法 子空间的基和 维数

向量的内积 线性方程组的

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行(列)向量租的秩都等于矩阵的秩.

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向童 向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积 线性方程组的

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的行秩,变换前后的两个矩阵的行向量组等价.

引理

矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量间的线性关系,特别的变换前后两个矩阵的列秩相等.

引理

阶梯形矩阵行(列)向量租的秩都等于矩阵的秩.

定理

矩阵的行秩和列秩相等,都等于矩阵的秩.

几何代数第4章

求一个向量组的极大无关组的方法:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$$

- ·行最简形的主列是其列向量 组的极大无关组
- ·初等行变换不改变列向量间 的线性关系

按列向量组构成矩阵A 初等行变换 Ã, (阶梯阵)

- 阶梯阵的主列对应的原矩阵的列也是原矩阵 列向量组的极大无关组;
- •若要将非主列用极大无关组线性表示,则要化成行简化阶梯阵.

几何代数第4章

求向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组,并将其余的向量(如果有的话)用此极 大无关组线性表出.

选择题

- 1. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的<mark>充要条件</mark>为()
- (A). $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意向量都不是零向量;
- (B). $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量都不成比例;
- (C). 由 α_1 ,…, α_s 构成的矩阵中有一个s阶子式≠0;
- (D). 由 α_1 ,···, α_s 构成的矩阵中任意s阶子式≠0;
- 2. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件为()
- (A). \exists 全为0的数 k_1 ,…, k_s 使得 $k_1\alpha_1$ +…+ $k_s\alpha_s = \theta$;
- $(C)\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中任意向量都不能由其余向量线性表示;
- (D)\alpha_1,…,\alpha_s中存在某向量不能由其余向量线性表示;

```
几何代数第4章
```

- 3. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 秩为r的<mark>充要条件</mark>为()
- (A). $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任意r个向量线性无关;
 - (B). $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中存在r个线性无关的向量;
- (C). $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中任意r+1个向量线性相关;
- (D). α_1 ,…, α_s 中存在r个线性无关的向量,但任意r+1个向量线性相关.
- 4. 向量组 $I: \alpha_1, \dots, \alpha_s$ 秩为r, 则以下错误的为()
- (A)与I等价的任意一个线性无关向量组均含r个向量
- (B)I中任意r个向量都是其极大无关组;
- (C)I中任意r个线性无关的向量都是其极大无关组;
- (D)I中任意极大无关组均含有r个向量.

- 目录 1维向量 向量组的线性 相关性 线性相关和线性无 子空间的基和
- 维数 向量的内积 线性方程组的

- 5. 设n维向量组I α_1 ,…, α_s 线性无关,则n维向量组II: β_1 ,…, β_s 线性无关的充要条件是()
- (A). I可由II线性表示;
- (B). II可由I线性表示;
- (C). I与II等价;
- (D). 矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ 与 $B = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ 等价.

基、维数和坐标

几何代数第4章 作者 刘国华

作者 刘国华

1维向量 向量组的线性

子空间的基和 维数

基和维数

与量的内积

线性方程组的 解的结构 以下涉及的向量空间V均指 R^n 的子空间.

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为V的一个基.

基、维数和坐标

几何代数第4章 作者 刘围华

以下涉及的向量空间V均指 R^n 的子空间.

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为V的一个基.

如果将向量空间看成一个向量组时,向量空间的一个基 其实就是该向量组的一个极大无关组,所以向量空间的任意 两个基所含向量的个数相等.

基、维数和坐标

几何代数第4章

以下涉及的向量空间V均指 R^n 的子空间.

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是向量空间V中一组向量, 如果满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关;
- V中任一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为V的一个基.

如果将向量空间看成一个向量组时,向量空间的一个基 其实就是该向量组的一个极大无关组,所以向量空间的任意 两个基所含向量的个数相等.

定义

把基所含向量的个数s称为V的**维数**, 记作 $\dim V = s$.

几何代数第4章

作者 刘国生

日分

白量组的线巾

相关性

子空间的基和 维数

基和维数

坐标和坐标变换公式

线性方程组的 解的结构 例

求 \mathbb{R}^n 的一组基及其维数.

例

求 R^n 的一组基及其维数.

是 R^n 的一组基(称为基本单位向量组)

目录

n维向量

向量组的线性和圣州

子空间的基和

维数

坐标和坐标变换

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

求 R^n 的一组基及其维数.

例

记
$$V=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}|x+2y-3z=0\}=\begin{pmatrix}3z-2y\\y\\z\end{pmatrix}|y,\,z\in R,\}$$
 求 V 的一组基.

基、维数和坐标

几何代数第4章 作者 刘国华

日水

n维向重

相关性

子空间的基和 维数

坐标和坐标变换公

向量的内积

线性方程组的 解的结构 值得一提的是,数域上的向量空间V如果是非零向量空间,那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

基、维数和坐标

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

基和维数 坐标和坐标变换公 向量的内积

线性方程组的 解的结构 值得一提的是,数域上的向量空间V如果是非零向量空间,那么它有无穷多个基(请读者自己思考).

由定义可直接推出: n维向量空间中任意n个线性无关的向量都是它的一个基.零空间的维数定义为0.

ル何代数第4章 作者 対国化

目录

n维向量

向童组的线¹相关性

子空间的基和 维数

基和维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 记

 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},$ 则有生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s).$

几何代数第4章 作者 刘国华

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 记

n维向量 向量组的线性

^{童組的线性} 则有生成。

于空间的基和 维数 基和维数

^{坐标和坐标变换公式} 可量的内积

线性方程组的 解的结构 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},$ 则有生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s).$

Theorem

设 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组就是V 的一组基,因此, $dimV = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

几何代数第4章

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 记

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \cdots + k_s\alpha_s | k_i, i = 1, \cdots, s\},\$$

则有生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

Theorem

设 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无 关组就是V 的一组基,因此, $dimV = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

注

矩阵A的列空间的基就是其列向量组的极大无关组.

$$dim L(A_1, A_2, \dots, A_s) = r(A_1, A_2, \dots, A_s) = r(A).$$

几何代数第4章 作者 刘围化

日水

112年197里

相关性

丁空间的基和 维数

维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

设矩阵
$$A=(A_1,A_2,A_3,A_4)=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\-1&1&0&-1\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$
, 求 $L(A)=L(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 的一组基.

几何代数第4章

例

设矩阵
$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
 求 $I(A) = I(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 的一组基

求 $L(A) = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 的一组基.

按列向量组构成矩阵经过初等行变换变成阶梯阵,则有阶梯 阵的主列对应的原矩阵的列是生成子空间的基。

坐标

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

n维向童

向量组的线性 相关性

子空间的基系 维数

基和维数 坐标和坐标变换公式

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

TEH MEH

日求 n维向量

向量组的线性 相关性

子空间组数

坐标和坐标变换公

回重的<u>内积</u>

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

这个定理告诉我们: 在向量空间V中,如果选定了一个基,并且规定了基向量的顺序之后,对于V中每一个向量,就有唯一的n元有序数组与之对应.

日录 n维向量

向量组的线性 相关性 子空间的基和

维数 基和维数 坐标和坐标变换公式 向器的内和

向量的内积 线性方程组的 解的结构

定理

如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是向量空间V的一个基,那么V中每一个向量都可以唯一地表示成 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的线性组合.

这个定理告诉我们: 在向量空间V中,如果选定了一个基,并且规定了基向量的顺序之后,对于V中每一个向量,就有唯一的n元有序数组与之对应.

定义

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为向量空间V的一个基,对任意向量 $\beta \in V$,如果

$$\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

则称n元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为 β 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**坐标**,数 x_i 叫做向量 β 关于基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的第i个坐标分量 $(i = 1, \dots, n)$.

相关性

维数

本和班級 坐标和坐标变換公式

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

向量
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}$$
 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4$ 下的坐标是?

日求

向量组的

相关性 子空间的基和

维数 基和维数

坐标和坐标变换公式

线性方程组的 解的结构

例

向量
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$$
 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 下的坐标是?
在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_3$ 下的坐标是?

n % 向景

n维向重

相关性

子空间的基和 维数

坐标和坐标变换公式

线性方程组的 解的结构

例

向量
$$\begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$$
 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ 下的坐标是?

在基 ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_4 , ϵ_3 下的坐标是?

在基 $2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_3, 4\epsilon_4$ 下的坐标是?

几何代数第4章

 $\partial_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V 中两组基,如果有

 $\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{n2}\alpha_n, \\ \dots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n. \end{cases}$

将其形式上记为

 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$

定义

 $\hbar C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过 渡矩阵.

几何代数第4章 作者 刘国华

日求

n维向重

相关性

子空间的基系 维数

基和维数 坐标和坐标旁播A

线性方程组的 解的结构

若一个向量
$$\eta \in V$$
,在 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

即 $\eta = \sum_{k=1}^{n} x_i \beta_i$,则有

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} x_k \beta_k = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{1k} x_k\right) \alpha_1 + \dots + \left(\sum_{k=1}^{n} c_{nk} x_k\right) \alpha_n$$

性质

设 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的 **过 渡 矩 阵**,向 量 η 在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标向量为 Cx.

几何代数第4章 作者 刘国华

II 3/C

n维向重

相关性

子空间的基系 维数

基和维数

章的内积 1量的内积

线性为柱组的 解的结构 设从基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的坐标向量.

几何代数第4章 作者 刘国华

日录

1.维回重 向量组的线性

子空间的基和 维数

维数 基和维数

坐标和坐标变换公式

线性方程组的 解的结构 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 过 渡 矩 阵,向量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下 的 坐标向量为 Cx.

几何代数第4章 作者 刘国华

目录 n维向量 向量组的线性

子空间的基和 维数 ^{基和维数}

向量的内积 线性方程组的 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 过 渡 矩 阵,向 量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下 的 坐标向量为 Cx.

所以, α_j 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 CQ_j ,于是从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $(CQ_1 \cdots CQ_n) = CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n ,我们得到 $CQ = E_n$.

几何代数第4章 作者 刘国华

日录 n维向量

行大性 子空间的基和 维数

全版在2000年 向量的内积 线性方程组的 设从基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的**过渡矩阵为** Q. 根据定义,Q 的第 j 列 Q_j 是 α_j 在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标向量.

性质

设 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的 **过 渡 矩 阵**,向量 η 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下 的 坐 标 向 量 为 x,则 η 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下 的 坐标向量为 Cx.

所以, α_j 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 CQ_j ,于是从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 $(CQ_1 \cdots CQ_n) = CQ$; 但另一方面,从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到自身的过渡矩阵为 E_n ,我们得到 $CQ = E_n$.

性质

设矩阵 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡 矩阵,则从基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵 为 C^{-1} .

几何代数第4章 作者 刘围化

目录

向量组的线性

相大性 子空间的基和

维数基和维数

坐标和坐标変換公式

线性方程组的 解的结构

例

设
$$R^3$$
 中的两组基 $I:$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

$$II:,\ \beta_1=\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -2 \end{pmatrix},$$

求:

- 从向量组I 到II的过渡矩阵.
- $x\xi = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在基I 和II, ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 下的坐标.

目录 n维向量

n维向重 向量组的线性 相关性

于空间的基本 维数

坐标和坐标変換公式

向量的内积

线性方程组的 解的结构

从杜勒魔方到向量空间

4阶Dürer魔方:

行和=列和=对角线(或次对 角线)之和=每个小方块之和 =四个角之和.

<i>B</i> =	8	22	7	13
	5	15	14	16
	17	3	18	12
	20	10	11	9

你想构造Dürer魔方吗? Dürer魔方有多少个? 如何构造所有的Dürer魔方? Albrecht Dürer's Magic Square

			•	5-1-1-1
	16	3	2	13
4=	5	10	11	8
	9	6	7	12
	4	15	14	1

设A,B是任意两个 Dürer 魔方,

A+B是Dürer魔方吗?√

对任意实数k, kA 是Dürer魔方吗? √。 几何代数第4章 作者 刘国华

1维向量 句量组的线性

子空间的基和 维数

基和维数 坐标和坐标变换公式

可量的内积 18世 六 22 4 4 4

求Dürer魔方空间的基

——培养化繁为简的思考模式

令R为行和,C为列和,D为对角线和,S为小方块和

凭空构造魔方空间的一组基是很难的

类似于n维空间的基本单位向量组,利用0和1来构造一些 R=C=D=S=1的最简单的方阵。

Q₁=

1	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	1	0	0



1在第一行中有4种取法,第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后,第三、四行的1就完全定位了,故共有8个不同的最简方阵,称为基本魔方 $Q_1,...,Q_8$

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

维数

基和维数 坐标和坐标变换公司

向量的内积

线性方程组的 解的结构

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



1在第一行中有4种取法,第二行中的1还有两种取法。当第二行的1也取定后,第三、四行的1就完全定位了,故共有8个不同的最简方阵,称为基本魔方Q1,...,Q8

求Dürer魔方空间的基

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$Q_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $\therefore Q_1 + Q_4 + Q_5 + Q_8 - Q_2 - Q_3 - Q_6 - Q_7 = 0Q_1, \dots, Q_8$ 线性相关



显然, Dürer空间中任何一个魔方 都可以用 $Q_1,Q_2,...,Q_8$ 来线性表示,但 它们能否构成D空间的一组基呢?

求Dürer魔方空间的基

$$Q_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Q_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_{6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q_{7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Q_{8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $\therefore Q_1 + Q_4 + Q_5 + Q_8 - Q_2 - Q_3 - Q_6 - Q_7 = 0 Q_1, \dots, Q_8$ 线性相关

可得 $\forall r_i = 0 : Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 线性无关。

 $Q_1,...,Q_7$ 构成D空间的一组基,任意Dürer 魔方都可由其线性表示。

构造Albrecht Dürer的数字魔方

$$D = r_1 Q_1 + r_2 Q_2 + r_3 Q_3 + r_4 Q_4 + r_5 Q_5 + r_6 Q_6 + r_7 Q_7$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & r_6 & r_5 + r_7 & r_3 + r_4 \\ r_3 + r_5 & r_4 + r_7 & r_1 + r_6 & r_2 \\ r_4 + r_6 & r_2 + r_5 & r_3 & r_1 + r_7 \\ r_7 & r_1 + r_3 & r_2 + r_4 & r_5 + r_6 \end{vmatrix}}{=$$

	16	3	2	13
	5	10	11	8
	9	6	7	12
	4	15	14)	1

 $O_1,...,O_r$ 构成D空间的一组基,任意Dürer 魔方都可由其线性表示.

向量内积的概念

几何代数第4章

推广数量积的概念到 R^n 空间中去,给出如下定义:

定义

设
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, 称实数$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

为向量 α 与 β 的**内积**, 记为 $<\alpha,\beta>$, 即 $<\alpha,\beta>=a_1b_1+\cdots+$ $a_n b_n$.

向量内积的概念

几何代数第4章

推广数量积的概念到 R^n 空间中去,给出如下定义:c

目录

1维向量

向童组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积 内积和正交性 ^{标准正交基} 和Schmidt正 化方法

线性方程组的 解的结构 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, 称实数$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

为向量 α 与 β 的**内积**, 记为 $<\alpha,\beta>$, 即 $<\alpha,\beta>=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

如果 α 、 β 都是列向量,则利用矩阵乘法可将 α 与 β 的内积表示为

$$<\alpha, \beta> = \alpha^{T}\beta = \beta^{T}\alpha.$$

作者 刘国华

14 AC

115年115年 向量组的线性

子空间的基和

向量的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法

^{正文矩阵} 线性方程组的 解的社构 容易验证内积具有下列基本性质:

- (1) 对称性 $<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$;
- (2) 线性性 $<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$

$$< k\alpha, \beta> = k < \alpha, \beta> (k 为实数);$$

• (3) 非负性 $<\alpha,\alpha>\geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha=0$.

作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线性和圣州

子空间的基系

维数

内积和正文性 标准正交基 和Schmidt正 化方法

线性方程组的 解的结构

定义

读
$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$
,称 $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 为

向量 α 的长度(模). 当 $\parallel \alpha \parallel = 1$ 时,则称 α 为单位向量.

定义

向量 α 的长度(模). 当|| α ||= 1时, 则称 α 为单位向量.

例如,设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,则 $\parallel \alpha \parallel = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2} = 0$

 $\sqrt{30}$.

而向量 $\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是一个三维单位向量.

作者 刘国华

n维向重

向童组的线性 相关性

维数

向量的内积 内积和正交性

标准正交基 和Schmidt正交 化方法

线性方程组的 解的结构 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

几何代数第4章 作者 刘国华

日录

n维向董

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向童的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正: 化方法

化方法正交矩阵

线性方程组的 解的结构 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

性质

设n维向量 α , β ,则有

$$|<\alpha,\beta>|\leqslant \parallel\alpha\parallel\parallel\beta\parallel$$

称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

n 维 向 景

向量组的线性

相关性

子空间的基; 维数

句童的内积 内积和正文性 ^{标准正文基} 和Schmidt正 化方法

このは E交矩阵 美性方程组1 若向量 $\alpha \neq 0$, 则向量

$$\beta = \frac{\alpha}{\parallel \alpha \parallel}$$

是一个单位向量. β 称为把非零向量 α 的单位化向量.

性质

设n维向量 α, β ,则有

$$|<\alpha,\beta>|\leqslant \parallel\alpha\parallel\parallel\beta\parallel$$

称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

定义

设非零向量 α, β, α 与 β 的夹角 θ 由以下公式定义:

$$\cos\theta = \frac{<\alpha,\beta>}{\parallel\alpha\parallel\parallel\beta\parallel}.$$

几何代数第4章 作者 刘国华

口水

n维向重 , 。,

向童组的线¹ 相关性

子空间的基系 维数

2000年数

内积和正文性 标准正交基 和Schmidt正: 化方法 正立和胜

线性方程组的 解的结构 这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广. 向量的长度有以下性质:

- (1) # β \not $|| \alpha || \ge 0$, \exists 且仅当 $|| \alpha || = 0$ 时 $\alpha = 0$;
- (2) \hat{A} \hat
- (3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.

几何代数第4章 作者 刘国华

这里向量的长度与夹角是解析几何中长度与夹角的推广. 向量的长度有以下性质:

- (1) 非负性 $\|\alpha\| \ge 0$, 当且仅当 $\|\alpha\| = 0$ 时 $\alpha = 0$;
- (2) \hat{A} \hat
- (3) 三角不等式 $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$.

有了角度的概念, 当两个非零向量夹角是 $\frac{\pi}{2}$ 时, 称它们是正交的. 为方便起见, 补充规定: 零向量与任何向量正交. 并给出以下定义:

定义

作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向量的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidts 化方法

线性方程组的 解的结构

定义

两两正交的非零向量组称为正交向量组, 简称正交组.

例如,向量组
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 R^3 中的一个正交组。

如果一个正交组的每个向量都是单位向量, 称它是单位正交组.

例如,
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 是 R^3 中的一个

单位正交组.

作者 刘国华

向量组的线性

相大性 子空间的基和

了至问的巫和 维数

内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法 正文矩阵

线性方程组的 解的结构

性质

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ 是一正交组,则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

几何代数第4章 作者 刘国华

作者 刘国华

n维向量 向量组的线性

子空间的基和

维数向量的内积

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正数 化方法

线性方程组的 解的结构 向量空间V 中的基如果只一个标准正交向量组,则称此基是V 的标准正交基.

引理

如果向量 β 与向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每一个正交,那么 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个线性组合也正交.

向量空间V 中的基如果只一个标准正交向量组, 则称此基是V的标准正交基.

引理

如果向量 β 与向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每一个正交, 那 $\Delta\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的任意一个线性组合也正交.

定理

设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 是n维向量空间 R^n 的一组线性无关的向 量组,则存在一个正交组 $\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$,使 β_1,\dots,β_m 可 $\mathbf{h}\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表出.

定理

每个非零的向量空间都有标准正交基.

上述方法称为Schmidt正交化方法。

作者 刘国华

一级台

向量组的线性

相关性

向量的内积 内积和正文性

标准正交基 和Schmidt正 化方法

线性方程组的 解的结构 用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 正交化是指取:

$$\beta_{2} = \alpha_{2} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{2} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1}$$

$$\beta_{3} = \alpha_{3} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{3} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1} - \frac{\langle \beta_{2}, \alpha_{3} \rangle}{\langle \beta_{2}, \beta_{2} \rangle} \beta_{2}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{s} = \alpha_{s} - \frac{\langle \beta_{1}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{1}, \beta_{1} \rangle} \beta_{1} - \frac{\langle \beta_{2}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{2}, \beta_{2} \rangle} \beta_{2} - \cdots - \frac{\langle \beta_{s-1}, \alpha_{s} \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle} \beta_{s-1}.$$

则有 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是线性无关的正交向量组,且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价.

正交化是指取:

 $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$

用Schmidt正交化方法将给定的线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \beta_1, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_3 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{\langle \beta_1, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \beta_2, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 - \dots - \frac{\langle \beta_{s-1}, \alpha_s \rangle}{\langle \beta_{s-1}, \beta_{s-1} \rangle} \beta_{s-1}.$$

则有 $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s$ 是线性无关的正交向量组,且与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等 价.

要得到与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价的标准正交向量组,只要将 β_1, β_2, \cdots 单位化即可.

子空间的基本

向量的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正

线性方程组的 解的结构 例

设
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$
 利用 $Schmidt$ 正交化方法求出单位正交组 e_1, e_2, e_3 .

子空间的基 维数

向量的内积 _{内积和正文性} 标准正交基 和Schmidt正数

线性方程组的 解的结构 例

设
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, 利用Schmidt正交化方$$

法求出单位正交组 e_1, e_2, e_3 .

$$e_{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, e_{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, e_{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

L B to the W to

向重组的线性 相关性

子空间的基和 维数

向童的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正: 化方法

正文矩阵

线性方程组的 解的结构 正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^T A = E \quad (\cancel{x} A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

正交概念相联系的一个重要概念是正交矩阵.

定义

如果实方阵A满足

$$AA^T = A^T A = E \quad (\not \propto A^{-1} = A^T)$$

则称方阵A为正交矩阵.

下列矩阵和它们的转置矩阵均是正交的

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

几何代数第4章

目录

n维问重

向量组的线点 相关性

子空间的基础

向量的内积

内积和正义性 标准正交基 和Schmidt正3 化方法

正交矩阵

线性方程组的 解的结构

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;

几何代数第4章 作者 刘围化

目录

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和 维数

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正: 化方法

正交矩阵

线性方程组的 解的结构

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组; A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1} = A^{T}$;

几何代数第4章 作者 刘国华

日求

112年17年

向重组的线性 相关性

子空间的基和 维数

内积和正交性 标准正交基 和Schmidt正 化方法

正交矩阵

线性方程组的 解的结构

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(行)向量组为单位正交组;A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1} = A^{T}$;A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量

相关性

维数 向量的内积

内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正文 化方法

正交矩阵

线性方程组的 解的结构

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(7)向量组为单位正交组;A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵⇒ |A| = ±1;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

几何代数第4章

作者 刘国华

日录

11年四里 向量组的线性 如244

丁至间的基本 维数

向量的内积 内积和正文性 标准正文基 和Schmidt正: 化方法

线性方程组的 解的结构

定理

A为正交矩阵当且仅当A的列(7)向量组为单位正交组; A为正交矩阵当且仅当 $A^{-1}=A^{T}$;

A为正交矩阵当且仅当 A^{-1} 是正交矩阵.

注

- A为正交矩阵⇒ |A| = ±1;
- 若A和B都为正交矩阵,则有AB 为正交阵.

何

- (1) 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, 是正交矩阵, 则a, b, c 满足什么条件?
- (2) 若A 是正交矩阵, 则 $|A^3A^T|=$.

线性方程组有解的条件 回顾线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

的求解问题. 先把方程组写成矩阵形式为 Ax = b

向量方程的形式 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$

 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$ 这里 $\alpha_i=(a_{1i},\cdots,a_{mi})^T$ 是A的第i个列向量, $b=(b_1,\cdots,b_m)^T$ 为方程组的的常数项的列向量.

解的存在性与唯一性

几何代数第4章

作者 刘国华

디자

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和

维数

向量的内

线性方程组的 解的结构 则可以得到下面的命题:

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b \neq m$;
- 向量b可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- 向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, b\}.$

解的存在性与唯一性

几何代数第4章

作者 刘国华

日来

白景组的线》

相关性

丁空间的基本 维数

句量的内积

线性方程组的 解的结构 则可以得到下面的命题:

性质

下面三个条件等价

- $Ax = b \neq m$;
- 向量b可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- 向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, b\}$.

这里, 进一步给出线性方程组有解的判别定理.

定理

线性方程组Ax = b有解的充分必要条件是Ax = b的系数矩阵A与增广矩阵 $\widetilde{A} = (A,b)$ 的秩相等, 即 $r(A) = r(\widetilde{A})$.

解的存在性与唯一性

几何代数第4章

者 刈国华

n维向量

向量组的线 相关性

子空间的基; 维数

向量的内积

浅性方程组的 肾的结构 则可以得到下面的命题:

性质

下面三个条件等价

- 向量b可由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示;
- 向量组 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \simeq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, b\}.$

这里, 进一步给出线性方程组有解的判别定理,

定理

线性方程组Ax = b有解的充分必要条件是Ax = b的系数矩阵A与增广矩阵 $\widetilde{A} = (A,b)$ 的秩相等, 即 $r(A) = r(\widetilde{A})$.

定理

如果线性方程组Ax=b有解,且设 $r(A)=r(\widetilde{A})=r$,则

•
$$\exists r = n$$
 $\forall t \in A$ $\exists r \in B$ \exists

齐次方程组的基础解系

几何代数第4章 作者 刘国华

目录

n维向量

向量组的线, 相关性

子空间的基

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定理

齐次线性方程组Ax=0的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间K(A). 且当它系数矩阵A的秩r(A)=r时, dim(K(A))=n-r.

齐次方程组的基础解系

几何代数第4章 作者 刘国华

n维向量

向量组的线性 相关性

维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定理

齐次线性方程组Ax=0的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A 的核空间K(A). 且当它系数矩阵A的秩r(A)=r时, dim(K(A))=n-r.

定义

解空间K(A)中的一个基称为线性方程组Ax = 0的基础解系.

齐次方程组的基础解系

几何代数第4章 作者 刘国华

日录

向量组的线性 相关性

维数

线性方程组的 解的结构

定理

齐次线性方程组Ax=0的所有解的集合构成一个向量空间,成为齐次方程组的解空间. 且解空间即为矩阵A的核空间K(A). 且当它系数矩阵A的秩r(A)=r时, dim(K(A))=n-r.

定义

解空间K(A)中的一个基称为线性方程组Ax = 0的基础解系. 如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是Ax = 0的基础解系,则齐次线性方程组Ax = 0的全部解为

$$x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{n-r} \xi_{n-r}, \quad c_i \in R, i = 1, \dots, n-r$$

称上式为齐次线性方程组Ax = 0的通解.

齐次方程组的解

几何代数第4章

根据上面的讨论, 对于齐次线性方程组只要求出基础解系, 便 可得通解. 上述定理的证明过程为我们提供了一种求基础解 系的方法. 事实上, 只要令自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 依次 取下列n-r组数

可求得一个基础解系

$$\xi_1 =$$

$$\xi_{1} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{2} = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

齐次方程组的解

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

目录

n维向重

量组的线性

和大生

子空间的基

向量的内积

线性方程组的 解的结构

例

求 齐 次 线 性 方 程 组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$
 水 齐 次 线 性 方 程 组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$
 的 通
$$x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$$
 解.

齐次方程组的解

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

1準回軍

可量组的线性

相关性

子穴间的其

白量的内积

线性方程组的 解的结构

例

求 齐 次 线 性 方 程 组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$
 水 齐 次 线 性 方 程 组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$
 的 通
$$x_3 + x_4 + 3x_5 = 0$$
 解.

例

假设矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$
,分别求 A 的值域 $R(A)$ 和核

空间K(A)的一组基以及它们的维数.

几何代数第4章

TE-B AVE

M AC

n维向重

向量组的线

相关性

向量的内积

线性方程组的 解的结构 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

几何代数第4章

日来

n维向重

向量组的线性

相关性

维数

向量的

线性方程组的 解的结构 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 $\eta_1 + \eta_2 = Ax = b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2 = Ax = 0$ 的解.

几何代数第4章

目录

n维向重

向量组的线点 相关性

维数

线性方程组的 解的结构 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 η_1 和 η_2 是Ax = b的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是Ax = 0 的解.

性质

 $\partial x = b$ 的解, $\xi Ax = 0$ 的解, $\eta Ax = b$ 的解.

几何代数第4章 作者 刘围华

目录

1维向童

向量组的线性 相关性

子空间的 维数

一公 向量的内

线性方程组的 解的结构 非齐次方程组Ax = b的解与其对应的齐次线性方程组Ax = 0的解有着密切的关系.

性质

设 $\eta_1 + \eta_2 = Ax = b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2 = Ax = 0$ 的解.

性质

设 η 为Ax = b的解, ξ 为Ax = 0的解, 则 $\eta + \xi$ 仍为Ax = b的解.

定义

称齐次方程组Ax = 0 为非齐次方程组Ax = b 的导出组.

非齐次方程组解的结构

几何代数第4章 作者 刘国华

定

向量组的线性 相关性 子空间的基和

向量的内积

线性方程组的 解的结构

定理

设 η 为非齐次线性方程组Ax=b的一个特解(即某一个给定的解), $\zeta=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$ 是其对应方程组Ax=0的通解,则方程组Ax=b的通解,所有解,则可表示为

$$x = \eta + \zeta$$

即

$$x = \eta + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \dots + c_{n-r} \xi_{n-r}$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是它对应的齐次线性方程组Ax = 0的一个基础解系, $r = r(A), c_1, c_2, \dots, c_{n-r} \in R$.

非齐次方程组解的结构

```
几何代数第4章
作者 刘国华
```

日水

n维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基和

24 製

线性方程组的

例

求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -7 \end{cases}$$

的通解.

练习题

几何代数第4章

作者 刘国华

目录

1维向量

向量组的线性 相关性

4数

向量的内积

线性方程组的 解的结构

- 1, 与向量 $\alpha = (1,0,1), \beta = (1,1,1)$ 均正交的单位向量为?
- 2, 空间 R^2 中向量 $\eta = (2,3)$ 在 R^2 的基: $\alpha = (1,1), \beta = (0,1)$ 下的坐标为
- 3, $\[\psi \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \]$ 是向量空间 $\[R^n \]$ 的一组标准正交基, $\[n$ 维向量 $\[\alpha, \beta \]$ 在该基下的坐标分别为 $\[x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T \]$ 和 $\[y = (y_1, y_2, \cdots y_n)^T \]$ 则有:
 - (A): $\langle x, y \rangle \neq \langle \alpha, \beta \rangle$, (B): $||x y|| \neq ||\alpha \beta||$
 - (C): $\|\alpha\| = \|\beta\|$ 当且仅当x = y
 - (D): $\alpha n \beta$ 正交当且仅当x n y正交.
- 4, 设A 是正交矩阵, |A| = -1, $A_{i,j}$ 是 $a_{i,j}$ 的代数余子式,则
 - (A): $a_{i,j} = A_{i,j}$, (B): $a_{i,j} = A_{j,i}$,
 - (C): $a_{i,j} = -A_{i,j}$, (D) $a_{i,j} = -A_{j,i}$

目录

1维向量

向量组的线性 相关性

子空间的基 维数

向量的内积

线性方程组的 解的结构 • 1, 设 α 是单位向量.(1) 证明: 矩阵 $A = E - 2\alpha\alpha^T$ 是正交矩阵; (2) 当 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ 时, 求出矩阵A.

• 2, if
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$,

 $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的子空间,已知 $dim(V) = 2, \beta \in V, 求$: (1), a, b. (2) 求V 的一组基,以及 β 在这组基下的坐标. (3) 求V 的一个标准正交基.

• 3,设向量空间V 有两组基: $I:\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 和 $II:\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 且由I 到II 的过渡矩阵为C,证明 (1)如果I 和II 都是标准正交基,则有C是正交矩阵. (2)如果I 都是标准正交基,C是正交矩阵,则有II 也是标准正交基.