第五章：等值演算与推理

第一节：等值式与置换规则

第二节：前束范式

第三节：推理理论

第五章：等值演算与推理

第一节：等值式与置换规则

第二节：前束范式

第三节：推理理论

一阶逻辑等值式与置换规则

定义5. 1　设A，B为一阶逻辑的二个公式，若A $\leftrightarrow$ B是永真式，则称A与B是等值的。记做A$\Leftrightarrow$B ，称A$\Leftrightarrow$B是等值式。

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

- 第一组：命题逻辑永真式的代换实例
  - 理由：永真式的代换实例都是永真式
- 例
  - $\forall x\, F(x) \Leftrightarrow \neg\neg \forall x\, F(x)$
  - $F(x) \rightarrow G(x) \Leftrightarrow \neg F(x) \vee G(x)$

$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

- 第二组：含有量词的等值式

1. 消去量词等值式

个体域为有限集合 $D=\{a_1,a_2\ldots a_n\}$

$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

$\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

例：设个体域为D＝{a,b,c}，将下面公式的量词消去

$\forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

解：

$\forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$

2. 量词的否定

$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$ $\quad Q_3$

$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$ $\quad Q_4$

证明：设论述域为： $S=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$

$$\begin{aligned}\neg\exists x\, P(x) &\Leftrightarrow \neg(P(a_1)\vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n))\\ &\Leftrightarrow \neg P(a_1)\wedge \neg P(a_2) \wedge\ldots \wedge \neg P(a_n)\\ &\Leftrightarrow \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$

可以推广到论述域无限可数的情况下，上述两式成立。

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

3. 量词辖域的扩张及其收缩律

- $\forall x\, A(x) \vee P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee P)$
- $\forall x\, A(x) \wedge P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge P)$
- $\exists x\, A(x) \vee P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee P)$
- $\exists x\, A(x) \wedge P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge P)$

- $\forall x\, A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x\, (A(x) \rightarrow B)$
- $\exists x\, A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x\, (A(x) \rightarrow B)$
- $A \rightarrow \forall x\, B(x) \Leftrightarrow \forall x\, (A \rightarrow B\, (x))$
- $A \rightarrow \exists x\, B(x) \Leftrightarrow \exists x\, (A \rightarrow B\, (x))$

A, B, P为不含有变元x的一阶逻辑公式

4. 量词分配律

$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge \forall xB(x)$

$\exists x\,(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\exists x\,(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

下列等值式不成立！

x在公式$A(x)$和$B(x)$中出现

(1) $\forall x\,(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x) \vee \forall x\,B(x)$

提示：任意实数或者是有理数或者是无理数

或者任意实数是有理数或者任意实数是无理数

(2) $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists x\,A(x) \wedge \exists x\,B(x)$

提示：存在实数既是有理数又是无理数

存在实数是有理数或者存在实数是无理数

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

- 置换规则：给定$\phi(A)$
  - $A \Leftrightarrow B$ ，则$\phi(A) \Leftrightarrow \phi(B)$
- 换名规则：
  - $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x'\, A(x')$，x′不在A中出现
  - $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x'\, A(x')$，x′不在A中出现
- 代替规则：
  - $A(x) \Leftrightarrow A(x')$，x′不在A中出现

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

- 对偶原理

在一个一阶逻辑公式A中（其中不出现→,↔联接词）把公式A中 ∧, ∨, F, T, ∀, ∃, 变为∨, ∧, T, F, ∃, ∀,形成公式A*，则称A*是A的对偶式

- 若一阶逻辑公式A⇔B，则A*⇔B*
- 若一阶逻辑公式A⇒B ，则B*⇒A*
  - A,B有同样的论述域

例：将下面公式化成与之等值的公式，使之没有既约束出现又自由出现的个体变元

1. $\forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

2. $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

解：1. $\forall xF(x,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y,z) \rightarrow \exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y,z) \rightarrow \exists wG(x,w,z)$

2. $\forall x(F(x,y) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,t) \rightarrow \exists yG(x,y,z))$

证明:

$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y)) \Leftrightarrow$

$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

证明: $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg \forall y(\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y \neg (\neg (F(x) \wedge G(y)) \vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$

5.1一阶逻辑等值式与置换规则

证$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x))$ 永真

$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \vee (\neg\forall xA(x) \vee \forall xB(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge \forall xA(x)) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg A(x) \vee B(x)) \wedge A(x))) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg A(x) \wedge A(x)) \vee (B(x) \wedge A(x)))) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(B(x) \wedge A(x))) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall xB(x) \wedge \forall xA(x)) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xB(x) \vee \neg\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee T$

$\Leftrightarrow T$

第五章：等值演算与推理

第一节：等值式与置换规则

第二节：前束范式

第三节：推理理论

5.2一阶逻辑前束范式

- 前束范式
  - 量词均非否定的放在公式的开头，辖域延伸到整个公式
  - $\forall x \exists y \forall z(\neg Q(x,y) \vee R(z))$ (前束范式)

定理5.1 任何一个一阶逻辑公式均存在一个与它等值的前束范式

- 利用量词否定等值式把¬深入到原子公式前
- 利用约束变元的换名规则
- 利用量词辖域的扩张收缩律把量词移到全式的最前面

5.2一阶逻辑前束范式

例：$\forall xP(x) \vee R(x) \Leftrightarrow \forall yP(y) \vee R(x)$

$\Leftrightarrow \forall y(P(y) \vee R(x))$

例：把$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$ 变成前束范式$\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \Leftrightarrow$
$\neg\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\neg P(x) \vee \exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$

5.2一阶逻辑前束范式

- 前束合取范式

ƀxƀy…ƀz$((A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n) \wedge \ldots \wedge (C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n))$

其中**ƀ**可能是全称量词或存在量词，**x,y…z**为个体变元，$A_1 \ldots A_n$，$B_1 \ldots B_n$，$C_1 \ldots C_n$为原子公式或其否定

- 任何一个一阶逻辑公式均可以转化成与其等值的前束合取范式

5.2一阶逻辑前束范式

- 将$\forall x(P(x) \vee \forall z Q(z,y) \to \neg \forall y R(x,y))$转化为与其等值的前束合取范式

解：$\forall x(P(x) \vee \forall z Q(z,y) \to \neg \forall y R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \forall z Q(z,y) \to \neg \forall y R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg(P(x) \vee \forall z Q(z,y)) \vee \neg \forall y R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \wedge \exists z \neg Q(z,y) \vee \exists y \neg R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \wedge \exists z \neg Q(z,y) \vee \exists w \neg R(x,w))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists z \exists w(\neg P(x) \wedge \neg Q(z,y) \vee \neg R(x,w))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists z \exists w((\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg Q(z,y) \vee \neg R(x,w)))$

第五章：等值演算与推理

第一节：等值式与置换规则

第二节：前束范式

第三节：推理理论

5.3 一阶逻辑的推理理论

- 推理定律第一组

命题逻辑推理定律的代换实例

- 第二组

由基本等值式生成的推理定律

- 第三组

$\exists x\,(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

5.3 一阶逻辑的推理理论

（1）全称消去规则（UI规则）

$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$，$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

成立条件是：

- 第一式中，y应为任意的不在A(x)中约束出现的个体变元
- 在第二式中，c为任意的不在A(x)中出现过的个体

5.3 一阶逻辑的推理理论

例：论述域为实数集，**F(x,y)**表示**x>y**，则公式**∀x∃yF(x,y)**是真命题

设**A(x)=∃yF(x,y)**，原式: **∀xA(x)**

y在**A(x)**中约束出现

用全称消去规则：

∀xA(x) ⇒A(y)，可得到 **A(y)**即**∃yF(y,y)**成立。但**∃yF(y,y)** 是假命题

5.3 一阶逻辑的推理理论

（2）全称量词引入规则（UG规则）

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

成立条件是：

1. 无论A(y)中自由出现的个体变元y取何值，A(y)应该均为真
2. 取代自由出现的y的x也不能在A(y)中约束出现，否则也可能产生A(y)为真而∀xA(x)为假的情况

5.3 一阶逻辑的推理理论

（3）存在量词引入规则（EG规则）

$$A(c) \Rightarrow \exists x A(x)$$

成立条件：

- c是特定的个体常元
- 取代c的x不能在A(c)中出现过

例：个体域为实数集，F(x,y)为x>y。并取A(5)= ∃xF(x,5)则A(5)是真命题。用EG规则时，如果用A(5)中已经出现过的x取代5，则出错

5.3 一阶逻辑的推理理论

（4）存在消去规则（EI规则）

$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$

成立条件是：

- 其中c是个体,只是一个表面上的自由变元
- c不在A(x)中出现
- 若A(x)中除自由出现的x外，还有其他自由出现的个体变元，此规则不能使用

例：x的个体域为I={整数},

P(x):x是偶数，Q(x): x是奇数。

$\exists x P(x)$，$\exists x Q(x)$为真。

用该规则时，只能用特定的个体常元。

5.3 一阶逻辑的推理理论

注意：使用**EI**而产生的自由变元不能保留在结论中，因为它只是暂时的假设，推导结束时必须使用**EG**使之成为约束变元

注意：只能对前束范式使用这四条规则

定义5.3 自然推理系统F定义：

- 字母表：同一阶语言的字母表。
- 合式公式：同合式公式定义。
- 推理规则：
- 1）前提引入规则
- 2）结论引入规则
- 3）置换规则
- 4）假言推理规则
- 5）附加规则
- 6）化简规则
- 7）拒取式规则
- 8）假言三段论
- 9）析取三段论
- 10）构造性两难推理规则
- 11）合取引入规则
- 12～15）UI，UG，EI，EG规则

5.3 一阶逻辑的推理理论

例1：证明苏格拉底论证

前提：$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$, $M(s)$ 结论：$D(s)$

$M(x)$:x是人,$D(x)$:x是要死的,s:苏格拉底

(1)	$M(s)$	P
(2)	$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$	P
(3)	$M(s)\rightarrow D(s)$	UI
(4)	$D(s)$	T

例2：

前提: $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$, $\exists xH(x)$ 结论：$\exists xM(x)$

(1) $\exists xH(x)$ P

(2) $H(y)$ EI

(3) $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$ P

(4) $H(y)\rightarrow M(y)$ UI

(5) $M(y)$ T

(6) $\exists xM(x)$ EG

注意，(6)中不能用UG！

5.3 一阶逻辑的推理理论

例3：前提: $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$

结论：$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$

(1) $\forall x\, P(x)$	引入前件
(2) $\exists x\,(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(y)\rightarrow Q(y)$	EI
(4) $P(y)$	UI
(5) $Q(y)$	T
(6) $\exists xQ(x)$	EG
(7) $\forall x\, P(x)\rightarrow \exists xQ(x)$	CP

例5：结论$\forall x \neg P(x)$能否从前提$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\neg Q(a)$中推出

a为个体域中一个常元

(1) $\neg Q(a)$	P
(2) $\forall x\ (P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(3) $P(a)\rightarrow Q(a)$	UI
(4) $\neg P(a)$	T(1,3)
(5) $\forall x \neg P(x)$	UG

习题

#3. Suppose that the universe for x and y is $\{1, 2, 3\}$. Also, assume that $P(x, y)$ is a predicate that is true in the following cases, and false otherwise: $P(1,3), P(2,1), P(2,2), P(3,1), P(3,2), P(3,3)$. Determine whether each of the following is true or false:

(a) $\exists x \forall y\, (y < x \rightarrow P(x, y))$.

(b) $\forall y \exists x\, (y < x \vee P(x, y))$.

(c) $\exists x \exists y\, (P(x, y) \wedge P(y, x))$.

34

习题

1.符号化下列命题：

(1)没有不犯错误的人；

(2)发光的不都是金子；

解：

(1)设M(x)： x是人。 Q(x)：x犯错误。

本题符号化为： $\forall x(M(x)\rightarrow Q(x))$

或者： $\neg\exists x(M(x)\wedge\neg Q(x))$

(2)设L(x)： x是发光的东西。G(x)：x是金子。

$\exists x(L(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\neg\forall x(L(x)\rightarrow G(x))$

习题

2.写出$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\rightarrow(\exists xF(x) \rightarrow \exists xG(x))$的前束范式。

解：

原式$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))\rightarrow(\neg\exists xF(x) \vee \exists xG(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x)) \vee(\neg\exists xF(x) \vee \exists xG(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x(\neg F(x)\vee G(x)) \vee \exists xG(x) \vee\neg\exists xF(x)$

$\Leftrightarrow \exists x((F(x)\wedge \neg G(x)) \vee G(x)) \vee \forall x\neg F(x)$

$\Leftrightarrow \exists x((F(x) \vee G(x)) \vee \forall x\neg F(x)$

$\Leftrightarrow \exists x((F(x) \vee G(x)) \vee \forall y\neg F(y)$

$\Leftrightarrow \exists x\forall y (F(x) \vee G(x) \vee \neg F(y))$

前提： $\neg\forall x(P(x)\wedge Q(x)), \forall xP(x)$

结论： $\neg\forall xQ(x)$

(1) $\neg\neg\forall xQ(x)$ 假设前提（反证法）

(2) $\forall xQ(x)$ T

(3) $Q(y)$ UI

(4) $\forall xP(x)$ P

(5) $P(y)$ UI

(6) $P(y)\wedge Q(y)$ T (3,5)

(7) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ UG

(8) $\neg\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ P

(9) $\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \wedge \neg\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ 为假

(10) 得证