东 南 大 学 考 试 卷（A卷）

课程名称 几何与代数(B) 考试学期 2014-2015-2 得分 ______

适用专业 电类各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密 封 线

一. 填空(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&x\\2&y\end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 $x=$ ________ , $y=$ ________.

2. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha,\beta,\gamma)$, $\boldsymbol{B}=(\alpha,\beta,\delta)$, 且$|\boldsymbol{A}|=-1$, $|\boldsymbol{B}|=2$, 则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ ____.

3. 直线$\begin{cases}x+2y+3z=0\\2x+3y+4z=0\end{cases}$与 $x+y+z+1=0$ 的夹角为________________.

4. 设平面π过点 $P(1,0,1)$且垂直于直线$\dfrac{x-6}{2}=y-5=\dfrac{z+9}{-2}$, 则点 $Q(1,2,3)$到平面π的距离为________________________________.

5. 曲面 $x^2+2y^2+z-1=0$ 与 $z=2xy$ 的交线在 xOy 平面内的投影曲线 L 的方程为____.

6. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 维列向量ξ满足 $\boldsymbol{A}^{2}\xi\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}^{3}\xi=\boldsymbol{0}$, 则向量组$\xi,\boldsymbol{A}\xi,\boldsymbol{A}^{2}\xi$线性________关.

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 为 n 阶方阵, $\boldsymbol{P}$ 可逆阵, 则下列方程组中_______一定与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 同解.
① $\boldsymbol{APx}=\boldsymbol{b}$, ② $\boldsymbol{PAx}=\boldsymbol{Pb}$, ③ $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APx}=\boldsymbol{b}$, ④ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APx}=\boldsymbol{b}$.

8. 设$\begin{pmatrix}1&a&c\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$相似于对角矩阵, 则 $a=$ ________, $b=$ ________, $c=$ ________.

9. 实矩阵$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&a\\0&1&3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}b&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$合同的充分必要条件是 a______________,
b________________________, c________________________.

10. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2$, 则满足 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$ 的实数 $k=$ ________.

二. (6 分)设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$. 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的秩以及一个极大无关组.

三. (14 分)设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+5x_4=2, \\ x_2+3x_4=1, \\ x_1+(a+1)x_3+2x_4=b, \\ -x_1-x_3-2x_4=a-1 \end{cases}$ 有无穷多解, 求参数a, b的值, 并求该方程组的通解(要求写成向量的形式).

四. (8 分)设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 求矩阵$\boldsymbol{X}$使得$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

五. (12 分)设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

1. 求 A 的特征值和特征向量.

2. 求标准正交向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和实数 k_1, k_2, k_3 使得 $A = k_1\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}} + k_2\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}} + k_3\alpha_3\alpha_3^{\mathrm{T}}$.

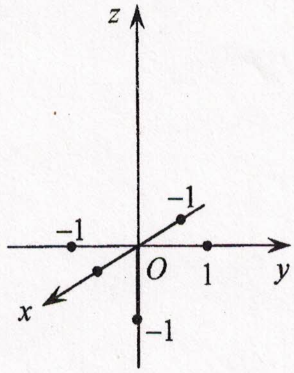
六. (12 分)设二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1+a & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

1. 用配方法把二次型 $f(x)$ 化为标准形, 并写出所用的可逆线性变换 $x = Py$.

2. 分别就实数 a 的不同取值范围讨论二次曲面 $f(x) = 1$ 的类型.

七. (8 分)设曲线 c 是曲面 $x^2-2xy+y^2-z-1=0$ 与 yOz 平面的交线, S 是曲线 c 绕 z 轴旋转一周得到的曲面.

1. 求曲线 c 的方程.



2. 求曲面 S 的方程.

3. 在上面的直角坐标系中绘制曲面 S 的草图(要求标出曲线 c 以及 S 与 xOy 平面的交线).

八. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设平面 $\pi_i: A_i x+B_i y+C_i z=D_i$ 的法向量 $\overrightarrow{n_i}=(A_i,B_i,C_i)$， $i=1,2,3$ 。证明：三平面 π_1,π_2,π_3 交于一点的充分必要条件是它们的法向量 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_3}$ 不共面.

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 为非零实矩阵, a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}. 若对于任意的 $i,j=1,2,3$, 有 $A_{ij}=a_{ij}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 为正交阵.