东 南 大 学 考 试 卷（A卷）仅供参考

课程名称 几何与代数(B)　考试学期 2013-2014-2　得分 ______

适用专业 电类各专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密 封 线

一. 填空(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1)$, 若$|\boldsymbol{A}| = 3$, 则$|\boldsymbol{B}| =$ <u>-9</u>.

   $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} A^T$

2. 设向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 3)$, 则$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$下的坐标为 <u>$(0, 1, 2)^T$</u>.

   令 $\alpha = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$

3. 设平面 $x + y - z + 9 = 0$ 与 $x + y - 2z + 9 = 0$ 的夹角为φ, 则 $\cos\varphi =$ <u>$\frac{2}{3}\sqrt{2}$</u>.

4. 设直线$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$上点 P 到坐标原点的距离最近, 则点 P 的坐标为 <u>$(1, -1, 0)$</u>.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ <u>2</u>.

   $\dim V = 2$
   $\Rightarrow r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 2$
   设 $\alpha_3 = x\alpha_1 + y\alpha_2$
   $\Rightarrow a = 2$.

6. 设直线$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$与$\begin{cases} a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z = b_4 \end{cases}$异面. 令 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{4\times 3}$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) =$ <u>3</u>, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) =$ <u>4</u>.

7. 设曲面 $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ 与平面π的交线在 xOy 平面内的投影曲线为 $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, 则平面$\pi$的方程为 <u>$2x + 2y + z - 3 = 0$</u>.

8. 已知二次曲面 S 的方程为 $x^2 + ay^2 + bz^2 + 2xy + c = 0$, 其中 a, b, c 为常数, 而且 S 的过点 $P_1(1, 1, 0)$和 $P_2(0, 0, 1)$. 若 S 为椭球面, 则 c 的取值范围是 <u>$c < -4$</u>.

9. 设$\boldsymbol{\alpha}$为三维列向量, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* =$ <u>0</u>.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶方阵, $\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$ 都不可逆, 则$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} =$ <u>$\frac{1}{2}A$</u>.

    $A+E \cdot A-2E$不可逆 $\Rightarrow |A+E| = |A-2E| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

    $\because A$为二阶方阵, $\therefore A \sim \begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\therefore A$满足 $(A+E)(A-2E) = 0$, 即 $A^2 - A - 2E = 0$

    $\therefore A(A-E) = 2E$, $\therefore (A-E)^{-1} = \frac{1}{2}A$.

二. (6 分)计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, 其中 $n \geq 2$.

解: $D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1-\frac{c}{a}c_i} \begin{vmatrix} a-\frac{bc}{a}(n-1) & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

$= a^{n-1}\left[a-\frac{bc}{a}(n-1)\right] \quad (a \neq 0)$.

若 $a=0$, 则 $D=0 \ (n \geqslant 3)$; $D=-bc \ (n=2)$.

三. (14 分)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\a\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\b\end{pmatrix}$ 的秩为 2, 求 a 和 b 的值以及 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组, 并把其余的向量用这个极大无关组表示出来.

解: $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{bmatrix}$

$\because$ 秩为2, $\therefore r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)=2$, $\therefore a-1=b-4=0$, 即 $a=1, b=4$.

$\because \alpha_1 \cdot \alpha_2$ 线性无关, $\therefore$ 可取 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ 为 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4$ 的一个极大无关组.

从上述行变换所得阶梯形, 可观察出: $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_4=\alpha_2-2\alpha_1$.

四. (6 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解: 令 $B^{-1}=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, 由 $BB^{-1}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$, 得 $B^{-1}=\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ E & -E \end{pmatrix}$.

由 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, 可得 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\therefore B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

五. (10 分)设$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 问参数$\lambda$为何值时, 存在列向量$\boldsymbol{x}$使得$(1-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{x}$? 何时这样的$x$是唯一的? 何时不唯一? 并在不唯一时, 求满足条件的所有的x.

解: $\alpha^T x\alpha=(\alpha^T x)\alpha$

∵ $\alpha^T x$ 是一个数, ∴ $\alpha^T x\alpha=\alpha\cdot(\alpha^T x)=(\alpha\alpha^T)x$

于是方程化为 $(\lambda E+\alpha\alpha^T)x=\alpha$

$$(\lambda E+\alpha\alpha^T,\alpha)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda+4 & \lambda+4 & \lambda+4 & \lambda+4 & 4\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+\lambda & 1\end{pmatrix}$$

① 当$\lambda+4=0$时, 矛盾方程, 无解;

② 当$\lambda+4\neq0$时, $(\lambda E+\alpha\alpha^T,\alpha)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \frac{4}{\lambda+4}\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \lambda/(\lambda+4)\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda/(\lambda+4)\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda/(\lambda+4)\end{pmatrix}$

若$\lambda\neq0$, 则有唯一解; 若$\lambda=0$时, 通解为$x_1=1-(x_2+x_3+x_4)$.

综上可得: 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-4$时, x唯一; 当$\lambda=0$时, 不唯一, $x=(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)^T$, 其中$x_2,x_3,x_4$为自由未知量.

六. (10 分)设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{x}$为三维列向量. 已知$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$为可逆矩阵, 且$4\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(1)求 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(2)问$\boldsymbol{A}$是否相似于对角阵? 请说明理由.

解: (1) $A=PBP^{-1}\iff AP=PB$

$$AP=A(x,Ax,A^2x)=(Ax,A^2x,A^3x)$$
$$=(Ax,A^2x,-4Ax+4A^2x)$$
$$=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-4\\0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-4\\0&1&4\end{pmatrix}$$

(2) 考察B是否相似于对角阵.

$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-2)^2\Rightarrow\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ (二重).

$(\lambda_2E-B)\to\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\lambda_2=2$ 对应一个线性无关的特征向量

$\Rightarrow$ B不能相似于对角阵 $\Rightarrow$ A不能相似于对角阵.

七. (14 分)求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 把二次型 $f(\boldsymbol{x}) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$ 化为标准形，要求写出所用的正交变换和对应的标准形，并指出 $a = 0$ 时二次曲面 $f(\boldsymbol{x}) = 1$ 的类型.

解：$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$，$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda-a \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ \lambda-a & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & \lambda-a \\ 0 & \lambda-a-1 & 1-\lambda+a \\ 0 & -1+\lambda-a & -1+(\lambda-a)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 1-\lambda+a \\ -1+\lambda-a & -1+(\lambda-a)^2 \end{vmatrix} = (\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$

$\Rightarrow \lambda_1 = a+1$（二重），$\lambda_2 = a-2$.

当 $\lambda_1 = a+1$ 时，$(\lambda_1E-A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

η_1 与 η_2 正交.

当 $\lambda_2 = a-2$ 时，$(\lambda_2E-A) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\eta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

单位化后得 $Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$，故变换为 $x = Qy$，对应的标准形为 $(a+1)y_1^2 + (a+1)y_2^2 + (a-2)y_3^2$. 当 $a=0$，$\lambda_1 = 1$（二重），$\lambda_2 = -2$，$f(x)=1$ 为单叶双曲面.

八. 证明题(每小题 5 分，共 10 分)

1. 设 ξ_1, ξ_2 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，证明：$\xi_1 + \xi_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量当且仅当 ξ_1, ξ_2 对应于 $\boldsymbol{A}$ 的同一个特征值.

证：$\Rightarrow$ $\xi_1+\xi_2$ 为 A 的特征向量，则 $A(\xi_1+\xi_2) = \lambda(\xi_1+\xi_2)$.

设 $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$，于是 $\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 = \lambda(\xi_1+\xi_2)$.

即 $(\lambda_1-\lambda)\xi_1 + (\lambda_2-\lambda)\xi_2 = \theta$. 又 $\because \xi_1, \xi_2$ 无关，$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

$\Leftarrow$ 设 $A\xi_1 = \lambda_0\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_0\xi_2$. 于是 $A(\xi_1+\xi_2) = \lambda_0(\xi_1+\xi_2)$

而 ξ_1, ξ_2 无关意味着 $\xi_1+\xi_2 \neq \theta$，于是 $\xi_1+\xi_2$ 为 A 的特征向量.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 为正定阵当且仅当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证：$\Rightarrow$ AB 为正定阵，则 AB 为对称阵，则 $AB = (AB)^T = B^TA^T$.

而 A, B 均为 n 阶正定阵，则 A, B 也为对称阵，则 $A^T = A$，$B^T = B$.

于是 $AB = BA$.

$\Leftarrow$ A 正定，则 $\exists$ 可逆阵 P，s.t. $A = P^TP$. 于是 $AB = P^TPB$.

~~由 AB=BA，得 P^TPB=~~

则有 $(P^T)^{-1}AB = PB$，进一步有 $(P^T)^{-1}ABP^T = PBP^T$.

故~~于是~~ $AB \sim PBP^T$，AB 与 PBP^T 具有相同的特征值.

而 B 正定，则 PBP^T 也正定，其特征值均为正，所以 AB 的特征值均为正.

同时，由 $AB = BA = B^TA^T = (AB)^T$ 知 AB 为对称阵，因此 AB 为正定阵.