离散数学

东南大学

计算机科学与工程学院

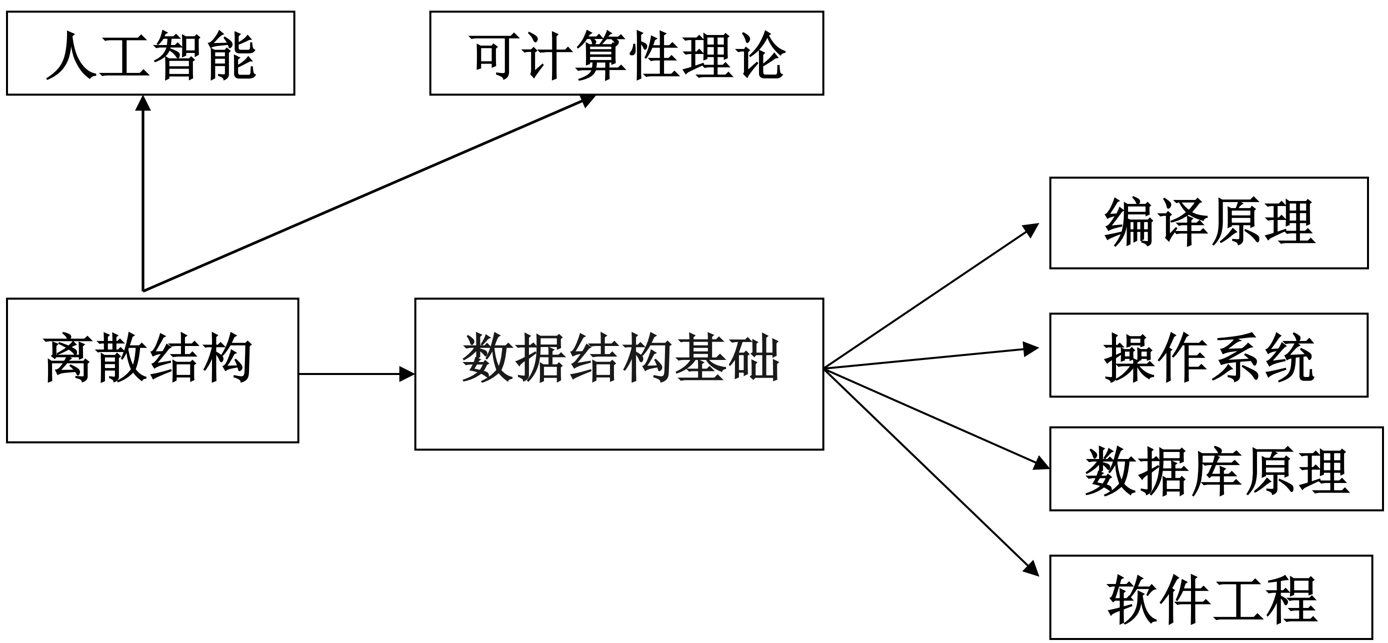
李慧颖

huiyingli@seu.edu.cn

序言一：什么是离散数学

- 研究离散量的结构及相互关系的数学科学
  - 离散结构：集合、关系、图等♪
    离散量是指分散开来的、不存在中间值的量
- 研究对象:有限或可数个元素
  - 自然数、整数，真假值，有限节点等
- 计算机技术的支撑科学：计算机只能处理离散的或离散化了的数量关系

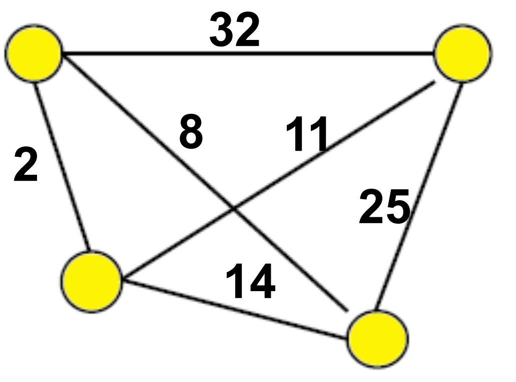
序言二：与其它专业课关系



序言三：内容示例

The Traveling Salesman Problem

- Important in
  - circuit design
  - many other CS problems
- Given:
  - n cities c1, c2, . . . , cn
  - distance between city i and j, d_{ij}
- Find the shortest tour.



序言三：内容示例

- A tour requires n-1 additions. How many different tours?
  - Choose the first city n ways,
  - the second city n-1 ways,
  - the third city n-2 ways,
  - etc.
- tours = n (n-1) (n-2) . . . .(2) (1) = n!
- Total number of additions = (n-1) n!

序言三：内容示例

- **Assume a very fast PC:**
  - **1 flop = 1 nanosecond**

    = 10^{-9} sec.

    = 1,000,000,000 ops/sec

    = 1 GHz.

序言三：内容示例

- If n=8, T(n) = 7•8! = 282,240 flops < 1/3 sec.
- If n=50, T(n) = 49•50!

$$= 1.48\ 10^{66}$$
$$= 1.49\ 10^{57} \text{ seconds}$$
$$= 2.48\ 10^{55} \text{ minutes}$$
$$= 4.13\ 10^{53} \text{ hours}$$
$$= 1.72\ 10^{52} \text{ days}$$
$$= 2.46\ 10^{51} \text{ weeks}$$
$$= 4.73\ 10^{49} \text{ years.}$$

序言四：课堂内容

- 本课程根据大纲的内容和相关独立性，可分为四大部分
- 第一部分　　数理逻辑　包括命题逻辑和谓词逻辑两个内容。
- 第二部分　　集合论
- 第三部分　　代数系统
- 第四部分　　图　论
- 讲课时数：64学时
- 成绩=平时10%+期末90%

课程安排

数理逻辑

↓

集合论

↓

代数结构

↓

图论

课程安排

数理逻辑

集合论

代数结构

图论

数理逻辑

- 逻辑分类
  - 辩证逻辑：是研究事物发展的客观规律。
  - 形式逻辑：是研究思维的概念、判断和推理的问题。
- 数理逻辑
  - 数学方法研究形式逻辑的一门科学
  - 一般认为由莱布尼茨（**Leibniz**）提出
  - 最基本组成部分：命题演算、谓词演算
  - 四大分支：证明论、模型论、递归论和公理集合论

1.1 命题与联结词

- 命题：具有唯一真值陈述句
  - 唯一性：或真或假但不能两者都是的
  - 命题所用符号：常用小写２６个英文字母
- 例子
  - 十是整数 ✓
  - 上海是一个村庄 ✓
  - $x=3$ ✗
  - 现在是几点？ ✗
  - 1+1=2 ✓
  - 我现在说假话 ✗ 悖论！

1.1 命题与联结词

- 判断下列语句是否为命题
  - 2050年元旦下雨 ✓
  - 加拿大是一个国家 ✓
  - $x+y>4$ ✗

1.1 命题与联结词

- 命题分类
  - 简单命题：不能被分解成更简单的陈述句
  - 复合命题：简单陈述句+联接词
- 例子
  - 今天没有下雨
  - 牛顿是一位物理学家，而且是一位数学家
  - 小李是学数学或者计算机科学
  - 如果天下雨，那么地下湿

1.1 命题与联结词

- 否定联接词
  - 符号¬ ,读作“非”， “否定”
- 定义：命题 p
  - p的否定式：复合命题“p的否定”（“非p”）
  - 符号：$\neg p$ (符号¬称作否定联结词)
  - $\neg p$为真当且仅当p为假
- 例子
  - 今天没下雨 $\neg p$
    - p：今天下雨

p	$\neg p$
1	0
0	1

1.1 命题与联结词

- 合取联接词
  - 符号∧,读作“合取”、“积”、“与”
- 定义：命题 ***p***，***q***
  - ***p***与***q***的合取式：复合命题“***p***并且***q***”
  - 符号：***p***∧***q***(符号∧称作合取联结词)
  - ***p***∧***q***为真当且仅当***p***和***q***同时为真
- 例子
  - 王华的成绩很好并且品德很好 ***p***∧***q***
    - p：王华的成绩很好
    - q：王华的品德很好

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.1 命题与联结词

- 析取联接词
  - 符号∨,读作“析取”、“和”、“或”
- 定义：命题 ***p***，***q***
  - ***p***与***q***的析取式：复合命题“***p***或***q***”
  - 符号：$p \vee q$(符号∨称作析取联结词)
  - $p \vee q$为假当且仅当***p***和***q***同时为假
- 例子
  - 小李是学数学或者计算机科学$p \vee q$
    - p：小李是学数学
    - q：小李是学计算机科学

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 注意：

区分“相容或”与“排斥或（不可兼或）”

- “排斥或” 真值表定义

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1.1 命题与联结词

- 例：　“排斥或”
  - 这本书只能出版或销毁
  - 张晓静只能挑选202或203房间

1.1 命题与联结词

- 蕴含词：（“蕴含”联结词、单条件联结词）
  - 符号“→”，读作：“如果…则…”、“蕴含”。
  - 命题p、q，蕴含式p→q，称p是蕴含式的前件，q为蕴含式的后件，→称为蕴含联结词。
  - p→q为假当且仅当p为真q为假。
- 真值表定义

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 例子：

(a)政治家竞选许诺：“如果我当选了，那么我将减税”

(b)如果我拿起一本书，则我一口气读完了这本书。

p：我拿起一本书

q：我一口气读完了这本书

符号化：$p \to q$

- 例子：

(c)只有今天是星期一，明天才是星期二。

p：今天是星期一

q：明天是星期二

符号化：$q \rightarrow p$

(d)除非天下大雨，否则他不乘班车上班。

p：天下大雨

q：他乘班车上班

符号化：$q \rightarrow p$

1.1 命题与联结词

- 给定命题$p \to q$，则将$q \to p$，$\neg p \to \neg q$，$\neg q \to \neg p$分别称为命题$p \to q$的逆命题，反命题，逆反命题。

例：关于命题$p \to q$可以证明：

$$\underbrace{p \to q}_{\text{原命题}} \Leftrightarrow \underbrace{\neg q \to \neg p}_{\text{逆反命题}}$$

$$\underbrace{q \to p}_{\text{逆命题}} \Leftrightarrow \underbrace{\neg p \to \neg q}_{\text{反命题}}$$

1.1 命题与联结词

- 等价词（ “等同”词、双条件联结词）
  - 符号“↔”
  - 命题p、q，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的等价式，记做$p \leftrightarrow q$， ↔称作等价联接词。
  - $p \leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假。
- 真值表定义

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

❑例子：

△ABC是等腰三角形当且仅当△ABC中有两只角相等

p：△ABC是等腰三角形

q：△ABC有两只角相等

则：$p\leftrightarrow q$。

- 命题联结词在使用中的优先级
  - 先括号内，后括号外
  - 命题联结词的优先次序为： $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

（由高到低）

例：令p：北京比天津人口多。

q：2＋2＝4。

r: 乌鸦是白色的。

求下列命题真值。

（1）$((\neg p \land q) \lor (p \land \neg q)) \to r$

（2）$(q \lor r) \to (p \to \neg r)$

（3）$(\neg p \lor r) \leftrightarrow (p \land \neg r)$

1. 1 命题与联结词

例：1. 他即聪明又用功。

p：他聪明 q：他用功

$p \wedge q$

2.他虽聪明但是不用功。

$p \wedge \neg q$

3.如果明天不是雨加雪则我去学校。

p：明天下雨 q：明天下雪 r：我去学校

$\neg (p \wedge q) \rightarrow r$

4.如果明天不下雨并且不下雪则我去学校。

$\neg p \wedge \neg q \rightarrow r$

5.如果我上街，我就去书店看看，除非我很累。

p：我上街　　q：我去书店看看　　r：我很累

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)$$

或 $(\neg r \wedge p) \rightarrow q$

练习

*仅当John是大二或大三的学生时，他才学习微积分。

*如果Jerry获得奖学金，则他会上大学。（形式化该命题和其逆命题）

如果Jerry没获得奖学金，但中了彩票去上大学。该命题和其逆命题的真值？

1.2 命题公式及其赋值

命题公式

- 命题常元：简单命题
- 命题变元：以真假为其变域之变元，或没有指定真值的命题。常用小写英文字母a…z表示

1.2 命题公式及其赋值

定义1.6：命题公式

1）单个的命题变元是一个命题公式，并称为原子命题公式。

2）若A是命题公式，¬A也为命题公式。

3）若A、B是命题公式，则（A∧B）、（A∨B）、（A→B）、（A↔B）均为命题公式。

4）当且仅当有限次使用（1）（2）（3）所生成的公式才是命题公式。

1.2 命题公式及其赋值

定义1.7：

1）若公式A是单个命题变元，称为0层公式

2）称公式A是n+1($n\geq 0$)层公式是指下面情况之一

a）$A = \neg B$，B是n层公式

b）$A = B \wedge C$，其中B，C分别为i层和j层公式，且$n = \max(i,j)$

c）$A = B \vee C$，其中B，C的层次及n同(b)

d）$A = B \rightarrow C$，其中B，C的层次及n同(b)

e）$A = B \leftrightarrow C$，其中B，C的层次及n同(b)

3）若公式A的层次为k，则称A是k层公式

1.2 命题公式及其赋值

定义1.8：设命题公式A中有n个不同的命题变元$p_1,\ldots p_n$, n为正整数。该变元组的任意一组确定的值称为对A的一个赋值(指派）。

- 成真赋值:使命题公式A取真的赋值
- 成假赋值:使命题公式A取假的赋值

p	q	$\neg((p\vee q)\wedge p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

- 含n个命题变元的公式共有2^n个不同的赋值。

1.2 命题公式及其赋值

- 真值表
  - 将命题公式A在所有赋值下取值情况列成表
- 步骤
  - 找出公式中所含的全体命题变元并列出所有赋值
  - 按从低到高的顺序写出公式的各个层次
  - 对应各个赋值计算出各层次的真值，直到最后计算出公式的真值

1.2 命题公式及其赋值

例 1． 构造命题公式$\neg((p\vee q)\wedge p)$的真值表：

p	q	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge p$	$\neg((p\vee q)\wedge p)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

1.2 命题公式及其赋值

例 2． 写出命题公式p∨（q∧r）的真值表

p	q	r	(q∧r)	p∨(q∧r)
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

例：求公式$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \land q \lor \neg p \land \neg q)$的真值表。

p	q	¬p	¬q	$p \leftrightarrow q$	$p \land q \lor \neg p \land \neg q$	公式
0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**

1.2 命题公式及其赋值

定义1.10：设A为任意命题公式。

1）若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式(永真式)。

2）若A在它的各种赋值下取值均为假，则该公式称为矛盾式(永假式)。

3）若A不是矛盾式，则称A是可满足式。

1.2 命题公式及其赋值

对于含有 n 个变元的命题公式，其真值表必定只有2^{2^n}种不同的情况，因此必有无穷多种公式具有相同的真值表。