自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷（A卷）

课程名称 几何与代数(B) 考试学期 2013-2014-2 得分 ______

适用专业 电类各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. 填空(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{B}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3, 2\alpha_2-\alpha_1)$, 若$|\boldsymbol{A}|=3$, 则$|\boldsymbol{B}|=$________.

2. 设向量$\varepsilon_1=(1, 1, 1)$, $\varepsilon_2=(1, 0, 1)$, $\varepsilon_3=(0, 1, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}=(1, 2, 3)$, 则$\boldsymbol{\alpha}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的坐标为____________.

3. 设平面 $x+y-z+9=0$ 与 $x+y-2z+9=0$ 的夹角为φ, 则 $\cos\varphi=$__________.

4. 设直线$\begin{cases}x+z=1\\x-y=2\end{cases}$上点 P 到坐标原点的距离最近, 则点 P 的坐标为____________.

5. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\a\end{pmatrix}$生成的向量空间的维数为 2, 则 $a=$_____________.

6. 设直线$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\end{cases}$与$\begin{cases}a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\\a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z=b_4\end{cases}$异面. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times3}$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3, b_4)^{\mathrm{T}}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$_______, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})=$_______.

7. 设曲面 $x^2+y^2-z+1=0$ 与平面π的交线在 xOy 平面内的投影曲线为 $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=4\\z=0\end{cases}$, 则平面$\pi$的方程为______________________.

8. 已知二次曲面 S 的方程为 $x^2+ay^2+bz^2+2xy+c=0$, 其中 a, b, c 为常数, 而且 S 的过点 $P_1(1, 1, 0)$和 $P_2(0, 0, 1)$. 若 S 为椭球面, 则 c 的取值范围是______________.

9. 设α为三维列向量, $\boldsymbol{A}=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$____________.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶方阵, $\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 都不可逆, 则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$__________________.

二. (6 分)计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$, 其中 $n \geq 2$.

三. (14 分)设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ b \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 求 a 和 b 的值以及 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组, 并把其余的向量用这个极大无关组表示出来.

四. (6 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

五. (10 分)设$\boldsymbol{\alpha}=(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 问参数$\lambda$为何值时, 存在列向量$\boldsymbol{x}$使得$(1-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{x}$? 何时这样的$x$是唯一的? 何时不唯一? 并在不唯一时, 求满足条件的所有的x.

六. (10 分)设$\boldsymbol{A}$为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{x}$为三维列向量. 已知$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$为可逆矩阵, 且$4\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(1)求 3 阶矩阵$\boldsymbol{B}$使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(2)问$\boldsymbol{A}$是否相似于对角阵? 请说明理由.

七. (14 分)求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 把二次型 $f(\boldsymbol{x}) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3)$化为标准形, 要求写出所用的正交变换和对应的标准形, 并指出 $a = 0$ 时二次曲面 $f(\boldsymbol{x}) = 1$ 的类型.

八. 证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设ξ_1, ξ_2为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量, 证明: $\xi_1 + \xi_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量当且仅当ξ_1, ξ_2对应于 $\boldsymbol{A}$ 的同一个特征值.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定阵, 证明: $\boldsymbol{AB}$ 为正定阵当且仅当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.