2.1 等值式

定义**2.1**：如果对两个命题公式**A**和**B**，若**A**和**B**构成的等价式**A**↔**B**为重言式，则称**A**与**B**是等值的，记做**A** ⇔ **B** ，也称**A**逻辑恒等于**B**。

注意区别：⇔和↔

2.1 等值式

证明：

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

p	¬p	¬¬p	¬¬p ↔ p
0	1	0	1
1	0	1	1

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	¬p	p→q	¬p∨q	p→q ↔ ¬p∨q
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

2.1 等值式

(1)双重否定律　$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2)幂等律　$P \vee P \Leftrightarrow P$；$P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3)交换律　$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$；

$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$；$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

(4)结合律

$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$;

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$;

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

(5)分配律

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

2.1 等值式

(6)摩根律 $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$

$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

(7)吸收律 $P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$

(8)零　律 $P\vee T\Leftrightarrow T$； $P\wedge F\Leftrightarrow F$

(9)同一律 $P\vee F\Leftrightarrow P$； $P\wedge T\Leftrightarrow P$

(10)排中律 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$

(11)矛盾律 $P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

2.1 等值式

(12)蕴含等值式 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(13)等价等值式 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

(14)假言易位 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

(15)等价否定等值式 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$

(16)归谬律

$$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$$

(17)输出律

$$P \wedge Q \to R \Leftrightarrow P \to (Q \to R)$$

等值演算

- 置换规则：设φ(A)是含公式A的命题公式，φ(B)是用公式B置换了φ(A)中所有A后得到的命题公式，若 A⇔B ，则φ(A) ⇔ φ(B) 。

- 一个命题公式A，经多次置换，所得到的新公式与原公式等价。

1. 试证　$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

证明：

a. $p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$

b. $p \to (\neg q \vee r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$

c. $\neg p \vee \neg q \vee r \Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r$

d. $\neg (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

2.1 等值式

2. 试证

$\neg(p\wedge q)\rightarrow(\neg p\vee(\neg p\vee q))\Leftrightarrow(\neg p\vee q)$

左边

$\Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q)\vee(\neg p\vee(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\neg p\vee(\neg p\vee q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow (p\vee \neg p\vee q)\wedge(q\vee \neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)$

3. 证明

$((p\vee q)\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)$为永真式

证明：原式

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee(q\wedge r)))\vee\neg(p\vee q)\vee\neg(p\vee r)$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

$\Leftrightarrow T$

2.2 析取范式和合取范式

定义**2.2**

文字：命题变元及其否定

简单析取式：由有限文字构成的析取式

简单合取式：由有限文字构成的合取式

例：**p**、**q**为命题变元

- p，q，$p\vee p$，$q\vee q$，$\neg p\vee q$，　$\neg q\vee\neg p$，$p\vee q$，$p\vee\neg q$　简单析取式
- q，$p\wedge p$，$q\wedge q$，　$\neg p\wedge q$，　$\neg q\wedge\neg p$，$p\wedge q$，$p\wedge\neg q$　简单合取式

2.2 析取范式和合取范式

定义2.3

析取范式：有限个简单合取式构成的析取式

合取范式：有限个简单析取式构成的合取式

例： $p \wedge q \wedge r$

既是析取范式又是合取范式

2.2 析取范式和合取范式

定理2.3　范式存在定理

任意命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式

- 化去“→”、“↔”联结词，把命题公式变为与其等值的用{¬，∧，∨}表达的公式
- 将“¬”深入到原子命题变元前，并使变元前最多只有一个“¬”词
- 利用“∧”对“∨”的分配，将公式化成为析取范式
- 除去永假项得最简析取范式

2.2 析取范式和合取范式

例：求$(p \to q)\wedge(p\wedge q)$的析取范式：

解：原式

(1)化去→词

- $\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(p\wedge q)$

(2)"∧"对"∨"分配，化为析取范式

- $\Leftrightarrow(\neg p\wedge p\wedge q)\vee(q\wedge p\wedge q)$

(3)最简析取范式

- $\Leftrightarrow p\wedge q$

2.2 析取范式和合取范式

例：求$((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$的最简合取范式和最简析取范式。

解：1. 求最简析取范式

原式$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee r)\rightarrow p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow (\neg\neg(p\vee q)\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg r\vee p$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow p\vee(p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg r)$　　吸收律

2. 求最简合取范式

原式$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee r) \rightarrow p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow (\neg\neg(p\vee q)\wedge\neg r)\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg r\vee p$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg r\vee p)$

2.2 析取范式和合取范式

定义**2. 4**：在含有**n**个命题变元的简单合取式**(**简单析取式**)**中，若每个命题变元和它的否定式不同时出现，二者之一必出现且仅出现一次，且第**i**个命题变元或它的否定式出现在从左算起的第**i**位上**(**若无角标则按字典顺序排列**)**，称这样简单合取式**(**简单析取式**)**为*极小项***(***极大项***)**。

2.2 析取范式和合取范式

- 一个命题变元，极小项有$2^1=2$个

  p、¬p

- 二个命题变元，极小项有$2^2=4$个

  p∧q、¬p∧q、p∧ ¬q、 ¬p∧ ¬q

- 三个命题变元，极小项有$2^3=8$个

  p∧q∧r、p∧q∧¬r、p∧¬q∧r、p∧¬q∧¬r、¬p∧q∧r、¬p∧q∧¬r、¬p∧¬q∧r、¬p∧¬q∧¬r

2.2 析取范式和合取范式

- 推广到一般：若有 n 个命题变元，则有2^n个极小项($n \in I_+$)。

- 如果我们把命题变元看成1，命题变元的否定看成0，那么每一个极小项都对应一个二进制数，因而也对应一个十进制数。

2.2 析取范式和合取范式

三个变元**p**、**q**、**r**可构造8个极小项：

$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	0	记作 m_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	1	记作 m_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	2	记作 m_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	3	记作 m_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	4	记作 m_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	5	记作 m_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	6	记作 m_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	7	记作 m_7

p	q	r	¬p∧¬q∧¬r	¬p∧¬q∧r	¬p∧q∧¬r
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

2.2 析取范式和合取范式

p	q	r	$\neg p \wedge q \wedge r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge r$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

2.2 析取范式和合取范式

p	q	r	p∧q∧¬r	p∧q∧r
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

2.2 析取范式和合取范式

- 只有当极小项的真值指派和它的编码相同时，该极小项的真值才为1。在其他情况下，该极小项的真值均为0。
- 任意两个不同极小项的合取式永假。
- 全体极小项的析取式为永真。

2.2 析取范式和合取范式

- 极大项的编码。
- **n**个变元，有2^n个极大项($n \in I_+$)。

如三个变元**p**、**q**、**r**，其记法如下：

$p \vee q \vee r$	0 0 0	0	记作 M_0
$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	1	记作 M_1
$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	2	记作 M_2
$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	3	记作 M_3
…………			
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	7	记作 M_7

2.2 析取范式和合取范式

定理**2.4** 设m_i和M_i是命题变元p_1, p_2… p_n形成的极小项和极大项，则：

(1) $m_i \land m_j \Leftrightarrow F$, $(i \neq j)$

(2) $M_i \lor M_j \Leftrightarrow T$, $(i \neq j)$

(3) $\lor\ m_i \Leftrightarrow T, (i=0,1,\ldots,2^n-1)$

(4) $\land\ M_i \Leftrightarrow F, (i=0,1,\ldots,2^n-1)$

(5) $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$ $\qquad \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

2.2 析取范式和合取范式

定义**2.5**：设由**n**个命题变元构成的析取范式**(**合取范式**)**中所有的简单合取式**(**简单析取式**)**都是极小项**(**极大项**)**，则称为 主析取范式 **(**主合取范式**)**。

定理**2.5** 任何命题公式都存在着与其等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的。

2.2 析取范式和合取范式

- 在真值表中，使命题公式的真值为**T**的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

证：给定一个命题公式**A**，使其为**T**的真值指派所对应的极小项为m'_1, m'_2,…, m'_k,这些极小项的析取记为**B**，为此要证**A**⇔**B**，即要证**A**与**B**在相同的指派下具有相同的真值。

2.2 析取范式和合取范式

首先对于使**A**为**T**的指派，它对应的极小项为m'_i $(1<=i<=k)$,则因为m'_i为**T**，而且**B**为m'_1, m'_2,…, m'_k的析取，因此**B**为**T**。

对于使**A**为**F**的指派，它对应的极小项(设为m'_j)不包含在m'_1, m'_2,…, m'_k 中。此时因为m'_j是为**T**的，因此m'_1, m'_2,…, m'_k均为**F**，故**B**也为**F**。

因此，使**A**为**T**的指派同样也使**B**为**T**，使**A**为**F**的指派也使**B**为**F**。

所以**A**$\Leftrightarrow$**B**得证。

2.2 析取范式和合取范式

- 一个公式的主析取范式即为令此公式的真值为T的指派所对应的极小项的析取。

- 一个命题公式的真值表是唯一的，因此一个命题公式的主析取范式也是唯一的。

2.2 析取范式和合取范式

$p\wedge q\vee r$的真值表

p	q	r	$p\wedge q\vee r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$p\wedge q\vee r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

2.2 析取范式和合取范式

p	q	$p\vee\neg q$	$\neg(p\wedge q)$	$p\wedge\neg q$	$p\to q$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1

- $p\vee\neg q \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$
- $\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
- $p\wedge\neg q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)$
- $p\to q \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

2.2 析取范式和合取范式

- 用等值演算方法求命题公式主析取范式的方法：

1. 将命题公式化归为与其等值的析取范式
2. 除去永假项，变为最简析取范式
3. 利用添变元的方法，将所有简单合取式变为极小项
4. 合并相同的极小项

2.2 析取范式和合取范式

例：求$(p\wedge(p\rightarrow q))\vee q$的主析取范式

解：原式

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\vee q$

❖-----(1)化为析取范式

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge(p\vee\neg p))$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)$

❖-----(3)添项

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)$

❖-----(4)合并相同最小项

2.2 析取范式和合取范式

例：求出$p\wedge q\vee r$的主析取范式

$$p\wedge q\vee r$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)\vee r\wedge(\neg p\vee p)\wedge (\neg q\vee q)$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(r\wedge\neg p\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg p\wedge q)\vee(r\wedge p\wedge\neg q)\vee(r\wedge p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_6\vee m_7\vee m_1\vee m_3\vee m_5$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

$$\Leftrightarrow\Sigma(1,3,5,6,7)$$

2.2 析取范式和合取范式

$p\wedge q\vee r$的真值表

p	q	r	$p\wedge q\vee r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$p\wedge q\vee r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

2.2 析取范式和合取范式

主析取范式的用途讨论：

1. 求公式的成真与成假赋值。
2. 判断公式类型。
3. 判断两个命题公式是否等值
4. 应用主析取范式分析和解决实际问题。

2.2 析取范式和合取范式

例：某研究所要从3名科研骨干A，B，C中挑选1～2名出国进修，由于工作需要，选派时要满足以下条件：

1. 若A去，则C同去。
2. 若B去，则C不能去。
3. 若C不去，则A或B可以去。

解:设p：派A去；q：派B去；r：派C去。

则$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$

2.2 析取范式和合取范式

经演算可得：

$(p\rightarrow r) \wedge (q\rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p\vee q))$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$

可知选派方案有三种：

1. C去，A，B都不去。
2. B去，A，C不去。
3. A，C去，B不去。

2.2 析取范式和合取范式

主合取范式

- 任何一个命题公式都可求得它的主合取范式
- 一个命题公式的主合取范式是唯一的
- 在真值表中，令命题公式的真值为“F”的指派就对应其主合取范式的一个极大项

2.2 析取范式和合取范式

例:求$p\wedge(p\rightarrow q)\vee q$的主合取范式

原式$\Leftrightarrow p\wedge(\neg p\vee q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg p)\vee(p\wedge q)\vee q$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee q\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(q\vee(p\wedge\neg p))$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$

$\Leftrightarrow\Pi(0,2)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$

p	q	上式
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.2 析取范式和合取范式

讨论：具有**n**个变元的命题公式有多少个不同的主析取范式？

- 对于含有 n 个变元的命题公式，必定可写出2^{2^n}个主析取范式**(**包括**F)**。
- 同理，含有 n 个变元的命题公式，也可写出2^{2^n}个主合取范式**(**包括**T)**。

2.3 联结词的完备集

- “与非”联结词

符号“↑”

$(p\uparrow q)\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)$

p	q	$p\uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.3 联结词的完备集

- $(p \uparrow q) \Leftrightarrow (q \uparrow p)$
- $(p \uparrow p) \Leftrightarrow \neg p$
- $(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \Leftrightarrow p \wedge q$
- $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) \Leftrightarrow p \vee q$
- $p \uparrow (q \uparrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r)$
  $(p \uparrow q) \uparrow r \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \neg r$　　不可结合的
- $p \uparrow T \Leftrightarrow \neg p$
- $p \uparrow F \Leftrightarrow T$

2.3 联结词的完备集

- “或非”联结词

符号：“↓”

$(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

p	q	p↓q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2.3 联结词的完备集

- $p \downarrow q \Leftrightarrow q \downarrow p$　　(可交换的)
- $p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p$
- $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q$
- $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \Leftrightarrow p \wedge q$
- $p \downarrow (q \downarrow r) \Leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee r)$
  $(p \downarrow q) \downarrow r \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r$　　不可结合的
- $p \downarrow F \Leftrightarrow \neg p$
- $p \downarrow T \Leftrightarrow F$

2.3 联结词的完备集

具有二个命题变元命题公式的不同真值表有$2^{2^2}=2^4=16$种

p	q	F	$\downarrow$			$\wedge$			$\leftrightarrow$	$\oplus$	q	p	$\uparrow$	$\rightarrow$	$\vee$		T
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

2.3 联结词的完备集

定义　如果每一个命题公式都等值于一个只含某些联结词的公式，则这一组联结词称为联结词完备集。

定理2.6 **S={¬，∨，∧}**是联接词完备集。

可以证明：**{¬，∨}**；**{¬，∧}**；**{¬，→}**；**{↑}**；**{↓}**均为联结词完备集。

2.3 联结词的完备集

$(p \to q)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ $\{\neg, \vee\}$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ $\{\neg, \wedge\}$

$\Leftrightarrow \neg\neg(p \to q)$ $\{\neg, \to\}$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ $\{\downarrow\}$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$ $\{\uparrow\}$