第十一章：格与布尔代数

- 第一节：格的定义及其性质
- 第二节：分配格、有补格与布尔代数

第十一章：格与布尔代数

第一节：格的定义及其性质

第二节：分配格、有补格与布尔代数

格的定义与性质

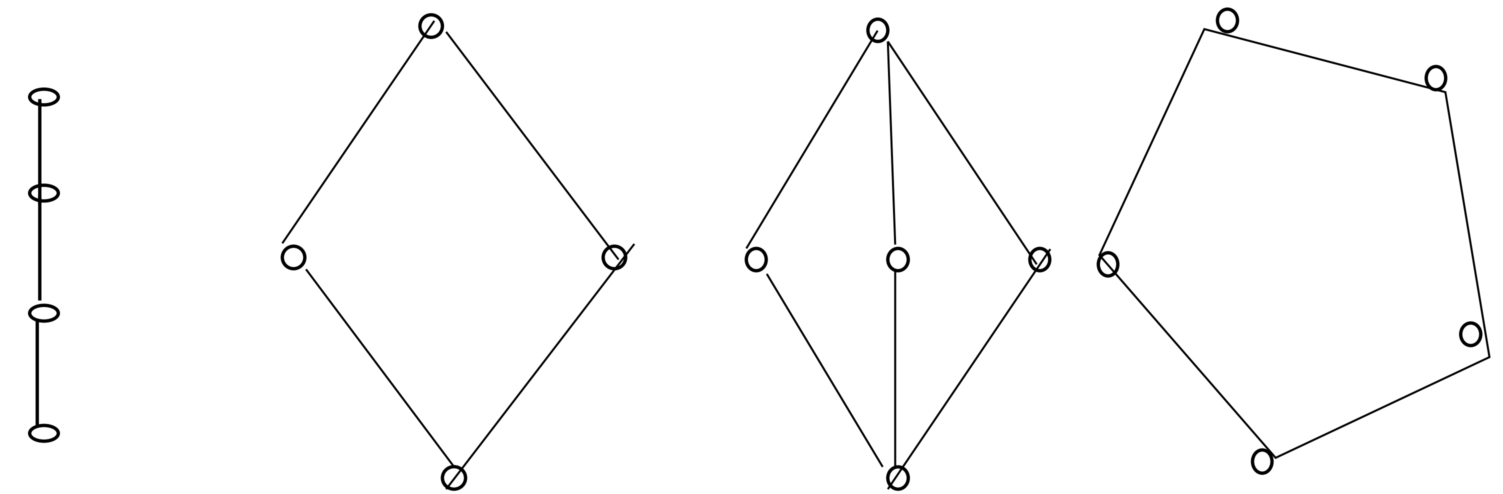
- 格和布尔代数
  - 抽象的代数系统
  - 具有次序关系
- 格
  - 偏序关系格
  - 代数系统格
- 布尔代数
  - 有补分配格

格的定义与性质

定义 格是一个偏序集合**<L,≤>**，其中每一对元素**a,b**∈**L**都拥有一个最小上界和最大下界。

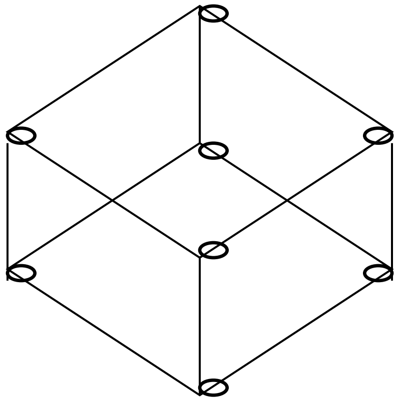
- **a**∧**b**：**a**和**b**的最大下界(**glb**)
- **a**∨**b**：**a**和**b**的最小上界(**lub**)

格的定义与性质

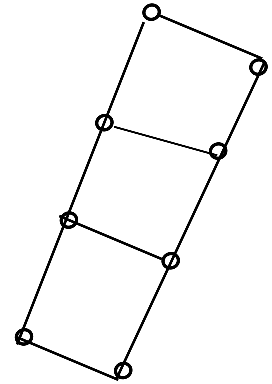


(a) (b) (c) (d)

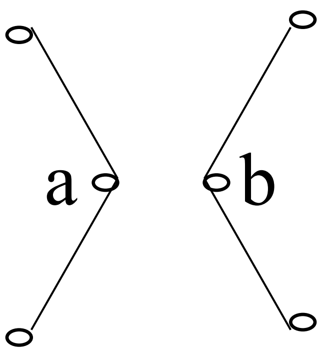
格的定义与性质



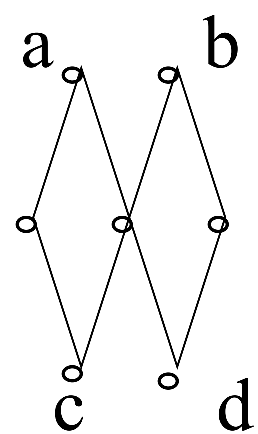
(f)



(g)



(h) 不是格



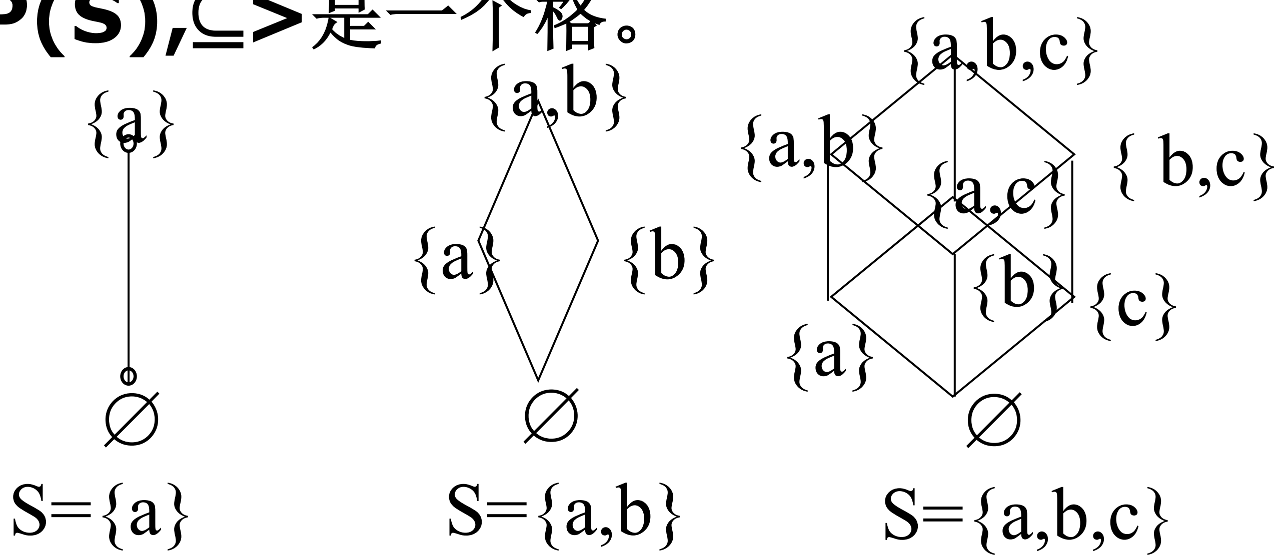
(i)

格的定义与性质

例1:设S是一集合,P(S)是S的幂集,
　则<P(S),⊆>是一个偏序集,$\forall A,B \in P(S)$

- $glb(A,B)=A\cap B\in P(S)$
- $lub(A,B)=A\cup B\in P(S)$

$\therefore$<P(S),⊆>是一个格。



格的定义与性质

例2：Z^+是正整数集合，D是整除关系，$< Z^+$，D>是偏序集，∀a，b∈ Z^+

- glb(a，b)=a,b的最大公约数
- lub(a，b)=a,b的最小公倍数

证明：

- 若c是{a，b}的下界，则c D a，c D b，所以c是a，b的公约数
- 若c是{a，b}的最大下界，则c是a，b的最大公约数
- 反之，同样可证

因此，$<Z^+$，D>是格。因为∀a，b∈Z^+都有最大公约数和最小公倍数。

格的定义与性质

格的性质

（1）自反性：$a \geq a, a \leq a$,；

（2）反对称性：

$a \geq b$ 且 $b \geq a \Rightarrow a = b$；

（3）可传递性：

$a \leq b$ 且 $b \leq c \Rightarrow a \leq c$；

（4）格中任何二个元素均有最小上界和最大下界，并有

$a \vee b \geq a$, $a \vee b \geq b$

$a \wedge b \leq b$, $a \wedge b \leq a$

格的定义与性质

（5）$c \geq a$ 且 $c \geq b \Rightarrow c \geq a \vee b$

$c \leq a$ 且 $c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$

定理　设 $<L, \leq>$ 是一格，用 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别表示最大下界和最小上界运算，对于所有的 $a,b,c \in L$ 有：

（1）交换律：$a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$

（2）结合律：$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

（3）幂等律：$a \vee a = a$，$a \wedge a = a$

（4）吸收律：$a \vee (a \wedge b) = a$

$a \wedge (a \vee b) = a$

格的定义与性质

证明：（2）结合律：$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(a\vee b)\vee c\geq a\vee b\geq a$

$(a\vee b)\vee c\geq a\vee b\geq b$

$(a\vee b)\vee c\geq c$

$\therefore (a\vee b)\vee c\geq b\vee c$　　$\therefore (a\vee b)\vee c\geq a\vee(b\vee c)$，

同理$a\vee(b\vee c)\geq(a\vee b)\vee c$

因为≥的反对称性：$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

（4）吸收律：$a\vee(a\wedge b)=a$

$a\vee(a\wedge b)\geq a$

因为$a\geq a\wedge b$，$a\geq a$。$\therefore a\geq a\vee(a\wedge b)$

格的定义与性质

定理 设$<L, \leq>$是一格，则对于所有的$a,b \in L$有： $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

定理 设$<L, \leq>$是一格，则对于所有的$a,b,c,d \in L$有

- $a \leq b \wedge d \leq c \Rightarrow (a \vee d) \leq (b \vee c)$
- $a \leq b \wedge d \leq c \Rightarrow (a \wedge d) \leq (b \wedge c)$

格的定义与性质

❑ 代数系统格

定义 设$<L,\wedge,\vee>$是一个代数系统，L是一非空集合，$\wedge$和 $\vee$ 是L中的二个二元运算。若$\wedge$和 $\vee$满足交换律，结合律，幂等律，吸收律，则称此代数系统为格。

格的定义与性质

定理 设$<L,\wedge,\vee>$是一个代数系统格，则在L中一定存在一个偏序关系R，对任一$a,b\in L$，

- $a\vee b=lub\{a,b\}$
- $a\wedge b=glb\{a,b\}$

结论：

- 在$<L,\wedge,\vee>$的代数系统格中，可以定义一个L上的偏序关系R(≤)

  $a\le b \Leftrightarrow a\wedge b=a \Leftrightarrow a\vee b=b$

- 在格$<L,\le>$中，可以定义二个运算∧和∨

  $a\vee b=lub\{a,b\}$，$a\wedge b=glb\{a,b\}$

- 偏序集合格和代数系统格之间对应

格的定义与性质

定义　设**<L,**∧**,**∨ **>**是一个格，**H**是**L**的非空子集，如果**H**关于∧**,** ∨运算仍构成格，称**<H,**∧**,**∨**>**是**<L,**∧**,**∨ **>**的子格。

格的定义与性质

定义　设$<L,\wedge,\vee>$和$<S,\wedge,\vee>$是二个格，定义一函数$f:L\to S$。若对任何的$a,b\in L$有$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)$，$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$，

则称f是从$<L,\wedge,\vee>$到$<S,\wedge,\vee>$的格同态。若f为满射函数，则称为满同态；若f为双射函数，则称为格同构。

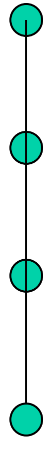
格的定义与性质

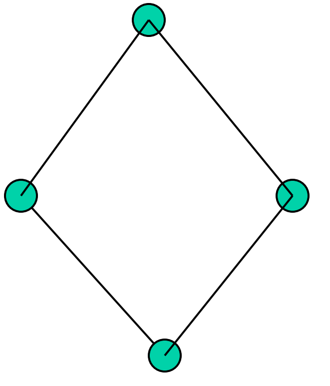
例：

（1）具有一个，二个，三个元素的格分别同构于一，二，三个元素的链；

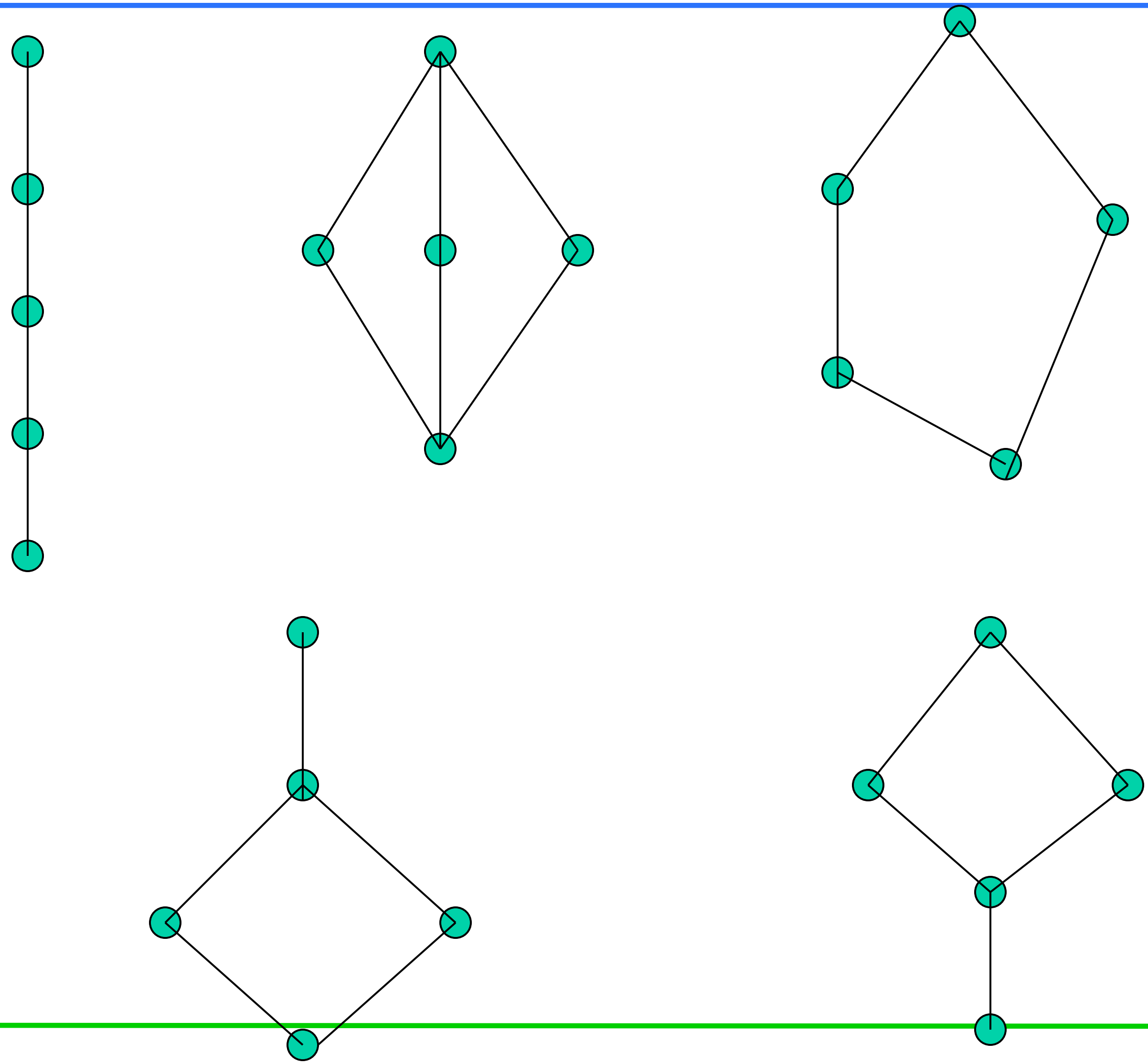
（2）具有四个元素的格分别同构于下面二个格；

（3）具有五个元素的格则一定同构于下页五个格之一；





格的定义与性质



第十一章：格与布尔代数

第一节：格的定义及其性质

第二节：分配格、有补格与布尔代数

分配格、有补格与布尔代数

定义13.7 :设$<L,\wedge,\vee>$是格,如果成立分配律,即$\forall a,b,c\in L$,恒成立

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

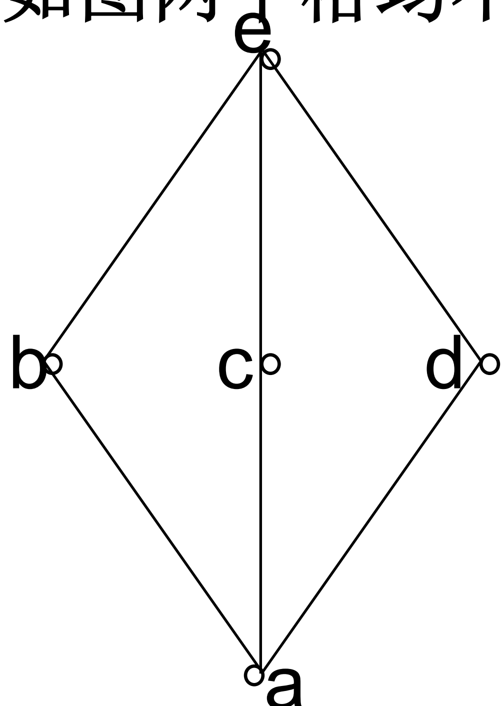
则称$<L,\wedge,\vee>$为分配格。

例　格$<P(S),\subseteq>$是分配格

例　格$<Z^+,D>$是分配格

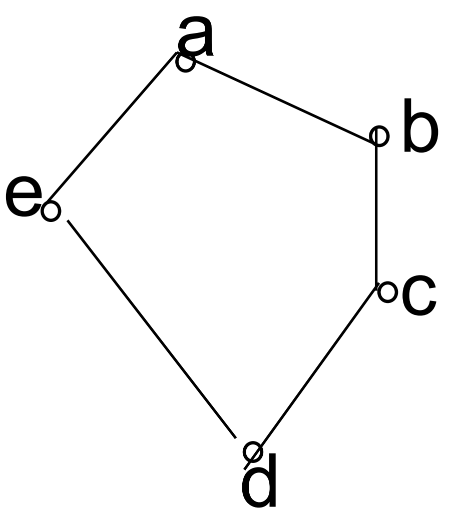
分配格、有补格与布尔代数

例:如图两个格均不是分配格。



钻石格

如b∧(c∨d)和(b∧c)∨(b∧d)



五角格

如c∨(e∧b)和(c∨e)∧(c∨b)

定理 设L是格，则L是分配格当且仅当L中不含与钻石格或五角格同构的子格。

推论 1）小于五元的格都是分配格

2）任何一条链都是分配格

分配格、有补格与布尔代数

定义　如果在格<L, ≤>中存在一个元素a，对于任何元素b，都有a≤b(b≤a)，则称a为格的全下界（全上界），或称为最小元（最大元）

一个格的全下界（全上界）是唯一的

定义　设<L,≤>是格,如果L中有最大元(记为1)和最小元(记为0),则称<L,≤>为有界格,记作<L,∧,∨,1,0>

分配格、有补格与布尔代数

例:$<S_n,D>$是格, S_n是n的所有正因子的集合。是有界格,其中最大元是n,最小元是1,因$\forall x\in S_n$,1Dx,xDn。

注意:$<Z^+,D>$不是有界格

例:$<P(S),\cap,\cup>$,P(S)是集合S的幂集,是有界格,最大元是全集S,最小元是$\varnothing$

例:$<S,\wedge,\vee>$是格,其序关系是$\Rightarrow$,其最大元是永真公式1,最小元是永假公式0,因而其是有界格

分配格、有补格与布尔代数

说明:在格中已成立4个定律①交换律②结合律③吸收律④幂等律。在有界格中又成立两个定律⑤同一律⑥零一律。

定理　在有界格中成立,$\forall a \in L$

同一律$a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a$

零一律$a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1$

证明:因0是最小元,$\forall a \in L, 0 \le a$

$\therefore a \wedge 0 = 0 \quad a \vee 0 = a$

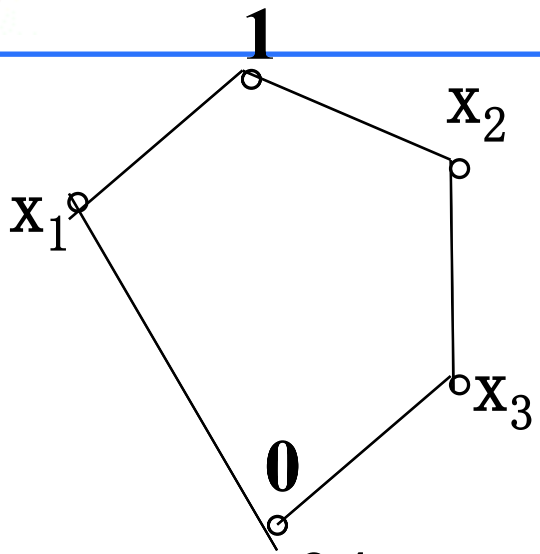
1是最大元,$\therefore a \le 1, \therefore a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$。

分配格、有补格与布尔代数

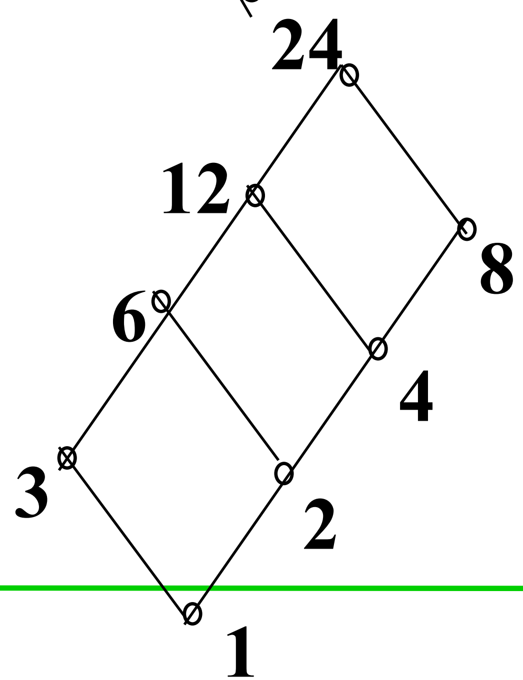
定义 设 $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$ 是有界格, $a\in L$,如果存在元素 $b\in L$ 使得 $a\wedge b=0, a\vee b=1$ 则称 b 为元素 a 的补元素(或称为余元素),记为 a'。

在有界格中有的元素存在补元素,也可能有的元素不存在补元素也可能有的元素存在两个或两个以上元素。

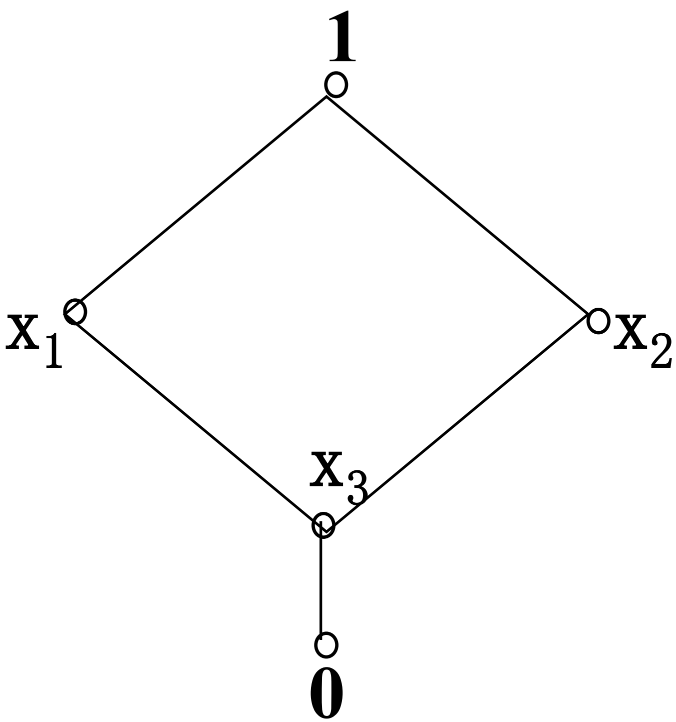
分配格、有补格与布尔代数



x_1的补元有两个x_2,x_3,而,x_3 的补元只有一个是x_1,0和1是互为补元。



在$<S_{24},D>$中,最大元为24,最小元为1,1和24互为补元，3 和 8 互为补元，因 $3 \wedge 8 = 1$, $3+8=24$,2,4,6,12的补元是什么？



在图中的有界格中，**0**和**1**互为补元，

x_1 x_2 x_3的补元是什么？

分配格、有补格与布尔代数

定理 在有界分配格中，如果元素$a\in L$有一个补元，则此补元是唯一的。

证明：假定b和c都是a的补元，则

$$a\wedge b=0=a\wedge c \qquad a\vee b=1=a\vee c$$

由于L是分配格,有

$$b=b\wedge(b\vee a)=b\wedge(c\vee a)$$

$$=(b\wedge c)\vee(b\wedge a) =(b\wedge c)\vee(a\wedge c)$$

$$=(b\vee a)\wedge c =(a\vee c)\wedge c=c$$

定义 如果在一个有界格中，每个元素都至少有一个补元素，则称此格为有补格。

分配格、有补格与布尔代数

定义　如果一个格，既是有补格，又是分配格，则称此格为有补分配格，又称布尔格或**布尔代数**。

布尔代数是有界格,存在最小元记为**0**,存在最大元记为**1**,由于是有补格,每个元素均存在补元,由于是有补分配格,每个元素均存在且有唯一的补元,因而求补元可以看作是一个运算,可以‘把**a**的补元记为**a′**,今后用$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$来表示一个布尔代数。

分配格、有补格与布尔代数

有界格 有补格

同一律
零一律

互补律

格

布尔代数

德·摩根律
双重否定律

结合律 吸收律
交换律 幂等律

分配格

分配律

分配格、有补格与布尔代数

例：

设A是一非空集合,P(A)是A的幂集,可以验证,<P(A),∪,∩,~,∅,A>是个布尔代数,称此为集合代数,其中,补运算~,最小元∅,最大元A。

S是命题公式的全体,则<S,∨,∧,¬,0,1>是一个布尔代数,称之为命题代数。其中,补运算是¬,最小元是永假式0,最大元是永真式1。

分配格、有补格与布尔代数

定义13.13：设B是至少含有两个元素的集合,∧ ,∨是定义在B上的两种运算，形成一个代数系统<B, ∧ ,∨ >,如果∀a,b,c∈B,满足如下：

H1:a∧b=b∧a,a∨b=b∨a(交换律)

H2:a∧(b∨c)=a∧b∨a∧c,a∨(b∧c)=(a∨b)∧(a∨c)(分配律)

H3:B中有元素0和1,

对∀a∈B,a∧1=a,a∨0=a (同一律)

H4:∀a∈B,有一□a∈B,
使a∨□a=1,a∧□a=0(互补律)

则<B,∧,∨ ,□ ,0,1>是布尔代数。

分配格、有补格与布尔代数

例：设S_{110}={1,2,5,10,11,22,55,110}是110的所有因数的集合,令glb,lub是最大公约数和最小公倍数运算。简记glb—∧,lub—∨

证明<S_{110},∧,∨>是一个布尔代数。

证明:

110=1×2×5×11质因子分解式中因子是不重复的。记(x)为x分解的质因数的集合,例(55)={1,5,11}。

<S_{110},D>的哈斯图与<S_{30},D>,<P(A),⊆>,A={a,b,c}是完全相同的。

容易验证,交换律显然成立。

分配格、有补格与布尔代数

$\forall x,y,z \in S_{110}$,

$x \wedge (y \vee z) = (x) \cap ((y) \cup (z))$

$= ((x) \cap (y)) \cup ((x) \cap (z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

同理$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

分配律成立。

显然1是S_{110}的最小元,110是S_{110}的最大元。

$x \wedge 110 = x, x \vee 1 = x$,同一律成立。

分配格、有补格与布尔代数

记$\neg x=110/x$,

因110中质因数分解中质因数不重复。

故$\neg x$与x的质因数没有重复的。

$\therefore\ \neg x \wedge x=1,\ \neg x \vee x=(\neg x)\cup(x)=110$

互补律是成立,

$\therefore$ $<S_{110},\wedge,\vee,\neg,1,110>$是布尔代数。

分配格、有补格与布尔代数

设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数,则成立如下运算律,

(1)交换律 $a\wedge b=b\wedge a, a\vee b=b\vee a$

(2)结合律 $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$,

$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

(3)幂等律 $a\wedge a=a, a\vee a=a$

(4)吸收律 $a\wedge(a\vee b)=a$,

$a\vee(a\wedge b)=a$

(5)分配律

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c), a\wedge(b\vee c)=a\wedge b\vee a\wedge c$

(6)同一律 $a\vee 0=a, a\wedge 1=a$

(7)零一律 $a\vee 1=1, a\wedge 0=0$

分配格、有补格与布尔代数

(8)互补律 $a \vee \neg a = 1, a \wedge \neg a = 0$

(9)双重否定律 $\overline{\overline{a}} = a$

(10)德·摩律 $\overline{a \vee b} = \neg a \wedge \neg b, \overline{a \wedge b} = \neg a \vee \neg b$

例如：

布尔代数中**a,b**∈**B**,如**a**≤**b**,则以下正确的是

①**a**∧□**b=0**　②□**a**∧**b=0**

③**a**∨□**b=1**　④□**a**∨**b=1**

那么,用集合代数中,已知**A**⊆**B**则

①**A**∩□**B=**∅成立　②□**A**∩**B=**∅不成立

③**A**∪□**B=U**不成立　④□**A**∪**B=U**成立

所以结论中①,④成立

分配格、有补格与布尔代数

定义 设$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$是一个布尔代数,H是B的一个子集,若H包含0和1，且H对$\wedge$, $\vee$，’，运算封闭,则称H是B的子布尔代数。

子布尔代数也是布尔代数。

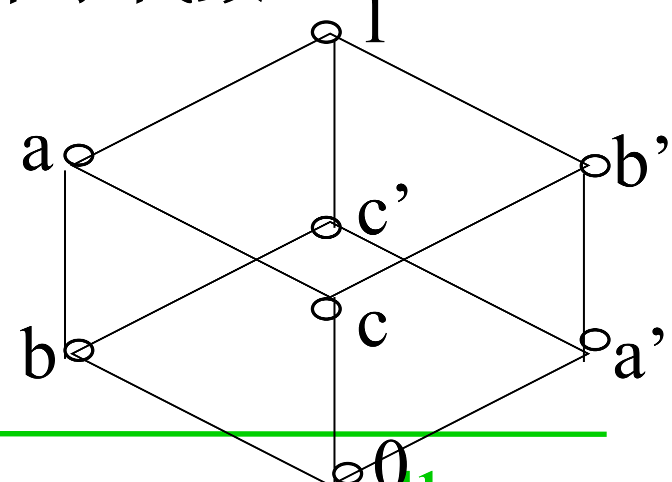
分配格、有补格与布尔代数

例：考察下图所示的布尔代数

（1）**S={a,a′,0,l},则<S,∧,∨,′,0,1>** 是子布尔代数，当然也是布尔代数；

（2）**S={b,c′,a′,0}**，则**<S,∧,∨,′,0,c′>** 是布尔代数，但不是子布尔代数；

（3）**S={a,b′,0,1}**，既不是布尔代数，也不是子布尔代数。



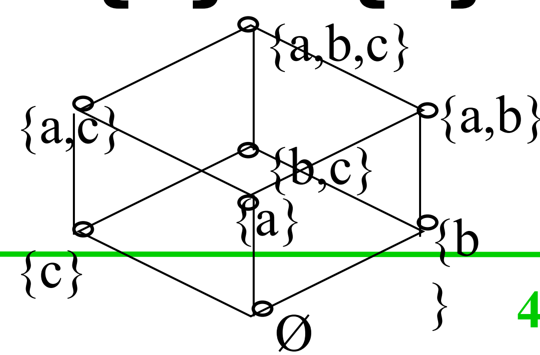
分配格、有补格与布尔代数

例：**<p(S),∩,∪, ~ ,Ø,S>**，其中**S={a,b,c}**，在这个布尔代数中的元素分三种情况：

（ i ）界：全上界**S**，全下界**Ø** ；

（ ii ）**{a},{b},{c}**单个元素集合的元素；

（iii）二，三个元素作为集合的元素，但它们均可用单个元素的集合的元素来表述：**{a,b}={a}** ∨**{b} ,{a,c}={a}** ∨**{c}, {b,c}={b}** ∨**{c}, {a,b,c}={a}** ∨**{b}** ∨**{c}**



分配格、有补格与布尔代数

定义　设a，b是一个格中的两个元素，如果$b \le a$且$b \neq a$，即$b < a$，并且在此格中再没有别的元素c，使得$b < c$和$c < a$，则称此元素a覆盖元素b

定义　设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$是一个布尔代数，$a \in B$，如果a覆盖0，则称元素a是该布尔代数的一个原子

分配格、有补格与布尔代数

定理　设<B,∧,∨,′,0,1>是一个有限布尔代数，S是此代数中的所有原子的集合，则<B,∧,∨,′,0,1>同构于幂集代数<P(S),∩,∪,~,Ø,S>

分配格、有补格与布尔代数

推论

a)<**B**,∧,∨,’,**0**,**1**>与<**p(S)**,∩,∪,~,**Ø**,**S**>同构，**|p(S)|=2**$^{|s|}$所以，**|B|=2**$^{|s|}$，故任一有限布尔代数载体的基数是**2**的幂。

b)任一有限布尔代数和它的原子集合**S**构成的幂集集合代数<**p(S)**,∩,∪,~,**Ø**,**S**>同构，但后者又与任一基数相同的幂集集合代数同构，故具有相同载体基数的有限布尔代数都同构。

习题

- 设S_n是正整数n的所有正因子构成的集合。D表示整除关系。
- 试画出$<S_{12}$，D>和$<S_{30}$，D>哈斯图，并判断是否有补格？是否布尔代数？为什么？

- 设B是布尔代数，$\forall a,b,c\in B$，若$a\le c$，证明 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$。

- 设E={a, b, c, d}，S_1={a, b}，S_2={c, d}，B={∅, S_1, S_2, E}，判断$<B, \cap, \cup>$是什么类型的代数系统并说明原因