第七章：二元关系

- 第一节：有序对与笛卡儿积
- 第二节：二元关系
- 第三节：关系的运算
- 第四节：关系的性质
- 第五节：关系的闭包
- 第六节：等价关系与划分
- 第七节：偏序关系

第七章：二元关系

7.6 等价关系与划分

- 等价关系
  - 自反的
  - 对称的
  - 可传递的
- 例
  - 实数(或I、N集上)集合上的“=”关系
  - Δ集合上的相似关系
  - 全集上集合的相等关系
  - 命题集合上的命题等价关系

7.6 等价关系与划分

例：设$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$R=\{<x,y>|x,y\in X\wedge(x-y)$可被3整除$\}$

试证明R是等价关系，画出R的关系图，列出R的关系矩阵。

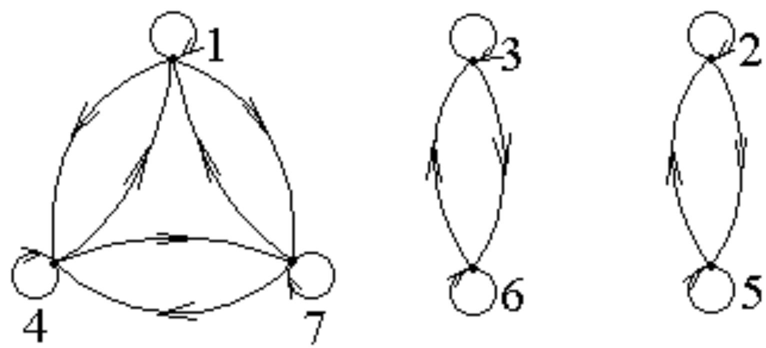
解

(1)$R=\{<1,1><1,4><1,7><2,2><2,5><3,3><3,6><4,1><4,4><4,7><5,5><5,2><6,6><6,3><7,7><7,4><7,1>\}$

(2) R的关系矩阵

$$M_R = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}$$

(3) 的关系图



R

- **R满足自反、对称和可传递的**

7.6 等价关系与划分

- 定义 设**k**是一个正整数而**a,b**∈**Z**。若对于某个整数**n**，有**(a-b)=n×k**，称**a**和**b**是模**k**等价，记作：**a≡b(mod k)**。

- 定理：任何集合**X**⊆**Z**（**Z**的任何子集**X**）上的模**k**等价，是一个等价关系。

7.6 等价关系与划分

- 定义 设R是X集合上的等价关系，对于任何$x \in X$，规定集合$[x]_R \subseteq X$：
  - $[x]_R = \{y \mid y \in X \wedge yRx\}$

$[x]_R$是由$x \in X$生成的R等价类, x为等价类$[x]_R$的表示元素。

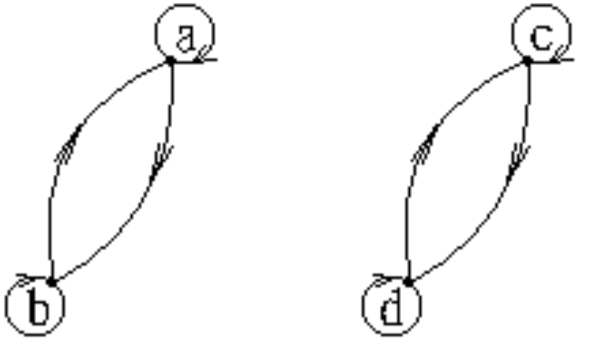
7.6 等价关系与划分

❑讨论

- ❖等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq X$ （$[x]_R$是X的子集）
- ❖$[x]_R$中的元素是在等价关系R中，所有与x具有等价关系的元素所组成的集合
- ❖在等价关系中的关系图中，一个最大连通子图中的点就是一个等价类

7.6 等价关系与划分

- 例：
  - **X={a,b,c,d}**
  - **R={<a,a><b,b><a,b><b,a><c,c><d,d><c,d><d,c>}**
  - **$[a]_R$ ={a,b}= $[b]_R$**
  - **$[c]_R$ ={c,d}= $[d]_R$**



7.6 等价关系与划分

- 例：设X=N，m=3
  - R={<x,y>|x∈X∧y∈Y∧(x-y)可被3整除}
- 等价类
  - $[0]_R$ ={0，3，6，9…}
  - $[1]_R$ ={1，4，7，10…}
  - $[2]_R$={2，5，8，11…}

7.6 等价关系与划分

- **定理** 设X是一个集合，R是X上的等价关系，aRb当且仅当$[a]=[b]$
- **证明：**
  - 充分性，因为$a\in[a]=[b]$,即$a\in[b]$ ，所以aRb。
  - 必要性，已知aRb，考虑$[a]$的任意元素x，有xRa。根据R的传递性，有xRb，因此$x\in[b]$。证明$[a]\subseteq[b]$。类似可证明$[b]\subseteq[a]$，所以$[a]=[b]$。证毕。

7.6 等价关系与划分

- 定理 设**X**是一个集合，**R**是**X**上的等价关系，则对于所有**a,b**∈**X**，或者**[a]=[b]**，或者 **[a]**∩**[b]=Ø**。

- 定理 设**R**是集合**A**上的等价关系，

  则 $A=\bigcup_{x\in A}[x]$

7.6 等价关系与划分

- 商集
  - R是X上的等价关系，R的所有等价类构成的集合为商集
  - 记为X/R
- 例：X为全班同学的集合，$|X|=n$，($n\in N$)
  - 按指纹的相同关系R_1是一个等价关系
  - $X/R_1=\{[x_1]_{R1},\cdots[x_n]_{R1}\}$
  - 同姓关系R_2是一等价关系
  - $X/R_2=\{[张], [李], \ldots\}$

7.6 等价关系与划分

- 定义　给定一非空集合S，设非空集合族A={A_1, A_2,… A_m},如果有：

（1）$A_i \cap A_j = \Phi$　　$A_i = A_j$　或（i,j=1,2,…,m）

（2）$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$

称集合A是集合S的一个划分

7.6 等价关系与划分

- 例：$S=\{a,b,c\}$，下列A_i均为S的一个划分
  - ❖$A_1=\{\{a\},\{b,c\}\}$

    $\therefore |A_1|=2$（秩）
  - ❖$A_2=\{\{a,b\},\{c\}\}$

    $\therefore |A_2|=2$（秩）
  - ❖$A_3=\{\{a,c\},\{b\}\}$

    $\therefore |A_3|=2$（秩）
  - ❖$A_4=\{\{a\},\{c\},\{b\}\}$，秩为3
  - ❖$A_5=\{\{a,b,c\}\}$，秩为1

7.6 等价关系与划分

- 定理 **X**是一非空集合，**C**是**X**的一个划分，$\mathbf{C=\{S_1, S_2,\dots S_m\}}$，下述关系必定是一个等价关系

$$R=\{<x,y>\mid \exists S_i(S_i\in C\wedge x\in S_i\wedge y\in S_i)\}$$

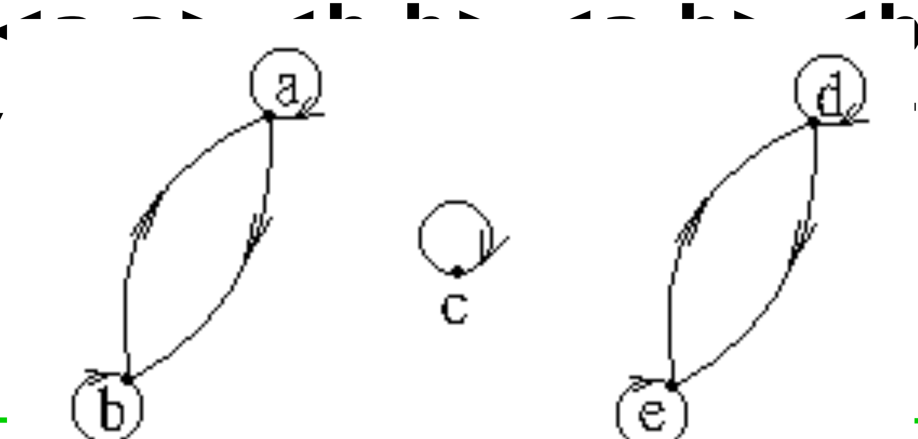
- 定理 设**X**是非空集合，**R**是**X**上的等价关系。**R**的等价类集合$\mathbf{\{[a]R|a\in X\}}$是**X**的划分。

7.6 等价关系与划分

- 例
  - X ={a,b,c,d,e}
  - C={{a,b},{c},{d,e}}

  对应划分C的等价关系为

  - R={a,b}×{a,b}∪{c}×{c}∪{d,e}×{d,e}
    ={<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>,
    <d,

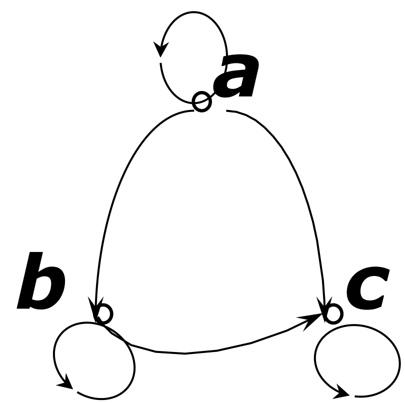


第七章：二元关系

- 第一节：有序对与笛卡儿积
- 第二节：二元关系
- 第三节：关系的运算
- 第四节：关系的性质
- 第五节：关系的闭包
- 第六节：等价关系与划分
- **第七节：偏序关系**

7.7 偏序关系

- 偏序关系
  - 自反性
  - 反对称性
  - 传递性
  - 记作≤



- 例
  - **A＝{a,b,c}**
  - **R＝{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>, <b,c>,<c,c>}**
  - 偏序关系

7.7 偏序关系

- 例 A是非零自然数集,D_A是A上的整除关系。
  - $\forall x \in A$, x能整除x $\therefore D_A$具有自反性。
  - $\forall x,y \in A$,如x能整除y,且y能整除x,则$x=y$。

    $\therefore$ D_A具有反对称性。
  - $\forall x,y,z \in A$,如$<x,y> \in D_A$,$<y,z> \in D_A$,即x能整除y,y能整除z,则x能整除z,$<x,z> \in D_A$

    $\therefore$ D_A具有传递性。
- D_A是A上的偏序关系。

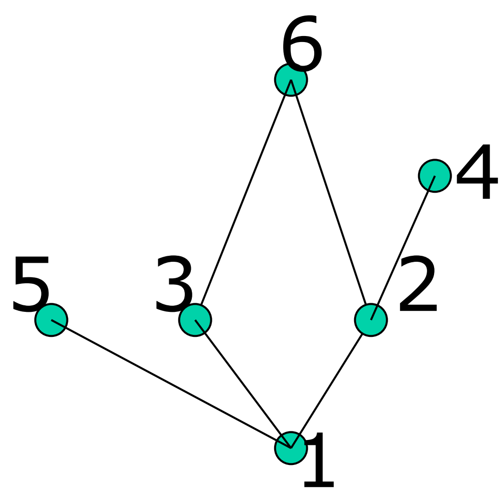
7.7 偏序关系

❑ 哈斯图

- 所有结点的自回路均省略
- 省略所有弧上的箭头,适当排列A中元素的位置,如a≤b,则a画在b的下方。
- 如a≤b,b≤c,则必有a≤c,a到b有边,b到c有边,则a到c的无向弧省略

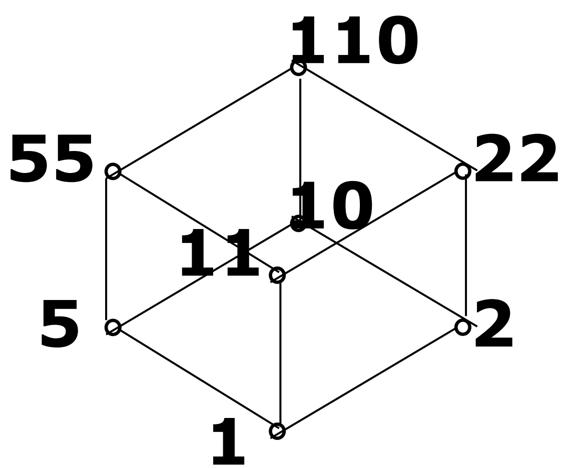
7.7 偏序关系

- 例 画出下列偏序集的哈斯图。
  - $<\{1,2,3,4,5,6\},D_A>$
  - $D_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<6,6>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>,<2,4>,<2,6>,<3,6>\}$



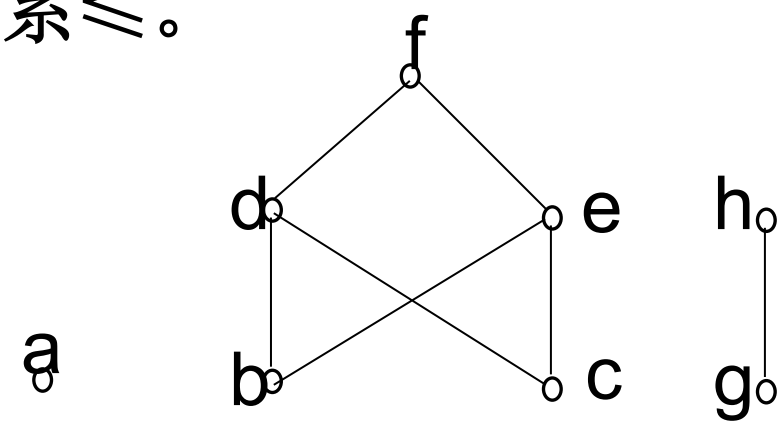
7.7 偏序关系

- S_{110}={1,2,5,10,11,22,55,110}上的整除关系D是偏序关系,哈斯图:



7.7 偏序关系

- 例 已知偏序集$<A,\leq>$的哈斯图,写出集合A和关系≤。



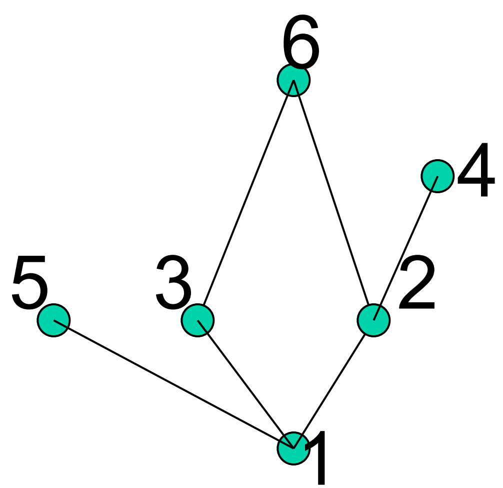
- 解:A＝{a,b,c,d,e,f,g,h}
- $\leq=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

7.7 偏序关系

- 定义 设$<A,\leq>$是偏序集,集合$B\subseteq A$
  - 如存在元素$b\in B$,使得$\forall a\in B$,均有$a\leq b$,则称b为B的最大元素(最大元)
  - 如存在元素$b\in B$,使得$\forall a\in B$,均有$b\leq a$,则称b为B的最小元素(最小元)
- 说明
  - 如果A的子集B存在最大(小)元素,则最大(小)元素是唯一的
  - 最大(小)元可能不存在

7.7 偏序关系

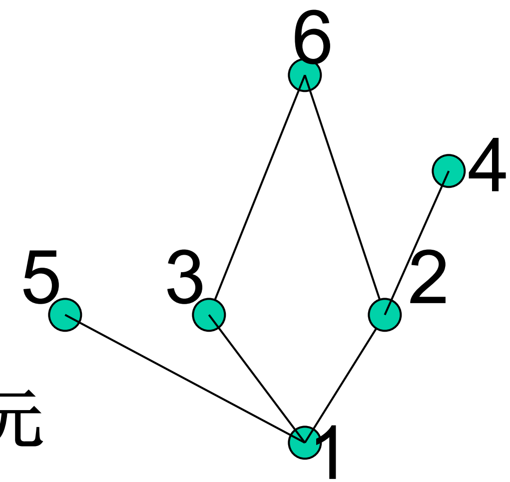
例:**A＝{1,2,3,4,5,6},D**是整除关系**,**哈斯图为



A中不存在最大元

7.7 偏序关系

- 定义 设$<A,\le>$是偏序集,$B\subseteq A$
  - 若存在元素$b\in B$,$\forall a\in B$,如$b\le a$,则$a=b$,称b为B的极大元。
  - 若存在元素$b\in B$,$\forall a\in B$,如$a\le b$,则$a=b$称b为B的极小元。



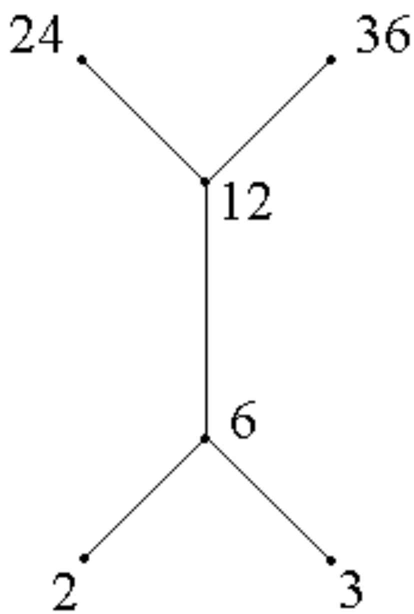
- 说明
  - 极大元未必是最大元
  - 极大元未必是唯一的
  - 如果B是有限集,则B必存在极大元
  - 最大元就是极大元

7.7 偏序关系

- 定义 设〈A,≤〉是一个偏序集合,B⊆A
  - 若对每个a∈B,有a≤b,称b∈A是B的上界
  - 若对每个a∈B,有b≤a,称b∈A是B的下界
- 说明
  - 上下界不一定唯一

7.7 偏序关系

- 例〈P, D_A〉,P={2,3,6,12,24,36}



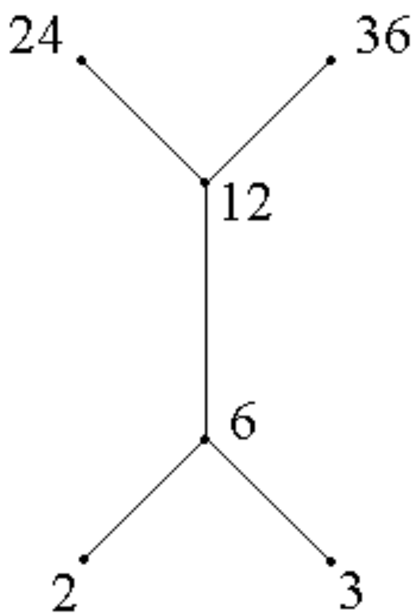
Q	上界	下界
P		
{2,3}	6,12,24,36	
{2,3,6}	6,12,24,36	
{6,12}	12,24,36	2,3,6
{6,12,24,36}		2,3,6

7.7 偏序关系

- 定义 设〈A，≤〉是一个偏序集合，有$B \subseteq A$
  - 若$q \in A$是B的上界，对于B的每一个上界q'都有$q \leq q'$，称q是B的**最小上界**
  - 若$q \in A$是B的下界，对于B的每一个下界q'都有$q' \leq q$，称q是B的**最大下界**
- 说明
  - 最小上界或最大下界可能不存在
  - 若存在最小上界或最大下界，是唯一的

7.7 偏序关系

例:〈P, D_A〉 ,P={2,3,6,12,24,36}



Q	LUB	GLB
P		
{2,3 }	6	
{2,3,6 }	6	
{6,12 }	12	6
{6,12,24,36 }		6

7.7 偏序关系

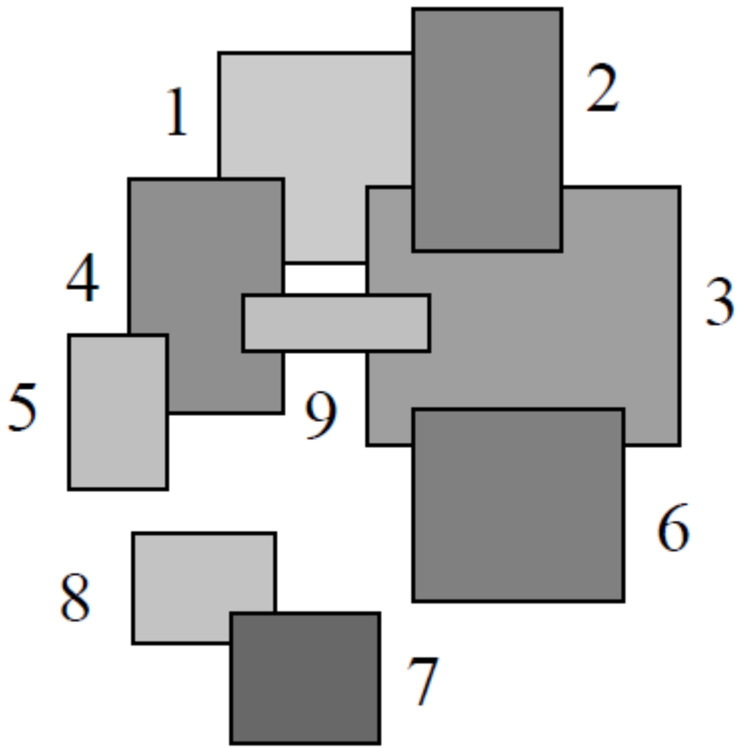
- 定义 设**R**是**A**上的偏序关系,若∀**a**,**b**∈**A**,则**a**≤**b**和**b**≤**a**,两者必居其一,则称**R**为**A**上的全序关系,或称线序关系。

- 例 实数上的≤,≥关系是全序关系

7.7 偏序关系

- 可以在一个非空有限的偏序集合**<A,≤'>**上构造出一个线序集合**<A,≤>**，使得每当**a≤'b**有**a≤b**，方法如下：
  - 选取**A**的极小元**x**，使**x**是**<A,≤>**列表表示中的第一个元素
  - 对子集**A-{x}**重复这一过程，每次一个新的极小元素被找到，它在**<A,≤>**的列表表示中成为下一个元素
  - 重复这一过程，直到**A**的元素被抽完

7.7 偏序关系
Partial Orderings



- Then 1*R*2, 1*R*4, 1*R*3, 4*R*9, 4*R*5, 3*R*2, 3*R*9, 3*R*6, 8*R*7.