学号________ 姓名________

密 封 线

[redacted]考试卷 A 卷

仅供参考

课程名称	几何与代数（B）	考试学期	12-13-2	得 分	
适用专业	电类各专业	考试形式	闭 卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. （30%）填空题

1. 若对任意数x,y，矩阵A满足$(x,y)A=(y,x,x+y)$，则$A=$ $\underline{\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}$；

2. 若2阶方阵$A=(\alpha,\beta)$可逆，$B=(3\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$，则$A^{-1}B=$ $\underline{\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}}$；

3. 矩阵$A=\begin{pmatrix}5&6&9\\8&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$的第一行各元素的代数余子式之和等于____$\underline{0}$____；

4. 过点$A(1,0,1),B(1,2,0),C(0,1,3)$的平面的方程是___$\underline{5x+y+2z=7}$；

5. R^3的子空间$V=\{(x,y,z)\mid x+y-z=0\}$的维数$\dim V=$____$\underline{2}$____；

6. 曲线$\begin{cases}z=2x^2+y^2\\x+y-z=-1\end{cases}$在$xy$平面上的投影曲线的方程为$\underline{\begin{cases}2x^2+y^2-x-y=1\\z=0\end{cases}}$；

7. 若方程$x^2+py^2+pz^2+2xy+2xz=1$表示椭球面，则p的取值范围是$\underline{p>2}$；

8. 若矩阵$\begin{pmatrix}1&3\\0&x\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}5&0\\6&y\end{pmatrix}$相似，则$(x,y)=$___$\underline{(5,1)}$________；

9. 已知α是实三维列向量，且$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则$\alpha$的长度$\|\alpha\|=$_$\underline{\sqrt{3}}$_；

10. 假设A,B都是$n\times n$矩阵，则下述4个断言中正确的命题的个数为__$\underline{3}$__；

（1）若$AB=O$，则$A=O$或$B=O$；（2）若$AB=O$，则$|A|=0$或$|B|=0$；
（3）若$AB=O$，则$A=O$或$|B|=0$；（4）若$AB=O$，则$|A|=0$或$B=O$。

注：由$AB=O$，得$|AB|=0$，即$|A||B|=0$，则$|A|=0$或$|B|=0$；若$|B|\neq 0$，则B可逆，由$AB=O$可得$A=O$；若$|A|\neq 0$，则同理可得$B=O$.

二. （8%）计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ n & & & & 1 \end{vmatrix}$。

解：$D=\begin{vmatrix} 1-2-3-\cdots n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$ ……………………………………………

$=2-\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……………………………………………………

三. （12%）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，如果矩阵$P,Q$满足$PA=B$，$PQ=C$。求矩阵$Q$。

解：$P=BA^{-1}$，$Q=P^{-1}C=AB^{-1}C$ ……………………………………………

$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………

$Q=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………

四. （15%）已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\p\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\p\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-p\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\4\\q\end{pmatrix}$。

1. 当p,q取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是这个向量组的极大线性无关组？

解;$D=\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=(p+1)^2(p-2)$ ……………………………………

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关….

当且仅当$D\neq 0$，即$p\neq -1,2$，q可以任意取值。……………………………

2. 当p,q取何值时，α_1,α_2是这个向量组的极大线性无关组？并在这时将α_3,α_4表示成α_1,α_2的线性组合。

若α_1,α_2是极大无关组，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，故$p=-1\ or\ 2$。

当$p=-1$ 时，α_1,α_2线性相关，故$p\neq -1$。

当$p=2$时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关。……………………………

又$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&q-5\end{pmatrix}$ ……………………………

所以，此时$q=5$且 $\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2$ ……………………

五. （10%）已知平面σ的方程为$6x+3y+2z+21=0$；球面S的球心在点$M(1,2,-1)$，半径为1；平面π与σ平行，且与S相切。求π的方程。

解：设π的方程是 $6x+3y+2z+D=0$ ……………………………………

故 $\frac{1}{7}\left|6\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot(-1)+D\right|=1$ ……………………………………

即 $D=-3\ or\ -17$ ……………………………………

所以，π的方程是 $6x+3y+2z-3=0$

或$6x+3y+2z-17=0$ ……………………………………

六. （15%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ k & -1 & -k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$ 与对角阵相似。求参数 k 的值，并求可逆矩阵 P 及对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$。所以，$A$ 的特征和值是 1，-1（二重）。………………

如果 A 相似于对角阵，则相应于特征值 -1，A 有两个线性无关特征向量，

即 $r(A+E)=1$，于是 $k=0$。………………………………………………………………

这时，$(A+E)x=0$ 有基础解系：$(1,-2,0)^T,(0,1,1)^T$；

$(A-E)x=0$ 有基础解系：$(0,2,1)^T$ ……………………………………………………

故，若令 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

则 $\Lambda=P^{-1}AP=diag\{-1,-1,1\}$ ……………………………………………………………

七. （10%，第一小题 3%，第二小题 7%）证明题：

1. 若 2×2 矩阵 A 的迹 $tr(A)=2$，且 A 不与对角阵相似，证明 A 的行列式 $|A|=1$。

证：因为 A 不与对角阵相似，所以，两个特征值相同。……………………………………
又 A 的迹 $tr(A)=2$，所以，这两个特征值都为 1.
因为行列式是特征值之积，故 $|A|=1$。…………………………………………………………

2. 已知 n 维实非零列向量 α,β 相互正交。证明：矩阵 $A=\alpha\alpha^T-\beta\beta^T$ 的秩 $r(A)=2$。

证：因为 $A\alpha=\alpha, A\beta=-\beta$，所以，$\alpha,\beta$ 是 A 的特征向量，$1,-1$ 是特征值。…………

又 A 是实对称的，所以，A 相似于对角阵。…………………………………………………

设 A 相似于对角阵 Λ，则 $1,-1$ 都是 Λ 的对角元，因此，$r(\Lambda)\ge 2$，

故 $r(A)=r(\Lambda)\ge 2$。……………………………………………………………………………

∵ $A\alpha=(\alpha^T\alpha)\alpha$，$A\beta=-(\beta^T\beta)\beta$，所以，$\alpha,\beta$ 是 A 的特征向量，$\alpha^T\alpha$，$-\beta^T\beta$ 是特征值。又 A 是实对称的，所以 A 相似于对角阵。设 A 相似于对角阵 Λ，则 Λ 的对角元包含 $\alpha^T\alpha$，$-\beta^T\beta$（以及 0，$n\geq 3$），因此，$r(\Lambda)\geq 2$，故 $r(A)=r(\Lambda)\geq 2$。