第九章：代数系统

第一节：二元运算及其性质

第二节：代数系统

第三节：代数系统的同态与同构

第九章: 代数系统

- 代数结构
  - 用抽象的方法研究集合上的关系和运算
  - 对程序理论,数据结构,编码理论的研究和逻辑电路的设计具有指导意义
- 代数(代数结构,代数系统)
  - 定义有若干运算的集合

- 代数由3部分组成
  - 一个集合，代数的载体
  - 定义在载体上的运算
  - 载体的特异元素，叫做代数常数。
- 代数用载体，运算和常数组成的n重组表示

第九章：代数系统

第一节：二元运算及其性质

第二节：代数系统

第三节：代数系统的同态与同构

9.1二元运算及其性质

- 二元运算
  - 映射f: S×S→S称为S上的一个二元代数运算
  - 通常用算符*，·，+，×表示
- 例: f是A上的二元运算，即f是A×A→A的映射
  - ∀x,y∈A，f(<x,y>)=z∈A
  - 用算符表示为x*y=z
- 映射有存在性和唯一性的要求
  - 存在性，∀x,y∈A，x*y要有结果∈A
  - 唯一性，∀x,y∈A，x*y只能有一个结果∈A

9.1二元运算及其性质

- 一元运算
  - 映射f: A→A称为A上的一个一元代数运算

9.1二元运算及其性质

- 例：在Z^+上定义运算：*,+, $\forall x,y\in Z^+$
  $x*y$=x,y的最大公约数，$x+y$=x,y的最小公倍数
  - 6*8=2, 6+8=24,
  - 12*15=3, 12+15=60
- 例：在R上求平方根运算不是代数运算。
  -9不存在平方根，存在性不满足
  9有两个平方根，3，-3，唯一性不满足
- 问：在R^+上求平方根运算是否是R^+上的一元代数运算？

9.1二元运算及其性质

例：

- 自然数集合上的乘法是**N**上的二元运算。
- 整数集合**Z**上的加法、乘法、减法是**Z**上的二元运算，但除法不是**Z**上的代数运算。
- 集合的交，并运算是幂集上的二元运算，补是幂集上的一元运算。
- 合取，析取，蕴含，等值、异或是命题公式集合上的二元运算，否定是一元运算。

9.1二元运算及其性质

用运算表表示

a_i	$*\ a_i$
a	b
b	a
c	c

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	c	c

9.1二元运算及其性质

例：设**S**＝**{1,2}**,给出**P(S)**上的运算**~**和⊕运算表，**S**为全集合

a_i	$\sim a_i$
Φ	{1,2}
{1}	{2}
{2}	{1}
{1,2}	Φ

⊕	Φ	{1}	{2}	{1,2}
Φ	Φ	{1}	{2}	{1,2}
{1}	{1}	Φ	{1,2}	{2}
{2}	{2}	{1,2}	Φ	{1}
{1,2}	{1,2}	{2}	{1}	Φ

9.1二元运算及其性质

- 交换律
  - 对于任意的x，y∈S，有x*y=y*x
- 结合律
  - 对于任意的x,y,z∈S，有 (x*y)*z=x*(y*z)
- 幂等律
  - 对于任意的x∈S都有x*x=x

9.1二元运算及其性质

分配律

- 任意的x，y，z∈S，有
- $x*(y\odot z)=(x*y)\odot(x*z)$　左分配律
- $(y\odot z)*x=(y*x)\odot(z*x)$　右分配律

吸收律

- 对于任意的x，y，z∈S，有
- $x*(x\odot y)=x$
- $x\odot(x*y)=x$

9.1二元运算及其性质

幺元

- 对一切x∈A，有$e_L * x=x$（或$x * e_r =x$）
- 称e_L（e_r）是关于运算*的一个左幺元（右幺元）
- 若e既是左幺元，又是右幺元，e是关于运算*的幺元
- e也可记为1，称单位元

9.1二元运算及其性质

- 实数集上加法运算，0是幺元；乘法运算则1是幺元
- 幂集P（A）上的∪运算∅是幺元，而∩运算则A是幺元。
- 例：实数集R上定义运算$\forall a,b\in R$，$a*b=a$

  不存在左幺元，使得$\forall b\in R$，$e_L*b=b$，而对一切$a\in R$，$\forall b\in R$，有$b*a=b$，

$\therefore$该代数系统不存在左幺元

但R中的每一个元素a都是右幺元

9.1二元运算及其性质

定理： 若1_l和1_r分别是S上对于*的左幺元和右幺元,那么$1_l=1_r$，这个元素就是幺元。

推论：一个二元运算的幺元是唯一的

9.1二元运算及其性质

定义：

设∗是A上的二元运算，如果存在元素0_L(或0_r)∈A，使得对一切x∈A，

均有$0_L * x = 0_L$(或$x * 0_r = 0_r$)

则称0_L(0_r)是A中关于运算∗的一个左零元(右零元)若元素0既是左零元，又是右零元，则称0是A中关于运算∗的一个零元

9.1二元运算及其性质

- 在实数集合**R**上,对乘法运算而言,**0**是零元
- 在**P(A)**中,对∪而言,**A**是零元；对∩而言,∅是零元
- **{**命题**}**中,对∨而言,**T**是零元；对∧而言,**F**是零元

9.1二元运算及其性质

定理： 若0_l和0_r分别是S上对于*的左零元和右零元,那么$0_l=0_r$，且这个元素就是零元。

推论: 一个二元运算的零元是唯一的。

定理： 设*为S上的二元运算，1和0分别为*运算的幺元和零元，如果S至少有两个元素，则$1\neq0$。

9.1二元运算及其性质

定义：设*是集合A上的二元运算，1∈A是运算*的幺元，对于∀x∈A，如果存在一个元素y∈A，使得x*y=1，y*x=1，则称y是x的逆元，记$y=x^{-1}$，如果x的逆元存在，则称x是可逆的。

例：Z上的加法运算，则任一元素的逆元就是它的相反数；而对N上的加法运算，只有0存在逆元是0

9.1二元运算及其性质

- 代数A=<{a,b,c},*>由下表定义
- b是幺元。a的右逆元是c， b的逆元是自身,c的左逆元是a

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	c	c

9.1二元运算及其性质

- 例：设**A**是集合，**S**是**A**上的函数全体
  - 合成运算是否为**S**上的代数运算？
  - 幺元是什么？
  - 什么样的函数有逆元？
- 例：**Z={0,1,2,3,4}**,定义**Z**中二个运算为对任意**x,y**∈**Z**有
  $x +_5 y = (x+y) \bmod 5$
  $x \times_5 y = (x \times y) \bmod 5$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

幺元=0, 0^{-1}=0, 1^{-1}=4, 2^{-1}=3 , 3^{-1}=2, 4^{-1}=1

幺元=1,零元=0, 1^{-1}=1, 2^{-1}=3, 3^{-1}=2, 4^{-1}=4, 0没有逆元。

9.1二元运算及其性质

定理：设**A**是集合，*是**A**上的二元运算,并且是可结合的，运算*的幺元是**1**。若$x \in A$有左逆元和右逆元,则它的左逆元等于右逆元,且逆元是唯一的。

证明：

（**1**）证左逆元=右逆元：

设x_l和x_r分别是x的左逆元和右逆元,

∵x是可逆的和可结合的

∴ $x_l*x=x*x_r=1$

∵ $x_l*x*x_r=(x_l*x)*x_r=1*x_r=x_r$

$x_l*x*x_r=x_l*(x*x_r)= x_l*1 =x_l$

∴ $x_l=x_r$

9.1二元运算及其性质

（**2**）证明逆元是唯一的：

假设**y**和**z**是**x**的二个不同的逆元,

则$y=y*1=y*(x*z)=(y*x)*z=1*z=z$

和假设矛盾

∴**x**若存在逆元,则一定是唯一的（前提*是可结合的）

9.1二元运算及其性质

定义： 设*是S上的二元运算，如果对于每一x,y,z∈S有

若x*y=x*z,且x≠0,则y=z;

若y*x=z*x,且x≠0,则y=z;

则称运算*满足消去律。

例：整数集合上加法，乘法运算都满足消去律。幂集合上交和并运算不满足消去律，但对称差运算满足消去律。

第九章: 代数系统

第一节：二元运算及其性质

第二节：代数系统

第三节：代数系统的同态与同构

9.2 代数系统

定义： 由非空集合和集合上k个一元或二元运算所组成的系统称为代数系统，用符号V=<S,f_1, f_2,… f_m>表示,其中S为非空集合, f_1, f_2,… f_m表示运算。

讨论定义：

（1）构成一个代数系统必须具备的条件：

- 一个非空集合S,称为载体；
- 在S上的运算；

9.2 代数系统

（2）通常也可把特异元素（常数）放在代数系统之中,形成$<S,f_1, f_2,\ldots f_m,k>$；

（3）代数系统的基数$|V|=|S|$,就是非空集合的基数。

例：下列均为代数系统$<Z,+>$,$<Z,\times>$,$<N,+>$,$<Z,->$

而Z上的“÷”和N上的“-”均不能构成代数系统

9.2 代数系统

定义： 如果两个代数系统中有相同个数的运算和常数，且对应运算的元数相同，则称这两个代数系统具有相同的构成成分，也称为同类型的代数系统

例：代数<N,*,1>和<Z,-,0>有相同的构成成分，因为都有一个二元运算和一个常数

9.2 代数系统

如果具有相同构成成分的代数系统也有一组相同的称为公理的规则，那么他们同是某种特殊的代数系统。

例：代数系统$<N,+,0>$有如下公理

1）$a+b=b+a$

2）$(a+b)+c=a+(b+c)$

3）$a+0=a$

代数系统$<Z,*,1>$,$<p(S),\cup,\Phi>$和它类似，都是可交换独异点这种代数类型的成员。

9.2 代数系统

例:集合的∩,∪是**P(A)**上代数运算,因而**<P(A),**∪,∩**>**构成代数系统,称为集合代数

例:**A**为命题公式的全体,∧,∨是**A**上两个逻辑运算,**<A,**∧,∨**>**是代数系统,称为逻辑代数

9.2 代数系统

定义： 设∗和Δ是集合S上的二元和一元运算，S′是S的子集。如果a,b∈S′蕴涵着a∗b∈S′，那么S′对∗是封闭的。如果a∈S′蕴涵着Δ a∈S′，那么S′对Δ是封闭的。

例：Z上的减法运算，N对减法不封闭。

例：除法是非零实数集上的二元运算,对其子集非零整数集不封闭。

9.2 代数系统

定义:设$<A,f_1,\ldots,f_m,k>$是一个代数系统,若$B\subseteq A$,$B\neq\Phi$,如果B对运算$f_1,f_2,\ldots,f_m$是封闭的,且$k\in B$。则$<B,f_1,\ldots,f_m,k>$是代数系统$<A,f_1,\ldots,f_m,k>$的子代数系统

例:整数集合Z在加法下构成一个代数系统$<Z,+,0>$

Z_2是偶数集合,$<Z_2,+,0>$是否其子代数系统?

Z_1是奇数集合,$<Z_1,+>$是否其子代数系统?

9.2 代数系统

- 平凡子代数
  - A的最大的子代数是它自己
  - 如果A的常数集合在A的运算下是封闭的，那么它组成A的最小子代数
- 真子代数

第九章：代数系统

第一节：二元运算及其性质

第二节：代数系统

第三节：代数系统的同态与同构

9.3 代数系统的同态和同构

定义 设<G,*>和<H, ⊙>是同类型的代数系统, g:G→H是从G到H的函数。

若对任意a,b∈G有g(a*b)=g(a) ⊙ g(b)成立，则称g:G→H是从<G,*>到<H, ⊙>的同态映射。

若g:G→H是
$$\begin{cases} \text{满射函数，则称}g\text{为满同态;} \\ \text{单射函数，则称}g\text{为单一同态;} \\ \text{双射函数，则称}g\text{为同构。} \end{cases}$$

9.3 代数系统的同态和同构

例：设代数系统$G_1=<Z,+>$和$G_2=<N_n,+_n>$。令

$f: Z\to N_n$, $f(x)=(x)\bmod n$

则f是G_1到G_2的同态。

因为$\forall x,y\in Z$有

$f(x+y)=(x+y)\bmod n=(x)\bmod n +_n (y)\bmod n =f(x)+_n f(y)$

为满同态。

9.3 代数系统的同态和同构

例：设代数系统$G_1=\langle R,+\rangle$和非零实数关于普通乘法构成的代数系统$G_2=\langle R^*,\times\rangle$,令

$f: R\to R^*,\ f(x)=e^x$

则f是G_1到G_2的同态。

因为$\forall x,y\in R$有

$f(x+y)=e^{x+y}=e^x\times e^y=f(x)\times f(y)$

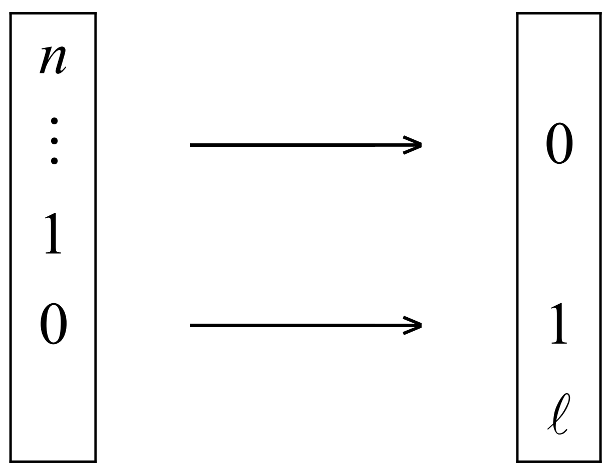
为单同态，同态像是$\langle R^+,\times\rangle$。

例：<N,+>和<{*l*,0,1},*>是两个代数系统，“*”由运算表给出定义。定义一函数

*	ℓ	0	1
ℓ	ℓ	0	1
0	0	0	0
1	1	0	1

g:N→{*l*,0,1}

$$g(i)=\begin{cases}0 & i\in N\text{且}i\neq 0\\ 1 & i\in N\text{且}i=0\end{cases}$$



9.3 代数系统的同态和同构

例：设代数系统G＝<{e,a,b,c},*>和H＝<{1,2},×>

f: {e,a,b,c} → {1,2}

f(e)=1; f(a)=1; f(b)=2; f(c)=2

×	1	2
1	1	2
2	2	1

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

练习

- 设A={1,2}，B是A上的等价关系的集合。
  - 列出B的元素。
  - 给出代数系统V=<B, ∩>的运算表。
  - 求出V的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。
  - 说明V是否为半群、独异点和群。

练习

- 1）2个元素集合上只有两种划分，因此只有2个等价关系，即$B=\{I_A, E_A\}$。
- 2）V的运算表如下。
- 3）V的单位元是E_A，零元是I_A，可逆元素只有E_A，其逆元是E_A。
- 4）V为半群，独异点，不是群。