01-02 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (30%) 填空题:

1. 设$\alpha = (1, 2)$, $\beta = (1, -1)$, 则$\alpha\beta^{T}$ = <u>-1</u>; $\alpha^{T}\beta$ = <u>$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$</u>; $(\alpha^{T}\beta)^{100}$ = <u>$-\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$</u>.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, 则行列式$|AB^{-1}|$ = <u>$-1/70$</u>.

3. 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则当参数 k <u>$\neq 1$</u> 时，$\alpha_1-\alpha_2$, $k\alpha_2-\alpha_3$, $\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关.

4. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$的伴随矩阵 A^*= <u>$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$</u>.

5. 设矩阵 A 及 $A+E$ 均可逆，且 $G = E-(A+E)^{-1}$ (其中 E 表示单位矩阵)，则 G^{-1} = <u>$E+A^{-1}$</u>.

6. 与向量$\alpha = (1, 0, 1)$, $\beta = (1, 1, 1)$均正交的单位向量为<u>$\pm(-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$</u>.

7. 四点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, x)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, y, 3)$共面的充分必要条件是 <u>$x = 1$ 或 $y = 1$</u>.

8. 设实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$，则当$k$满足条件<u>$k > 1$</u>时，为$f(x_1, x_2, x_3)$ =1 是椭球面；则当 k 满足条件 <u>$k = 1$</u> 时，为 $f(x_1, x_2, x_3)$ =1 是柱面.

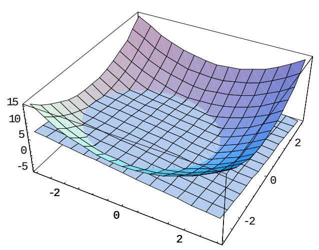
二 (8%) 记π_1为由曲线$\begin{cases} z = y^2-3 \\ x = 0 \end{cases}$绕 z-轴旋转所产生的旋转曲面，π_2为以π_1与平面π_3:

$x + y + z = 1$ 的交线为准线，母线平行于 z-轴的柱面. 试给出曲面π_1及π_2的方程，并画出π_1被π_3所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图(应标明区域边界与坐标轴的交点).

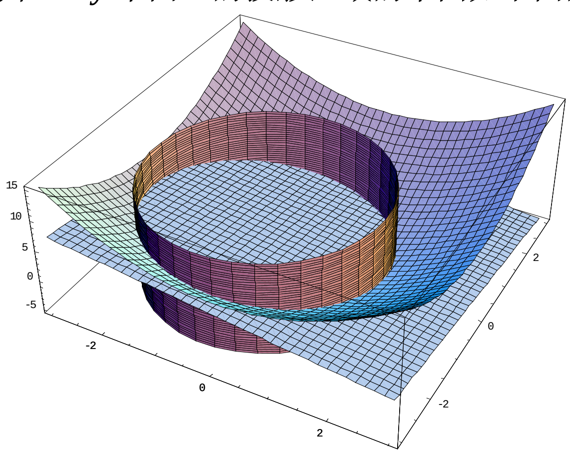
解: π_1的方程为 $z = x^2 + y^2 - 3$. 联立$\begin{cases} z = x^2+y^2-3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，消去 z 得π_2的方程: $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$.

π_2在 xOy 平面上的投影曲线的方程为$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{9}{2}$.

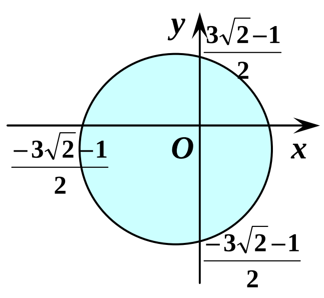
π_1被π_3所截有界部分在 xOy 平面上的投影区域的草图如下面的右图所示:



π_1与π_3



π_1, π_2, π_3



所求的投影区域

三 (8%) 求经过直线$\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$且与 xOy 平面垂直的平面方程.

解: (法一) 设所求的平面方程为$(x+2y-z-2)+\lambda(-x+y-2z-1) = 0$, 即

$$(1-\lambda)x+(2+\lambda)y-(1+2\lambda)z-(2+\lambda) = 0$$

因为它与 xOy 平面垂直，所以其法向量$\{(1-\lambda), (2+\lambda), (1+2\lambda)\}$与向量$\{0, 0, 1\}$垂直.

因而 $1+2\lambda = 0$, 即$\lambda = -1/2$. 于是得所求平面的方程: $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$, 化简得:

$$x + y= 1.$$

(法二) 直线$\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$的方向向量可取为$\left\{\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}\right\} = \{-3, 3, 3\}$.

所求平面的法向量应垂直于$\{-3, 3, 3\}$和$\{0, 0, 1\}$, 因而可取为

$$\left\{\begin{vmatrix}3&3\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-3\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&3\\0&0\end{vmatrix}\right\} = \{3, 3, 0\}.$$

在直线$\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$上取一点$(0, 1, 0)$, 由此可得所求平面的方程: $3x + 3(y-1) = 0$. 化简得:

$$x + y= 1.$$

(法三) 所求平面为直线$\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$到 xOy 平面上的投影平面. 因而从$\begin{cases}x+2y-z=2\\-x+y-2z=1\end{cases}$中消去 z, 得 $x + y= 1$. 这就是所求平面的方程.

四 (12%) 求矩阵方程 $XA = 2X + B$ 的解, 其中 $A = \begin{bmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{bmatrix}$.

解: (法一) 原方程可化为 $X(A-2E) = B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$A-2E$ 的行列式$|A-2E| = -1$, 伴随矩阵$(A-2E)^* = \begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

因而$(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

于是 $X = B(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-1&2\\3&1&-4\end{bmatrix}$.

(注意 X 未必等于$(A-2E)^{-1}B$!)

(法二) 原方程可化为 $X(A-2E) = B$, 其中 E 表示单位矩阵. $A-2E = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}A-2E\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&1\\3&2&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&2\\3&1&-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E\\B(A-2E)^{-1}\end{bmatrix}.$$

于是 $X = B(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix}-1&-1&2\\3&1&-4\end{bmatrix}$.

五 (12%) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2 \\ -x_2+px_3-2x_4=q \\ 3x_1+2x_2+x_3+(p+3)x_4=-1 \end{cases}$.

1. 问: 当参数 p, q 满足什么条件时, 方程组无解; 有唯一解; 有无穷多解?
2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解.

解: $[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & p & -2 & q \\ 3 & 2 & 1 & p+3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{array}\right] = [\tilde{A}, \tilde{b}]$.

由此可见, 当参数 $p = -2$ 且 $q \neq -1$ 时, 秩$(A) = 2$, 而秩$[A, b] = 3$, 此时方程组无解;
当参数 $p \neq -2$ 时, 秩$(A) = 4$, 此时方程组有唯一解;
当参数 $p = -2$ 且 $q = -1$ 时, 秩$(A) =$ 秩$[A, b] = 2$, 此时方程组无穷多解,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 & q+1 \\ 0 & 0 & 0 & p+2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times(-1) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此可得方程组的通解 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_3 (\text{自由未知量}) \\ x_4 = x_4 (\text{自由未知量}) \end{cases}$,

即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (c_1, c_2 为任意数).

六 (12%) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{bmatrix}$. 已知秩$(A) = 2$.

1. 求参数 k 的值;
2. 求一个 4×2 矩阵 B, 使得 $AB = O$, 且秩$(B) = 2$;
3. 问是否存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$? 为什么?

解: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$.

因为秩$(A) = 2$, 所以参数 $k = 0$. 此时可得齐次线性方程组 $Ax = \theta$的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

于是可取矩阵 $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 使得 $AB = O$, 且秩$(B) = 2$.

由于任何一个满足 $AM = O$ 的矩阵 M 的列向量组都可以由ξ_1, ξ_2线性表示, 所以这样的矩阵 M 的秩一定≤ 2. 因而不存在秩大于 2 的矩阵 M 使得 $AM = O$.

七 (12%) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

1. 求参数 k, l 的值;
2. 求一正交阵 Q, 使得 $Q^TAQ = B$.

解: 1. 因为实对称矩阵 A 与 B 相似, 所以 $-k = |A| = |B| = l$ 且 $k =$ 迹$(A) =$ 迹$(B) = 2+l$.
由此可得 $k = 1, l = -1$.

2. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$,

由$(E-A)x = \theta$可得 A 的对应于$\lambda = 1$ 的两个特征向量$\xi_1 = [1, 0, 1]^T$, $\xi_2 = [0, 1, 0]^T$,
由$(-E-A)x = \theta$可得 A 的对应于$\lambda = -1$ 的一个特征向量$\xi_3 = [1, 0, -1]^T$,

令 $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, 则 Q 为正交阵且 $Q^TAQ = B$.

八 (6%) 已知 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 并且 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量.
证明: $AB = BA$.

证明: 因为 n 阶方阵 A 相似于对角阵, 所以 A 有 n 个线性无关的特征向量, 设为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 对应的特征值设为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
又因为 A 的特征向量均是矩阵 B 的特征向量, 所以 B 也有 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 对应的特征值设为 $t_1, t_2, \ldots, t_n$. (注意 A 与 B 的特征值未必相等!)

令 $P = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$.

则 $AP = P\Lambda$, $BP = PT$, $\Lambda T = T\Lambda$.
于是 $AB = (P\Lambda P^{-1})(PTP^{-1}) = P\Lambda TP^{-1} = PT\Lambda P^{-1} = (PTP^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = BA$.

噼里啪啦地编辑着这份 Word 文档,
感觉自己在玩电子游戏(做 PowerPoint 课件时, 更是如此),
心情是快乐的.
但愿您也能分享到我的快乐!~~~

我也试图努力把它做得好看一些,
因为在我看来,
出自我手中的东西都是我精心雕刻的艺术品,
尽管它还不够完美.

人们常说: 予人玫瑰, 手留余香.
我所喜欢的,
正是那淡淡的余香给我带来的晚风般的惬意……

02-03 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 填空题(每小题 3 分，共 36 分):

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}[5\quad 1\quad -3]\right\}^{2002} = \underline{\begin{bmatrix}-5 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -10 & -2 & -6\end{bmatrix}}$;

2. $\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}$;

3. 若 A 是正交矩阵，则行列式 $|A^3A^T| = \underline{1}$;

4. 空间四点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(1, 2, k), D(-1, 4, 9)$共面的充分必要条件是 $\underline{k = 3}$;

5. 点 $P(2, -1, 1)$到直线 l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 的距离为 $\underline{\ 1\ }$;

6. 若 4 阶方阵 A 的秩为 2，则伴随矩阵 A^*的秩为 $\underline{\ 0\ }$;

7. 若可逆矩阵 P 使 $AP = PB$, $B = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, 则方阵 A 的特征多项式为$\underline{(\lambda-1)(\lambda-3)}$;

8. 若 3 阶方阵 A 使 $I-A$, $2I-A$, $A+3I$ 都不可逆，则 A 与对角阵$\underline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}}$相似(其中 I 是 3 阶单位矩阵);

9. 若 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$与对角阵相合，则$(x, y) = \underline{(1, -2)}$.

10. 设 $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$，其中列向量 A_1, A_2, A_4 线性无关, $A_3 = 2A_1 - A_2 + A_4$，则齐次线性方程组 $Ax = \theta$的一个基础解系是 $\underline{\xi = [2, -1, -1, 1]^T}$;

11. 设 A, B 都是 3 阶方阵, $AB = O$, $r(A) - r(B) = 2$，则 $r(A) + r(B) = \underline{\ D\ }$;
    (A) 5; (B) 4; (C) 3; (D) 2;

12. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 2A$，则以下结论中未必成立的是$\underline{\ B\ }$.
    (A) $A-I$ 可逆，且$(A-I)^{-1} = A-I$; (B) $A = O$ 或 $A = 2I$;
    (C) 若 2 不是 A 的特征值，则 $A = O$; (D) $|A| = 0$ 或 $A = 2I$.

二 计算题(每小题 8 分，共 24 分)

13. $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}\times(-1) = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}\times(-1)\ \times(-2)$

$$= \begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 11\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0 & 1 & 11\\ 1 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}\times(-1) = -\begin{vmatrix}0 & 1 & 11\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & -3 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 11\\ -3 & -4\end{vmatrix} = 29.$$

14. 求直线 l: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线方程.

解: 过直线 l 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的法向量必垂直于向量 $\{2, 1, 2\}$ 和 $\{1, 1, -2\}$,

因而可取为 $\left\{\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 2\\-2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\right\} = \{-4, 6, 1\}$.

又因为 π_1 过直线 l 上的点 $(2, 1, -1)$, 由此可得平面 π_1 的点法式方程

$$-4(x-2)+6(y-1)+(z+1)=0$$

整理得

$$4x-6y-z-3=0$$

于是可得直线 l: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ 在平面 $\pi: x+y-2z+1=0$ 上的垂直投影直线的一般方程: $\begin{cases}x+y-2z+1=0\\4x-6y-z-3=0\end{cases}$.

15. 设 $XA = AB + X$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 求 X^{99}.

解: 原方程可化为 $X(A-I) = AB$, 其中 I 表示单位矩阵.

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}A-I\\AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I\\AB(A-I)^{-1}\end{bmatrix}.$$

于是可得 $X = AB(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $X^2=\begin{bmatrix}3/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3/2\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

$$X^{99}=(X^2)^{49}X=\frac{3^{49}}{2^{49}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\frac{3^{49}}{2^{49}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1/2 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(注意 X 未必等于 $(A-I)^{-1}AB$!)

三 计算题, 解答题(3 小题共 32 分).

16. 设向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\a\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}2\\5\\-3\\b\end{bmatrix}$. $V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的空间. 已知维$(V) = 2$, $\beta\in V$.

(1) 求 a, b; (2) 求 V 的一个基, 并求 β 在此基下的坐标; (3) 求 V 的一个标准正交基.

解: (1) $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\2 & 1 & 1 & 5\\-1 & 0 & 1 & -3\\0 & 2 & a & b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 3\\0 & 1 & 3 & -1\\0 & 0 & a-6 & b+2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

因为维$(V) = 2$, $\beta\in V$. 所以 $a-6 = b+2 = 0$, 即 $a = 6$, $b = -2$.

(2) 由上述初等行变换的结果可知 α_1, α_2 构成 V 的一个基, 且 $\beta=3\alpha_1-\alpha_2$.

(3) 令$\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix} - \dfrac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\2\end{bmatrix}$,

再单位化得 V 的一个标准正交基

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\4\end{bmatrix}.$$

17. 用正交变换化简二次曲面方程:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$$

求出正交变换和标准形, 并指出曲面类型.

解: 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\-2 & 1 & -1\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

A 的特征多项式$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 1\\2 & \lambda-1 & 1\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2)$.

A 的特征值$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda = -2$.

由$(\lambda_i I - A)x = \theta$求得 A 的对应于$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda = -2$ 的特征值向量:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \xi_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},\quad \xi_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $p_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $p_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

令 $P = \begin{bmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3\\-\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3\\0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3\end{bmatrix}$, 则 $P^TP = I$, 且 $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

令 $x = Py$, 则原二次曲面的方程化为 $3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 = 1$.

可见该二次曲面为单叶双曲面.

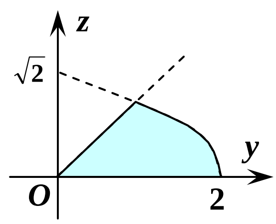
18. 设 D 为由 yOz 平面中的直线 $z = 0$, 直线 $z = y$ ($y \ge 0$)及抛物线 $y + z^2 = 2$, 围成的平面区域. 将 D 绕 y 轴旋转一周得旋转体Ω.

(1) 画出平面区域 D 的图形;

(2) 分别写出围成Ω的两块曲面 S_1, S_2 的方程;

(3) 求 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线 C 的方程;

(4) 画出 S_1, S_2 和 l, C 的图形.



解: (1) 平面区域 D 的图形如右图所示:

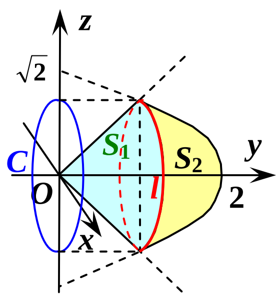
(2) Ω由锥面 S_1: $y = \sqrt{x^2+z^2}$ 和旋转抛物面 S_2: $y = 2 - x^2 - z^2$ 围成.

(3) 由 $y = \sqrt{x^2+z^2}$ 和 $y = 2 - x^2 - z^2$ 消去 y 得 $x^2 + z^2 = 1$.

由此可得 S_1, S_2 的交线 l 在 zOx 平面上的投影曲线

C 的方程: $\begin{cases}x^2+z^2=1\\y=0\end{cases}$

(4) S_1, S_2 和 l, C 的图形如右图所示:



四 证明题, 解答题(每小题 4 分, 共 8 分).

19. 设η是线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $b \neq \theta$, ξ_1, ξ_2 是导出组 $Ax = \theta$的基础解系. 证明: η, $\xi_1+\eta$, $\xi_2+\eta$线性无关.

证明: 因为 $A\eta = b \neq \theta$, 所以η不是线性方程组 $Ax = \theta$的解.

而ξ_1, ξ_2是$Ax = \theta$的基础解系, 故η, ξ_1, ξ_2线性无关, 否则η能由ξ_1, ξ_2线性表示, 从而是线性方程组 $Ax = \theta$的解, 矛盾!

假若 $k_1\eta + k_2(\xi_1+\eta) + k_3(\xi_2+\eta) = \theta$, 则$(k_1 + k_2 + k_3)\eta + k_2\xi_1 + k_3\xi_2 = \theta$.

于是$(k_1 + k_2 + k_3) = k_2 = k_3 = 0$, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

所以η, $\xi_1+\eta$, $\xi_2+\eta$线性无关.

20. 设α是 3 维非零实列向量, $||\alpha|| = \sqrt{2}$. 又 $A = \alpha\alpha^T$.

(1) 求 A 的秩; (2) 求 A 的全部特征值;

(3) 问 A 是否与对角阵相似? (4) 求$|I - A^3|$.

解: (1) 设$\alpha = [a, b, c]^T \neq \theta$, 则 $A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{bmatrix} \neq O$, 且秩$(A) = 1$.

(2) 设$\beta \neq \theta$是 A 的对应于特征值λ的特征向量. 即$\alpha\alpha^T\beta = \lambda\beta$.

若$\alpha^T\beta = 0$, 则$\lambda\beta = \alpha\alpha^T\beta = \theta$, 而$\beta \neq \theta$, 故$\lambda = 0$.

此时, β是$\alpha^Tx = 0$ 的解向量. 而秩$(\alpha^T) = 1$,

故$\alpha^Tx = 0$ 的每个基础解系均由两个线性无关的解向量构成.

即对应于$\lambda = 0$, A 有两个线性无关的特征向量,

若$\alpha^T\beta \neq 0$, 则由$\alpha\alpha^T\beta = \lambda\beta$ 可得$\alpha^T\alpha\alpha^T\beta = \lambda\alpha^T\beta$. 从而$\lambda = \alpha^T\alpha$.

此时, 由于$\alpha\alpha^T\alpha = \lambda\alpha$. 故可取$\beta = \alpha$作为对应于$\lambda = \alpha^T\alpha$的特征向量.

综上所述, A 的全部特征值有: $\lambda = 0$ 和$\lambda = \alpha^T\alpha = ||\alpha||^2 = 4$.

(另解) 因为 $A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = 4\alpha\alpha^T = 4A$,

所以 $A^2-4A = O$, 即$\lambda^2 - 4\lambda$是 A 的零化多项式,

因而 A 的所有可能的特征值有: 0, 4.

注意到秩$(A) = 1$, 可见都是 A 的全部特征值有 0(二重)和 4.

(3) 由(2)可见 A 有 3 个线性无关的特征向量, 所以 A 与对角阵相似.

(另解) 因为实矩阵 $A^T = (\alpha\alpha^T)^T = (\alpha^T)^T\alpha^T = \alpha\alpha^T = A$, 所以 A 与对角阵相似.

(4) 由(2)可见存在 3 阶可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

因此$|I - A^3| = |P^{-1}||I - A^3||P| = |(P^{-1}IP - P^{-1}A^3P)| = |I - (P^{-1}AP)^3|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4^3 \end{vmatrix} = 1- 4^3.$$

If you want something badly enough
You must let it go free
If it comes back to you
It's yours
If it doesn't
You really never had it, anyway

03-04 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%) 填空题:

1. 若向量 $\vec{\alpha}=\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{\beta}=b\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{\gamma}=\vec{k}$ 共面, 则参数 a, b 满足 $\underline{ab = 1}$.
2. 过点 $P(1, 2, 1)$且包含 x 轴的平面方程为 $\underline{y - 2z = 0}$.
3. 已知矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - 3I = O$, 其中 I 表示单位矩阵, 则 A 的逆矩阵 A^{-1} = $\underline{\frac{1}{3}(A+2I)}$.
4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&7\end{bmatrix}$, 则行列式$|A^2B^{-1}|$ = $\underline{1/70}$.
5. 设向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\k\\-1\end{bmatrix}$, 则当参数 k $\underline{=0}$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
6. 向量空间 $\mathbf{R}^2$ 中向量$\eta = (2, 3)$在 $\mathbf{R}^2$ 的基,与$\alpha = (1, 1)$ $\beta = (0, 1)$下的坐标为$\underline{(2, 1)}$.
7. 满足下述三个条件的一个向量组为$\underline{(-2, 1, 0), (1, 0, -1)}$, 这三个条件是: ①它们是线性无关的; ②其中的每个向量均与$\alpha = (1, 2, 1)$正交; ③凡与α正交的向量均可由它们线性表示.
8. 已知 2×2 矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 若对任意的 2 维列向量$\eta$有$\eta^{\mathrm{T}}A\eta = 0$, 则 a, b, c, d 满足条件 $\underline{a = d = 0, b = -c}$.

二 (12%) 假设矩阵 A, B 满足 $A - B = AB$, 其中 $A=\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$, 求 B.

解: (法一) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$, 其中 I 表示单位矩阵. $A+I=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$.

$A+I$ 的行列式$|A+I| = 1$, 伴随矩阵$(A+I)^* =\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. 因而$(A+I)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

于是 $B=(A+I)^{-1}A=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&0\\1&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$.

(注意 B 未必等于 $A(A+I)^{-1}$!)

(法二) 由 $A - B = AB$ 得 $(A+I)B = A$, 其中 I 表示单位矩阵. $A+I=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$.

$$[A+I, A]=\begin{bmatrix}1&-2&0&0&-2&0\\1&-1&0&1&-2&0\\-1&2&1&-1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0&2&-2&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&0\end{bmatrix}=[I, (A+I)^{-1}A]$$

于是 $B = (A+I)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

三 (15%) 设向量 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, 4)^T$, $\beta = (2, b, c)^T$, 问当参数 a, b, c 满足什么条件时

1. β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示?
2. β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示?
3. β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表示方法不唯一? 求这时$\beta$用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示的一般表达式.

解: 令 $A = [\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, (注: 这里把$\alpha_3$放在第一列纯粹是为了方便)

$$[A, \beta] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a & -2 \\ 0 & -3 & 2+2a & b+4 \\ 0 & 0 & 8+2a & c-b+4 \end{bmatrix} = [\tilde{A}, \tilde{\beta}]$$

1. 当参数 $a \neq -4$ 时, 秩$(A) = 3$, 此时β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$唯一线性表示.
2. 当参数 $a = -4$, 而 $b - c \neq 4$ 时, 秩$(A) = 2$, 秩$(A, \beta) = 3$, 此时β不能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.
3. 当参数 $a = -4$, 且 $b - c = 4$ 时, 秩$(A) =$ 秩$(A, \beta) = 2$, 此时β能用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 但表示方法不唯一.

这时 $$[\tilde{A}, \tilde{\beta}] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2(b+1)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由此可得 $Ax = \beta$的通解 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2x_3 + 2(b+1)/3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$, 其中 x_3 为自由未知量.

因而β用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示的一般表达式为

$$\beta = t\alpha_1 + [-2t + 2(b+1)/3]\alpha_2 - 2\alpha_3$$

其中 t 为任意数.

四 (8%) 设实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$. 问: 实数 a 满足什么条件时, 方程 $f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面?

解: 实二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$.

A 的顺序主子式 $a_{11} = 1 > 0$; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1 - a^2$; $|A| = 1 - 2a^2$.

$f(x, y, z) = 1$ 表示直角坐标系中的椭球面当且仅当 A 正定, 当且仅当 A 的顺序主子式全为正数, 即 $a^2 < 1/2$.

五 (12%) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, 矩阵 $B = aA^3 - 4aA + I$.

1. 求参数 a 的值, 使得矩阵 B 不可逆.
2. 问矩阵 B 是否相似于对角阵? 请说明你的理由.

解: 1. 因为 3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值 $2, -2, 1$, 所以存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $P^{-1}BP = P^{-1}(aA^3 - 4aA + I)P = a(P^{-1}AP)^3 - 4a(P^{-1}AP) + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{bmatrix}$.

因而矩阵 B 不可逆当且仅当$|B| = 0$，而$|B| = |P^{-1}BP| = 1 - 3a$.

所以当 $a = 1/3$ 时，矩阵 B 不可逆.

2. 由 1 可知矩阵 B 相似于对角阵.

六 (12%) 已知二次曲面 S_1 的方程为 $z = 3x^2 + y^2$, S_2 的方程为 $z = 1 - x^2$.

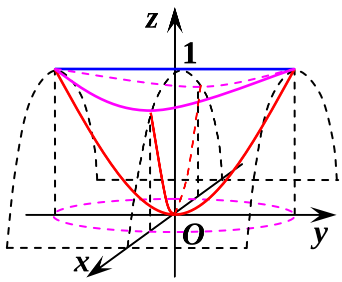
1. 问: S_1 与 S_2 分别属于哪一类二次曲面?
2. 求 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程;
3. 画出由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图.

解: 1. S_1 与 S_2 分别属于椭圆抛物面和抛物柱面.

2. 由 $z = 3x^2 + y^2$ 和 $z = 1 - x^2$ 消去 z 得 S_1 与 S_2 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. 由 S_1 与 S_2 所围成的立体的草图如右图所示:



七 (10%) 设 3×3 实对称矩阵 A 的秩为 2, 并且 $AB = C$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

求 A 的所有特征值及相应的特征向量; 并求矩阵 A 及 A^{9999}.

解: 因为 A 是 3 阶矩阵, 且秩为 2, 所以$|A| = 0$, 因而有一个特征值为 0.

又因为 $AB = C$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 令 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则 $Ap_1 = -p_1$, $Ap_2 = p_2$, 可见 p_1, p_2 分别是 A 的对应于$\lambda = -1$ 和$\lambda = 1$ 的特征向量.

由于 A 是 3×3 的实对称矩阵, 所以对应于特征值 0 的特征向量与 p_1, p_2 正交,

由此可得对应于特征值 0 的一个特征向量 $p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

令 $P = [p_1, p_2, p_3]$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

故 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$A^{9999} = (P\Lambda P^{-1})^{9999} = P\Lambda^{9999}P^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

八 (7%) 证明题:

1. 设$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是齐次线性方程组 $Ax = \theta$的线性无关的解向量, β不是其解向量.
   证明: $\beta, \beta+\eta_1, \beta+\eta_2, \ldots, \beta+\eta_t$ 也线性无关.

证明: 因为$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$是齐次线性方程组 $Ax = \theta$的线性无关的解向量, β不是其解向量.
所以$\beta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性无关, 否则$\beta$能由$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$线性表示, 从而是线性方程组 $Ax = \theta$的解, 矛盾!
假若 $k_1\beta + k_2(\beta+\eta_1) + k_3(\beta+\eta_2) + \ldots + k_{t+1}(\beta+\eta_t) = \theta$,

则$(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{t+1})\beta + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 + \ldots + k_{t+1}\eta_t = \theta$.
于是$(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_{t+1}) = k_2 = k_3 = \ldots = k_{t+1} = 0$,
即 $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_{t+1} = 0$.
所以$\beta, \beta+\eta_1, \beta+\eta_2, \ldots, \beta+\eta_t$线性无关.

2. 设 A 是 n 阶正定矩阵, 证明: $|I+A| > 1$, 其中 I 是 n 阶单位矩阵.

证明: 因为 A 是 n 阶正定矩阵, 所以 A 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$都是正数.

于是存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$.

因而$|I+A| = |P^{-1}||I+A||P| = |P^{-1}(I+A)P| = |I+ P^{-1}AP| = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

$= (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n) > 1$.

生活的辩证法就是这样:
当苦难压来时,
只有具备善良的愿望, 坚定信念的人;
只有不计回报, 只求奉献的人;
只有坚强不屈, 不折不挠的人,
才有希望越过苦难, 收获甘甜。
苦难的尽头将是:
你不期而遇的幸福,
不曾奢望的甘甜。

——摘自《知音》1999.5 下半月版

04-05 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%)填空题:

1. 以点 $A(1, 1, 2)$, $B(-2, -1, 1)$, $C(-1, 1, -1)$为顶点的三角形的面积为 $\underline{\sqrt{101}/2}$;
2. 设 3 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $B = [\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1-2\alpha_3, \alpha_1]$. 若 A 的行列式$|A| = 3$, 则 B 的行列式$|B| = \underline{-6}$.
3. 若向量$\alpha = (1, 0, 1)$, $\beta = (2, 1, -1)$, $\gamma = (-1, 1, k)$共面，则参数 $k = \underline{-4}$;
4. 若 A 为 n 阶方阵，则方阵 $B = \begin{bmatrix} I & O \\ A & 2I \end{bmatrix}$的逆矩阵 $B^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} I & O \\ -\frac{1}{2}A & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}}$(其中 I 是 n 阶单位矩阵, O 是 n 阶零矩阵);
5. 已知向量$\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$是矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$的特征向量，则参数 $a = \underline{1}$，相应的特征值等于$\underline{\ 3\ }$;
6. 假设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则在实矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$中，与 A 相抵的有 $\underline{B, C, D, F}$; 与 A 相似的有$\underline{\ F\ }$; 与 A 相合的有 $\underline{B, C}$;

二 (8%) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 & 0 \\ x & 1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 3 列展开}} (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

×(−1)

$$= (1-x)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^2(1-x-x^2).$$

三 (10%) 假设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩阵方程 $3X = B + XA$ 的解.

解: 原方程可化为 $X(3I - A) = B$, 其中 I 表示单位矩阵, $3I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 3I-A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ B(3I-A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

于是可得 $X = B(3I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$. (注意 X 未必等于$(3I-A)^{-1}B$!)

四 (14%) 假设矩阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. 已知齐次线性方程组 $Ax = \theta$的基础解系中含有两个线性无关的解向量, 试确定这时参数λ的值, 并求这时 $Ax = \theta$的一个基础解系.
2. 若在非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集中存在两个线性无关的解向量, 但不存在更多的线性无关的解向量, 试确定这时参数λ及 a 的值, 并求这时 $Ax = b$ 的通解.

解: 1. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix}$.

因为齐次线性方程组 $Ax = \theta$的基础解系中含有两个线性无关的解向量,

所以秩$(A) = 1$, 因而$\lambda = 1$. 此时$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

由此可得 $Ax = \theta$的一个基础解系:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 若非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解集中有两个线性无关的解向量, 但不存在更多的线性无关的解向量, 则 $Ax = \theta$的基础解系中只有一个线性无关的解向量.
所以秩$(A, b) =$ 秩$(A) = 2$. 此时$\lambda = -1$.

$$[A, b] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}.$$

可见 $a = -2$, $Ax = b$ 化为$\begin{cases} x_1 - x_3 = 3/2 \\ x_2 \qquad = -1/2 \end{cases}$, 于是 $Ax = b$ 的通解为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (c \text{ 为任意数}).$$

五 (10%) 已知直线 l 过点 $P(1, 1, 3)$, 与平面$\pi: x + y - z = 1$ 平行, 且与直线λ: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ 相交. 求直线 l 的方向向量, 并写出直线 l 的方程.

解: 过点 $P(1, 1, 3)$且与平面$\pi: x + y - z = 1$ 平行的平面方程为: $(x-1) + (y-1) - (z-3) = 0$,
即: $x + y - z = -1$.
把直线λ的参数方程: $x = t, y = 2t, z = t+1$ 代入 $x + y - z = -1$ 得 $t = 0$.
故直线λ与平面 $x + y - z = -1$ 的交点为 $Q(0, 0, 1)$, 且点直线 PQ 平行于平面π.
因此直线 l 的方向向量可取为$\{1-0, 1-0, 3-1\} = \{1, 1, 2\}$.
直线 l 的方程为 $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$.

六 (10%) 假设二次曲面π_1的方程为: $x^2 + 4y^2 = 2z$; 平面π_2的方程为: $x = z - 1$.

1. π_1与π_2的交线向 xOy 平面作投影所得的投影曲线 l 的方程为 $\begin{cases} (x-1)^2 + 4y^2 = 3 \\ z = 0 \end{cases}$.

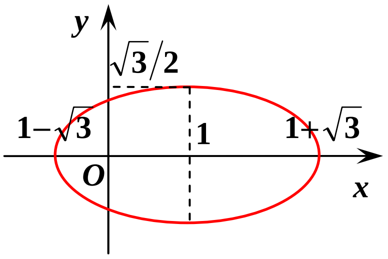
该投影曲线绕 x 轴旋转所得的旋转曲面π的方程为 $\underline{(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 3}$.

2. 在坐标系(1)中画出投影曲线 l 的草图(请给坐标轴标上名称).

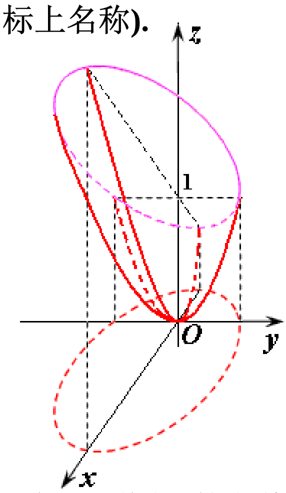
解: 投影曲线 l 的草图如(1)所示.

3. 在坐标系(2)中画出π_1与π_2所围成的立体的草图(请给坐标轴标上名称).

解: π_1与π_2所围成的立体的草图如(2)所示.



(1) 投影曲线 l 的草图



(2) π_1与π_2所围成的立体的草图

七 (14%)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$.

1. 试就参数 k 不同的取值范围, 讨论二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型.

2. 假设 $k > 0$. 若经正交变换 $x = Qy$, $f(x_1, x_2, x_3)$可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$, 求参数 k 及一个合适的正交矩阵 Q.

解: 1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -k \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -k & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1 - k)(\lambda + 1 + k)$.

A 的特征值$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = k - 1$, $\lambda_3 = -1 - k$.

k 的取值	$k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
$\lambda_2 = k - 1$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$\lambda_3 = -1 - k$	> 0	$= 0$	< 0	< 0	< 0
$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型	单叶双曲面	双曲柱面	双叶双曲面	双曲柱面	单叶双曲面

2. 若经正交变换 $X = QY$, $f(x_1, x_2, x_3)$ 可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

则 A 的特征值$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = k - 1 = 2$, $\lambda_3 = -1 - k = -4$. 即 $k = 3$.

此时由$(\lambda_i I - A)x = \theta$求得 A 的分别对应于$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 和$\lambda_3 = -4$ 的特征值向量

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

它们已经两两正交, 单位化得 $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

令 $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $x = Qy$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$可化成标准形 $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

四 (10%)证明题.

1. 假设 n 维向量$\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$, $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$. 若$\beta_1$, β_2线性无关. 证明: α_1, α_2线性无关, 且行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

证明: 令 $A = [\alpha_1, \alpha_2]$, $B = [\beta_1, \beta_2]$, $C = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, 则 $B = AC$.

所以秩$(B) \le$ 秩$(A)\} \le 2$, 秩$(B) \le$ 秩$(C)\} \le 2$.

若β_1, β_2线性无关, 则秩$(B) = 2$. 因而秩(A) =秩$(C) = 2$.

所以α_1, α_2线性无关, 且行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0$.

2. 假设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 并且, A 的特征值均大于 a, B 的特征值均大于 b, 证明: $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

证明: 由假设条件可知, 存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > a$. 于是

$$P^{-1}(A-aI)P = \begin{bmatrix} \lambda_1 - a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a \end{bmatrix},$$

其中, I 是 n 阶单位矩阵, $\lambda_1-a, \lambda_2-a, \ldots, \lambda_n-a > 0$.

所以 $A-aI$ 是正定矩阵. 类似的, $B-bI$ 也是正定矩阵.

因而对于任意的 n 维向量 x,

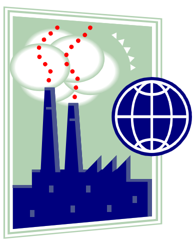
$$x^{T}(A+B-(a+b)I)x = x^{T}(A-aI)x + x^{T}(B-bI)x > 0.$$

这就是说, $A+B-(a+b)I$ 也是正定矩阵. 因此其特征值都大于 0.

下面设λ是 $A+B$ 的任意一个特征值, 则$\lambda-(a+b)$是 $A+B-(a+b)I$ 的特征值,

故$\lambda-(a+b) > 0$, 即$\lambda > a+b$.

公 益 宣 传



保护环境

节约资源

关爱弱者

05-06 学年第二学期

《几何与代数》期终试题解答

一 (24%)填空题:

1. 过点$P(1, 0, 1)$且与直线$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$垂直的平面的方程为$\underline{2x + y + z - 3 = 0}$;

2. 设$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则$P^5AQ^5 = \underline{\begin{bmatrix} c+5d & d \\ a+5b & b \end{bmatrix}}$.

3. 直角坐标系中向量$\alpha = (1, 1, 2)$与$\beta = (1, 0, 1)$的向量积为$\underline{(1, 1, -1)}$;

4. 若3×3矩阵A的秩为2, α_1, α_2是线性方程组$Ax = b$的解向量, 并且$\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 2, 4)^T$, $\alpha_1 - \alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, 则$Ax = b$的通解是$\underline{x = k(0, 1, 1)^T + (1, 3/2, 5/2)^T}$.

5. 设A是3×3矩阵, 若矩阵$I + A$, $2I - A$, $2I - 3A$均不可逆(其中I表示3阶单位矩阵), 则行列式$|A| = \underline{-4/3}$.

6. 若3是$n\times n$矩阵A的特征值, 行列式$|A| = 2$, 则A的伴随矩阵A^*的一个特征值为$\underline{3/2}$.

7. 若$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2kxz = 1$表示一单叶双曲面, 则$k$满足条件是$\underline{k > 1 \text{或} \ k < -1}$.

8. 设α是n维列向量($n > 1$), 则n阶方阵$A = \alpha\alpha^T$ 的行列式$|A|$的值为$\underline{0}$.

二 (12%)

设$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 求$A^{-1}, B^{-1}$以及矩阵$X$, 使$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix}$, 其中$O$表示相应的零矩阵.

解: $[A, I, C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I, A^{-1}, A^{-1}C],$$

$$[B, I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = [I, B^{-1}].$$

于是可得$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$,

$$X = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}C \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

三 (12%) 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 问: 参数$l, m$满足什么条件时, 向量组$\alpha_1 + l\alpha_2$, $\alpha_2 + m\alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_3$也线性无关?

解: 因为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 所以秩$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

向量组$\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关等价于秩$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = 3$.

而$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$, 其中$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}$,

并且有秩$(\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3) \le$ 秩$(P) \le 3$.

所以向量组$\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩$(P) = 3 \Leftrightarrow$ 行列式$|P| = 1 + lm \ne 0$ $\Leftrightarrow lm \ne -1$.

四 (14%) 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为:

$$\pi_1: x + y + 2z = 1,\ \pi_2: x + \lambda y + z = 2,\ \pi_3: \lambda x + y + z = 1+\lambda.$$

1. 问: λ取何值时这三个平面交于一点? 交于一直线? 没有公共交点?
2. 当它们交于一直线时, 求该直线的方程.

解: 1. 令$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \end{bmatrix} = C.$$

这三个平面交于一点 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) =$ 秩$(B) = 3 \Leftrightarrow \lambda \ne 0$且$\lambda \ne 1$.

这三个平面交于一直线 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) =$ 秩$(B) = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

这三个平面没有公共交点 $\Leftrightarrow$ 秩$(A) <$ 秩$(B) \Leftrightarrow \lambda = 0$.

2. 当这三个平面交于一直线时, $\lambda = 1$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是可得交线的方程为$\begin{cases} x + y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$.

五 (12%) 已知3×3矩阵$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$有一个二重特征值.

1. 试求参数a的值, 并讨论矩阵A是否相似于对角阵.
2. 如果A相似于对角阵, 求可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP = \Lambda$是对角阵.

解: 1. A的特征多项式$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ a & \lambda-2 & -a-3 \\ a+3 & 0 & \lambda-a-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-a-2)$.

A的特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = a + 2$.

因为A有一个二重特征值, 所以$\lambda_3 = -1$或2, 即$a = -3$或0.

当$a = -3$时, $\lambda_3 = \lambda_1 = -1$, $-I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 秩$(-I - A) = 1$,

因而$\lambda_3 = \lambda_1 = -1$有2个线性无关的特征向量, 此时$A$相似于对角阵.

当$a = 0$时, $\lambda_3 = \lambda_2 = 2$, $2I - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 秩$(2I - A) = 2$,

因而$\lambda_3 = \lambda_2 = 2$只有1个线性无关的特征向量, 此时$A$不相似于对角阵.

2. 当$a = -3$时, $(-I - A)x = 0$的基础解系可取为

$$\xi_1 = (1, -1, 0)^T,\ \xi_2 = (0, 0, 1)^T,$$

它们已经正交, 单位化得$p_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^T$, $p_2 = (0, 0, 1)^T$.

$2I - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $(2I - A)x = 0$的基础解系可取为

$$\xi_3 = (0, 1, 0)^T,$$

令$p_3 = \xi_3 = (0, 1, 0)^T$, 则$P = (p_1, p_2, p_3)$可逆, 且$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

六 (12%) 假设A, B是实对称矩阵. 证明: 分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$是正定矩阵的充分必要条件是$A$, B都是正定矩阵.

证明: (充分性)

[方法一]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量X, Y(其中X, Y的维数分别等于A, B的阶数), 有

$$X^TAX > 0,\ Y^TBY > 0$$

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量$Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$(其中$X$, Y, Z的维数分别等于A, B, M的阶数),

$Z^TMZ = [X^T, Y^T]\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = X^TAX + Y^TBY > 0$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法二]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow A$的特征值$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$以及$B$的特征值$\mu_1, \ldots, \mu_t$都大于零(其中$s$, t分别为A, B的阶数)

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$的特征值$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$都大于零

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法三]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q使得$P^TAP = I_s$, $Q^TBQ = I_t$, (其中I_s, I_t为单位矩阵, 阶数分别与A, B的阶数相同)

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^T & O \\ O & Q^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TAP & O \\ O & Q^TBQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_t \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法四]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q使得$A = P^TP$, $B = Q^TQ$ (其中P, Q的阶数分别与A, B的阶数相同)

$\Rightarrow$ 存在可逆矩阵$\begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$, 使得

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^TP & O \\ O & Q^TQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & O \\ O & Q \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

[方法五]

A, B都是正定矩阵

$\Rightarrow A, B$的各阶顺序主子式都大于零

$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$的各阶顺序主子式都大于零

(事实上, 设A, B的阶数分别为s, t; $\varDelta_k$是M的k阶顺序主子式,
则当k小于或等于s时, $\varDelta_k$也是A的k阶顺序主子式, 因而大于零;
当k大于s时, $\varDelta_k = |A|\varDelta_{k-s}$, 其中$\varDelta_{k-s}$是$B$的$k-s$阶顺序主子式, 因而$\varDelta_k$大于零)

$\Rightarrow M$是正定矩阵.

(必要性)

[方法一]

M是正定矩阵

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量Z (其中Z的维数等于M的阶数), 有$Z^TMZ > 0$

$\Rightarrow$ 对于任意非零的列向量X, Y(其中X, Y的维数分别等于A, B的阶数), $Z_1 = \begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix}$和

$Z_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix}$都非零(其中$Z_1, Z_2$的维数都等于$M$的阶数, θ为相应的零向量), 于是有

$$X^TAX = [X^T, \theta^T]\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ \theta \end{bmatrix} = Z_1^TMZ_1 > 0,$$

$$Y^TBY = [\theta^T, Y^T]\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} = Z_2^TMZ_2 > 0$$

$\Rightarrow A, B$都是正定矩阵.

[方法二]

设$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $\boldsymbol{B}$的特征值$\mu_1, \ldots, \mu_t$ (其中s, t分别为$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的阶数),
则$\boldsymbol{M}$ 的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$.
若$\boldsymbol{M}$是正定矩阵，则$\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t$都大于零，因而$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是正定矩阵.

[方法三]

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的阶数分别为$s, t$.
若$\boldsymbol{M}$是正定矩阵，则存在$s + t$阶可逆矩阵$\boldsymbol{U}$使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_t \end{bmatrix}$$(其中$\boldsymbol{I}_s, \boldsymbol{I}_t$分别为$s, t$阶单位矩阵)

将$\boldsymbol{U}$分块为$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{U}_{21} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{U}_{11}, \boldsymbol{U}_{22}$分别为$s, t$阶矩阵,

则$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_t \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_{21}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{U}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{U}_{21} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix}$.

因而$\boldsymbol{U}_{11}, \boldsymbol{U}_{22}$都可逆，且$\boldsymbol{U}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{11} = \boldsymbol{I}_s$, $\boldsymbol{U}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{22} = \boldsymbol{I}_t$.
所以$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是正定矩阵.

[方法四]

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的阶数分别为$s, t$.

若$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{M}$的各阶顺序主子式都大于零.

于是，我们可以断言$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的各阶顺序主子式都大于零.
事实上，假若$\boldsymbol{A}$有一个k阶顺序主子式$\Delta_k \le 0$,
由于Δ_k也是$\boldsymbol{M}$的k阶顺序主子式，这就与$\boldsymbol{M}$是正定矩阵矛盾!
假若$\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式都大于零，而$\boldsymbol{B}$有一个k阶顺序主子式$\Delta_k \le 0$,
则$\boldsymbol{M}$的$s + k$阶顺序主子式的值等于$|\boldsymbol{A}|\Delta_k \le 0$ (注意行列式$|\boldsymbol{A}| > 0$),
这又与$\boldsymbol{M}$是正定矩阵矛盾!
所以$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是正定矩阵.

七 (8%)由与平面$z = -1$及点$M(0, 0, 1)$等距离运动的动点$P(x, y, z)$所生成的曲面记为π_1，将yOz平面上曲线$\begin{cases} y^2 + z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$以$z$轴为旋转轴所生成的旋转曲面记为$\pi_2$. 则

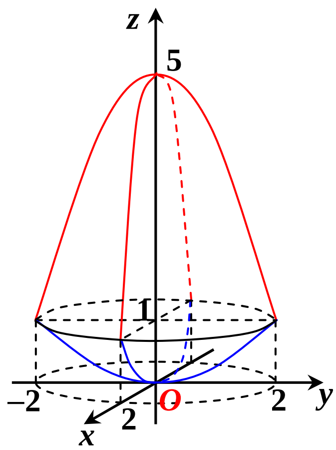
1. π_1的方程为 $\underline{4z = x^2 + y^2}$.

2. π_2的方程为 $\underline{x^2 + y^2 + z = 5}$.

3. π_1与π_2的交线在xOy平面上的投影曲线方程是

   $\underline{x^2 + y^2 = 4}$.

4. 在右边的坐标系中画出由这两个曲面所围成的有限立体的简图.



八 (6%)证明题.

1. 若2×2矩阵A的行列式$|A| < 0$. 证明: A一定相似于对角阵.

证明: 设A的特征值为λ_1, λ_2, 则$\lambda_1\lambda_2 = |A| < 0$.
所以λ_1和λ_2是异号的两个实数.
而A的阶数恰好为2, 因而A一定相似于对角阵.

2. 假设$n\times n$实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, α是A的属于特征值λ_1的单位特征向量, 矩阵$B = A - \lambda_1\alpha\alpha^T$. 证明: B的特征值为$0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

证明: 由假设条件可知, 存在n阶正交矩阵$P = [\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

于是

$$P^TBP = P^T(A - \lambda_1\alpha\alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1P^T(\alpha\alpha^T)P = P^TAP - \lambda_1(P^T\alpha)(\alpha^TP)$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1 \left(\begin{bmatrix} \alpha^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} \alpha\right)(\alpha^T[\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n])$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} [1, 0, \ldots, 0]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

GOOD LUCK!