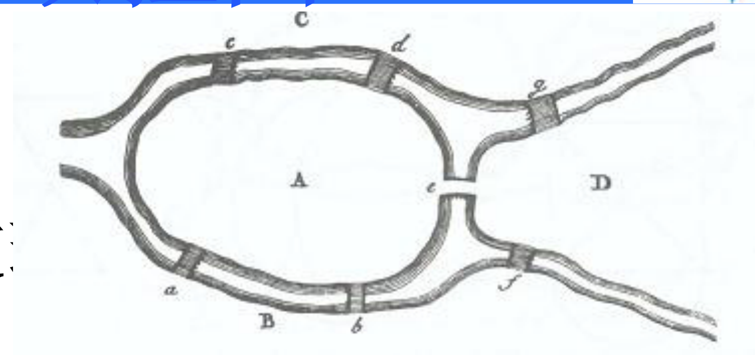
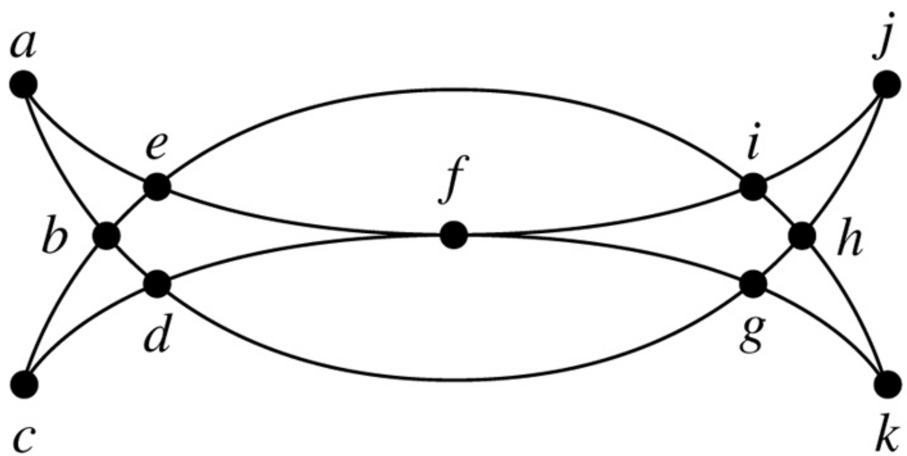
15.欧拉图与哈密顿图
15.1 欧拉图

- 欧拉(1707-1783)
  - 瑞士著名的数学家。
  - 1736年证明了欧拉定
  - 图论的创始人。





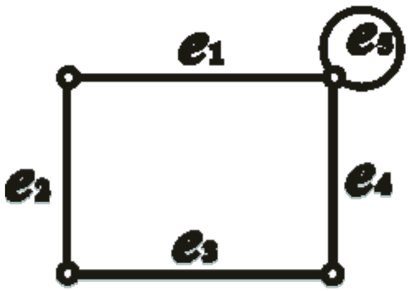
G

15.欧拉图与哈密顿图

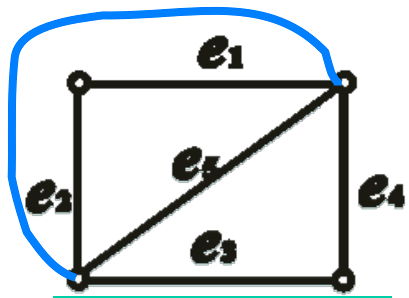
15.1 欧拉图

- 欧拉通路 通过图(无向图或有向图)中每一条边一次且仅一次行遍图中所有顶点的通路
- 欧拉回路 通过图(无向图或有向图)中每一条边一次且仅一次行遍图中所有顶点的回路

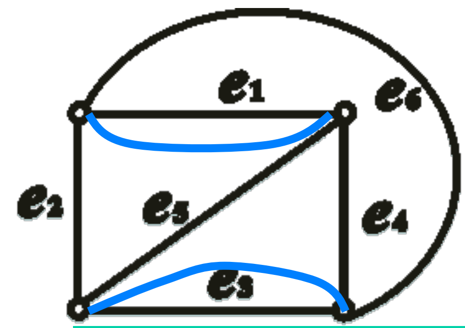
下列图中，哪些是欧拉图？哪些是半欧拉图？在非（半）欧拉图中至少增加几条边才能成为欧拉图？



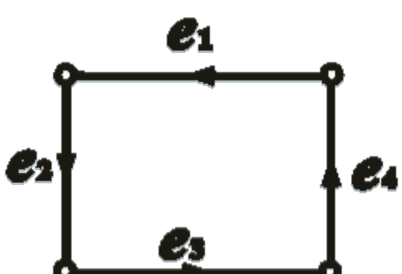
欧拉图



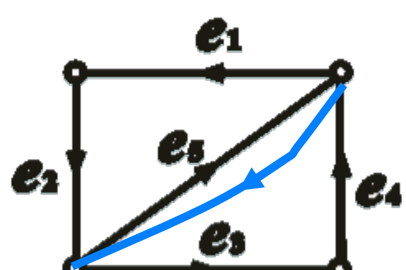
半欧拉图



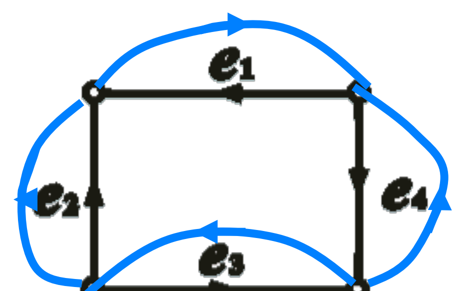
非（半）欧拉图



欧拉图



半欧拉图



非（半）欧拉图

15.欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

定理 无向连通图G是欧拉图的充分必要条件是G不含奇次数结点。

(即: G是Euler图⇔连通且每个点次数均为偶数)

证明：<u>必要性</u>设G是Euler图，则必存在一条包含每条边的回路，而且每边恰一次。经过某点时，必沿一条边进，另一条边出，故每个结点相关联的边是偶数，每个结点均为偶数次数。

15.欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

充分性：设G的每点次数均是偶数且连通，设C是一条包含G中若干条边的一个回路，且边是不重复的，若C包含了G中的所有边，则C就是Euler回路，G是Euler图。如果C不包括G中的所有边，则删边子集G-E(C)不是空图，而且G-E(C)中的点的次数仍均为偶数。

因G是连通图则C中必存在一个点v，使其在G-E(c)中有边与v相关联，因G-E(c)均为偶数次数，则过v必在G-E(c)中存在一个回路C`，将C和C′两个回路合起来，又构成一个新的回路C∪C′。继续进行该过程，直到用完所有的边为止，这样就可以产生欧拉回

15.欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

定理　无向连通图G具有一条欧拉通路当且仅当G具有零个或两个奇数次数的顶点。

证明：

(1)若连通图中没有结点拥有奇次数，则必存在欧拉回路，∴必存在一条的欧拉通路；

(2)有二个结点为奇次数，其它结点为偶次数，是图中存在欧拉路径的充要条件。

Ⅰ.充分性：(有两个奇次结点，其它结点为偶次数的无向连通图)

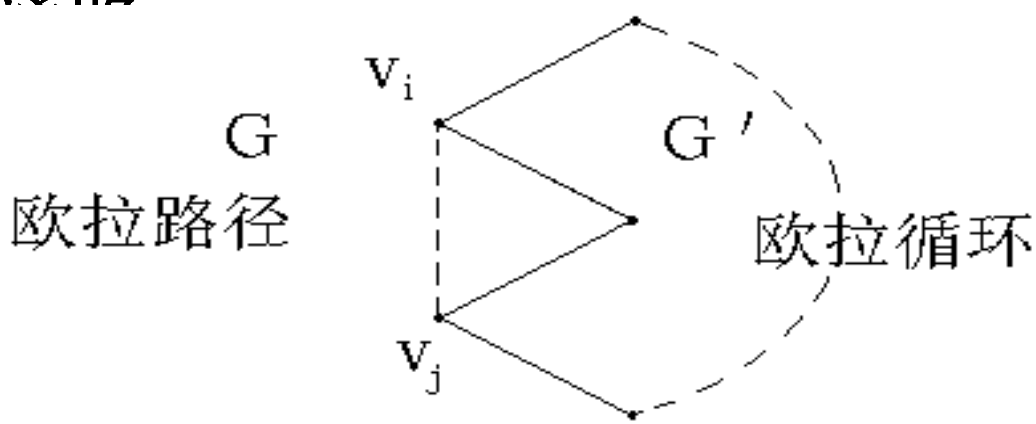
二奇其它偶⇒一定存在一条欧拉通路

设：无向连通图G'具有欧拉回路，则G'中每个结点为偶次数。

15.欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

现从G′中取二个顶点v_i和v_j，且v_i和v_j没有直接联线，现在v_i和v_j之间加一根联线变为图G，则变为奇数点，则从v_i到v_j一定存在一条欧拉通路



Ⅱ.必要性：在无向连通图G中有一条欧拉通路则有二个结点为奇次数，其它结点为偶次数。

15.欧拉图与哈密顿图
15.1 欧拉图

∵G中存在一条欧拉路径，G为连通图。

则从v_i到v_j之间加一条边，则从v_i到v_j（或v_j到v_i）必存在欧拉回路。

∵欧拉图中每个结点均为偶次数，

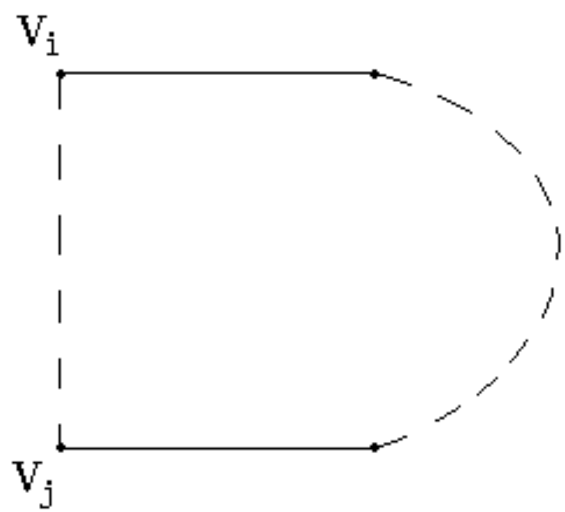
∴G中从$v_i \rightarrow v_j$ 存在欧拉通路的话，则v_i ,v_j为奇次数，其余结点为偶次数。

V_i，V_j加一条边，

则一定存在欧拉循环，

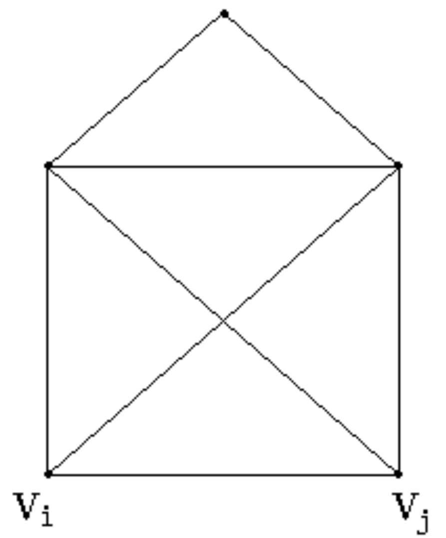
欧拉循环结次数为偶数，

V_i,V_j为奇次数。

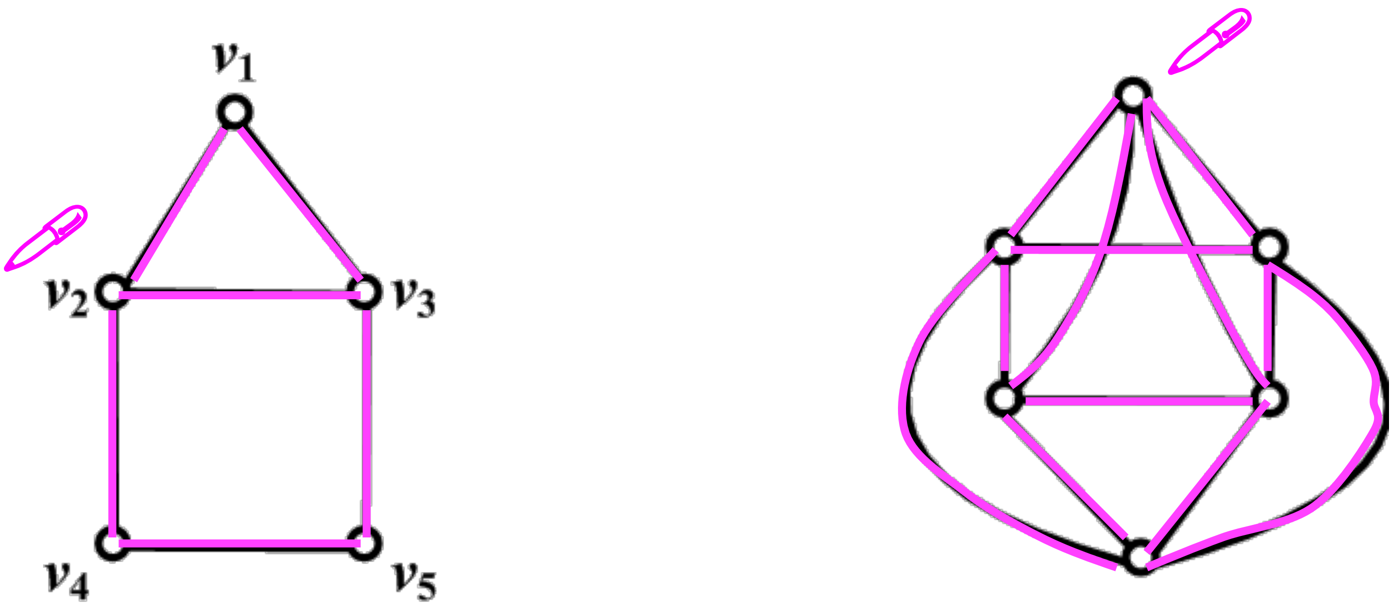


15.1 欧拉图

例：下图中是否存在欧拉回路或欧拉通路



例 下图可以一笔画吗？请找出一种画法。



(*a*) (*b*)

15.1 欧拉图

Fleury算法:

1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$;

2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍，按下面方法来从$E(G)-\{e_1,e_2\ldots e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

   1) e_{i+1}与v_i相关联;

   2) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为$G_i=G-\{e_1,e_2\ldots e_i\}$中的桥。

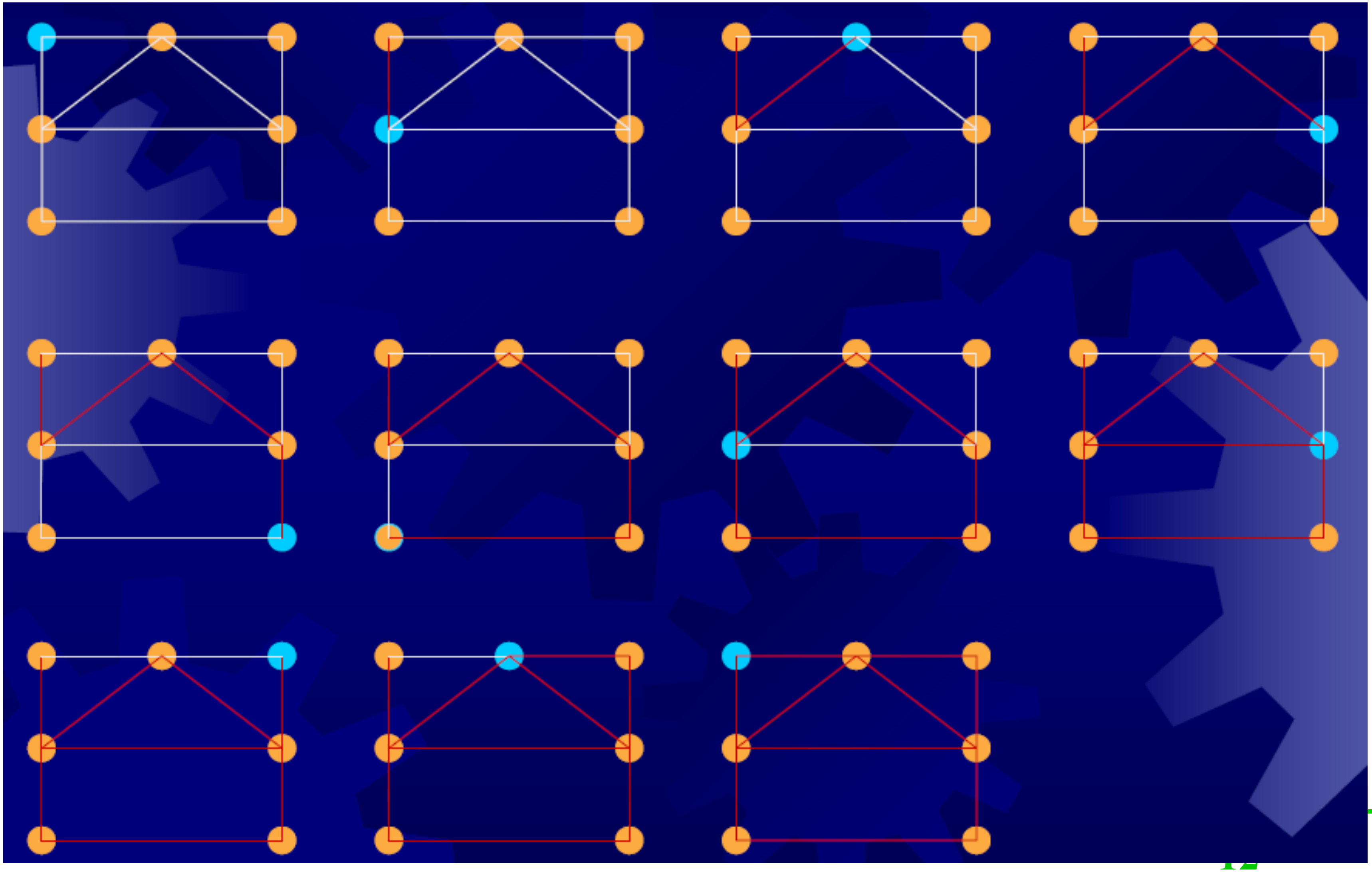
   3) 将e_{i+1}加入P_i得到P_{i+1}

3) 令i=i+1，返回2)。

算法停止时所得的简单回路$P_m=v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m(v_0=v_m)$为G中一条欧拉回路。

15.欧拉图与哈密顿图

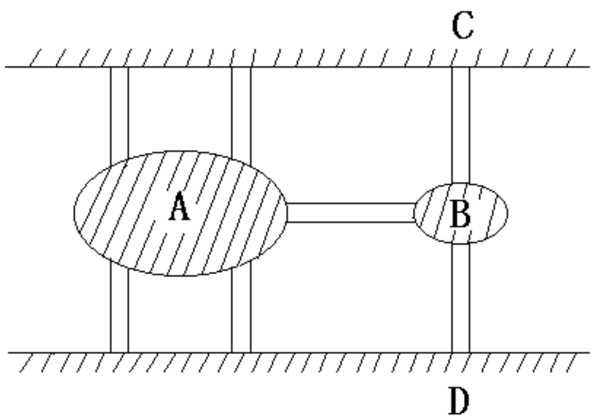
15.1 欧拉图

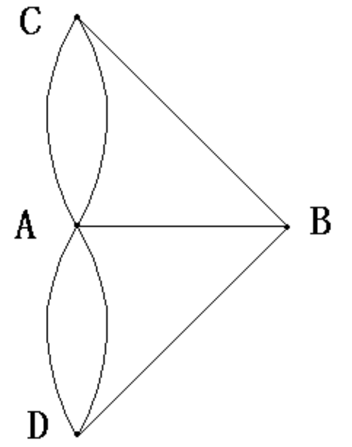


15.欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

例：用定理解决哥尼斯堡桥的问题





有 4 个结点为奇次数，

∴不存在欧拉回路，也不存在欧拉路径。

故要从一点出发经过桥一次且仅一次的路径，再回到出发点是不可能的。

15.欧拉图与哈密顿图
15.1 欧拉图

推广到有向图：

定理　设D是一强连通有向图，当且仅当D中每一个结点的引入次数等于引出次数时，D是欧拉图。

定理　有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的且D中恰好有两个奇度结点，其中一个的引入次数比引出次数大1，另一个的引入次数比引出次数小1，其它所有结点引入次数等于引出次数。

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

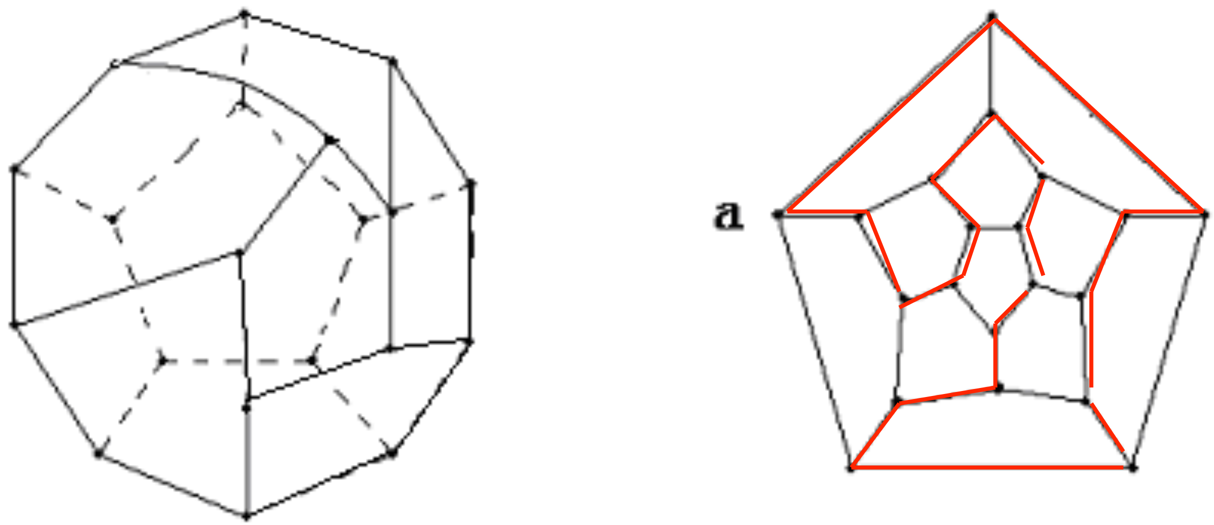
- 哈密顿通路　经过图(无向图或有向图)的每一个结点一次且仅一次的通路
- 哈密尔顿回路　经过图的每一个结点一次且仅一次的回路

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

- 典型的哈密尔顿回路例子

一是环游全世界游戏

如何沿12面体的棱线通过每一个角一次且仅一次的问题



可以证明12面体存在哈密尔顿循环
（12面体有20个结点）

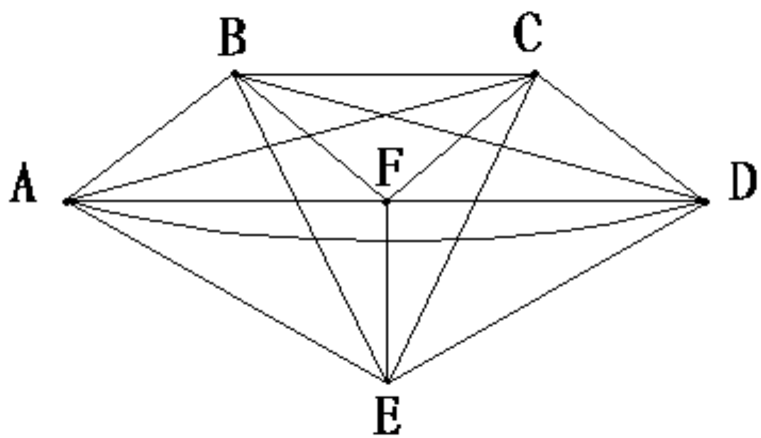
15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

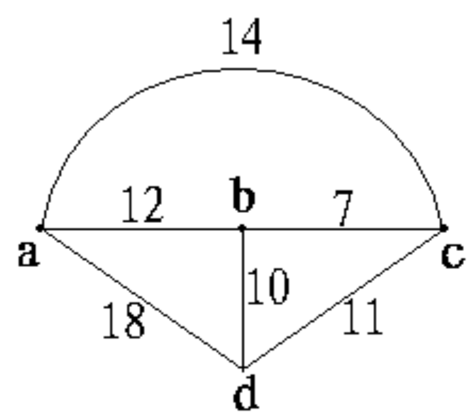
二是巡回货郎问题

①从城市出发到若干个村镇一次且仅一次，然后回到城市；

②选择一种走法，使之走的路径为最短。

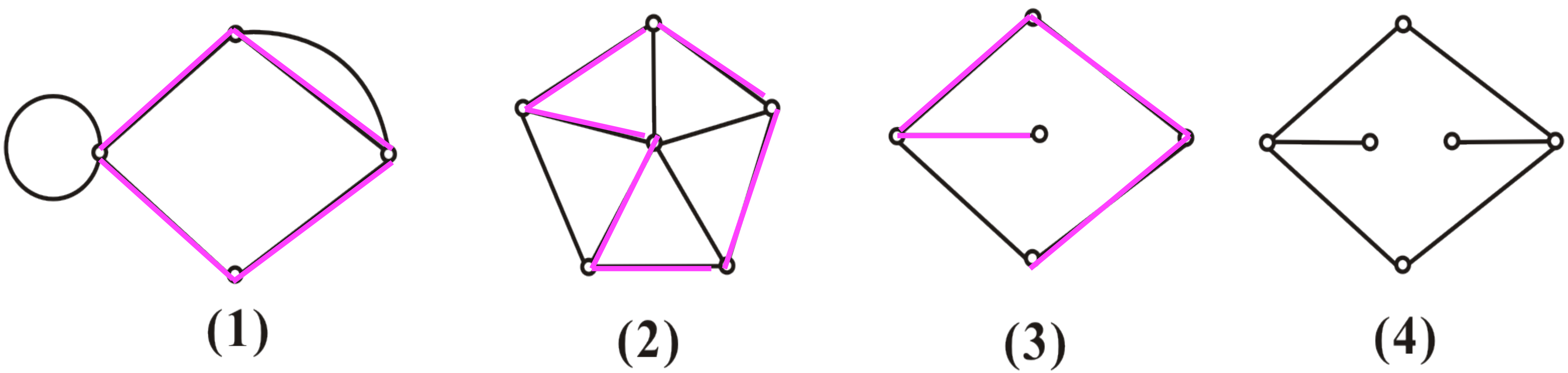
例：





从**a**点出发到**b**、**c**、**d**一次且路程最短，然后回到**a**点。

例　下图中，哪些是汉密尔顿图，哪些是半汉密尔顿图。



解　(1), (2)是哈密顿图; (3) 是半哈密顿图.
(4)既不是哈密顿图, 也不是半哈密顿图

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

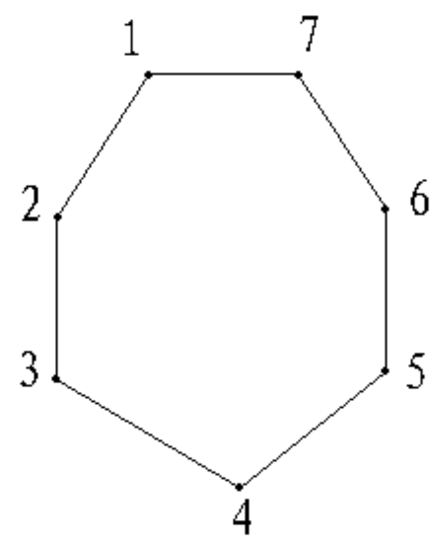
❑充分条件

定理　设G＝＜V，E＞是具有n≥2个结点的简单无向图，若在G中每对不相邻的结点次数之和大于或等于(n-1)，则在G中一定存在一条哈密顿通路。

例：n＝7，G＝＜V，E＞见图：

每对结点次数为4<7-1=6，

但却存在哈密顿通路。



- 定理　设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i, v_j，均有
- $$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$
- 则G中存在哈密顿通路.

证明线索：

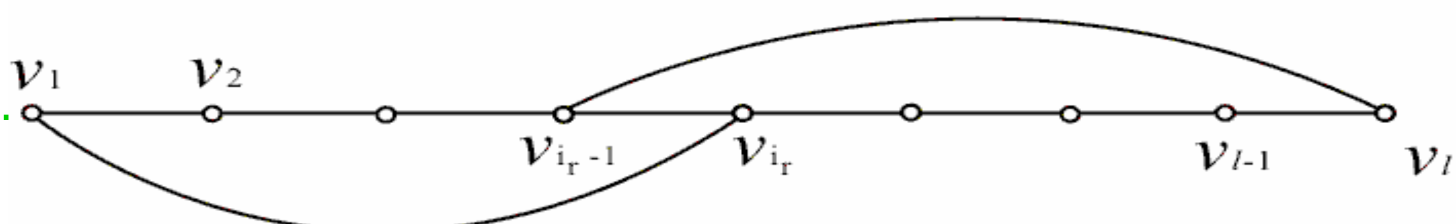
(1) 由(*)证G连通

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为G中极大路径. 若$l = n$, 证毕.

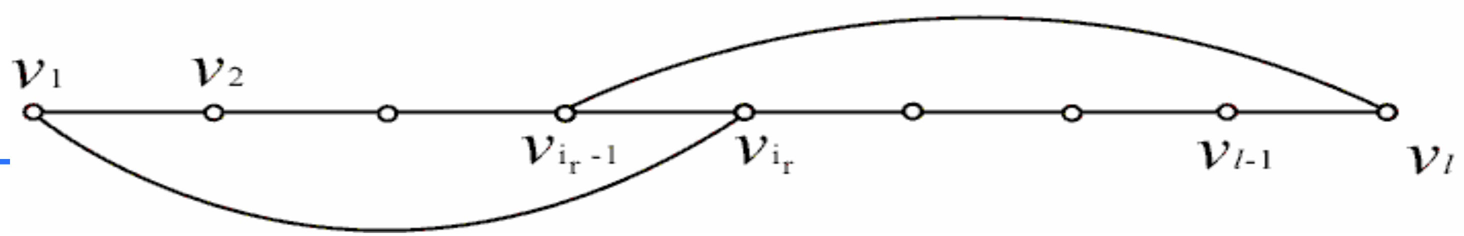
(3) 否则，证G中存在过Γ上所有顶点的圈C，由(1)知C外顶点存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复(2)－(3)，最后得G中哈密顿通路.

- 证（1）由(*)及简单图的性质，用反证法证明**G**连通.
- (2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为极大路径，$l \le n$, 若$l = n$（结束）.
- 下面讨论$l<n$的情况，即要证**G**中存在过Γ上所有顶点的圈.
- ① 若(v_1,v_l)在**G**中，则Γ∪(**u**,**v**)为**G**中圈

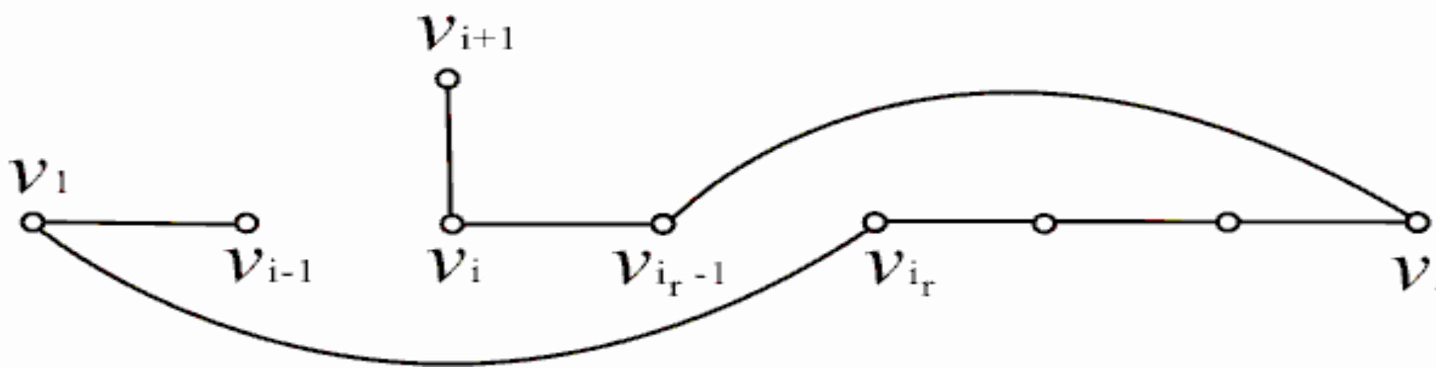
② 否则，设v_1与Γ上$v_{i_1}=v_2, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ 相邻，则$k\ge 2$ (否则由极大路径端点性质及(*)，会得到$d(v_1)+d(v_l)\le 1+l-2<n-1$，又$v_l$至少与$v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots v_{i_k}$ 左边相邻顶点之一相邻，（原因？）v_{i_r-1} 设 与v_l相邻，见图中(1)，于是得G中回路C ((1)中图去掉边(v_{i_r-1}, v_{i_r}))



图(1)



图(2)



- **(3)** 由连通性，可得比Γ 更长的路径（如图**(2)** 所示），对它再扩大路径，重复**(2)**，最后得哈密顿通路**.**

15.2 哈密顿图

推论：设G＝＜V，E＞是具有$n \geq 3$个结点的简单无向图，若在G中每对不相邻的结点次数之和大于或等于n，则在G中一定存在一条哈密顿回路。

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

- 必要条件

定理　设无向图G＝＜V，E＞是哈密尔顿图，则对V的每个非空真子集S均成立：

$$w(G-S) \le |S|$$

其中，　|S|　是S中的顶点数，w(G-S)表示G删去S顶点集后得到的图的连通分图的个数。

证明：

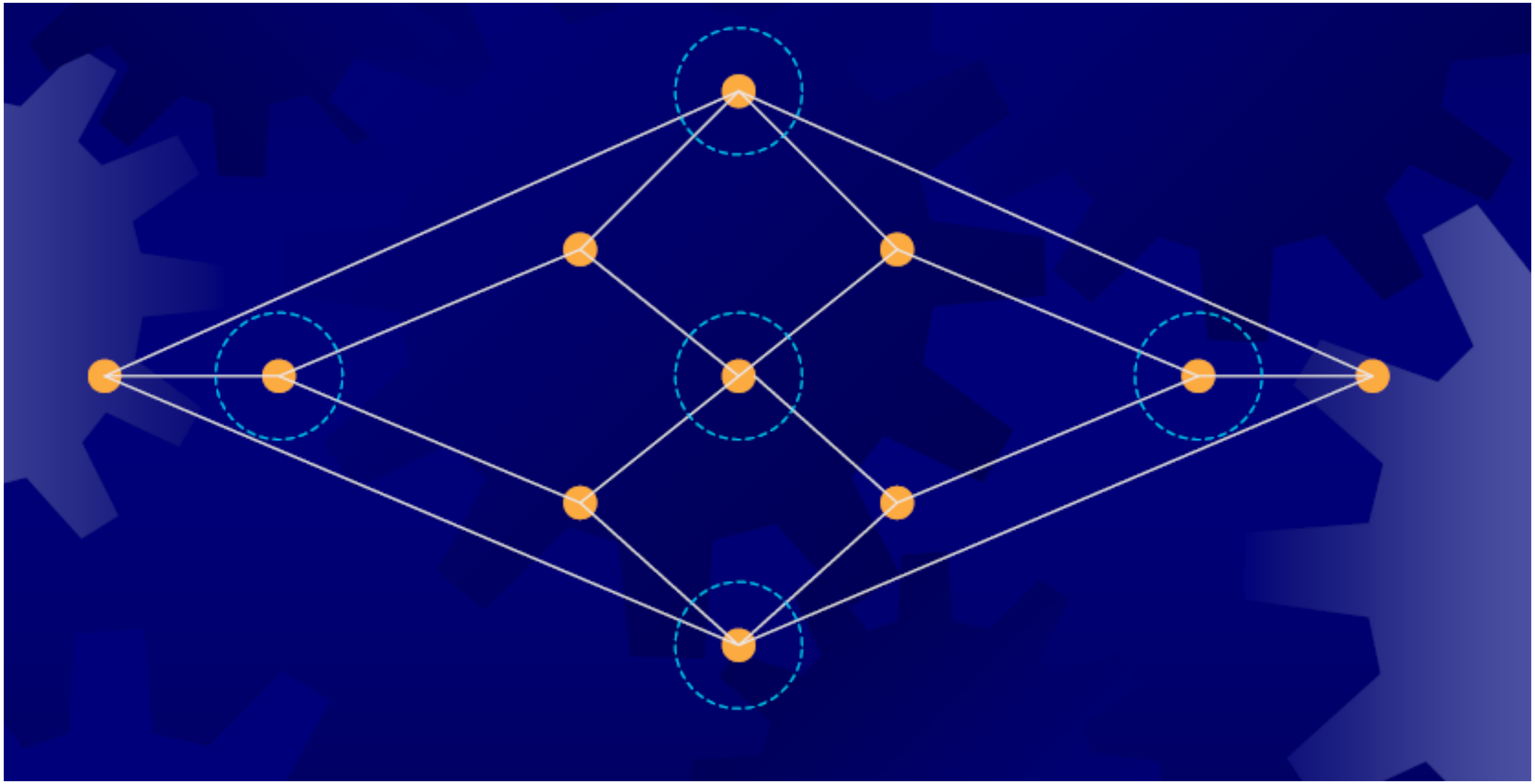
设C是图的一条哈密尔顿回路，则对于V的任一非空真子集S可知：

$$w(C-S) \le |S|$$

w(C-S)表示C删去S顶点集后得到的图的连通分图的个数。由于G是由C和一些不在C中的边构成的，C-S是G-S的生成子图，所以

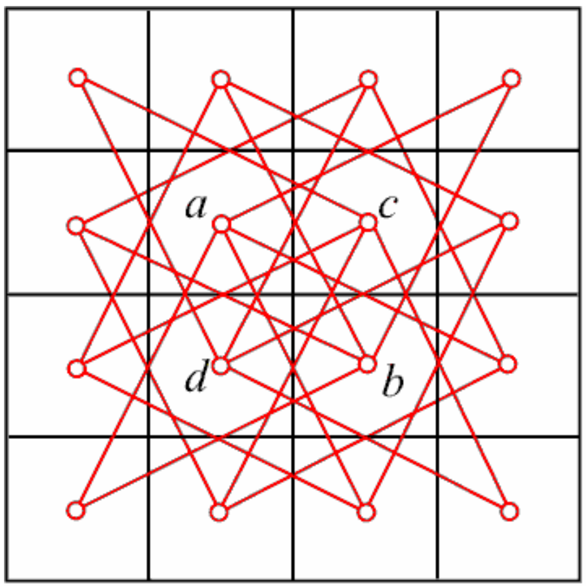
$$w(G-S) \le w(C-S) \le |S|$$

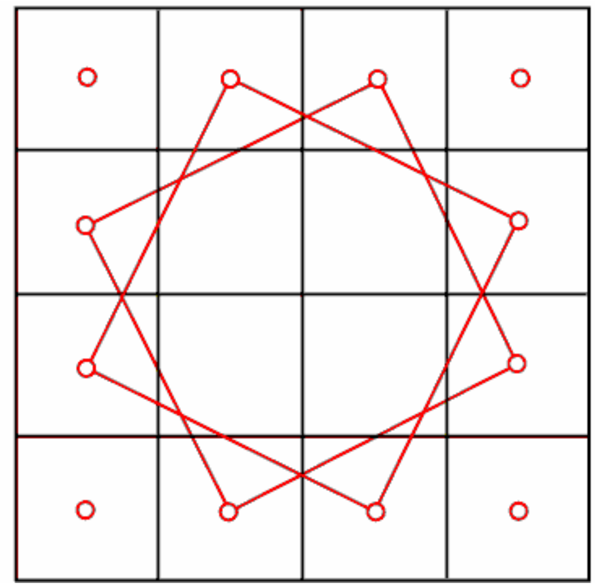
15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图



15.2 哈密顿图

■ 例 在四分之一国际象棋盘（4×4方格组成）上跳马问题.





令$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 > 4$，可知图中无哈密顿回路。

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

推论：设无向图G＝<V,E>是半哈密顿图，则对V的每个非空真子集S均成立：

$$w(G-S) \leq |S| + 1$$

其中，|S| 是S中的顶点数，w(G-S)表示G删去S顶点集后得到的图的连通分图的个数。

15.2 哈密顿图

例：考虑在7天安排7门课程的考试，使得同一位老师所任的两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于4门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

证明：

建模：每个顶点对应一门考试，如果两个顶点对应的课程是由不同老师担任的，则两点之间有边。

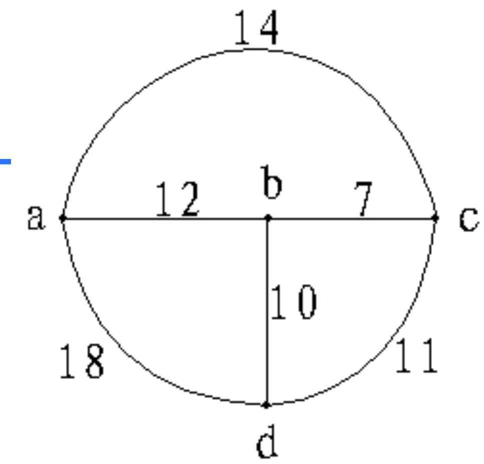
每个老师任课程数不超过4，因此每个结点的度数至少是3，任意两个结点的度数之和至少是6，因此G总包含一条哈密尔顿通路，它对应于关于考试的一个合适的安排。

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

定义　给定图**G=<V,E>**(无向图或有向图)，**W**为边集到实数集的函数，该函数将每条边附上实数，该实数称为边的权，这样的图称为带权图。

实际上，带权图可以用一句话概括：每一条边均注上数字的图

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图



例：

一个货郎生活在城市**a**，

假定访问的城市是**d**、**b**、**c**，

然后回到**a**，求完成这次访问的最短距离。

解：列出哈密尔顿回路,并求其长度：

(1)(abcda)=48=(12+7+11+18)

(2)(acbda)=49=(14+7+10+18)

(3)(abdca)=47=(12+10+11+14)

(4)(acdba)=(abdca)=47=(14+11+10+12)

最短距离为**47**

15.2 哈密顿图

- 计算每个哈密顿回路的长度需进行**n-1**次加法
- 最坏情况：
  - 如果该图为完全图，有多少不同的哈密顿回路？
  - **n (n-1) (n-2) . . . .(2) (1) = n!**
- 需进行的加法次数为： **(n-1) n!**

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

- 假设计算机的性能如下：
  - **1 flop = 1 nanosecond**

    = 10^{-9} sec.

    = 1,000,000,000 ops/sec

    = 1 GHz.

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

- **If n=8, T(n) = 7•8! = 282,240 flops < 1/3 sec.**
- **If n=50, T(n) = 49•50!**

= 1.48 10^{66}

= 1.49 10^{57} seconds

= 2.48 10^{55} minutes

= 4.13 10^{53} hours

= 1.72 10^{52} days

= 2.46 10^{51} weeks

= 4.73 10^{49} years.

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

- 最邻近算法(近似算法)

(1)选择任一结点作为始点，找出离始点距离最小的结点，形成一条边的初始通路；

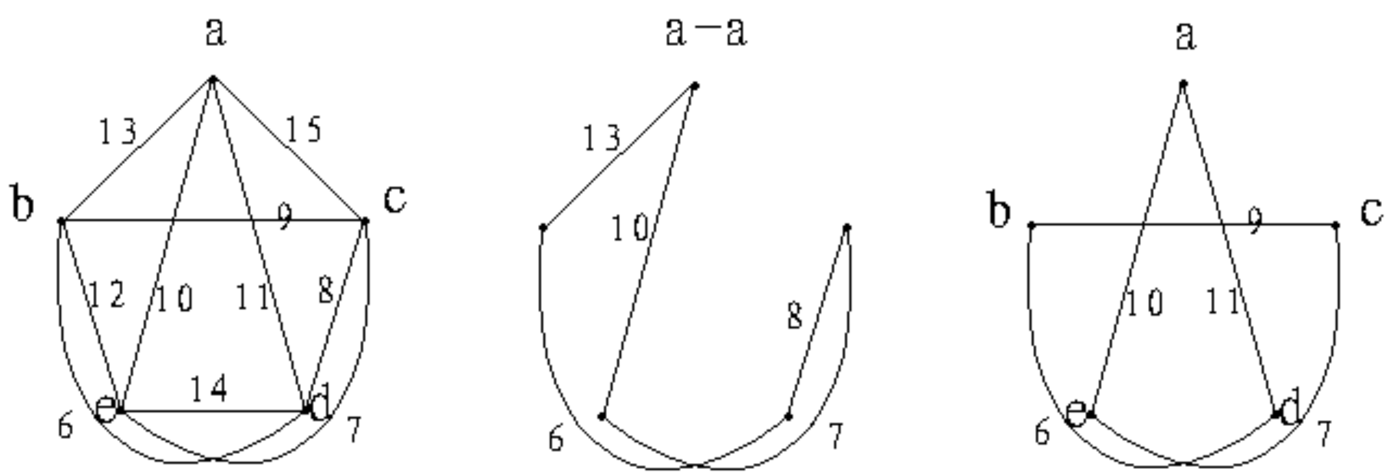
(2)设x是最新加到这条路径上的点，从不在这条路径上的所有点中选择一个与x距离最小的点，把连接x与此结点的边加入路径中；

重复直到G中的各结点均包含到这条通路中。

(3)把始点到最后加入的结点的边放入通路中得到一条哈密尔顿回路，并为近似最短的哈密尔顿回路。

15.欧拉图与哈密顿图
15.2 哈密顿图

例：给定带权图，求a-a，c-c的最短哈密尔顿通路(回路)

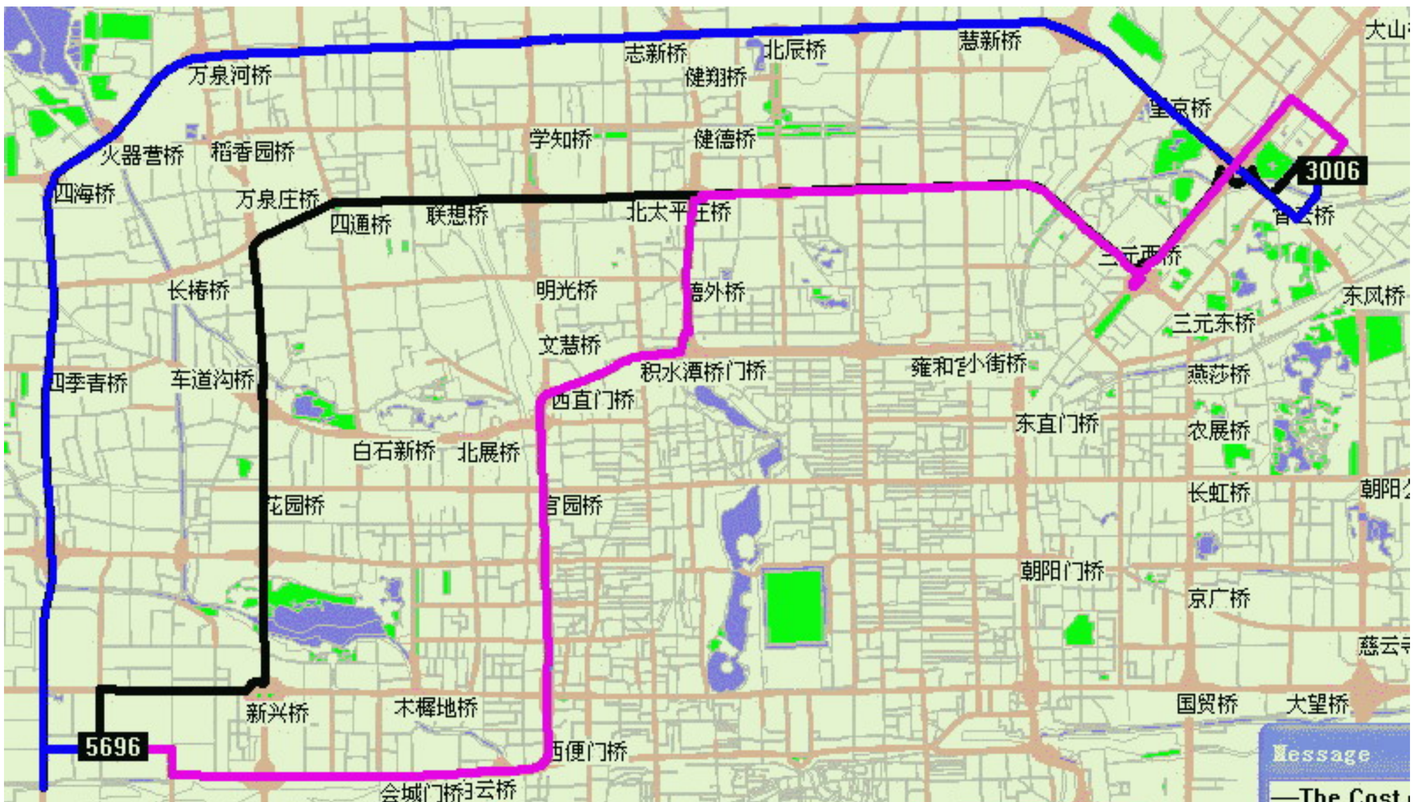


10+7+8+6+13=44
(近似最短路径)

10+7+9+6+11=43
c−c的最短路径

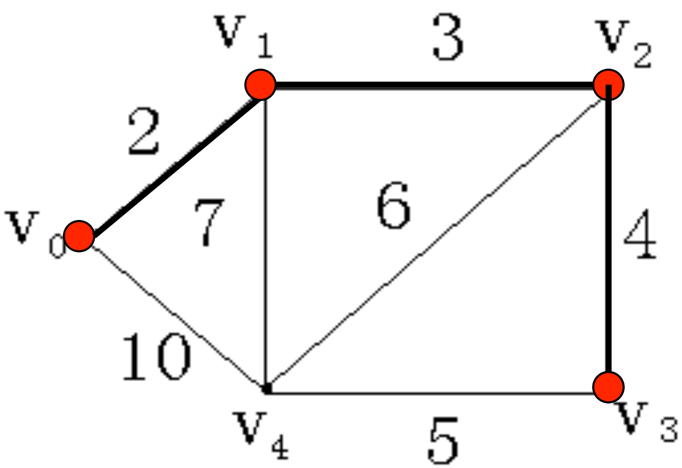
15.欧拉图与哈密顿图
15.3 带权图

Weighted Graph(带权图)

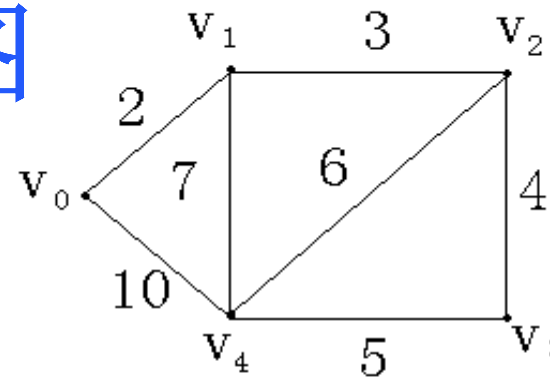


Dijkstra's Algorithm

❑

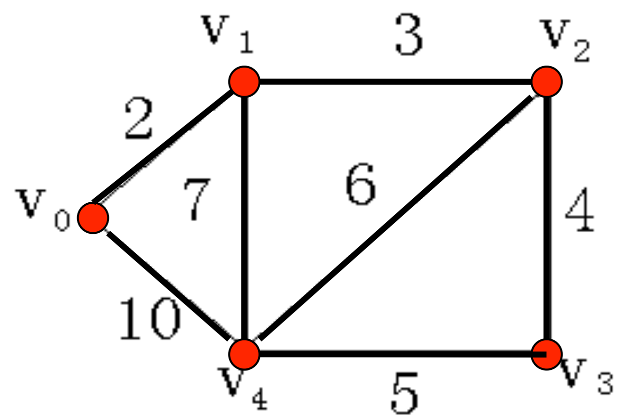


15.欧拉图与哈密顿图
15.3 带权图



- 初始：源点**s**的通路长度值赋为**0(*d[s]*=0)**，所有其他顶点的通路长度设为无穷大(对于***V***中所有顶点**v**除**s**外***d[v]*= ∞**)。
- 基础操作：如存在一条从***u***到***v***的边，将边***(u,v)***添加到从**s**到**u**的通路的尾部，其长度是***d[u]+w(u,v)***。如果这个值比目前已知的***d[v]***的值要小，用新值替代当前***d[v]***中的值。
- 拓展边的操作一直执行到所有的***d[v]***都代表从**s**到**v**最短通路。

起点为v_0， 记为s



重复次数	S	x	D(x)	$D(v_1)$	$D(v_2)$	$D(v_3)$	$D(v_4)$
开始	{s}	----	----	2	∞	∞	10
1	$\{s, v_1\}$	v_1	2	2	5	∞	9
2	$\{s, v_1, v_2\}$	v_2	5	2	5	9	9
3	$\{s, v_1, v_2, v_3\}$	v_3	9	2	5	9	9
4	全部	v_4	9	2	5	9	9

```
int arcs[10][10];//邻接矩阵
int D[10];//保存最短路径长度
int final[10];//若final[i]
int n = 0;//顶点个数
int v0 = 0;//源点
int v,w;
```

```
void ShortestPath_DIJ()
{
    for (v = 0; v < n; v++) //循环 初始化
    {
        final[v] = 0; D[v] = arcs[v0][v];
    }
    D[v0] = 0; final[v0]= 1; //初始化 v0顶点属于集合S
    //开始主循环 每次求得v0到某个顶点v的最短路径 并加v到集合S中
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        int min = MAX;
        for (w = 0; w < n; w++)
        {
            //我认为的核心过程--选点
            if (!final[w]) //如果w顶点在V-S中
            {
                //这个过程最终选出的点 应该是选出当前V-S中与S有关联边
                //且权值最小的顶点 书上描述为 当前离V0最近的点
                if (D[w] < min) {v = w; min = D[w];}
            }
        }
        final[v] = 1; //选出该点后加入到合集S中
        for (w = 0; w < n; w++)//更新当前最短路径和距离
        {
            /*在此循环中 v为当前刚选入集合S中的点
            则以点V为中间点 考察 d0v+dvw 是否小于 D[w] 如果小于 则更新
            比如加进点 3 则若要考察 D[5] 是否要更新 就 判断 d(v0-v3) + d(v3-v5) 的和是否小于D[5
            */
            if (!final[w] && (min+arcs[v][w]<D[w]))
            {
                D[w] = min + arcs[v][w];

            }
        }
    }
}
```

15.3 带权图

- 例：