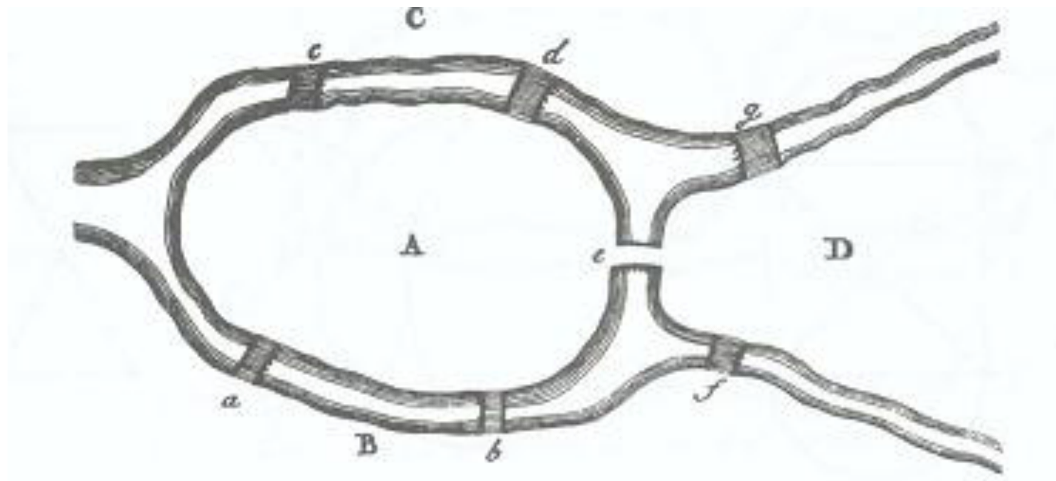
第十四章：图

图论起源于一些数学游戏的难题研究

- ❑ 哥尼斯堡七桥问题
- ❑ 迷宫问题
- ❑ 棋盘上马的行走路线问题
- ❑ 四色猜想
- ❑ 环游世界的问题

- Leonhard Euler(1707~1783):
- 1736年,“七桥问题”,图论和拓扑学诞生



预备知识

- 有序积: $A \times B = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$

  有序对: $\langle x,y \rangle \neq \langle y,x \rangle$

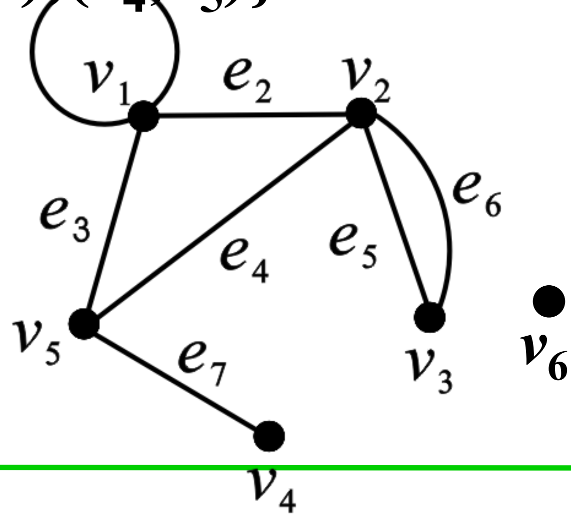
- 无序积: $A \& B = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$

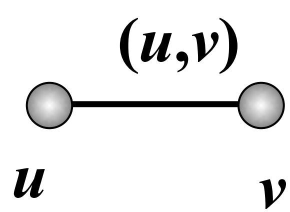
  无序对: $(x,y) = (y,x)$

无向图(undirected graph)

- 无向图(graph): G=<V,E>,
  - (1) V≠∅, 顶点,顶点(vertex / node)
  - (2) 多重集E⊆V&V, 边(edge / link)
- 例: G=<V,E>,V={v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6},

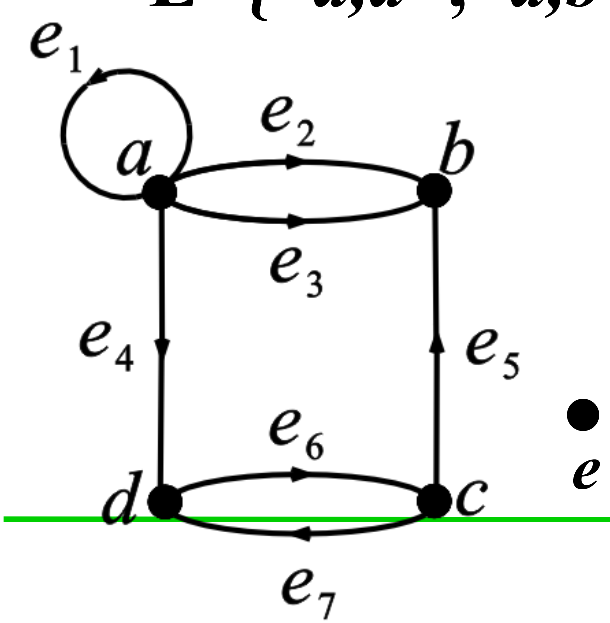
  E={(v_1,v_1),(v_1,v_2),(v_1,v_5),(v_2,v_5),(v_2,v_3),(v_2,v_3),(v_4,v_5)}

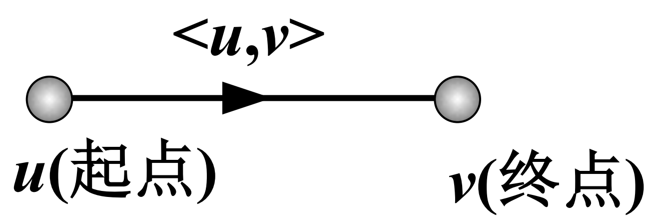




有向图(directed graph)

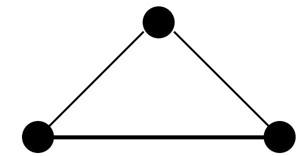
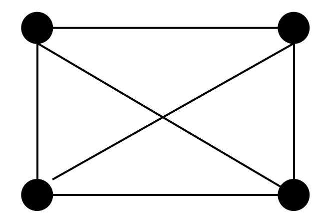
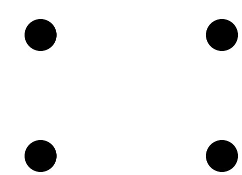
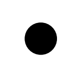
- 有向图(digraph): D=<V,E>,
  - (1) V≠∅, 顶点,顶点(vertex / node)
  - (2) 多重集E⊆V×V, 边(edge / link / arc)
- 例: D=<V,E>, V={a,b,c,d,e},
  - E={<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,b>,<d,c>,<c,d>}





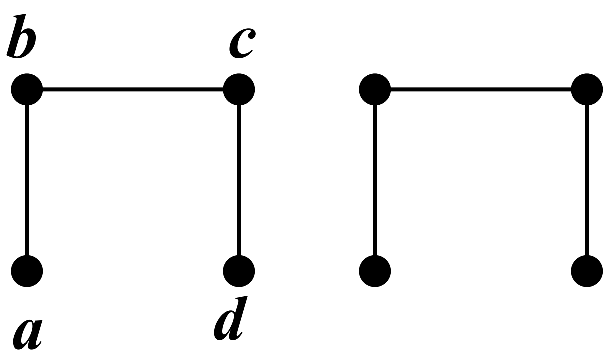
n阶图,零图,平凡图,空图

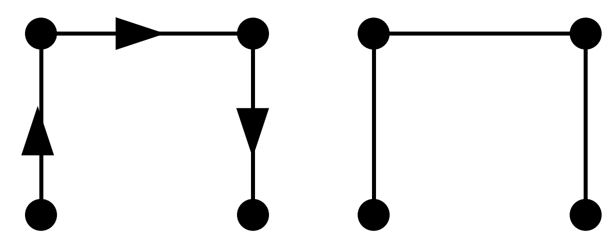
- n阶图(order-n graph): $|V(G)|=n$
- 有限图(finite graph): $|V(G)|<\infty$
- 零图(null graph): $E=\varnothing$, N_n
- 平凡图(trival graph): 1阶零图, N_1

标定图,非标定图,基图

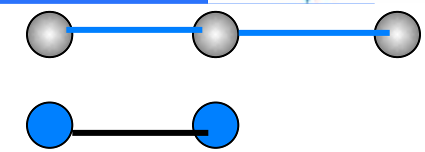
- 标定图(labeled graph): 顶点或边带标记
- 非标定图(unlabeled graph): 顶点或边不带标记
- 基图(底图): 有向图去掉边的方向后得到的无向图



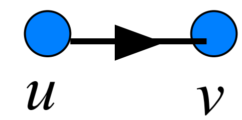


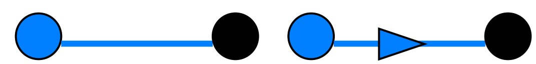
相邻(adjacent),关联(incident)

- 相邻(邻接)(adjacent): 点与点,边与边

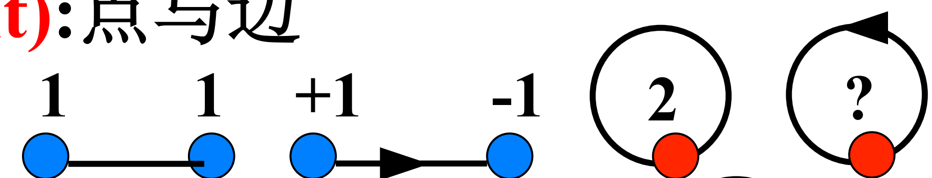


- 邻接到,邻接于: u邻接到v, v邻接于u

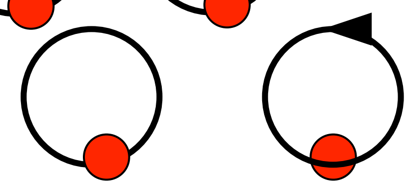




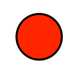
- 关联(incident):点与边
- 关联次数:



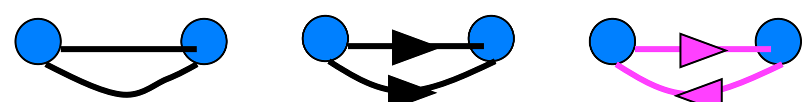
- 环(loop):只与一个顶点关联的边



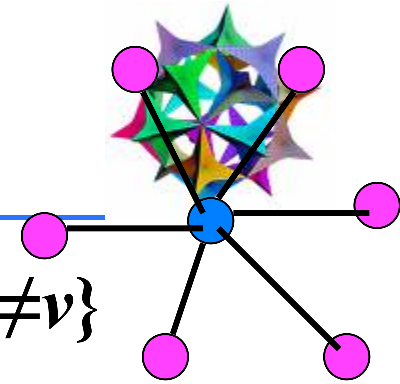
- 孤立点(isolated vertex):



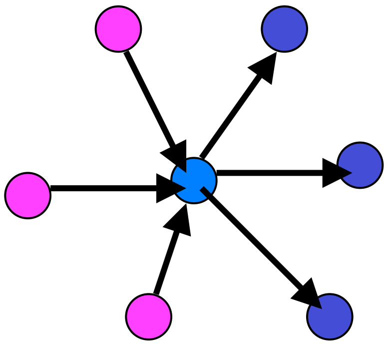
- 平行边(parallel edge):



邻域(neighborhood)



- 邻域: $N_G(v)=\{u|u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$
- 闭(closed)邻域: $\overline{N_G(v)}=N_G(v)\cup\{v\}$
- 关联集: $I_G(v)=\{e\,|\,e$与v关联$\}$
- 后继: $\Gamma_D^+(v)=\{u\,|\,u\in V(D)\wedge<v,u>\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 前驱: $\Gamma_D^-(v)=\{u\,|\,u\in V(D)\wedge<u,v>\in E(D)\wedge u\neq v\}$
- 邻域: $N_D(v)=\Gamma_D^+(v)\cup\Gamma_D^-(v)$
- 闭邻域: $\overline{\Gamma_D(v)}=N_D(v)\cup\{v\}$



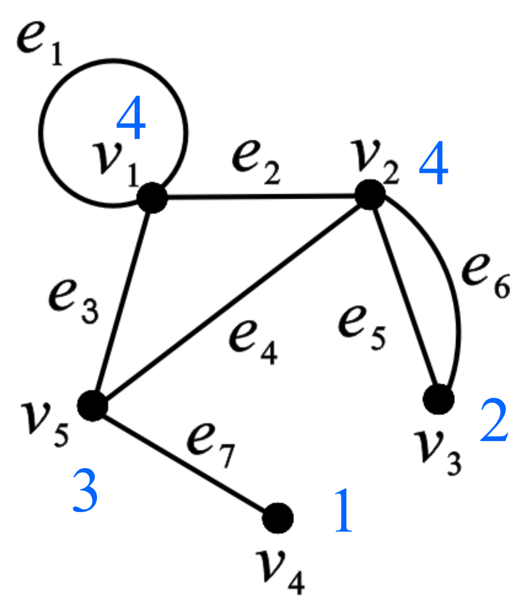
顶点的度(degree)

- 度$d_G(v)$: 与v关联的边的次数之和
- 出度$d_D^+(v)$: 与v关联的出边的次数之和
- 入度$d_D^-(v)$: 与v关联的入边的次数之和
- 度$d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$

注意：环对于顶点度的贡献是2

悬挂顶点的度为1

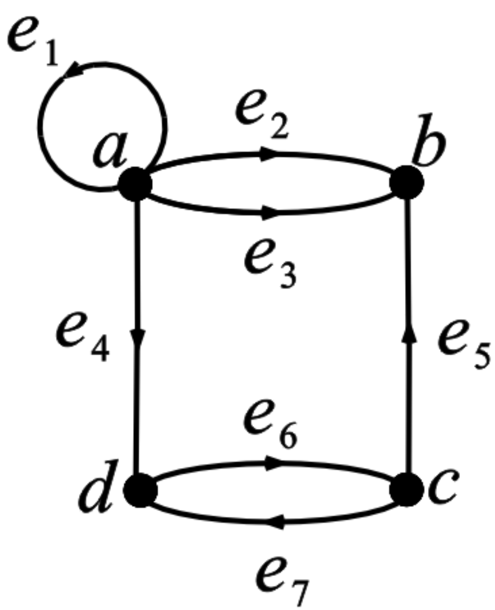
孤立顶点的度为0



最大(出/入)度,最小(出/入)度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 简记为Δ, δ, Δ^+, δ^+, Δ^-, δ^-

举例



$d^+(a)=4$，$d^-(a)=1$

(环e_1提供出度1，提供入度1)，

$d(a)=4+1=5$

$\Delta=5$，

$\delta=3$，

$\Delta^+=4$ (在a点达到)

$\delta^+=0$(在b点达到)

$\Delta^-=3$(在b点达到)

$\delta^-=1$(在a和c点达到)

握手定理(图论基本定理)

握手定理：设G是(n，m)无向图，它的顶点集合V＝{$v_1,v_2,\dots,v_n$}，于是有

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

定理　在有向图中，则为：

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m$$

推论：在图中，次数为奇数的顶点必定有偶数个

握手定理的应用(1)

例 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均不大于2, 问G至少有多少个顶点?

解 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times3+2\times(n-4)\geq2\times10$$

解得

$$n\geq8$$

握手定理的应用(2)

问题： 在一个部门的25个人中间，由于意见不同，是否可能每个人恰好与其他5个人意见一致？

解答： 不可能。考虑一个图，其中顶点代表人，如果两个人意见相同，可用边连接，所以每个顶点都是奇数度。存在奇数个度数为奇数的图，这是不可能的。

说明：

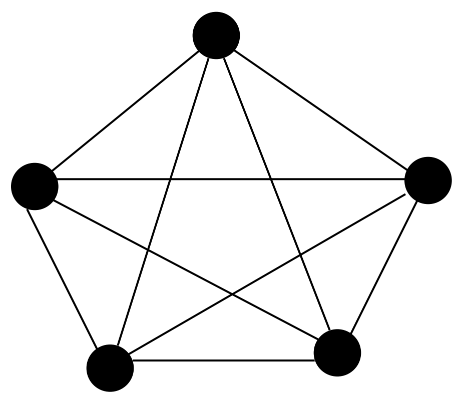
(1)很多离散问题可以用图模型求解。

(2)为了建立一个图模型，需要决定顶点和边分别代表什么。

(3)在一个图模型中，边经常代表两个顶点之间的关系。

简单图(Simple graph),正则图

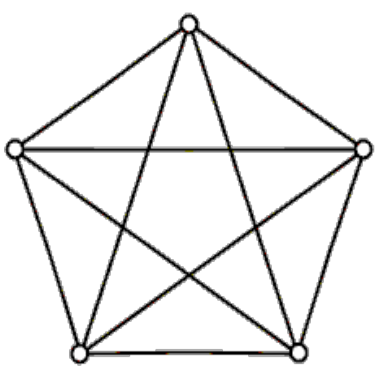
- 简单图(simple graph): 无环,无平行边
- 若G是简单图, 则$0 \le \Delta(G) \le n-1$
- k-正则图(regular graph): $\forall v$, $d(v) \equiv k$
- *n*阶完全图:*n*个顶点的简单图,且无向完全图有$\forall v$, $d(v) \equiv n-1$;有向完全图有$\forall v, d(v) \equiv 2(n-1)$;



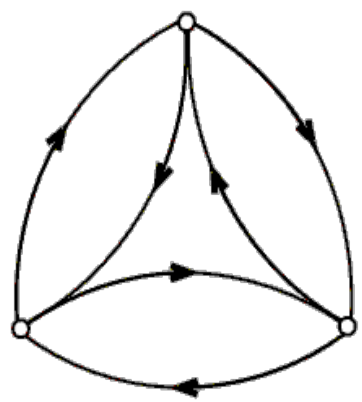
K_5

完全图、正则图的性质

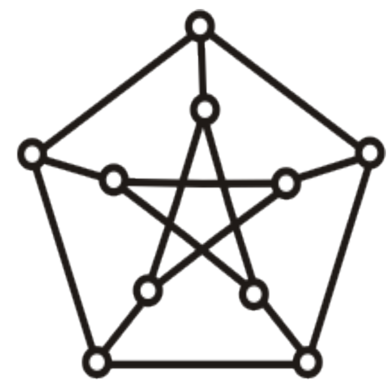
- 无向完全图K_n的边数为$n(n\text{-}1)/2$.
- n阶有向完全图的边数是$n(n\text{-}1)$.
- n阶k正则图的边数$m=nk/2$，$\Delta=\delta=k$



(1)



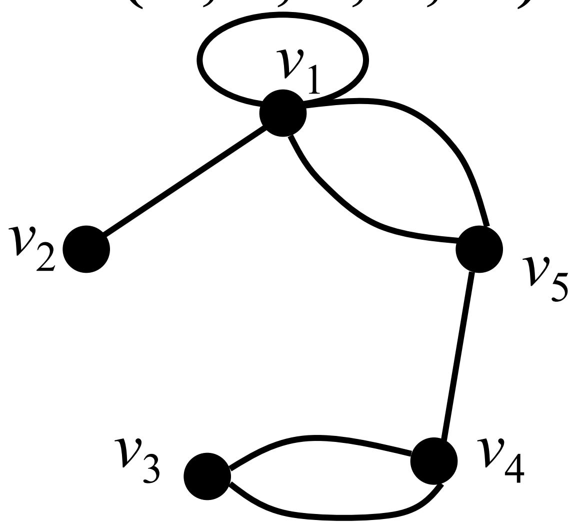
(2)



(3)

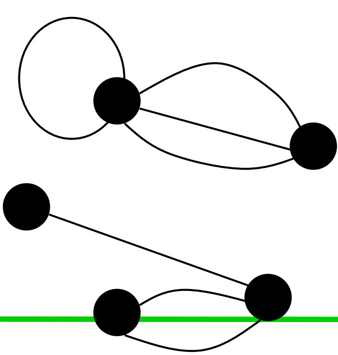
度数列

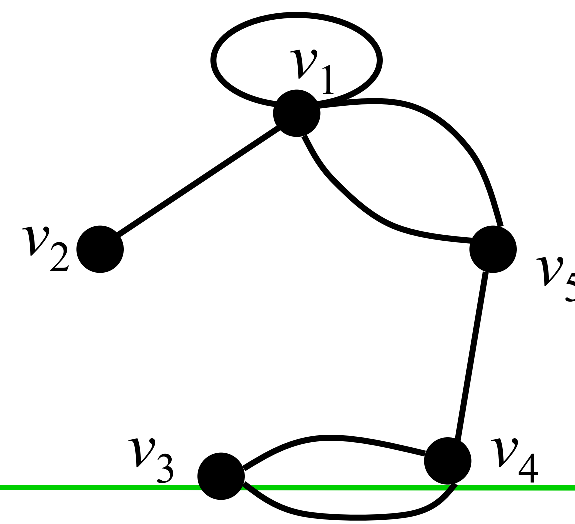
- **度数列:** 设G=<V,E>,V={$v_1,v_2,\ldots,v_n$}, 称 $d = (d(v_1),d(v_2),\ldots, d(v_n))$为G的度数列
- **例:** $d = (5, 1, 2, 3, 3)$



可图化,可简单图化

- 可图化:设非负整数列d=($d_1,d_2, \ldots, d_n$),
  若存在图G, 使得G的度数列是d, 则称d为可图化的
- 可简单图化:设非负整数列d=($d_1,d_2, \ldots, d_n$),若存在简单图G, 使得G的度数列是d,则称d为可简单图化的.
- 例: $d = (5, 3, 3, 2, 1)$





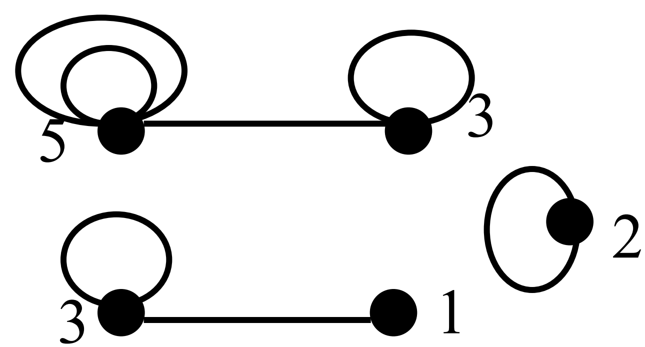
可图化充要条件

- **定理:** 非负整数列$d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$是可图化的, 当且仅当$d_1+d_2+\ldots+d_n=0(\bmod 2)$.

  证明: (⇒) 握手定理

  (⇐) 奇数度点两两之间连一边, 剩余度用环来实现. #

- **例:** (1)d=(5,4,4,3,3,2); (2)d=(5,3,3,2,1).



Havel定理(可简单图化充要条件)

- **定理 (V. Havel, 1955):** 设非负整数列 $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ 满足:

$$d_1+d_2+\ldots+d_n=0 \pmod 2$$

$$n-1\geq d_1\geq d_2\geq\ldots\geq d_n\geq 0$$

则d可简单图化当且仅当

$$d'=(d_2-1,d_3-1,\ldots,d_{d_1+1}-1,\ d_{d_1+2},\ldots,d_n)$$

可简单图化.

Havel定理(举例)

例: 判断下列非负整数列是否可简单图化.

(1) (5,5,4,4,2,2) (2)(4,4,3,3,2,2)

解: (1) (5,5,4,4,2,2), (4,3,3,1,1), (2,2,0,0), (1,-1,0)

不可简单图化.

(2) (4,4,3,3,2,2), (3,2,2,1,2), (3,2,2,2,1),

(1,1,1,1), (0,1,1), (1,1)

可简单图化. #

子图

设图$G=\langle V,E\rangle$, 图$G'=\langle V',E'\rangle$,

(1)子图:$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, G为G'的母图, 记作$G'\subseteq G$。

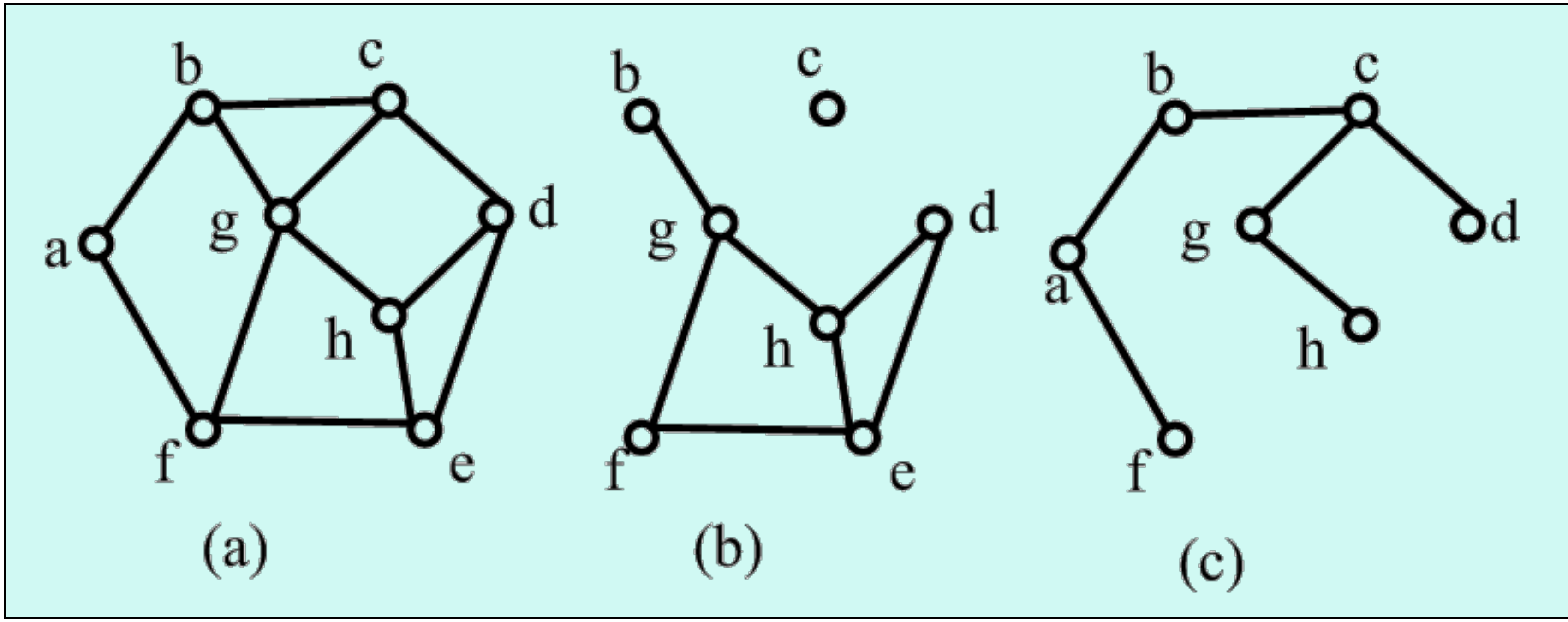
(2) G'为G的生成子图:若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$.

(3) G'为G的真子图:$V'\subset V$ 或$E'\subset E$.

(4) V'的导出子图$G[V']$:$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图.

(5) E'的导出子图$G[E']$:$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图.

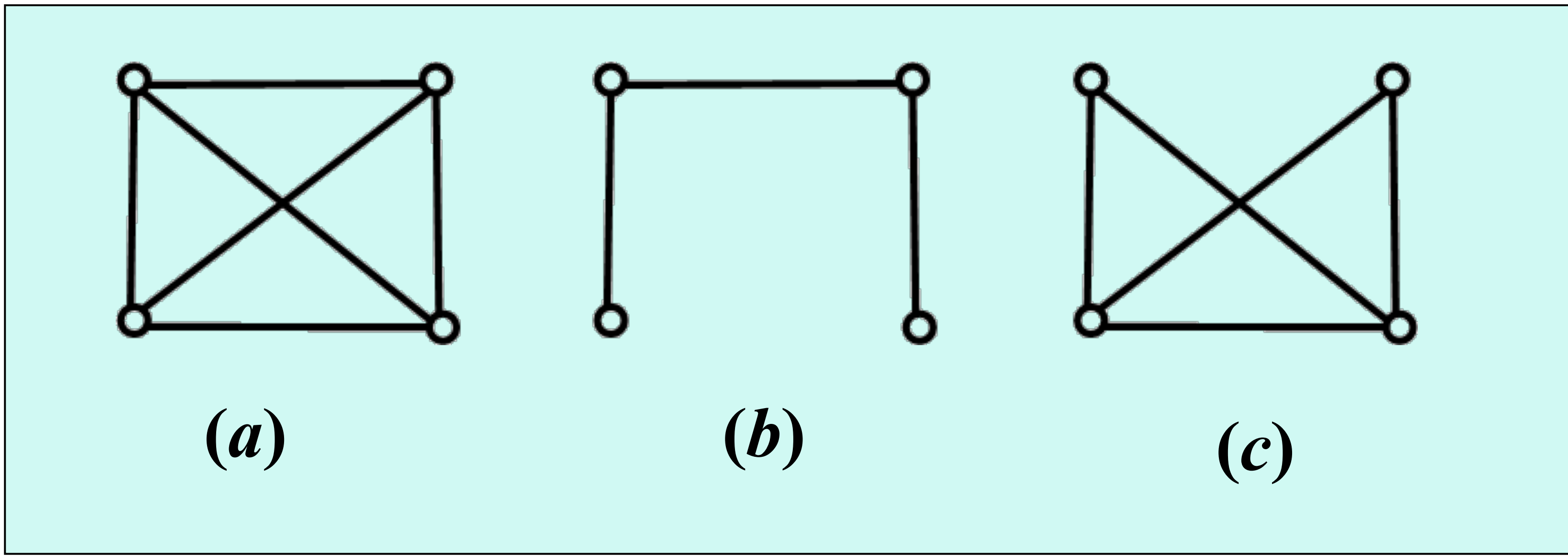
实例



(*b*),(*c*)都是(*a*)的子图,都不是(a)的生成子图,(c)是导出子图G[E′],E’={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,f>,<g,h>,<c,g>}.

实例

如下图，(b),(c)都是(a)的生成子图。

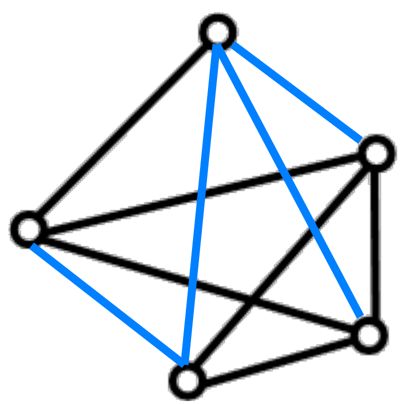


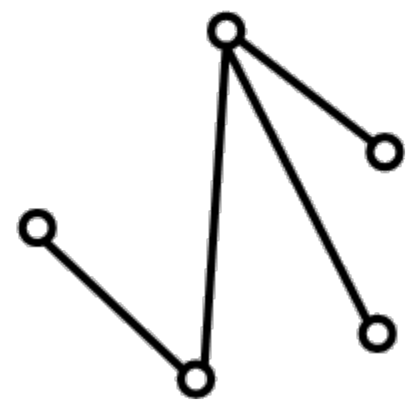
补图

补图 $\overline{G}$ ：给定一个图$G=<V,E>$，$\overline{G}=(\overline{V},\overline{E})$

$$\overline{V}=V,\overline{E}\cup E=E(K_n),\overline{E}\cap E=\phi$$

例 求下图的补图。





图的同构

- **图同构:** 设图$G=<V,E>$及图 $G'=<V',E'>$，如果存在双射函数 $f: V\to V'$,使得对于

$$\forall v_i,v_j\in V,\ (v_i,v_j)\in E\Leftrightarrow (f(v_i),f(v_j))\in E'$$

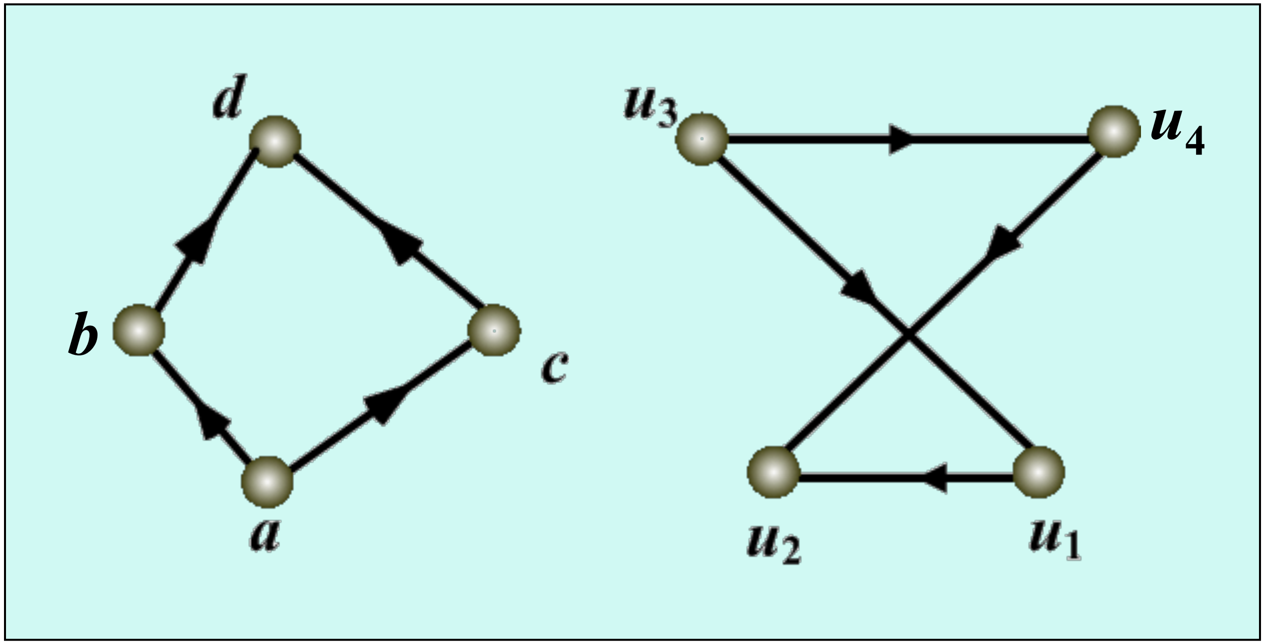
$$(<v_i,v_j>\in E \Leftrightarrow <f(v_i),f(v_j)>\in E')$$

则称G与G'是同构的，记作$G\cong G'$.

- **自补图:** 其补图与自身同构

同构的实例

例　　证明下面的两个图同构。

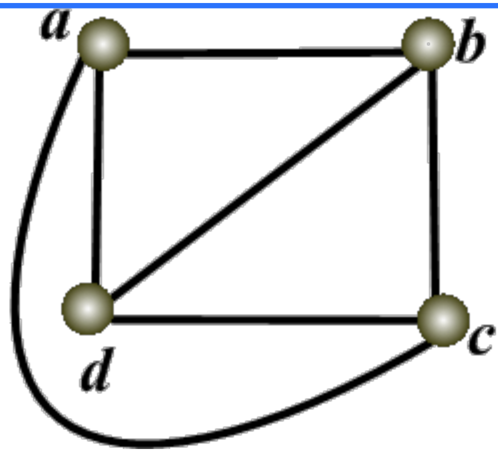


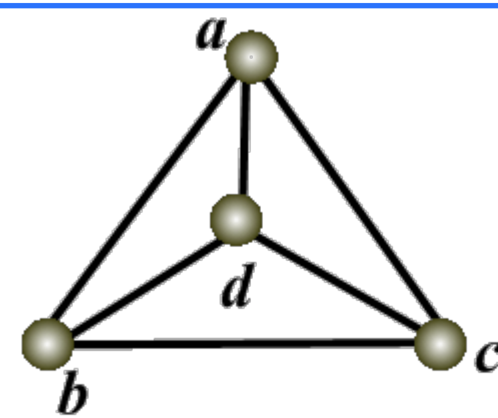
证明　作双射f：$a \mapsto u_3$，$b \mapsto u_4$，$c \mapsto u_1$，$d \mapsto u_2$

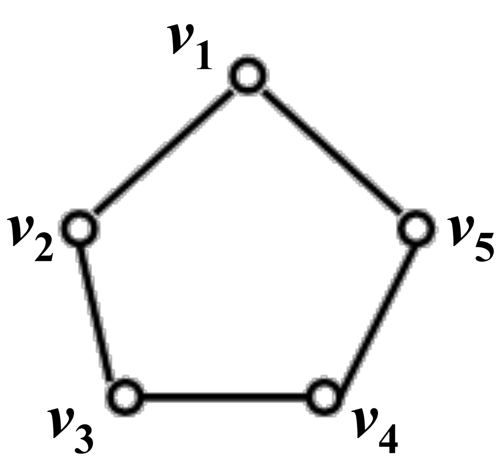
$f(<a,b>)=<u_3,u_4>$，　$f(<a,c>)=<u_3,u_1>$，

$f(<b,d>)=<u_4,u_2>$，　$f(<c,d>)=<u_1,u_2>$

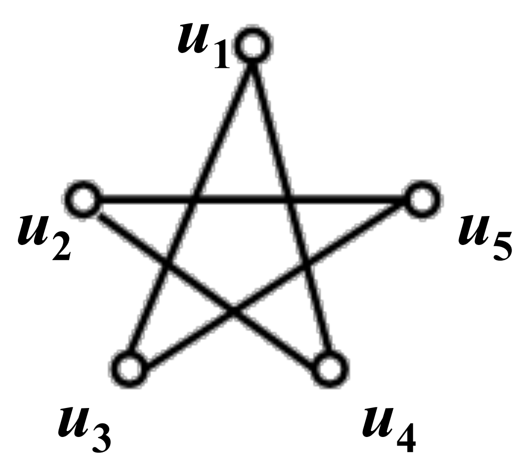
同构的实例





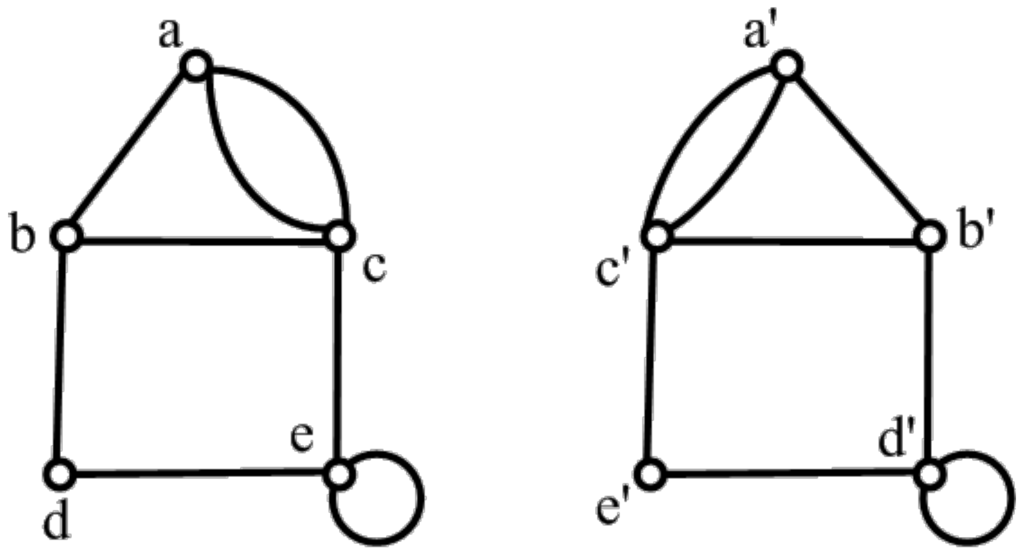


自补图



同构的实例

如下图中的两个图同构吗？为什么



解　顶点数和边数相同，度数序列都是**4,4,3,3,2**。如果同构，对应顶点的度相同，则***c***与***c'***对应，***c***的邻接点度序列为**4,3,3**，***c'***的邻接点度序列为**3,3,2**，因此不同构。

同构的实例

两图同构的必要条件：

(1)顶点数相等；

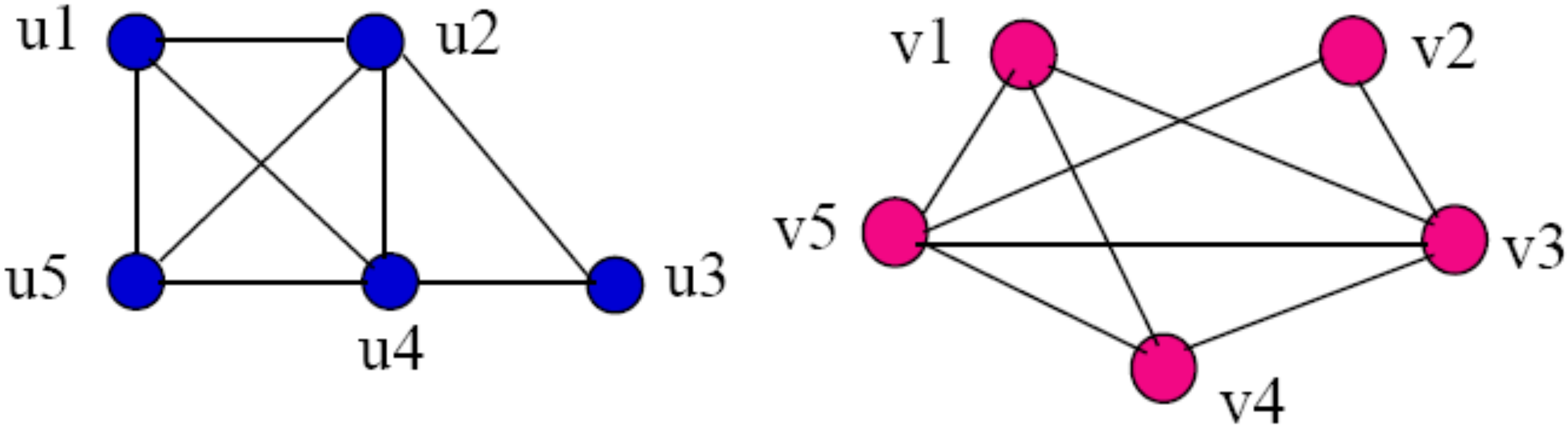
(2)边数相等；

(3)度数相同的顶点数相等。

但不是充分条件。如下图

同构的实例

- 例：判断下面两个图是否同构？



同构与子图(举例)

例：试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图

解　4阶3条边的无向简单图的所有顶点度之和为6，简单图中每个顶点的度数≤总边数，所以满足条件的图中每个顶点的度≤3。根据奇数度顶点有偶数个，可得：

$\Delta(G)=3$时，度序列有：3,1,1,1

$\Delta(G)\le 2$时，度序列有：2,2,1,1和2,2,2,0

练习题：画出所有具有5个顶点7条边的无向简单图。

关于图的其它定义

定义　设$G=\langle V,E\rangle$为无向图。

(1)设$e\in E$，用$G-e$表示从G中去掉边e，称为删除e。

设$E'\subset E$，用$G-E'$表示从G中删除E'中所有的边，称为删除E'。

(2)设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的一切边，称为删除顶点v。

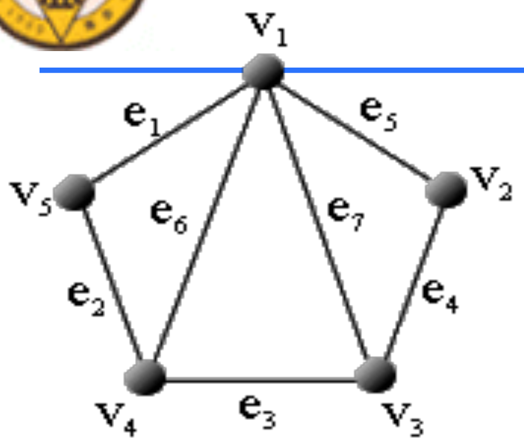
设$V'\subset V$，用$G-V'$表示从G中删除V'中所有顶点，称为删除V'。

(3)设边$e=(u,v)\in E$，用$G\backslash e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u,v用一个新的顶点w(或用u或v充当w)代替，使w关联除e外u,v关联的所有边，称为边e的收缩。

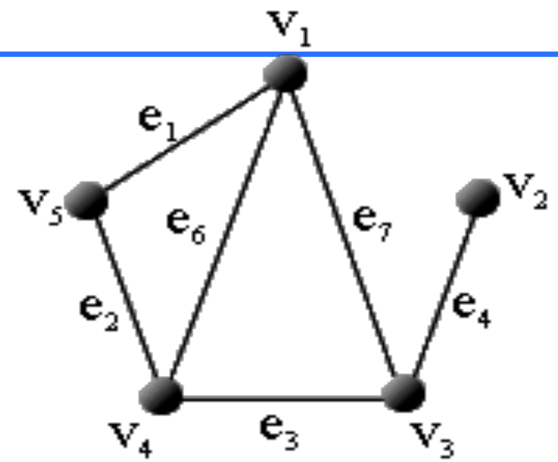
(4)设$u,v\in V$(u,v可能相邻，也可能不相邻)，用$G\cup(u,v)$(或$G+(u,v)$)表示在u,v之间加一条边(u,v)，称为加新边。

说明　在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边。

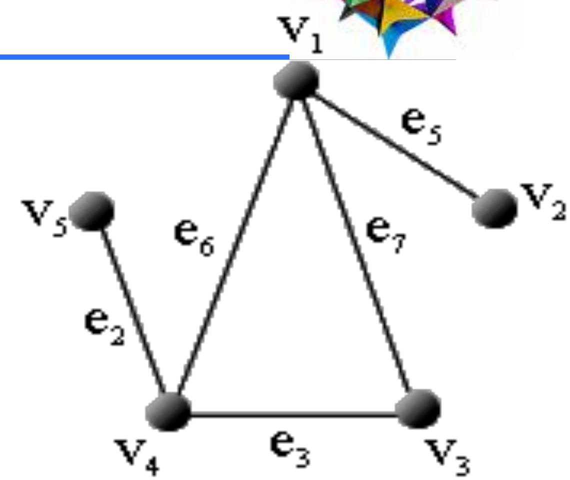
举例



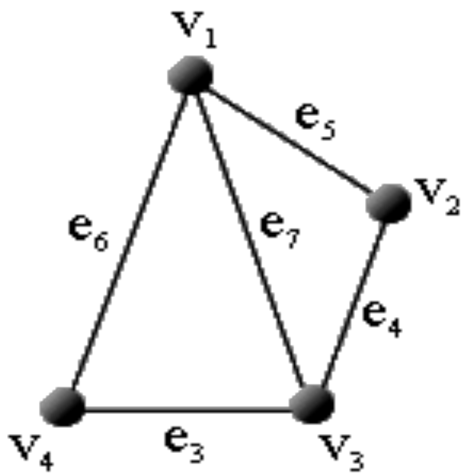
G



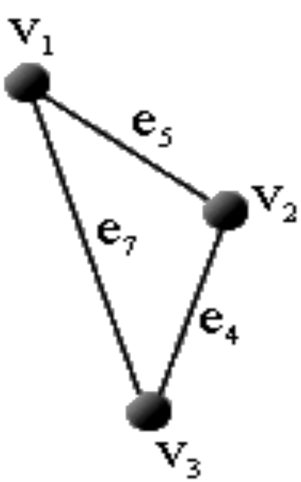
$G-e_5$



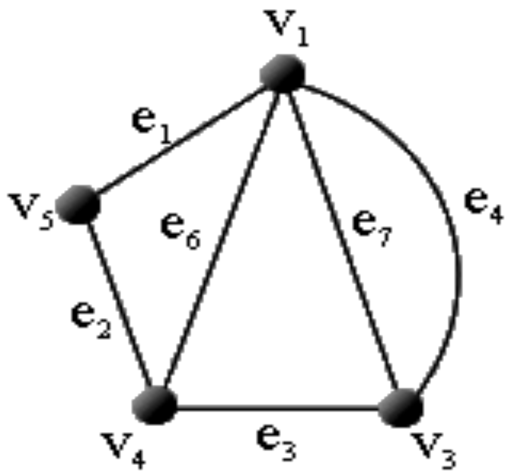
$G-\{e_1, e_4\}$



$G-v_5$



$G-\{v_4, v_5\}$



$G\backslash e_5$

路与回路

定义　给定图$G=<V,E>$，设$v_0,v_1,\ldots,v_n \in V$，$e_1,e_2,\ldots,e_n \in E$，其中e_i是关联于顶点v_{i-1},v_i的边，交替序列$v_0\ e_1v_1e_2\ldots\ e_nv_n$称为联结$v_0$到$v_n$的通路。

边的数目n称为路的长度.

当$v_0=v_n$时，这条路称作回路.

若路中所有的边$e_1,e_2,\ldots,e_n$均不相同，称作简单通路.

若路中所有的顶点和边均不相同，则称作初级通路.

路和回路的简单表示法

- 只用边的序列表示路(回路)，可以表示成$e_1,e_2,\ldots,e_n$。
- 在简单图中也可以只用顶点序列表示路(回路)。可以表示成$v_0, v_2, \ldots, v_n$。

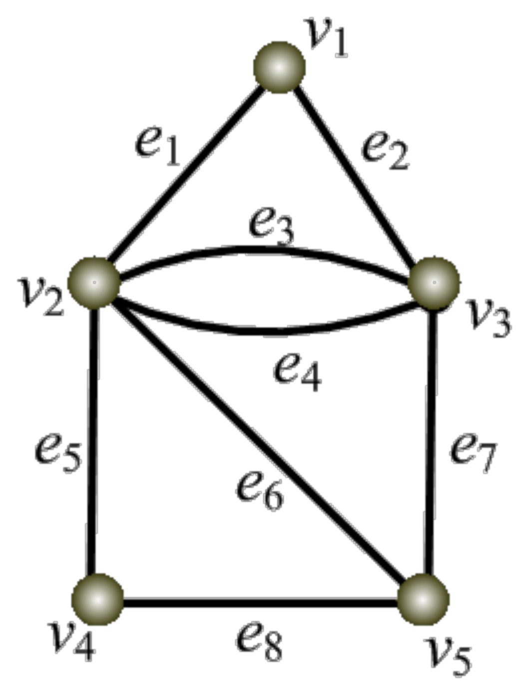
实例

通路： $v_1e_2v_3e_3\,v_2e_4\,v_3e_3\,v_2e_6\,v_5e_7\,v_3$

简单通路： $v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_4v_2$

初级通路： $v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

回路： $v_2e_3v_3e_4v_2e_1v_1e_2v_3e_4v_2$



路的存在性

定理 在一个具有n个顶点的图中，如果从顶点v_j到顶点v_k存在一条通路，则从顶点v_j到顶点v_k必存在一条不多于n-1条边的通路。

证明 如果从顶点v_j到顶点v_k存在一条路，设该路上的顶点序列是$v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k$，如果这条路中有$l$ 条边，则序列中必有l+1个顶点。假设$l>n-1$，则必有顶点v_s，它在序列中不止出现一次，即必有顶点序列$v_j, \ldots, v_s \ldots v_s \ldots v_k$，在路中删掉从$v_s$到$v_s$的这些边，仍是$v_j$到$v_k$的一条路，但这条路比原来的路边数少。如此重复进行下去，必可得到从v_s到v_s的边数不多于n-1的路。

推论

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于等于n-1的路径.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在长度小于等于n的圈.

无向图的连通性

定义 在无向图G中，顶点u和v之间若存在一条路，则称顶点u和v是连通的，记为$u \sim v$。

几点说明：

1.连通关系 $R=\{<u,v>| u,v \in V$且$u \sim v\}$是V上的等价关系。

2.连通分支：V关于R的等价类的导出子图。

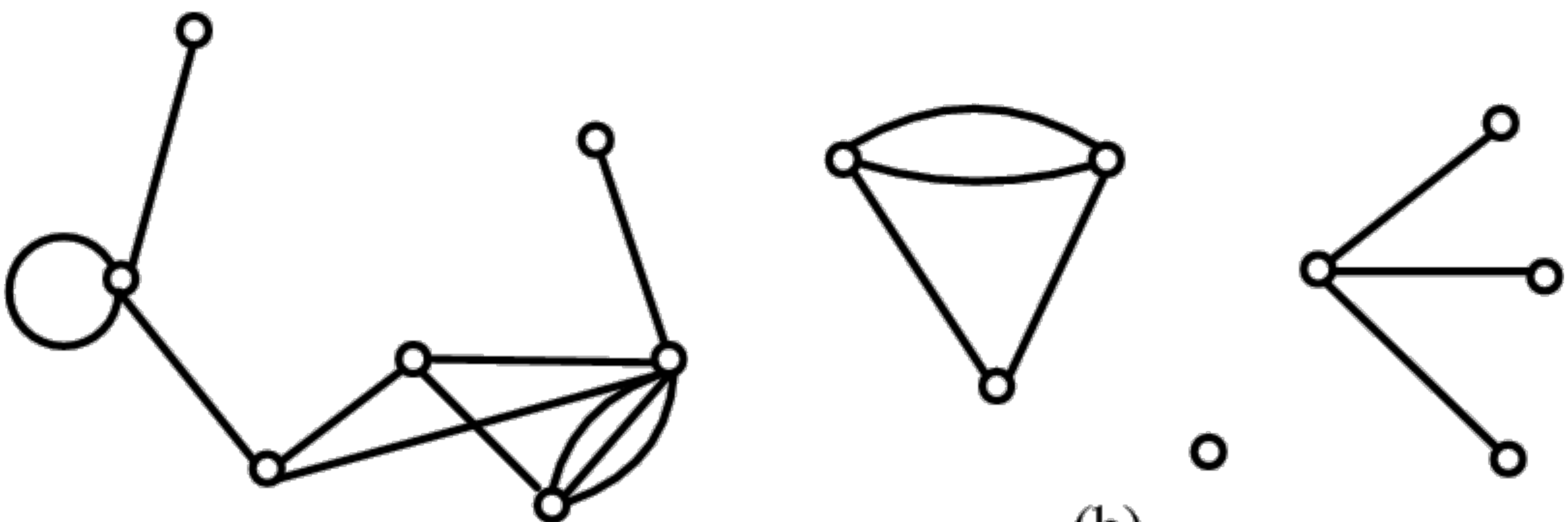
称$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$为G的连通分支，连通分支数记作$W(G)=m$。

定义 若图G只有一个连通分支，则称G是连通的.

即连通图G的连通分支数$W(G)=1$。

实例

例 下列图哪些是连通图？连通分支数是多少？



(a) (b)

连通图， W=1

非连通图， W=3

如何定义连通度

- 问题：如何定量地比较无向图的连通性的强与弱？
- 点连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少个顶点？
- 边连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少条边？
- “破坏连通性”是指“变得更加不连通”。

点割集

定义　设无向图$G=<V,E>$为连通图，若有点集$V_1 \subset V$，使图G删除了V_1的所有顶点后，所得的子图是不连通图，而删除了V_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称V_1是G的一个点割集。若某一个顶点构成一个点割集，则称该顶点为割点。

形式化为：

若$W(G-V_1)>W(G)$且$\forall V' \subset V_1$，$W(G-V')=W(G)$，则称V_1为G的点割集。若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点。

实例

例 求下图的割点

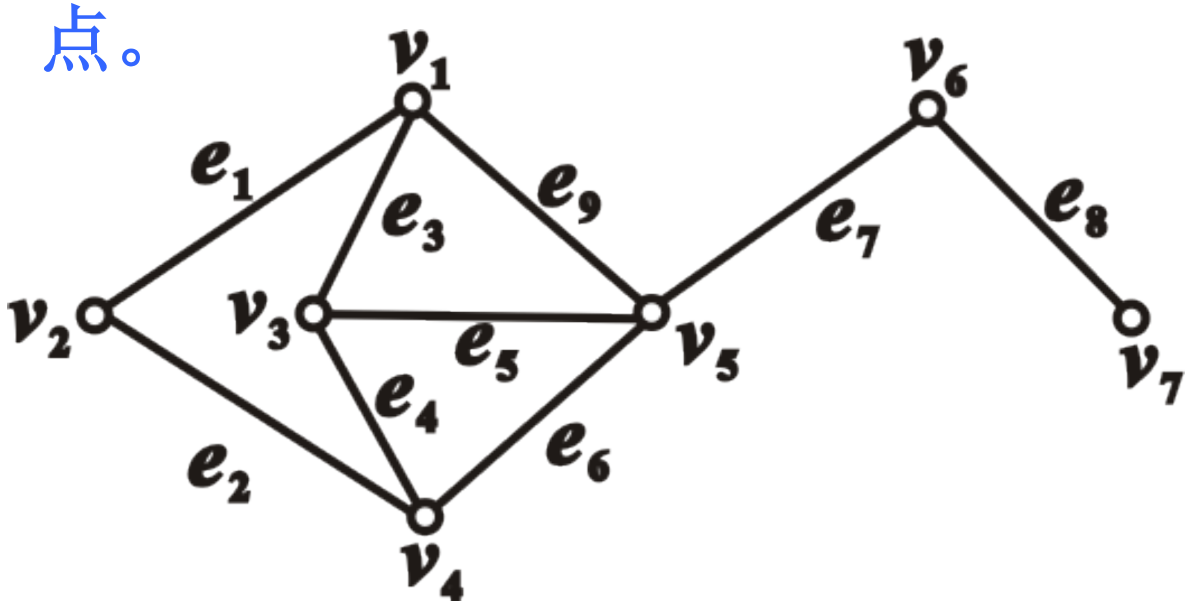
连通图，W=1

非连通图，W=2

因此s是割点。

实例

例　在下图所示的图中，找出点割集和割点。



点割集：$\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$，$\{v_5\}$

割点：v_6，v_5

v_2、v_3与v_7不在任何点割集中

无向图的点连通度

定义 设G是无向图，$k(G)=min\{|V_1| \mid V_1$是G的点割集$\}$是G的**点连通度**，也称作连通度。

几点说明：

1.连通度k(G)表示为了产生一个更不连通图所需要删除的点的最少数目。

2. 非连通图的连通度等于0，存在割点的连通图的连通度为1，n阶完全图的连通度为n-1。

3.连通度$k(G)$表示图G的连通程度，$k(G)$大表示连通性强，即需要删除更多的点才能使图更不连通。

边割集

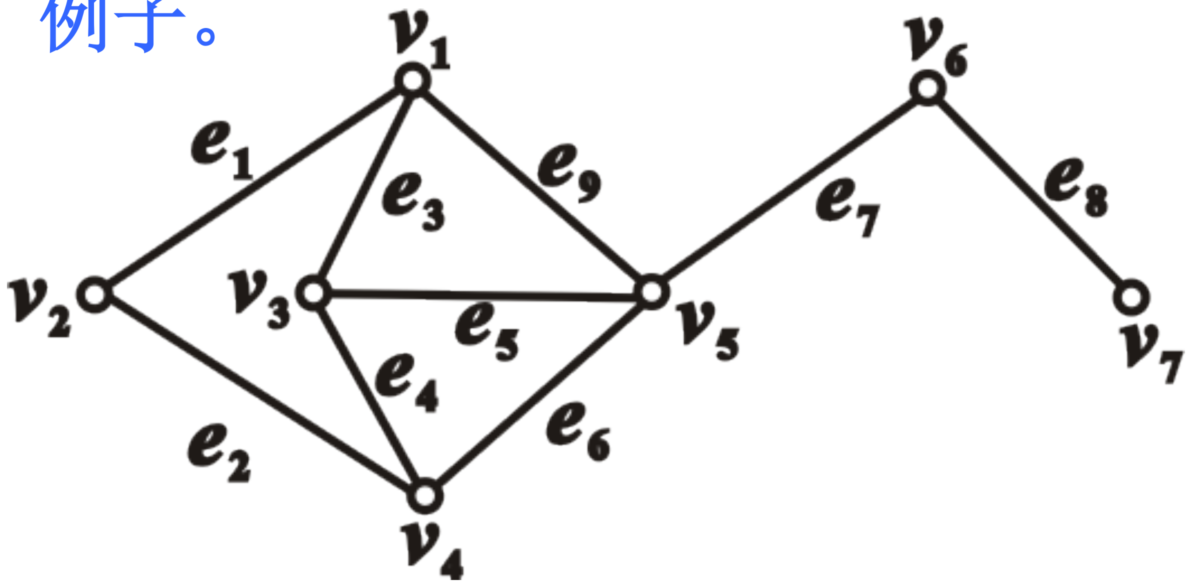
定义 设无向图$G=<V,E>$为连通图, 若有边集$E_1 \subset E$, 使图G删除了E_1的所有顶点后，所得的子图是不连通图，而删除了E_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称E_1是G的一个边割集。若某一个顶点构成一个点割集，则称该顶点为割边（或桥）。

更一般定义为:

若$W(G-E_1)>W(G)$且$\forall E' \subset E_1$, $W(G-E')=W(G)$, 则称E_1为G的边割集. 若$\{e\}$为点割集, 则称e为割边.

实例

例　在下图所示的图中，举出边割集和桥的例子。



边割集：$\{e_1,e_2\}$, $\{e_3,e_4,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_7\}$，$\{e_8\}$等

割边：e_7，e_8

边连通度

定义 设G是无向图，$\lambda(G)=min\{|E_1| \mid E_1$是$G$的边割集$\}$是$G$的边连通度。

几点说明：

1. 边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个更不连通图所需要删除的边的最少数目。
2. 非连通图的边连通度等于0，存在桥的连通图的边连通度为1，平凡图的边连通度为0。
3. 边连通度λ(G)表示图G的边连通程度， λ(G)大表示边连通性强，即需要删除更多的边才能使图更不连通。

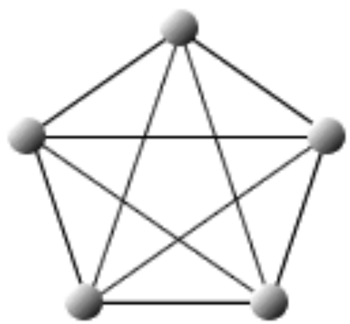
点连通度与边连通度的比较

定理 对于任何一个图G，有

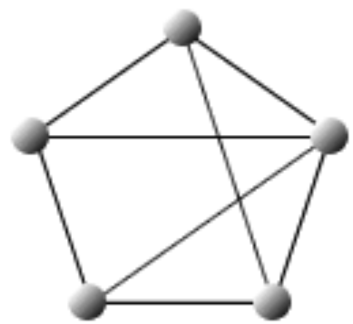
$$k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$

实例

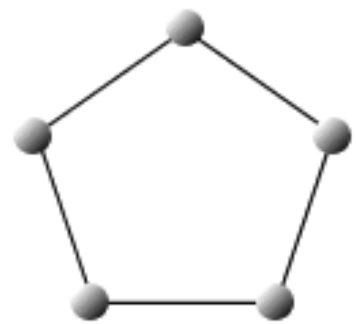
求所示各图的点连通度，边连通度



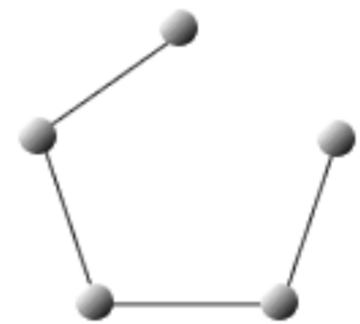
$K=\lambda=4$



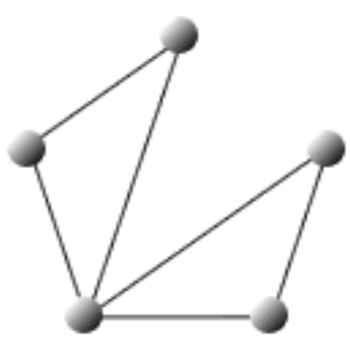
$K=\lambda=3$



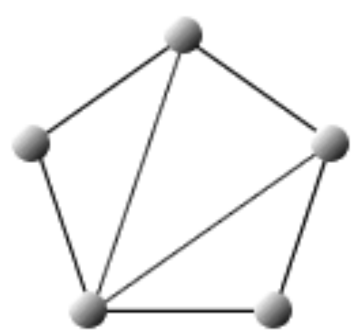
$K=\lambda=2$



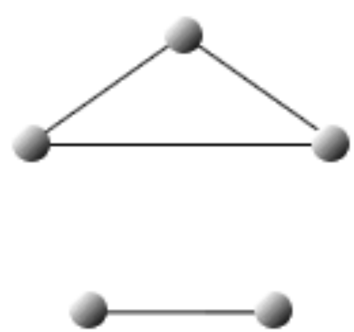
$K=\lambda=1$



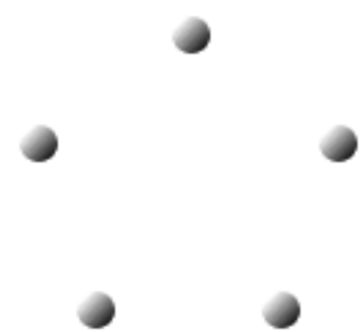
$K=1\quad\lambda=2$



$K=\lambda=2$



$K=\lambda=0$



$K=\lambda=0$

有向图的连通性

有向图$D=\langle V,E\rangle$

u可达v: u到v有一条路. 规定u到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性，但不一定具有对称性。

u到v的距离（或短程线）：u到v长度最短的路的长度（u可达v），记作$d\langle u,v\rangle$。

距离的性质：

1. $d\langle u,v\rangle\geq 0$,
2. $d\langle u,u\rangle=0$
3. $d\langle u,v\rangle+d\langle v,w\rangle\geq d\langle u,w\rangle$

图的直径：$D=\max\limits_{u,v\in V} d\langle u,v\rangle$

强连通、弱连通、单向连通

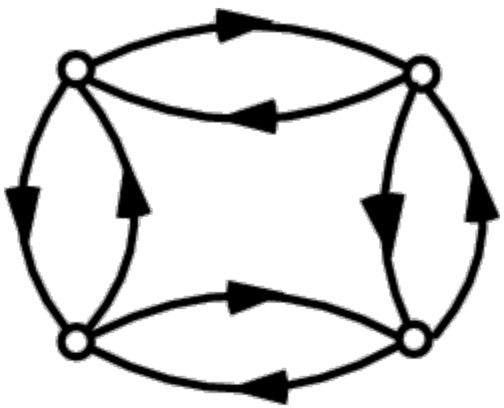
定义 在简单有向图G中，任何一对顶点间，至少有一个顶点到另一个顶点是可达的，则称这个图是单向连通的.

如果对于图G中的任何一对顶点两者之间是互相可达的，则称这个图是强连通的.

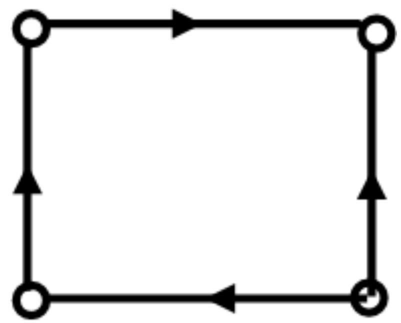
如果在图G的基图是连通的，则称该图为弱连通的.

实例

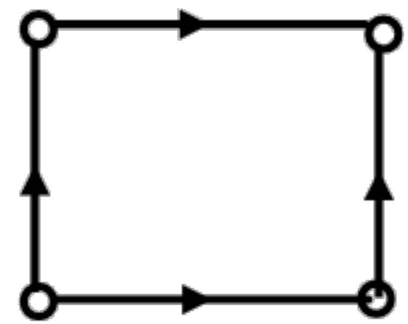
例　判断下列图的连通性。



(a)



(b)



(c)

强连通的　　单侧连通的　　弱连通的

强连通判别法

定理 一个有向图G是强连通的，当且仅当G中存在至少包含每个顶点一次的回路。

证明 充分性

设G中有一个回路，它至少包含每个顶点一次，

则G中任两个顶点都是相互可达的，

故G是强连通图。

必要性

设G含有n个顶点且是强连通的，

则任意两个顶点都是相互可达。

定理证明

故v_i可达v_{i+1}，i=1,2, …,n-1，

设P_i是v_i到v_{i+1}的路, P_n是v_n到v_1的路,

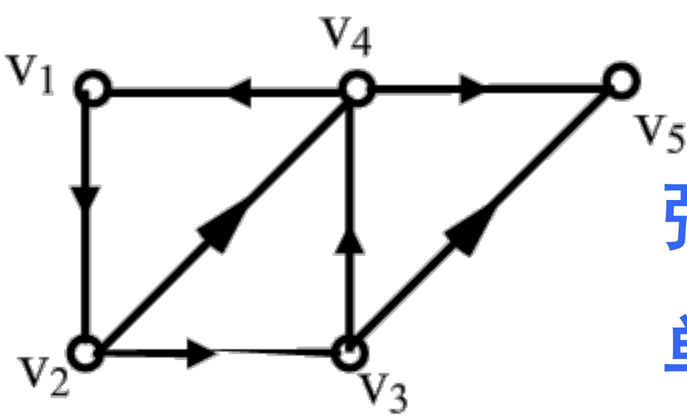
则P_1, P_2, … P_{n-1}, P_n所围成的回路经过G中每个结点至少一次.

定理　　图G单向连通当且仅当G中存在经过每个顶点至少一次的通路。

定理　　若图是G强连通的，则必是单侧连通的；若图G是单侧连通的，则必是弱连通的。

强分图，弱分图，单向分图

定义 在简单有向图中，具有强连通性质的最大子图，称为强分图；具有单侧连通性质的最大子图，称为单向分图；具有弱连通性质的最大子图，称为弱分图。



(a)

强连通分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$\{v_5\}$

单向分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4, v_5\}$

弱分图：$\{v_1,v_2,v_3,v_4, v_5\}$

实例

例：用简单有向图表示资源的分配

在计算机中的资源有CPU、内存、外存、输入输出设备，及编译程序等。

在同一时间内可能机器要执行数个程序，在执行中个程序均要用到上述资源，所以存在一资源分配问题。

设资源集合有：$R_t=\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$

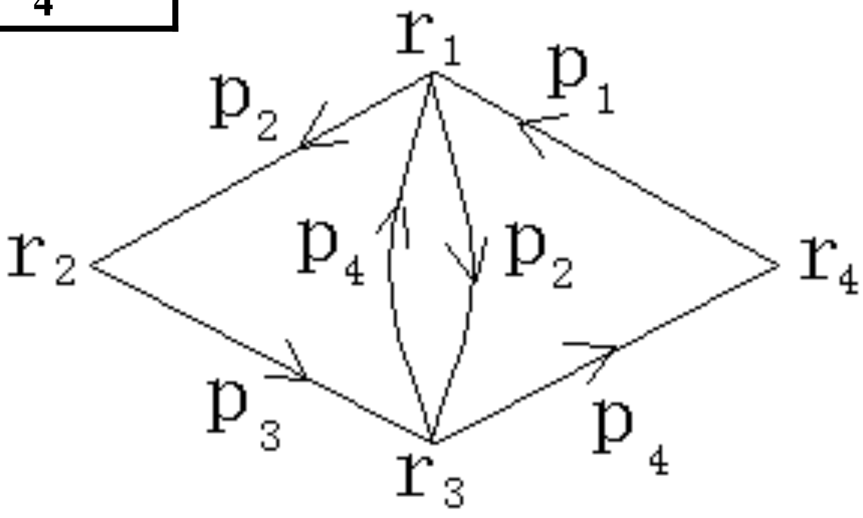
t时刻计算机中所运行的程序为

$A_t=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$，

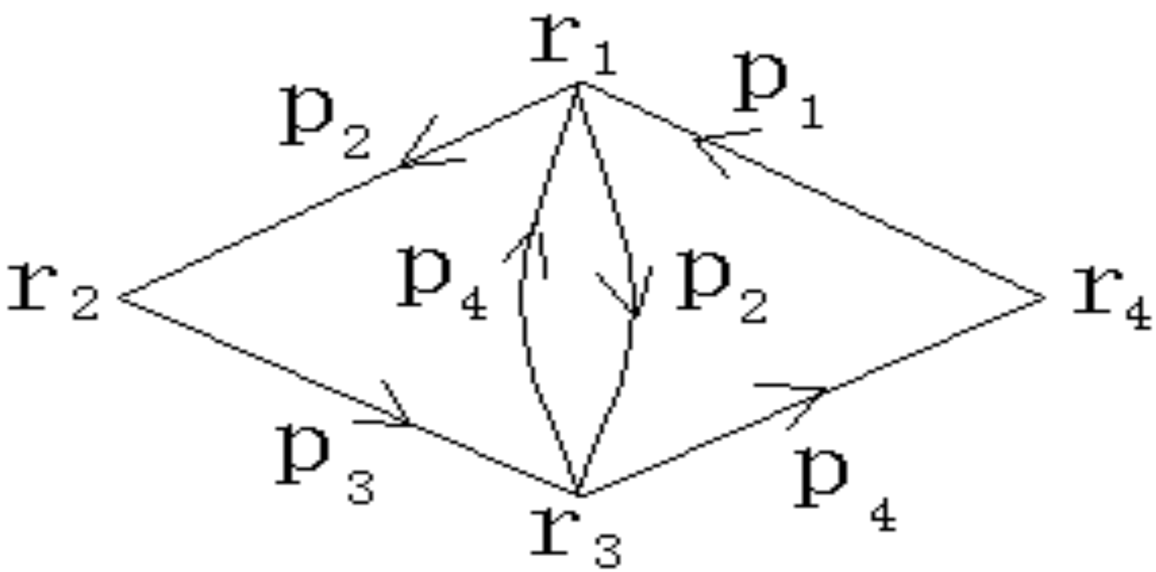
在这一时刻程序所拥有资源及所需资源关系：

实例

程序P_i(边)	占有资源r_i(顶点)	请求资源r_i(顶点)
P_1	r_4	r_1
P_2	r_1	r_2, r_3
P_3	r_2	r_3
P_4	r_3	r_1, r_4



实例



可以证明：当且仅当分配图包含多于一个顶点的回路时，在运算时刻**t**，计算机系统中会出现“死锁”状态。

例$\mathbf{P_2}$占有资源$\mathbf{r_1}$，请求资源$\mathbf{r_2}$。 $\mathbf{P_3}$占有资源$\mathbf{r_2}$，请求资源$\mathbf{r_3}$。 $\mathbf{P_4}$占有资源$\mathbf{r_3}$，请求资源$\mathbf{r_1}$。

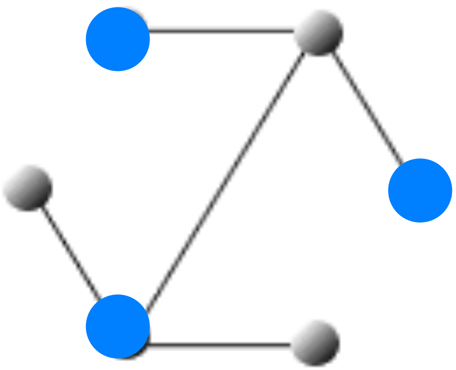
二部图

定义　设$G=<V,E>$为一个无向图，若能将V分成V_1和V_2($V_1 \cup V_2=V, V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得$G$中的每条边的两个端点都是一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，则称$G$为二部图（或称二分图，偶图等），称$V_1$和$V_2$为互补顶点子集。记为$<V_1,V_2,E>$。

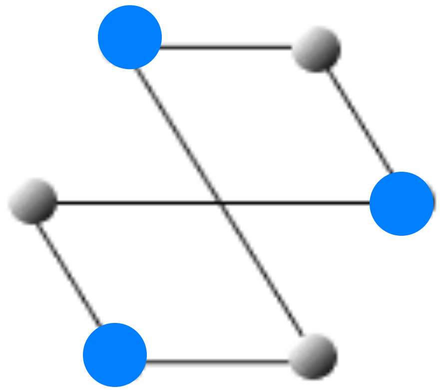
若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$。

说明　n阶零图为二部图。

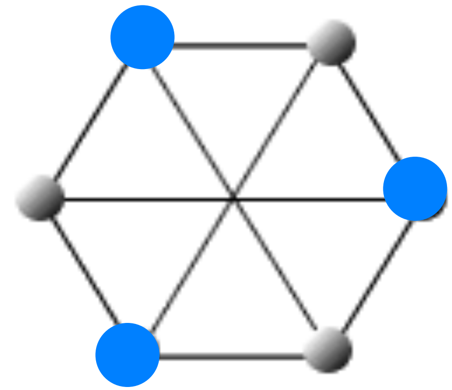
二部图举例



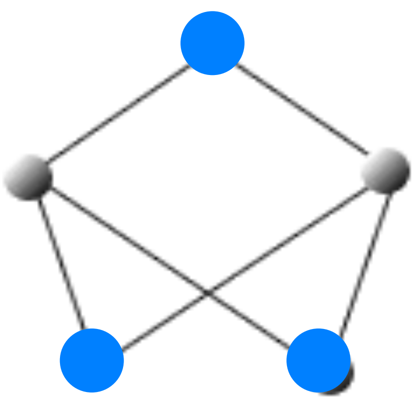
K_6的子图



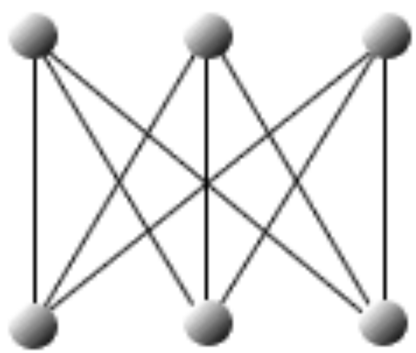
K_6的子图



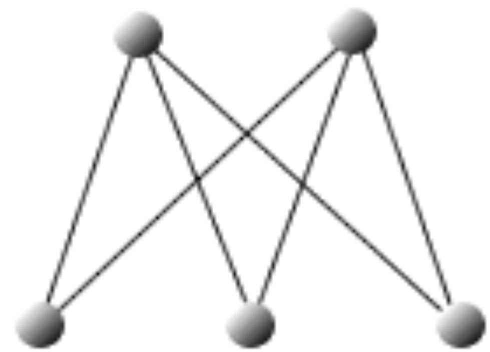
$K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{2,3}$

二部图的判定定理

定理 一个无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈。

证明 必要性。

若G中无回路，结论显然成立。

若G中有回路，只需证明G中无奇圈。

设C为G中任意一圈，令$C=v_{i1}v_{i2}\cdots v_{il}v_{i1}$，易知$l\geq 2$。

不妨设$v_{i1}\in V_1$，则必有$v_{il}\in V-V_1=V_2$，

而l必为偶数，于是C为偶圈，

由C的任意性可知结论成立。

二部图的判定定理

充分性。

不妨设G为连通图，否则可对每个连通分支进行讨论.

设v_0为G中任意一个顶点，令

$$V_1=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为偶数}\}$$

$$V_2=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为奇数}\}$$

易知，$V_1\neq\varnothing,V_2\neq\varnothing,V_1\cap V_2=\varnothing$，$V_1\cup V_2=V(G)$。

下面证明V_1中任意两顶点不相邻,V_2中任意两点不相邻.

若存在$v_i, v_j\in V_1$相邻，令$(v_i,v_j)=e$,

设v_0到v_i,v_j的距离分别为Γ_i,Γ_j,

则它们的长度$d(v_0,v_i),d(v_0,v_j)$都是偶数,

故$\Gamma_i\cup\Gamma_j\cup e$构成奇圈，这与已知条件矛盾。

类似可证V_2中也不存在相邻的顶点.

图的矩阵表示

- 矩阵
- 研究图的有关性质的最有效的工具之一
- 运用图的矩阵运算可以求出图的通路、回路和其它一些性质。

图的矩阵表示

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，令m_{ij}为顶点v_i与边e_j的关联次数，则称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵，记做M(G)。

- M(G)每列元素之和均为2
- M(G)第i行元素之和为v_i的度数
- 各顶点的度数之和等于边数的2倍
- 第j列与第k列相同当且仅当边e_j和e_k是平行边
- $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=0$ 当且仅当v_i是孤立点

图的矩阵表示

定义 设有向图$D=\langle V,E\rangle$中无环，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，

令$m_{ij}=1$ v_i为e_j的始点

0 v_i为e_j不关联

-1 v_i为e_j的终点

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵，记做M(D)。

- M(D)中所有元素之和为0。
- M(D)中，负1的个数等于正1的个数，都等于边数m。
- 第i行中，正1的个数等于$d^+(v_i)$，负1的个数等于$d^-(v_i)$。
- 平行边所对应的列相同。

图的矩阵表示

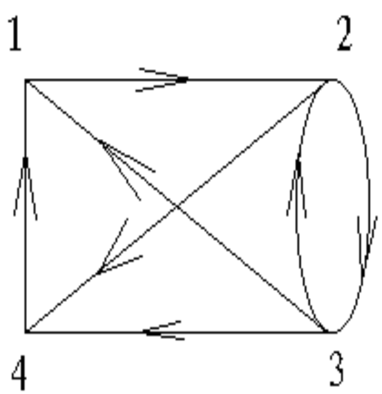
定义 设$D=<V, E>$是简单有向图，其中$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，并假定各顶点已经有从v_1到v_n的排列次序。定义一个nxn的矩阵A，并把其中各元素a_{ij}表示成：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果} <v_i, v_j> \in E \\ 0 & \text{如果} <v_i, v_j> \notin E \end{cases}$$

则称矩阵A为图G的邻接矩阵。

图的矩阵表示

例： 设图D＝＜V， E＞如下图所示， 其中 $V=\{v_1,v_2, v_3,v_4\}$



邻接矩阵
则规律为:

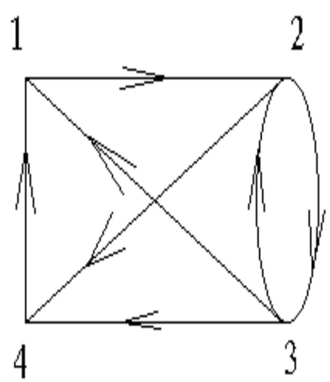
$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图的矩阵表示

在有向图的邻接矩阵中：

①行中**1**的个数就是行中相应顶点的引出次数

②列中**1**的个数就是列中相应顶点的引入次数



邻接矩阵 / 则规律为： $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

$D^+(1)=1, D^-(1)=2$

$D^+(2)=2, D^-(2)=2$

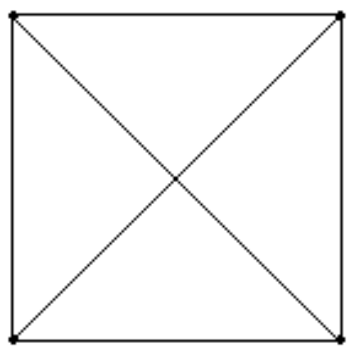
$D^+(3)=3, D^-(3)=1$

$D^+(4)=1, D^-(4)=2$

图的矩阵表示

简单有向图的邻接矩阵的概念可推广到简单无向图，且简单无向图的邻接矩阵一定是对称的。

例：



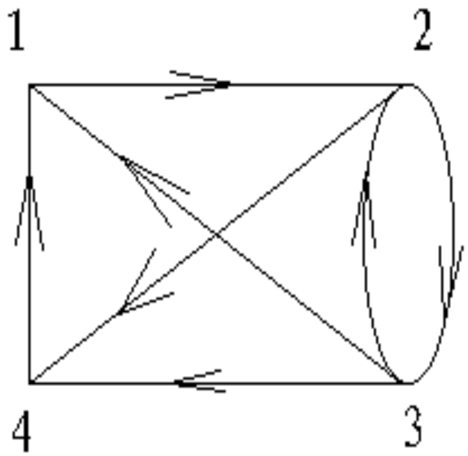
$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}=A^T$$

以主对角线对称

图的矩阵表示

*矩阵的计算(有向图中)：

设：

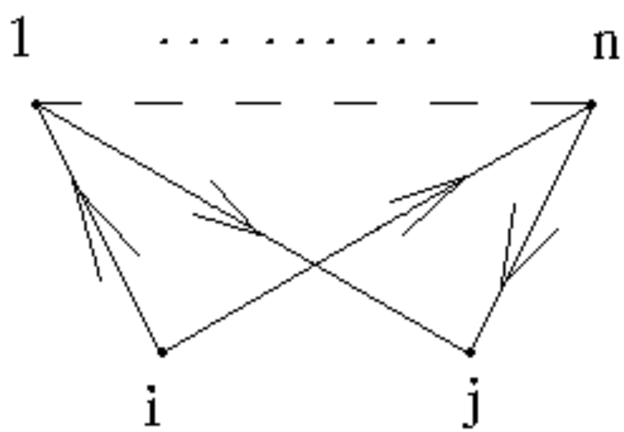


$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

图的矩阵表示

令 $A\times A=A^2=C=[c_{ij}],c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\times a_{kj}=a_{i1}\times a_{1j}+\cdots+a_{in}\times a_{nj}$



其含义为：

①若 $a_{i1}\times a_{1j}=1$，则表示有 **i→1→j** 长度为 **2** 的通路；

②**A²** 表示 **i** 和 **j** 之间具有长度为 **2** 的不同通路的条数，

A³ 表示 **i** 和 **j** 之间具有长度为 **3** 的不同通路的条数，

A⁴ 表示 **i** 和 **j** 之间具有长度为 **4** 的不同通路的条数。

图的矩阵表示

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从**2→1**有二条长度为**2**的通路

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从**3→1**有二条长度为**3**的通路

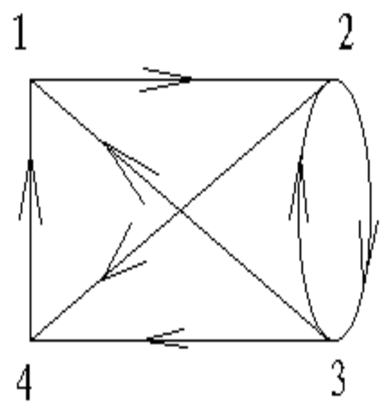
$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从**2→1**有二条长度为**4**的通路

图的矩阵表示

定理　设G＝＜V，E＞，|V|=n，A为G的邻接矩阵，则A^m的元素表示(i　,j)之间具有长度为m的不同通路数，(i　,j)表示矩阵A^m中的一个记入值。(长度为m的路径条数)

图的矩阵表示



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&1&2&2\\2&0&1&1\\1&1&0&1\\1&2&3&0\end{bmatrix}$$

图的矩阵表示

《推论*》：设**G＝＜V，E＞，|V|＝n**，二个顶点之间的距离$d(v_i,v_j)$可以从$A^1,A^2,\ldots, A^n$中去求得，当(i ,j)记入值不为零且矩阵的幂次最小时，这个幂次即是$d(v_i,v_j)$。

由推论可以求得一个图的距离矩阵。

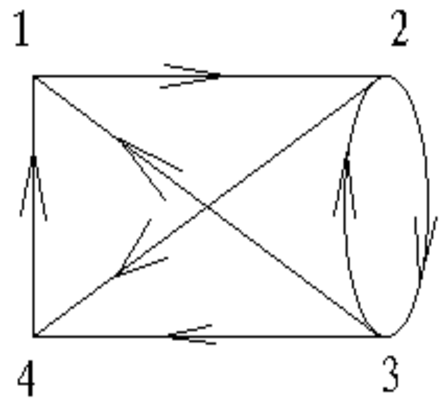
图的矩阵表示

定义　设D＝＜V，E＞是有向图，其中|V|＝n，假定D中各顶点是有序的，定义一个n×n矩阵P，它的元素为：

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_i到v_j可达\\ 0 & 若v_i到v_j不可达\end{cases}$$

则**P称为图D的可达性矩阵**。

图的矩阵表示



$$P = \begin{bmatrix} \Phi & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Phi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \Phi & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \Phi \end{bmatrix}$$

表示任何顶点之间是可达的。