第二部分　集合论

第六章　集合代数

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等　　　　广义并、交　　　有穷集合的计数

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集

合的元素

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有

理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法　自然数集合 $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$

谓词法　$S=\{ x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

元素与集合

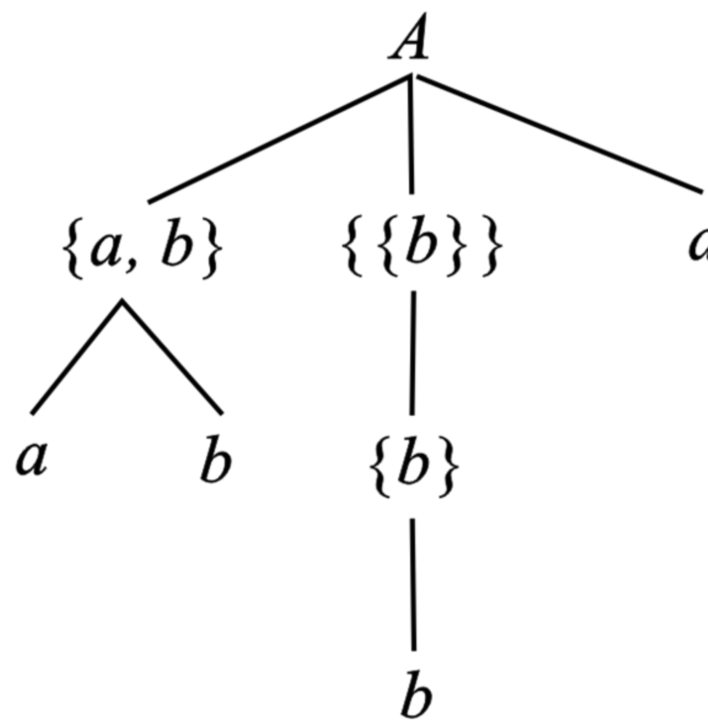
1. 集合的元素具有的性质

   无序性：元素列出的顺序无关

   相异性：集合的每个元素只计数一次

   确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

   任意性：集合的元素也可以是集合



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \not\subseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

空集、全集和幂集

1. 定义6.4 空集 $\varnothing$ ：不含有任何元素的集合

   实例：　$\{\, x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \,\}$

   定理6.1 空集是任何集合的子集。

   证 对于任意集合A，

   $$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x\in\varnothing \rightarrow x\in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

   推论 $\varnothing$是惟一的

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{\, x \mid x \subseteq A \,\}$

   实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，　$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

   计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 E：包含了所有集合的集合

6.2 集合的运算

初级运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

交 $A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$

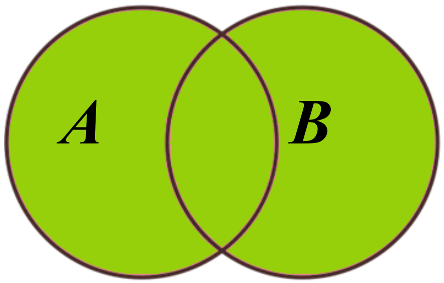
相对补 $A-B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

定义6.8 对称差 $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$

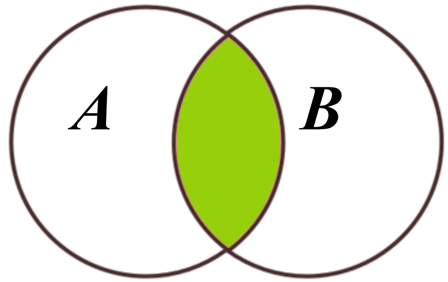
定义6.9 绝对补 $\sim A = E-A$

文氏图

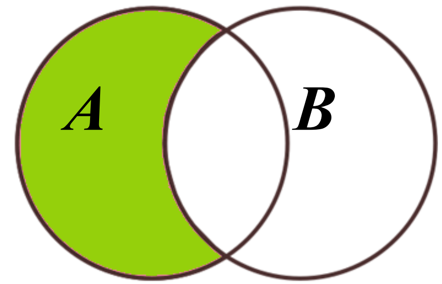
集合运算的表示



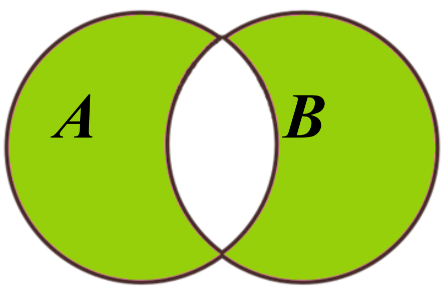
$A \cup B$



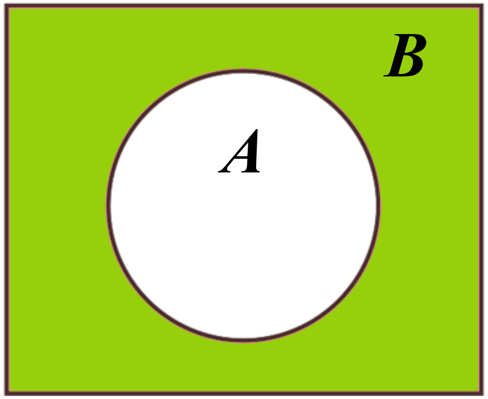
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z\in A \wedge x\in z)\}$

广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z\in A \rightarrow x\in z)\}$

实例

$$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$$

$$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$$

$$\cup\{\{a\}\}=\{a\}, \quad \cap\{\{a\}\}=\{a\}$$

运算的优先权规定

2 类运算：初级运算$\cup$, $\cap$, -, $\oplus$，

优先顺序由括号确定

1 类运算：广义运算和~运算，

运算由右向左进行

混合运算：1 类运算优先于2 类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$

$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$

$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$

$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

有穷集合的计数

定理

(1) $\max(|A|,|B|) \leq |A\cup B| \leq |A|+|B|$

(2) $|A\cap B| \leq \min(|A|,|B|)$

(3) $|A|-|B| \leq |A-B| \leq |A|$

(4) $|A\oplus B| = |A|+|B|-2|A\cap B|$

有穷集合的计数

定理（包含排斥定理）

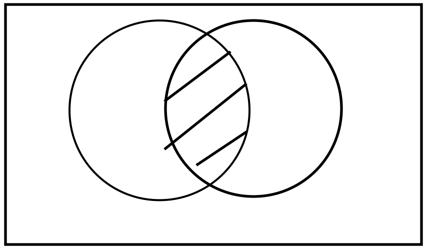
$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

证明: $A = A\cap(B\cup\sim B) = (A\cap B)\cup(A\cap\sim B)$

而 $(A\cap B)\cap(A\cap\sim B) = \varnothing$

$\therefore |A| = |A\cap B| + |A\cap\sim B|$

$\therefore |A\cap\sim B| = |A| - |A\cap B| \quad (1)$



而 $(A\cap\sim B)\cup B = A\cup B; (A\cap\sim B)\cap B = \varnothing$

$\therefore |A\cup B| = |A\cap\sim B| + |B|$

将(1)式代入 $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

有穷集合元素的计数

1. 文氏图法
2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}| = |S| - \sum_{1\le i\le n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

实例

例2　求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解　方法一：文氏图

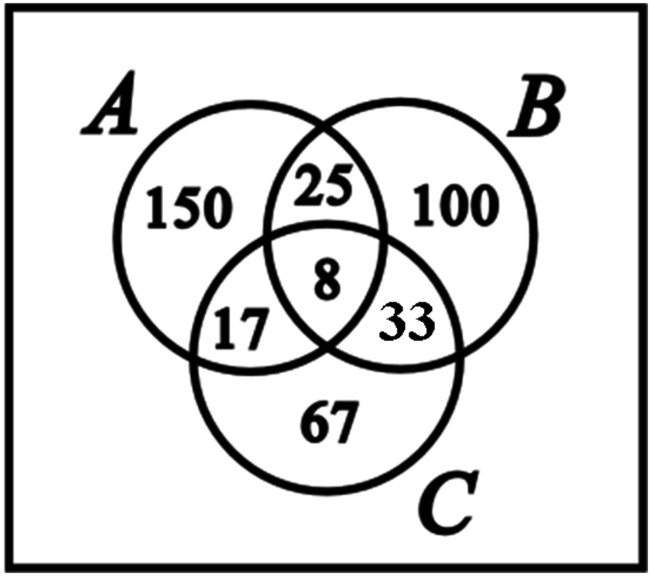
定义以下集合：

$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x$可被8整除$\}$



画出文氏图，然后填入相应的数字，解得

N=1000－(200+100+33+67)

=600

实例

方法二

$$|S| = 1000$$

$$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\ |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,\ |C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$$

$$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$

$$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$$

$$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

$$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

6.3 集合恒等式

集合算律

1．只涉及一个运算的算律：

交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	-	~
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4．涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$

任取x，　$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一　分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二

任取x，$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例3 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证　任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

等式代入法

方法二：等式置换法

例4 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$=A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$=A\cap(B\cup E)$ （交换律）

$=A\cap E$ （零律）

$=A$ （同一律）

练习1

1．判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a,b\}\}\}$

解　(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

练习2

2．设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$， $S_2=\{2, 4, 6, 8\}$

$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ $S_4=\{3, 4, 5\}$

$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下X是否与$S_1,\ldots,S_5$中某个集合相等？如果是，又与哪个集合相等？

（1）若 $X \cap S_5=\varnothing$

（2）若 $X \subseteq S_4$但 $X \cap S_2=\varnothing$

（3）若 $X \subseteq S_1$且 $X \nsubseteq S_3$

（4）若 $X-S_3=\varnothing$

（5）若 $X \subseteq S_3$ 且 $X \nsubseteq S_1$

解答

解

(1) 和S_5不交的子集不含有3和5，因此 $X=S_2$.

(2) S_4的子集只能是S_4和S_5. 由于与S_2不交，不能含有偶数，因此 $X=S_5$.

(3) S_1, S_2, S_3, S_4和S_5都是S_1的子集，不包含在S_3的子集含有偶数，因此 $X=S_1, S_2$或S_4.

(4) $X-S_3=\varnothing$意味着 X是S_3的子集，因此 $X=S_3$或 S_5.

(5) 由于S_3是S_1的子集，因此这样的X不存在.

练习3

3. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1）$A\text{-}B = A \Leftrightarrow B=\varnothing$

（2）$A\text{-}(B\cup C) = (A\text{-}B)\cap(A\text{-}C)$

（3）$A\oplus A = A$

（4）如果$A\cap B = B$，则$A = E$.

（5）$A = \{x\}\cup x$，则 $x\in A$且$x \subseteq A$.

解答

解

(1) $B=\varnothing$是$A-B=A$的充分条件，但不是必要条件. 当B不空但是与A不交时也有$A-B=A$.

(2) 这是DM律，命题为真.

(3) 不为真，$A\oplus A=\varnothing$.

(4) 命题不为真. $A\cap B=B$的充分必要条件是 $B\subseteq A$，不是$A=E$.

(5) 命题为真，因为 x 既是 A 的元素，也是 A 的子集