06-07 第二学期

几何代数期终考试试卷

一． (30%)填空题（I 表示单位矩阵）

1. 向量 $\alpha=(1,0,-1),\beta=(-1,1,0),\gamma=(1,1,k)$ 共面时参数 k 的值为__-2__，此时，与这三个向量都正交的一个单位向量是__$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$__；

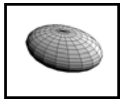
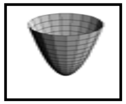
2. 向量组

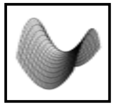
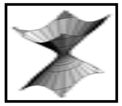
$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

的秩等于__2__，这个向量组的一极大线性无关组是__α_1,α_2__；(不唯一,任意两个线性无关的向量均是其极大无关组)

3. 假设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(2,t)$，若1是 A 的特征值，则参数 t 的值为__$-\frac{1}{2}$__；

4. 二次型 $f(x,y,z)=x^2+2z^2+2xy$ 的正、负惯性指数分别为__2 和 1__，下列图形中，能表示二次曲面 $f(x,y,z)=1$ 的图形的标号为__D__：

（A） ，（B） ，

（C） ，（D） ；

5. 由曲线 $\begin{cases}z=x^2\\y=0\end{cases}$ 绕 $z-$轴旋转所产生的旋转曲面方程为__$z=x^2+y^2$__；

6. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ 与向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}$ 等价，则参数 a,b 必定满足条件 $a\neq1,b\neq2$__；

7. 若 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&b\\0&0&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}c&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，则

$(a,b,c)=$ _(1,0,2)_ 。

二. （10%）已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问：当参数 p 取何值时，向量组

$$\beta_1=\alpha_2+2\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2,$$

$$\beta_3=\alpha_3+2\alpha_4,\beta_4=p\alpha_1+\alpha_4$$

也线性无关？

解: $p\neq\frac{1}{8}$.

三. （15%）假设 p,q 是参数，空间直角坐标系中平面 π_1,π_2,π_3 的方程分别如下：

$$\pi_1:x-y+2z=1,$$

$$\pi_2:2x+py+z=2,$$

$$\pi_3:3x+5y+2z=q$$

(1) 问：当 p,q 取何值时，这三个平面的公共点构成一直线？

(2) 当它们的公共点构成一直线时，求直线的方向向量，并给出该直线的对称方程。

解：(1) p=4, q=3 时，这三个平面的公共点构成一直线.

(2) 直线的方向向量为 (-9, 3, 6) 或 (-3, 1, 2), 直线的对称方程为 $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

四. （15%）设 $P=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，并且 $AP=P\Lambda$，求 A 及 A^{99}。

解: $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

$$A^{99}=(P\Lambda P^{-1})^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}=A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

五. （15%）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2\text{。}$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵；

（2） 求一个正交变换 $x=Qy$，把 f 化为标准形，并给出该标准形；

（3） 假设 $a>0$，求 $t=\max\limits_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=a} f(x_1,x_2,x_3)$ 的值.

解: (1) $\text{二次型的矩阵} A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

(2) $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

标准型为 $f=3y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

(3) t=3a.

六. （15%）证明题：

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\neq I$，其中，$a+d=2, ad-bc=1$。证明：$A$ 不与任何对角阵相似.

证明：先由 $\text{迹}(A)=2, |A|=1$,求出 A 的特征值均等于 1;

再利用反证法:假设 A 相似于对角阵,则 A 相似于单位阵,则 A 为单位阵,矛盾；所以 A 不相似于对角阵.

2. 假设 $s\times n$ 矩阵 A 的秩等于 r，并且非齐次线性方程组 $Ax=b$（$b\neq\theta$）有解。证明： $Ax=b$ 有并且只有 $n-r+1$ 个线性无关的解向量.

证：设 ξ 为 $Ax=b$ 的一个特解. 因为 A 的秩为 r，所以可设 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 为 $Ax=\theta$ 的一个基础解系. 则断言：

$$\xi,\ \xi+\eta_1,\ \xi+\eta_2,\ \ldots,\ \xi+\eta_{n-r}$$

为 $Ax=b$ 的一组线性无关解. 首先，易证它们是 $Ax=b$ 的一组解. 其次，

证它们线性无关：设 $k_0\xi+k_1(\xi+\eta_1)+k_2(\xi+\eta_2)+\ldots+k_{n-r}(\xi+\eta_{n-r})=\theta$.

整理可得

$$(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r})\xi+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}=\theta. \quad (*)$$

此时，若 $k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}\neq 0$，则 $\xi=-(k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r})^{-1}[k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}]$，易得 $A\xi=\theta$，与 $b\neq\theta$ 矛盾！于是 $k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}=0$.

从而由（*）得到 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}=\theta$. 又因为 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$ 为 $Ax=\theta$ 的一个基础解系，它们是线性无关的，所以 $k_1=k_2=\ldots=k_{n-r}=0$. 联立 $k_0+k_1+k_2+\ldots+k_{n-r}=0$，可得 $k_0=0$. 这样就证得 $\xi,\xi+\eta_1,\xi+\eta_2,\ \ldots,\ \xi+\eta_{n-r}$ 为 $Ax=b$ 的一组线性无关解.

下证 $Ax=b$ 只可能有 $n-r+1$ 个线性无关解. 因为 $Ax=b$ 任一个解都可表示为

$$x = \xi+ l_1 \eta_1 + l_2 \eta_2 +\dots+ l_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 $l_1, l_2, \dots, l_{n-r}$ 为一组常数， 以及

$$x = \xi+ l_1 \eta_1 + l_2 \eta_2 +\dots+ l_{n-r} \eta_{n-r}$$
$$=(1 -l_1 -l_2 -\dots-l_{n-r})\xi+ l_1 (\xi+\eta_1)+ l_2 (\xi+\eta_2)+\dots+ l_{n-r} (\xi+\eta_{n-r}),$$

所以 $Ax=b$ 任一个解都可由 ξ，$\xi+\eta_1$， $\xi+\eta_2$， $\dots$， $\xi+\eta_{n-r}$ 这样一组线性无关解进行线性表示. 于是任给 $Ax=b$ 一个线性无关的解向量组，也可由 ξ，$\xi+\eta_1$， $\xi+\eta_2$， $\dots$， $\xi+\eta_{n-r}$ 进行线性表示，则解向量组的秩不会超过 $n-r+1$， 自然解向量组的个数也不会超过 $n-r+1$. #

3. 若 A、B 都是可逆的实对称矩阵，且 A、B、$A-B$ 都是正定矩阵，证明：$B^{-1}-A^{-1}$ 也是正定矩阵.

证：先证明下述结论：

给定两个同阶的正定矩阵 A 和 B，则一定存在一个可逆阵 M 使得

$$M^TAM=E,$$
$$M^T BM=\Lambda,\ \Lambda \text{ 是对角阵}.$$

事实上，A 正定=>存在可逆 P 使 $P^TAP=E$；对于 P^TBP, 其是对称的， 所以存在正交阵 Q 使得 $Q^T(P^TBP)Q= \Lambda$， Λ 是对角阵；而 $Q^T(P^TAP)Q =Q^TEQ=E$. 于是可取 $M=PQ$ 使上述结论成立.

从上述结论可得 $A=(M^T)^{-1}EM^{-1}$， $B=(M^T)^{-1}\Lambda M^{-1}$. 那么

$$A – B = (M^T)^{-1} (E-\Lambda)M^{-1}.$$

因此 $A-B$ 与对角阵 $E-\Lambda$ 相似. 假设 $\Lambda= diag\{ d_1, d_2, \dots, d_n \}$. 又因为 $A-B$ 是正定的, 所以其特征值均为正数，即 $E-\Lambda$ 的对角元素均为正数. 则有 $1>d_i\ (i=1,2,\dots,n)$. 于是不难得到 $\Lambda^{-1}-E$ 是正定的. 注意到

$$B^{-1} – A^{-1} = M\Lambda^{-1}M^T - MEM^T = M(\Lambda^{-1}-E)M^T,$$

所以 $B^{-1} – A^{-1}$ 与 $\Lambda^{-1}-E$ 是合同的，自然也是正定的.