第七章：二元关系

第一节：有序对与笛卡儿积

第二节：二元关系

第三节：关系的运算

第四节：关系的性质

引言

- 关系是数学中最重要的概念之一
  - 父子关系、师生关系
  - 等于、大于、小于关系
  - 直线的平行、垂直关系
- 在计算机科学中有广泛应用
  - 数据结构
  - 算法分析
  - 程序设计
  - 数据库管理—关系数据库

第七章：二元关系

第一节：有序对与笛卡儿积

第二节：二元关系

第三节：关系的运算

第四节：关系的性质

7.1 有序对与笛卡儿积

- 有序对（序偶）：有两个元素x，y(允许$x=y$)按给定顺序排列组成的二元组合
  - 符号化：$\langle x, y\rangle$
  - x为第一元素，y为第二元素
  - 例：平面直角坐标系中的一个点的坐标
  - $<1, 3>$和$<3, 1>$是表示平面上两个不同的点
- $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$当且仅当$x=u$，$y=v$
  - 如果$x\neq y$，那么$<x, y>\neq<y, x>$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：已知$<x+2,4>=<5,2x+y>$，求x,y

解：根据有序对等式定义，只需求解方程式

$$x+2=5 \text{ 和 } 2x+y=4$$

得到： $x=3,\ y=-2$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡尔积A×B：集合A中元素为第一元素，集合B中元素为第二元素的有序对集
  - $A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$
- 例：设集合$A=\{a, b, c\}$，$B=\{0, 1\}$，求$A\times B$，$B\times A$，$(A\times B)\cap(B\times A)$

解

- $A\times B=\{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, c\rangle\}$
- $(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：设集合$A=\{1,2\}$求$P(A)\times A$

解:

$P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$P(A)\times A$

$=\{<\varnothing, 1>, <\varnothing, 2>, <\{1\}, 1>, <\{1\}, 2>, <\{2\}, 1>, <\{2\}, 2>, <\{1, 2\}, 1>, <\{1, 2\}, 2>\}$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 说明：
  - 如A，B均是有限集，$|A|=m$，$|B|=n$，则必有$|A\times B|=mn$
  - 一般说$A\times B$与$B\times A$不相等，即集合的笛卡尔积运算，不成立交换律

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡儿积的性质：
  - 对于任意集合A，$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$
  - 不满足结合律，即当A，B，C均非空时$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

- 例：**A={1,2}**，**B={2,3}**，**C={1,4}**

7.1 有序对与笛卡儿积

- 笛卡儿积的性质（续）：
  - 对任意三个集合A，B，C有

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（5）$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 证明：
  - 对任意三个集合A，B，C有

    $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明：$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (y\in B \vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in B) \vee (x\in A \wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B \vee <x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确?
  - $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$
    - 不正确。取$A=\varnothing$，$B\neq C$，$A\times B=A\times C=\varnothing$
  - $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$
    - 不正确。取$A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$，

$$A-(B\times C)=\{1\}-\{<1,2>\}=\{1\}$$

而$(A-B)\times(A-C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing$

7.1 有序对与笛卡儿积

- 例：设A，B，C，D是任意集合，判断下列命题是否正确？
  - $A=B$，$C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$
    - 正确。
  - 存在集合A使得$A \subseteq A\times A$
    - 正确。取$A=\varnothing$时，$A\subseteq A\times A$

第七章：二元关系

第一节：有序对与笛卡儿积

第二节：二元关系

第三节：关系的运算

第四节：关系的性质

7.2 二元关系

- 关系:事物之间（个体之间）的相互联系
- 二元关系***R***：满足下列条件之一的集合
  - 集合非空，其元素都是有序对
  - 集合为空集
- 定义：***A***，***B***是集合，***A***×***B***的子集叫做从***A***到***B***的一个二元关系
- 例：$A=\{0, 1\}$，$B=\{1, 2, 3\}$
  - $R_1=\{<0,2>\}$
  - $R_2=\{<0,1>\}$
  - $R_3=\varnothing$

7.2 二元关系

- 几类特殊关系：
  - 全域关系$E_A = A \times A$
  - 恒等关系$I_A = \{<x, x> \mid x \in A\}$
  - 空关系$\varnothing$

7.2 二元关系

- 例： $A=\{0,1,2\}$
  - $E_A=\{<0,0>,<0,1>,<0,2>,<1,0>,<1,1>,<1,2>,<2,0>,<2,1>,<2,2>\}$
  - $I_A=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>\}$

7.2 二元关系

- 例：包含关系
  - A是一个集合, 定义P(A)上的一个关系
  - $R_{\subseteq}=\{<u, v> \mid u\in P(A), v\in P(A), 且 u\subseteq v\}$
  - $A=\{a, b\}$, $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$
  - $R_{\subseteq}=\{<\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, A>, <\{a\}, \{a\}>, <\{a\}, A>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, A>, <A, A>\}$
- 例： $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $R=\{<a, b> \mid a是b的倍数\}$
  - $R=\{<2, 2>, <3, 3>, <4, 2>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 2>, <6, 3>, <6, 6>\}$

7.2 n元关系及其应用

- 定义： 设D_1，D_2，…，D_n是集合。在这些集合上的n元关系是$D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ 的子集。这些集合D_1，D_2，…，D_n叫做关系的域，n叫做它的阶。

7.2 n元关系及其应用

- 关系数据库和关系

- 关系中的每个元素是n元组，通常用*t*表示，也称 *记录*。
- 用来表示数据库的关系叫做表，表的每行对应一个元组，表的每列对应一个域。由于域可以相同，为了加以区分，必须对每列起一个名字，称为属性（**Attribute**）。*n*元关系必有*n*个属性。

TABLE 1 Students.

Student_name	*ID_number*	*Major*	*GPA*
Ackermann	231455	Computer Science	3.88
Adams	888323	Physics	3.45
Chou	102147	Computer Science	3.49
Goodfriend	453876	Mathematics	3.45
Rao	678543	Mathematics	3.90
Stevens	786576	Psychology	2.99

7.2 n元关系及其应用

- 若关系中的某个域的值能唯一地标识一个n元组，则称该域为主关键字(Primary Keys)。
- 在一个n元关系中域的组合也可以唯一地标识n元组。当一组域的值确定了一个关系中的n元组时，这些域的笛卡尔积就叫做复合关键字。

7.2 n元关系及其应用

n元关系的运算

- 选择运算(Select): 设R是n元关系，C是R中元素可能满足的一个条件。那么选择运算s_C将n元关系R映射到R中满足条件C的所有n元组构成的n元关系。
- 从关系中找出满足给定条件的那些元组称为选择。其中的条件是以逻辑表达式给出的，值为真的元组将被选取。这种运算是从水平方向抽取元组。

TABLE 1 Students.

Student_name	*ID_number*	*Major*	*GPA*
Ackermann	231455	Computer Science	3.88
Adams	888323	Physics	3.45
Chou	102147	Computer Science	3.49
Goodfriend	453876	Mathematics	3.45
Rao	678543	Mathematics	3.90
Stevens	786576	Psychology	2.99

7.2 n元关系及其应用

- 投影运算(Projection)：投影$P_{i1,i2\ldots im}$将n元组$<a_1,a_2,\ldots a_n>$映到m元组$< a_1,a_2,\ldots a_m>$,其中$m\le n$。
- 从关系模式中挑选若干属性组成新的关系称为投影。这是从列的角度进行的运算，相当于对关系进行垂直分解。

7.2 n元关系及其应用

- 例：当投影$P_{1,4}$用于表1时结果如图

TABLE 1 Students.

Student_name	*ID_number*	*Major*	*GPA*
Ackermann	231455	Computer Science	3.88
Adams	888323	Physics	3.45
Chou	102147	Computer Science	3.49
Goodfriend	453876	Mathematics	3.45
Rao	678543	Mathematics	3.90
Stevens	786576	Psychology	2.99

TABLE 2 GPAs.

Student_name	*GPA*
Ackermann	3.88
Adams	3.45
Chou	3.49
Goodfriend	3.45
Rao	3.90
Stevens	2.99

7.2 n元关系及其应用

- 选择和投影运算都是属于一元运算，它们的操作对象只是一个关系。联接运算是二元运算，需要两个关系作为操作对象。
- 联接(Join)：联接是将两个关系通过公共的属性名拼接成一个更宽的关系，生成的新关系中包含满足联接条件的元组。

7.2 n元关系及其应用

TABLE 5 Teaching_assignments.

Professor	*Department*	*Course_number*
Cruz	Zoology	335
Cruz	Zoology	412
Farber	Psychology	501
Farber	Psychology	617
Grammer	Physics	544
Grammer	Physics	551
Rosen	Computer Science	518
Rosen	Mathematics	575

TABLE 6 Class_schedule.

Department	*Course_number*	*Room*	*Time*
Computer Science	518	N521	2:00 P.M.
Mathematics	575	N502	3:00 P.M.
Mathematics	611	N521	4:00 P.M.
Physics	544	B505	4:00 P.M.
Psychology	501	A100	3:00 P.M.
Psychology	617	A110	11:00 A.M.
Zoology	335	A100	9:00 A.M.
Zoology	412	A100	8:00 A.M.

TABLE 7 Teaching_schedule.

Professor	*Department*	*Course_number*	*Room*	*Time*
Cruz	Zoology	335	A100	9:00 A.M.
Cruz	Zoology	412	A100	8:00 A.M.
Farber	Psychology	501	A100	3:00 P.M.
Farber	Psychology	617	A110	11:00 A.M.
Grammer	Physics	544	B505	4:00 P.M.
Rosen	Computer Science	518	N521	2:00 P.M.
Rosen	Mathematics	575	N502	3:00 P.M.

7.2 n元关系及其应用

SQL(Structured Query Language)

结构化查询语言

SELECT Departure_time

FROM Flights

WHERE Destination='Detroit'

TABLE 8 Flights.

Airline	*Flight_number*	*Gate*	*Destination*	*Departure_time*
Nadir	122	34	Detroit	08:10
Acme	221	22	Denver	08:17
Acme	122	33	Anchorage	08:22
Acme	323	34	Honolulu	08:30
Nadir	199	13	Detroit	08:47
Acme	222	22	Denver	09:10
Nadir	322	34	Detroit	09:44

7.2 二元关系

- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x, y \rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

7.2 二元关系

- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x，y\rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

7.2 二元关系

- 关系矩阵表示法

设集合$A=\{a_1,\ldots,a_m\}$,$B=\{b_1\ldots b_n\}$,R是A到B的关系,则R的关系矩阵是一个m×n阶的矩阵

$$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$$

其中$r_{ij}=1$,当$<a_i,b_j>\in R$

$=0$,当$<a_i,b_j>\notin R$

如果R是A上的关系时,则其关系矩阵是一个方阵

7.2 二元关系

例：$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{x,y,z\}$,$|A|=4$ $|B|=3$,

$R=\{<a,x>,<a,z>,<b,y>,<c,z>,<d,y>\}$

则M_R是4×3的矩阵

$$M_R = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

7.2 二元关系

- 关系表示方法
  - 枚举法（直观法、列举法）
    - xRy表示特定的序偶$\langle x, y\rangle \in R$
  - 谓词公式表示法（暗含法）
  - 关系矩阵表示法
  - 关系图表示法

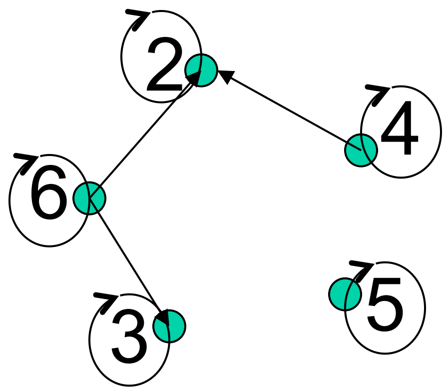
7.2 二元关系

- 关系图：$A=\{a_1,\dots,a_m\}$，$B=\{b_1,\dots,b_n\}$
  - 结点：m+n个空心点分别表示$a_1,\dots,a_m$和$b_1,\dots,b_n$
  - 有向边：如果$\langle a_i,b_j\rangle\in R$,则由结点$a_i$向结点$b_j$通一条有向弧,箭头指向$b_j$
  - 自回路：$\langle a_i,a_i\rangle\in R$,则画一条以$a_i$到自身的一条有向弧

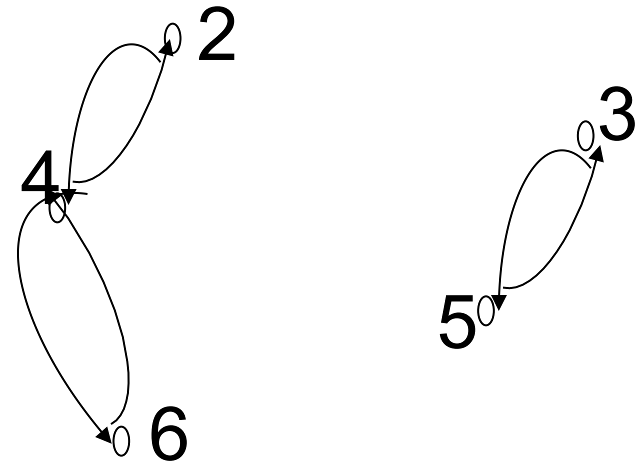
7.2 二元关系

- 例：$A=\{2,3,4,5,6\}$

(1)$R_1=\{<a,b>\mid a$是b的倍数$\}$



(2)$R_2=\{<a,b>\mid (a-b)^2\in A\}$

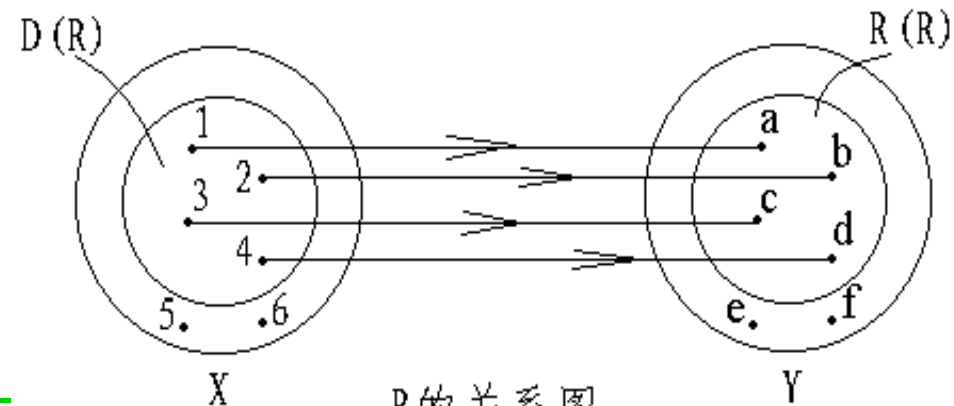


第七章：二元关系

- 第一节：有序对与笛卡儿积
- 第二节：二元关系
- **第三节：关系的运算**
- 第四节：关系的性质

7.3 关系的运算

- 二元关系的定义域和值域
  - 定义域：$domR = \{x \mid \exists y(<x, y> \in R)\}$
  - 值域：$ranR = \{y \mid \exists x(<x, y> \in R)\}$
- 例
  - ***X={1,2,3,4,5,6},Y={a,b,c,d,e,f}***
  - ***R={<1,a>,<2,b>,<3,c>,<4,d>}***
  - ***domR={1,2,3,4}***
  - ***ranR={a,b,c,d}***



R的关系图

7.3 关系的运算

- 二元关系的逆

$$R^{-1} = \{<x,y> | <y,x> \in R\}$$

  - ***R***$^{-1}$: 将***R***中的所有有序对的两个元素交换次序，|***R***|=|***R***$^{-1}$|
- 说明
  - ***R***$^{-1}$ 的关系矩阵是***R***的关系矩阵的转置

    $M_{R^{-1}}=(M_R)^T$
  - ***R***$^{-1}$的关系图是将R的关系图中的边改变方向

7.3 关系的运算

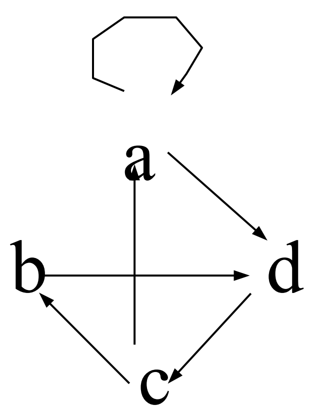
- 例：
  - $R=\{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle\}$
  - $R^{-1}=\{\langle a,a\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$

$$M_R=\begin{matrix}1&0&0&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{matrix} \qquad M_{R^{-1}}=M_R^T=\begin{matrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{matrix}$$

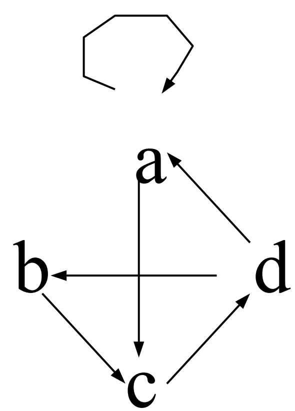
7.3 关系的运算

- 例：
  - $R=\{\langle a,a\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle\}$
  - $R^{-1}=\{\langle a,a\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$

R的关系图



R^{-1}的关系图



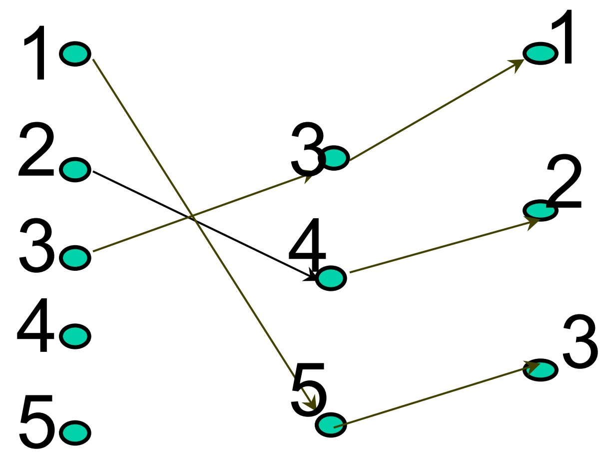
7.3 关系的运算

- 关系的右复合

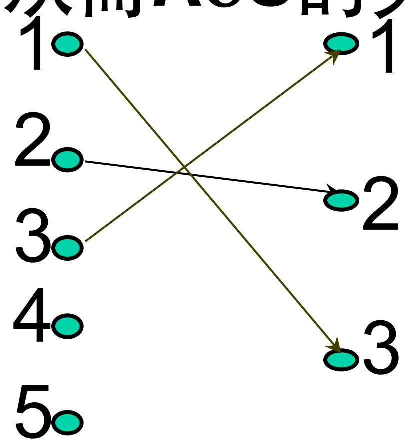
$$F \circ G = \{<x,y>| \exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)\}$$

- 例
  - $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5\}, C=\{1,2,3\}$
  - $R=\{<x,y>|x+y=6\}$
    $=\{<1,5>,<2,4>,<3,3>\}$
  - $S=\{<y,z>|y-z=2\}$
    $=\{<3,1>,<4,2>,<5,3>\}$
  - $R \circ S=\{<1,3>,<2,2>,<3,1>\}$

- 例（续）



从而***R***o***S***的关系图



7.3 关系的运算

- 例： $A=\{a,b,c,d,e\}$
  - $R=\{<a,b>,<c,d>,<b,b>\}$
  - $S=\{<d,b>,<b,e>,<c,a>\}$
  - $R\circ S=\{<a,e>,<c,b>,<b,e>\}$
  - $S\circ R=\{<d,b>,<c,b>\}$
  - $R\circ R=\{<a,b>,<b,b>\}$
  - $S\circ S=\{<d,e>\}$
- 注意：$R\circ S\neq S\circ R$

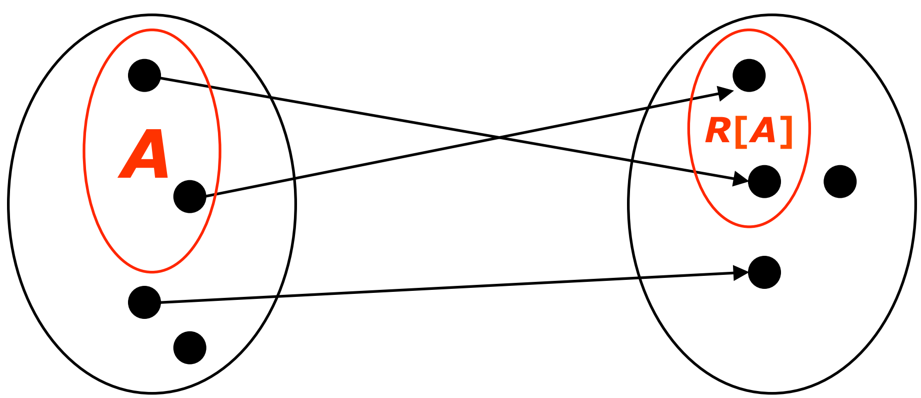
7.3 关系的运算

- 定义：***R***是二元关系，***A***是集合
  - ***R*在*A*上的限制**

    $\{<x,y>|\ xRy \wedge x \in A\}$

  - ***A*在*R*下的像**

    ***R*[*A*]=*ran*(*I*↾ *A*)**



7.3 关系的运算

- 定理：设F是任意的关系，则
  - $(F^{-1})^{-1}=F$
  - $domF^{-1}=ranF$, $ranF^{-1}=domF$

7.3 关系的运算

- 定理：设F，G，H是任意的关系

  ① $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

  ② $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明：对任意的

$$<x, y>\in (F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<y, t>\in F \wedge <t, x>\in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(<x, t>\in G^{-1} \wedge <t, y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$

7.3 关系的运算

- 例
  - $R=\{<a,a>,<a,c>,<b,b>,<c,b>,<c,c>\}$
  - $S=\{<a,1>,<a,4>,<b,2>,<c,4>,<c,5>\}$
  - $R^{-1}=\{<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,c>\}$
  - $S^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<4,a>,<4,c>,<c,c>\}$
  - $S^{-1}\circ R^{-1}=\{<1,a>,<2,b>,<2,c>,<4,a>,<4,c>,<5,a>,<5,c>\}$
- $S^{-1}\circ R^{-1}=(R\circ S)^{-1}$

7.3 关系的运算

- 定理：设R为A上关系，则

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

- 定理：
  - $R \circ (S \cup T) = R \circ S \cup R \circ T$
  - $R \circ (S \cap T) \subseteq R \circ S \cap R \circ T$
  - $(S \cup T) \circ X = S \circ X \cup T \circ X$
  - $(S \cap T) \circ X \subseteq S \circ X \cap T \circ X$

7.3 关系的运算

- 证明 $R\circ(S\cup T)=R\circ S\cup R\circ T$

$\forall\langle x,z\rangle\in R\circ(S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in S\cup T)$

$\Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle\in R\land(\langle y,z\rangle\in S\lor\langle y,z\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \exists y((\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in S)\lor$
$(\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \exists y((\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in S))\lor$
$\exists y((\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in T))$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ S\lor\langle x,z\rangle\in R\circ T$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle\in R\circ S\cup R\circ T$

7.3 关系的运算

- **R的n次幂**
  - 记为R^n
  - $R^0 = I_A$
  - $R^{n+1}=R^n \circ R$
- 定理**:** 设R是集合A上的关系，$m,n \in N$
  - $R^m \circ R^n=R^{m+n}$
  - $(R^m)^n=R^{mn}$

7.3 关系的运算

- 例$R=\{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,4>,<4,5>\}$
  - $R^0=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$
  - $R^1=R$
  - $R^2=\{<1,1>,<2,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>\}$
  - $R^3=R^2 \cdot R$

    $=\{<1,2>,<2,1>,<1,4>,<2,3>,<2,5>\}$
  - $R^4=R^3 \cdot R^1$

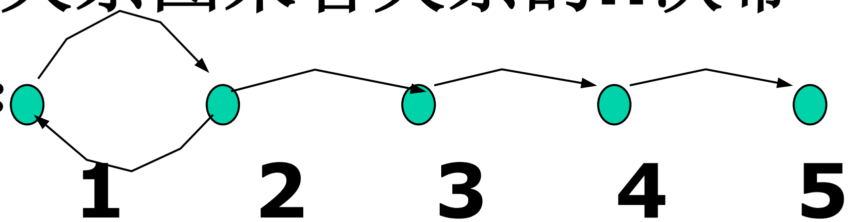
    $=\{<1,1>,<2,2>,<1,5>,<2,4>,<1,3>\}$
  - $R^5=R^4 \cdot R^1$

    $=\{<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,5>\}$

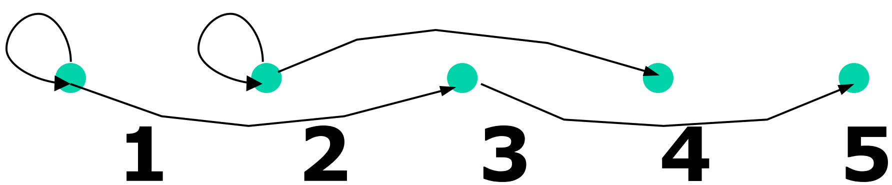
7.3 关系的运算

从关系图来看关系的n次幂

R:



R²是所有在***R***中通过二条边连接的点则在***R***²这两点间直接有条弧。



R³,***R***⁴…

7.3 关系的运算

- 定理：R是A上的二元关系，若存在自然数i和j，且$i<j$，使$R^i=R^j$
  - 对所有的$k\geq 0$，则$R^{i+k}=R^{j+k}$
  - 对所有的$k,m\geq 0$，则有$R^{i+md+k}=R^{i+k}$
  - 设$S=\{R^0,R^1,R^2,\ldots,R^{j-1}\}$，则$R$的每一次幂是$S$的元素，即对$n\in N$, $R^n\in S$

第七章：二元关系

第一节：有序对与笛卡儿积

第二节：二元关系

第三节：关系的运算

第四节：关系的性质

7.4 关系的性质

- 自反性
  - $\forall a \in A$，有$\langle a,a\rangle \in R$，R为A上的自反关系
- 反自反性
  - $\forall a \in A$，有$\langle a,a\rangle \notin R$，$R$为$A$上的反自反关系
- 例 $A=\{a,b,c\}$
  - $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$
  - $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$
  - $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

7.4 关系的性质

- 例：R是Z_+上的整除关系，则R具有自反性
  - 证明：$\forall x \in Z_+$，x能整除x，
  - $\therefore \langle x,x \rangle \in R$，$\therefore$R具有自反性
- 其它≤，≥关系，均是自反关系

7.4 关系的性质

- 例：**N**上的互质关系是反自反关系。
  - 证明：$\forall x \in N$，x与x是不互质的，
  - $\therefore \langle x,x\rangle \notin R$，$\therefore R$具有反自反关系。

- 实数上的<,>关系,均是反自反关系。

7.4 关系的性质

- 关系矩阵的特点
  - 自反关系的关系矩阵的对角元素均为**1**，
  - 反自反关系的关系矩阵的对角元素均为**0**。
- 关系图的特点?

- 定理：**R**是**A**上的关系，则：
  - **R**是自反关系的充要条件是$I_A \subseteq R$
  - **R**是反自反关系的充要条件是$R \cap I_A = \Phi$

7.4 关系的性质

- 对称性
  - $\forall a,b \in A$,如果$\langle a,b\rangle \in R$,则必有$\langle b,a\rangle \in R$
  - R为A上的对称关系
- 例
  - $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
  - R_1是对称的
  - $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
  - R_2是对称的
  - $R_3=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$
  - R_3不是对称的

7.4 关系的性质

- 例：**R**是**N**上的互质关系,**R**具有对称性

- 关系矩阵特点
  - 对称关系的关系矩阵是对称矩阵
- 关系图特点？

- 定理：　**R**在**A**上对称当且仅当$R=R^{-1}$

7.4 关系的性质

- **反对称性**
  - $\forall a,b \in A$,如果$\langle a,b\rangle \in R$且$\langle b,a\rangle \in R$,则必有$a=b$, R是A上的反对称关系
  - $\forall a,b \in A$,如$a \neq b$,$\langle a,b\rangle \in R$,则必有$\langle b,a\rangle \notin R$
- **例: $A=\{a,b,c\}$**
  - $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$
  - $S=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$
  - $T=\{\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$
  - R,S是反对称的,T不是反对称的

7.4 关系的性质

- 例: 实数集合上≤关系是反对称关系
  - ∀x,y∈实数集,如x≠y,且x≤y,则y≤x不成立
- 例≥,<,>关系,均是反对称关系
- 反对称关系矩阵和关系图特点?
- 定理: R在A上反对称当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

7.4 关系的性质

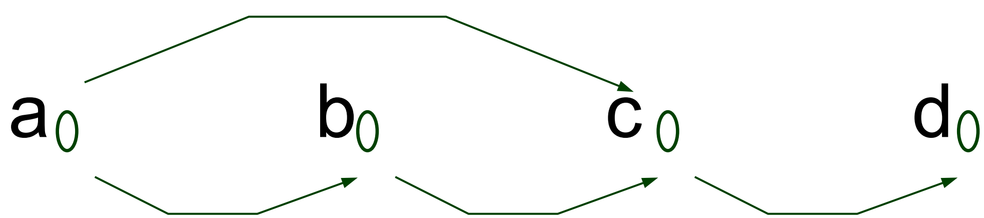
- 传递性
  - $\forall a,b,c \in A$,如果$<a,b> \in R, <b,c> \in R$，必有$<a,c> \in R$，称R为A上的传递关系
- 例
  - $R_1 = \{<x,y>,<z,x>,<z,y>\}$
  - 是传递关系
  - $R_2 = \{<a,b>,<c,d>\}$
  - 是传递关系
  - $R_3 = \{<a,b>,<b,a>\}$
  - 不是传递关系

7.4 关系的性质

- 例:整除关系D_{Z_+}是Z_+上的传递关系。
  - $\forall x,y,z\in Z_+$,如$<x,y>\in D_{Z_+}$,$<y,z>\in D_{Z_+}$,即x能整除y,且y能整除z,则必有x能整除z,$<x,z>\in D_{Z_+}$
- 例:P(A)上的包含关系⊆具有传递性。
  - 若$u\subseteq v$,$v\subseteq w$,则必有$u\subseteq w$
- 例:实数集上的≤关系具有传递性。
  - 若$x\le y$,$y\le z$必有$x\le z$

7.4 关系的性质

- 传递关系关系图特点
  - 如果结点**a**能通过有向边组成的有向路径通向结点**x,**则**a**必须有有向边直接指向**x,**否则**R**就不是传递的
- 例**R={<a,b>,<b,c>,<c,d>,<a,c>}**



- 定理：**R**在**A**上传递当且仅当**R** $\circ$ **R** $\subseteq$ **R**

7.4 关系的性质

自　反：$\forall x(x\in X \to xRx)$

反自反：$\forall x(x\in X \to x\not{R}x)$

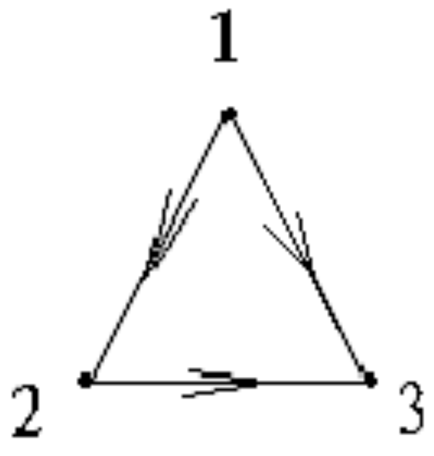
对　称：$\forall x\forall y(x\in X \wedge y\in X \wedge xRy \to yRx)$

反对称：$\forall x\forall y(x\in X \wedge y\in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$

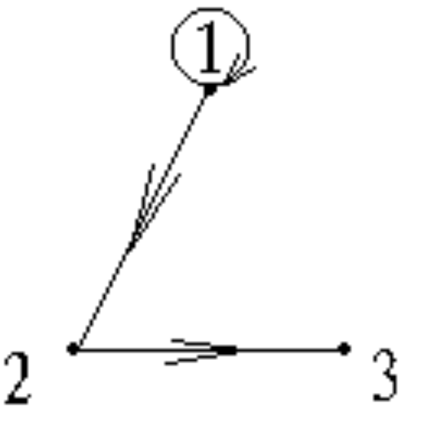
传　递：$\forall x\forall y\forall z(x\in X \wedge y\in X \wedge z\in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$

7.4 关系的性质

- 例 $X=\{1,2,3\}$
  - $R_1=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$



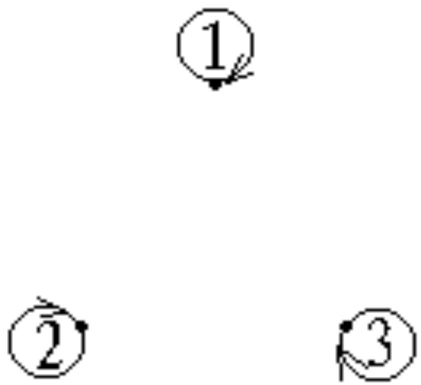
- 反自反
- 反对称
- 可传递



- $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>\}$
- 反对称

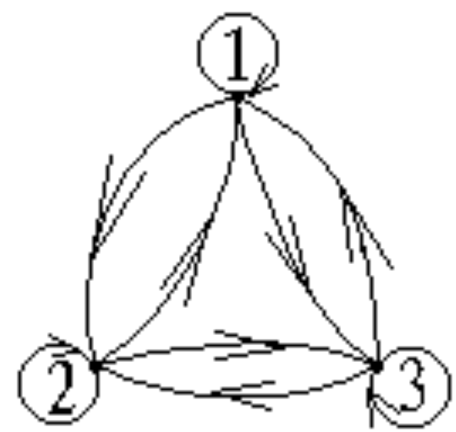
7.4 关系的性质

- $R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$



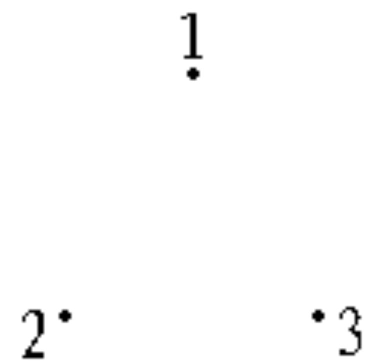
  - 自反，对称，反对称，可传递的

- $R_4= E_x$ 自反，对称，可传递的



7.4 关系的性质

- **X={1,2,3}, R_5= ∅**
  - 反自反的，对称的，反对称的，可传递的



- 若**X=** ∅ ，**X**上的空关系
  - 自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

关系性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

关系性质和运算之间的联系

- R_1,R_2传递$\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$传递

证明:

$\forall x,y,z \in A$,

$x(R_1 \cap R_2)y \wedge y(R_1 \cap R_2)z$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge yR_1z \wedge xR_2y \wedge yR_2z$

$\Rightarrow xR_1z \wedge xR_2z \Leftrightarrow x(R_1 \cap R_2)z$

$\therefore$ R_1,R_2传递$\Rightarrow$ $R_1 \cap R_2$传递.

第七章：二元关系

- 第一节：有序对与笛卡儿积
- 第二节：二元关系
- 第三节：关系的运算
- 第四节：关系的性质
- **第五节：关系的闭包**
- 第六节：等价关系与划分
- 第七节：偏序关系

7.5 关系的闭包

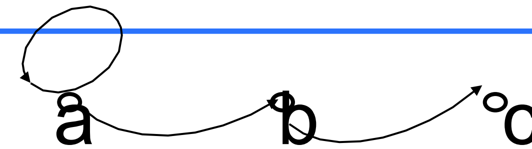
- 定义　R是非空集合A上的关系,若A上另外有一个关系R′满足如下三条,
  - R′是自反的(对称的，传递的）
  - $R \subseteq R'$
  - A上任何一个满足以上两条的关系R″，均有$R' \subseteq R''$，称关系R′为R的自反(对称,传递)闭包,记作r(R),(s(R),t(R))

7.5 关系的闭包

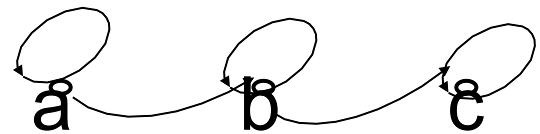
- 解释
  - R′是在R的基础上添加有序对
  - 添加元素的目的是使R′具有自反性(对称性,传递性)
  - 添加后使之具有自反性(对称性,传递性)的所有关系中R′是最小的一个

7.5 关系的闭包

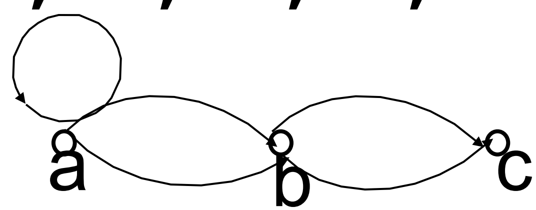
- 例A={a,b,c}



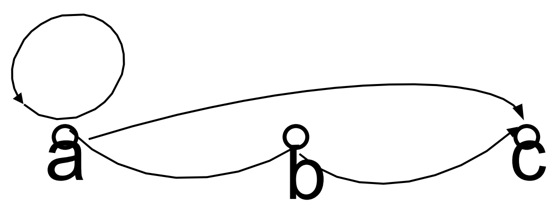
  R={<a,a>,<a,b>,<b,c>}



  - 自反闭包r(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<b,b>,<c,c>}



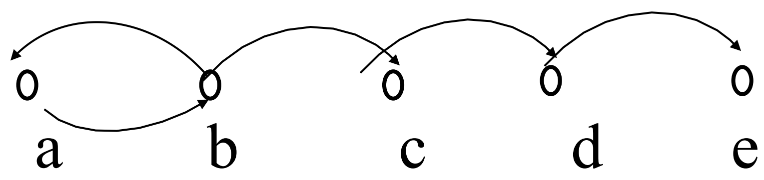
  - 对称闭包s(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>}



  - 传递闭包t(R)
  - {<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>}

7.5 关系的闭包

- 例R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,e>}， 求R的传递闭包



7.5 关系的闭包

- 定理 R是非空集合A上的关系,则$r(R)=R\cup I_A$

证明:

- $R\subseteq R\cup I_A$
- $R\cup I_A$是自反的.
- 设R''满足$R\subseteq R''$,R''是自反的,$\forall\langle a,b\rangle\in R\cup I_A$

  则$\langle a,b\rangle\in R$或$\langle a,b\rangle\in I_A$

  如$\langle a,b\rangle\in R$,由$R\subseteq R''$知$\langle a,b\rangle\in R''$

  如$\langle a,b\rangle\in I_A$,由$R''$的自反性知$\langle a,b\rangle\in R''$。

  均有$\langle a,b\rangle\in R''$

  $\therefore R\cup I_A\subseteq R''$

7.5 关系的闭包

- 定理：设R是非空集A的关系,则$s(R)=R\cup R^{-1}$
- 证明:
  - $R\subseteq R\cup R^{-1}$满足定义第2条
  - $\forall\langle a,b\rangle\in R\cup R^{-1}$

    $\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^{-1}$

    $\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R^{-1}\vee\langle b,a\rangle\in R$

    $\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R\cup R^{-1}$

    $\therefore R\cup R^{-1}$是对称的

7.5 关系的闭包

❖如$R\subseteq R''$,且R''是对称的

$\forall\langle a,b\rangle\in R\cup R^{-1}$

$\langle a,b\rangle\in R$或$\langle a,b\rangle\in R^{-1}$

如$\langle a,b\rangle\in R$,由$R\subseteq R''$,则$\langle a,b\rangle\in R''$

如$\langle a,b\rangle\in R^{-1}$,则$\langle b,a\rangle\in R$,则$\langle b,a\rangle\in R''$

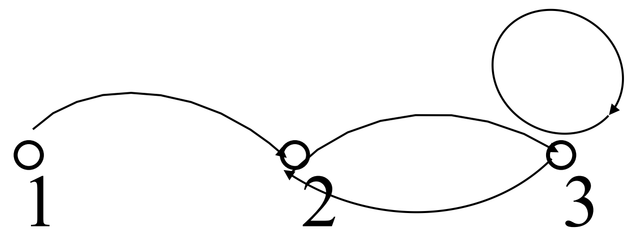
因R''对称

$\therefore\langle a,b\rangle\in R''$,$\therefore R\cup R^{-1}\subseteq R''$

满足定义第3条

7.5 关系的闭包

- 例:设$A=\{1,2,3\}$,A上的关系R如图,求r(R),s(R)



解:$R=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$

$r(R)= R\cup I_A$

$=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,2>,<1,1>\}$

$s(R)= R\cup R^{-1}$

$=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>,<2,1>\}$

7.5 关系的闭包

定理：设R是非空集合A上的关系，

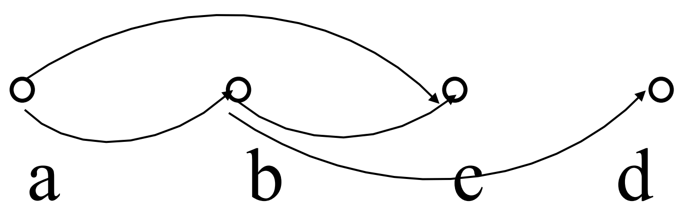
则 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup \ldots$

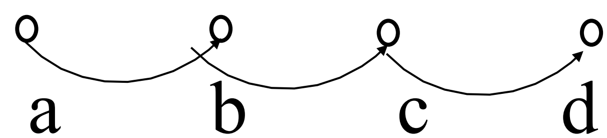
推论：设A是非空有限集，R是集合A上的二元关系，则存在正整数m使得

则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{m} R^i = R \cup R^2 \cup \ldots R^m$

7.5 关系的闭包

- 例 $A=\{a,b,c,d\}$
  - $R=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>,<b,d>\}$
  - $S=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>\}$,求$t(R),t(S)$





- 解:$R^2=\{<a,c>,<a,d>\},R^3=\varnothing$

$\therefore t(R)=R\cup\{<a,c>,<a,d>\}$

$S^2=\{<a,c>,<b,d>\},S^3=\{<a,d>\},S^4=\varnothing$

$\therefore t(S)=S\cup\{<a,c>,<b,d>\}\cup\{<a,d>\}$

7.5 关系的闭包

- 定理：设**X**是一集合，**R**是**X**上的二元关系，则有：
  - **R**是自反的当且仅当**r(R)＝R**；
  - 若**R**是对称的当且仅当**s(R)＝R**；
  - 若**R**是可传递的当且仅当**t(R)＝R**。

7.5 关系的闭包

- 定理：设**X**是集合，$\mathbf{R_1}$和$\mathbf{R_2}$是**X**上的二元关系， $\mathbf{R_1 \subseteq R_2}$，则有：
  - $\mathbf{r(R_1) \subseteq r(R_2)}$
  - $\mathbf{s(R_1) \subseteq s(R_2)}$
  - $\mathbf{t(R_1) \subseteq t(R_2)}$

7.5 关系的闭包

- 定理：设**X**是一集合，**R**是**X**上的二元关系，则有：
  - 若**R**是自反的，则**s(R),t(R)**也自反
  - 若**R**是对称的，则**r(R),t(R)**也对称
  - 若**R**是可传递的，则**r(R)**也可传递

7.5 关系的闭包

- 若**R**是传递的，**s(R)**不一定是传递的。

反例:**R={<a,b>,<c,b>}**，**R**是传递的

s(R)={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>}，**s(R)**不是传递的

7.5 关系的闭包

常用下列符号表示一些闭包：

“**R**加” $R^{+}=t(R)$ 传递闭包，

$$R^{+}=\bigcup_{i=1}^{n}R^{i}=R^{1}\cup R^{2}\cup\cdots\cup R^{n}$$

“**R**星” $R^{*}=tr(R)=rt(R)$ 自反传递闭包，

$$R^{*}=R^{0}\cup t(R)=I_{x}\cup\bigcup_{i=1}^{n}R^{i}$$

Warshall 算法

Warshall's Algorithm(1)

- **Warshall's algorithm**
  - **Stephan Warshall**
  - **1960**
  - **efficient method for computing the transitive closure of a relation.**
- **Naive Algorithm**
  - **$O(n^4)$**
- **Warshall's algorithm**
  - **$O(n^3)$**

Warshall's Algorithm(2)

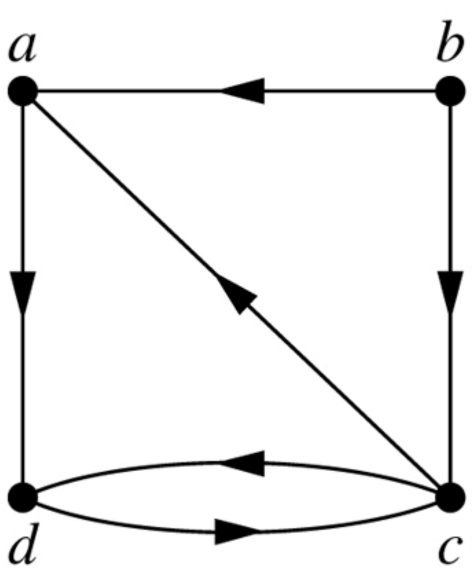
- **Interior vertices(内点)**
  - **If a, $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, b is a path, its interior vertices are $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$**
  - **all the vertices of the path that occur somewhere other than as the first and last vertices in the path.**

Warshall's Algorithm(3)

- Suppose that R is a relation on a set with n elements.
- Warshall's algorithm is based on the construction of a sequence of zero-one matrices.
- These matrices are W_0, W_1,…., W_n, where $W_0=M_R$ is the zero-one matrix of this relation, and $W_k=[w_{ij}^{(k)}]$, where $w_{ij}^{(k)}$ =1 if there is a path from v_i to v_j such that all the interior vertices of this path are in the set {v_1, v_2,…., v_k} and is 0 otherwise.

Example

- Let R be the relation with directed graph shown in figure. Find the matrices W_0, W_1, W_2, W_3, W_4. The Matrix W_4 is the transitive closure of R.



$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad w_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

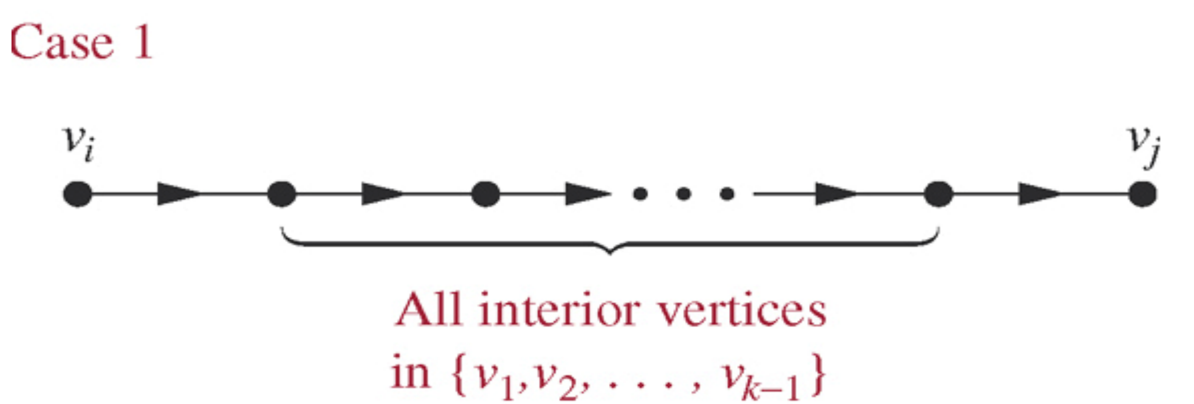
Solution

- 设已有$W^{k-1}=[s_{ij}]$,计算$W^K=[t_{ij}]$:

  $t_{ij}=1$　当且仅当

(1) $s_{ij}=1$

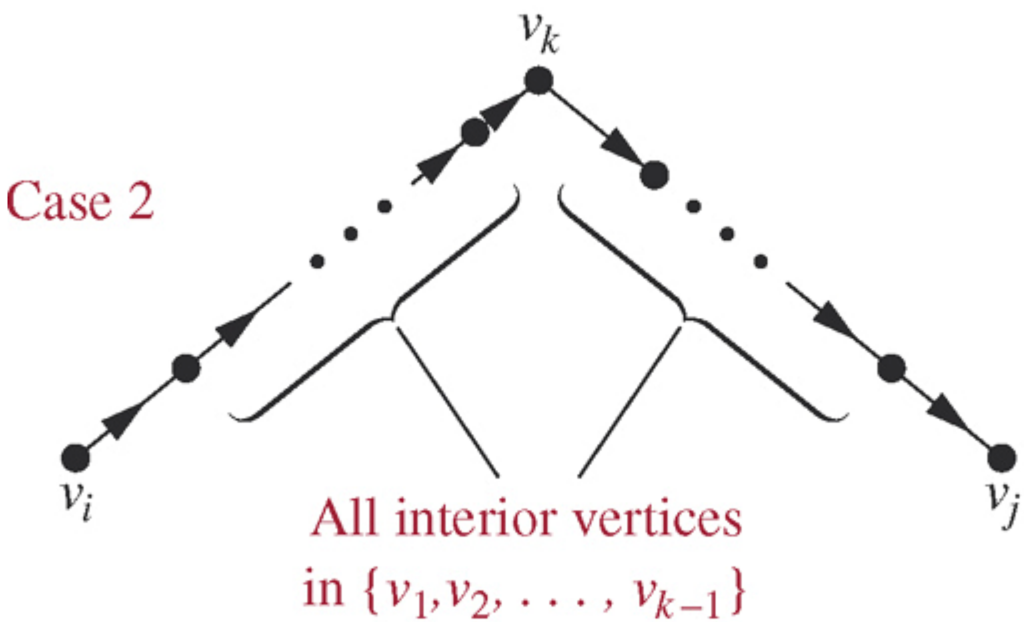
//v_i到v_j有路径,内点在 $\{v_1,v_2,\ldots, v_{k-1}\}$之中。



Solution

(2) $s_{ik}=1$且$s_{kj}=1$.

// v_i到v_j有路径经过v_k，其余内点在$\{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}\}$之中。



Solution

引理 设 $W_k=[w_{ij}^{k}]$ 是**0-1**矩阵，它在**(i,j)**位置上为**1**，当且仅当存在一条从v_i到v_j的路径，其内点取自集合$\{v_1,v_2,\ldots,v_{k-1},v_k\}$，那么

$$w_{ij}^{[k]}=w_{ij}^{[k-1]}\vee(w_{ik}^{[k-1]}\wedge w_{kj}^{[k-1]})$$

其中**i,j**和**k**是不超过**n**的正整数。

Warshall's Algorithm(4)

- **Procedure Warshall(M_R:n x n zero -one matrix)**

W:= M_R

for k:= 1 to n

begin

for i:=1 to n

begin

for j:=1 to n

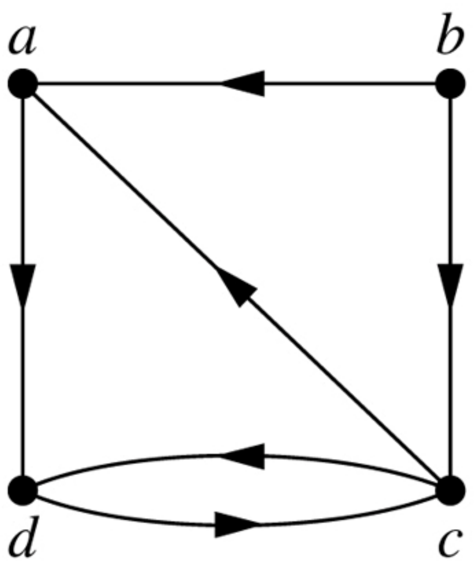
$$w_{ij} = w_{ij} \vee (w_{ik} \wedge w_{kj})$$

end

end{W=[w_{ij}] is M_R}

Warshall's Algorithm(5)

- **Let v_1=a, v_2=b, v_3=c, v_4=d. W_0 is the matrix of the relation.**



$$\mathbf{w_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad w_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$